

## СОДЕРЖАНИЕ

Гайкович К. П. О поглощении микрорадиоволн в атмосферах планет-гигантов, индуцированном соударениями молекул водорода . . . . .	1037
Шейнер О. А., Тихомиров Ю. В., Фридман В. М. О методике определения и величинах спектрального индекса радиоизлучения отдельных областей Солнца по наблюдениям затмения 7 марта 1970 г . . . . .	1042
Разманов В. М., Ефимов А. И., Яковлев О. И. О формировании спектральной линии радиосигналов при распространении в околосолнечной плазме . . . . .	1051
Тинин М. В. Некоторые особенности траектории луча при распространении радиоволн в нерегулярном ионосферном волноводе . . . . .	1061
Зелексон Л. А., Степанов Н. С. К теории медленных электромагнитных волн в проводящей струе . . . . .	1070
Рассадовский В. А. Определение влагосодержания безоблачной атмосферы по измерениям уходящего микроволнового излучения с борта самолета . . . . .	1077
Малышев А. А., Позументов И. Е. Об адаптивной компенсации нелинейных искажений . . . . .	1085
Кашкаров С. С. Экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности светового излучения, прошедшего турбулизированный слой конечной толщины . . . . .	1091
Никольский В. В., Лаврова Т. И. Применение метода минимальных автономных блоков к задаче о распространении излучения в нелинейной среде . . . . .	1099
Иванченко Д. Д., Колчигин Н. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Резник И. И. Обоснование методики экспериментального исследования свойств дифракционных решеток . . . . .	1109
Бакай А. С., Лукин К. А., Шестопалов В. П. Нелинейная нестационарная теория генераторов дифракционного излучения . . . . .	1117
Беличенко В. П., Гошин Г. Г. Осесимметричное возбуждение сферической спиральной антенны с коническим экраном . . . . .	1124
Красников М. Ю., Кузнецов М. И. Траектории электронов в магнетроне в режиме циклотронного резонанса . . . . .	1131
Колесов В. В. Продольные колебания полупроводниковой плазмы с малым числом носителей в скрещенных полях . . . . .	1144
<b>Хроника</b>	
Всесоюзный семинар «Высокочастотная релятивистская электроника» . . . . .	1152
<b>Аннотации депонированных статей</b>	
Китай Ш. Д., Наумов А. П., Сумин М. И. О характеристиках информативности микроволнового радиоизлучения земной атмосферы . . . . .	1050
<b>Информация</b>	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XIX, № 1, 2, 1979 г . . . . .	1157

УДК 523.4

## О ПОГЛОЩЕНИИ МИКРОРАДИОВОЛН В АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ-ГИГАНТОВ, ИНДУЦИРОВАННОМ СОУДАРЕНИЯМИ МОЛЕКУЛ ВОДОРОДА\*

*К. П. Гайкович*

Рассмотрен вклад в поглощение радиоволн в диапазоне длин волн  $\lambda \approx 0,1 \div 20$  см за счет соударений молекул водорода в атмосферах планет-гигантов. Полученные коэффициенты поглощения сопоставлены с коэффициентами поглощения, обусловленного наличием аммиака, и сделаны выводы относительно условий, при которых необходимо учитывать рассмотренный механизм.

В связи с развитием радиоастрономических исследований планет-гигантов возрос интерес к интерпретации радиоизлучения этих планет. Характер радиоизлучения дает, в частности, информацию о структуре и химическом составе планетных атмосфер.

Интерпретация радиоизлучения Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн обычно выполняется при рассмотрении поглощения радиоволн только в аммиаке. Поглощающими свойствами недипольных газов атмосферы (водорода, гелия) пренебрегают ввиду малости этого поглощения. Однако при больших давлениях на планетах-гигантах механизм поглощения, прямо связанный с частотой соударения молекул, может стать эффективным.

В данной работе рассмотрен механизм индуцированного поглощения в диапазоне длин волн  $\lambda \approx 0,1 \div 20$  см, обусловленный столкновениями молекул водорода в атмосферах Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, и результаты сопоставлены с расчетами коэффициента поглощения аммиака для атмосфер соответствующих планет по формулам работ [1, 2].

1. Расчеты поглощающих свойств выполнялись для адиабатических моделей атмосфер планет:

$$P(h) = P_0 [T(h)/T_0]^{r/(r-1)}, \quad T(h) = T_0 + \nabla_T h, \quad (1)$$

где  $P$  — давление,  $T$  — температура в градусах Кельвина,  $h$  — высота, отсчитываемая от уровня с давлением  $P_0$  и температурой  $T_0$  по направлению к центру планеты,  $\nabla_T$  — температурный градиент,  $r$  — показатель адиабаты.

Использованные значения параметров в формулах (1) и относительные содержания основных атмосферных компонент были выбраны согласно [1-5] и приведены в табл. 1.

2. Поглощение, обусловленное соударениями между молекулами  $H_2$ , связано с возникающим при этом индуцированным дипольным мо-

\* Часть результатов данной работы была доложена на XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (см. [13]).

ментом. Правила отбора позволяют каждой молекуле совершать квантовые переходы, для которых изменение вращательного квантового числа  $J$  составляет

$$\Delta J = 0, \pm 2. \quad (2)$$

Для таких переходов существуют неисчезающие матричные элементы индуцированного квадрупольным полем дипольного момента. Волновые числа, соответствующие этим переходам, будут:

$$K_{J, J+2} = 4B(J + 3/2). \quad (3)$$

Для молекулы водорода постоянная  $B = 60,81 \text{ см}^{-1}$ , т. е. частоты всех этих переходов, благодаря весьма большой вращательной постоянной, будут лежать значительно выше рассматриваемой области частот.

Таблица 1

Параметры Планеты	$P_0, \text{ атм}$	$T_0, \text{ К}$	$\nabla_r, \text{ К}$	$r$	$\text{NH}_3, \%$	$\text{H}_2, \%$
Юпитер	1—3	168	2,24	1,5	$0,5 \div 6,8 \cdot 10^{-2}$ [3]	80
Сатурн	1	100	0,9	1,47	$2 \div 5 \cdot 10^{-3}$ [1, 2]	80
Уран	0,26	52	1	1,57	$1 \div 4 \cdot 10^{-3}$ [10]	86
Нептун	0,23	48	1	1,3	$10^{-4} \div 10^{-5}$ [10]	86

Переходы с  $\Delta J = 0$  дадут спектр нерезонансного типа, в котором энергия поглощается без изменения вращательного состояния. Именно эти частоты дадут основной вклад в поглощение в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн. В общем виде мнимая часть диэлектрической проницаемости запишется [7]:

$$\epsilon''_{\text{H}_2}(\omega) = \sum_j [I_{J, J} S_{J, J}(\omega) + I_{J, J+2} S_{J, J+2}(\omega)], \quad (4)$$

где  $I$  и  $S$  — соответственно интенсивность и фактор формы,  $\omega$  — циклическая частота. В выражении (4) первое слагаемое вычислялось нами методами статистической механики, вкладом второго слагаемого пренебрегалось. Аналогичная схема вывода содержится в [7].

Из соотношения Крамерса — Кронига [8]

$$\int_0^\infty \epsilon''(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = (\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

где  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_\infty$  — значения диэлектрической постоянной при  $\omega$ , стремящейся соответственно к нулю и бесконечности, имеем

$$\int_0^\infty S(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \quad \epsilon_0 - \epsilon_\infty = \sum_j [I_{J, J} + I_{J, J+2}]. \quad (6)$$

Известно (см., например, [8]), что

$$\epsilon_0 - \epsilon_\infty = \frac{4\pi}{3kT} \int r \langle \mu^2 \rangle dN, \quad (7)$$

где  $\langle \mu^2 \rangle = 6\alpha^2 Q^2 r^{-8}$  — квадрат индуцированного дипольного момента, усредненный по всем ориентациям квадрупольного поля,  $dN =$

$= 2\pi N_0^2 r^2 \exp[-E(r)/kT] dr$  — плотность пар молекул на расстоянии между  $r$  и  $r+dr$  друг от друга,  $\alpha$  — средняя поляризуемость,  $Q$  — квадрупольный момент молекулы,  $N_0$  — число молекул в  $cm^{-3}$ ,  $E(r) = 4\epsilon \left[ \left(\frac{b_0}{r}\right)^2 - \left(\frac{b_0}{r}\right)^6 \right]$  — межмолекулярный потенциал. Имеет место также соотношение

$$I_{J,J} = \frac{J(J+1)f_J}{(2J-1)(2J+3)} (\epsilon_0 - \epsilon_\infty), \quad (8)$$

где  $f_J$  — относительное число частиц во вращательном состоянии с квантовым числом  $J$ .

Форма линии  $S(\omega)$  в данной работе находилась аналогично [7] путем усреднения квадрата модуля фурье-преобразования  $|\mu(\omega)|^2$  от временного фактора индуцированного дипольного момента

$$\mu(t) = \frac{\cos(\omega_0 t + \Phi)}{[r(t)]^4} \quad (9)$$

по фазам  $\Phi$ , сечениям соударений и функций распределения относительных скоростей соударяющихся молекул. Для переходов с  $\Delta J = 0$  в полученном выражении следует положить  $\omega_0 = 0$ .

Согласно [6, 9] значения молекулярных параметров для  $H_2$  были выбраны равными  $\epsilon = 5,106 \cdot 10^{-15}$  эрг,  $b_0 = 2,928 \cdot 10^{-8}$  см,  $\alpha = 0,79 \cdot 10^{-24}$   $cm^{-3}$ ,  $Q = 0,248 \cdot 10^{-16}$   $cm^{-2}$ .

Расчеты коэффициентов индуцированного поглощения были выполнены на ЭВМ БЭСМ-6.

3. На рис. 1 приводятся результаты расчетов коэффициентов поглощения  $\gamma_{H_2}$  ( $\partial B/km$ ) =  $10^6 \lg_{10} e \frac{\omega}{c} \epsilon''_{H_2}$ . Оказалось, что при принятых в моделях содержаниях аммиака поглощение индуцированным механизмом может вносить заметный вклад на волнах короче 1 см.

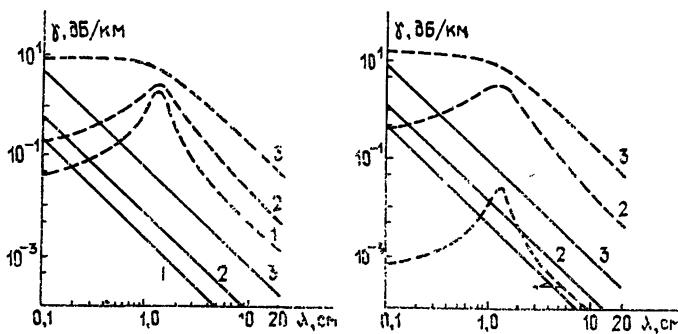


Рис. 1. Коэффициенты молекулярного поглощения радиоволн в атмосферах Сатурна (слева) и Урана (справа). Сплошными линиями представлено поглощение молекулярным водородом, пунктирными — поглощение  $NH_3$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют уровням давления 3, 10 и 100 атм соответственно.

Если, как это принято здесь, согласно радиоастрономическим оценкам [10], содержание  $NH_3$  в атмосфере Нептуна ниже уровня насыщения и составляет  $10^{-7}$ — $10^{-6}$ , то вклад индуцированного нерезонансного поглощения водорода оказывается существенным во всем рассмотрен-

ном диапазоне длин волн. Кроме того, необходимо отметить, что индуцированный механизм определяет поглощение на высотах, где давление меньше 3 атм, поскольку на этих высотах концентрация насыщения NH<sub>3</sub> еще слишком мала. Результаты, представленные на рис. 1, уточняют результаты для Сатурна, полученные ранее в работе [13].

При лабораторных исследованиях [11] был оценен верхний предел эффективности индуцированного механизма. Наши расчеты дают значения приблизительно в 10 раз меньше величины этого предела. Оценки верхнего предела поглощения γ<sub>H<sub>2</sub></sub>, полученные из рассмотрения интегрального радиоизлучения Урана для различных моделей в работе [12], оказываются на один-два порядка меньше, чем полученные в настоящей работе. Это объясняется отличием моделей температурной зависимости атмосферы Урана в данной работе и в [12]. Этот факт позволяет сделать вывод о предпочтительности использованной здесь более «теплой» модели атмосферы Урана по сравнению с моделью работы [12] ( $T_0 = 55$  К,  $P_0 = 3$  атм).

Приведенное рассмотрение хотя и выполнено в определенных предположениях (для прямолинейных траекторий соударяющихся молекул, без учета множественных соударений), позволяет уменьшить неопределенность в описании индуцированного поглощения, в частности устранить неопределенность в выборе ее температурной зависимости. Для того, чтобы сделать возможным использование полученных результатов в практических расчетах, на основе выполненных вычислений была получена приближенная формула для коэффициента индуцированного поглощения, который является, вообще говоря, сложной функцией частоты, температуры и давления. С точностью не хуже 15% коэффициент поглощения может быть получен в рассмотренном диапазоне длин волн и температур по формуле

$$\gamma_{H_2} = 3,3 \cdot 10^3 P^2 T^{-3,4} \lambda^{-1,96}, \quad (10)$$

где  $P$  — давление в атмосферах,  $\lambda$  — длина волны в сантиметрах.

Полученные результаты целесообразно использовать для интерпретации спектров радиоизлучения планет-гигантов.

По мере согласования данных об излучении планет в различных диапазонах волн и космических исследований можно надеяться и на получение других физических сведений с помощью индуцированного механизма излучения (поглощения) электромагнитных волн, например, о свойствах молекул в сжатых газах и некоторых их параметрах (квадрупольном моменте и т. п.), поскольку только на планетах-гигантах реализуются такие специфические условия (большие давления и масштабы), при которых рассмотренный механизм достаточно эффективен и которые очень трудно, а порой и невозможно воспроизвести в лабораторных условиях.

Автор признателен А. П. Наумову за обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрономический вестник, 6, № 1, 13 (1972).
2. А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 12, 1755 (1974).
3. А. Д. Кузьмин, Т. В. Смирнова, Астрономический вестник, 7, № 3, 139 (1973).
4. R. E. Danielson, Icarus, 30, № 3, 462 (1977).
5. L. Margulis, H. O. Halvarson, J. Lewis and A. G. W. Cameron, Icarus, 30, № 4, 793 (1977).
6. N. J. Harrick and N. F. Ramsey, Phys. Rev., 88, 228 (1952).
7. A. A. Maguott and G. Bignami, J. Chem. Phys., 36, № 8, 2026 (1962).
8. Г. Фёлих, Теория диэлектриков, перев. с англ., ИЛ, М., 1960.

9. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, перев. с англ., ИЛ, М., 1961.
10. С. Б. А н д р и я ны ч е в а, К. П. Гайкович, А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 7, 888 (1979).
11. G. Вигльвам and A. A. Maguott, J. Chem. Phys., 36, 2032 (1962).
12. А. Д. Кузьмин, А. Г. Соловьев, ДАН СССР, 201, № 6, 1313 (1971).
13. К. П. Гайкович, М. Б. Зиничева, А. П. Наумов, XII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, Томск, июнь 1978, ч. 1, изд. Наука, М., 1978, стр. 246.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 сентября 1978 г.

## ABSORPTION OF RADIO MICROWAVES IN ATMOSPHERES OF GIANT PLANETS BY INDUCED COLLISIONS OF HYDROGEN MOLECULAS

*K. P. Gajkovich*

A contribution is considered to the absorption of radio waves in the wave range  $\lambda \approx 0.1 \div 20$  cm due to collisions of hydrogen molecules in atmospheres of giant planets. Absorption coefficients obtained are compared with coefficients of absorption in the presence of ammonia and conclusions are made relative to conditions when the mechanism considered is necessary to take into account.

УДК 523.164.32

**О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВЕЛИЧИНАХ  
СПЕКТРАЛЬНОГО ИНДЕКСА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ  
ОТДЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ СОЛНЦА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ  
ЗАТМЕНИЯ 7 МАРТА 1970 ГОДА**

*O. A. Шейнер, Ю. В. Тихомиров, В. М. Фридман*

Рассмотрены вопросы, связанные с определением величины спектрального индекса радиоизлучения ( $\gamma$ ) отдельных областей Солнца на основе измерений интенсивности и наклона спектра (разности интенсивностей на двух близких длинах волн). Разработанная методика применена к результатам, полученным при наблюдениях затмения Солнца. Даны рекомендации по методике проведения измерений и рассмотрено несколько вариантов осуществления калибровок приемной аппаратуры. Получено распределение спектрального индекса по диску Солнца, в частности, над отдельными активными областями. Результаты интерпретируются в рамках тепловых тормозного и магнитотормозного механизмов генерации радиоизлучения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования последних лет по изучению активных образований на Солнце в основном направлены на получение информации об их пространственных структурах и динамике их развития. При этом, наряду с необходимостью достижения во время наблюдений возможно более высокого пространственного разрешения, потребовалась и разработка новых методов наблюдений радиоизлучения Солнца.

Выяснение механизмов генерации солнечного радиоизлучения в этих структурах имеет первостепенное значение во всех исследованиях. Такую информацию можно получить, в частности, путем определения величины спектрального индекса радиоизлучения  $\gamma$ . Известно, что о механизмах генерации радиоизлучения можно судить по спектральным измерениям, наблюдая интенсивность радиоизлучения на ряде дискретных частот или привлекая поляризационные наблюдения [1]. В первом случае необходимы высокоточные абсолютные измерения интенсивности, а во втором — наблюдения с малой паразитной поляризацией.

При измерениях на нескольких длинах волн интенсивности  $I$  и наклона спектра  $\Delta I$  (разности интенсивностей радиоизлучения на двух близких длинах волн) точность определения спектральных характеристик радиоизлучения существенно возрастает за счет сравнительно легко осуществляемой высокой относительной точности измерений наклона спектра.

В данной статье рассматривается метод определения спектрального индекса, основанный на измерениях  $I$  и  $\Delta I$  на одной длине волны, в применении к наблюдениям с высоким пространственным разрешением. Высокое угловое разрешение, практически одинаковое на всех длинах волн (в сантиметровом диапазоне), наиболее простым способом реализуется во время наблюдений солнечных затмений\*.

\* Наблюдения  $\Delta I$  (наклона спектра на двух близких длинах волн) на больших антенах описаны в [2, 3].

## 2. МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ И ОБРАБОТКИ

В настоящей работе проанализированы материалы наблюдения затмения Солнца, где с помощью одного радиометра измерялись сумма  $I$  и разность  $\Delta I$  интенсивностей на двух близких длинах волн  $\lambda_1 = \approx 3,1$  см и  $\lambda_2 = 3,04$  см. Эти наблюдения составили часть программы комплексной советской экспедиции по наблюдению солнечного затмения 7 марта 1970 года на Кубе [4, 6]\*.

Запишем выражение для спектрального индекса как показателя степени в спектре радиоизлучения Солнца:

$$\gamma = \frac{\lg \frac{I_1}{I_2}}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \quad (1)$$

В случае измерения наклона спектра и интенсивности оно перепишется в виде

$$\gamma = \frac{\lg \frac{1 + \frac{\Delta I}{I}}{1 - \frac{\Delta I}{I}}}{\lg \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad (2)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — интенсивности радиоизлучения на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно,  $\Delta I = I_1 - I_2$  — наклон спектра,  $I = I_1 + I_2$  — интенсивность радиоизлучения.

Поскольку для определения спектрального индекса нам необходимо знание величин  $I$  и  $\Delta I$  в значениях антенных температур, а получаемая нами информация содержится в виде отсчетов на регистрирующем приборе  $I_p$  и  $\Delta I_p$ , то важное значение имеет вопрос об общей калибровке аппаратуры. Рассмотрим его в применении к нашему методу измерения интенсивности  $I$  и наклона спектра  $\Delta I$ .

В общем случае коэффициенты передачи всего тракта (вход антенны — регистрирующий прибор) неодинаковы на различных длинах волн, поэтому связь между  $I_1$  и  $I_2$  в антенных температурах и данными, зафиксированными на самописце  $\Delta I_p$ , определяется следующим уравнением:

$$\Delta I_p = \alpha'_1 I_1 - \alpha'_2 I_2, \quad (3)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  выражены в антенных температурах,  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  — коэффициенты, пропорциональные коэффициентам передачи всего тракта на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно (по каналу наклона спектра),

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &= \alpha_1 \varepsilon_1, \\ \alpha'_2 &= \alpha_2 \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3a)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — «коэффициенты передачи» тракта радиометра на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — «коэффициенты передачи» антенной системы на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно.

\* Обстоятельства затмения и параметры используемой аппаратуры приводятся в [4].

Для случая «внешней» калибровки — калибровки по известному внешнему источнику — естественна аналогичная связь между  $\Delta I_p^k$  и  $I_1^k$  и  $I_2^k$ :

$$\Delta I_p^k = \alpha'_1 I_1^k - \alpha'_2 I_2^k. \quad (4)$$

Уже по виду уравнения (4) можно утверждать, что в наблюдениях должны применяться две калибровки по наклону спектра, если радиотехнические параметры тракта неизвестны. Если же для исследуемого тракта известно каким-либо образом отношение коэффициентов передач на различных частотах  $\alpha_2/\alpha_1$  или один из коэффициентов передач  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ , то для установления однозначной связи между антенными температурами и  $\Delta I_p$  достаточно одной «внешней» калибровки.

В случае, когда для «внешней» калибровки используется источник, у которого известен лишь спектральный индекс его излучения (отношение  $I_1/I_2$ ), проведения только «внешних» калибровок оказывается недостаточным. Действительно, поскольку связь между  $\Delta I_p^k$  и  $I_1/I_2$  выражается уравнением

$$\Delta I_p^{k_1} = I_2^{k_1} \left( \alpha'_1 \frac{I_1^{k_1}}{I_2^{k_1}} - \alpha'_2 \right), \quad (5)$$

то даже при проведении второй калибровки

$$\Delta I_p^{k_2} = I_2^{k_2} \left( \alpha'_1 \frac{I_1^{k_2}}{I_2^{k_2}} - \alpha'_2 \right) \quad (6)$$

однозначная связь не устанавливается.

Выход из положения состоит в применении двух калибровок тракта радиометра по ГШ (без учета коэффициента передачи антенной системы) — «внутренних» калибровок:

$$\Delta I_p^{k_3} = \alpha_1 I_1^{k_3} - \alpha_2 I_2^{k_3}; \quad (7)$$

$$\Delta I_p^{k_4} = \alpha_1 I_1^{k_4} - \alpha_2 I_2^{k_4}. \quad (8)$$

Запишем аналогичные уравнения для калибровок по каналу интенсивности ( $I_p$ )

$$I_p^{k_1} = I_2^{k_1} \left( \beta'_1 \frac{I_1^{k_1}}{I_2^{k_1}} + \beta'_2 \right); \quad (9)$$

$$I_p^{k_2} = I_2^{k_2} \left( \beta'_1 \frac{I_1^{k_2}}{I_2^{k_2}} + \beta'_2 \right); \quad (10)$$

$$I_p^{k_3} = \beta_1 I_1^{k_3} + \beta_2 I_2^{k_3}; \quad (11)$$

$$I_p^{k_4} = \beta_1 I_1^{k_4} + \beta_2 I_2^{k_4} \quad (12)$$

при связи между  $\beta$  и  $\beta'$  в виде

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1 \epsilon_1, \\ \beta'_2 &= \beta_2 \epsilon_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\beta'_1$  и  $\beta'_2$  — коэффициенты, пропорциональные коэффициентам передачи всего тракта на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — «коэффициен-

ты передачи» тракта радиометра на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Решая систему из восьми вышеприведенных уравнений с учетом (За) и (13), мы определяем однозначную связь между данными, полученными на выходе радиометра, и антенными температурами в случае проведения двух «внутренних» калибровок.

Таким образом, на основе измерений  $I$  и  $\Delta I$  имеется возможность получения величин спектрального индекса радиоизлучения Солнца при использовании специального способа калибровки, наиболее соответствующего условиям наблюдений.

В время наблюдений затмения Солнца 7 марта 1970 года проводилась одна «внутренняя» калибровка. При составлении системы уравнений нами использовались знание относительных параметров радиотехнического тракта  $\beta_1/\beta_2$  и  $\alpha_1/\alpha_2$  и дополнительные «внешние» калибровки. Полагалось, во-первых, что спектральный индекс радиоизлучения в центральной фазе равен спектральному индексу радиоизлучения «спокойного» Солнца (равный — 1,11 согласно [5]), поскольку локальные источники в этот момент времени были закрыты, и, во-вторых, путем использования независимых измерений абсолютных потоков радиоизлучения Солнца на  $\lambda_1 = 3,07 \text{ см}$  [4] и  $\lambda_2 = 4,5 \text{ см}$  [6] был определен спектральный индекс радиоизлучения Солнца после затмения, равный — 0,66.

В результате решения составленной системы уравнений были найдены отношения «коэффициентов передачи» в каждом канале радиотехнического тракта по каждой длине волны.

Описывая сигналы наклона спектра и интенсивности в любой момент времени системой уравнений

$$\begin{aligned} I_p &= \alpha_1 \epsilon_1 I_1 + \alpha_2 \epsilon_2 I_2, \\ \Delta I_p &= \beta_1 \epsilon_1 I_1 - \beta_2 \epsilon_2 I_2 \end{aligned} \quad (14)$$

и решая ее, получим некоторую функцию

$$\frac{I_2}{I_1} = f(\xi) = \frac{1}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\beta_2}{\beta_1}} \frac{\alpha_1/\beta_1 - \xi}{\alpha_2/\beta_2 + \xi}. \quad (15)$$

Здесь введено обозначение  $\xi = \Delta I_p/I_p$ . Используя это распределение  $f(\xi)$ , получаем распределение  $\gamma$ . Для вычисления  $\xi$  брались приращения  $I_p$  и  $\Delta I_p$  на временном интервале 40 секунд со сдвигом каждого последующего значения на 4 секунды. При этом максимальная ошибка в определении  $\gamma$  составляла  $\pm 0,5$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Во время первой половины затмения Солнца 7.III.1970 г. наблюдалось повышенное радиоизлучение, связанное со всплеском, начавшимся за 40 минут до начала затмения (максимум всплеска в  $UT = 16^h 07^m$ ). Это не позволило уверенно отождествить особенности в рассчитанном распределении  $\gamma$  со структурами, наблюдавшимися в оптике в этот период времени. Для обсуждения результатов мы рассматривали распределение спектрального индекса  $\gamma$ , соответствующее открытию радиоисточников на диске Солнца с  $18^h 28^m$  по  $19^h 03^m$  ( $UT$ ).

Необходимо отметить, что каждое вычисленное значение  $\gamma$  относится к области Солнца, представляющей собой узкую полосу вдоль диска Луны в соответствующий момент времени. Поскольку спектральный индекс величина не аддитивная, то разность между полученным

значением спектрального индекса  $\gamma$  и значением спектрального индекса для полоски «спокойного» Солнца не является значением спектрального индекса радиоизлучения собственно локального источника  $\gamma^*$ . Тем не менее изменения в распределении  $\gamma$  отражают распределение реальных значений спектральных индексов локальных источников (ЛИ), и они тем ближе к значениям  $\gamma^*$  собственно ЛИ, чем больше отношение потока радиоизлучения источника к потоку «спокойного» Солнца. В дальнейшем мы приведем такие значения спектрального индекса для некоторых наиболее сильных ЛИ.

С 18<sup>h</sup> 40<sup>m</sup> до 18<sup>h</sup> 42<sup>m</sup> происходило открытие областей Солнца, в которых на оптической фотографии не было замечено никаких активных образований, что соответствует участку «спокойного» Солнца. Величина  $\gamma$  для этого отрезка времени, полученная на нашей методике, составляет около  $-1$ , что совпадает с теоретическими представлениями о величине спектрального индекса «спокойного» Солнца в данном диапазоне длин волн. Мы полагаем, что такое соответствие является одним из критериев правильности применяемой методики. Кроме того, нами проведено сравнение значений спектральных индексов ЛИ, вычисленных по нашей методике, со значениями спектральных индексов, вычислённых по потокам ЛИ на дискретных частотах  $\lambda \approx 3 \text{ см}$  [4] и  $\lambda = 4,5 \text{ см}$  [6]. В большинстве случаев существует удовлетворительное соответствие между значениями этих индексов. В распределении спектрального индекса радиоизлучения Солнца можно выделить участки как плавного ( $\pm 0,5$ ), так и существенного (2—4 единицы) изменения величины  $\gamma$ . Проведенное сравнение полученного распределения спектрального индекса с положением открывавшихся в этот период времени групп пятен, пор и флоккулов указывает на то, что особенности в распределении  $\gamma$  могут быть объяснены наличием локальных источников радиоизлучения соответствующих активных областей. При этом в пределах одной активной области  $\gamma$  может меняться от  $-2$  до  $+2$ .

Для примера проведем детальное сопоставление распределения спектрального индекса, интенсивности радиоизлучения и расположения пятен на соответствующих участках фотосферы для локальных источников групп № 98 и 105 по данным [6, 7]. С учетом вращения Солнца это сопоставление показано на рис. 1 (гр. № 98) и рис. 2 (гр. № 105). Группа № 98 состояла из одного хорошо развитого пятна с  $S_p = 485 \text{ м. д. п.}$ , вблизи которого было расположено много (около 25) мелких пятен [7]. В распределении интенсивности можно выделить яркую область ( $T_\alpha \sim 0,5 \cdot 10^6 \text{ К}$ ) размером  $\sim 45$  угловых секунд, совпадающую с главным пятном, и более слабую по потоку хвостовую часть, совпадающую с флоккулом и мелкими пятнами, расположенными к востоку от главного пятна. В распределении спектрального индекса для ЛИ группы № 98 можно выделить четыре области: область, совпадающую с главным пятном с  $\gamma = -1$  (значение  $\gamma^*$  собственно источника также  $\sim -1$ ), и три области над хвостовой частью группы с  $\gamma \approx -1,7; 0; -1$  соответственно. В области над главным пятном основным механизмом генерации радиоизлучения, по-видимому, является гирорезонансный. В пользу этого механизма свидетельствуют измерения спектра радиоизлучения, проведенные на волнах  $\lambda_1 = 1,95 \text{ см}$  и  $\lambda_2 = 3,4 \text{ см}$  [8]. Отсутствие данных на промежуточных длинах волн в этой работе не позволило точно определить положение максимума спектра. Значение спектрального индекса  $\gamma \approx -1$ , полученное нами для этого источника, свидетельствует о том, что либо максимум излучения находился в диапазоне  $\lambda < 3 \text{ см}$ , либо спектр излучения имел более сложную, чем представленную в [8] структуру, например, два максимума на  $\lambda_1 = 3,4 \text{ см}$  [8] и еще один максимум на  $\lambda_2 < 3 \text{ см}$ . Наличие

двух максимумов в спектре радиоизлучения Солнца, в принципе, не противоречит имеющимся экспериментальным данным [9, 10].

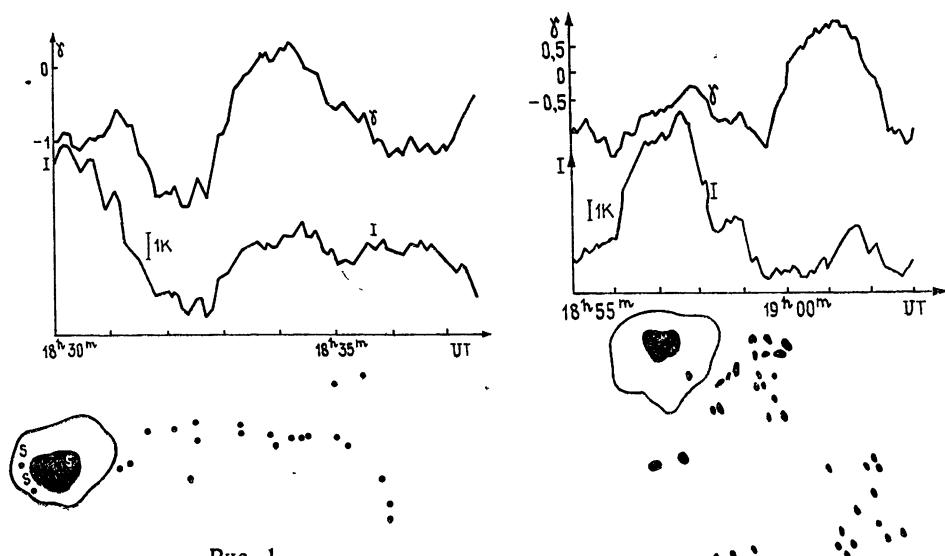


Рис. 1.

Постоянство спектрального индекса по источнику над главным пятном скорее всего означает, что высота источника над пятном мало меняется. Если излучение из этой области является гирорезонансным, то последнее обстоятельство может быть связано с тем, что магнитное поле над пятном на данной высоте имеет почти постоянное значение. Изменение спектрального индекса в узкой области за пятном соответствует резкому уменьшению магнитного поля вне пятна.

Считая гирорезонансный уровень П-образным и оптически толстым, можно оценить величину градиента температуры в области над пятном, откуда выходит излучение на  $\lambda \approx 3$  см. Легко показать, что в этом случае для спектрального индекса верна формула

$$\gamma = \frac{dT/dh}{T} \cdot \frac{H}{|dH/dh|} - 2. \quad (16)$$

Полагая  $|dH/dh| = 0,5$  Э/км и  $H = 1200$  Э (магнитное поле, соответствующее третьему гирорезонансному уровню) и взяв из наших оценок  $T = 0,5 \cdot 10^6$  К и  $\gamma = -1$ , имеем

$$dT/dh \approx 200 \text{ К/км}. \quad (17)$$

Сопоставление распределения интенсивности по диску Солнца с картой магнитных полей и флоккулов показывает, что слабый и протяженный радиоисточник над хвостовой частью группы № 98 соответствует положению флоккула. Это позволяет предположить, что радиоисточник в этой области обязан своим происхождением радиоизлучению из флоккула. Значительные изменения спектрального индекса в этом радиоисточнике могут быть объяснены наличием пятен со слабыми

Рис. 2.

быми магнитными полями ( $H \leq 1800$  Э) или, что менее вероятно, существенно неоднородным распределением физических параметров над флоккулом.

Группа № 105 представляет собой наиболее развитую группу из наблюдавшихся на Солнце в день затмения. Ее площадь составляла  $S_p = 845$  м. д. п. Локальный источник над этой группой также был наибольшим по потоку. В распределении интенсивности (рис. 2) здесь, как и для группы № 98, можно выделить две области: область сильного источника над главным пятном группы и область более слабого (по потоку) источника над хвостовой частью группы. В распределении спектрального индекса также выделяются две области: область над главным пятном группы, где  $\gamma \approx -0,5$  (для собственно источника  $\gamma^* \sim 0$ ), и область над хвостовой частью, где  $\gamma \approx 2$  (для собственно источника  $\gamma^* \sim 4$ ). Спектральный индекс источника излучения над главным пятном группы № 105, полученный сравнением потоков на  $\lambda = 3$  см [3] и  $\lambda = 4,5$  см [5], также близок к нулю.

Форма спектра, приведенного в [8], большая яркостная температура  $T_y \approx 10^6$  К излучения и высокая степень круговой поляризации источника над главным пятном [4], имеющим сильное магнитное поле ( $H \approx 3000$  Э), свидетельствуют о магнитотормозном происхождении радиоизлучения этого локального источника. Заметим, что спектральный индекс радиоизлучения локального источника над главным пятном  $\gamma^*$  имеет практически постоянное значение над пятном. Хотя подъем спектрального индекса в 18<sup>h</sup> 58<sup>m</sup> UT лежит в пределах точности определения  $\gamma$ , можно полагать, что он может быть связан, как и для главного пятна группы № 98, с опусканием гирорезонансного уровня в переходную область от хромосферы к короне. Мы не можем утверждать это с уверенностью, так как происходило одновременное открытие области полутени главного пятна и маленького пятна данной группы, излучение из которого также могло вызвать увеличение спектрального индекса.

Над хвостовой частью группы № 105 спектральный индекс  $\gamma^*$  увеличивается до +4. Если изменения  $\gamma$  связать с границами ЛИ, то размеры источника, оцененные таким образом, оказываются несколько больше, чем размеры источника, оцененные по изменению интенсивности радиоизлучения.

Большое положительное значение  $\gamma$  над источником, открываемым в UT — 19<sup>h</sup> 00<sup>m</sup>,5  $\div$  19<sup>h</sup> 02<sup>m</sup>,5, по-видимому, свидетельствует в пользу магнитотормозного механизма генерации излучения в этой области и означает тогда, что уровни излучения лежат в переходной области с большим градиентом температуры. Подтверждением этому служит и величина яркостной температуры локального источника ( $T_y \approx \approx 0,5 \cdot 10^6$  К).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная методика определения величины спектрального индекса радиоизлучения отдельных областей Солнца на основе измерений интенсивности и наклона спектра радиоизлучения является эффективной при применении к наблюдениям затмений Солнца. Однако ее использование связано с усложнением калибровки радиотелескопа и необходимостью специальной обработки результатов наблюдений.

Полученное по результатам наблюдений затмения 7 марта 1970 года распределение спектрального индекса по диску Солнца показывает, что атмосфера Солнца в активных областях состоит из структур с угловыми размерами примерно 30  $\div$  60 угловых секунд, в которых может генерироваться радиоизлучение со спектрами, отличающимися по спектральным индексам на 2—4 единицы. Распределение спектраль-

ногого индекса над главными пятнами групп, как правило, имеет практически постоянное значение и по размеру близко к размеру пятна. Распределение спектрального индекса над хвостовой частью групп показывает более сложный характер: имеются изменения спектрального индекса от значений, близких к  $-1$ , до положительных значений, достигающих нескольких единиц. Отрицательные значения спектрального индекса, по-видимому, связаны с излучением флоккула, положительные мы связываем с группами мелких пятен. Отличие радиоисточника над этими пятнами, наблюдаемого в интенсивности, от радиоисточника, определяемого по изменению спектрального индекса, по-видимому, связано с тем обстоятельством, что в распределении спектрального индекса слабые по потоку, но имеющие большое значение  $\gamma$  радиоисточники проявляются при применении рассмотренного метода лучше, чем в распределении интенсивности при обычно применяемом методе наблюдений.

