ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.371.25

ВОЛНОВОЙ ПОДХОД К РАССЕЯНИЮ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Н. Д. Борисов

В ВКБ-приближении найдено выражение для поля волны в произвольном нерегулярном рефракционном волноводе. Исследован эффект трансформации энергии по модам, связанный с наличием неадиабатических неоднородностей. Рассмотрен процесс диффузного расплывания по модам в присутствии случайных неоднородностей в ионосферных каналах.

Хорошо известно, что ионосферные неоднородности различных масштабов в значительной мере определяют процесс волноводного распространения коротких радиоволн. Если свойства среды медленно меняются вдоль трассы, для описания этого процесса удобно использовать подход, основанный на методе адиабатического инварианта [1]. В этом случае поле в любом сечении волновода можно представить в виде суперпозиции так называемых адиабатических мод [2]. После прохождения волной неоднородного участка каждая адиабатическая мода переходит в соответствующую ей моду регулярного волновода. Если же в канале присутствуют неадиабатические неоднородности*, то необходимо более общее рассмотрение, так как в этом случае отсутствует отмеченное выше сохранение номера моды.

В последнее время вопрос об особенностях волноводного распространения в условиях нарушения адиабатичности рассматривался различными методами [3–5]. Так, в [3, 4] с помощью лучевого метода изучался вопрос о «раскачке» лучей и преобразовании волн на нерегулярном участке. В работах [5] определялось поле в канале с помощью асимптотического интегрирования системы уравнений, возникающих в методе поперечных сечений. Однако конкретного выражения для поля в произвольном рефракционном волноводе получено не было.

В настоящей работе найдено в явном виде представление для поля в произвольном плавноменяющемся рефракционном волноводе. На основе полученного решения анализируется вопрос о влиянии крупномасштабных неадиабатических неоднородностей на ионосферное распространение коротких радиоволн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в ионосферном волновом канале распространяется электромагнитная волна. Профиль канала, как известно, определяется видом эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(z, x) = \varepsilon(z, x) + 2z/R_0$ и зависит, вообще говоря, от высоты z и продольной координаты x. Здесь $\varepsilon = 1 - \omega_{p_e}^2/\omega^2$, ω_{p_e} — плазменная частота, ω — частота волны. Поле коротких радиоволн в таком канале можно найти, решая в общем случае систему двух связанных уравнений для компонент векторного потенциала $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_z\}$ [2]. Однако поскольку в условиях ионосферы

* Неадиабатическими мы будем называть неоднородности, продольный размер которых меньше или порядка периода осцилляции луча в канале.

неоднородность вдоль трассы, как правило, значительно меньше, чем по высоте $\left|\frac{\partial\varepsilon/\partial x}{\partial\varepsilon/\partial z}\right| \ll 1$, приближенно можно ограничиться решением одного уравнения (см. [1], Приложение III):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k_0^2 \varepsilon'(z, x) A = 0. \tag{1}$$

Представим входящую в (1) функцию $\varepsilon'(z, x)$ в виде $\varepsilon'(z, x) = \varepsilon_0(z) + \delta\varepsilon(z, x)$, где $\delta\varepsilon(z, x)$ определяет вклад неоднородностей в диэлектрическую проницаемость. Положим, что в области $x \leqslant x_0$ неоднородности отсутствуют, т. е. волновод является регулярным. При этом поле, как известно, может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод $\varphi_n(z)$:

$$A = \sum_n a_n \varphi_n(z) \exp(ik_n x). \tag{2}$$

Функции φ_n удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2\varphi_n}{dz^2} + [k_0^2 \varepsilon_0(z) - k_n^2]\,\varphi_n = 0, \tag{3}$$

а продольные волновые числа k_n определяются из условия существования стоячей волны, которое в ВКБ-приближении (при $n \gg 1$) имеет вид

$$\int_{z_1}^{z_2} (k_0^2 \varepsilon_0(z) - k_n^2)^{1/2} dz = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$z_{1,2}$ — точки поворота: $k_0^2 \varepsilon_0(z_{1,2}) - k_n^2 = 0$.

Ясно, что поле при произвольном значении продольной координаты x нетрудно представить в виде, аналогичном (2), если знать частные решения $\psi_n(z, x) \exp(ik_n x)$ волнового уравнения (1), совпадающие с $\varphi_n(z) \exp(ik_n x)$ при $x \leqslant x_0$. Поэтому основной задачей для нас является нахождение функций $\psi_n(z, x)$.