Полученные результаты интерпретируются в рамках тепловых тормозного и магнитотормозного механизмов генерации радиоизлучения. Из рассмотрения наблюдавшегося распределения  $\gamma$  высказано предположение о плоской форме гирорезонансного уровня, и в этом предположении получен градиент кинетической температуры электронов, равный  $\sim 200 \text{ K/km}$  на высоте гирорезонансного уровня, излучающего на волне  $\lambda \approx 3 \text{ см}$ .

Большие положительные значения спектрального индекса над хвостовой частью групп пятен, по-видимому, также определяются магнитотормозным излучением, выходящим из переходной области с большим значением  $\nabla T$ . Поскольку спектральный индекс магнитотормозного излучения в этих областях резко отличается от спектрального индекса окружающего их флоккула, то, возможно, спектральный индекс является хорошим индикатором выхода магнитного поля  $H \sim 1000 \text{ Э}$  в переходную область над слабыми источниками.

Судя по значениям спектрального индекса над флоккулами, в этих областях, как и в невозмущенных областях Солнца, основным механизмом излучения является тормозной. Улучшение точности определения  $\gamma$  могло бы позволить сделать количественные оценки различия физических условий над флоккулом и над невозмущенными областями Солнца.

Авторы выражают благодарность М. М. Кобрину за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964
2. А. П. Молчанов, В. П. Олянюк, Н. Г. Франчук, сб. Радиоизлучение Солнца, вып. 2, изд. ЛГУ, 1973, стр. 3
3. С. И. Арбузов, В. В. Пахомов, Н. А. Прокофьева, Солнечные данные, № 3, 71 (1976).
4. М. М. Кобрин, Е. И. Лебедев, Б. В. Тимофеев, В. М. Фридман, Сб. докладов сессии научного совета по комплексной проблеме «Радиоастрономия», ИЗМИРАН, М., 1972, стр. 164
5. А. Ф. Бачурина, А. С. Дворяшиц, Изв. КрАО, 54, 241 (1976)
6. Х. А. Киненес, А. Н. Коржавин, Н. Г. Петерова, Х. Санtos, Солнечные данные, № 3, 87 (1975).
7. Магнитные поля солнечных пятен, 1—15 марта 1970 г.
8. R. M. Straka, Sol. Phys., 21, 469 (1971).
9. Н. С. Каверин, М. М. Кобрин, А. И. Коршунов, В. А. Тихомиров, Ю. В. Тихомиров, Письма в Астрон. ж., 2, № 12, 577 (1976)
10. Г. Б. Гельфрейх, Вестник АН СССР, 4, 46 (1969)

ON THE METHODS OF DETECTION AND THE RADIO EMISSION SPECTRAL  
INDEX VALUES OF SEPARATE SOLAR REGIONS DURING THE ECLIPSE  
ON MARCH 7, 1970

*O. A. Shejner, Yu. V. Tikhomirov, V. M. Fridman*

On the basis of measurements of the intensity and the spectrum slope (intensity difference at two close wavelengths) problems are considered associated with the definition of spectral index value  $\gamma$  of microwave radiation from separate solar regions. The method developed is used for results obtained during the solar eclipse. Recommendations are given on the methods of measurements and several versions of calibration of receivers are discussed. The distribution of the spectral index over the solar disk has been obtained, in particular, above separate active regions. Results are interpreted in the frames of the thermal bremsstrahlung and gyroresonance mechanisms of the radio emission generation.

**Аннотации депонированных статей**

УДК 551.501.72

**О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИНФОРМАТИВНОСТИ МИКРОВОЛНОВОГО  
РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЫ**

*Ш. Д. Китай, А. П. Наумов, М. И. Сумин*

Обсуждается связь классической меры информации по Шеннону со статистическими характеристиками радиоизлучения атмосферы. Вычислены значения количества информации

$$I(X, T_a) = \frac{1}{2} \log \frac{\det B_{XX} \cdot \det B_{T_a T_a}}{\det B_{XT_a}},$$

содержащейся в векторе яркостных температур  $T_a$  атмосферы о векторах температуры ( $X = T$ ) и удельной влажности ( $X = q$ ). В приведенном выражении  $B$  — матрица ковариаций соответствующих векторов. Результаты, полученные из теории информации, сравниваются с результатами анализа ряда физических характеристик радиоизлучения атмосферы в микроволновом диапазоне и с результатами восстановления высотной зависимости метеоэлементов  $T(h)$ ,  $q(h)$  при решении обратных задач для случая дистанционного зондирования с поверхности Земли. Отмечается достаточно высокая эффективность восстановления профилей температуры и трудности решения аналогичной задачи при определении высотных профилей влажности из радиометрических данных. Результаты численного эксперимента по восстановлению высотных профилей метеоэлементов сопоставляются в статистическом плане с результатами определения тех же элементов методом оптимальной экстраполяции по приземным значениям  $T_0$  и  $q_0$ . Обращается внимание на целесообразность матричного обобщения характеристик информативности и ценности радиометрических измерений при постановке задач дистанционного зондирования атмосферы,

*Статья депонирована в ВИННИТИ,  
регистр. № 3079—79. Деп. от 16 августа 1979 г.*

УДК 533.951 : 523.164

## О ФОРМИРОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ РАДИОСИГНАЛОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ОКОЛОСОЛНЕЧНОЙ ПЛАЗМЕ

*B. M. Разманов, A. I. Ефимов, O. I. Яковлев*

Анализируются особенности формирования спектральной линии монохроматических радиоволн при распространении их в турбулентной околосолнечной плазме для случая, когда пространственный спектр турбулентности является степенным с конечными значениями внешнего и внутреннего масштабов турбулентности. Показано, что наблюдавшаяся в экспериментах радиопросвечивания околосолнечной плазмы нормализация формы спектральной линии при малых удалениях радиолиний от Солнца может быть объяснена влиянием внутреннего масштаба турбулентности. На основании проведенного теоретического анализа определяются значения внутреннего масштаба турбулентности околосолнечной плазмы по данным экспериментов радиопросвечивания, выполненных с помощью космического аппарата «Венера-10». Показано, что с удалением от Солнца этот масштаб возрастает от значения порядка 2 км на расстояниях 6 радиусов Солнца до 20 км при удалении на 20 радиусах.

### ВВЕДЕНИЕ

Методы когерентного радиопросвечивания оказались эффективным средством исследования околосолнечной плазмы. Использование космических аппаратов вместо естественных радиоастрономических источников позволило установить, что форма пространственного спектра неоднородностей околосолнечной плазмы является степенной, спектральный индекс которой близок к значению этой величины для спектра Колмогорова — Обухова [1–3, 9]. Определен также радиальный профиль интенсивности неоднородностей электронной концентрации в короне Солнца [4], а также скорость движения неоднородностей в области ускорения солнечного ветра [5, 6]. При сопоставлении экспериментальных данных с теоретическими выражениями авторами цитированных работ предполагалось, что пространственный спектр неоднородностей околосолнечной плазмы определяется в виде

$$\Phi_N(q, R) \propto (q_0^2 + q^2)^{-p/2},$$

где  $q_0^{-1} = L_0$  — внешний масштаб турбулентности.

Как показали эксперименты радиопросвечивания, выполненные с помощью аппаратов «Венера-10» и «Гелиос-1, 2», этот анализ является адекватным для описания закономерностей формирования спектральной линии радиосигналов при умеренных флюктуациях фаз (порядка десяти радиан и меньше [5, 7]). Однако в режиме сильного рассеяния, что имеет место при распространении радиоволн в близких к поверхности Солнца областях, обнаружено отклонение формы спектральной линии от теоретической, а именно, с приближением трассы распространения к Солнцу происходит нормализация формы энергетического спектра. В случае дециметровых радиоволн этот эффект начинает про-

являться на угловых расстояниях между космическим аппаратом и центром Солнца меньше  $2^\circ$  [7], а в сантиметровом диапазоне волн, как это можно видеть из приводимых в [5, 8] экспериментальных данных, при угловых расстояниях менее  $0^\circ,6$ .

Целью настоящего сообщения является детальный анализ закономерностей формирования спектральной линии монохроматических радиоволн при распространении их в солнечной короне в режиме умеренного и сильного рассеяния сигналов неоднородностями околосолнечной плазмы и определение на основе этого анализа некоторых характеристик турбулентности околосолнечной плазмы по данным экспериментов радиопросвечивания.

### 1. УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ РАДИОСИГНАЛОВ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ РАССЕЯНИЯ

Средняя форма линии первоначально монохроматического излучения после прохождения через движущуюся турбулентную среду в соответствии с [1] определяется выражением

$$G_W(f - f_0) = A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} D_s(v\tau) - i2\pi(f - f_0)\tau \right] d\tau. \quad (1)$$

Здесь  $A_0$  — амплитуда радиоволны,  $f_0$  — излучаемая частота,  $D_s(v\tau)$  — временная структурная функция флюктуаций фаз,  $v$  — скорость движения неоднородностей через трассу распространения. Общее выражение для структурной функции флюктуаций фаз волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , применительно к турбулентной плазме может быть записано [10, 11] в виде

$$D_s(x, y) = 4\pi r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz \int_0^\infty dq_x dq_y \times \\ \times [1 - \cos(q_x x + q_y y)] \Phi_N(q_x, q_y, q_z = 0, R), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — длина радиоволны,  $r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$  см — радиус электрона,  $q_x, q_y, q_z$  — пространственные волновые числа,  $L$  — длина трассы распространения,  $\Phi_N(q_x, q_y, q_z)$  — пространственный спектр флюктуаций электронной концентрации, интенсивность которых зависит от расстояния до Солнца  $R$ .

Будем предполагать в дальнейшем изотропность неоднородностей околосолнечной плазмы, т. е.  $q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$ . В этом случае (2) преобразуется в выражение

$$D_s(\rho) = 8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz \int_0^\infty [1 - J_0(q\rho)] q \Phi_N(q, R) dq. \quad (3)$$

Здесь  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $q^2 = q_x^2 + q_y^2$ ,  $J_0(q\rho)$  — функция Бесселя нулевого порядка. Соответствующая временная структурная функция флюктуаций фаз получается из (3) заменой  $\rho$  на  $v\tau$ , т. е.

$$D_s(v\tau) = 8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz \int_0^\infty [1 - J_0(qv\tau)] q \Phi_N(q, R) dq. \quad (3')$$

При анализе рассеяния монохроматических радиоволн в околосолнечной плазме пространственный спектр неоднородностей электронной концентраций предполагался в виде

$$\Phi_N(q, R) = C_N^2(R)(q_0^2 + q^2)^{-p/2}, \quad (4)$$

где множитель  $C_N^2(R)$  характеризует интенсивность флюктуаций электронной концентрации [1-3]. Спектр (4) имеет конечные значения внешнего масштаба турбулентности  $q_0^{-1}$ . Пространственная структурная функция флюктуаций фаз в этом случае имеет вид

$$D_s(\rho) = \frac{\pi^3}{2^{p-3}} r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz C_N^2(R) \left\{ \sin \left[ (p-2) \frac{\pi}{2} \right] \Gamma^2(p/2) \right\}^{-1} \rho^{p-2}. \quad (5)$$

Временная структурная функция флюктуаций фаз может быть получена из (5) заменой  $\rho$  на  $v\tau$ , т. е.

$$D_s(\tau) = \frac{\pi^3}{2^{p-3}} r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz C_N^2(R) \left\{ \sin \left[ (p-2) \frac{\pi}{2} \right] \Gamma^2(p/2) \right\}^{-1} v^{p-2} \tau^{p-2}. \quad (6)$$

Соответствующий этой структурной функции энергетический спектр имеет крылья, где спектральная плотность изменяется как

$$G_W(f - f_0) \propto (f - f_0)^{-(p-1)}.$$

Это соотношение использовалось в [1, 3, 7] для нахождения спектрального индекса  $p$  пространственного спектра неоднородностей околосолнечной плазмы по данным спектрального анализа радиоволн.

Для количественного описания энергетического спектра радиосигналов используются также значения ширины спектральной линии, определяемой по различным критериям:

а) по уровню половинной мощности  $\Delta f_{0.5} = f_2 - f_1$ , где частоты  $f_1$  и  $f_2$  соответствуют половинному значению максимума спектральной плотности энергии;

б) эквивалентная ширина спектральной линии

$$\Delta f_{\text{экв}} = \frac{1}{G_W(0)} \int_{-\infty}^{\infty} G_W(f - f_0) d(f - f_0),$$

в) эквивалентная ширина спектра  $\Delta f_B$ , определяемая другим способом [2],

$$\int_{-\Delta f_B/2}^{\Delta f_B/2} G_W(f - f_0) d(f - f_0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_W(f - f_0) d(f - f_0).$$

Связь между приведенными характеристиками зависит от формы модулирующего процесса. Для случая гауссовой функции корреляция модулирующего процесса

$$\Delta f_{\text{экв}} = 1.065 \Delta f_{0.5} = 1.86 \Delta f_B.$$

Если спектр имеет вид резонансной кривой, то

$$\Delta f_{\text{экв}} = \frac{\pi}{2} \Delta f_{0.5} = \frac{\pi}{2} \Delta f_B.$$

Указанные соотношения не всегда удобны для анализа экспериментальных данных, хотя практически они определяются просто. Аналитическое выражение для произвольного  $p$  может быть получено лишь для  $\Delta f_{\text{экв}}$ , для двух других характеристик возможны лишь численные расчеты.

Как будет показано ниже, информативными характеристиками

формы спектральной линии являются центральные моменты распределения спектральной плотности  $G_W$  по частоте

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} G_W(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_0)^k d(\omega - \omega_0). \quad (7)$$

Однако для спектра вида (4) интеграл (7) является расходящимся при  $p < 4$  и  $k > 1$ , в то время как экспериментальные данные показывают, что все моменты имеют конечные значения. Кроме того, при малых угловых расстояниях форма спектральной линии радиосигналов нормализуется [7], что не согласуется с видом пространственного спектра неоднородностей (4).

Для объяснения наблюдавшегося эффекта нормализации спектральной линии рассмотрим более общую модель пространственного спектра неоднородностей электронной концентрации, в которой интенсивность мелкомасштабных неоднородностей среды с волновыми числами  $q > q_m$  резко подавляется:

$$\Phi_N(q, R) = C_N^2(R) \frac{\exp(-q^2/q_m^2)}{(q_0^2 + q^2)^{p/2}} = C_N^2(R) \Phi_{N_0}(q). \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\Phi_{N_0}(q) = \frac{\exp(-q^2/q_m^2)}{(q_0^2 + q^2)^{p/2}}.$$

Множитель  $C_N^2(R)$  характеризует интенсивность неоднородностей околосолнечной плазмы на различных расстояниях от Солнца  $R$  и определяется из условия нормировки, т. е. равенства интеграла от пространственного спектра неоднородностей по всем волновым числам  $q$  дисперсии флюктуаций электронной концентрации:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N(q_x, q_y, q_z, R) dq_x dq_y dq_z = \sigma_N^2(R).$$

В случае изотропного спектра турбулентности (8) имеем

$$C_N^2(R) 4\pi \int_0^{\infty} q^2 \frac{\exp(-q^2/q_m^2)}{(q_0^2 + q^2)^{p/2}} dq = \sigma_N^2(R).$$

При типичных значениях характеристик  $q_0$  и  $q_m$  для околосолнечной плазмы интеграл в этом выражении слабо зависит от  $q_m$ , поэтому можно положить  $q_m \rightarrow \infty$ , так что

$$C_N^2(R) = \sigma_N^2(R) \frac{p-3}{2\pi^{3/2}} \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma((p-1)/2)} q_0^{p-3}, \quad (9)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Подобная модель пространственного спектра рассматривалась в [13] применительно к случаю распространения радиоволн в межзвездной среде. Для спектра вида (8) конечными являются все моменты

$$M_k = \int_0^{\infty} q^k \Phi_{N_0}(q) dq. \quad (10)$$

В этом случае при малых  $\tau < (q_m v)^{-1}$  временная структурная функция флюктуаций фазы выражается через третий момент  $M_3$ :

$$D_s(\tau) = 2\pi^2 r_e^2 \lambda^2 \int_0^L dz C_N^2(R) M_3 v^2 \tau^2. \quad (11)$$

В дальнейшем среду, находящуюся между источником радиоволн и приемником, заменим эквивалентным фазовым экраном, расположенным в месте наибольшего приближения лучевой линии к Солнцу ( $R = R_0$ ). Такое представление справедливо ввиду резкого убывания интенсивности неоднородностей с удалением от Солнца и может быть применено для расстояний  $R < 50 R_\odot$  [12]. Толщина эквивалентного фазового экрана  $L_{\text{экв}}$  зависит от минимального расстояния между лучевой линией и Солнцем и при квадратичном законе убывания интенсивности неоднородностей с удалением от Солнца равна  $2/\sqrt{3} R_0$ .

Асимптотическое выражение для временной структурной функции можно переписать следующим образом:

$$D_s(\tau) = 2\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2(R_0) L_{\text{экв}} M_3 v^2 \tau^2 \quad (12)$$

при  $\tau \ll (q_m v)^{-1}$ .

Поведение структурной функции  $D_s(\tau)$  при малых  $\tau$  становится важным в двух случаях. При больших  $C_N^2$  функция  $\exp\left[-\frac{1}{2} D_s(\tau)\right]$  в выражении (1) быстро убывает при увеличении  $\tau$ . Поэтому при сильном рассеянии радиоволн наибольший вклад в интеграл (1) дает область малых  $\tau$ . Аналогично при произвольных флуктуациях интенсивности форма спектральной линии при больших девиациях частоты ( $f - f_0$ ) определяется в основном областью малых  $\tau$  из-за быстроосциллирующего множителя  $\exp[-i 2\pi(f - f_0)\tau]$ . Из (1) и (12) следует

$$G_W(f - f_0) = A_0^2 \int_0^\infty d\tau \exp [-2\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2(R_0) L_{\text{экв}} M_3 v^2 \tau^2] \cos [2\pi(f - f_0)\tau],$$

что после интегрирования дает

$$\begin{aligned} G_W(f - f_0) &= \frac{A_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [r_e \lambda C_N(R_0) L_{\text{экв}}^{1/2} M_3^{1/2} v]^{-1} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{(f - f_0)^2}{2r_e^2 \lambda^2 C_N^2(R_0) L_{\text{экв}} M_3 v^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Спектральная линия имеет гауссову форму, причем ширина ее

$$\Delta f_{\text{экв}} = \sqrt{2\pi} r_e \lambda C_N(R_0) L_{\text{экв}}^{1/2} v M_3^{1/2}. \quad (14)$$

Таким образом, изменение спектральной плотности энергии в области больших девиаций частоты  $\delta f = (f - f_0)$  и при сильных возмущениях фазы для произвольных девиаций  $\delta f$  происходит в соответствии с гауссовой кривой. Поведение спектра в области умеренных значений девиации частоты определяется конкретной формой пространственного спектра неоднородностей.

Рассмотрим связь моментов распределения спектральной плотности  $G_W(f - f_0)$  с характеристиками турбулентной околосолнечной плазмы. Используем для нахождения этой связи выражение для функции когерентности сигнала

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (15)$$

Дифференцируя (15), получим

$$\frac{d^k B}{d \tau^k} (0) = (i)^k m_k. \quad (16)$$

Ввиду симметричности спектральной линии относительно центральной частоты отличными от нуля будут только четные моменты. В частности,

$$m_2 = 2\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{окв}} v^2 M_3; \quad (17)$$

$$m_4 = \frac{3}{2} \pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{окв}} v^4 M_5 + 3m_2^2. \quad (18)$$

Если  $C_N$  пропорционально  $\sigma_N$ , которое, в свою очередь, пропорционально средней электронной концентрации  $N_e$ , то второй момент энергетического спектра радиосигналов характеризует поток солнечного ветра  $N_e v$ .

Коэффициент эксцесса формы спектральной линии в рассматриваемом случае

$$\gamma = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{3}{8} \frac{1}{\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{окв}}} \frac{M_5}{M_3^2} \quad (19)$$

не зависит от скорости движения неоднородностей, всегда положителен и уменьшается с ростом интенсивности неоднородностей, что согласуется с экспериментальными данными.

Определим еще одну характеристику, выводимую непосредственно из экспериментальных данных,

$$\gamma_1 = \gamma m_2 = \frac{3}{4} v^3 \frac{M_5}{M_3^2}, \quad (20)$$

которая при известных значениях моментов  $M_3$  и  $M_5$  позволяет найти профиль скорости движения неоднородностей.

Из (10) следует, что

$$M_k = C_N^2 \int_0^\infty q^k \frac{\exp(-q^2/q_m^2)}{(q_0^2 + q^2)^{p/2}} dq.$$

Обозначим  $q/q_m = x$ . Тогда

$$M_k = C_N^2 q_m^{k+1-p} \int_0^\infty \frac{x^k \exp(-x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^{p/2}} dx, \quad (21)$$

где  $\alpha = q_0/q_m$  — отношение внутреннего и внешнего масштабов турбулентности. Численное интегрирование показывает, что значение второго момента  $M_2$  практически не зависит от параметра  $\alpha$  при изменении его в пределах от  $10^{-3}$  до  $10^{-8}$  и от внутреннего масштаба неоднородностей  $q_m^{-1}$  при вариации его от  $10 \text{ км}$  до  $0,1 \text{ км}$ . Для более высоких моментов картина другая: значения интегралов в (21) практически не изменяются при изменении  $\alpha$  в широких пределах (от  $10^{-3}$  до  $10^{-7}$ ). Поэтому сами моменты  $M_k$  при  $k > 2$  оказываются чувствительными к внутреннему масштабу турбулентности  $q_m^{-1}$ . Учитывая, что при  $\alpha = 10^{-5} \div 10^{-7}$  значение интеграла в (21) при  $p = 11/3$  равно 2,747 для  $k = 3$  и 0,464 для  $k = 5$ , получаем  $\gamma_1 = 0,127 v^2 q_m^2$ , откуда следует соотношение для оценки внутреннего масштаба турбулентности

$$q_m = 2,8 \gamma_1^{1/2} v^{-1}. \quad (22)$$

Это выражение будет использовано в разд. 3 при определении  $q_m$  для околосолнечной плазмы на основе данных экспериментов радиопросвещивания.

## 2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПО ДАННЫМ СПЕКТРАЛЬНОГО УШИРЕНИЯ

Покажем возможность восстановления формы спектра неоднородностей по данным уширения спектральной линии.

Получая спектр сигнала из экспериментальных данных, используя фурье-преобразование, можно найти временную функцию когерентности сигнала

$$B(\tau) = \exp \left[ -\frac{1}{2} D_s(\tau) \right]. \quad (23)$$

Логарифмируя (23) и учитывая (3'), после замены  $qv = \Omega$  получим

$$D_s(\tau) = -8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{экв}} v^{-2} \int_0^\infty \Omega [1 - J_0(\Omega \tau)] \Phi_{N_0} \left( \frac{\Omega}{v} \right) d\Omega. \quad (24)$$

Дифференцируя это соотношение по  $\tau$ , имеем

$$D'_s(\tau) = -8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{экв}} v^{-2} \int_0^\infty \Omega^2 J_1(\Omega \tau) \Phi_{N_0} \left( \frac{\Omega}{v} \right) d\Omega, \quad (25)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя 1-го порядка. Соотношение (25) является преобразованием Бесселя от функции  $\Omega \Phi_{N_0}(\Omega)$ . Обращая его, получим

$$8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{экв}} v^{-2} \Omega \Phi_{N_0}(\Omega) = - \int_0^\infty D'_s(\tau) \tau J_1(\Omega \tau) d\tau. \quad (26)$$

Это выражение позволяет по данным спектрального уширения радиоволн определять форму пространственного спектра неоднородностей. Точность определения формы спектра и минимальных размеров неоднородностей зависит от точности воспроизведения формы спектральной линии радиосигналов и в конечном счете определяется отношением сигнал/шум. Наибольшие размеры неоднородностей получаемых спектров  $L_{\text{max}}$  ограничены естественной шириной спектральной линии излучаемых радиоволн  $\Delta F_0$ :

$$L_{\text{max}} = 1/q_{\min} = v/(2\pi\Delta F_0).$$

Практические значения  $\Delta F_0$  составляют десятые доли герц [2, 7], поэтому  $L_{\text{max}} \leqslant 200 \div 300 \text{ км}$ .

Укажем другую форму преобразования, не требующую дифференцирования получаемой из экспериментов функции  $D_s(\tau)$ . Проинтегрируем обе части (25) по  $\tau$ . Тогда

$$8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{экв}} v^{-2} \int_0^\infty \Omega \Phi_{N_0}(\Omega) d\Omega = -D_s(\infty).$$

Подставляя это в (23), получим

$$D_s(\tau) - D_s(\infty) = 8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{экв}} v^{-2} \int_0^\infty \Omega \Phi_{N_0}(\Omega) J_0(\Omega \tau) d\Omega. \quad (26')$$

Возвращаясь к функции когерентности  $B(\tau)$ , имеем

$$\ln \frac{B(\tau)}{B(\infty)} = -8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{екв}} v^{-2} \int_0^\infty \Omega \Phi_{N_0}(\Omega) J_0(\Omega \tau) d\Omega.$$

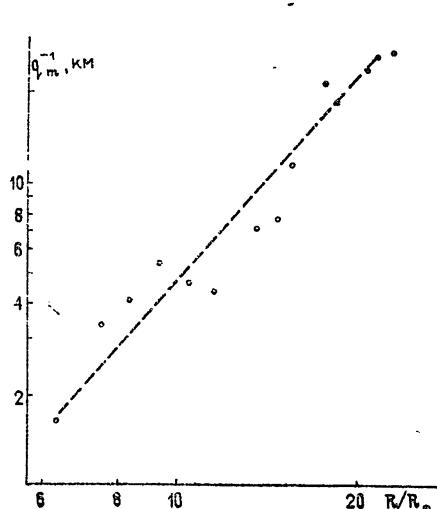
Обращение этого преобразования дает

$$8\pi^2 r_e^2 \lambda^2 C_N^2 L_{\text{екв}} v^{-2} \Phi_{N_0}(\Omega) = - \int_0^\infty \ln \frac{B(\tau)}{B(\infty)} \tau J_0(\Omega \tau) d\tau. \quad (27)$$

Форма пространственного спектра неоднородностей  $\Phi_{N_0}(q)$  определяется в этом случае по экспериментально найденной функции когерентности поля  $B(\tau)$ , а также по заданному или определенному независимым способом профилю скорости движения неоднородностей.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ОКОЛОСОЛНЕЧНОЙ ПЛАЗМЫ ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ

В табл. 1 приведены результаты анализа спектрального уширения дециметровых радиоволн в околосолнечной плазме, полученные в экспериментах радиопросвечивания с помощью станции «Венера-10». В первом столбце указаны расстояния между лучевой линией и центром Солнца, выраженные в единицах солнечного радиуса  $R_\odot$ . В следующем столбце даны величины второго момента спектра  $m_2$ . В третьем и четвертом столбцах представлены усредненные по 10—30 спектрам значения коэффициента эксцесса  $\gamma$  и характеристики  $\gamma m_2$ . Скорости движения потоков плазмы (пятый столбец) взяты из измерений ее в экспериментах радиопросвечивания с помощью аппаратов «Венера-10» в 1976 г. и «Гелиос-1, 2» в 1975 г. [5]. В этом же столбце указаны и возможные разбросы скорости движения, которые могут быть связанны как с изменением солнечной активности в течение года, так и с погрешностями принятых методов определения скорости из радиоданных. Результаты вычислений характеристики  $q_m$  из имеющихся экспериментальных данных сведены в последнем столбце таблицы. На рис. 1 дана зависимость от расстояния  $R/R_\odot$  величины, обратной  $q_m$ , которая непосредственно определяет внутренний масштаб турбулентности. Из рис. 1 следует, что внутренний масштаб турбулентности околосолнечной плазмы уменьшается с приближением к Солнцу. Необходимо отметить, что точность вычисления высших моментов экспериментальных



спектров  $G_w(f - f_0)$  сильно снижается из-за влияния шумовых флуктуаций на крыльях спектров. Поэтому сейчас можно говорить о том, что нами определен порядок величины внутреннего масштаба турбулентности и установлена тенденция к его возрастанию с удалением от Солнца, причем увеличение  $q_m^{-1}$  с расстоянием  $R$  происходит приблизительно с той же скоростью, что и увеличение гирорадиуса ионов [14].

Рис. 1. Зависимость внутреннего масштаба турбулентности околосолнечной плазмы от радиального расстояния по данным радиопросвечивания

Таблица 1  
Характеристики спектров сигналов аппарата «Венера-10» и турбулентности  
околосолнечной плазмы

$R/R_\odot$	$m_2, \Gamma\zeta^2$	$\gamma$	$\gamma_1, \Gamma\zeta^2$	$v, \text{км/с}$	$q_m \cdot 10^{-2}, \text{км}^{-1}$
6,32	301	1,45	437	$95 \pm 40$	61,6
7,34	45,6	2,44	111	$114 \pm 40$	26,8
8,36	36,7	4,22	155	$144 \pm 24$	24,2
9,36	22,5	4,78	108	$156 \pm 24$	18,6
10,38	22,4	6,71	150	$161 \pm 15$	21,3
11,40	22,4	8,07	181	$165 \pm 35$	22,7
13,45	14,1	7,12	100	$201 \pm 19$	14,0
14,65	12,3	7,84	96,5	$210 \pm 20$	13,1
15,50	6,10	7,54	46,1	$218 \pm 18$	8,7
17,60	3,20	10,12	32,4	$345 \pm 100$	4,6
18,54	3,75	10,38	38,9	$345 \pm 100$	5,1
20,60	1,71	16,85	28,8	$350 \pm 90$	4,3
21,60	1,47	15,40	22,6	$350 \pm 90$	3,8
22,61	1,11	19,12	21,2	$350 \pm 90$	3,7

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совокупность экспериментальных данных об уширении спектральной линии монохроматических радиоволн при распространении в околосолнечной плазме свидетельствует о наличии в пространственном спектре неоднородностей околосолнечной плазмы внутреннего масштаба турбулентности, влияние которого проявляется в конечных значениях моментов распределения спектральной плотности энергии по частоте и в нормализации формы спектральной линии в режиме сильного рассеяния радиоволн. Теоретический анализ уширения спектральной линии движущимися неоднородностями солнечной короны устанавливает связь между вторым и четвертым моментами спектра с характеристиками турбулентности, что позволяет при известной скорости движения определить радиальный профиль внутреннего масштаба неоднородностей. По данным аппарата «Венера-10» внутренний масштаб турбулентности околосолнечной плазмы имеет порядок нескольких километров на расстояниях 5–10 радиусов Солнца и резко возрастает с увеличением радиального расстояния. Изменение величины внутреннего масштаба неоднородностей с расстоянием имеет такой же вид, как и зависимость гирорадиуса ионов от расстояния до Солнца.

Анализ спектрального уширения радиосигналов является эффективным средством изучения таких характеристик неоднородностей околосолнечной плазмы, как форма пространственного спектра, интенсивность неоднородностей, скорость их движения, внутренний масштаб турбулентности и радиальные профили указанных величин. Одновременно с этим выявленные особенности в поведении характеристик пространственного спектра неоднородностей заставляют проводить более строгий анализ уширения спектральной линии с учетом радиальной вариации как внутреннего, так и внешнего масштабов турбулентности, что может объяснить также и другие особенности спектрального уширения радиосигналов в режимах умеренного и сильного рассеяния.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 10, 1507 (1976).
2. R. Woo, F.-C. Yang, A. Ishimaga, Astrophys. J., 210, № 3, pt. 1, 593 (1976).
3. А. И. Ефимов, О. И. Яковлев, В. М. Размансов, В. К. Штырков, Письма в АЖ, 3, 7, 322 (1977).

- 4 М. А. Колосов, О. И. Яковлев, А. И. Ефимов, В. М. Размансов, В. И. Рогальский, В. К. Штырков, УФН, 123, № 4, 698 (1977).
- 5 R. Woo, Astrophys. J., 219, № 2, pt. 1, 727 (1978).
- 6 М. А. Колосов, О. И. Яковлев, В. И. Рогальский, А. И. Ефимов, В. М. Размансов, В. К. Штырков, ДАН СССР, 241, № 3, 555 (1978).
- 7 А. И. Ефимов, О. И. Яковлев, В. И. Рогальский, В. М. Размансов, В. К. Штырков, Космические исследования, 16, № 3, 419 (1978).
- 8 G. L. Tyler, J. P. Vrengle, T. A. Komarek, A. I. Zygielbaum, J. Geophys. Res., 82, № 28, 4335 (1977).
- 9 М. А. Колосов, Н. А. Савич, М. Б. Васильев, А. С. Вышлов, В. И. Рогальский, В. А. Самовол, Л. Н. Самознаев, УФН, 123, № 4, 700 (1977).
- 10 В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- 11 А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, № 3, 415 (1974).
- 12 М. А. Колосов, О. И. Яковлев, А. И. Ефимов, Е. П. Молотов, В. И. Рогальский, В. М. Размансов, В. К. Штырков, Радиотехника и электроника, 23, № 9, 1829 (1978).
- 13 L. T. Little, D. N. Matheson, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 162, № 4, 329 (1973).
- 14 L. T. Little, Astron. and Astrophys., 10, № 2, 301 (1971).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
4 сентября 1978 г

### FORMATION OF RADIO SIGNAL SPECTRAL LINE WHEN PROPAGATING IN THE CIRCUMSOLAR PLASMA

*V. M. Razmanov, A. I. Efimov, O. I. Yakovlev*

Peculiarities of the spectral line formations of monochromatic radio waves when they propagate in a turbulent circumsolar plasma are analyzed for the case when the spacial turbulence spectrum is the power one with the finite values of the internal and external scales of turbulence. It is shown that the normalization of the spectrum line form, observed in the experiments of the circumsolar plasma radio sounding when the radio line is at small distance from the Sun, may be explained by the influence of the internal scale of the turbulence. On the basis of the theoretical analysis carried out values of the turbulence internal scale of the circumsolar plasma are defined according to the data of radio sounding experiments made by a cosmic apparatus «Venera-10». It is shown that when removing from the Sun this scale increases from the value of the order of 2 km at distances of 6 solar radii up to 20 km with 20 radii remove.

УДК 621.371.242.7

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТРАЕКТОРИИ ЛУЧА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН В НЕРЕГУЛЯРНОМ ИОНОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ

*M. B. Тинин*

Методом усреднения исследуется поведение луча в трехмернонеоднородном ионосферном волноводе. Получены выражения для вариаций луча, пригодные как на больших, так и на малых расстояниях.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появился ряд работ, посвященных волноводному распространению сигналов в неоднородной среде, существенному, в частности, при дальнем ионосферном распространении коротких радиоволн [1–4]. Волноводное распространение весьма неплохо изучено для слоистых сред [5]. Большой интерес представляет исследование нерегулярных волноводов, свойства которых меняются вдоль трассы. В геометрооптическом приближении такой анализ связан с асимптотическим интегрированием траектории луча [6]. Когда свойства волновода достаточно медленно меняются вдоль трассы, для ряда оценок используется условие постоянства адиабатического инварианта [3, 4].

Для определения вариаций траектории луча в горизонтальной плоскости в трехмернонеоднородной среде в работах [3, 7] использовано адиабатическое приближение. Однако такой подход справедлив только при большом удалении корреспондентов и не согласуется с известными результатами [8–11] обычного метода возмущений, применимого, по крайней мере, на малых расстояниях. В настоящей работе для анализа вариаций траектории в трехмернонеоднородной среде применен метод усреднения [12–14], что позволило получить выражения, справедливые как на малых, так и на больших расстояниях.

### 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К УРАВНЕНИЮ ЛУЧА

Рассмотрим поведение луча в волноводе, образованном в неоднородной среде, диэлектрическая проницаемость которой

$$\epsilon = \epsilon(v_x, v_y, z). \quad (1)$$

Здесь введением малого параметра  $v \ll 1$  мы явно учитываем медленное изменение среды в горизонтальной плоскости. Поведение луча описывается следующей системой:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} \psi; \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad (3)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \varphi) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \operatorname{ctg} \psi - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right); \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2\varepsilon} (1 + \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \psi) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \operatorname{tg} \varphi \right). \quad (5)$$

В (1) — (5)  $z$ ,  $x$ ,  $y$  — декартовы координаты луча,  $\psi$  — угол между осью  $z$  и проекцией на плоскость  $xz$  касательной к лучу,  $\varphi$  — азимутальный угол.

Чтобы применить метод усреднения [12—14], необходимо предварительно преобразовать систему (2) — (5). Для этого введем новые «медленные» ( $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$ ) и «быструю» ( $K$ ) переменные:

$$\tau = v x; \quad (6)$$

$$\sigma = v y; \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon(\tau, \sigma, z) \sin^2 \psi}{1 + \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \varphi}; \quad (8)$$

$$K = \frac{1}{T} \int \frac{\sqrt{\alpha} \cos \varphi dz}{\sqrt{\varepsilon \cos^2 \varphi - \alpha}} + K_0, \quad (9)$$

где

$$T = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{\alpha} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon \cos^2 \varphi - \alpha}} dz \quad (10)$$

— период осцилляции траектории луча. Интегралы в правых частях (9), (10) взяты при фиксированных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$ , а точки поворота  $z_1, z_2$  ( $\tau$ ,  $\sigma$ ) определяются из условия

$$\varepsilon(\tau, \sigma, z_1, z_2) \cos^2 \varphi - \alpha = 0. \quad (11)$$

Смысл обозначений (8), (9) достаточно ясен для горизонтально однородной среды. В этом случае  $\varphi = \text{const}$  и  $\alpha$  принимает значение постоянной в законе Снеллиуса

$$\alpha = \varepsilon(z) \sin^2 \beta = \text{const}, \quad (12)$$

где угол падения  $\beta$  определяется из равенства

$$\sin^2 \beta = \frac{\sin^2 \psi}{1 + \sin^2 \psi \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (13)$$

Для горизонтально однородной среды  $K$ , как видно из определения (9), представляет нормированную на период  $T$  горизонтальную дальность осциллирующего луча. Поэтому в слоистой среде волноводная траектория является периодической (с периодом, равным 1) функцией от  $K$ .