Будем считать, что характерный размер l неоднородности достаточно велик по сравнению с длиной волны, $lk_0 \sim lk_n \gg 1$*. Это позволяет перейти от уравнения (1) к параболическому:

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial z^2} + [k_0^2(\varepsilon_0(z) + \delta\varepsilon(z, x)) - k_n^2]\,\psi_n + i2k_n \frac{\partial\psi_n}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Нас будут интересовать решения уравнения (5) с большими номерами $n \gg 1$, соответствующие локализованным в канале состояниям $|\psi_n(z, x)| \to 0$, $|z| \to \infty$ и удовлетворяющие начальным условиям $\psi_n(z, x) = \varphi_n(z)$ при $x \leqslant x_0$.

Отметим, что функции ψ_n, вообще говоря, не образуют ортогональной системы. Действительно, из (5) нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned}(k_n - k_m) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dz - i\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dz = \\ = i\frac{k_n - k_m}{k_n + k_m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_m^* \frac{\partial\psi_n}{\partial x} - \psi_n \frac{\partial\psi_m^*}{\partial x}\right) dz,\end{aligned} \tag{6}$$

* Основные условия применимости получаемых результатов содержатся в разд. 3.

откуда следует, что для ортогональности необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_m^*\frac{\partial\psi_n}{\partial x}-\psi_n\frac{\partial\psi_m^*}{\partial x}\right)dz=0.$$

Это условие, как показывает получаемое ниже решение, не выполняется.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (5)

Поскольку неоднородности достаточно плавные по сравнению с длиной волны, для построения функций ψ_n в канале можно использовать ВКБ-приближение. Вначале найдем частные решения уравнения (5) $\psi_n^{(\pm)}$, соответствующие бегущим по z волнам. Для этого будем искать $\psi_n^{(\pm)}$ в виде

$$\psi_n^{(\pm)}(z, x)=\exp\left(\pm i\int_{z_1}^{z}p_n dz'\mp i\frac{\pi}{4}\right)\frac{F_n^{(\pm)}(z, x)}{\sqrt{p_n}}, \tag{7}$$

где $p_n=(k_0^2\varepsilon_0(z)-k_n^2)^{1/2}$ — поперечное волновое число в отсутствие неоднородности, а $F_n^{(\pm)}$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Подставляя $\psi_n^{(\pm)}$ в (5), приходим к уравнению для $F_n^{(\pm)}$:

$$\frac{\partial^2 F_n^{(\pm)}}{\partial z^2}-\frac{\partial\ln p_n}{\partial z}\frac{\partial F_n^{(\pm)}}{\partial z}\pm i2p_n\frac{\partial F_n^{(\pm)}}{\partial z}+i2k_n\frac{\partial F_n^{(\pm)}}{\partial x}+k_0^2\delta\varepsilon F_n^{(\pm)}=0. \tag{8}$$

Всюду в канале, за исключением малых окрестностей точек поворота $z-z_1<\delta z$, $z_2-z<\delta z$, будем считать выполненными неравенства

$$\left|\frac{\partial\ln U}{p_n\partial z}\right|\ll 1, \qquad \left|\frac{\delta\varepsilon(z, x)}{\Delta\varepsilon(z)}\right|\ll 1, \tag{9}$$

где $\Delta\varepsilon(z)$ — глубина канала в точке z, U — некоторый параметр, характеризующий канал. В силу (9) внутри канала можно пренебречь в уравнении (5) членами $\frac{\partial^2F_n}{\partial z^2}$, $\frac{\partial\ln p_n}{\partial z}\frac{\partial F_n}{\partial z}$ по сравнению с остальными. Получаемый результат подтверждает малость отброшенных членов. В итоге имеем уравнение первого порядка

$$\pm p_n\frac{\partial F_n^{(\pm)}}{\partial z}+k_n\frac{\partial F_n^{(\pm)}}{\partial x}-i\frac{k_0^2}{2}\delta\varepsilon(z, x)F_n^{(\pm)}=0. \tag{10}$$

Уравнение (10) для каждого n описывает движение волны между двумя точками поворота в одном определенном направлении. Поскольку нас не интересует лучевое описание поля, мы не будем решать (10) интегрированием по траектории, а воспользуемся следующим формальным приемом.