В обозначениях (6) — (10) уравнения траектории луча принимают следующий вид:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{T(\alpha, \tau, \sigma, \varphi)} + v S(\alpha, \tau, \sigma, \varphi, K); \quad (14)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} (\tau, \sigma, K); \quad (15)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = v \operatorname{tg} \varphi; \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = v \frac{\cos^2 \varphi}{2\alpha} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} (\tau, \sigma, K) - \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} (\tau, \sigma, K) \right]; \quad (17)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = v, \quad (18)$$

где  $S$  — результат дифференцирования по  $\tau$  правой части соотношения (9) при фиксированном  $z$ :

$$\begin{aligned} S = \frac{dK}{d\tau} \Big|_z &= \frac{\partial K}{\partial \tau} + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial K}{\partial \sigma} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{2\alpha} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right] \frac{\partial K}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Система (14)–(18) является системой с быстро вращающейся фазой [12, 13]. Правые части уравнений (14)–(18) являются периодическими функциями быстрой переменной  $K$  и, следовательно, допускают усреднение. Поэтому к этой системе можно применить обычную схему метода усреднения [12, 14], подобно тому, как это сделано для двумернонеоднородной среды в работе [15]\*. В результате получаем

$$K = \eta + v v_1 + v^2 v_2 + \dots; \quad (20)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + v u_1^{(1)} + v^2 u_2^{(1)} + \dots; \quad (21)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + v u_1^{(2)} + v^2 u_2^{(2)} + \dots; \quad (22)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + v u_1^{(3)} + v^2 u_2^{(3)} + \dots, \quad (23)$$

где

$$u_1 = T \int_0^\eta [b - F_1] \Big|_{K=\eta} d\eta + u_{10}; \quad (24)$$

$$v_1 = T \int_0^\eta \left[ S + u_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{T} - \Phi_1 \right] \Big|_{K=\eta} d\eta + v_{10}; \quad (25)$$

$$u_2 = T \int_0^\eta \left[ u_1 \frac{\partial b}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial b}{\partial \eta} - \Phi_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - F_2 \right] \Big|_{K=\eta} d\eta + u_{20}; \quad (26)$$

$$F_1 = \bar{b}; \quad (27)$$

$$F_2 = \left[ u_1 \frac{\partial b}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial b}{\partial \eta} - F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right]; \quad (28)$$

$$\Phi_1 = \left[ S + u_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{T} \right]. \quad (29)$$

Соотношения (24)–(29) записаны в векторной форме с помощью введенных векторов

\* См. также [16].

$$\boldsymbol{u}_1 = \{u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_1^{(3)}\}; \quad (30)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \{u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_2^{(3)}\}; \quad (31)$$

$$\xi = \{\bar{\alpha}, \bar{\sigma}, \bar{\varphi}\}. \quad (32)$$

Составляющими вектора  $\boldsymbol{b}$  являются правые части уравнений (15) — (17). В соотношениях (27) — (29) черта сверху означает усреднение по быстрой переменной  $\eta$ . Переменные  $\bar{\alpha}, \bar{\sigma}, \bar{\varphi}$  определяются из усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{dx} = v F_1 + v^2 F_2 + \dots \quad (33)$$

### 3. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Построим траекторию луча с точностью до членов первого порядка малости:

$$K = \eta + O(v); \quad (34)$$

$$\alpha = \bar{\alpha} + O(v); \quad (35)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + O(v); \quad (36)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + O(v). \quad (37)$$

Как видно из (34) — (37), в этом приближении для определения траектории луча достаточно решить усредненные уравнения:

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{T(\xi_2)} + v \Phi_1(\xi_1) + O(v^2); \quad (38)$$

$$\frac{d\xi_1}{dx} = v F_1(\xi_1). \quad (39)$$

Ввиду того, что мы строим асимптотическое решение уравнения луча на большом интервале  $x = O\left(\frac{1}{v}\right)$ , в правых частях (38), (39) должны бытьдержаны члены порядка  $v$ . По этой же причине в первое слагаемое правой части (38) необходимо подставить медленные переменные, определенные из уравнения следующего порядка точности:

$$\frac{d\xi_2}{dx} = v F_1(\xi_2) + v^2 F_2(\xi_2). \quad (40)$$

Заметим, что при известном решении уравнения (39) решение уравнения (40) легко определить с помощью обычного метода возмущения.

Распишем систему (39):

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dx} = v \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \tau} = 2v \frac{\sqrt{\bar{\alpha} \cos \bar{\varphi}}}{T} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \tau} dz}{\sqrt{\bar{\epsilon} \cos^2 \bar{\varphi} - \bar{\alpha}}}; \quad (41)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dx} = v \operatorname{tg} \bar{\varphi}; \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}}{dx} &= v \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{2\bar{\alpha}} \left( \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \tau} \right) = v \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{2\bar{\alpha}} \left( \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \right) = \\ &= \frac{v \cos^2 \bar{\varphi}}{2\bar{\alpha}} \left( \frac{2V_{\bar{\alpha}} \cos \bar{\varphi}}{T} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \sigma} dz}{\sqrt{\varepsilon \cos^2 \bar{\varphi} - \bar{\alpha}}} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

В последних равенствах (41), (43) учтено, что в первом приближении усреднение по переменной  $\eta$  может быть заменено интегрированием по  $z$  в силу соотношения

$$d\eta = dK + O(v) = \frac{V_{\bar{\alpha}} \cos \bar{\varphi} dz}{T \sqrt{\varepsilon \cos^2 \bar{\varphi} - \bar{\alpha}}} + O(v). \quad (44)$$

Нетрудно проверить, что в силу (41)–(43) на траектории луча выполняется условие постоянства\* адиабатического инварианта

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \frac{\bar{\alpha}}{\cos^2 \bar{\varphi}}} dz = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon(z_{1,2})} dz = \text{const}. \quad (45)$$

Условие (45), как известно [3, 4], является весьма полезным для проведения оперативного анализа условий дальнего распространения. В отличие от двумерного случая, где удовлетворение условию (45) эквивалентно решению усредненной системы, в трехмерном случае решение функционального уравнения (45) не исключает необходимости интегрирования системы (41)–(43), а только понижает ее порядок.

Таким образом, построение траектории в первом приближении свелось к решению системы (41)–(43) на интервале  $O\left(\frac{1}{v}\right)$ .

В отличие от исходной системы (2)–(5) система (41)–(43) не содержит быстро осциллирующих коэффициентов, поэтому численное решение ее может быть осуществлено со значительно меньшими затратами машинного времени. Более того, в некоторых случаях система (41)–(43) допускает применение аналитических приближенных методов.

#### 4. ВАРИАЦИИ УГЛОВ ПРИХОДА НА ТРАССАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Предположим, помимо большого характерного размера горизонтальной неоднородности, небольшую величину изменения параметров ионосферы по трассе распространения.

Пусть

$$\varepsilon = \varepsilon_0(z) + \lambda \varepsilon_1(\tau, \sigma, z) \quad (46)$$

$$(\lambda \ll 1).$$

Тогда систему (41)–(43) можно записать

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\tau} = \lambda \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau}; \quad (47)$$

\* Заметим, что адиабатический инвариант остается постоянным только вдоль траектории луча. Поэтому вывод уравнений «проекции луча» на Землю в работе [7], не учитывающий этого, не совсем корректен.

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\tau} = \operatorname{tg} \bar{\varphi}; \quad (48)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \lambda \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{2\bar{\alpha}} \left[ \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \tau} \right]. \quad (49)$$

Систему (47) — (49) на интервале  $\tau \equiv v x \sim 1$  можно решить методом возмущений. Первое приближение при начальных условиях

$$\bar{\alpha}(0) = \alpha_0, \quad \bar{\sigma}(0) = \sigma_0 \ll 1, \quad \bar{\varphi}(0) = \varphi_0 \ll 1 \quad (50)$$

имеет вид

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 + \lambda \int_0^\tau \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \tau} \Big|_{\substack{\sigma=\varphi=0 \\ \alpha=\alpha_0}} d\tau; \quad (51)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 + \frac{\lambda}{2\alpha_0} \int_0^\tau \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \sigma} \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \sigma=\varphi=0}} d\tau; \quad (52)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \varphi_0 \tau + \frac{\lambda}{2\alpha_0} \int_0^\tau (\tau - s) \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \sigma} \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \sigma=\varphi=0}} ds. \quad (53)$$

С помощью соотношений (52), (53) можно также решить задачу о вариации углов прихода при фиксированном расположении источника и наблюдателя, т. е. решить двухточечную траекторную задачу:

$$\sigma(x_t) = \sigma(0) = \sigma_0. \quad (54)$$

Для этого необходимо с помощью (53), (54) исключить из (52) угол  $\varphi_0$ :

$$\bar{\varphi}_t \equiv \bar{\varphi}(x_t) = \frac{\lambda}{2\alpha_0 \tau} \int_0^\tau s \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial \sigma} ds. \quad (55)$$

Выражения (51) — (55) внешне похожи на соответствующие формулы, полученные обычным методом возмущений [8—11]. Отличие заключается в том, что в подынтегральные выражения (51) — (55) входят не сами производные от  $\epsilon$ , а их средние по периоду осцилляций невозмущенной траектории.

Формулы (51) — (55) справедливы на больших — порядка  $\frac{1}{v}$  —

расстояниях, где уже несправедливы формулы обычного метода возмущения. С другой стороны, формулы (51) — (55) перестают быть справедливыми на малых — порядка  $1/v$  — расстояниях, так как при этом  $\tau \sim v$  и удержанные усредненные члены в (51) — (55) оказываются соизмеримыми с отброшенными, периодическими, поправками, определяемыми соотношениями (24) — (26). Если удержать из последних наибольшие по величине, то можно получить решение, равномерно переходящее на малых расстояниях в обычные формулы. В частности, для двухточечной задачи (54) имеем

$$\varphi_t = \frac{\lambda}{2\alpha_0 x_t} \int_0^{x_t} s \frac{\partial \epsilon_1}{\partial y} [z_0(s), v x_t, 0] ds - \frac{\lambda}{2\alpha_0 x_t} \int_0^{x_t} \frac{s^2}{2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\overline{\partial \epsilon_1}}{\partial y} ds, \quad (56)$$

где  $z_0(x)$  — траектория луча в регулярном волноводе ( $v = 0$ ). Нетруд-

но проверить, что на большом расстоянии, где  $x = O\left(\frac{1}{v}\right)$ , в (56)

существенный вклад дает второй член, из которого интегрированием по частям можно выделить (55). На малых расстояниях  $x \leq O(1)$  доминирующим в (56) является первое слагаемое, которое (с учетом  $v \ll 1$ ) переходит в формулу для вариации азимута, полученную в работе [11] обычным методом возмущения (прямым разложением Пуанкаре).

Из выражения (56) и аналогичных выражений, которые с помощью метода усреднения можно получить для других параметров траектории, следует такая картина изменения свойств волноводных траекторий с расстоянием\*. На малых расстояниях ход  $\varphi_f(x_i)$  имеет быстрые (поправка периода траектории) изменения. С удалением появляется медленная составляющая (второе слагаемое в (56)) вариаций углов прихода, которая на большом расстоянии становится доминирующей.

## 5. ПРИМЕР. НЕРЕГУЛЯРНЫЙ ВОЛНОВОД С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В качестве примера применения метода усреднения рассмотрим поведение траектории луча при дальнем распространении в волноводе, образованном в среде, диэлектрическая проницаемость которой с высотой изменяется по параболе, чьи параметры являются медленными функциями горизонтальных координат:

$$\epsilon = \epsilon_m - \left( \frac{z - z_m}{d} \right)^2 \quad (57)$$

$$(\epsilon_m = \epsilon_m(\tau, \sigma), \quad z_m = z_m(\tau, \sigma), \quad d = d(\tau, \sigma)).$$

В этом случае применение метода усреднения для траектории дает

$$z = z_m + \sqrt{cd} \sin 2\pi\eta + v \left\{ \frac{\sqrt{d\alpha c}}{4} \cos(2\pi\eta) \left[ \frac{dd}{d\tau} - \frac{1}{4\alpha} \frac{c}{d} \frac{\partial d}{\partial \tau} \right] + \right. \\ \left. + \frac{c}{2\sqrt{\alpha}} \frac{\partial z_m}{\partial \tau} \sin(4\pi\eta) - \frac{c}{16} \sqrt{\frac{c}{d\alpha}} \frac{\partial d}{\partial \tau} \cos(6\pi\eta) \right\} + O(v^2); \quad (58)$$

$$y = \bar{y} - v \frac{\sqrt{cd}}{2} \left[ 2 \frac{dz_m}{dn} \sin(2\pi\eta) - \frac{1}{4} \frac{dd}{dn} \sqrt{\frac{c}{d}} \cos(4\pi\eta) \right] + O(v^3), \quad (59)$$

где

$$\frac{d}{d\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{d}{dn} \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Функции  $\bar{\alpha}(\tau)$  и  $\bar{y}(\tau) \equiv \frac{\bar{\sigma}}{v}$  находятся из следующей системы усредненных уравнений первого приближения:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dx} = v \left\{ \frac{\partial \epsilon_m}{\partial \tau} + \frac{1}{d} \left[ \epsilon_m - \frac{\bar{\alpha}}{\cos^2 \bar{\varphi}} \right] \frac{\partial d}{\partial \tau} \right\} + O(v^3); \quad (60)$$

\* Заметим, что формула (56) справедлива как на малых, так и на больших расстояниях, но с различной абсолютной точностью. Относительная точность тем не менее, остается одной —  $O(\lambda) + O(v)$ .

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dx} = \nu \operatorname{tg} \bar{\varphi} + O(\nu^3); \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}}{dx} = & \nu \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{2\bar{\alpha}} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \tau} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{d} \left( \frac{\partial d}{\partial \sigma} - \operatorname{tg} \bar{\varphi} \frac{\partial d}{\partial \tau} \right) \left( \varepsilon_m - \frac{\bar{\alpha}}{\cos^2 \bar{\varphi}} \right) \right\} + O(\nu^2). \end{aligned} \quad (62)$$

Уравнение (60) может быть заменено функциональным уравнением, следующим из условия постоянства адиабатического инварианта (45),

$$d \left[ \varepsilon_m - \frac{\bar{\alpha}}{\cos^2 \bar{\varphi}} \right] = \text{const} = c. \quad (63)$$

Уравнения (60)–(63) можно решать либо с помощью метода возмущений (см. выше), либо строго, когда переменные разделяются. Здесь нужно заметить, что усредненные уравнения могут допускать разделение переменных, когда в исходных уравнениях луча (2)–(5) нельзя разделить переменные. В частности, в рассматриваемом случае модели среды (57) усредненные уравнения (60)–(63) не содержат  $z_m(\tau, \sigma)$  и, следовательно, легко решаются, когда переменной в модели (57) является только высота оси  $z_m$ .

По своему определению (см. (38), где  $\Phi_1 \equiv 0$ ) величина  $\eta$  в уравнениях (58), (59) равна

$$\eta = \int_0^x \frac{dx}{2\pi d(\nu x, \bar{\sigma}) \sqrt{\bar{\alpha}}} + \eta_0. \quad (64)$$

Как известно [12], на большом расстоянии  $x \sim \frac{1}{\nu}$  в силу операции интегрирования (64) «фаза»  $\eta$  определяется с меньшей точностью, чем «медленные» переменные  $\bar{\alpha}, \bar{\sigma}, \bar{\varphi}$ . Так, в данном случае погрешность переменных  $\bar{\alpha}, \bar{\sigma}, \bar{\varphi}$ , определяемых из (60)–(62), будет порядка  $\nu^2$ , а погрешность  $\eta$ , определяемая формулой (64), равна  $O(\nu)$ . На малых расстояниях  $x \leq O(1)$  точность всех определяемых величин становится одинаковой, и в результате можно получить формулы обычного метода возмущений.

Как видно из (58)–(62), нерегулярность параболического волновода приводит на большом расстоянии к тому, что, помимо вариаций луча быстрого характера и малой (порядка  $\nu$ ) амплитуды, появляются медленные вариации, характерный масштаб изменения которых порядка размеров неоднородностей. Амплитуда последних вариаций на большом расстоянии превышает амплитуду «быстрых» вариаций. Учитывая движение неоднородностей в ионосфере, из полученной пространственной картины следует аналогичная картина изменения во времени параметров радиоволны в ионосферном волноводе. Таким образом, при наблюдении углов прихода, поляризации и т. д. должны наблюдаться относительно быстрые колебания с периодом порядка отношения периода осцилляции траектории к скорости неоднородности, параметры (амплитуда и частота) которых медленно, но в значительно больших пределах изменяются во времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Космические исследования, 4, № 2, 221 (1966).
2. M. S. Wong, Radio Sci., 1, № 10, 1214 (1966).
3. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 13, 283 (1973).
4. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 14, 1008 (1974).
5. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1975.
6. Б. Е. Кинбер, Ю. А. Кравцов, Радиотехника и электроника, 22, № 12, 2470 (1977).
7. В. А. Баранов, И. Б. Егоров, А. В. Попов, в сб. Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1977, стр. 31.
8. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 1, 52 (1975).
9. В. Д. Гусев, Н. А. Махмутов, А. Хури, Радиотехника и электроника, 19, № 9, 1809 (1974).
10. R. P. W. Lewis, Proc. Phys. Soc., B66, № 4, 308 (1953).
11. М. В. Тинин, в сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 41, изд. Наука, М., 1977, стр. 40.
12. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, МГУ, М., 1971.
13. Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969.
14. Н. Н. Богоявленов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.
15. М. В. Тинин, в сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 39, изд. Наука, М., 1976, стр. 166.
16. М. В. Тинин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1906 (1977).

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию  
9 октября 1978 г.

## SOME PECULIARITIES OF THE RAY TRAJECTORY WHEN RADIO WAVES PROPAGATE IN AN UNREGULAR IONOSPHERE WAVEGUIDE

M. V. Tinin

By the averaging method the behaviour of a ray is investigated in a three-dimensional inhomogeneous ionosphere waveguide. Expressions have been obtained for ray variations which are applicable both at large and small distances.

УДК 538.574.2

## К ТЕОРИИ МЕДЛЁННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУЕ

Л. А. Зелексон, Н. С. Степанов

Приводятся примеры точных решений для медленных электромагнитных волн ТЕ-поляризации, распространяющихся в плоскослоистых потоках проводящей среды без дисперсии. Рассматриваются как «внешние» задачи — об отражении волн от потока с монотонным профилем скорости и струи конечной толщины, так и собственные волны, распространяющиеся вдоль таких потоков. Найденные решения показывают возможность усиления волн и обобщают результаты, полученные ранее для предельных случаев плавного и скачкообразного изменения скорости.

Анализ поведения медленных электромагнитных волн в неоднородных потоках ( $\omega - k\mathbf{v} < 0$ ,  $\omega$  и  $k$  — частота и волновой вектор волны,  $\mathbf{v}$  — скорость дрейфа) представляет интерес, в частности, в связи с тем, что при этом джоулевы потери могут изменять знак [1, 2], в результате чего возможно усиление волн при отражении от струйных течений или при распространении в волноводных каналах, образованных такими течениями. Конкретные расчеты подобных эффектов в литературе в основном проведены для потоков с резкими границами (тангенциальными разрывами) [1–5]. Поскольку течения с тангенциальным разрывом, вообще говоря, являются гидродинамически неустойчивыми, а структура и поведение электромагнитных волн существенно зависят от конкретного профиля скорости, ниже на некоторых примерах, допускающих точные решения, обсуждается случай плоской струи с произвольным градиентом скорости. Ранее такие решения были рассмотрены для быстрых ( $\omega - k\mathbf{v} > 0$ ) волн [6, 7], медленные же волны исследовались лишь для плавных (и слабопроводящих) потоков, когда, за исключением окрестностей точек поворота лучей, применимо приближение геометрической оптики [8].

Пусть среда, в локально сопровождающей системе отсчета описываемая диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(z)$  и проводимостью  $\sigma(z)$ , движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v(z)$ . В данной работе рассматриваются волны ТЕ-типа ( $E_y = E(z) \exp(i\omega t - ik_x z)$ ), поведение которых описывается уравнением [2]

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_z^2 E = 0; \quad (1)$$

$$k_z^2(z) = \frac{\omega'^2}{c^2} \tilde{\epsilon}(\omega') - (k'_x)^2, \quad (2)$$

где  $\omega' = \frac{\omega - k_x v}{\sqrt{1 - v^2 c^{-2}}}$  и  $k'_x = \frac{k_x - v \omega / c^2}{\sqrt{1 - v^2 c^{-2}}}$  — частота и  $x$ -составляющая волнового вектора в локально сопровождающей системе отсчета;  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i 4\pi\sigma/\omega'$ .

Поскольку уравнение (1) для ряда зависимостей  $k_z^2(z)$  подробно изучено в связи с задачами о распространении волн в неподвижных плоскослоистых средах [9], естественно воспользоваться известными для них решениями и соответствующими аналогиями. А именно, учитывая, что для неподвижных сред ( $v = 0$ ) с эффективными параметрами  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$ ,  $\sigma_{\text{эфф}}(z)$  имеют место равенства

$$k_z^2(z) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_{\text{эфф}}(z) - k_x^2, \quad \tilde{\epsilon}_{\text{эфф}} = \epsilon_{\text{эфф}} - i \frac{4\pi\sigma_{\text{эфф}}}{\omega}, \quad (3)$$

можно попытаться подобрать такие зависимости  $v(z)$ , для которых коэффициент  $k_z^2$  в (1) совпадает с (3), причем профиль  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$  допускает точные решения.

Далее ограничимся слаборелятивистским приближением ( $v^2/c^2 \ll 1$ ,  $\omega' \approx \omega - k_x v$ ). В работах [6, 7] полагалось также  $\epsilon v^2/c^2 \ll 1$ , тогда согласно (2)  $\left(\frac{k_x v}{\omega}\right)^2 \ll 1$  (что соответствует быстрым волнам) и можно

заменить  $\tilde{\epsilon}(\omega') \approx \tilde{\epsilon}(\omega) - k_x v \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \omega}$ . В результате эффективная проницаемость  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$  сопоставимой среды оказывается линейно связанной со скоростью  $v(z)$ . Для интересующих нас здесь медленных волн, однако, подобная аппроксимация неправомерна.

Пусть  $\epsilon \gg 1$ , так что величины  $\epsilon v^2/c^2$  и  $k_x v / \omega$  могут теперь превышать единицу. При этом можно положить  $k'_x \approx k_x$ , и из сопоставления (2) и (3) следует

$$\tilde{\epsilon}_{\text{эфф}} = \epsilon \left( \frac{\omega - k_x v}{\omega} \right)^2 - i \frac{4\pi\sigma(\omega - k_x v)}{\omega}. \quad (4)$$

При вещественных  $\epsilon$  и  $\sigma = 0$  имеем тогда  $\sigma_{\text{эфф}} = 0$  и

$$\epsilon_{\text{эфф}}(z) = \epsilon \left( 1 - \frac{k_x v(z)}{\omega} \right)^2; \quad (5a)$$

в случае же проводящей среды, кроме того, необходимо обеспечить, чтобы вещественным  $k_x$  и  $\omega$  соответствовали действительные значения скорости  $v(z)$ . Согласно (4) для этого эффективную проводимость сопоставимой среды надо взять равной

$$\sigma_{\text{эфф}}(z) = \sigma \left( 1 - \frac{k_x v(z)}{\omega} \right). \quad (5b)$$

Выбирая ту или иную зависимость  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$ , для которой известно решение уравнения (1), нетрудно из (5) определить соответствующие профили  $v(z)$  и  $\sigma(z)$ , в частности,

$$v(z) = \frac{\omega}{k_x} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{эфф}}(z)}{\epsilon}} \right), \quad (6)$$

где верхний знак относится к областям, где  $v(z) > \omega/k_x$  («сверхсветовое» течение), и наоборот.

Равенства (4)–(6) характеризуют электродинамические свойства движущихся сред; из них, например, нетрудно найти, какому изменению  $\epsilon(z)$  и  $\sigma(z)$  в смысле влияния на показатель преломления  $n_{\text{эфф}} = \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}(z)}$  эквивалентно наличие скорости дрейфа  $v(z)$  и т. д. Важ-

но отметить, что эффективная проводимость  $\sigma_{\text{эфф}}$  при  $\sigma > 0$  в «сверхсветовом» случае оказывается меньше нуля, что фактически и означает отрицательное поглощение медленных волн в движущейся проводящей среде, о чем уже говорилось выше.

В качестве зависимости  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$ , допускающей точное решение уравнения (1), можно взять, в частности, классический слой Эпштейна:

$$\epsilon_{\text{эфф}}(z) = M + \frac{N\xi}{1+\xi} + \frac{P\xi}{(1+\xi)^2}, \quad (7)$$

где  $\xi = e^{z/l}$ ;  $M, N, P$  — постоянные (вообще говоря, комплексные). Определенным недостатком сконструированных таким образом решений является тот факт, что функции  $\sigma(z)$  и  $v(z)$ , получаемые согласно (5б) и (6) по заданному профилю  $\epsilon_{\text{эфф}}(z)$ , оказываются в общем случае зависящими от величины  $\omega/k_x$ . Это не позволяет проследить, например, за изменением коэффициента отражения волны при вариации угла падения для неизменных профилей  $\sigma(z)$ ,  $v(z)$  и фиксированного значения  $\omega$ .

Имеется, однако, важный класс слоев, когда профили  $\sigma(z)$  и  $v(z)$  не зависят от  $\omega/k_x$  (т. е. когда коэффициенты  $M, N, P$  в (7) удается подобрать так, что множитель  $\omega/k_x$  в (5б) и (6) сокращается). При  $\epsilon = \text{const}$  этим свойством обладают слои с монотонной зависимостью  $v(z)$  и  $\sigma(z)$  вида

$$v(z) = \frac{v_1 + v_2 \xi}{1 + \xi}, \quad \sigma(z) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 \xi}{1 + \xi}, \quad (8)$$

где индексами 1 и 2 здесь и далее отмечаются значения величин при  $z \rightarrow \mp \infty$ . Непосредственной подстановкой (8) в (4) нетрудно убедиться в том, что подобный слой сводится к (7). Если  $v_1 = 0$ ,  $\sigma_1 = 0$ , то  $v_2$  и  $\sigma_2$  — максимальные значения соответствующих величин внутри потока. Ниже мы полагаем  $v_1 = 0$ . Из (4), (7) и (8) имеем

$$M = lk_{z2}^2, \quad N = d^2 - \frac{1}{4} + l(k_{z1}^2 - k_{z2}^2), \quad P = \frac{1}{4} - d^2, \\ d = \left[ \frac{1}{4} - \epsilon \frac{v_2^2}{c^2} k_x^2 l^2 \left( 1 + i 4\pi \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\epsilon k_x v_2} \right) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Как известно, решение уравнения (1) для слоя (7) может быть выражено через гипергеометрическую функцию  $F(\alpha, \beta, \gamma; \xi)$ , где с учетом (9)

$$\alpha = \frac{1}{2} + d + ilk_-, \quad \beta = \frac{1}{2} + d + ilk_+, \quad \gamma = 1 + 2ilk_{z1},$$

$$k_{\pm} = k_{z1} \pm k_{z2}.$$

1. Рассмотрим сначала «внешнюю» задачу. Пусть  $\sigma_1 = 0$  и первичная волна падает под углом  $\theta$  из области  $z \rightarrow -\infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ ), т. е. из неподвижной и непроводящей среды. В этом случае  $k_{z1} = V \epsilon \frac{\omega}{c} \sin \theta$ .

Как обычно [9], для отыскания коэффициентов отражения ( $R$ ) и проникновения ( $T$ ) при помощи аналитического продолжения решений из области  $\xi \rightarrow \infty$  в область  $\xi \rightarrow 0$  достаточно асимптотических выражений для гипергеометрических функций. При этом сначала следует определить, какое из двух линейно независимых решений нужно выбрать

в области  $\xi \rightarrow \infty$ . В случае неподвижных сред, естественно, выбирается решение, дающее в асимптотике волну, распространяющуюся в области  $z \rightarrow \infty$  [9], т. е. уносящую энергию от границы (что дает  $\operatorname{Re} k_{z2} > 0$ ).

В нашем случае, однако, проблема осложняется тем, что направления фазовой и групповой скорости поперек струи могут не совпадать, а при наличии заметной проводимости понятие групповой скорости, так же как и плотности энергии, вообще теряет свой обычный смысл. Без привлечения энергетических соотношений необходимый отбор решения можно произвести, требуя его локализации в окрестности переходного слоя, т. е. экспоненциального убывания амплитуды прошедшей волны внутри потока ( $\operatorname{Im} k_{z2} < 0$ ). Знак же  $\operatorname{Re} k_{z2}$  тогда определяется из соотношения, вытекающего из (3):

$$\operatorname{Re} k_z \operatorname{Im} k_z = \frac{2\pi\omega}{c^2} \sigma_{\text{эфф}}.$$

В итоге оказывается, что в соответствии с (5б) для термодинамически равновесной среды ( $\sigma \geq 0$ ) в «досветовом» случае нужно взять  $\operatorname{Re} k_{z2} > 0$ , а в «сверхсветовом», наоборот,  $\operatorname{Re} k_{z2} < 0$ . Это согласуется с результатами работы [4], полученными для непроводящих и недиспергирующих сред. Более строго указанный критерий отбора может быть обоснован путем рассмотрения струи конечной толщины, как это сделано в [3] для потока с резкими границами.

Для коэффициентов отражения и проникновения по амплитуде в результате можно записать выражения

$$R = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + d - ik_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - d - ik_+\right) \Gamma(2ik_{z1})}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + d + ik_-\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - d + ik_-\right) \Gamma(-2ik_{z1})},$$

$$T = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + d - ik_+\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - d - ik_+\right)}{\Gamma(-2ik_{z1}) \Gamma(1 - 2ik_{z2})}. \quad (10)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. При исчезающей малой проводимости ( $\sigma_{\text{эфф}} \sim \sigma \rightarrow 0$ ) имеем

$$|R|^2 = \frac{\cos(2\pi d) + \operatorname{ch}(2\pi ik_-)}{\cos(2\pi d) + \operatorname{ch}(2\pi ik_+)}, \quad |T|^2 = \frac{2k_{z1} \operatorname{sh}(2\pi ik_{z1}) \operatorname{sh}(2\pi ik_{z2})}{k_{z2} [\cos(2\pi d) + \operatorname{ch}(2\pi ik_+)]}. \quad (11)$$

В «сверхсветовом» случае  $k_- > |k|$  и  $|R| \geq 1$  при любом значении градиента скорости дрейфа; при  $\omega - k_x v_2 > 0$  всегда  $|R| \leq 1$ .

Другой пример — случай тонкого переходного слоя (длинноволновое приближение):  $l|k_{z1,2}| \ll 1$ . Разлагая входящие в (10) величины по степеням  $l$ , в первом приближении получаем

$$R = \frac{k_-}{k_+}, \quad T = \frac{2k_{z1}}{k_+}. \quad (12)$$

Пусть  $\omega - k_x v_2 < 0$ , тогда  $|R| > 1$ , причем для углов, при которых  $k_+ = 0$ ,  $R, T \rightarrow \infty$ . Это совпадает с результатами работы [4], полученными в случае резкой границы.

Если  $l|k_{z1,2}| \geq 1$ , то значения  $R$  и  $T$ , как известно, существенно зависят от структуры переходного слоя. В частности, при  $l|k_{z1,2}| \gg 1$  и

$$\frac{\sigma_2 l}{c V \epsilon} \ll 1, \quad \frac{c}{v_2 V \epsilon} \ll \sin \theta \ll 1, \quad (13)$$

что соответствует достаточно малой проводимости и прозрачности неподвижной среды ( $k_{z1}^2 > 0$ ), для очень медленных ( $\omega \ll k_x v_2$ ) волн имеем

$$R = -i \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{\pi}{2} V \epsilon \frac{\omega}{c} l \sin^2 \theta \right) - \frac{4\pi \sigma_2 l}{c V \epsilon} \right].$$

Таким образом, отличие  $|R|$  от единицы здесь мало. Это выражение согласуется с аналогичной формулой, полученной в [8] в приближении геометрической оптики.

Сшивая поля двух слоев вида (8) с противоположными градиентами, раздвинутых на некоторое расстояние  $L$  (между точками перегиба), можно получить и исследовать решение для струи конечной толщины. Оно упрощается, если  $L/l \gg \left| \ln \frac{k_x v_2 - \omega}{\omega} \right|$ . В результате снова оказывается возможным использовать асимптотические представления для гипергеометрических функций, а выражения для  $R$  и  $T$  имеют вид

$$R = R_1 + \frac{T_1 R_2 T_2 \exp(-2iLk_{z2})}{1 - R_2^2 \exp(-2iLk_{z2})}, \quad (14)$$

$$T = \frac{T_1 R_2 \exp(-iLk_{z2})}{1 - R_2^2 \exp(-2iLk_{z2})}.$$

Здесь  $R_1$  и  $T_1$  даются формулами (10),  $R_2$  и  $T_2$  — коэффициенты отражения и проникновения волн при ее падении «изнутри» движущегося слоя. Для их нахождения достаточно в (10) произвести замены  $k_{z1} \rightleftharpoons k_{z2}$  и  $l \rightarrow -l$ .

В коротковолновом приближении и при выполнении неравенств (13) значения  $R$  и  $T$  в (14) совпадают с аналогичными формулами в [8], а в случае  $l \rightarrow 0$  переходят в выражения, полученные для струи с тангенциальным разрывом скорости на границах [3].

**2.** Дисперсионное уравнение для собственных волн можно получить, формально полагая  $R, T \rightarrow \infty$ ; так, для струи конечной толщины из (14) следует

$$1 - R_2^2 \exp(-2iLk_{z2}) = 0. \quad (15a)$$

Это выражение упрощается в длинноволновом пределе ( $l/k_z \ll 1$ ):

$$\left( k_{z1} + ik_{z2} \operatorname{tg} \frac{k_{z2} L}{2} \right) \left( k_{z1} - ik_{z2} \operatorname{ctg} \frac{k_{z2} L}{2} \right) = 0. \quad (15b)$$

Здесь первый сомножитель соответствует так называемым симметричным, второй — антисимметричным поверхностным волнам.

Ввиду громоздкости уравнения (15b) ограничимся рассмотрением очень медленных волн в слабопроводящем потоке:

$$\omega \ll k_x v_2, \quad \sigma_2/\epsilon \ll k_x v_2. \quad (16)$$

При этом  $k_{z2} \approx -V \epsilon \frac{v_2}{c} k_x$  и  $|k_{z2}| \gg |k_{z1}|$ , что позволяет искать решение (15b) методом возмущений.

Рассмотрим вначале случай вещественных  $\omega$ . Полагая  $k_x(\omega) = k_x^{(0)} + k_x^{(1)}$ ,  $|k_x^{(1)}| \ll |k_x^{(0)}|$ , находим

$$\begin{aligned} k_x^{(0)} &= \frac{\pi n c}{\sqrt{\epsilon} v_2 L}, \\ k_x^{(1)}(\omega) &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon} v_2} \left[ \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} \left( \omega - i \frac{2\pi\sigma_2}{\epsilon} \right) + \frac{2i}{\pi n} k_{z1}(k_x^{(0)}, \omega) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  Формула (17) справедлива как для симметричных, так и для антисимметричных волн. Нетрудно проверить, что знак минимумной части  $k_x(\omega)$  совпадает со знаком  $(\omega - \omega_0)$ , где

$$\omega_0 = \frac{\pi n c^3}{\epsilon v_2 L} \left[ \frac{1 + \left( \frac{\pi \sigma_2 v_2 L}{c^3} \right)^2}{1 + \left( \frac{2\sigma_1}{\pi n \sigma_2} \right)^2} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Чтобы выяснить, какому знаку  $\operatorname{Im} k_x$  соответствует пространственное усиление волны, определим направление потока ее электромагнитной энергии  $S_{x2} = \frac{c}{4\pi} E_{y2} H_{22}$  в движущейся среде. В рассматриваемом приближении  $S_{x2} \approx -\frac{\epsilon k_x^{(0)} v_2^2}{4\pi\omega} |E_{y2}|^2 < 0$ , и усилению соответствует случай  $\operatorname{Im} k_x < 0$ , т. е.  $\omega < \omega_0$ . При этом оказывается  $\operatorname{Im} k_{z1}^2 < 0$ , и собственные волны являются прижатыми к струе.

Если в неподвижной среде проводимость отсутствует ( $\sigma_1 = 0$ ), то при  $\omega = \omega_0$   $k_{z1}(\omega_0) = \frac{\pi^3 n \sigma_2}{c \sqrt{\epsilon}}$  — также вещественная величина. В этом случае собственные решения фактически соответствуют волнам, излучаемым потоком в неподвижную среду. Угол излучения  $\theta_0$  находится из условия  $k_{z1}(\omega_0) = \sqrt{\epsilon} \frac{\omega_0}{c} \sin \theta_0$ , откуда

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{c^3}{\pi \sigma_2 v_2 L}.$$

Заметим, что значение  $\theta_0$  не зависит от  $n$  и одинаково для всех излучаемых мод, частота которых  $\omega_0(n)$  определяется выражением (18).

Пусть  $\sigma_2 \rightarrow 0$ , тогда  $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_0 \rightarrow 0$  и  $\operatorname{Im} k_x > 0$  при любых  $\omega$ .

Таким образом, наличие проводимости в движущейся со «сверхсветовой» скоростью среде при вещественных  $\omega$  является необходимым условием конвективной неустойчивости и излучения волн потоком.

В случае нестационарных возмущений ( $k_x$  — действительная,  $\omega$  — комплексная величина) это утверждение несправедливо. Так, считая неравенства (16) выполненными и полагая  $\omega(k_x) = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$ ,  $|\omega^{(1)}| \ll |\omega^{(0)}|$ , из (15б) получаем для симметричных волн

$$\omega_{1,2}^{(0)} = i \frac{2\pi\sigma_1}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{k_x^2 c^3}{\epsilon} \left( 1 - \epsilon \frac{v_2^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) - \left( \frac{2\pi\sigma_1}{\epsilon} \right)^2},$$

$$\omega_{1,2}^{(1)} = \mp k_x v_2 \operatorname{tg}^2 \varphi \times \quad (19)$$

$$\times \frac{2\pi i \sigma_2 \left( 1 + \frac{2\varphi}{\sin \varphi} \right) - \epsilon \omega_{1,2}^{(0)} \left( 1 - \frac{2\varphi}{\sin \varphi} \right)}{\left[ \frac{k_x^2 c^2}{\epsilon} \left( 1 - \epsilon \frac{v_2^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) - \left( \frac{2\pi \sigma_1}{\epsilon} \right)^2 \right]^{1/2}},$$

где  $\varphi = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2c} k_x v_2 L$ . Для антисимметричных волн решение совпадает с (19), если заменить  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{ctg} \varphi$ .

Таким образом, здесь уже в нулевом приближении величина  $\omega^{(0)}$  может быть чисто мнимой, если  $1 < \epsilon \frac{v_2^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi$  (или  $1 < \epsilon \frac{v_2^2}{c^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi$  для антисимметричного решения), и один из корней в (19) дает нарастающее во времени решение ( $\operatorname{Im} \omega_2^{(0)} < 0$ ), причем подобная неустойчивость возможна и в отсутствие проводимости ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ). Плотность энергии волн при этом отрицательна, и физическая картина аналогична «пучковой» неустойчивости волн во взаимопроникающих средах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, ЖТФ, 35, 2288 (1975).
2. Н. С. Степанов, В. Д. Пикулин, Л. А. Зелексон, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, 1, 115 (1977).
3. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, ЖТФ, 48, 649 (1978).
4. Г. А. Лупанов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, 1711 (1975).
5. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, т. 1, 119 (1977).
6. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, Проблемы дифракции и распространения волн, вып 12, изд. ЛГУ, Л., 1973, стр. 129.
7. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, 1564 (1976).
8. В. Г. Гавриленко, Л. А. Зелексон, XI Всесоюзная конференция по распространению волн, Тезисы докладов, ч 1, изд. КГУ, Казань, 1975, стр. 192.
9. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
13 июля 1978 г.

#### TO THE THEORY OF SLOW ELECTROMAGNETIC WAVES IN A CONDUCTING JET

*L. A. Zelekson, N. S. Stepanov*

Examples of accurate solutions are given for slow electromagnetic waves of TE-polarization propagating in plane stratified jets of a conducting medium without dispersion. "External" problems are considered on wave reflection from jets with a monotonous profile of the velocity and the jet of finite depth and proper waves propagating along such jets. Solutions found show the possibility of wave amplification and generalize results obtained earlier for limiting cases of a smooth and jumping variation of the velocity.

УДК 551.501.8

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛАГОСОДЕРЖАНИЯ БЕЗОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ УХОДЯЩЕГО МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С БОРТА САМОЛЕТА

*B. A. Рассадовский*

Получены регрессионные уравнения для определения влагосодержания как всей толщи атмосферы, так и в слое ниже высоты полета по измерениям уходящего радиоизлучения в окрестности линии поглощения водяного пара  $\lambda = 1,35 \text{ см}$  с высоты  $H = 3 \text{ км}$  над водной поверхностью. Произведены оценки чувствительности метода при измерениях уходящего радиоизлучения над различными поверхностями. Приведены методика и результаты экспериментального определения общего влагосодержания атмосферы над водной поверхностью. Рассмотрены некоторые возможности определения характеристик влагосодержания из разностных двухканальных измерений.

В настоящее время определение общего влагосодержания безоблачной атмосферы по измерениям уходящего радиоизлучения в линии поглощения водяного пара, центрированной к  $\lambda = 1,35 \text{ см}$ , разработано наиболее полно как в теоретическом, так и в экспериментальном планах [1–5]. Обобщение полученных результатов содержится в монографии [12]. Малость оптических толщин  $\tau$  атмосферы в линии для широкого диапазона значений полной массы водяного пара  $Q$  в столбе атмосферы является физическим обоснованием методики, основанной на уравнениях линейной регрессии, связывающих яркостную температуру уходящего радиоизлучения, измеренную на высоте  $H$  с искомыми значениями  $Q$ . В настоящей работе исследованы возможности дальнейшего развития отмеченной методики. В частности, проведено сравнение (по точности определения искомого параметра) измерений на разных длинах волн и приведены результаты определения полной массы водяного пара по вертикальному поглощению атмосферы (соответствующий метод имеет известные преимущества для случая облачной атмосферы).

### 1. В искомых уравнениях линейной регрессии

$$T_{\lambda} = a_{\lambda} + b_{\lambda} Q'; \quad (1)$$

$$\tau_{0\lambda} = c_{\lambda} + d_{\lambda} Q' \quad (2)$$

оценка неизвестных коэффициентов может быть проведена различными способами. Авторы работы [2] производили такую оценку по семейству кривых  $T_{\lambda}(Q)$ , полученных на основе модельных расчетов для различных состояний как подстилающей водной поверхности, так и метеопараметров атмосферы. Нами при оценке коэффициентов уравнений (1) и (2) использовалась следующая методика. По летним данным аэрологического зондирования для ряда лет в Центральной части ЕТ СССР рассчитывались значения  $T_{\lambda}^i$  и  $\tau_{0\lambda}^i$  для случая наблюдения в нади с высоты полета  $H_1 = 3 \text{ км}$  для каждого  $i$ -го зонда по формуле

$$T_{\text{я}\lambda} = (1 - R_\lambda) T_0 \exp(-\tau_\lambda) + \int_0^{H_1} T(h) \gamma(h) \exp \left[ - \int_h^{H_1} \gamma(h') dh' \right] dh + \\ + R_\lambda \exp(-\tau_\lambda) \int_0^H T(h) \gamma(h) \exp \left[ - \int_0^h \gamma(h') dh' \right] dh. \quad (3)$$

В (3)  $H_1$  — высота полета самолета,  $\tau_\lambda = \int_0^{H_1} \gamma(h) dh$ ,  $H$  — высота верхней границы атмосферы,  $R_\lambda$  — коэффициент зеркального отражения поверхности по мощности,  $T_0$  — кинетическая температура подстилающей поверхности,  $T(h)$  — профиль температуры атмосферы,  $\gamma(h) = \gamma_{O_2}(h) + \gamma_{H_2O}(h)$  — коэффициент поглощения безоблачной атмосферы, определяемый вкладами водяного пара и молекулярного кислорода.

Выражение для  $\gamma(h)$  бралось из работы [6], где оно приводится с учетом поправок на экспериментальные значения  $\gamma_{O_2}(h)$  и на нелинейное по  $\rho$  (абсолютная влажность) поглощение. Значения  $R_\lambda$  для наблюдения над гладкой водной поверхностью рассчитывались по формулам работы [7]. Вкладом переотраженного от поверхности космического радиоизлучения мы пренебрегали вследствие его малости и возможности его учета при обработке результатов измерений.

В целях сравнения возможностей зондирования на разных длинах волн расчеты производились на двух частотах  $\nu_1 = 20,83 \text{ ГГц}$  и  $\nu_2 = 22,22 \text{ ГГц}$ .

Далее расчет коэффициентов регрессионных уравнений и доверительных интервалов на коэффициенты проводился методом наименьших квадратов. Полученные уравнения связывают яркостные температуры уходящего радиоизлучения и поглощения в слое  $0 - H_1(\text{км})$  с массой водяного пара  $Q'(\text{г}/\text{см}^2)$  в столбе атмосферы  $0 - H_1(\text{км})$ . Для частоты  $\nu_2$  в целях сравнения возможностей и обработки данных эксперимента было получено регрессионное уравнение

$$T_{\text{я}\lambda} = n_\lambda + m_\lambda Q, \quad (4)$$

где  $Q$  — полная масса водяного пара во всей толще атмосферы\*. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Частота, ГГц	20,83	22,22
$a$	124,0	127,3
$\Delta a$	2,68	3,49
$b$	17,2	22,3
$\Delta b$	1,32	1,72
$c$	0,0067	0,0074
$\Delta c$	0,0074	0,0104
$d$	0,0483	0,0679
$\Delta d$	0,0036	0,0051
$n$		122,3
$\Delta n$		3,28
$m$		18,9
$\Delta m$		1,22

\* Согласно нашим расчетам, коэффициент корреляции между яркостной температурой, измеряемой с высоты  $H_1 = 3 \text{ км}$ , и полной массой водяного пара  $Q(\text{г}/\text{см}^2)$  может достигать 0,989, что подтверждает возможность получения информации о  $Q$  над водной поверхностью при микроволновых измерениях со сравнительно небольших высот.

В уравнениях регрессии для радиояркостных температур (1), (4) коэффициент  $n_\lambda$  содержит яркостную температуру подстилающей поверхности и излучение молекулярного кислорода (как прямое, так и переотраженное). В коэффициенте  $a_\lambda$  кроме указанных компонент содержится и переотраженное от поверхности излучение водяного пара толщи атмосферы выше высоты полета (усредненное по ансамблю использованных зондов). Коэффициенты  $b_\lambda$  и  $m_\lambda$ , характеризующие чувствительность яркостной температуры к изменениям массы водяного пара, сильно зависят от типа и состояния подстилающей поверхности.

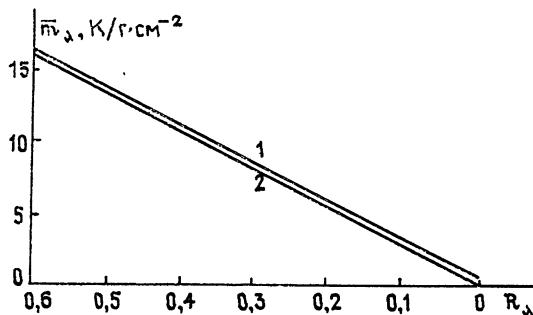


Рис. 1. Зависимость чувствительности  $\bar{m}_\lambda$  радиояркостной температуры на  $\lambda = 1,35 \text{ см}^{-1}$  к изменениям полной массы водяного пара от коэффициента зеркального отражения  $R_\lambda$  поверхности (наблюдение в надир с высоты  $H_1 = 3 \text{ км}$ ): 1—температура поверхности 278 К, 2—температура поверхности 293 К.

На рис. 1 приведена зависимость средней чувствительности радиояркостной температуры к изменениям полной массы водяного пара  $\bar{m}_\lambda$  от  $R_\lambda$  поверхности, вычисленная для зондовых реализаций  $Q$  в диапазоне  $1-3 \text{ г}/\text{см}^2$  и с высотным распределением, в среднем соответствующим экспоненциальному модели с характеристической высотой  $2,2 \text{ км}$ . Из рисунка видно, что для значений  $R_\lambda$ , соответствующих гладкой водной поверхности,  $\bar{m}_\lambda \approx 16 \text{ К}/\text{г}\cdot\text{см}^{-2}$ , что заметно меньше полученного нами значения. Это расхождение является отражением того обстоятельства, что зависимость, изображенная на рис. 1, получена для условий независимости состояния атмосферы (в данном случае ее влагосодержания) от состояния подстилающей поверхности. В реальных условиях водяной пар в атмосфере по своей природе связан с состоянием подстилающей поверхности, причем может наблюдаться как дефицит влажности [13] (засушливые районы), так и его избыток (например, в результате циклональной деятельности). Над обширными водными поверхностями водяной пар в среднем имеет конвективную природу. В этом случае количество водяного пара в атмосфере в среднем больше для состояний поверхности, отвечающих более высоким температурам. Яркостную температуру уходящего излучения собственно атмосферы можно представить в виде

$$T_\lambda = T_{\text{ср}}(1 - e^{-\tau}), \quad (5)$$

а среднюю температуру атмосферы — в виде

$$T_{\text{ср}} = T(0) - \Delta T, \quad (6)$$

где  $T(0)$  — температура воздуха у поверхности, хорошо коррелирующая с  $T_0$  в случае водной поверхности,  $\Delta T$  — поправка на неизотермичность

атмосферы [8]. Из (5) и (6) следует больший (чем обусловленный только увеличением  $Q$ ) рост  $T_{\lambda}$  для более «горячих» поверхностей. Это обстоятельство и приводит к увеличению  $t_{\lambda}$  относительно данных рис. 1. Таким образом, коэффициенты уравнений регрессии для  $T_{\lambda}$  зависят сложным образом и от заранее неизвестного характера взаимодействия между атмосферой и подстилающей поверхностью. Отсюда следует, что существенное уточнение коэффициентов для данной реализации (в частности, за счет уточнения температуры поверхности по сравнению со среднесезонной с помощью дополнительного приемника в сантиметровом диапазоне) наталкивается на значительные трудности. Интересно отметить, что точность определения  $Q$  по  $T_{\lambda}$ , которую можно получить по доверительным интервалам на коэффициенты уравнений регрессии, приведенным в табл. 1, находится в хорошем согласии с данными работ [2, 4], несмотря на отличие самих коэффициентов, обусловленное выбором статистических данных об атмосфере и подстилающей поверхности. Это согласие является, на наш взгляд, следствием отмеченных выше факторов. При наблюдении над участками суши, имеющими меньшие значения  $R_{\lambda}$  по сравнению с водной поверхностью, относительный вклад рассмотренных причин изменчивости чувствительности яркостной температуры к изменениям полной массы водяного пара растет, что вместе с реальными ошибками измерений яркостных температур сильно ухудшает возможности метода даже при наблюдениях над однородными участками суши.

В работе [9] приведены модельные расчеты вариаций яркостной температуры, обусловленные вариациями высотного распределения водяного пара при неизменном влагосодержании, при наблюдении с высоты  $H_1 = 3 \text{ км}$ . Вариации яркостных температур для частот 20,83 ГГц и 22,22 ГГц составили  $\sim 3 \text{ К}$  при фиксированной  $T_0$ . В реальной статистике зондов вклад этих вариаций полностью «замывается» перечисленными выше факторами. Сравнение полученных уравнений для разных частот с точки зрения «нулевых ошибок» метода не позволяет отдать предпочтение какому-либо из них. Однако если учесть ошибки измерения  $T_{\lambda}$ , то определение интегрального влагосодержания лучше проводить на частоте 22,23 ГГц, так как здесь при равных ошибках в  $T_{\lambda}$  получаются меньшие ошибки в  $Q$ .

Существенного улучшения точности определения  $Q$  можно было бы добиться, используя уравнения не для яркостных температур, а для поглощений. Интерес к такому переходу существенно возрастает в случае облачной атмосферы по причине аддитивности поглощений, но в настоящее время методика определения полного вертикального поглощения с борта самолета практически не разработана.

**2. Экспериментальные измерения уходящего радиоизлучения в линии  $\lambda = 1,35 \text{ см}$**  проводились в мае—июне 1976 г. с борта самолета ИЛ-14 в районе Рыбинского водохранилища по совместной научной программе с ИФА АН СССР. Прием радиоизлучения осуществлялся на рупорную антенну с шириной диаграммы направленности по уровню половинной мощности  $10^\circ$ , установленную в надирном направлении, с помощью модуляционного радиометра с флуктуационным поротом чувствительности 0,4 К. Конструкция радиометра и его характеристики приведены в работе [10]. Калибровка приемника по антенной температуре осуществлялась по внутреннему эталонному источнику шумового сигнала. Для калибровки шкалы радиометра по радиояркостной температуре была проведена серия полетов в условиях стабильных метеоусловий, после чего коэффициенты перехода от измеренных в этой серии антенных температур к вычисленным радиояркостным находились методом наименьших квадратов. За отсчетный уровень яркостной

температуры в дни последующего цикла измерений принималось радиоизлучение поверхности, покрытой лесом, ввиду отмеченной выше его независимости от состояния атмосферы. Поскольку непосредственно в зоне полетов аэрологического зондирования не проводилось (ближайшая станция зондирования находилась на расстоянии в среднем 50 км от района измерений), нами проводилось измерение вертикального поглощения  $\tau_{\lambda}$  атмосферы в слое 0,1–3 км, не требующее калибровки радиометра. Действительно, используя уравнение (3) и уравнение связи между яркостной и антенной температурами, легко показать, что

$$\frac{T_{A2}^A - T_{A2}^B}{T_{A1}^A - T_{A1}^B} = \exp(-\tau_0),$$

где индексами «л» и «в» помечены антенные температуры, измеренные соответственно над лесом и над водой, а индексами 1 и 2 — антенные температуры, измеренные над поверхностями на высотах соответственно 0,1 и 3 км. В силу малости поглощения разности антенных температур на разных высотах примерно равны и точность определения отношения определяется стабильностью аппаратуры и точностью отсчета показаний (влияние собственных шумов приемника несущественно, поскольку контрасты «лес — вода» достаточно велики). Поэтому измерения  $\tau_{\lambda}$  по описанной методике служили для нас критерием исключения грубых ошибок в измерениях яркостных температур уходящего радиоизлучения.

Таблица 2

Дата	$T_{\lambda}^{\text{выч}}, \text{К}$	$T_{\lambda}^{\text{изм}}, \text{К}$	$\tau^{\text{выч}}, \text{Непер}$	$\tau^{\text{изм}}, \text{Непер}$
24.05.76	152,8	133	0,084	0,029
25.05.76	149,9	134	0,073	0,039
26.05.76	156,5	158	0,092	0,080
28.05.76	142,6	144	0,054	0,046
30.05.76	151,3	—	0,075	0,079
4.05.76	153,9	156	0,098	0,112
5.05.76	146,6	164	0,073	0,157
6.05.76	148,4	156	0,071	0,086
7.05.76	156,5	153	0,101	0,049

Результаты измерений яркостных температур и поглощений представлены в табл. 2. На рис. 2 приведен ход интегрального влагосодержания за период наблюдений, вычисленный по данным аэрологического зондирования. Там же приведены значения  $Q$ , вычисленные по измеренным значениям яркостных температур и поглощений. Совпадение значений  $Q$ , вычисленных по  $T_{\lambda}$  и  $\tau_{\lambda}$  даже без учета ошибки измерения радиояркостной температуры, которая составила  $\sim 5$  К при калибровке по описанной методике, позволяет сделать вывод о значительной изменчивости интегрального влагосодержания атмосферы на сравнительно небольших пространственных масштабах.

3. Коротко остановимся теперь на возможностях дальнейшего уточнения характеристик влагосодержания в связи с проведением многочастотных измерений уходящего радиоизлучения. Обратимся, в частности, к двухканальным измерениям, в пользу которых можно привести следующие аргументы. Во-первых, ядра интегральных уравнений для уходящего радиоизлучения на разных частотах в окрестности  $\lambda = 1,35 \text{ см}$  можно в первом приближении аппроксимировать линейными функциями высоты, по крайней мере, до высоты 6 км [11]. В силу этого обстоя-

тельства независимыми будут измерения только на двух частотах, что, в свою очередь, говорит о возможности получения информации из таких измерений о двух параметрах влагосодержания атмосферы.

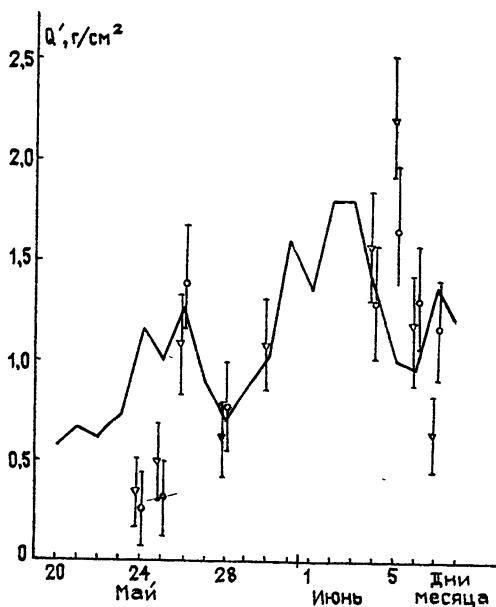


Рис. 2. Ход массы водяного пара  $Q'$  (г/см<sup>2</sup>) в столбе атмосферы 0–3 км за период наблюдений:  
сплошная кривая — данные аэрологического зондирования;  
кружки — значения  $Q'$ , вычисленные по измерениям  $T_y$ ;  
треугольники — значения  $Q'$ , вычисленные по измерениям  $\tau_0$ .

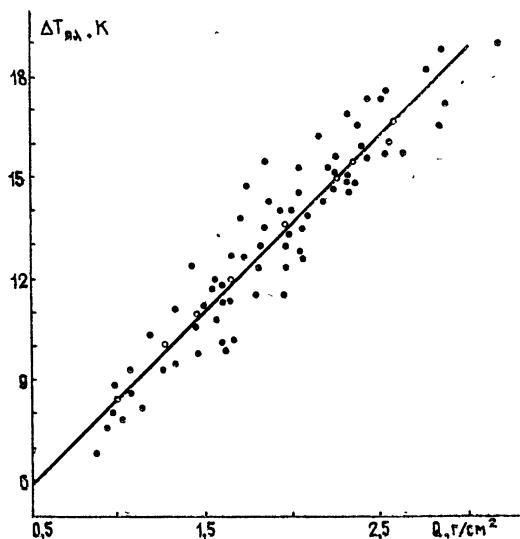


Рис. 3. Ансамбль  $\Delta T_{ya} = T_{ya} - T_{yv_1}$ , рассчитанный по данным аэрологического зондирования для летних месяцев ряда лет Центральной части ЕТ СССР.

В-вторых, вариации яркостных температур к вариациям высотного распределения водяного пара невелики [9], и при современной чувствительности аппаратуры можно надеяться на измерение только максимальных (по склону линии) контрастов.

В-третьих, поскольку разнос частот для измерения этих контрастов невелик ( $\sim 1,5 \text{ ГГц}$ ), возможно изготовление радиометра, который непосредственно измерял бы разность яркостных температур. При этом возможно увеличение точности измерений за счет увеличения точности калибровки приемника и уменьшения влияния состояния подстилающей поверхности.

На рис. 3 приведен ансамбль  $\Delta T_a$ , рассчитанный для частот 20,83 ГГц и 22,22 ГГц по ансамблю зондов, использовавшихся в п. 1, при наблюдении над водной поверхностью. Там же проведена линия наименьших квадратов. Как и ожидалось, разность яркостных температур оказалась достаточно чувствительной к вариациям характеристической высоты  $H_p$ , чтобы ее можно было надежно зарегистрировать. Яркостные температуры для дней с различным высотным распределением водяного пара могут отличаться на 5—6 К при одинаковом интегральном влагосодержании. В то же время совокупность точек, соответствующих одинаковой  $H_p$ , с высокой точностью аппроксимируется прямой независимо от температуры подстилающей водной поверхности. Линия наименьших квадратов соответствует  $H_p = 2,2 \text{ км}$  (светлые кружки). Как видно из рисунка, максимальные отличия от прямой не превышают  $\sim 0,5 \text{ К}$  для зондов с данной  $H_p$ , хотя температура поверхности для них колебалась в широких пределах ( $\pm 10 \text{ К}$ ).

Таким образом, уже из краткого анализа следует, что при наблюдениях по крайней мере над водной поверхностью возможно уточнение информации о характеристиках влагосодержания, хотя, конечно, процедура получения такой информации должна быть отлична от методики регрессионных уравнений. Выработка такой методики, как можно надеяться, позволит добиться существенного повышения точности определения характеристик влагосодержания по измерениям уходящего радиоизлучения по сравнению с методикой регрессионных уравнений, возможности которой к настоящему времени, по-видимому, в значительной степени исчерпаны.

Автор приносит глубокую благодарность А. П. Наумову за помощь в постановке задачи и обсуждение результатов, М. С. Малкевичу и А. П. Орлову за активное содействие проведению эксперимента и М. Б. Зиничевой за проделанные расчеты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Горчакова, В. В. Демин, А. Т. Ершов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 8, 841 (1971).
2. Ю. И. Рабинович, Г. Г. Щукин, Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 222, 62 (1968).
3. Ю. И. Рабинович, Г. Г. Щукин, Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 309, 3 (1974).
4. Т. Т Уилхейт, М. Г Фаулер, Г. Стэмбах, Р. Глэррсон, в сб. Советско-американский эксперимент «Беринг», Гидрометеоиздат, Л., 1975, стр. 15.
5. А. С. Гурвич, В. В. Демин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 8, 771 (1970).
6. Ю. И. Рабинович, В. В. Мелентьев, Труды Главной геофизической обсерватории, вып. 235, 78 (1970).
7. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
8. А. Г. Кисляков, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 3, 451 (1966).
9. А. П. Наумов, В. А. Рассадовский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 14, № 7, 716 (1978).
10. В. В. Хрулев, Р. А. Самойлов, Б. К. Федянцев, В. С. Зборовский, Л. Ф. Ларионова, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 2, 295 (1978).

11. D. H. Staelin, J. Geophys. Res., 71, № 12, 2875 (1966).
12. А Е Башаринов, А С Гурвич, С. Т Егоров, Радиоизлучение Земли как планеты, изд. Наука, М, 1974
13. В Г Болдырев, Л И Копрова, М. С. Малкевич, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 7, 703 (1965).

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
12 июля 1978 г

DETECTION OF MOISTURE CONTENT OF CLOUDLESS ATMOSPHERE BY  
MEASUREMENTS OF OUTGOING MICROWAVE RADIATION FROM  
AIRCRAFT BOARD

*V. A. Rassadouskij* <sup>1</sup>

Regressive equations have been obtained for detection of moisture content both in the entire atmosphere depth and in a layer below the flight height by measurements of outgoing radiation in the vicinity of water vapour absorption line  $\lambda = 135$  cm from the height  $H = 3$  km above the water surface. The sensitivity of the method is evaluated when the outgoing radiation is measured above different surfaces. The methodics and results of the experimental definition of the total moisture content above the water surface are given. Some peculiarities are considered of moisture content characteristics detection from different two-channel measurements.

УДК 538.56 : 519.25

## ОБ АДАПТИВНОЙ КОМПЕНСАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ

*A. A. Мальцев, И. Е. Позументов*

Исследуются характеристики одноканального автокомпенсатора помех с корреляционной обратной связью при наличии нелинейных искажений в основном канале. Предлагается схема компенсации указанных нелинейных искажений и приведены оценки ее эффективности.

1. Вопросам анализа и синтеза адаптивных систем с корреляционными обратными связями в настоящее время посвящена обширная библиография [1-7]. Интерес к таким системам объясняется широкими возможностями их использования в различных областях техники (см., например, обзоры [2-5]). Следует, однако, отметить, что в известных нам работах анализ подобных систем проводился в предположении линейности входных фильтров и управляемых усилителей. С другой стороны, очевидно, что при поступлении на систему достаточно сильных помех начинает сказываться нелинейность характеристик указанных элементов. Это может привести к существенному ухудшению компенсации помех и затруднить выделение полезного сигнала.

В настоящей работе предлагается один из возможных способов адаптивной коррекции нелинейных искажений входных фильтров основного канала и оценивается его эффективность.

2. Пусть нелинейные искажения основного канала описываются функцией  $f(x)$ . Помеху, поступающую на автокомпенсатор (см. рис. 1), будем предполагать гауссовым узкополосным процессом

$$x(t) = U(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t$$

с функцией корреляции

$$K_x(\tau) = P e^{-|\tau|/\tau_k} \cos \omega_0 \tau,$$

где  $\tau_k$  — время корреляции  $x(t)$ . Нетрудно показать, что все члены нечетных степеней ряда Тейлора для функции  $f(x)$  дадут составляющие на частотах, близких к  $\omega_0$ , попадающие в полосу пропускания последующих фильтров основного канала. Поэтому  $f(x)$  представим в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{2i+1} x^{2i+1}, \quad k_{2i+1} = \left. \frac{d^{2i+1} f(x)}{dx^{2i+1}} \right|_{x=0}. \quad (1)$$

Отсюда следует функциональная схема автокомпенсатора с коррекцией нелинейных искажений (схема с адаптируемой нелинейностью), представленная на рис. 1а (квадратурный вариант схемы получения весовых коэффициентов показан на рис. 1б).

Предполагая входные сигналы не очень сильными, ограничимся представлением нелинейности  $f(x)$  первыми двумя членами ряда (1)

$(k_1 > 0, k_3 < 0)$  и соответственно двумя вспомогательными каналами на рис. 1а.

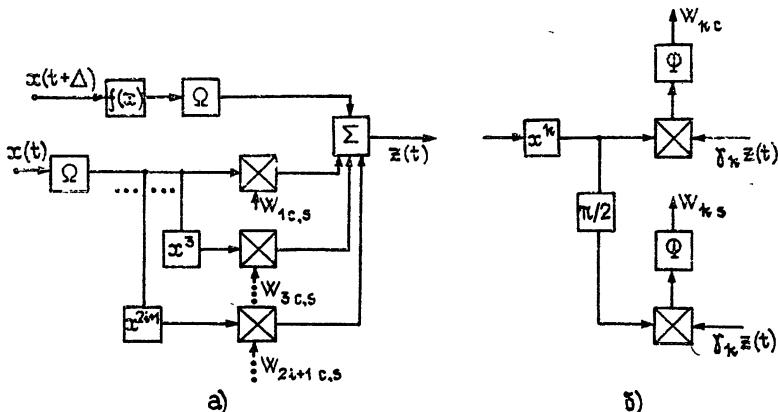


Рис. 1. Функциональная схема автокомпенсатора с коррекцией нелинейных искажений:

$x$  — перемножители,  $\Sigma$  — сумматор,  $\Omega$  — фильтр на частоте  $\omega_0$ ,  $\pi/2$  — задержка на  $\pi/2$ ,  $\Phi$  — НЧ фильтр цепи корреляционной обратной связи,  $\gamma$  — коэффициент усиления цепи обратной связи.

3. Предварительно рассмотрим влияние нелинейных искажений на эффективность работы широко используемого линейного автокомпенсатора [6] (без коррекции нелинейных искажений). Полагая гауссовы  $\eta(t)$  и  $\xi(t)$  собственными шумами основного и компенсационного каналов соответственно, запишем следующие из функциональной схемы (см. рис. 1) и усредненные по периоду  $2\pi/\omega_0$  уравнения для квадратурных компонент управляемого напряжения  $W(i)$ :

$$\left( T \frac{d}{dt} + 1 \right) W_c(t) = \frac{\gamma}{2} [\bar{A}A_f + BB_f - (\bar{A}^2 + \bar{B}^2) W_c(t)], \quad (2)$$

$$\left( T \frac{d}{dt} + 1 \right) W_s(t) = \frac{\gamma}{2} [\bar{A}B_f - \bar{B}A_f - (\bar{A}^2 + \bar{B}^2) W_s(t)],$$

где  $T$  — постоянная времени фильтра цепи корреляционной обратной связи;

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(t) + A_\xi(t), & \bar{B}(t) &= B(t) + B_\xi(t), \\ A_f(t) &= k_1[A(t)\cos\delta + B(t)\sin\delta] + \frac{3}{4}k_3[A^3(t)\cos\delta + \\ &+ A^2(t)B(t)\sin\delta + A(t)B^2(t)\cos\delta + B^3(t)\sin\delta] + A_\eta(t), \\ B_f(t) &= k_1[B(t)\cos\delta - A(t)\sin\delta] + \frac{3}{4}k_3[-A^3(t)\sin\delta + \\ &+ A^2(t)B(t)\cos\delta - A(t)B^2(t)\sin\delta + B^3(t)\cos\delta] + B_\eta(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\delta = \omega_0\Delta$ ,  $\Delta$  — время запаздывания помехи между основной и компенсационной антенны,  $A_\eta(t)$ ,  $B_\eta(t)$ ,  $A_\xi(t)$ ,  $B_\xi(t)$  — квадратурные компоненты собственных шумов основного и компенсационного каналов.

При статистическом усреднении (2) используем предположение о некоррелированности управляющих напряжений и поступающих помех, что оправдано в случае инерционного фильтра цепи корреляционной обратной связи по сравнению со временем корреляции помехи [6]. Полагая собственные шумы не коррелированными с поступающей помехой и учитывая некоррелированность квадратурных компонент гауссовых процессов в совпадающие моменты времени, в результате получим

$$\left( T \frac{d}{dt} + 1 \right) \langle W(t) \rangle = \gamma [k_1 P + 3k_3 P^2 - (P + P_\xi) \langle W(t) \rangle], \quad (4)$$

$$\langle W(t) \rangle = \frac{\langle W_c(t) \rangle}{\cos \delta}, \quad \frac{\langle W_s(t) \rangle}{\sin \delta},$$

где  $P \equiv \langle x^2 \rangle$ ,  $P_\xi \equiv \langle \xi^2 \rangle$  — мощность помехи и собственного шума компенсационного канала. Из (4) следуют выражения для установившегося среднего значения управляющего напряжения  $\langle W \rangle_{уст}$  и его эффективного времени настройки  $T_{эфф}$ :

$$\langle W \rangle_{уст} = \frac{\gamma (k_1 P + 3k_3 P^2)}{1 + \gamma (P + P_\xi)}, \quad T_{эфф} = T [1 + \gamma (P + P_\xi)]^{-1}, \quad (5)$$

достаточным условием применимости которых является выполнение неравенства  $\tau_k \ll T_{эфф}$  [6].

Введем аналогично [4] уровень превышения мощности помехи над собственным шумом компенсационного канала  $\nu = P/P_\xi$ . Из (5) при заданном уровне собственного шума  $\gamma P_\xi = 1$  и при  $\nu = 0$  и  $\nu \gg 1$  соответственно имеем

$$T_{эфф}^{v=0} = 0.5 T, \quad T_{эфф}^{v \gg 1} = \nu^{-1} T. \quad (6)$$

Несложно получить также мощность нескомпенсированной помехи на выходе схемы

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = \frac{1}{2} & \left\langle \left[ k_1 U(t) + \frac{3}{4} k_3 U^3(t) + U_\eta(t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \langle W(t) \rangle (U(t) + U_\xi(t)) \right]^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $U_\eta(t)$ ,  $U_\xi(t)$  — амплитуды шумовых напряжений основного и компенсационного каналов соответственно. При  $\gamma P \gg 1$  (узкополосный фильтр цепи корреляционной обратной связи) выражение (7) в установившемся режиме примет вид

$$\langle z^2 \rangle_{уст} = k_1^2 P + 6k_1 k_3 P^2 + \frac{27}{2} k_3^2 P^3 + P_\eta - \frac{(k_1 P + 3k_3 P^2)^2}{P + P_\xi}. \quad (8)$$

При  $\nu \gg 1$  из (8) будем иметь

$$\langle z^2 \rangle_{уст} = P_\eta + k_1^2 P_\xi + \frac{9}{2} k_3^2 P^3 + 6k_1 k_3 P P_\xi + 9k_3^2 P^2 P_\xi. \quad (9)$$

Таким образом, компенсация помехи из-за наличия нелинейных искажений в основном канале ( $k_3 \neq 0$ ) ухудшается на величину  $\frac{9}{2} k_3^2 P^3 + 6k_1 k_3 P P_\xi + 9k_3^2 P^2 P_\xi$ . Сделаем некоторые количественные оценки.

Пусть требуется достичь уровня компенсации не менее  $30 \text{ dB}$ , т. е.  $\langle z^2 \rangle / \langle f^2 \rangle \leq 10^{-3}$ . Используя (9), находим условие, при котором можно пренебречь нелинейными искажениями:

$$P \leq P_{\text{кр}} = 0,045 P_0, \quad (10)$$

где

$$P_0 = -\frac{k_1}{3k_3} > 0.$$

Следовательно, для удовлетворительной компенсации помехи (не хуже  $30 \text{ dB}$ ) при наличии нелинейных искажений в основном канале ее мощность не должна превосходить  $P_{\text{кр}}$ . Из

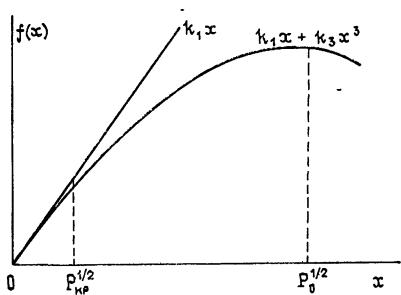


Рис. 2.

(9) несложно найти, что при этом нелинейная функция  $f(x) = k_1 x + k_3 x^3$  в точке среднеквадратичного отклонения ( $x = P_{\text{кр}}^{1/2}$ ) не должна отличаться от линейной более чем на 1% (см. рис. 2). При более сильной нелинейности (или при  $P > P_{\text{кр}}$ ) для достижения заданного уровня подавления необходимо вводить дополнительные каналы нелинейной компенсации, как это показано на рис. 1а.