Введем вместо z новую независимую переменную $\zeta=k_n\int_{z_1}^{z}\frac{dz'}{p_n(z')}$, которая однозначно связана с z и меняется в пределах $0\leqslant\zeta\leqslant L_n/2$, когда z пробегает значения от z_1 до z_2. Отметим, что L_n совпадает с периодом осцилляции (шагом) луча, соответствующего n-й моде, в отсутствие неоднородности. Возмущение $\delta\varepsilon(z, x)$ как функция переменной ζ определено внутри канала. Точный вид $\delta\varepsilon$ вне канала для нас не важен, так как в этой области решение быстро затухает. Продолжим четным образом $\delta\varepsilon(\zeta(z), x)$ вне интервала $0 \leqslant \zeta \leqslant L_n/2$ и проведем разложение в ряд Фурье по ζ:

$$\frac{k_0^2}{2k_n}\delta\varepsilon(\zeta, x) = \sum_{s\geqslant 0} c_s(x)\cos\frac{2\pi s\zeta}{L_n}. \tag{11}$$

Воспользуемся представлением (11) для нахождения функций $F_n^{(\pm)}$ внутри канала, т. е. в полосе $0 < \zeta < L_n/2$.

Вводя вместо $F_n^{(\pm)}$ новую неизвестную функцию $f^{(\pm)}$ так, что

$$f^{(\pm)} = \ln F_n^{(\pm)} - i\int\limits_{-\infty}^{x} c_0(x')\,dx', \tag{12}$$

и подставляя (12) в уравнение (10), получим

$$\pm\frac{\partial f^{(\pm)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial f^{(\pm)}}{\partial x} - i\sum_{s>0} c_s(x)\cos\frac{2\pi s\zeta}{L_n} = 0. \tag{13}$$

Нас интересует решение уравнения (13), которое удовлетворяет условию $f^{(\pm)}(\zeta, x < x_0) = 0$. Последнее означает, что до подхода волны к неоднородному участку в канале распространяется n-мода регулярного волновода. Соответствующее решение нетрудно найти методом разделения переменных:

$$f^{(\pm)}(\zeta, x) = i\sum_{s>0}\left[\cos\frac{2\pi s\zeta}{L_n}\int\limits_{-\infty}^{x} c_s(x')\cos\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx' + \right.$$
$$\left. + \sin\frac{2\pi s\zeta}{L_n}\int\limits_{-\infty}^{x} c_s(x')\sin\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx'\right]. \tag{14}$$

Возвращаясь теперь к (7), построим интересующие нас собственные функции в виде

$$\psi_n = \frac{b_n}{2}(\psi_n^{(+)} + \psi_n^{(-)}) = \frac{b_n}{\sqrt{p_n}}\cos\left[\int\limits_{z_1}^{z} p_n\,dz' + \sum_{s>0}\sin\frac{2\pi s\zeta}{L_n}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{x} c_s(x')\sin\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx' - \frac{\pi}{4}\right]\exp\left[i\sum_{s\geqslant 0}\cos\frac{2\pi s\zeta}{L_n}\times\right. \tag{15}$$
$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{x} c_s(x')\cos\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx'\right].$$

Коэффициенты b_n определяются нормировкой.

Выражение (15) состоит из двух множителей: первый соответствует стоячей волне при наличии возмущения, а второй описывает фазовые поправки, связанные с этим возмущением. Появление фазового множителя, обусловленного продольной неоднородностью среды, характерно также и для построенных ранее адиабатических мод [2]. Однако, в отличие от последних, в (15), как показано в разд. 4, содержится информация о «раскачке» мод, появляющейся при наличии неоднородности.

Отметим, что в решении (15) множитель $\frac{b_n}{\sqrt{p_n}}$ написан в нулевом приближении по $\delta\varepsilon/\Delta\varepsilon$, в то время как фазовые множители содержат члены первого порядка малости. Однако в случае, когда набег фазы за счет неоднородности в канале достаточно велик,

$$\left[\int_{-\infty}^{x} c_s(x')\cos\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx'\right]^2+\left[\int_{-\infty}^{x} c_s(x')\sin\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx'\right]^2\gg 1,$$

$$x\to\infty,$$

именно фазовыми множителями определяются эффекты трансформации, рассмотренные в разд. 4.

Подчеркнем также, что вблизи границ и вне канала ($z<z_1+\delta z$, $z>z_2-\delta z$) решение (15) неприменимо. Тем не менее, если разложить ψ_n по собственным функциям регулярного волновода, то можно получить приближенное представление для решения вне канала и, в частности, убедиться в его экспоненциальном затухании при $z<z_1$ и $z>z_2$.

Рассмотрим теперь различные частные случаи, описываемые (15). В области $x\leqslant x_0$ все коэффициенты c_s обращаются в нуль, при этом функции ψ_n переходят в собственные моды регулярного волновода:

$$\psi_n(z,\ x\leqslant x_0)=\frac{b_n}{\sqrt{p_n}}\cos\left(\int_{z_1}^{z} p_n dz'-\frac{\pi}{4}\right). \tag{16}$$

В адиабатическом приближении, когда $c_s(x)$ плавно меняются по сравнению с $\exp\left(i\dfrac{2\pi s x}{L_n}\right)$, решение (15) можно преобразовать, используя интегрирование по частям. В частности, после однократного интегрирования аргумент у косинуса принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\int_{z_1}^{z} p_n dz'+\sum_{s>0}\frac{L_n}{2\pi s}c_s(x)\sin\frac{2\pi s\zeta}{L_n}-\frac{\pi}{4}=\\&=\int_{z_1}^{z}[p_n^2+k_0^2\delta\varepsilon(z',\ x)-2k_n c_0]^{1/2}dz'-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{17}$$

Аналогично можно преобразовать с помощью двукратного интегрирования по частям и другой фазовый множитель. В результате получаем решение, которое с точностью до первого порядка по $\delta\varepsilon/\Delta\varepsilon$ совпадает с известным выражением [2]

$$\begin{aligned}\psi_n=\frac{b_n}{\sqrt{p_n}}&\cos\left[\int_{z_1}^{z}(p_n^2+k_0^2\delta\varepsilon-2k_n c_0)^{1/2}dz'-\frac{\pi}{4}\right]\times\\&\times\exp\left[-ik_n\int_{z_1}^{z}\frac{dz'}{p_n}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_1}^{z'}(p_n^2+k_0^2\delta\varepsilon-2k_n c_0)^{1/2}dz''\right].\end{aligned}\tag{18}$$

Обратимся теперь к модели параболического канала $\varepsilon_0(z)=$ $=\varepsilon(z_c)-\dfrac{1}{2}\varepsilon''(z-z_c)^2$, $\delta\varepsilon=\alpha(x)(z-z_c)$, для которой существует точное решение параболического уравнения (5) при произвольной зависимости $\alpha(x)$ [6]. Благодаря специальному виду возмущения $\delta\varepsilon$ в сумме (11), как показано в [7], остается лишь одно слагаемое с $s=1$. При этом решение (15) в первом порядке по $\delta\varepsilon/\Delta\varepsilon$ совпадает с точным [7].

Отметим теперь следующее. Методы параболического уравнения и плавных возмущений применялись ранее для нахождения волновых функций нерегулярного волновода в случае адиабатически медленного изменения канала $L_n \ll l_x$ (l_x — продольный размер неоднородности) [2, 8]. Использованный выше прием дает возможность получить решение в общем случае, справедливое как в области $L_n \ll l_x$, так и для неадиабатических возмущений $L_n \gg l_x$. Разложение $\delta\varepsilon$ в ряд Фурье по ζ позволяет весьма просто найти фазовые поправки, обусловленные неоднородностями в канале, путем выделения в явном виде членов, ответственных за различные переходы: $s = 1$ на соседние уровни $n \pm 1$, $s = 2$ — на уровни $n \pm 2$ и т. д.

3. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы использовали параболическое уравнение (5) вместо волнового. Такая замена приводит к определенному ограничению на величину Δx, где можно пользоваться построенным решением. В отсутствие канала, когда ε_0 не зависит от z, получаем следующее условие [9]:

$$\Delta x \ll (k_0 \varepsilon_0^{1/2})^3 l^4, \tag{19}$$

l — размер неоднородности. В нашем случае необходимое условие можно найти тем же методом, что и в [9]. Действительно, перепишем волновое уравнение в интегральной форме:

$$\psi_n = \varphi_n - k_0^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\varepsilon(z', x') G(z-z', x-x') \psi_n(z', x') \times$$
$$\times \exp[-ik_n(x-x')] dz' dx',$$

где $G(z, x)$ — функции Грина в ВКБ-приближении. Представляя аналогично параболическое уравнение, найдем отличие в фазе в двух решениях: $\Delta\Phi = (\Delta k)^2 \frac{\Delta x}{k_0}$, $\Delta k = k - k_n$. Для собственных функций с малыми номерами изменение волнового числа Δk связано с углом рассеяния $\delta \sim (k_0 l)^{-1}$ соотношением $\Delta k \sim \delta^2 k_0$. При этом условие малости набега фазы $\Delta\Phi < 1$ в случае $\varepsilon_0 \approx 1$ приводит к (19). Для мод с большими номерами $n \gg 1$, как следует из закона сохранения волновых чисел до и после рассеяния, $\Delta k \sim \vartheta_n \delta k_0$, где ϑ_n — характерный угол наклона луча, соответствующего n-й моде. Условие (19) принимает несколько иной вид:

$$\Delta x < \frac{k_0 l^2}{\vartheta_n^2}, \qquad \delta < \vartheta_n \ll 1. \tag{20}$$

Оценим теперь величину отброшенного члена $\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2}$ в уравнении (8). Подставляя в (8) решение (12), (14), находим условия, при которых справедливо уравнение первого порядка (10) (ср. с (9)):

$$\left| \frac{\partial \ln \delta\varepsilon}{p_n \partial z} \right| \ll 1, \qquad \left| \frac{\delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon} \right| \ll 1. \tag{21}$$

Этим уравнением, строго говоря, можно пользоваться в полосе $z_1 + \delta z < z < z_2 - \delta z$. Если, однако, неоднородности достаточно слабые, так что их вклад в фазу волн в окрестности точек поворота, связанный со смещением последних, невелик,

$$\frac{1}{k_0^{1/2}\left|\dfrac{d\varepsilon_0}{dz}\right|_{z_{1,2}}}\left|\sum_s \frac{2\pi s}{L_n}\int\limits_{-\infty}^{x} c_s(x')\sin\frac{2\pi s(x-x')}{L_n}\,dx'\right|^{3/2} \ll 1, \qquad (22)$$

то построенные решения хорошо описывают волну во всем канале. Это подтверждается сопоставлением с известными частными решениями, проведенными в предыдущем разделе работы. Отметим, что малость набега фазы на неоднородностях в окрестности точек поворота (22) позволяет использовать выражение для ζ в форме (5), т. е. без учета возмущения.

4. «РАСКАЧКА» МОД НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Пусть в рефракционном волноводе распространяется волна, описываемая функцией $\psi_n(z, x)$. В области, где существует неоднородность, эта функция может быть разложена по набору ортогональных функций $\tilde{\varphi}_m(z, x)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_m}{\partial z^2} + \left[k_0^2(\varepsilon_0(z) + \delta\varepsilon(z, x)) - \tilde{k}_m^2\right]\tilde{\varphi}_m = 0 \qquad (23)$$

с собственными числами $\tilde{k}_m(x)$, определяемыми условием

$$\int\limits_{\tilde{z}_1}^{\tilde{z}_2} [k_0^2(\varepsilon_0(z) + \delta\varepsilon(z, x)) - \tilde{k}_m^2]^{1/2}\,dz' = \pi\left(m + \frac{1}{2}\right).$$

В случае адиабатической неоднородности (продольный размер $l > L_n$) после ее прохождения волной весь пакет мод $\sum\limits_m a_m(x)\,\tilde{\varphi}_m(z, x) = \psi_n(z, x)$ стягивается в одну моду регулярного волновода $\psi_n(z, x) = a_n(x)\,\varphi_n(z)$. Вклад остальных мод пакета оказывается при этом малым: $a_{m\neq n} \sim \exp\left(-\alpha_m\dfrac{l}{L_n}\right)$ ($\alpha_m \sim 1$ — некоторый числовой коэффициент) [7]. Отметим, что оценка количества мод, возбужденных на неоднородном участке для ионосферных условий, приведена в [1] (Приложение III).