4. Рассмотрим характеристики подавления помехи автокомпенсатором при наличии дополнительного канала, компенсирующего кубичные искажения. Усредненные уравнения релаксации весовых коэффициентов (по периоду  $2\pi/\omega_0$  и по ансамблю реализаций  $x(t)$ ) в предположениях п. 3 в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \left( T_1 \frac{d}{dt} + 1 \right) \langle W_1(t) \rangle &= \gamma_1 [k_1 P + 3k_3 P^2 - (P + P_\xi) \langle W_1(t) \rangle - \\ &- 3(P + P_\xi)^2 \langle W_3(t) \rangle], \\ \left( T_3 \frac{d}{dt} + 1 \right) \langle W_3(t) \rangle &= \gamma_3 \left[ 3k_1 P^2 + \frac{27}{2} k_3 P^3 + 3P_\xi (k_1 P + \right. \\ &\left. + 3k_3 P^2) - \frac{9}{16} (24P^3 + 24P_\xi^3 + 53P^2P_\xi + 53PP_\xi^2) \times \right. \\ &\left. \times \langle \dot{W}_3(t) \rangle - 3(P + P_\xi)^2 \langle W_1(t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\langle W_j(t) \rangle = \frac{\langle W_{je}(t) \rangle}{\cos \delta}, \quad \frac{\langle W_{js}(t) \rangle}{\sin \delta}.$$

Уравнения (11) по аналогии с п. 3 справедливы при условии

$$\tau_k \ll \min\{T_{1 \text{ эфф}}, T_{2 \text{ эфф}}\}, \quad (12)$$

где  $T_{1,2 \text{ эфф}}$  — эффективные времена релаксации весовых коэффициентов.

Выражение для мощности нескомпенсированной помехи в этом случае представляет собой

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left[ k_1 U(t) + \frac{3}{4} k_3 U^3(t) + U_\eta(t) - \langle W_1(t) \rangle \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (U(t) + U_\xi(t)) - \frac{3}{4} \langle W_3(t) \rangle (U(t) + U_\xi(t))^3 \right]^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что мощность на выходе компенсатора с коррекцией нелинейных искажений меньше выходной мощности линейного компенсатора (7) при любых  $t > 0$ . Однако основной интерес при исследовании эффективности компенсаторов представляют установившиеся характеристики выходного сигнала и, в первую очередь, его мощность. Устремляя  $t \rightarrow \infty$ , при узкополосных фильтрах цепи корреляционной обратной связи ( $\gamma_1 P, \gamma_3 P^3 \gg 1$ ) из (13) получим

$$\langle z^2 \rangle_{\text{уст}} = k_1^2 P + 6k_1 k_3 P^2 + \frac{27}{2} k_3^2 P^3 + P_\eta - \langle W_1 \rangle_{\text{уст}} d_1 - \langle W_3 \rangle_{\text{уст}} d_3, \quad (14)$$

где

$$d_1 = k_1 P + \frac{9}{4} k_3 P^2,$$

$$d_3 = 3k_1 P^2 + \frac{9}{2} k_1 P P_\xi + \frac{27}{2} k_3 P^2 (P + P_\xi),$$

а  $\langle W_1 \rangle_{\text{уст}}, \langle W_3 \rangle_{\text{уст}}$  определяются из (11). Как показывает анализ выражений (11), (14), компенсация помехи по сравнению с (8) улучшается. При достаточно большом превышении мощности помехи над уровнем собственного шума компенсационного канала,  $v \gg 1$ ,  $\langle W_1 \rangle_{\text{уст}} \rightarrow k_1$ ,  $\langle W_3 \rangle_{\text{уст}} \rightarrow k_3$  и  $\langle z^2 \rangle_{\text{уст}} \rightarrow 0$ .

Оценим время настройки системы с адаптивной компенсацией нелинейных искажений. Корни характеристического уравнения для системы (11) определяют постоянные времени изменения управляющих напряжений  $T_{1,2}$  эф. В частности, при  $T_1 = T_3 = T$  и заданном уровне собственных шумов компенсационного канала  $\gamma_1 P_\xi = \gamma_3 P_\xi^3 = 1$  они равны

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T_{1 \text{ эф}} = 0,76 T, \quad T_{2 \text{ эф}} = 0,06 T, \\ v \gg 1, \quad T_{1 \text{ эф}} = 3,125 v^{-1} T, \quad T_{2 \text{ эф}} = 0,076 v^{-3} T. \end{aligned} \quad (15)$$

Максимально допустимое время настройки системы ( $T_{1 \text{ эф}} \leq T_{\max}$ ) и одновременное выполнение неравенства (12) ( $T_{2 \text{ эф}} \gg \tau_k$ ) ограничивают эффективный динамический диапазон компенсации поступающих помех по сравнению с системой без коррекции нелинейных искажений, поскольку  $T_{1 \text{ эф}} > T_{\text{эф}} > T_{2 \text{ эф}}$  (см. (6) и (15)).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Теоретические основы радиолокации, под ред. Я. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
2. Б. Уидроу и др., ТИИЭР, 55, № 12, 78 (1967).
3. Б. Уидроу и др., ТИИЭР, 63, № 12, 69 (1975).
4. У. Гейбриэл, ТИИЭР, 64, № 2, 55 (1976).
5. В. Д. Пономарева, В. М. Комаров, Зарубежная радиоэлектроника, № 8, 33 (1977).

- 6 А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, 23, № 7, 1401 (1978).
- 7 А. А. Мальцев, И. Е. Позументов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 2, 150 (1979).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26 октября 1978 г.

## ON THE ADAPTIVE COMPENSATION OF NONLINEAR DISTORTIONS

*A. A. Mal'tsev, I. E. Pozumentov*

Characteristics of one-channel auto-compensator of noises with a correlation feedback are investigated in the presence of nonlinear distortions in the basis channel. A scheme of compensation of the specified nonlinear distortions is suggested and estimations of its efficiency are given.

---

УДК 535.21

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ПРОШЕДШЕГО ТУРБУЛИЗИРОВАННЫЙ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ\*

*C. C. Каширов*

Приводятся результаты измерений относительной дисперсии флюктуаций интенсивности на оси коллимированных световых пучков, прошедших неоднородный слой и распространяющихся далее в однородном пространстве. Неоднородный слой моделируется при помощи жидкостной кюветы длиной 35 см с развитой конвективной турбулентностью. Измерения проведены как в отсутствие флюктуаций интенсивности, так и при значительных флюктуациях интенсивности непосредственно на выходе из слоя. Результаты измерений сравниваются с известными теоретическими и численными расчетами и с данными аналогичных измерений в статистически однородных средах.

Задачи о флюктуациях интенсивности излучения, прошедшего неоднородный турбулизированный слой и распространяющегося далее в однородном пространстве, могут возникать при прохождении радиоволн через земную ионосферу, при покрытии естественных или искусственных источников излучения планетами, имеющими атмосферу, и так далее [1]. В связи с этим экспериментальное исследование флюктуаций интенсивности излучения, прошедшего неоднородный слой, представляет несомненный интерес. Опубликованные в литературе результаты подобных измерений относятся к зоне слабых флюктуаций интенсивности излучения [2]. Зона сильных флюктуаций требует дальнейшего экспериментального изучения.

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию флюктуаций интенсивности излучения, прошедшего турбулизированный слой с известными параметрами. Измерения относительной дисперсии флюктуаций интенсивности проводились в широких и узких коллимированных световых пучках для двух случаев:

а) флюктуации интенсивности на выходе из неоднородного слоя малы, имеются в основном фазовые флюктуации (ФФ);

б) флюктуации интенсивности на выходе из неоднородного слоя значительны, т. е. имеются амплитудно-фазовые флюктуации (АФФ) на выходе из слоя.

### СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Схема эксперимента изображена на рис. 1. Световой пучок лазера 1, работающего в режиме осевых колебаний и имеющего длину волны излучения  $\lambda = 0,6328 \text{ мк}$ , расширяется оптической системой 2 (необходимый диаметр пучка устанавливается подбором фокусного расстояния линз, составляющих эту систему) и проходит далее через жидкостную

\* Работа частично доложена на XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн [11].

кювету 3, в которой создается конвекция жидкости (воды). Толщина слоя воды в кювете  $a = 35 \text{ см}$ . Использовавшаяся кювета незначительно отличается от описанной в [3, 4]. Световое излучение, прошедшее кювету 3, далее распространяется в пространстве, свободном от неоднородностей. Интенсивность излучения 1 преобразуется в электрический сигнал фотоэлектронным умножителем 5, заключенным в светонепроницаемый кожух 6. Приемная диафрагма 4 имеет диаметр 12 мк. Сигнал с ФЭУ 5 подается на вход аналогового прибора 7, при помощи которого определяются средний уровень и средний квадрат входного сигнала. Расстояние  $x$  от начала кюветы 3 до приемной диафрагмы 4 может изменяться в пределах от 0,36 до 31 м. Чтобы пояснить принцип получения больших ( $x > 31 \text{ м}$ ) расстояний от слоя, запишем в приближении Френеля поле на расстоянии  $x - a$  от выходной плоскости кюветы 3:

$$g(\rho, x) = \frac{-i e^{ik(x-a)}}{\lambda_1(x-a)} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' U(\rho', a) \exp \left[ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x-a)} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $k = 2\pi\lambda_1^{-1}$ ,  $\lambda_1 = \lambda \langle \epsilon \rangle^{-1/2}$ ,  $U(\rho', a)$  — распределение поля в выходной плоскости кюветы. Это выражение справедливо и в дальней зоне, если выполнено условие  $(2\alpha_0)^2/\lambda_1^2 \ll \lambda_1 x/(2\alpha_0)^2$  [5], где  $2\alpha_0$  — начальный диаметр пучка. Относительную дисперсию флюктуаций интенсивности (индекс мерцаний) можно выразить через поле  $g(\rho, x)$ :

$$\beta^2(\rho, x) = \frac{\langle [g(\rho, x) g^*(\rho, x)]^2 \rangle}{\langle g(\rho, x) g^*(\rho, x) \rangle^2} - 1. \quad (2)$$

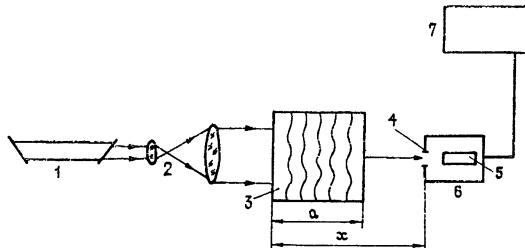


Рис. 1.

Телескоп-рефрактор, установленный за кюветой 3 так, что передняя фокальная плоскость объектива совпадает с выходной плоскостью кюветы, дает в задней фокальной плоскости окуляра неискаженное, перевернутое, уменьшенное в  $c$  раз ( $c = 3,72$ ) изображение выходной плоскости кюветы. Световой пучок, прошедший кювету, в рефракторе не ограничивается. В плоскости изображения распределение поля в этом случае будет  $U(-c\rho, a')$ ; здесь  $a'$  — координата плоскости изображения. Подставив  $U(-c\rho, a')$  в (1) и сделав замену  $-c\rho = \rho'$ , можно показать, что при одинаковых значениях  $k$  значение выражения (2) не изменится, если  $c^2(x' - a') = x - a$ . Таким образом, на расстоянии  $x' - a'$  от изображения будем иметь такое  $\beta^2$ , как на расстоянии  $c^2(x' - a')$  от кюветы. Это дает возможность получать эквивалентные расстояния от кюветы вплоть до  $x = 350 \text{ м}$ .

Предполагалось, что в жидкостной кювете трехмерный спектр пульсаций диэлектрической проницаемости  $(\epsilon - \langle \epsilon \rangle)/\langle \epsilon \rangle$  аппроксимируется выражением [6]

$$\Phi_\epsilon(x) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2). \quad (3)$$

Здесь  $C_\epsilon^2$  — структурная характеристика,  $x_m = 5,92/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  — внутренний масштаб. Величина  $\lambda_0$  определяется из общего турбулентного потока тепла [2, 6]. Значение  $C_\epsilon^2$  в кювете определялось оптическим методом по методике [8], ее применение к аналогичному случаю подробно описано в [7]. Типичные значения структурной характеристики для случая ФФ были:

$$C_\epsilon^2 = (0,83 \div 1,36) \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-2/3}, \quad \lambda_0 = 0,088 \div 0,09 \text{ см};$$

для случая АФФ —

$$C_\epsilon^2 = (0,76 \div 1,3) \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-2/3}, \quad \lambda_0 = 0,056 \div 0,057 \text{ см}.$$

Если считать, что в кювете и в однородном пространстве  $\langle \epsilon \rangle = \text{const}$ , то подставляя в известные выражения для плавнонеоднородной среды [6] величину  $C_\epsilon^2$  в виде

$$C_\epsilon^2 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \text{const}, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

можно вычислить в приближении МПВ относительную дисперсию флюктуаций интенсивности (индекс мерцаний):

$$\beta_0^2 = 2,185 k^2 C_\epsilon^2 x_m^{-5/3} a F(D, a/x). \quad (4)$$

Здесь

$$F(D, a/x) = \frac{6x(1+D^2)^{11/12}}{11aD} \sin\left(\frac{11}{6} \arctg D\right) - \frac{6x[1+D^2(1-a/x)^2]^{11/12}}{11aD} \sin\left\{\frac{11}{6} \arctg[D(1-a/x)]\right\}.$$

Выражение (4) справедливо при любом отношении  $a/x \leq 1$  и любом значении волнового параметра  $D = x_m^2 x/k$ . При  $D \ll 1$  оно переходит в известное выражение [2]

$$\beta_0^2 = 3,2 C_\epsilon^2 \lambda_0^{-7/3} (3x^2 a - 3xa^2 + a^3),$$

при  $D \gg 1$  получается выражение [6, 9]

$$\beta_0^2 = 0,56 C_\epsilon^2 k^{7/6} ax^{5/6}.$$

Вычисленный в приближении МПВ индекс мерцаний  $\beta_0^2$  характеризует условия распространения излучения [6, 9], и поэтому его удобно использовать при сравнении экспериментальных результатов с теорией. Различие средней диэлектрической проницаемости жидкости в кювете (вода,  $\langle \epsilon \rangle \approx 1,77$ ) и воздуха ( $\langle \epsilon \rangle \approx 1$ ) приводит к отражению и преломлению излучения на границах кюветы. Оценки показывают, что эффекты, связанные с отражением, незначительны и ими можно пренебречь. Распределение поля на выходе из кюветы  $U(\rho', a)$  определяется условиями распространения излучения в кювете. Подставляя в (2) поле  $g(\rho, x)$  в виде (1), легко убедиться, что если в пространстве за кюветой воздух, то величина  $\beta^2$  на расстоянии  $x - a$  в воздухе будет такой же, какой она была бы на расстоянии  $(x - a)\langle \epsilon \rangle^{1/2}$  в среде с  $\langle \epsilon \rangle \neq 1$ . Это обстоятельство учитывается при расчете  $\beta_0^2$  по формуле (4).

Измерение величины  $\beta^2$  проводилось на различных расстояниях от кюветы, при этом приемная диафрагма устанавливалась по центру

светового пучка. Результат измерений соответствует плоской волне, если он получен в ближней зоне коллимированного светового пучка, когда число Френеля  $\Omega = k\alpha_0^2/x$  значительно больше единицы и пучок размыт из-за турбулентности не более чем в два раза (при большем размытии пучка ограниченность влияет на флюктуации даже при  $\Omega \gg 1$ ) [9]. В каждом измерении регистрация показаний аналоговой схемы возведения в квадрат производилась в течении 10 минут и при обработке результатов вычислялось среднее за 10 мин значение индекса мерцаний и среднеквадратичное уклонение этой величины.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

1. На рис. 2 и 3 представлены результаты измерений индекса мерцаний в плоской волне для случаев ФФ и АФФ. По оси абсцисс здесь отложена величина  $\beta_0 = \sqrt{\beta^2}$ , где  $\beta^2$  вычислено по формуле (4). По оси ординат отложено значение  $\beta = \sqrt{\beta^2}$ . Экспериментальные точки 1 есть средние значения  $\beta$  по серии измерений, а вертикальная черта 2 соответствует шести среднеквадратичным уклонениям этого среднего ( $\pm 3\sigma$ ) для всех точек данного графика. Кривая 3 соответствует средней зависимости  $\beta(\beta_0)$  по экспериментальным данным. Кривая 4 (область  $\beta_0 < 1$ ) соответствует приближению МПВ:  $\beta = [\exp(\beta_0^2) - 1]^{1/2}$ . В области  $\beta_0 > 1$  зависимость 5 рассчитана с учетом толщины слоя  $a$  и внутреннего масштаба турбулентности  $\lambda_0$  [11]. Приводятся также результаты расчетов для фазового экрана с чисто степенным спектром ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ). Кривая 6 рассчитана по [9, 10], кривая 7 соответствует численному расчету [12]. В этих вычислениях эквивалентный фазовый экран располагался в выходной плоскости кюветы  $x = a$ .

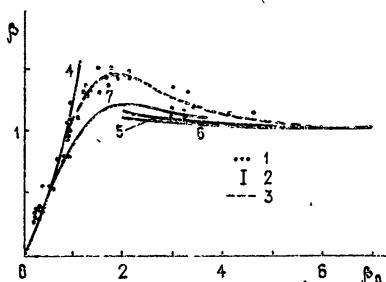


Рис. 2.

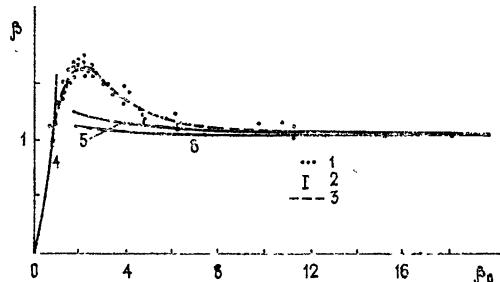


Рис. 3.

График рис. 2 соответствует случаю ФФ. В области  $\beta_0 < 1$  результаты измерений согласуются с расчетом по МПВ. При  $\beta_0 \approx 2$  достигается максимум флюктуаций интенсивности. Этому значению  $\beta_0$  соответствует величина  $D \approx 18$  и  $a/x \approx 0,06$ . Здесь экспериментальные точки лежат несколько выше всех расчетов. Это отличие может быть связано с некоторой неточностью асимптотической оценки [11], пригодной при  $\beta_0 \gg 1$ , и с тем, что условия эксперимента несколько отличались от расчета [12] ( $a/x \rightarrow 0$ ,  $D \rightarrow \infty$ ). С дальнейшим увеличением  $\beta_0$  (расстояния от слоя) величина  $\beta$  уменьшается до значения  $\beta \approx 1$ . Уже при  $\beta_0 \geq 4$  эксперимент практически не отличается от расчетов [9–11], этому значению  $\beta_0$  соответствует  $a/x \leq 0,007$ .

График рис. 3 соответствует случаю АФФ. Флюктуации интенсивности на выходе из кюветы в этом режиме значительны: значению  $x = a$  соответствует  $\beta \approx 1$ ,  $\beta_0 \approx 1$ . Максимум флюктуаций наблюдается приблизительно при том же значении  $\beta_0 \approx 2$ , что и в случае ФФ, однако

величина максимума в данном случае больше (в максимуме  $D \approx 6$  и  $a/x \approx 0,5$ ). С увеличением  $\beta_0$  измеренное значение  $\beta$  уменьшается. Индекс мерцаний согласуется с теоретическим значением  $\beta = 1$  при  $\beta_0 \geq 8$ , что соответствует величине  $a/x \leq 0,013$ . Сравнение графиков рис. 2 и рис. 3 показывает, что чем сильнее флуктуации интенсивности на выходе из слоя, тем сильнее флуктуации вблизи него отличаются от флуктуаций за эквивалентным фазовым экраном, расположенным в плоскости  $x = a$ . Тем не менее, за максимумом флуктуаций расчет в приближении фазового экрана согласуется с экспериментом при меньших расстояниях от экрана. Этот вывод соответствует расчетам Заворотного [11].

На рис. 4 нанесены экспериментальные зависимости  $\beta(\beta_0)$  с рис. 2 (кривая 2) и рис. 3 (кривая 3), а также результаты измерений величины  $\beta$  в статистически однородных средах: атмосфере [14] (кривая 1) и жидкостной кювете [3] (кривая 4). Сравнение экспериментальных кривых показывает, что флуктуации в максимумах для сплошной среды и для неоднородного слоя конечной толщины согласуются между собой, если они получены при мало отличающихся значениях волнового параметра  $D$ . Максимум флуктуаций в сплошной среде шире. Качественно это можно объяснить тем, что в сплошной среде происходят многочисленные «перефокусировки» излучения, которые отсутствуют в однородном пространстве за слоем. Более пологий спад величины  $\beta$  в сплошной среде может быть связан с влиянием участка трассы, прилегающего к приемнику. На основании графика рис. 4 можно, по-видимому, предполагать, что основные качественные закономерности, характерные для сплошной среды, могут быть выявлены с помощью такой довольно грубой модели, какой является применяемая установка.

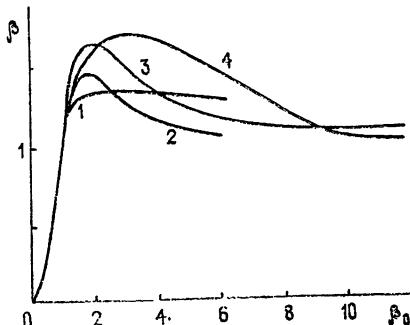


Рис. 4.

2. На флуктуации интенсивности в ограниченном коллимированном пучке, кроме уже упоминавшихся величин  $\beta_0^2$ ,  $a/x$ ,  $D$ , влияют также значение числа Френеля передающей апертуры  $\Omega$ , величина структурной функции фазы сферической волны на размере передающей апертуры  $D_s^{cf}(2\alpha_0) = 0,27 C_e^2 k^2 a (2\alpha_0)^{5/3}$ , значение отношения внутреннего масштаба турбулентности к диаметру передающей апертуры  $\lambda_0/2\alpha_0$  и положение приемника относительно оси пучка [9, 10, 13]. Исследовать такую многопараметрическую задачу очень сложно. Как показали результаты измерений индекса мерцаний в плоской волне, независимо от величин  $\beta_0^2$ ,  $a/x$ ,  $D$  и уровня мерцаний непосредственно на выходе из слоя, при значении  $\beta_0 > 8$  наблюдается насыщение величины  $\beta$  на уровне 1. Можно предположить, что при измерении  $\beta^2$  на оси коллимированных пучков в области  $\beta_0 > 8$  результаты измерений будут зависеть только от оставшихся трех параметров —  $\Omega$ ,  $D_s^{cf}(2\alpha_0)$  и  $\lambda_0/2\alpha_0$ .

В работе [10] проведено теоретическое исследование зависимости индекса мерцаний для сфокусированного пучка (коллимированного с  $\Omega \ll 1$ ) и степенного спектра пульсаций  $\varepsilon$  в слое ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ )

$$\beta^2 = 1 + 4,09 [D_s^{cf}(2\alpha_0)]^{-2/5}. \quad (5)$$

Согласно численным расчетам индекса мерцаний на оси коллимирован-

ногого пучка [13] увеличение параметра  $\lambda_0/2\alpha_0$  должно приводить к увеличению индекса мерцаний по сравнению с (5), особенно заметному при  $\Omega \approx 1$ .

На рис. 5 приводятся результаты измерений в коллимированных световых пучках. По оси абсцисс отложено значение  $\beta_0$ , вычисленное для плоской волны. По оси ординат отложено значение  $\beta$ , измеренное на оси пучка. Цифрами обозначены экспериментальные точки и проведенные по ним эмпирические кривые. Как и выше, каждая точка соответствует среднему  $\beta$  по серии измерений, а вертикальными черточками отмечено плюс-минус уточненное среднеквадратичное уклонение среднего. Дополнительные сведения об этих измерениях приводятся в табл. 1. Номера строк таблицы соответствуют номерам кривых рис. 5. При  $\beta_0 \leq 1$  для всех пучков  $\Omega \gg 1$ , поэтому при  $\beta_0 \leq 1$  поведение  $\beta(\beta_0)$  для всех пучков совпадает с поведением  $\beta(\beta_0)$  в плоской волне.

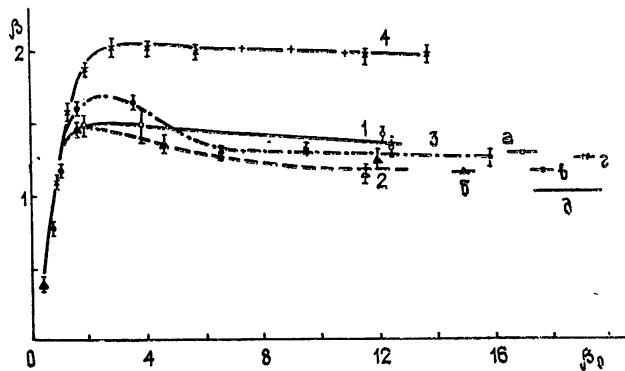


Рис. 5.

Таблица 1

Номер кривой	$2\alpha_0, см$	$D_s^{\text{сф}}(2\alpha_0)$	$\lambda_0/2\alpha_0$	$\Omega$ при максимальном $\beta_0$	Обозначение асимптотики	Примечание
1	0,6	75	0,15	0,3	а	ФФ
2	2	556	0,045	2,9	б	ФФ
3	0,6	951	0,095	2,9	в	АФФ
4	0,4	115	0,28	0,3	г	АФФ

Напомним, что величина  $\beta_0$  увеличивается за счет увеличения  $x$ , поэтому с ростом  $\beta_0$  для пучка происходит уменьшение  $\Omega$ . Для всех пучков вычислены асимптотические значения индекса мерцаний по формуле (5), на графике они обозначены буквами (а)—(г), асимптотика (д) соответствует плоской волне.

Сравнение кривой 1 с ее асимптотикой (а), кривой 2 с ее асимптотикой (б) и обоих кривых между собой показывает, что при изменении  $2\alpha_0$  изменение значения  $\beta$  качественно согласуется с (5). Для количественного сопоставления точность измерений мала.

Кривая 3 получена в том же пучке, что и кривая 1, но при другом значении  $C_e^2$  в слое. Тенденция к уменьшению  $\beta$  с ростом  $C_e^2$  (при фиксированном  $2\alpha_0$ ) качественно соответствует зависимости (5). Аналогичные результаты получены в измерениях [4] для пучков, фокусированных в сплошной среде. Сравнение кривой 1 с кривыми 2 и 3 показывает, что изменение  $D_s^{\text{сф}}(2\alpha_0)$  от  $\sim 100$  до  $\sim 1000$  и  $\Omega$  от  $\sim 3$  до  $\sim 0,3$

не приводит к существенному изменению индекса мерцаний: отличие асимптотик (а), (б) (в) друг от друга и соответствующих экспериментальных кривых, вообще говоря, сравнимо с разбросом измерений.

Отметим особенности поперечной структуры коллимированных пучков в зоне  $\beta_0 \gg 1$ . Широкие пучки размываются равномерно, пульсации излучения на краях пучков носят характер выбросов излучения в радиальном направлении, длина выбросов меньше радиуса пучка, размытого турбулентностью. С уменьшением начального диаметра пучка относительный размер этих выбросов увеличивается.

В нашем эксперименте для пучков с  $2\alpha_0 = 6 \text{ мм}$  размер выбросов достигал радиуса размытого пучка, при этом становится заметным смещение пучка как целого. При таком «дрожании» пучка размер освещаемой области достигает почти двух его диаметров. Приемная диафрагма ФЭУ, установленная в центре освещаемой области, освещена всегда, и, судя по кривым 2 и 3, дрожание пучка на результатах измерений  $\beta$  оказывается незначительно. При дальнейшем уменьшении диаметра пучка его смещение как целого увеличивается. Так, для пучка с  $2\alpha_0 = 2 \text{ мм}$  размер освещаемой области достигает нескольких диаметров пучка. В отдельные моменты времени излучение совсем не попадает в приемную диафрагму, установленную в центре освещаемой области. Большой вклад в флюктуации излучения, прошедшего приемную диафрагму, вносит смещение пучка как целого. Можно предположить, что величина этого вклада будет определяться отношением времени, в течение которого диафрагма была освещена, ко всему времени наблюдения, или средним отношением величины площадки, освещаемой бегающим пучком, к площади его поперечного сечения. В однородном пространстве за кюветой это отношение не изменяется с увеличением расстояния  $x$ , значит, увеличение расстояния от кюветы не должно приводить к уменьшению  $\beta$ . Это подтверждает ход кривой 4 на рис. 5, отличие которой от ее асимптотики (г) очень велико. Из упоминавшихся выше трех параметров остается только один, а именно  $\lambda_0/2\alpha_0$ , изменение которого могло привести к такому отличию кривой 4 от кривых 1, 2 и 3. В самом деле, увеличение «дрожания» пучка и, соответственно, увеличение индекса мерцаний связано с тем, что его диаметр становится сравним с внутренним масштабом  $\lambda_0$ . Данные графика рис. 5 удовлетворительно согласуются с результатами численного расчета зависимости индекса мерцаний от значений  $\lambda_0/2\alpha_0$  и  $D_s^{\text{cf}}(2\alpha_0)$ , которые приводятся в [13].

---

Зависимость индекса мерцаний плоской волны от расстояния до модели фазового экрана, полученная в настоящем эксперименте, совпадает с теоретическими расчетами практически на всех расстояниях от слоя. Некоторое превышение результатов измерений над теоретическими расчетами отмечено только в максимуме флюктуаций (область «фокусировок»).

При измерениях с моделью протяженного слоя флюктуации интенсивности на выходе из кюветы были значительны и максимум флюктуаций находился значительно ближе к кювете. Существенное отличие результатов измерений от расчетов в приближении фазового экрана отмечено непосредственно вблизи слоя и в области максимума флюктуаций, однако насыщение индекса мерцаний происходит на меньших расстояниях от слоя, чем в измерениях с моделью фазового экрана. Значение индекса мерцаний в максимуме флюктуаций зависит от величины волнового параметра  $D$ . Уровень насыщения индекса мерцаний, так же как и в модели фазового экрана, равен единице — значит, он

не зависит от флуктуаций интенсивности на выходе из неоднородного слоя.

В коллимированных пучках, начальный диаметр которых значительно больше внутреннего масштаба  $2\alpha_0 \gg \lambda_0$ , по мере увеличения структурной функции фазы  $D_s^{\text{cf}}(2\alpha_0)$  наблюдается тенденция к уменьшению индекса мерцаний. Это согласуется с результатами [10, 4]. Если начальный диаметр коллимированного пучка сравним с внутренним масштабом турбулентности, то наблюдается значительное увеличение индекса мерцаний по сравнению с пучком, имеющим близкое значение  $D_s^{\text{cf}}(2\alpha_0)$  и  $\Omega$ , но больший начальный диаметр. Это увеличение удовлетворительно согласуется с известными результатами численных расчетов [13]. Как показал эксперимент, оно связано с «дрожанием» пучка как целого.

Автор выражает глубокую признательность А. С. Гурвичу за руководство работой, а также В. У. Заворотному за полезное обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, С. М. Рытов, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
2. А. С. Гурвич, Б. Н. Мелешкин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 2, № 7, 688 (1966).
3. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Ф. Э. Мартвель, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1020 (1977).
4. Б. И. Агронский, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 2, 212 (1978).
5. В. А. Зверев, Радиооптика, изд. Сов. радио, М., 1975.
6. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
7. А. С. Гурвич, В. Каин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 298 (1978).
8. А. В. Артемьев, А. С. Гурвич, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 734 (1971).
9. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, № 3, 415 (1974).
10. K. S. Gochelashvily and V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 4, 313 (1971).
11. В. У. Заворотный, С. С. Кацкаров, Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, секция IV, изд. Наука, М., 1978.
12. J. Fugihima, Radio Sci., 10, № 12, 1037 (1975).
13. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1976.
14. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кацкаров, В. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях интенсивности лазерного излучения. Препринт, изд. Отделения океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, М., 1973.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 октября 1978 г.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF INTENSITY FLUCTUATIONS OF THE LIGHT RADIATION PASSING THROUGH A TURBULIZED LAYER OF FINITE DEPTH

S. S. Kashkarov

Measurement results are given of a relative dispersion of intensity fluctuations on the axis of collimated light beams passing through an inhomogeneous layer and propagating further in a homogeneous space. The inhomogeneous layer is modelled by a fluid cuvette of 35 cm length with a developed convective turbulence. Measurements were carried out both in the absence of intensity fluctuations and with significant intensity fluctuations directly at the output of the layer. Results of measurements are compared with the known theoretical and numerical calculations and with data of similar measurements in statistically homogeneous media.

УДК 538.573 : 530.18

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ АВТОНОМНЫХ БЛОКОВ К ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*B. B. Никольский, T. I. Lavrova*

Предложен декомпозиционный подход к задаче о распространении электромагнитного излучения в нелинейной среде. Обсуждаются результаты реализации построенного алгоритма.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенный авторами [1, 2] метод минимальных автономных блоков (МАБ) уже нашел широкое применение при решении задач прикладной электродинамики (см., например, [3–5]), среди которых исследование дифракции на металлических, диэлектрических и гиromагнитных телах в волноводах, нахождение собственных волн в полосковых структурах на гиromагнитной подложке и пр. В основе метода лежит расчленение объекта на систему независимо анализируемых подобластей, которые — при достаточном измельчении — допускают описание в замкнутой аналитической форме. Каждый такой автономный блок характеризуется своей матрицей рассеяния не более чем 12-го порядка (в векторном трехмерном случае). В данной работе основы метода не переизлагаются, поскольку доступно подробное описание [6] и обоснование [7] этого подхода к задачам для уравнений Максвелла.

Краткое сообщение о применении декомпозиционного подхода к задачам, формулируемым на основе нелинейного параболического уравнения, было опубликовано в [8]. Как известно, трактовка на этой основе проблемы распространения излучения в нелинейной среде (см., например, [9–13]) дает относительно простую модель процесса, сохраняющую значительную содержательность. Поэтому разработка новых путей алгоритмизации таких задач имеет практическое значение. В предлагаемой статье подробно обсуждается построение МАБ для параболического уравнения, составление модели процесса распространения электромагнитного излучения в нелинейной среде и реализация ее на ЭВМ. Заметим, что в линейном режиме построенный алгоритм может оказаться полезным для недавно рассматривавшегося [14] типа анализа радиотрасс.

### 2. ПОСТРОЕНИЕ ДЕСКРИПТОРА МАБ

В качестве исходного возьмем известное уравнение

$$\Delta_{\perp} u - i2k \frac{\partial u}{\partial z} + \kappa^2(|u|)u = 0, \quad (1)$$

где  $u$  трактуется как функция «огибающей» комплексной амплитуды поля (мы не останавливаемся здесь на ограничениях перехода от урав-

нений Максвелла к (1) [13]). При линеаризации последний член фигурирует как известная функция координат  $x^2$ , умноженная на  $u$ .

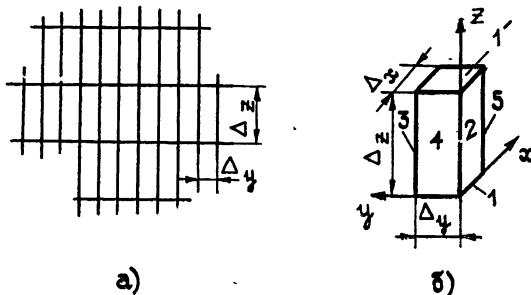


Рис. 1.

На рис. 1а показано выделение системы параллелепипедов в среде, где применяется уравнение (1); каждый из них рассматривается затем в качестве минимального автономного блока (МАБ), соединенного с такими же блоками посредством виртуальных каналов; на рис. 1б показана нумерация граней, являющихся входами каналов. Пусть при линеаризации уравнения (1) внутри любого из выделенных параллелепипедов можно положить  $x^2 = \text{const}$ . Чтобы получить дескриптор МАБ, который мы будем строить по типу матрицы рассеяния, возьмем следующую систему решений уравнения (1) с постоянным  $x^2$ , легко получающихся разделением переменных:

$$u_1^+ = \cos \alpha_x (x - \Delta_x/2) \cos \alpha_y (y - \Delta_y/2) \exp(-i\Gamma z), \quad (2a)$$

$$u_1^- = u_1^+|_{z \rightarrow z - \Delta_z};$$

$$u_2^\pm = \exp(\mp \beta_y y) \operatorname{ch} \beta_x (x - \Delta_x/2) \exp(-i\gamma z); \quad (2b)$$

$$u_4^\pm = \exp(\mp \beta_x x) \operatorname{ch} \beta_y (y - \Delta_y/2) \exp(-i\gamma z); \quad (2c)$$

$$u_5^\pm = u_4^\pm|_{x \rightarrow \Delta_x - x}, \quad u_3^\pm = u_2^\pm|_{y \rightarrow \Delta_y - y}. \quad (2d)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{x^2 - \alpha^2}{2k}, \quad \alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2; \quad (3a)$$

$$\gamma = \frac{x^2 + \beta^2}{2k}, \quad \beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \quad (3b)$$

и

$$\beta_{x,y} = \alpha_{x,y} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{x,y} \Delta_{x,y}}{2}, \quad (3c)$$

причем  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  — постоянные разделения, выбираемые в значительной мере произвольно.

Функции (2) используются как собственные волны виртуальных каналов; в соответствии с этим установлена система их обозначений (индексы  $\pm$  символизируют направления распространения, а цифровые индексы отвечают номерам входов МАБ). Ввиду специфики параболического уравнения виртуальный канал, подходящий к грани 1, является односторонним — несет одну только падающую волну. Соответствующая рассеянная волна распространяется в таком же одностороннем

правленном канале с противоположной стороны МАБ (грань  $1'$ ). Боковые каналы — обычного типа (дву направленные), но волны огибающей (2б), (2в) и (2г), распространяющиеся в них, — чисто реактивные.