Иная ситуация возникает в случае неоднородностей с размерами $l < L_n$, когда после прохождения неоднородного участка оказывается возбужденным некоторое число мод φ_m с интенсивностью $|a_m|^2$. Вопрос о нахождении коэффициентов a_m тесно связан с задачей о вариации адиабатического инварианта в системе. Рассмотрим его более подробно. Будем считать, что при некоторых $x > x_1$ волновод становится регулярным: $\delta\varepsilon(z, x > x_1) = 0$. Оценим количество нормальных мод $\varphi_m(z)$, возбужденных после прохождения неоднородности. Введем для этого коэффициенты разложения $a_m = \int \varphi_m(z)\,\psi_n(z, x)\,dz$ и получим уравнения, связывающие a_m с различными номерами при $x > x_1$. Для этого найдем с помощью (15) в явном виде производную $\partial\psi_n/\partial x$ и подставим в параболическое уравнение (5). Умножим далее полученное соотношение на $\varphi_m(z)$, а уравнение (3) — на $\psi_n(z, x)$, проинтегрируем по сечению волновода и вычтем одно выражение из другого. В результате находим искомое уравнение

$$(n - m)\,a_m - \sum_{s\geq 1}\frac{s}{2}\left[d_s^{(1)}(x)\,(a_{m+s} + a_{m-s}) + i d_s^{(2)}(a_{m+s} - a_{m-s})\right] = 0, \qquad (24)$$

Здесь

$$d_s^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} c_s(x') \sin \frac{2\pi s (x - x')}{L_n} dx',$$
$$d_s^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} c_s(x') \cos \frac{2\pi s (x - x')}{L_n} dx'. \tag{25}$$

При выводе (25) считалось, что моды имеют большие номера $n \sim m \gg 1$, а переходы происходят на уровни в интервале $(n - \Delta n,\ n + \Delta n)$, причем $\Delta n/n \ll 1$. Кроме того, использовалось приближенное соотношение

$$\varphi_m(z) \cos \frac{2\pi s \zeta}{L_n} \approx \frac{1}{2} [\varphi_{m+s}(z) + \varphi_{m-s}(z)], \tag{26}$$

справедливое при выполнении следующих условий:

$$2\pi s \frac{|L_n - L_m|}{L_n} \ll 1, \quad \frac{\pi s}{k_0 L_n \Delta\varepsilon} \ll 1, \quad (z_2 - z_1)\left(\frac{\pi s}{L_n}\right)^2 \frac{1}{k_0 \Delta\varepsilon} \ll 1,$$
$$\frac{1}{k_0^{1/2}} \left| \frac{d\varepsilon_0}{dz} \right|_{z_{1,2}}^{-1} \left(\frac{\pi s}{L_n}\right)^{3/2} \ll 1.$$

Первое из написанных неравенств позволяет не учитывать в интервале $|n - m| < \Delta n$ зависимость периода осцилляций от номера моды, а последнее — сдвиг точек поворота. В случае ионосферы для коротких радиоволн ($k_0 \sim 3 \cdot 10^2$ *км*$^{-1}$, $\Delta\varepsilon \sim 10^{-2}$, $L_n \sim 10^3$ *км*) указанные неравенства достаточно хорошо выполняются.

В отличие от аналогичного уравнения для модельной задачи с параболическим профилем канала в (25) учитывается взаимодействие как между ближайшими ($s = 1$), так и более удаленными ($s > 1$) модами. Если в системе допустимы переходы лишь через s_0 уровней, т. е. отличны от нуля коэффициенты $d_{s_0}^{(1,2)}$ при $s = s_0$, то уравнение (25) аналогично приведенному в [7] (в частном случае $s = 1$ совпадает с последним). При этом для достаточно сильных возмущений $s_0^2 D_{s_0} \gg 1$, где $D_{s_0} = [d_{s_0}^{(1)2} + d_{s_0}^{(2)2}]^{1/2}$, в области $|n - m| < s_0^2 D_{s_0}$ коэффициенты a_m имеют следующий вид:

$$a_m = \exp\left\{ i \left[\eta(m - n) + \frac{(n - m)^2}{2 s_0^2 D_{s_0}} \right] \right\} a_n, \tag{27}$$

где $\operatorname{tg} \eta s_0 = d_{s_0}^{(1)}/d_{s_0}^{(2)}$. Вне указанного интервала коэффициенты a_m быстро убывают, поэтому количество возбужденных мод можно оценить как $\Delta n \approx s_0^2 D_{s_0}$. Если зависимость c_{s_0} от продольной координаты x дается выражением

$$c_{s_0} = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x - x_*}{l}\right)^2 \right], \tag{28}$$

то интегралы (25) при $x - x_* \gg l$ легко вычисляются и приводят к следующему значению:

$$\Delta n = \beta l s_0^2 \exp\left[-\left(\frac{\pi s_0 l}{L_n}\right)^2 \right]. \tag{29}$$

Из (29) следует, что на периодической по ζ неоднородности

$\delta\varepsilon \approx \frac{2}{k_0} c_{s_0}(x) \cos\frac{2\pi s_0 \zeta}{L_n}$ с ростом s_0 эффект трансформации при $s_0 > L_n/\pi l$ быстро ослабевает. Это вполне понятно. С увеличением s_0 растет изменение поперечного волнового числа p при рассеянии, а в силу закона сохранения $p^2 + k^2 = k_0^2 \varepsilon_0(z)$ должно расти и изменение продольного числа k. Однако если неоднородность достаточно вытянута вдоль x, $l > L_n/\pi s_0$, то она не может обеспечить нужного изменения k.

В общем случае, когда разрешены переходы на различные уровни $s = 1, 2, \ldots, s_n$, для числа возбужденных мод тем же способом, что в [7] для $s = 1$, можно найти приближенное выражение

$$\Delta n \approx \sum_{s=1}^{s_n} s^2 D_s. \tag{30}$$

Таким образом, после прохождения через достаточно сильную неадиабатическую неоднородность энергия первоначально возбужденной моды перераспределяется по целому набору мод. Если же неоднородность слабая и взаимодействуют лишь соседние моды, то коэффициенты a_m уменьшаются по мере удаления от центральной моды по степенному закону. Этот закон нетрудно получить, решая (24) методом последовательных приближений.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЛУЧЕВЫМ ПОДХОДОМ

В работе [4] рассматривался вопрос о «раскачке» лучей при наличии в рефракционном волноводе неадиабатической неоднородности. Обсудим, как возникает подобный эффект в волновом подходе. Пусть в канале распространяется пакет волн

$$A = \sum_l a_l \psi_l(z, x) \exp(ik_l x). \tag{31}$$

Выберем для простоты возмущение в виде

$$\frac{k_0^2}{2k_n}\delta\varepsilon = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^s \cos\frac{4\pi s\zeta}{L_n} \exp\left[-\left(\frac{x - x_*}{l}\right)^2\right], \tag{32}$$

что соответствует неоднородности с размерами $\delta\zeta = L_n/2s_n$, $\delta x = 2l$ и центром в точке $\zeta = L_n/4$, $x = x_*$. На больших расстояниях $x - x_* \gg l$ от неоднородности (32) можно получить следующее выражение для волновых функций ψ_n:

$$\psi_n = \frac{b_n}{\sqrt{p_n}} \cos\left\{\int_{z_1}^{z}\left[p_n^2 + \frac{8\pi k_n}{L_n}\beta l \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^s s \cos\frac{4\pi s\zeta}{L_n} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \exp\left[-\left(\frac{2\pi s l}{L_n}\right)^2\right] \sin\frac{4\pi s(x - x_*)}{L_n}\right]^{1/2} dz' - \frac{\pi}{4}\right\} \times \tag{33}$$

$$\times \exp\left[i \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^s \beta l \cos\frac{4\pi s\zeta}{L_n} \exp\left[-\left(\frac{2\pi s l}{L_n}\right)^2\right] \cos\frac{4\pi s(x - x_*)}{L_n}\right].$$

Образуя из решений (33) локализованный в пространстве пакет (31), нетрудно убедиться, что возникающие колебания точек поворота имеют величину

$$\tilde{z}_{1,2} - z_{1,2} = \Delta z \approx \frac{8\pi\beta l}{L_n k_0 \left.\frac{d\varepsilon_0}{dz}\right|_{z_{1,2}}} \sum_{s=1}^{s_n} (-1)^s s \sin \frac{4\pi s (x - x_*)}{L_n} \quad (34)$$

и отличны от нуля в том случае, когда лучевая траектория проходит через неоднородность, т. е. при $x - x_* = \frac{L_n}{4}(2m-1) + \Delta x$, где $|\Delta x| \approx \approx L_n/4s_n$, m — целое число. $\left(\text{Предполагается, что неоднородность не слишком протяженная, } l < \frac{L_n}{2\pi s_n}.\right)$ Таким образом, результат (34) в соответствии с [4] показывает, что в координатах точек поворота возникает добавка $\Delta z(x)$, которая осциллирует с периодом, кратным периоду осцилляции луча.