Волны виртуальных каналов построены с тем расчетом, чтобы на гранях МАБ можно было с достаточной точностью представить постоянную составляющую некоторого искомого решения  $u$  и его нормальной производной. Дело в том, что при выбранной малости грани постоянные составляющие (нулевые гармоники в разложениях по косинусам) могут быть как угодно близки к указанным функциям в среднеквадратичной метрике. Нетрудно видеть, что функции, описываемые формулами (2), весьма близки к константам на соответствующих гранях, если достаточно малы числа  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ .

Чтобы найти матрицу рассеяния МАБ, надо решить серию задач дифракции для волн  $u_n^+$  (2). При этом на всех гранях МАБ задаются условия излучения относительно виртуальных каналов. Пусть на одну или несколько граней падают волны соответствующих каналов. Согласно условию излучения во всех каналах могут появиться только обратные (рассеянные) волны  $u_n^-$  (2). В проекционной форме имеем

$$\frac{(\partial/\partial v(u - u^+), e_0)_n}{((u - u^+), e_0)_n} = \frac{(\partial/\partial v(u_n^-), e_0)_n}{(u_n^-, e_0)_n}, \quad (4)$$

где  $(\dots, \dots)_n$  — скалярное произведение, понимаемое как интеграл по грани номера  $n$ ,  $u$  — искомое решение задачи дифракции внутри МАБ,  $u^+$  — та или иная заданная падающая волна,  $e_0 = 1$  есть нулевая гармоника базиса грани,  $v$  — координата внешней нормали.

В первой дифракционной задаче задается волна  $u_1^+$ , падающая на грань. Решение внутри МАБ возьмем в виде

$$u = \cos \alpha_x (x - \Delta_x/2) \cos \alpha_y (y - \Delta_y/2) e^{-i\Gamma z}. \quad (5)$$

Ввиду односторонности каналов  $1$  и  $1'$  в формализме матрицы рассеяния они рассматриваются как один канал. В правой части (4) при  $n = 1'$  согласно (2а) имеем  $-i\Gamma$ , а слева  $u^+ = 0$ . Внося  $u$  (5) в (4), убеждаемся, что равенство выполняется. При  $n = 2$  согласно (2б) справа в (4) будет стоять величина  $-\beta_y$ , а слева — по прежнему  $u^+ = 0$ . Подстановка  $u$  (5) в (4) приводит в данном случае к равенству (3в). Аналогичная проверка при  $n = 3, 4, 5$  подтверждает, что функция  $u$  (5) удовлетворяет условию излучения на всех гранях и действительно является поэтому решением поставленной задачи дифракции. Остается найти элементы первого столбца матрицы рассеяния МАБ как амплитуды обратных волн, порождаемых решением  $u$  (5). В прежней проекционной форме получаем

$$S^{k1} = \frac{(u, e_0)_k}{(u_k^-, e_0)_k}. \quad (6)$$

Полагая здесь  $k = 1', 2, 3, 4, 5$ , находим

$$S^{11} = T_z^{-1},$$

$$S^{21} = S^{31} = I_y I_z T_z^{1/2} (I_y^\vee I_z^\vee T_z^{1/2})^{-1} \cos(\alpha_x \Delta_x/2), \quad (7)$$

$$S^{41} = S^{51} = I_x I_z T_z^{1/2} (I_x^\vee I_z^\vee T_z^{1/2})^{-1} \cos(\alpha_y \Delta_y/2),$$

где

$$T_z = \exp(i\Gamma \Delta_z), \quad T_z^\vee = \exp(i\gamma \Delta_z),$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{2}{\alpha_x \Delta_x} \sin \frac{\alpha_x \Delta_x}{2}, & I_y &= \frac{2}{\alpha_y \Delta_y} \sin \frac{\alpha_y \Delta_y}{2}, \\ I'_x &= \frac{2}{\beta_x \Delta_x} \operatorname{sh} \frac{\beta_x \Delta_x}{2}, & I'_y &= \frac{2}{\beta_y \Delta_y} \operatorname{sh} \frac{\beta_y \Delta_y}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь же запишем обозначения, используемые в дальнейшем:

$$\overset{\vee}{T}_x = \exp(\beta_x \Delta_x), \quad \overset{\vee}{T}_y = \exp(\beta_y \Delta_y). \quad (8a)$$

В следующей дифракционной задаче рассматривается падение волны  $u_4^+$  на грань 4. Будем искать решение  $u$  в виде

$$u = (A e^{-\beta_x x} + B e^{\beta_x x}) \operatorname{ch} \beta_y (y - \Delta_y/2) e^{-i \gamma z}. \quad (9)$$

Применяя условие (4) при  $n=4$  и учитывая, что  $u^+ = u_4^+$ , а правая часть равна  $-\beta_x$ , получаем  $A - 1 - B = -(A - 1 + B)$ . Отсюда  $A=1$ . Аналогично при  $n=5$  из (4) находим  $A - B = A + B$ , т. е.  $B=0$ . Таким образом, получено следующее решение:

$$u = \exp(-\beta_x x) \operatorname{ch} \beta_y (y - \Delta_y/2) \exp(-i \gamma z). \quad (10)$$

Простая проверка показывает, что решение  $u$  (10) реализуется при наличии падающей волны в виртуальном канале 1, которая должна присутствовать при возбуждении МАБ со стороны любой другой грани. Амплитуда этой сопутствующей падающей волны\* есть

$$c_1^+ = \frac{(u, e_0)}{(u_1^+, e_0)_1} = \overset{\vee}{I}_x \overset{\vee}{I}_y (I_x I_y \overset{\vee}{T}_x^{1/2})^{-1}. \quad (11)$$

Определим амплитуду обратной волны на грани  $1'$ :

$$c_{1'}^- = \frac{(u, e_0)_{1'}}{(u_{1'}^-, e_0)_{1'}} = \overset{\vee}{I}_x \overset{\vee}{I}_y (I_x I_y \overset{\vee}{T}_x^{1/2} \overset{\vee}{T}_z)^{-1}. \quad (12)$$

Но по смыслу матрицы рассеяния  $c_{1'}^- = S^{11} c_1^+ + S^{14} c_4^+$ , причем  $c_4^+ = 1$  (в силу постановки дифракционной задачи). Поэтому из (11), (12) и первой строчки (7) находим

$$S^{14} = \overset{\vee}{I}_x \overset{\vee}{I}_y (I_x I_y \overset{\vee}{T}_x^{1/2})^{-1} (T_z^{-1} - \overset{\vee}{T}_z^{-1}). \quad (13)$$

Найдем далее амплитуду обратной волны на грани 4; она оказывается равной нулю:

$$c_4^- = \frac{(u, e_0)_4}{(u_2^-, e_0)_4} = 0. \quad (14)$$

Поскольку  $c_4^- = S^{41} c_1^+ + S^{44} c_4^+ = S^{41} c_1^+ + S^{44}$ , то с учетом (11) и второй строчки (7) находим

$$S^{44} = -I_x I_z \overset{\vee}{T}_z^{1/2} (I_x \overset{\vee}{I}_z \overset{\vee}{T}_x^{1/2} T_z^{1/2})^{-1} \cos(\alpha_x \Delta_x/2). \quad (15)$$

\* Фактически это нарушение условия излучения, но используемый формальный аппарат с расщеплением входа 1 на грани 1 и  $1'$  позволяет описывать процесс в целом на базе выполнения этого условия.

Вычисляя амплитуду волны на грани 5, имеем

$$c_5^- = \frac{(u, e_0)_5}{(u_5^-, e_0)_5} = \tilde{T}_x^{-1}. \quad (16)$$

При этом  $c_5^- = S^{31} c_1^+ + S^{54} c_2^+ = S^{51} c_1^+ + S^{54}$ . Отсюда

$$S^{54} = \tilde{T}_x^{-1/2} [\tilde{T}_x^{1/2} - I_x I_z \tilde{T}_z^{1/2} (I_x \tilde{T}_z^{1/2})^{-1} \cos(\alpha_x \Delta_x / 2)]. \quad (17)$$

Решение остальных дифракционных задач производится совершенно аналогично. Не останавливаясь на этих выкладках, запишем получаемую в конечном счете полную матрицу рассеяния МАБ:

$$S = \left[ \begin{array}{ccc|cc} A & D & D & \tilde{D} & \tilde{D} \\ B & E & F & \tilde{G} & \tilde{G} \\ B & F & E & \tilde{G} & \tilde{G} \\ \hline C & G & G & \tilde{E} & \tilde{F} \\ C & G & G & \tilde{F} & \tilde{E} \end{array} \right]. \quad (18)$$

Здесь  $A = S^{11}$ ,  $B = S^{21}$ ,  $C = S^{41}$  (7),  $\tilde{D} = S^{14}$  (13),  $\tilde{E} = S^{44}$  (15),  $\tilde{F} = S^{54}$  (17); в дополнение к этим формулам

$$G = S^{42} = \tilde{T}_x^{-1/2} \left[ \operatorname{ch} \frac{\beta_y \Delta_y}{2} - I_y I_z \tilde{T}_z^{1/2} (I_y \tilde{T}_z^{1/2})^{-1} \cos \frac{\alpha_y \Delta_y}{2} \right], \quad (19)$$

а символы в (18) с тильдой  $\sim$  и без тильды означают величины, отличающиеся заменой  $x \rightleftharpoons{} y$ .

Выделение штриховой линией верхней клетки в (18) имеет следующий смысл. Если решать не трехмерную, а двумерную задачу, оставив, например, оси  $x$  и  $z$ , а вдоль оси  $y$  задав отсутствие изменений, то МАБ будет описываться матрицей рассеяния, совпадающей с этой клеткой, если в соответствующих формулах для  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  положить  $I_y = 1$ ,  $\tilde{I}_y = 1$ .

### 3. ПОСТАНОВКА АПЕРТУРНОЙ ЗАДАЧИ В МАБ-ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Рассмотрим задачу об излучении в полупространство  $z > 0$  из отверстия в экранирующей плоскости  $z = 0$ . Ограничимся классом полей излучения, пренебрежимо малых вне вытянутого параллелепипеда, который показан на рис. 2а штриховыми линиями. Внутреннюю область параллелепипеда условно назовем «каналом излучения».

Канал излучения разбивается на систему МАБ (рис. 2б). Задаче, таким образом, сопоставляется декомпозиционная схема (рис. 2в); при этом на входе (соответствующем плоскости  $z = 0$ ) задается нужное распределение  $u$ , такое, что  $u = 0$  вне апертуры  $S_\Sigma$ . На боковой границе канала излучения  $S_{\text{бок}}$  может быть задано как условие  $u = 0$ , так и условие излучения, т. е. требование, чтобы в соответствующих виртуальных каналах МАБ отсутствовали приходящие волны. Подчеркнем, что сделанное построение имеет смысл при линеаризации среды внутри каждого МАБ.

Решение апертурной задачи об излучении в полупространство, за-

полненное нелинейной средой, производится при послойной линеаризации. Параметр  $x^2$  в (1) для  $(n+1)$ -го слоя задается как  $x^2(|u_n|)$ , где имеется в виду решение  $u_n$ , полученное на выходе  $n$ -го слоя. На рис. 3а, б схематически показано, как операция объединения элементов в слое (с обычным в методе МАБ исключением прямых и обратных волн на стыках) приводит к получению многоканальной матрицы рас-

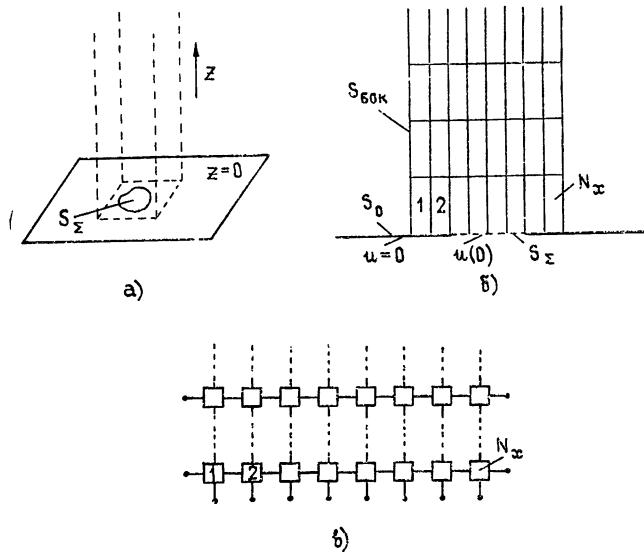


Рис. 2.

сияния  $S_{\text{МНК}}$  слоя. В силу «расщепления» (см. выше разд. 2) первого канала каждого МАБ матрица  $S_{\text{МНК}}$  имеет смысл волновой матрицы передачи. Этот матричный оператор переводит распределение  $u_n$  на выходе слоя  $n$  (входе слоя  $n+1$ ) в распределение  $u_{n+1}$  (на выходе слоя  $n+1$ ). Таким образом,

$$u_{n+1} = S_{\text{МНК}}^{(n+1)} S_{\text{МНК}}^{(n)} \dots S_{\text{МНК}}^{(1)} u_0, \quad (20)$$

$$S_{\text{МНК}}^{(k)} = S_{\text{МНК}}^{(k)} (u_{k-1}),$$

а в линейном режиме все матрицы  $S_{\text{МНК}}$  одинаковы; алгоритм сводится к возведению в степень многоканальной матрицы рассеяния слоя.

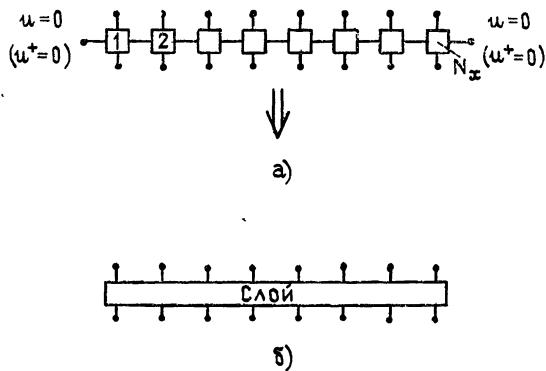


Рис. 3.

Существенно следующее:

1) Как видно из формул (3), свойства боковых виртуальных каналов не зависят от характера реальной внутренней среды МАБ. Поэтому при объединении МАБ в слое не используются (оказываются излишними) элементы перехода (см., например, [2, 6]); если бы такие элементы понадобились, они неизбежно зависели бы от локального решения, что алгоритмически невыгодно.

2) При объединении МАБ в слое используются формулы типа (13), (14) из [2]. Поскольку матрица  $S_{mnk}$ , получаемая в результате такого объединения, оказывается существенно разреженной, в самом алгоритме объединения могут быть приняты меры с целью своевременного отбрасывания пренебрежимо малых величин. Это позволяет резко увеличить число МАБ в слое и уменьшить время счета.

#### 4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

В рассматриваемых ниже примерах реализации алгоритма (ЭВМ—БЭСМ-6, язык—ФОРТРАН) фигурируют двумерные задачи; среда взята «кубической»:  $\epsilon = 1 + \delta |E|^2$  и, следовательно,  $x^3 = \delta |u|^2 k^2$ , где  $\delta$ — некоторая константа.

При обсуждении численных результатов будут использованы следующие обозначения:  $\tilde{z} = 10^3 z \lambda / a^2$  ( $z$ — расстояние от апертуры,  $a$ — ее размер),  $\xi = (x/\lambda) \cdot 10^{-4}$ ,  $N_x$ — поперечное число МАБ,  $N_z$ — число МАБ на длине  $z = 12$ ,  $N_\pi$ — число слоев линеаризации ( $N_\pi \leq N_z$ : линеаризация может производиться сразу по нескольким поперечным слоям МАБ). Во всех примерах  $a/\lambda = 5 \cdot 10^4$ . Алгоритм строился так, чтобы—ввиду симметрии системы—обрабатывалась только половина декомпозиционной схемы, т. е. реальное число МАБ в поперечном направлении составляло  $N_x/2$ . При этом вне апертуры оставалось 20% МАБ от общего числа. Фазирование поля на апертуре соответствовало требованию геометрооптической фокусировки в точке на расстоянии  $\tilde{z} = 12$ .

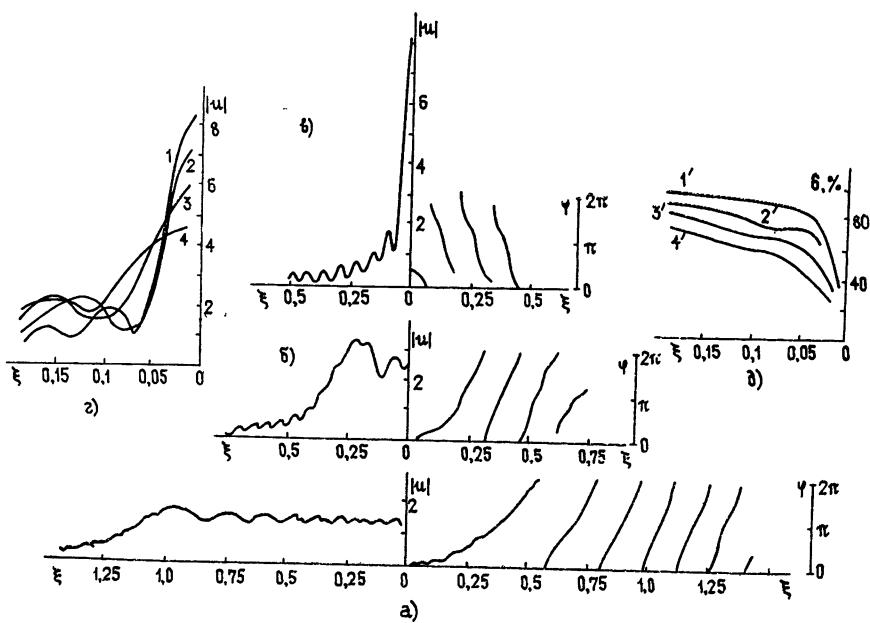


Рис. 4.

На рис. 4 представлены результаты для линейного варианта ( $\delta = 0$ ). При  $N_x = 500$  и  $N_z = 300$  построены кривые модуля и фазы поперечного распределения решения  $u$  уравнения (1) на половине расстояния  $\tilde{z} = 6$  между апертурой и геометрическим фокусом (а), на более близком к фокусу расстоянии  $\tilde{z} = 10$  (б) и в фокусе при  $\tilde{z} = 12$  (в). Отдельно (г) построено несколько кривых в растянутом масштабе. Кривая 1 соответствует случаю (в); кривые 2, 3, 4 получены при уменьшенном вдвое поперечном числе МАБ ( $N_x = 250$ ) и соответствуют трем расстояниям  $\tilde{z} = 11,2; 11,6$  и 12 соответственно. Как видно, некоторое снижение точности привело к смещению фокальной области в сторону апертуры. Насколько подобное снижение точности может повлиять на получаемую из алгоритма степень «освещения» центральной области, показано при помощи кривых 1'—4' (д). Эти кривые характеризуют долю потока энергии  $\eta$  в центральной области — внутри интервала  $(-\xi, \xi)$ . Нумерация на рис. 4г и рис. 4д согласована.

На рис. 5 показано влияние нелинейности среды на распространение излучения ( $\delta = \pm 1,25 \cdot (10/\pi^2) \cdot 10^{-8}$ ). На апертуре было задано  $|u| = 1$  при прежнем фазировании. Было взято  $N_x = 500$ ,  $N_z = 300$ . Кривые поперечного распределения  $|u|$  даны для прежних трех расстояний:  $\tilde{z} = 6$  (а),  $\tilde{z} = 10$  (б) и  $\tilde{z} = 12$  (в). Кроме того, на рис. 5г кривые для  $\tilde{z} = 12$  построены в растянутом масштабе и дополнены соответствующими кривыми  $\eta$ . Там же имеется и кривая, соответствующая отсутствию нелинейности ( $\delta = 0$ ). Как видно, при  $\delta < 0$  наблюдается отчетливая дефокусировка, а при  $\delta > 0$  — некоторое сужение центрального лепестка диаграммы (рис. 5г).

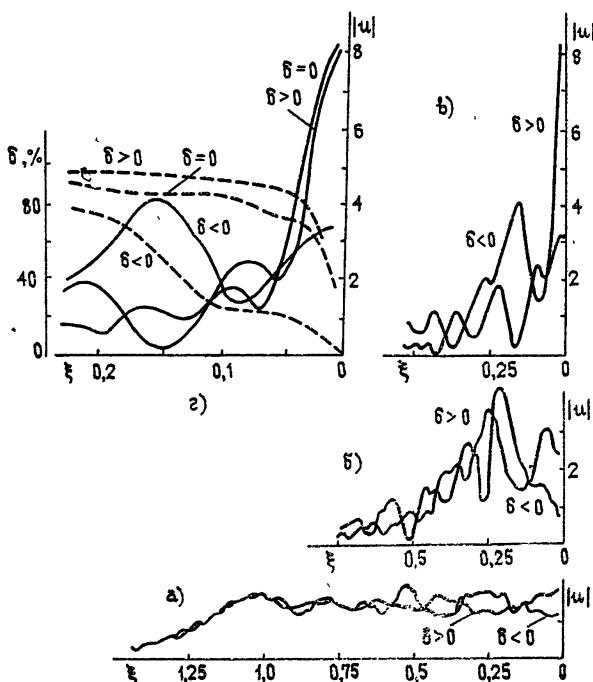


Рис. 5.

Обратимся к рис. 6, иллюстрирующему сходимость процесса линеаризации. Наиболее точная кривая 1 получена при  $N_{\text{л}} = N_z = 300$ , кривая 2 — при  $N_{\text{л}} = 68$ , а кривая 3 — при  $N_{\text{л}} = 32$  (в последних двух случаях слои линеаризации распределены неравномерно со сжатием к фокусу). Видно, что все три кривые весьма близки за исключением малых участков. Данные соответствуют той же отрицательной величине  $\delta$ , что и ранее.

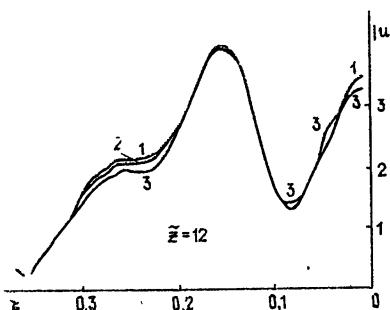


Рис. 6.

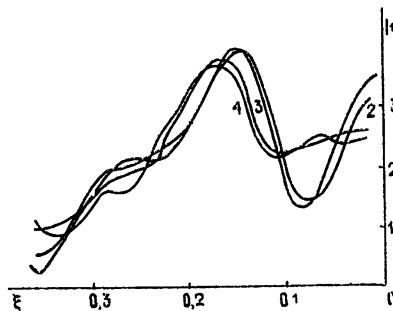


Рис. 7.

На рис. 7 показано влияние на те же результаты уменьшения вдвое (с 500 до 250) поперечного числа МАБ. Кривая 1 получена при  $N_{\text{л}} = 300$  для  $\tilde{z} = 11,6$ , кривая 2 — при  $N_{\text{л}} = 300$  для  $\tilde{z} = 12$ , кривая 3 — при  $N_{\text{л}} = 32$  для  $\tilde{z} = 12$ , кривая 4 — при  $N_{\text{л}} = 32$  для  $\tilde{z} = 11,6$ .

В линейном варианте время счета при  $N_x = 500$  и  $N_z = 300$  составляло 4 мин, а при  $N_x = 250$  — 2 мин. В нелинейном варианте при  $N_x = 500$ ,  $N_z = 300$  и  $N_{\text{л}} = 32$  — 9 мин, а при  $N_{\text{л}} = 300$  — 45 мин. С уменьшением  $N_x$  до 250 время было 4 мин для  $N_{\text{л}} = 32$  и 18 мин — для  $N_{\text{л}} = 300$ .

Как видно из вышеизложенного, разработан новый подход к задачам о распространении излучения в нелинейной среде, основанный на декомпозиционном принципе. Этот подход алгоритмически оформлен и реализован в виде ЭВМ-программы; приведенные численные результаты показывают эффективность разработанного декомпозиционного метода. Минимальные автономные блоки (МАБ) для нелинейного параболического уравнения нетрудно построить и в других координатных системах, например в цилиндрической. Метод может быть распространен и на более сложные постановки задачи, учитывающие физические факторы, остающиеся вне формулировки (1).

В настоящее время отсутствуют данные непосредственного сравнения эффективности метода МАБ с другими методами на примере задач о распространении света в нелинейной среде. Однако подобные сопоставления имеются в случае задач, формулируемых для уравнений Максвелла. Можно отметить, что уже с самого начала [1, 2] метод МАБ был применен не только к двумерным, но и к векторным трехмерным задачам электродинамики. Как известно, разностные схемы и метод конечных элементов в подобных случаях не используются. Сравнение метода МАБ с проекционным подходом показало, что его эффективность выше, чем в случае прямого процесса Бубнова—Галеркина, и оказывается приблизительно такой же, как для проекционных методов с понижением размерности (типа комбинированного метода, описанного в [15]).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, Теория дифракции и распространения волн, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г. Ростов-на-Дону, 1977). Краткие тексты докладов, изд. Наука, М., т. 1, 1977, стр. 206.
- 2 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, Радиотехника и электроника, 23, № 2, 241 (1978).
- 3 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, в сб. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ, изд. МИРЭА, М., 1977, стр. 42.
- 4 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, Радиотехника и электроника, 23, № 12, 2481 (1978).
- 5 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, в сб. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ, изд. МИРЭА, М., 1978, стр. 31.
- 6 В. В. Никольский, в сб. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ, изд. МИРЭА, М., 1977, стр. 6.
- 7 В. В. Никольский, в сб. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ, изд. МИРЭА, М., 1978, стр. 4.
- 8 В. В. Никольский, Т. И. Лаврова, ДАН СССР, 243, № 3, 619 (1978).
- 9 Р. Л. Келлеу, Phys. Rev. Lett., 15, № 26 (1965).
- 10 В. Н. Гольденберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 5, 674 (1967).
- 11 С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, № 1, 19 (1967).
- 12 А. Л. Дышко, ЖВММФ, 8, № 1 (1968).
- 13 В. В. Никольский, Д. И. Корниенко, Труды МИРЭА, Радиотехника, 1, вып. 40, 17 (1969).
- 14 Ю. Н. Черкашин, В. А. Чернова, в сб. Распространение декаметровых волн, изд. ИЗМИР АН СССР, М., 1978, стр. 5.
- 15 В. В. Никольский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 1, 5 (1977).

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
15 сентября 1978 г.

### APPLICATION OF METHOD OF MINIMAL AUTONOMOUS UNITS TO THE PROBLEM ON RADIATION PROPAGATION IN A NONLINEAR MEDIUM

*V. V. Nikol'skij, T. I. Lavrova*

A decomposition approach is suggested to the problem on propagation of electromagnetic radiation in the nonlinear medium. Realization results of the algorithm built are discussed.

УДК 535.853 31

## ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

*Д. Д. Иванченко, Н. Н. Колчигин, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин,  
И. И. Резник*

Предложена адекватная теоретическая модель эксперимента по исследованию свойств дифракционных решеток. С ее помощью выяснены необходимые условия для экспериментального определения (с высокой степенью точности) коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных гармоник. Основные теоретические выводы экспериментально проверены.

Значения амплитуды основной волны (коэффициент прохождения) и амплитуд дифракционных гармоник, полученные при экспериментальном исследовании дифракционных свойств периодических решеток, как правило, сопоставляются с теоретическими результатами, рассчитанными для идеализированной модели бесконечной решетки. В связи с этим появляется ряд вопросов методического характера, связанных с выяснением условия эксперимента, при которых такое сопоставление правомерно. Техника и методика подобных измерений описана в [1], в этой же работе сформулированы основные требования к аппаратуре, обеспечивающие погрешность эксперимента в пределах 5%.

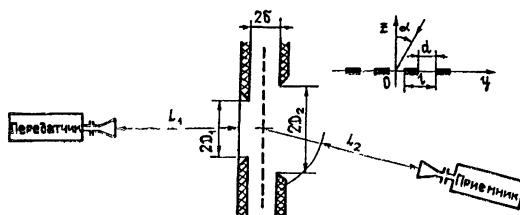


Рис. 1.

Схема использованной нами типовой экспериментальной установки представлена на рис. 1. Расстояния  $L_1$  и  $L_2$  и размер щели в поглощающем экране  $2D_1$  выбираются так, чтобы в рабочем диапазоне длин волн экран и решетка находились в дальней зоне передающей антенны, фазовый фронт в пределах ширины щели  $2D_1$  был достаточно плоским, а приемная антenna располагалась в дальней зоне относительно решетки. К размеру щели в экране  $2D_1$  предъявляется еще одно требование: необходимо, чтобы «косвященным» оказалось такое число элементов решетки, которое с достаточной степенью точности дает представление о свойствах бесконечной решетки. Как будет показано ниже, это требование нуждается в уточнении. Оказалось также ошибочным использованное в [1] обобщение метода определения коэффициента прохождения решетки на случай определения амплитуд дифракционных гармоник.

В работе [2] развита методика исследования дифракции на решетке двумерного волнового пучка с практически любым амплитудно-фазовым распределением, которая, в частности, позволяет построить и изучить адекватную теоретическую модель эксперимента по исследованию свойств дифракционных решеток.

Цель данной работы состоит в выяснении с помощью теоретической модели необходимых условий для экспериментального определения с высокой степенью точности коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных гармоник и экспериментальной проверки основных теоретических выводов.

Для простоты здесь рассмотрен лишь случай нормального падения плоской электромагнитной волны на ленточную дифракционную решетку. Обобщение на случай наклонного падения не представляет труда. Другие типы дифракционных решеток могут быть рассмотрены аналогично.

Поле, прошедшее через щель в поглощающем экране, в плоскости экрана аппроксимировалось ступенчатой функцией, равной единице на щели, нулю на экране и имеющей нулевую фазу. Волновой пучок, созданный таким распределением поля, удобно представить в виде разложения в интеграл Фурье по плоским волнам в системе координат, показанной на рис. 1:

$$\psi_0(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) e^{ik[\xi y - \gamma(\xi) z]} d\xi, \quad (1)$$

где  $q(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kD_1 \xi)}{\xi} e^{ik\delta\gamma(\xi)}$  — амплитуда Фурье поля, падающего на решетку,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $\delta$  — расстояние от экрана до плоскости решетки ( $\delta \approx \lambda/2$ ). Прошедшее через решетку поле можно также представить в виде интеграла Фурье:

$$\psi(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) e^{ik[\xi y - \gamma(\xi) z]} d\xi, \quad (2)$$

где, как следует из [2],

$$b(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin kD_1 \left( \xi - \frac{p}{x} \right)}{\xi - \frac{p}{x}} b_p \left( \xi - \frac{p}{x} \right) \exp \left[ ik\delta\gamma \left( \xi - \frac{p}{x} \right) \right], \quad (3)$$

$b_p(\xi)$  — амплитуда основной волны или дифракционной гармоники прошедшего поля при падении на решетку плоской электромагнитной волны под углом  $\alpha$  ( $\xi = -\sin \alpha$ ) с единичной амплитудой,  $x = l/\lambda$ ,  $l$  — период решетки.

Использованная нами аппроксимация реального распределения поля, как показало специально проведенное исследование (см. Приложение), вполне оправдана, поскольку имеющие место в эксперименте отклонения от ступенчатого распределения поля в плоскости экрана приводят к отклонениям в диаграмме направленности в подавляющем большинстве случаев на уровне не более  $-20 \text{ dB}$ .

Углы излучения дифракционных гармоник, как известно, определяются по формуле  $\cos \varphi_p = p$  (угол  $/x$  отсчитывается от плоскости решетки). Если выбрать ширину щели в экране кратной периоду решетки, то, как следует из (3),

$$b(\cos \varphi_p) = \frac{k D_1}{\pi} b_p(0). \quad (4)$$

Используя метод перевала для вычисления интеграла в (2), можно показать, что амплитуда поля в дальней зоне за системой экран — решетка в направлении под углом  $\varphi_p$  к плоскости решетки имеет величину

$$A_p = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sin \varphi_p |b(\cos \varphi_p)|, \quad (5)$$

где  $r$  — расстояние от освещенных элементов решетки до точки наблюдения. Амплитуда поля в главном максимуме за экраном со щелью, как нетрудно показать, имеет величину

$$\tilde{A}_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \frac{k D_1}{\pi}. \quad (6)$$

Из (4) — (6) следует выражение для коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных гармоник

$$|b_p(0)| = \frac{A_p}{\tilde{A}_0 \sin \varphi_p} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm [x]). \quad (7)$$

Численная оценка коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных гармоник для случая дробного отношения ширины щели к периоду решетки (в основу расчета была положена формула (7)) также дает хорошее совпадение с результатами для бесконечной решетки.

Таким образом, погрешность экспериментального определения коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных гармоник зависит, во-первых, от погрешности, связанной с тем, что поле на щели в поглощающем экране имеет распределение, отличное от ступенчатого, и, во-вторых, от погрешности, вызванной тем, что решетка при эксперименте имеет конечные размеры. Величина погрешности, связанной с отличием распределения поля от ступенчатого, оценена в Приложении.

В результате эксперимента по определению коэффициента прохождения ленточной дифракционной решетки получено, что  $|b_0|_n$ , где  $n$  — число элементов решетки, находящихся против щели в экране, с высокой точностью (расхождение не более 2—3%) соответствует  $|b_0|_\infty$  — коэффициенту прохождения плоской волны даже при минимальном числе возбужденных элементов ( $n=2$ ). Это справедливо почти во всем диапазоне, за исключением узкой области частот вблизи точки скольжения ( $x=1$ ). Здесь отличие теории от эксперимента несколько больше. Это различие объясняется влиянием конечных размеров решетки. Вблизи точек скольжения взаимодействие элементов решетки становится сильным и, как следствие, оказываются существенно различными площадь возбужденной части решетки (активных элементов) и площадь той ее части, которая принимает участие в формировании прошедшего поля.

Оценим влияние пассивных элементов решетки на характеристики прошедшего поля при различном числе активных элементов. Поле, прошедшее через решетку, можно представить в виде суммы ряда слагаемых. Первый член ряда (нулевая дифракция) — это часть прошедшего поля, созданная группой активных элементов решетки так, как если бы взаимодействия между этой группой и пассивными элементами не было. Первая дифракция — это вклад в прошедшее поле, обусловленный взаимодействием активных и пассивных элементов решетки при

условии, что токи, наведенные на пассивных элементах, не оказывают влияния на активные. Вторая дифракция — вклад в результате двукратного взаимодействия и т. д. Естественно, что для решетки, элементы которой не обладают выраженным резонансными свойствами, например, как в нашем случае ленточной решетки, члены ряда оказываются быстро убывающими.

Для оценки влияния пассивных элементов используем бесконечно тонкий плоский пространственный фильтр со следующими свойствами: в полосе шириной  $2D_2$  электромагнитное поле любой структуры проходит без изменений, во всей остальной плоскости он представляет собой идеальный неотражающий экран. Если на фильтр, расположенный в плоскости  $xy$  так, что полоса пропускания параллельна оси  $0x$  и начало координат размещается посередине полосы, падает пучок электромагнитных волн (1), то прошедшее поле (2) имеет амплитуду Фурье

$$b(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\eta) \frac{\sin kD_2(\xi - \eta)}{\xi - \eta} d\eta.$$

Легко видеть, что с помощью введенного нами фильтра, если его расположить за решеткой, удается либо полностью исключить вклад в прошедшее поле первой дифракции, либо, изменяя ширину полосы пропускания  $2D_2$  фильтра, оценить размеры поверхности решетки, участвующей в формировании прошедшего поля.

При экспериментальном исследовании были использованы два поглощающих экрана, один из которых имел щель шириной  $2D_1$  и закрывал решетку со стороны падающего поля, а второй имел ширину щели  $2D_2$  и располагался возле решетки со стороны приемной антенны (рис. 1).

Обозначим число активных элементов  $n_1$ , а число элементов, не закрытых вторым экраном,  $n_2$ . На рис. 2 даны зависимости относительной ошибки в определении амплитуды основной гармоники  $\Delta_0 = \frac{|b_0|_\infty - |b_0|_n}{|b_0|_\infty} \cdot 100\%$  от числа элементов  $n_2$ , участвующих в формировании прошедшего поля, при фиксированном числе активных элементов  $n_1$ . Влияние взаимной связи элементов решетки оказывается наиболее сильным при  $n_1 = 1$ . Как следует из результатов, ошибка  $\Delta_0$  может быть сведена к минимуму (около 1%) даже при небольшом числе активных элементов за счет увеличения числа пассивных.

Увеличение эффективной поверхности излучения за счет пассивных элементов приводит к сужению диаграммы направленности. Наибольшее влияние оказывают ближайшие 2—4 пассивных элемента.

Остановимся теперь на определении амплитуд высших дифракционных гармоник. Прежде всего, отметим, что проекция эффективной поверхности излучения решетки, расположенной за экраном, на направления основного и боковых лепестков различна. Поэтому способ определения амплитуд высших дифракционных гармоник как отношения амплитуды поля в дифракционном максимуме соответствующего порядка к амплитуде поля в главном направлении за экраном со щелью [1] неверен; в случае ограниченной решетки следует учитывать угол, который составляет направление распространения дифракционной гармоники при падении на решетку плоской волны с плоскостью решетки (7).

Проверка методики, проведенная экспериментально, показала хорошее совпадение результатов с данными для бесконечной решетки, возбуждаемой плоской волной уже в случае двух активных элементов.

Как показывают расчеты и экспериментальные данные, направление на дифракционный максимум для решетки с конечным числом активных элементов с увеличением их числа быстро приближается

к направлению излучения гармоники  $\varphi_p$  бесконечной решетки. Уже для четырех элементов отклонение не превышает  $1-2^\circ$ . Поэтому в эксперименте величину  $A_p$  можно измерять в дифракционном максимуме.

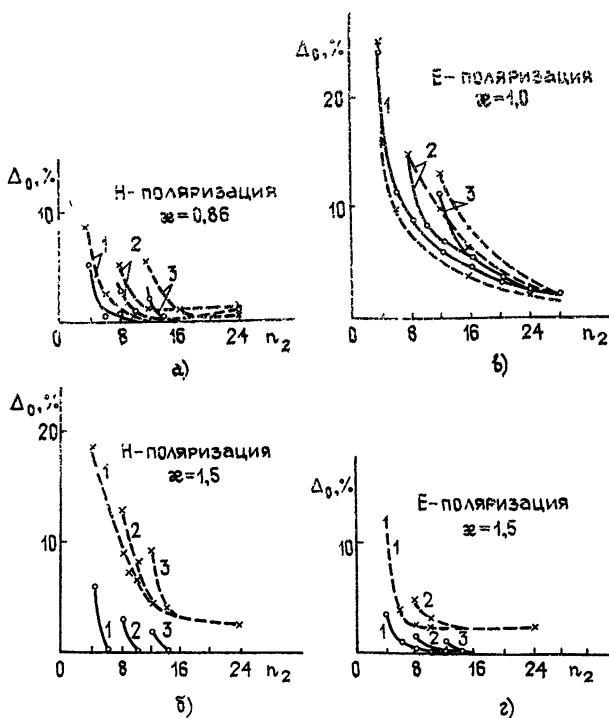
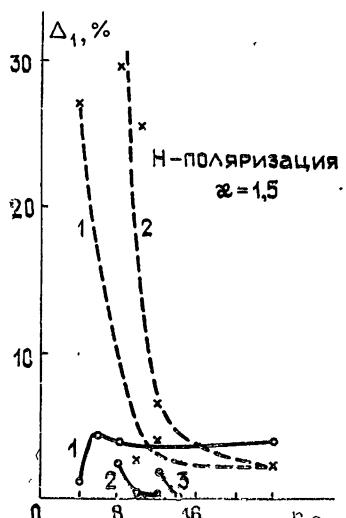


Рис. 2. Относительная ошибка в определении амплитуды основной гармоники в зависимости от числа пассивных элементов, участвующих в формировании поля,  $d/l = 2/3$ ,  
 1 —  $n_1 = 4$ , 2 —  $n_1 = 8$ , 3 —  $n_1 = 12$ ; сплошная кривая — расчет,  
 штриховая — эксперимент.

На рис. 3 представлены результаты исследования влияния пассивных элементов на формирование дифракционных максимумов в поле, прошедшем через систему экран — решетка. Величина  $\Delta_1$  представляет собой относительную ошибку в определении амплитуды первой дифракционной гармоники  $\Delta_1 = \frac{|b_1|_\infty - |b_1|_n}{|b_1|_\infty} \cdot 100\%$ . Ам-

плитуда дифракционной гармоники определялась по измерению поля в дифракционном максимуме. Исследование также показало, что увеличение числа активных элементов оказывается сильнее на значении угла, под которым наблюдается дифракционный максимум, чем увеличение числа пассивных элементов.

Рис. 3. Относительная ошибка в определении амплитуды первой дифракционной гармоники в зависимости от числа пассивных элементов, участвующих в формировании поля,  $d/l = 2/3$ ,  
 1 —  $n_1 = 4$ , 2 —  $n_1 = 8$ , 3 —  $n_1 = 12$ ; сплошная кривая — расчет,  
 штриховая — эксперимент.



Наконец, заметим, что в полном соответствии с принципом взаимности наряду со схемой эксперимента, в котором решетка закрыта экраном со стороны падающего поля, можно использовать схему, в которой экран расположен только со стороны приемной антенны. Амплитуда Фурье поля, прошедшего через систему решетка — экран, при нормальном падении плоской волны и  $\delta=0$  имеет вид

$$b(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p(0) \frac{\sin kD_2 \left( \xi - \frac{p}{x} \right)}{\xi - \frac{p}{x}}.$$

И в этом случае оказывается справедлива формула (4), а следовательно, и использованный выше способ определения амплитуд дифракционных гармоник.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Аппроксимация реального распределения поля, полученного нами экспериментально (рис. 4), ступенчатым при размерах щели в экране  $2D_1 > (3 \div 4)\lambda$  оправдана, несмотря на то, что в реальном распределении наблюдаются осцилляции поля. Осцилляции амплитуды поля на щели с хорошей степенью точности следуют гармоническому закону. Период осцилляции больше длины волны, а амплитуда не превышает 10—15% от максимального значения поля. Поэтому осцилляции приводят лишь к появлению двух дополнительных парциальных диаграмм, уровень которых, по полученной нами оценке, не более  $-20 \text{ dB}$ , что не может ощутимо повлиять на величину коэффициента прохождения.

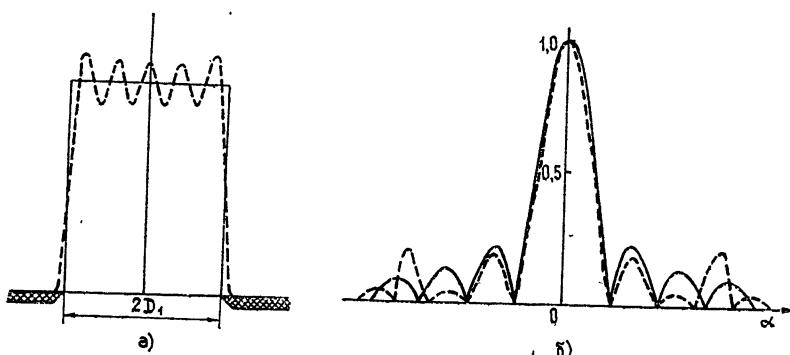


Рис. 4. Распределение поля, прошедшего через щель в экране а) в ближней, б) в дальней зоне; штриховая кривая — реальное распределение, сплошная — аппроксимированное.

О возможности аппроксимации поля на щели ступенчатой функцией свидетельствуют также численные оценки. Численно было выяснено влияние отклонения амплитудного распределения поля на экране от ступенчатого и несинфазного распределения поля на коэффициент прохождения решетки и форму диаграммы направленности. Для этого амплитудное распределение поля на щели задавалось функцией

$$f(y) = t + (1-t) \cos \frac{\pi y}{2D},$$

где  $t$  — амплитуда поля по краям щели (относительно максимальной)

амплитуды). Амплитуда Фурье поля пучка, падающего на решетку, расположенную на расстоянии  $\delta$  от экрана, имеет вид [3]

$$q(\xi) = \left[ \frac{t}{\pi} \frac{\sin kD\xi}{\xi} + \frac{4}{\pi} \frac{D}{\lambda} (1-t) \frac{\cos kD\xi}{1 - \left( 4 \frac{D}{\lambda} \xi \right)^2} \right] e^{ik\delta\gamma(\xi)}.$$

Как показали расчеты, влияние формы амплитудного распределения поля за экраном при изменении параметра  $t$  в интервале  $0 < t < 1$  мало сказывается на величине коэффициента прохождения (погрешность по сравнению с коэффициентом прохождения при дифракции плоской волны меньше 1%) уже при ширине щели в экране такой, что освещенными оказываются два элемента решетки, а на форме диаграммы направленности — если освещены четыре и больше элементов решетки.

Для исследования влияния на форму диаграммы направленности и величину коэффициента прохождения изменения фазы поля в отверстии экрана распределение поля было задано в виде

$$f(y) = f_0(y) \exp \left[ i \varphi \left( \frac{y}{D} \right)^2 \right], \quad f_0(y) = \begin{cases} 1 & (-D < y < D) \\ 0 & (|y| > D) \end{cases},$$

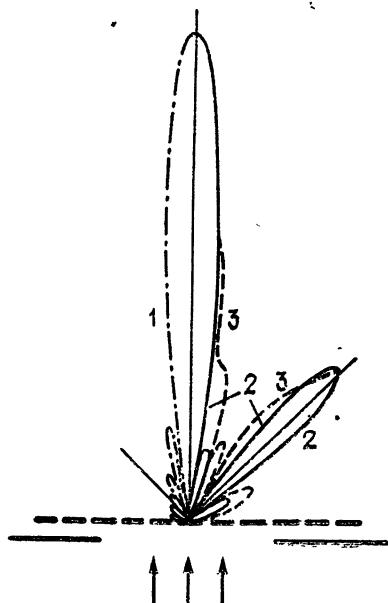
что соответствует амплитуде Фурье поля пучка [3]

$$q(\xi) = \frac{kD}{2\sqrt{2\pi}\varphi} \exp \left[ -i \frac{(kD)^2}{4\varphi} \xi^2 + ik\delta\gamma(\xi) \right] \times \\ \times [c(t_+) + is(t_+) - c(t_-) - is(t_-)],$$

где  $t_{\pm} = \sqrt{\frac{2\varphi}{\pi}} \left( \frac{kD\xi}{2\varphi} \pm 1 \right)$ ,  $c(t)$ ,  $s(t)$  — интегралы Френеля.

Результаты расчета приведены на рис. 5. Для случая четырех освещенных лент заметная деформация диаграммы направленности и изменение коэффициента прохождения проявляются при значениях  $\varphi$ , больших  $\pi/2$ . При меньших отклонениях от синфазного распределения поля диаграмма направленности и коэффициент прохождения изменяются незначительно.

Рис. 5. Влияние фазового распределения на форму диаграммы направленности: слева — ДН щели в экране ( $1 - \varphi = 0$ ), справа — ДН поля за решеткой;  $x = 1,5$ ,  $d/l = 2/3$ ,  $H$ -поляризация ( $2 - \varphi = 0$ ,  $3 - \varphi = \pi/2$ ).



## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. С. Комиссаров, В. А. Павлюк, Г. Г. Половников, Республ. межвед научно-техн. сб Радиотехника, вып 7, изд. ХГУ, Харьков, 1968, стр. 94.
- 2 Л. П. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, И. И. Резник, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 7, 871 (1979).
- 3 Р. Юн, Микроволновые антенны, изд. Судостроение, Л., 1967.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
28 августа 1978 г.

METHOD OF AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DIFFRACTION  
LATTICE PROPERTIES

*D. D. Ivanchenko, N. N. Kolchigin, L. N. Litvinenko, S. L. Prosvirnin, I. I. Reznik*

An adequate theoretical model of experiment is suggested for the investigation of diffraction lattice properties. It is used to find out the necessary conditions for the experimental definition (with a high degree of accuracy) the transmission coefficient and amplitudes of diffraction harmonics. The basis theoretical conclusions are experimentally verified.

---

УДК 538.56 : 519.25

## НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ГЕНЕРАТОРОВ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*A. С. Бакай, К. А. Лукин, В. П. Шестопалов*

Получена система интегродифференциальных уравнений, описывающая нелинейные нестационарные процессы в резонансных автогенераторах с длительным взаимодействием. Для однородного распределения поля построено одночастичное приближение, на основе которого получено аналитическое выражение, описывающее сильно нелинейные эффекты срыва и гистерезиса генерации. В случае медленного изменения амплитуды колебания за время пролета электронами области взаимодействия и произвольного изменения ее в пространстве предложен эффективный метод решения полученной системы уравнений на ЭВМ. Указан способ уточнения решения, полученного этим методом, и переход к строгому решению. Проведено сравнение стационарных решений, полученных по одночастичной и численной моделям.

К настоящему времени линейная теория генераторов дифракционного излучения (ГДИ) развита достаточно хорошо [<sup>1-6</sup>]. Эта теория удовлетворительно описывает пусковой режим генерации, а также позволяет оптимизировать некоторые его электродинамические характеристики [<sup>4</sup>].

Нелинейные процессы в резонансных автогенераторах с длительным взаимодействием, к которым относится ГДИ, сейчас интенсивно изучаются [<sup>7-12</sup>]. Настоящая работа посвящена развитию нелинейной нестационарной теории ГДИ. В первой части приведена разностная система уравнений, удобная для численного моделирования переходных и стационарных нелинейных режимов в ГДИ. Развиваемый во второй части работы приближенный метод анализа простейшей одномерной модели ГДИ с однородным распределением поля основан на выделении группы захваченных частиц, эффективно обменивающихся энергией с синхронной волной, и игнорировании обменом энергией с волной других групп частиц. В результате этих аппроксимаций приходим к одночастичному приближению, которое допускает достаточно полное аналитическое исследование рассматриваемой модели и описывает такие важные явления, как асимметрию зоны генерации, срыв и гистерезис генерации при адиабатическом изменении ускоряющего потенциала. Проведено также сравнение одночастичного и многочастичного приближений, которое показало хорошую точность развивающегося приближенного метода анализа нелинейных режимов резонансных автогенераторов с длительным взаимодействием.

### 1. МОДЕЛЬ ГДИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим следующую модель ГДИ: открытый резонатор (ОР) ГДИ образован двумя зеркалами, одно из которых сферическое, а другое — плоское и содержит отражательную дифракционную решетку. Вблизи решетки пролетает одномерный немодулированный поток электронов, взаимодействующий с полем ОР ГДИ. Энергия, передаваемая

пучком полю, расходуется на установление и поддержание колебаний в ОР, а также на излучение в свободное пространство. Описанный ОР обычно обладает хорошо разреженным спектром собственных колебаний, поэтому можно ограничиться рассмотрением одномодового режима генерации. Поскольку добротность ОР высока, то влиянием электронов на пространственное распределение электромагнитного поля можно пренебречь. Поле колебания ОР представляет собой квазиоптический волновой пучок, вдоль оси которого наблюдается картина стоячих волн. Вблизи дифракционной решетки имеется набор пространственных гармоник поля ОР. При синхронизме пучка электронов с одной из пространственных гармоник происходит длительное взаимодействие с электромагнитным полем ГДИ\*.

В рамках принятых ограничений самосогласованная система уравнений, описывающая эволюцию амплитуды колебаний и динамику движения частиц пучка, состоит из уравнения баланса мощностей [13]

$$\frac{dA_{rs}}{d\tau} = \delta_{rs} \eta(\tau) / \gamma_r^3 - A_{rs}(\tau) \quad (1)$$

и уравнений движения электронов для одномерного потока, записанных в системе покоя синхронной волны

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} &= A_{rs}(\tau) \Psi_r(z) \cos \xi(\tau, \tau_0) + F_z(\tau, \tau_0), \\ \frac{\partial \xi(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} &= v(\tau, \tau_0) / \gamma_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A_{rs}(\tau) = eE_{rs} \exp(-g_s y_0)/m \omega' v_s \gamma_r$  — безразмерная амплитуда  $s$ -й пространственной гармоники (волны),  $v_s = \omega' l / 2\pi s$  — ее фазовая скорость, а  $s$  — номер,  $y_0$  — прицельное расстояние,  $l$  — период решетки,  $\gamma_r = 1/Q_r$  — безразмерное затухание, а  $Q_r$  — добротность  $r$ -го колебания,  $\tau = \gamma_r \omega' t$  и  $\tau_0 = \gamma_r \omega' t_0$  — текущее время и момент влета электрона в систему,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $g_s^2 = \omega'^2 (1/v_s^2 - 1/c^2)$ ,  $c$  — скорость света,  $\xi(\tau, \tau_0) = \omega' (z - v_s t)/v_s$  и  $v(\tau, \tau_0) = (V - v_s)/v_s$  — безразмерные координата и скорость частицы в сопровождающей системе координат,  $V$  — скорость частицы в лабораторной системе координат,  $\Psi_r(z)$  — функция, описывающая неоднородность поля вдоль длины взаимодействия при возбуждении  $r$ -го колебания,  $F_z(\tau, \tau_0)$  — безразмерная сила пространственного заряда [13, 14],  $\delta_{rs} = e f_s^2 I_0 (1+b_s)^3 \times \exp(-2g_s y_0)/2m \epsilon_0 \omega'^3 N_r$  — безразмерный параметр, характеризующий эффективность взаимодействия электронов с полем — эту величину в дальнейшем будем называть параметром нарастания,  $b_s = (v_0 - v_s)/v_s$  — относительнаястройка скорости электронов  $v_0$  и фазовой скорости синхронной волны,  $f_s$  — отношение амплитуды  $E_r$  поля ОР к амплитуде  $E_{rs}$ -гармоники,  $I_0$  — ток пучка,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $N_r$  — норма собственного колебания [13],  $\eta(\tau)$  — электронный КПД, вычисляемый как относительные потери энергии всех частиц, находящихся к моменту времени  $\tau$  в системе

$$\eta(\tau) = \frac{1}{\tau - \tau'_0} \int_{\tau'_0}^{\tau} (1 - V^2/v_0^2) d\tau_0, \quad (3)$$

\* Первоначальной причиной появления этого поля является дифракционное излучение, возникающее в результате рассеяния собственного поля флуктуаций плотности заряда немодулированного электронного потока.

где  $\tau'_0$  — момент влета в систему той частицы, которая в текущий момент времени достигла конца длины взаимодействия.

Полагая, что частота генерируемых колебаний совпадает с собственной частотой ОР ( $\omega \equiv \omega_r$ ), имеем полную систему интегродифференциальных уравнений (1)–(3), которая решается методом крупных частиц и описывает переходные и стационарные режимы при любой амплитуде колебаний, а также позволяет проследить эволюцию всей системы после включения тока пучка\*.

Для проведения приближенного анализа переходных процессов воспользуемся тем, что в реальных приборах среднее время  $t_1$  пролета электронами длины  $D$  взаимодействия гораздо меньше характерного времени затухания поля в ОР:

$$2Q_r/\omega'_r \gg t_1 \equiv D/v_s. \quad (4)$$

Учитывая (4), перепишем уравнение (1) в виде разностной системы, в которой на  $i$ -м шаге вычисляется изменение энергии частиц (поля) в приближении постоянной на интервале времени  $t_1$  амплитуды поля, вычисленной на  $(i-1)$ -м шаге:

$$\begin{aligned} \Delta A_{rs}(\tau_i) &= [\delta_{rs} \eta(\tau_i)/\gamma_r^3 A_{rs}(\tau_{i-1}) - A_{rs}(\tau_{i-1})] \tau_i, \\ A_{rs}(\tau_i) &= A_{rs}(\tau_{i-1}) + \Delta A_{rs}(\tau_i), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta A_{rs}(\tau_i)$  — приращение амплитуды поля на  $i$ -м пролете. Электронный КПД вычисляется так же, как в стационарной теории ЛБВ [13].

Если условие (4) не выполняется, то длину взаимодействия можно разбить на отрезки так, чтобы упомянутое условие выполнялось на каждом из них. При этом необходимо суммировать изменение энергии частиц по всем отрезкам. Понятно, что, увеличивая до бесконечности число отрезков, в пределе придем к уравнению (1).

Для интегрирования уравнений (2), (5) их следует дополнить начальными условиями для частиц  $v[(i-1)\tau_i, j] = b_s$  и  $\xi[(i-1)\tau_i, j] = 2\pi j/N_0$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$  — номер частицы,  $N_0$  — число частиц на периоде высокочастотных колебаний, а также для поля  $A_{rs}(0) = A_0$ ,  $A_0$  — начальная амплитуда.

Заметим, что если условие (4) не выполняется, то (5) можно использовать в качестве итерационной схемы при поиске стационарных решений. При этом скорость сходимости итерационного процесса можно изменять путем варьирования величины  $\tau_i$ .

## 2. ОДНОЧАСТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Дальнейшее упрощение уравнений динамики ГДИ основано на приближенном описании энергообмена между пучком и волной постоянной амплитуды. Это приближение вытекает из качественного анализа движения частиц на фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{\xi} + A \sin \xi = 0, \quad (6)$$

где  $A \equiv A_{01} \gamma_0$ . Уравнение (6) следует из (2) при  $F_z \equiv 0$ ,  $\Psi(z) = 1$ . Фазовые траектории частиц определяются первым интегралом уравнения (6)  $(\dot{\xi}^2)/2 - A \cos \xi = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0$  ( $\mathcal{E}_1$  — начальное значение полной энергии частицы в сопровождающей системе координат,  $\mathcal{E}_0$  — кинетическая

\* Отметим, что для низкодобротных генераторов с длительным взаимодействием (ЛОВО) уравнения нелинейной нестационарной теории получены в [15], а подробный анализ переходных процессов в них проведен в [16].

энергия частицы, движущейся с фазовой скоростью  $v_1$  первой гармоники) и представлены на рис. 1. Пунктиром показана линия начальных условий  $\xi = b$ . Видно, что траектории вне сепаратрисы открыты. Они соответствуют пролетным частицам, у которых полная энергия больше максимального значения потенциальной энергии  $mAv_s^2$ . Траектории, охваченные сепаратрисой, соответствуют захваченным частицам. Из вида фазовых траекторий ясно, что кинетическая энергия пролетных частиц изменяется существенно меньше, чем захваченных, и именно последние существенно усиливают волну, передавая ей энергию за время пролета длины взаимодействия. Кривая 1 изображает типичное распределение частиц в конце взаимодействия. Нетрудно видеть, что число захваченных частиц равно  $n_{tr} = 2n\xi_1$ , где  $n$  — линейная плотность частиц,  $\pm \xi_1$  — координаты пересечения линии начальных условий с сепаратрисой. Из решения уравнения (6) следует, что захваченные частицы осциллируют в яме волны с частотами  $\Omega[\alpha(\alpha_0, \xi_0)] = \pi\Omega_0/2K[\alpha(\alpha_0, \xi_0)]$ , где  $\alpha^2(\alpha_0, \xi_0) \equiv \alpha_0^2 + \sin^2(\xi_0/2)$ ,  $K(\alpha)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $\Omega_0 \equiv \omega^2 A$ ,  $\alpha_0^2 = b^2/4A$ . Как видно, частоты слабо зависят от начальных условий ( $b$  и  $\xi_0$ ), если фазовая траектория не очень близка к сепаратрисе ( $\alpha \neq 1$ ). При этом имеет место когерентный обмен энергией между захваченными частицами и волной, означающий, что большинство захваченных частиц, осциллируя почти с одинаковыми частотами, практически одновременно (с небольшим разбросом по времени) переходят из тормозящей фазы в ускоряющую. Поэтому захваченные электроны можно представить в виде одной макрочастицы,

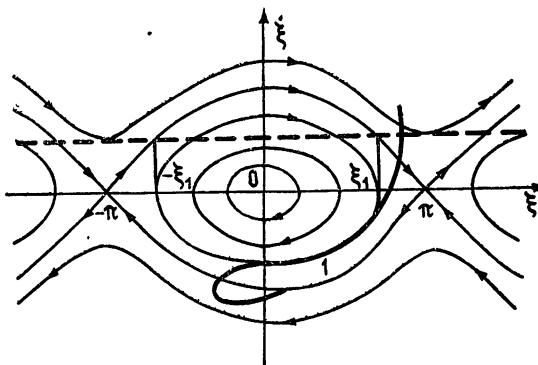


Рис. 1.

включающей  $n_{tr}$  электронов и колеблющейся в яме волны с усредненной по начальным фазам влета частотой  $\Omega(\alpha_0) \equiv \overline{\Omega[\alpha(\alpha_0, \xi_0)]}$ . Зависимость усредненной частоты от  $\alpha_0$  аппроксимируется полиномом  $P(\alpha_0)$ :

$$\Omega(\alpha_0) = \Omega_0 P(\alpha_0) \equiv \Omega_0 (0,8963 - 0,1191 \alpha_0^2 - 0,2119 \alpha_0^4 + 0,2168 \alpha_0^6 - 0,2018 \alpha_0^8).$$

Коэффициенты полинома  $P(\alpha_0)$  определялись по методу наименьших квадратов. Значения  $\Omega(\alpha_0)$  в узловых точках находились путем численного интегрирования. Осцилляции макрочастицы с малой амплитудой описываются уравнением

$$\ddot{\bar{\xi}} + (\Omega(\alpha_0)/\omega)^2 \bar{\xi} = 0, \quad (7)$$

где  $\bar{\xi}$  — среднее значение координаты захваченных частиц. Отыскивая значение  $\xi_1$  из условия  $\alpha(\alpha_0, \xi_0) = 1$  и решая уравнение (7) с началь-

ными условиями  $\bar{\xi} = 0$  и  $\dot{\bar{\xi}} = b$ , находим потери энергии захваченных частиц за время пролета  $t_1$  и, следовательно, электронный КПД

$$\eta = 4b \sin^2 \Phi(\alpha_0) [1 + b \cos^2 \Phi(\alpha_0)] N_{tr}/\pi(1+b)^2, \quad (8)$$

где

$$N_{tr} = \begin{cases} \pi - 2 \arcsin |\alpha_0|, & \text{если } |\alpha_0| < 1 \\ 0, & \text{если } |\alpha_0| > 1, \quad \Phi(\alpha_0) = \Omega(\alpha_0) D/2v_1 \end{cases}$$

Пренебрегая изменением энергии пролетных частиц, из условия  $dA/dt = 0$  получаем уравнение для стационарной амплитуды

$$\delta \eta - \gamma A^2 = 0. \quad (9)$$

При анализе решений уравнения (9) следует иметь в виду, что оно получено в приближении сильной нелинейности и не может описывать линейного режима. Кроме того, в линейном режиме разбиение частиц на захваченные и пролетные неправомерно. Будем считать, что такое разбиение становится возможным, если при нулевой расстройке скоростей частицы успевают сделать примерно полоборота на фазовой плоскости (рис. 1). Поэтому можно положить, что

$$A \geq A' \equiv Q (\pi v_1/D \omega)^2. \quad (10)$$

Одночастичное приближение будет давать значительную погрешность при  $\alpha \leq 1$ , поскольку в этом случае число захваченных частиц становится существенно меньше числа пролетных частиц, и все они находятся вблизи сепаратрисы, где зависимость частоты осцилляций от начальной фазы становится существенной ( $K(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 1$ ). Таким образом, одночастичное приближение справедливо для таких значений параметров  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $b$  и  $\omega D/v_1$ , которые дают значения амплитуды, удовлетворяющие неравенству (10) и обеспечивающие значения  $\alpha$ , существенно меньшие единицы.

Уравнение (9) решалось на ЭВМ при типичных для практики значениях параметров  $(\delta/\delta_{st}^{min}) = (I_0/I_{st}^{min}) = 4$  и  $D/l = 50$ . Результаты решения представлены на рис. 2 — кривая 1. Пунктирными линиями показаны неустойчивые решения. При  $A < A'$  решения получены путем линейной экстраполяции. Для сравнения на рис. 2 показано решение, полученное по численной модели при однородном распределении поля, — кривая 2. Как видно, наибольшее расхождение наблюдается вблизи точки мягкого самовозбуждения и в области насыщения амплитуды. В первом случае режим близок к линейному, где одночастичная модель неверна. Во втором случае расхождение обусловлено тем, что  $\alpha \approx 1$ . Однако, как видно из рис. 2 (и как показали расчеты при других значениях  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $D\omega/v_1$ ), даже на границе применимости одночастичное приближение дает погрешность, не превышающую 15% по сравнению с численной моделью при определении максимальной амплитуды колебаний. Такая точность позволяет использовать одночастичную модель для качественного анализа нелинейных режимов резонансных автогенераторов с длительным взаимодействием, а также для оценок КПД и амплитуды колебаний.

Из рис. 2 видно, что на интервале расстроек скоростей  $[b_2, b_3]$  существуют три решения, одно из которых неустойчиво (устойчивый и неустойчивый циклы и устойчивое состояние равновесия). Согласно теории колебаний <sup>[17, 18]</sup> при начальных значениях амплитуды, превышающих величину, определяемую неустойчивым циклом, амплитуда будет стремиться к величине, определяемой устойчивым циклом. В противном случае система останется в состоянии устойчивого равновесия.

Следовательно, при непрерывном изменении потенциала пучка со скоростью, гораздо меньшей скорости затухания колебаний (адиабатическая перестройка потенциала), при  $b = b_1$  произойдет мягкое возбуждение автоколебаний, благодаря тому, что состояние равновесия неустойчиво при  $b \in [b_1, b_2]$ . При дальнейшем адиабатическом увеличении  $b$  возможны автоколебания на интервале  $[b_2, b_3]$ , так как в этом случае, благодаря условию (4), генератор возбуждается полем конечной амплитуды, превышающей значение, определяемое неустойчивым циклом.

В точке  $b = b_3$  происходит срыв автоколебаний. При обратном изменении потенциала автоколебания возникнут на интервале неустойчивого состояния равновесия  $[b_1, b_2]$ . Таким образом, стационарные режимы в рассматриваемых генераторах обладают гистерезисом генерации при адиабатической перестройке потенциала пучка. Физическая природа гистерезиса заключается в явлении захвата частиц с закритическими скоростями полем конечной амплитуды [19, 20], что происходит в анализируемой системе при увеличении  $b$  до закритических значений  $b > b_2$ .

Максимальные значения КПД, рассчитанные в одночастичном и многочастичном приближениях, составляют 4,8 и 4,2 % соответственно. Как видно, нелинейные эффекты—гистерезис, срыв автоколебаний—наблюдаются уже при сравнительно низких КПД. Поэтому для адекватного моделирования стационарных режимов реальных генераторов необходима теория, описывающая эти эффекты при любых КПД.

В заключение отметим, что одночастичное приближение позволяет учесть расслоение пучка, обусловленное неоднородностью поля синхронной гармоники в его поперечном сечении. Многочастичная модель кроме расслоения допускает учет поперечных смещений частиц. Предложенный способ приближенного интегрирования уравнений динамики ГДИ применим и в том случае, когда частота автоколебаний не совпадает с собственной частотой ОР.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопалов, Дифракционная электроника, изд. Харьковского ун-та, 1976.
2. Ф. С. Русин, Линейная теория оротрона, в сб. Электроника больших мощностей, вып. 5, 1969, стр. 9.
3. Л. Н. Литвиненко, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 5, 752 (1969).
4. И. Д. Ревин, Б. К. Скрынник, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, А. С. Сысоев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 5, 764 (1977).
5. Б. К. Скрынник, в сб. Радиотехника, Харьков, вып. 34, 1975, стр. 133.
6. В. А. Исаев, XXXII Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио, Аннотация и тезисы докладов, ч. 1, М., 1976, стр. 85.
7. В. А. Исаев, Д. И. Трубецков, В. Н. Шевчик, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 8, 1277 (1973).
8. Л. А. Поспелов, в сб. Радиотехника, Харьков, вып. 27, 1973, стр. 64.
9. В. А. Исаев, XXXI Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио, Аннотация и тезисы докладов, ч. 1, М., 1976, стр. 27.
10. М. Б. Цейтлин, Г. А. Бернашевский и др., Радиотехника и электроника, 22, № 7, 1515 (1977).
11. A. A. Shmatko, O. A. Tret'yakov and D. M. Vavriiv, Elektron. Lett., 13, № 16, 480 (1977).
12. К. А. Лукин, В. П. Шестопалов, ДАН УССР, серия А, № 4, 335 (1978).

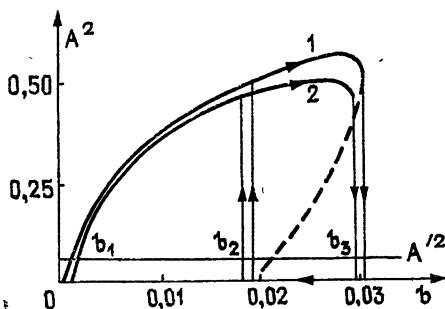


Рис. 2.

13. В. А. Солнцев, Л. А. Вайнштейн, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
14. А. М. Кац и др., Нелинейные явления в СВЧ приборах О-типа с длительным взаимодействием, изд. Сов. радио, М., 1975.
15. Электронника ламп с обратной волной, под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова, изд. Саратовского ун-та, 1975.
16. Б. П. Безручко, Н. С. Гинзбург, С. П. Кузнецов, Лекции по электронике СВЧ (4-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. V, изд. Саратовского ун-та, 1978.
17. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
18. А. А. Андronов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
19. А. С. Бакай, С. С. Кривуля и др., ЖЭТФ, 72, вып. 2, 499 (1977).
20. А. С. Бакай, С. С. Кривуля и др., Письма в ЖЭТФ, 21, вып. 4, 226 (1975).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
31 июля 1978 г.

## NONLINEAR NONSTATIONARY THEORY OF THE DIFFRACTION RADIATION GENERATORS

*A. S. Bakaj, K. A. Lukin, V. P. Shestopalov*

A system of integro-differential equations has been obtained to describe nonlinear, nonstationary processes in the resonance extended interaction autogenerators. For a homogeneous field distribution a one-particle approximation is suggested. It serves to derive an analytical expression describing strong nonlinear effects of the generation break-down and hysteresis. An efficient computer-oriented method of solution is suggested for the case of slow variations of the oscillation amplitude over the electron transit time in the interaction region and arbitrary space variation. Ways of improving accuracy of the solution obtained by the method is indicated and the transition to a rigorous solution is shown. A comparison of steady-state solutions obtained for the one-particles and numerical models is made.

УДК 621.396.677.45

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОЙ АНТЕННЫ С КОНИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ

*В. П. Беличенко, Г. Г. Гошин*

Рассматривается граничная задача о симметричном возбуждении анизотропно проводящей модели сферической спиральной антенны, имеющей экран конической формы, вертикальным электрическим диполем. Решение задачи получено методом, основанным на представлении решения в виде рядов по полным ортогональным системам функций, обеспечивающих выполнение граничных условий на поверхности экрана. Проведены расчеты диаграмм направленности для ряда значений электрического радиуса сферической спиральной антенны, угла намотки спирали, различных положений источника возбуждения и угла раскрыва конического экрана

Сpirальные антенны, выполненные на поверхности сферы, находят применение в качестве диапазонных слабонаправленных антенн эллиптической поляризации. Для получения однонаправленного излучения они обычно используются с экраном. Однако в литературе отсутствуют сведения, касающиеся расчета характеристик таких антенн. Целью данной работы является теоретическое исследование сферической спиральной антенны с экраном, в частности плоским, и выяснение влияния конусности экрана на характеристики излучения антенны. Соответствующая двумерная граничная задача для анизотропно проводящей модели спиральной антенны решается методом, основанным на разложении решения в ряды по полным ортогональным системам функций, обеспечивающих выполнение граничных условий на поверхности экрана.

В сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  рассмотрим структуру, образованную полубесконечным идеально проводящим конусом  $\theta = \theta_1$  и частью бесконечно тонкой сферической поверхности  $r = a$ ,  $\theta \leq \theta_1$ ,

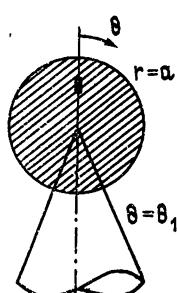


Рис. 1.

идеально проводящей вдоль спиральных линий, составляющих угол  $\psi = \text{const}$  с меридианами, и не проводящей в ортогональном направлении (рис. 1). Рассматриваемая структура выбрана в качестве математической модели многозаходной спиральной антенны. Источником возбуждения служит элементарный электрический диполь, расположенный на оси симметрии структуры в точке с координатами  $r = r_0 \leq a$ ,  $\theta = 0$ , с моментом  $q$ , ориентированным вдоль этой оси. Для описания полей введем электрический  $U$  и магнитный  $V$  потенциалы Дебая. Выражение для потенциала Дебая  $U^0$  поля, возбуждаемого радиальным электрическим диполем, расположенным на оси идеально проводящего конуса, можно получить, воспользовавшись представлением для функции Грина, приведенным, например, в [1]. Оно имеет вид

$$U^0 = -\frac{q w}{2\pi r_0 \sin \theta_1} \sum_v \frac{\frac{(2v+1) P_v(\cos \theta)}{\partial P_v(\cos \theta_1)} j_v(kr_0) h_v^{(1)}(kr_0)}{\frac{\partial v}{\partial v}} , \quad (1)$$

где  $P_v(\cos \theta)$  — функции Лежандра,  $j_v(x)$  и  $h_v^{(1)}(x)$  — сферические функции Бесселя и Ханкеля,  $r_1$  означает большую или меньшую из координат  $r$  и  $r_0$ ,  $w = \sqrt{\mu/\epsilon}$  — волновое сопротивление окружающей среды,  $k$  — постоянная распространения. Суммирование в (1) проводится по всем  $v = v_1, v_2, v_3, \dots$ , являющимся корнями уравнения

$$P_v(\cos \theta_1) = 0. \quad (2)$$

Потенциалы Дебая поля, обусловленного наличием спирально проводящей сферической поверхности, представим в виде разложений по полным, ортогональным на интервале  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  системам функций, обеспечивающих выполнение граничных условий на поверхности конуса. Эти функции являются решениями уравнения Лежандра, регулярными при  $\theta = 0$ . Требуемые разложения, удовлетворяющие волновому уравнению, условию пространственной интегрируемости плотности энергии в окрестности вершины конуса и условию при  $kr \rightarrow \infty$ , имеют вид

$$\begin{aligned} U^\pm &= \sum_v A_v^\pm z_v^\pm(kr) P_v(\cos \theta), \\ V^\pm &= \frac{1}{w} \sum_\mu B_\mu^\pm z_\mu^\pm(kr) P_\mu(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь величины, помеченные знаком «+», относятся к области  $r < a$ , знаком «—» — к области  $r > a$ ;

$$z_\sigma^+(kr) = j_\sigma(kr), \quad z_\sigma^-(kr) = h_\sigma^{(1)}(kr);$$

$\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  являются корнями уравнения

$$P_\mu^1(\cos \theta_1) = 0. \quad (4)$$

Собственные значения  $v$  и  $\mu$ , по которым в (3) проводится суммирование, выбраны таким образом, чтобы обеспечить выполнение граничных условий  $E_r^\pm = E_\phi^\pm = 0$  на поверхности конуса  $\theta = \theta_1$ . Для выполнения условия в вершине конуса необходимо ограничиться положительными значениями  $v$  и  $\mu$  [2].