6. «РАСКАЧКА» МОД НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Пусть в волновом канале распространяется волна, описываемая функцией $\psi_n(z, x)$, и вдоль трассы расположены случайным образом крупномасштабные неоднородности вида $\delta\varepsilon(z, x) = 2/k_0\, c(x) \cos \frac{2\pi\zeta}{L_n}$. Будем считать, что функция корреляции для коэффициентов $c(x)$ является гауссовой с некоторым радиусом корреляции r_0:

$$\langle c(x)\, c(y) \rangle = c^2(0) \exp\left[-\left(\frac{x-y}{r_0}\right)^2\right]. \quad (35)$$

Найдем, как происходит трансформация возбуждения по модам в этом случае. С помощью (25), (35) получим для $\langle (\Delta n)^2 \rangle$ после прохождения волной расстояния $\Delta x \gg r_0, L_n$ выражение

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \Delta x\, r_0\, c^2(0) \exp\left[-\left(\frac{\pi r_0}{L_n}\right)^2\right]. \quad (36)$$

Видно, что процесс носит диффузионный характер. Нетрудно определить соответствующий коэффициент диффузии

$$K_D = \frac{r_0}{2} c^2(0) \exp\left[-\left(\frac{\pi r_0}{L_n}\right)^2\right]. \quad (37)$$

Оценим теперь возможное количество возбужденных мод в условиях ионосферы. Рассмотрим вначале изолированную неоднородность размером $l_x \sim 10^2$ *км*. Расчеты показывают, что для возбуждения $\Delta n \approx 30$ мод необходима весьма сильная неоднородность с относительным изменением концентрации $\delta N/N \sim 10\%$. В то же время на протяженной трассе $\Delta x \approx 10^4$ *км* возможно бóльшее уширение $\Delta n \approx 10^2$ при наличии случайных неоднородностей с весьма малым изменением концентрации $\delta N/N \sim 1\%$. Следовательно, диффузионное расплывание по модам, связанное с крупномасштабными неоднородностями в ионосферных каналах, может стать весьма заметным на сверхдальних и кругосветных трассах.

Итак, в настоящей работе в ВКБ-приближении найдено представление для поля волны в произвольном рефракционном волноводе в виде суперпозиции частных решений параболического уравнения (5). Для малых номеров n, когда не годится ВКБ-приближение, а профиль канала можно аппроксимировать параболой, решения были построены и проанализированы ранее [6, 7]. При промежуточных значениях n соответствующие решения сшиваются друг с другом. На основе полученного представления для поля исследован вопрос о «раскачке» мод как изолированной неоднородностью, так и случайно расположенными по трассее неадиабатическими неоднородностями.

Автор благодарен А. В. Гуревичу и Ю. А. Кравцову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн. — М.: Наука, 1979.
2. Борисов Н. Д., Гуревич А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 9, с. 1275.
3. Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А. — Радиотехника и электроника, 1977, 22, с. 2470.
4. Кинбер Б. Е., Комиссарова Н. Н., Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 4, с. 414.
5. Боровиков В. А. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, с. 1365; Препринт ИПМ АН № 99. — М., 1978.
6. Базь А И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1971.
7. Борисов Н. Д. — Геомагнетизм и аэрономия, 1978, 18, с. 267.
8. Попов А. В. — ДАН СССР, 1976, 230, с. 1322.
9. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1975.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
14 сентября 1979 г.,
после доработки
25 марта 1980 г.

WAVE APPROACH TO THE SCATTERING OF SHORT RADIO WAVES IN UNREGULAR IONOSPHERIC WAVEGUIDES

N. D. Borisov

An expression has been found in WKB approximation for a wave field in an arbitrary unregular refraction waveguide. An effect of the energy mode transformation due to the presence of nonadiabatic inhomogeneities is studied. A process of diffuse mode confusing is considered in the presence of random inhomogeneities in ionosphere channels.