Неизвестные коэффициенты  $A_v^\pm$  и  $B_\mu^\pm$  определяются из граничных условий на спирально проводящей сферической поверхности [3]:

$$\begin{aligned} (E_\theta^0 + E_\theta^-) + \operatorname{tg} \psi E_\phi^- &= 0, \\ (H_\theta^- - H_\theta^+) + \operatorname{tg} \psi (H_\phi^- - H_\phi^+) &= 0, \\ E_\theta^- &= E_\theta^+, \quad E_\phi^- = E_\phi^+ \\ (r = a, \theta \leq \theta_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Записывая выражения для компонент полей через потенциалы (1) и (3) и подставляя их в (5), можно получить в конечном итоге систему уравнений

$$\sum_v (A_v^- + F_v) [ah_v^{(1)}(ka)]' P_v^1(\cos \theta) - ika \operatorname{tg} \psi \sum_\mu B_\mu^- h_\mu^{(1)}(ka) P_\mu^1(\cos \theta) = 0, \quad (6)$$

$$\sum_\mu B_\mu^- \frac{P_\mu^1(\cos \theta)}{j_\mu(ka)} - ika \operatorname{tg} \psi \sum_v A_v^- \frac{P_v^1(\cos \theta)}{[aj_v(ka)]'} = 0 \quad (\theta \leq \theta_1),$$

где

$$F_v = - \frac{q\omega}{2\pi r_0 \sin \theta_1} \frac{(2v+1) j_v(kr_0)}{\frac{\partial P_v(\cos \theta_1)}{\partial v} P_v^1(\cos \theta_1)},$$

штрих означает дифференцирование по  $a$ .

Система уравнений, подобная (6), получается и для коэффициентов  $A_v^+$  и  $B_\mu^+$ .

Для исключения зависимости от  $\theta$  воспользуемся соотношениями [2]

$$\begin{aligned} N_v &= \int_0^{\theta_1} P_v^1(\cos \theta) P_{v'}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq v', \\ \frac{v(v+1)}{2v+1} \sin \theta_1 P_v^1(\cos \theta_1) \frac{\partial P_v(\cos \theta_1)}{\partial v} & \text{при } v = v', \end{cases} \\ N_\mu &= \int_0^{\theta_1} P_\mu^1(\cos \theta) P_{\mu'}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \mu', \\ -\frac{\mu(\mu+1)}{2\mu+1} \sin \theta_1 P_\mu^1(\cos \theta_1) \frac{\partial P_\mu^1(\cos \theta_1)}{\partial \mu} & \text{при } \mu = \mu', \end{cases} \\ L_{v, \mu} &= \int_0^{\theta_1} P_v^1(\cos \theta) P_\mu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\mu(\mu+1)}{(\mu-v)(\mu+v+1)} \sin \theta_1 P_v^1(\cos \theta_1) P_\mu(\cos \theta_1), \end{aligned}$$

где  $v$  и  $v'$ ,  $\mu$  и  $\mu'$  — любые два решения уравнений (2) или (4) соответственно. Тогда из (6) можно получить две независимые бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $A_v^-$  и  $B_\mu^-$ . Они имеют вид

$$A_v + \sum_{v'} \frac{(ka \operatorname{tg} \psi)^2 (2v+1) P_{v'}^1(\cos \theta_1) K_{v, v'}}{v(v+1) [aj_v(ka)]' [ah_v^{(1)}(ka)]' \frac{\partial P_v(\cos \theta_1)}{\partial v}} A_{v'} = - \frac{F_v}{[aj_v(ka)]'}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} B_\mu + \sum_{\mu'} (ka \operatorname{tg} \psi)^2 (2\mu+1) \mu' (\mu'+1) j_{\mu'}(ka) h_{\mu'}^{(1)}(ka) \frac{P_{\mu'}(\cos \theta_1)}{\frac{\partial P_\mu^1(\cos \theta_1)}{\partial \mu}} K_{\mu, \mu'} B_{\mu'} &= \\ &= - \frac{i ka \operatorname{tg} \psi}{N_\mu} \sum_v \frac{F_v L_{v, \mu}}{[aj_v(ka)]'}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $v$  и  $v'$  принимают значения  $v_1, v_2, v_3, \dots$ , а  $\mu$  и  $\mu'$  — значения  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$

$$A_v = \frac{A_v^-}{[aj_v(ka)]'}, \quad B_\mu = \frac{B_\mu^-}{j_\mu(ka)},$$

$$K_{\nu, \nu'} = - \sum_{\mu} \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)j_{\mu}(ka)h_{\mu}^{(1)}(ka)}{(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)(\mu-\nu')( \mu+\nu'+1)} \frac{P_{\mu}(\cos \theta_1)}{\partial P_{\mu}^1(\cos \theta_1)} ,$$

$$K_{\mu, \mu'} = - \sum_{\nu} \frac{(2\nu+1)/\nu(\nu+1)}{(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)(\mu'-\nu)(\mu'+\nu+1)} \frac{P_{\nu}^1(\cos \theta_1)}{\partial P_{\nu}(\cos \theta_1)} \times$$

$$\times \frac{1}{[aj_{\nu}(ka)]' [ah_{\nu}^{(1)}(ka)]} .$$

Используя асимптотические формулы для функций Лежандра и сферических функций Бесселя и Ханкеля при  $\nu, \mu \gg 1$  [1], можно убедиться в том, что матричные операторы систем (7) и (8) вполне непрерывны в гильбертовом пространстве  $l_2$ , а векторы-столбцы правых частей принадлежат ему. Следовательно, для систем (7) и (8) справедлива альтернатива Гильbertа, и их решения могут быть найдены методом редукции [4].

В частном случае меридиональной проводимости ( $\psi = 0$ ) сферической поверхности системы (7) и (8) имеют решения

$$A_{\nu}^- = -F_{\nu}, \quad B_{\mu}^- \equiv 0, \quad (9)$$

т. е. при данном способе возбуждения излучение электрического диполя не проходит через сферическую поверхность  $r = a$ ,  $\theta \leq \theta_1$ , и выражения (1), (3) дают решение электродинамической задачи о возбуждении симметричных типов колебаний в сферическом резонаторе с идеально проводящими стенками и с конической выемкой.

В другом частном случае,  $\theta_1 \rightarrow \pi$ , соответствующем остроугольному коническому экрану, удается получить приближенное аналитическое решение систем уравнений (7) и (8). В этом случае функции Лежандра и их производные, входящие в (7) и (8), определяются следующими соотношениями:

$$P_{\nu}^1(\cos \theta_1) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{\sin \nu \pi}{\pi - \theta_1}, \quad \frac{\partial P_{\nu}(\cos \theta_1)}{\partial \nu} \approx 2 \cos \nu \pi \ln \frac{\pi - \theta_1}{2},$$

$$P_{\mu}(\cos \theta_1) \approx \frac{\sin \mu \pi}{\pi \mu (\mu + 1)} \left( \frac{2}{\pi - \theta_1} \right)^2, \quad \frac{\partial P_{\mu}^1(\cos \theta_1)}{\partial \mu} \approx -2 \frac{\cos \mu \pi}{\pi - \theta_1},$$

$$\nu \approx n + \left[ 2 \ln \frac{2}{\pi - \theta_1} \right]^{-1}, \quad \mu = n + 1 + (n + 1)(n + 2) \left( \frac{\pi - \theta_1}{2} \right)^2,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя их в системы уравнений, замечаем, что доминирующую роль в матричных операторах играют диагональные элементы, в которых преобладают члены с  $\nu = \nu' \approx \mu$  и  $\{\mu = \mu' \approx \nu$ , а остальные стремятся к нулю при  $\theta_1 \rightarrow \pi$ . В суммах, стоящих в правой части (8), остаются только слагаемые с  $\nu \approx \mu$ . Решение имеет вид

$$A_{\nu}^- \approx \frac{q\omega}{4\pi r_0 \Delta_{\nu, \mu}} (2\nu + 1) j_{\nu}(kr_0) [aj_{\nu}(ka)]' [ah_{\nu}^{(1)}(ka)]', \quad (10)$$

$$B_{\mu}^- \approx \frac{i k a \operatorname{tg} \psi q w}{4 \pi r_0 \Delta_{\nu, \mu}} (2\nu + 1) j_{\nu}(kr_0) j_{\mu}(ka) [ah_{\nu}^{(1)}(ka)]',$$

где

$$\Delta_{\nu, \mu} = (ka \operatorname{tg} \psi)^2 j_{\mu}(ka) h_{\mu}^{(1)}(ka) + [aj_{\nu}(ka)]' [ah_{\nu}^{(1)}(ka)]'.$$

После предельного перехода  $\theta_1 = \pi$  выражения (10) полностью совпадают с приведенными в работе [5], в которой рассмотрена задача об излучении диполя, окруженного спирально проводящей сферической оболочкой без экрана.

Если диполь находится в вершине конуса ( $r_0 = 0$ ), то его момент  $q$ , по аналогии с моментом диполя, расположенного на ребре клина [6], следует определить как  $\lim_{r_0 \rightarrow 0, I \rightarrow \infty} I r_0^{\nu}$ , где  $\nu_1$  — наименьший по модулю корень уравнения (2),  $I$  — амплитуда тока. В правых частях уравнений (7), (8) тогда останутся только члены, соответствующие  $\nu = \nu_1$ .

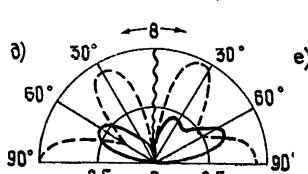
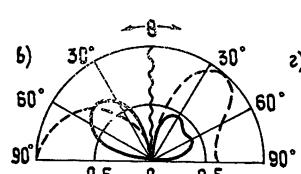
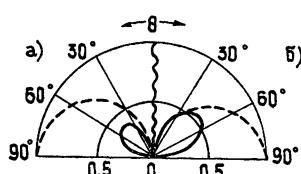
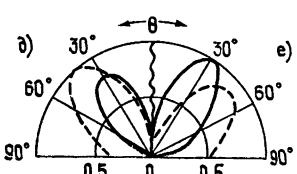
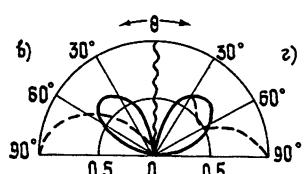
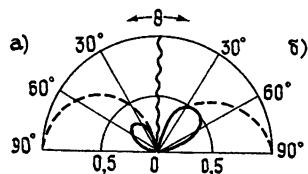


Рис. 2.

Рис. 3.

В общем случае системы уравнений (7), (8) решались численно при помощи ЭВМ. Во всех случаях относительная ошибка не превышала 1% при учете  $E(3ka)$  уравнений в системах. Найденные таким образом значения коэффициентов  $A_{\nu}$  и  $B_{\mu}^-$  использовались при расчете характеристик излучения сферической спиральной антенны с коническим экраном. На рис. 2—5 представлены диаграммы направленности для компонент  $E_{\phi}$  (сплошная линия) и  $E_{\theta}$  (пунктирная линия) в зависимости от параметров  $ka$ ,  $kr_0$ ,  $\psi$ ,  $\theta_1$ . Вследствие симметрии диаграмм относительно оси антенны симметричные их части опущены. На рис. 2 диаграммы приведены для  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $kr_0 = 0$  и различных  $ka$  (а — 1,0; б — 1,5; в — 2,0; г — 2,5; д — 3,0; е — 3,5), на рис. 3 — для тех же значений параметров  $\theta_1$ ,  $\psi$ ,  $ka$ , но при условии  $kr_0 = ka$ . На рис. 4 показано изменение диаграмм для  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $kr_0 = 0$ ,  $ka = 3$  при изменении угла  $\psi$  (а —  $45^\circ$ ; б —  $63^\circ$ ; в —  $71^\circ$ ; г —  $90^\circ$ ). Зависимость диаграмм направленности от угла раскрыва конического экрана  $\theta_1$  (а —  $90^\circ$ , б —  $120^\circ$ , в —  $135^\circ$ , г —  $150^\circ$ ) для  $\psi = 45^\circ$ ,  $kr_0 = 0$ ,  $ka = 2$  представлена на рис. 5.

Характерной особенностью всех диаграмм является отсутствие излучения в осевом направлении. Поляризация излучения в общем случае эллиптическая и меняется от круговой при  $\theta \rightarrow 0$  до линейной в плоскости экрана  $\theta = \theta_1$ . Сравнение диаграмм, приведенных на рис. 2 и 3 для двух положений источника (вертикальный электрический диполь опущен на экран и находится в центре сферы или расположен в ее полюсе), показывает, что при небольших электрических размерах спиральной антенны ( $ka \leq 2$ ) диаграммы практически не зависят от положения источника, и лишь с увеличением  $ka$  их различия становятся заметными. Изрезанность диаграмм направленности при возбуждении в полюсе скорее всего обусловлена влиянием расстояния от диполя до экрана. Подбором  $ka$  и  $\psi$  можно добиться совпадения направлений максимумов излучения и близости по форме диаграмм направленности для компонент поля  $E_\varphi$  и  $E_\theta$ . В то же время, как видно из рис. 4, с целью достижения наилучших поляризационных характеристик предпочтительней использование спиральных антенн с  $\psi \sim 45^\circ$ . С увеличением  $\psi$  происходит ослабление компоненты  $E_\varphi$ , и при  $\psi = 90^\circ$  она исчезает совсем. Это и понятно, поскольку система колец, в которую вырождаются спирали на сферической поверхности, вертикальным электрическим диполем не возбуждается.

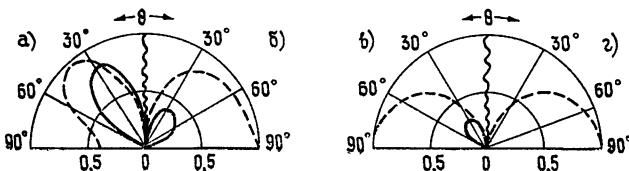


Рис. 4.

Анализ диаграмм в зависимости от угла раскрытия конического экрана (рис. 5) показывает, что с увеличением  $\theta_1 > 90^\circ$  наблюдается их расширение, а затем и появление лепестков. Относительно небольшая конусность экрана  $90^\circ < \theta_1 \leq 120^\circ$  приводит к качественному изменению диаграммы  $E_\theta$ : по форме и направлению максимума излучения она становится близкой к диаграмме  $E_\varphi$ , т. е. за счет конического экрана можно добиться улучшения поляризационных свойств спиральной антенны при меньших электрических размерах по сравнению с антенной с плоским экраном (ср. рис. 2д, е). Использование экранов с  $\theta_1 > 135^\circ$  нецелесообразно из-за ухудшения поляризационных и диапазонных (в смысле сохранения формы диаграммы направленности) свойств антенны. Последнее согласуется с выводами работы [7], в которой приводятся результаты экспериментального исследования плоской спиральной антенны с экраном конической формы.

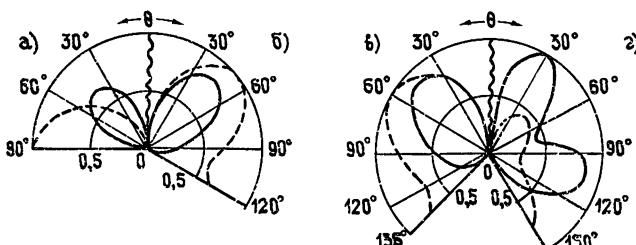


Рис. 5.

В заключение заметим, что этим же методом граничная задача с произвольно расположенным источником сводится для каждой из азимутальных гармоник к двум связанным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода, допускающим редукцию в классе числовых последовательностей, принадлежащих  $l_2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Фелсен, Н. Маркувиц, Излучение и рассеяние волн, т. 2, изд. Мир, М., 1978
2. L. L. Bailin, S. Silver, IRE Trans., AP-4, № 1, 5 (1956).
3. K. K. Mei, M. Meuer, IEEE Trans., AP-12, № 4, 459 (1964).
4. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
5. В. П. Беличенко, Г. Г. Гошин, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 20, № 8, 36 (1977).
6. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967.
7. G. Grekou, G. Dubost, A. Madani, Proceedings of the 5-th European Microwave Conference, Microwave Exhibitions and Publishers, Sovenoaks, 1975, p. 116.

СФТИ при Томском  
университете

Поступила в редакцию  
18 октября 1978 г.

### AXISYMMETRIC EXCITATION OF A SPHERICAL SPIRAL ANTENNA WITH A CONIC SCREEN

*V. P. Belichenko, G. G. Goshin*

A boundary problem is considered on excitation of an anisotropic conducting spherical spiral antenna with a conic screen by the vertical electric dipole. The solution of the problem is obtained by the method based on the solution representation in the form of series of complete orthogonal systems of functions providing boundary conditions to be fulfilled on the screen surface. Calculations of directivity patterns are made for a number of values of the spheric spiral antenna electric radius, the angle of the spiral winding, different positions of the excitation source and the flare angle of the conic screen.

УДК 621.385.6

## ТРАЕКТОРИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНЕТРОНЕ В РЕЖИМЕ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

*М. Ю. Красников, М. И. Кузнецов*

С помощью метода усреднения проводится анализ уравнений движения электронов в плоском магнетроне, работающем в режиме циклотронного резонанса, когда радиусы электронных орбит меняются. Получены условия, обеспечивающие эффективную работу магнетрона в таком режиме с достаточно высокими значениями КПД. Проводится приближенный аналитический учет несинхронности и оценка некоторых параметров прибора.

### ВВЕДЕНИЕ

Движение электронов в магнетронных генераторах и усилителях с катодом в пространстве взаимодействия обычно рассматривается при условии синхронизма

$$\omega = \hbar v_e, \quad (1)$$

где  $v_e$  — скорость дрейфа электронов,  $\hbar$  — постоянная распространения.

Хотя общее условие резонанса, приводящее к энергообмену, имеет вид

$$\omega = \pm n \omega_H + \hbar v_e, \quad (2)$$

где  $\omega_H$  — циклотронная частота,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а (1) является лишь его частным случаем при  $n=0$ , обычно считают, что резонансное (циклотронное) взаимодействие может лишь ухудшить характеристики приборов, в частности, уменьшить КПД магнетрона [1, 2]. Однако при  $n \neq 0$  ларморовские радиусы не остаются постоянными, следовательно, в процессе движения меняется не только потенциальная, но и кинетическая энергия вращательного движения электронов. При этом эффективность взаимодействия может как возрасти, так и уменьшиться по сравнению с обычным синхронизмом. Насколько нам известно, исследований возможности работы магнетрона в режиме циклотронного резонанса и влияния резонансного взаимодействия на характер процессов в магнетроне не проводилось, хотя соответствующие уравнения движения были получены, например, в работах [1, 3]. В монографии [1] (гл. IV) резонансные явления изучаются с точки зрения влияния на работу магнетрона неоднородности электростатического поля. Проведенный в [3] анализ применим лишь к лучевым приборам магнетронного типа, имеющим протяженный, но не замкнутый катод, когда еще имеет смысл рассматривать электронный луч. Основным для расчета характеристик приборов является уравнение для распределения амплитуды высокочастотного поля вдоль пространства взаимодействия, которое неприменимо к магнетрону. Отношение к магнетрону имеют только уравнения движения, полученные для режима циклотронного резонанса, и следующие из них два интеграла движения.

Оценки, проведенные по данным некоторых работ, в которых иссле-

довался магнетрон в режиме слабого магнитного поля, указывают на то, что соотношение параметров режима в этом случае может соответствовать условию резонанса (2) при определенных значениях  $n$ .

В данной статье предпринимается попытка приближенного аналитического исследования работы магнетрона в режиме циклотронного резонанса. Показана возможность достижения достаточно высокого КПД при соблюдении определенных условий.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Условием применимости метода усреднения является, как известно ([<sup>2</sup>], стр. 75), малость изменения соответствующих величин, характеризующих усредненную траекторию электрона, за период циклотронной частоты по сравнению с характерным масштабом неоднородности. Это, однако, не накладывает ограничений на величину радиуса электронной орбиты.

Анализ проведем при следующих допущениях:

- 1) влиянием пространственного заряда пренебрегается;
- 2) релятивистские эффекты не учитываются;
- 3) рассматривается плоская система электродов (рис. 1);
- 4) задача решается в приближении заданного поля;
- 5) взаимодействие осуществляется с основной гармоникой бегущей волны; высокочастотное поле в пространстве взаимодействия магнетрона имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x(x, y, t) &= \tilde{E} \operatorname{sh}(hy) \cos(hx - \omega t), \\ \tilde{E}_y(x, y, t) &= \tilde{E} \operatorname{ch}(hy) \sin(hx - \omega t),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\tilde{E} = \frac{E_1 \sin(h\bar{D}/2)}{\pi \operatorname{sh}(h d)}$ ,  $E_1$  — амплитуда высокочастотного поля между ламелями анодного блока.

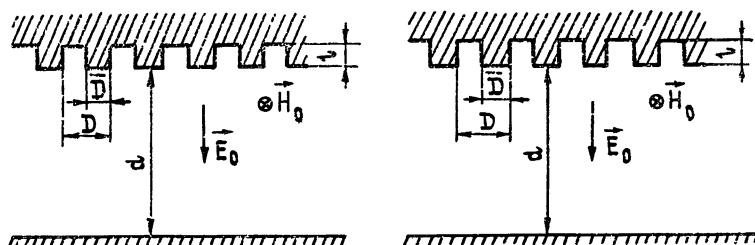


Рис. 1.

Рассмотрим движение электрона в постоянных скрещенных полях  $E_0$  и  $H_0$  и высокочастотном поле (3). Введем параметр расстройки

$$g = \frac{\pm n \omega_H + h v_e - \omega}{\omega_H} \ll 1.$$

В работе [<sup>3</sup>] получены уравнения движения магнетрона в режиме циклотронного резонанса без учета расстройки. Можно показать, что с учетом расстройки уравнения движения записываются в виде

$$\dot{X} = \pm g - \frac{b R_0}{2} \frac{(\mp R)^n}{n!} e^{\pm y} \sin(X \pm n\varphi),$$

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \pm \frac{b R_0}{2} \frac{(\mp R)^n}{n!} e^{\pm Y} \cos(X \pm n\varphi), \\ \dot{R} &= \pm \frac{b R_0}{2} \frac{(\mp R)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\pm Y} \cos(X \pm n\varphi), \\ R \dot{\varphi} &= - \frac{b R_0}{2} \frac{(\mp R)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\pm Y} \sin(X \pm n\varphi),\end{aligned}\quad (4)$$

где безразмерные координаты  $X = hA \pm gT$ ,  $Y = hB$ ,  $R = ha$ ,  $T = \omega_H t$ ,  $b = \tilde{E}/E_0$  — параметр высокочастотного поля,  $R_0 = ha_0 = \frac{hv_e}{\omega_H}$  — начальный безразмерный радиус электронной орбиты, точкой сверху обозначена производная по  $T$ , а медленно меняющиеся комплексные функции времени  $\alpha = A + iB$  и  $\beta = -iae^{-i\varphi}$  определяют траекторию электрона следующим образом:

$$z(t) = \alpha(t) + \beta(t) e^{-i\omega_H t} + v_e t, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Уравнения (4) записаны в системе отсчета, движущейся со скоростью дрейфа  $v_e$  в положительном направлении оси  $X$ . Верхний знак в условии резонанса (2) и в формулах (4) соответствует  $v_e < v_\Phi$ , нижний —  $v_e > v_\Phi$ . Если же  $v_e$  и  $v_\Phi$  направлены в противоположные стороны, то берется верхний знак.

## 2. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ТОЧНОМ СИНХРОНИЗМЕ

Положим  $g = 0$ . Уравнения (4) имеют два простых интеграла [3]:

$$\dot{Y} = \mp R \dot{R} / n; \quad (5)$$

$$R^n \exp(-R^2/2n) \sin \theta = R_0^n \exp(-R_0^2/2n) \sin \theta_0 \equiv c_2. \quad (6)$$

Из (5) следует

$$Y \pm \frac{R^2}{2n} = Y_0 \pm \frac{R_0^2}{2n} \equiv c_1, \quad (7)$$

$\theta = X \pm n\varphi$ ,  $R_0$ ,  $\theta_0$  — начальные значения соответствующих величин.

Уравнение (7) устанавливает связь безразмерного ларморовского радиуса  $R$  с поперечной координатой ведущего центра  $Y$ , уравнение (6) — с обобщенной фазой  $\theta$ . Из (5) следует, что движение электронов может быть двух типов. В первом случае (верхний знак в уравнениях движения) при дрейфе к аноду ( $\dot{Y} > 0$ ) радиус вращения, а следовательно, и вращательная энергия электронов уменьшаются. Последняя переходит в энергию высокочастотного поля вместе с потенциальной энергией электронов, а при дрейфе к катоду вращательная энергия электронов возрастает. Во втором случае (нижний знак) при движении к аноду кинетическая энергия электронов возрастает, а при движении к катоду — уменьшается. Ясно, что эффективность такого взаимодействия меньше, чем в предыдущем случае. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь первого случая.

Интервал начальных фаз, в котором электроны движутся к аноду, может быть найден из уравнения (6) с учетом того, что  $\dot{Y} > 0$ :  $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$  при  $n$  — нечетном и  $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$  при  $n$  — четном. Элек-

троны, начавшие свой путь в другой фазе, увеличив свою энергию, возвращаются на катод из-за увеличения ларморовского радиуса и одновременного смещения ведущего центра к катоду.

Для циклоиды из начальных условий следует  $Y_0 = R_0$ ,  $\varphi_0 = 0$ . Отсюда интервал рабочих фаз, например, для  $n = 1 - \frac{\pi}{2} < X_0 < \frac{3\pi}{2}$ .

Для поперечной координаты ведущего центра существует предельное значение

$$Y_{\text{пр}} = R_0 + \frac{R_0^2}{2n}.$$

Оно зависит лишь от начального радиуса.

Если  $R_0$  задан, то радиус  $R_1$ , с которым электрон подойдет к аноду, может быть найден из формулы (7) при подстановке в нее  $R = R_1$ ,  $Y = hd - R_1$ ,  $Y_0 = R_0$ :

$$R_1 = n + \sqrt{(n + R_0)^2 - 2pn}, \quad (8)$$

где обозначено  $p = hd$ .

При выводе формулы (8) относительные изменения  $R$  и  $Y$  за период циклотронной частоты предполагались малыми.

Как следует из (5), для того, чтобы электрон приближался к аноду (сам электрон, а не его ведущий центр), необходимо выполнение условия  $R > n$  и, во всяком случае,  $R_0 > n$ . Тогда увеличение  $Y$  за период циклотронной частоты будет больше, чем уменьшение радиуса\*, причем каждый последующий виток будет выше предыдущего. Наконец, наступает такой момент, когда радиус орбиты, уменьшаясь, станет равным  $n$ . Координата ведущего центра  $Y$  при этом принимает значение  $Y_1 = R_0 + (R_0^2 - n^2)/2n$ . Дальнейшее продвижение электрона к аноду становится невозможным, хотя  $Y$  продолжает возрастать. Если расстояние между анодом и катодом таково, что  $p > p_{\text{max}}$ , где  $p_{\text{max}}$  определяется условием  $R_1 = n$ , т. е.

$$p_{\text{max}} = \frac{(n + R_0)^2}{2n}, \quad (9)$$

то электрон на анод не попадет. Чем больше  $n$ , тем больше минимальное значение  $R_0$ , при котором начинается эффективное взаимодействие.

При заданном  $p$  для  $R_0$  существует вполне определенная область значений: снизу он ограничен условием  $R_0 > n$ , сверху — расстоянием между анодом и катодом. Из (9) можно получить

$$R_{0\min} = \sqrt{2pn} - n \leqslant R_0 \leqslant \frac{p}{2} = R_{0\max}.$$

Если направления  $v_e$  и  $v_\Phi$  противоположны, то условие резонанса принимает вид  $\omega = n\omega_H - hv_e$  или, иначе,  $\omega/\omega_H = n - R_0$ . Этому условию нельзя удовлетворить при  $R_0 > n$ , поскольку правая часть этого равенства должна быть положительной.

Из условия резонанса (2) следует соотношение, связывающее  $R_0$  и  $v_e/v_\Phi$ :

$$\frac{v_e}{v_\Phi} = \frac{R_0}{R_0 + n}.$$

\* При  $R_0 < n$  электрон попадает на анод на первой же петле, либо не попадает совсем.

Учитывая, что  $R_0 > n$ , получим  $\frac{1}{2} < \frac{v_r}{v_\phi} < 1$ .

Таким образом, для эффективного взаимодействия в магнетроне в режиме циклотронного резонанса необходимо выполнение условий  $R_0 > n$ ,  $v_e < v_\phi$ .

Приведенный выше качественный анализ подтверждается численным интегрированием точных уравнений движения, которое было проведено для  $g = 0$  и  $n = 1$  (рис. 2). Траектория электрона при  $R_0 > 1$  изображена на рис. 2а (сплошная линия), а при  $R_0 < 1$  — на рис. 2б. Видно, что в первом случае электрон в течение некоторого времени приближается к аноду, затем начинает от него удаляться. Во втором случае максимальная точка подъема электрона находится на вершине первой петли. В обоих случаях электрон отдает энергию высокочастотному полю.

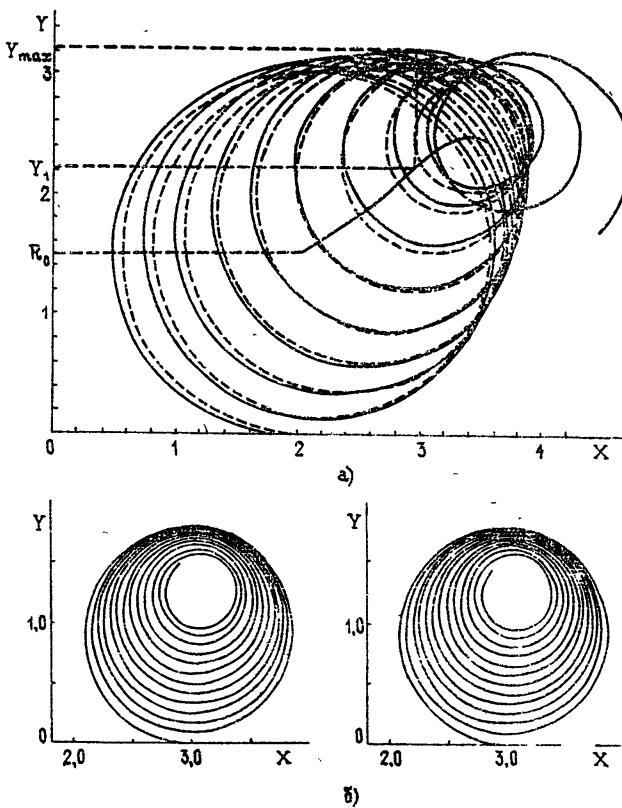


Рис. 2.

На рис. 2а приведены также траектории центра электронной орбиты и самого электрона (пунктирная линия), полученные из усредненных уравнений движения (4). Для наглядности картины (небольшое число петель) параметр ВЧ поля взят довольно большим,  $b = 0,006$ , что соответствует  $E_1/E_0 = 0,46$ , поэтому разница между точной и усредненной траекториями хорошо заметна. Отметим, что усредненные уравнения движения асимптотически дают точное решение при стремлении параметра малости  $\epsilon = E_1/E_0$  к нулю. Фазовые траектории, соответствующие уравнению (6), приведены на рис. 3 [8] (где случай а) соответствует  $g = 0$ ; б)  $0 < g < g_{kp}$ , в)  $g > g_{kp}$ ).

Случай  $n=1$  рассмотрим подробнее как представляющий наибольший практический интерес. С учетом интегралов движения (6), (7) уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} R^2 \dot{\phi} &= \dot{X}_0 = -\delta c_2, \\ \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 &= \delta^2 e^{-R^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\delta = \frac{b}{2} e^{c_2}, \quad (11)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \mp \frac{\delta}{R} \sqrt{R^2 e^{-R^2} - c_2^2}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\delta c_2}{R^2} = \frac{\dot{X}_0}{R^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Верхний знак в первом уравнении (12) соответствует движению ведущего центра к аноду, нижний — к катоду. С уменьшением радиуса орбиты добавка  $\dot{\varphi}$  к угловой скорости вращения электрона возрастает, причем ее знак определяется знаком  $\dot{X}_0$  и в одной половине интервала рабочих фаз — положительный, а в другой — отрицательный. Зависимость от времени сводится к интегралу

$$T(R) = \mp \frac{1}{2\delta} \int \frac{d(R^2)}{\sqrt{R^2 e^{-R^2} - c_2^2}},$$

который в элементарных функциях не выражается.

Из (12), (5) и (4) легко получить дифференциальное уравнение для траектории ведущего центра электронной орбиты:

$$\cdot \frac{dY}{dX} = \pm \sqrt{\frac{R^2 e^{-R^2}}{c_2^2} - 1}.$$

Траектория ведущего центра электрона является симметричной, на что указывают знаки перед корнем. Действительно, из рис. 2а видно, что уменьшение радиусов орбит происходит лишь до определенного предела, зависящего от начальных условий, вслед за чем радиусы начинают увеличиваться до тех пор, пока электрон не достигнет катода. Второй интеграл движения (6) свидетельствует о постоянстве продольной скорости ведущего центра  $\dot{X} = \dot{X}_0 = \text{const}$  и позволяет сделать ряд важных замечаний относительно характера движения электронов. Центральный электрон интервала благоприятных фаз, у которого  $\dot{X}_0 = 0$ , сохранит свое положение относительно фазы ВЧ поля. Электроны, вылетающие из катода в левой половине рабочих фаз, движутся с постоянной скоростью относительно ВЧ поля в положительном направлении оси  $X$ . Величина этой скорости тем больше, чем больше отличается фаза вылета электрона от фазы центра интервала. Электроны, которые в начальный момент времени находятся в правой половине интервала, имеют противоположные по направлению скорости.

Дрейфуя относительно высокочастотного поля, электроны до тех пор отдают ему свою энергию, пока фаза ведущего центра не достигнет границы интервала благоприятных фаз. В этот момент радиус электронной орбиты достигает минимального значения, и при своем дальнейшем движении электрон отбирает энергию у ВЧ поля.

На основе проведенного анализа получим некоторые характерные точки электронных траекторий.

а) Время достижения электроном минимального радиуса (рассмотрение проведено для левой половины интервала рабочих фаз  $\frac{\pi}{2} < X_0 < \pi$ )

$$t_{\min} = -\frac{3\pi - 2X_0}{b \omega_H R_0 e^{R_0} \sin X_0}. \quad (13)$$

Для центрального электрона ( $X_0 = 0$ ) минимальный радиус равен нулю (это видно из рис. 3), а время его достижения, как следует из формулы (13), равно бесконечности.

б) Минимальный радиус  $R_{\min}$  определяется из условия равенства  $R$  нулю, что приводит к трансцендентному уравнению

$$R \exp(-R^2/2) = |c_2|.$$

в) Значение фазы  $\theta_1$ , при котором  $R = 1$ , дается уравнением

$$\sin \theta_1 = \sqrt{e} c_1 \quad (e = 2,718\dots).$$

Величины  $\theta_1$  и  $R_{\min}$  приведены на рис. 3.

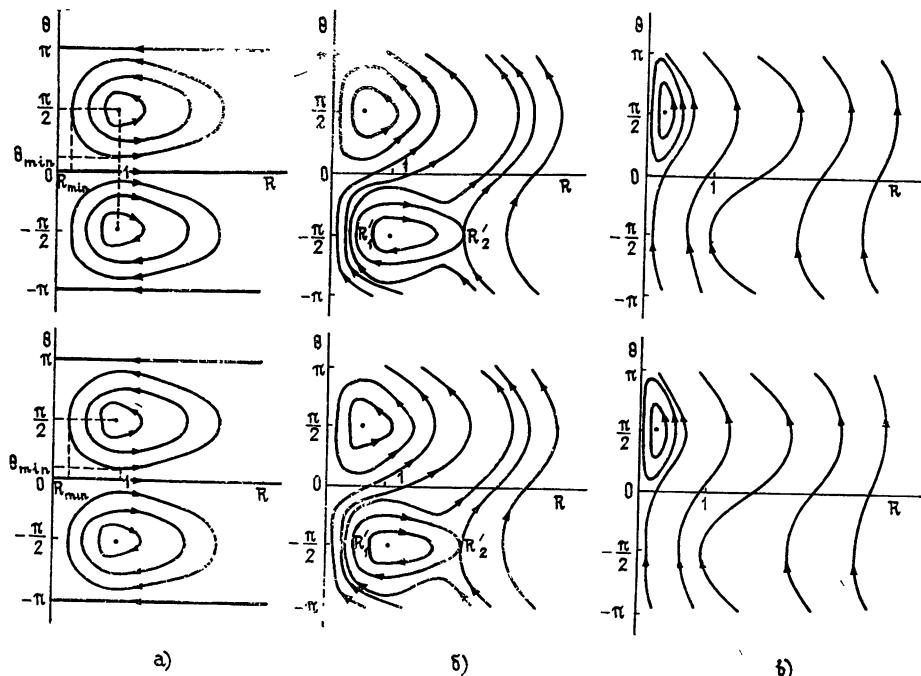


Рис. 3.

Фазовая группировка при резонансном взаимодействии во многом сходна с группировкой в обычных магнетронах. Траектории ведущих центров образуют сгустки, аналогичные «спицам» пространственного заряда в магнетроне. Отличие состоит в том, что «спица» при резонанском взаимодействии имеет конечную высоту, зависящую от режима

работы. Кроме того, реальные электронные сгустки значительно отличаются от «спиц», образованных ведущими центрами, особенно при больших  $R_0$ , когда происходит перемешивание электронов, принадлежащих различным «спицам», так как диаметр электронной орбиты сравним с длиной замедленной волны.

### 3. УСЛОВИЯ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОНОВ В «СПИЦЫ» ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Анализ проведем для  $n=1$ . При  $g \neq 0$  вместо (6) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \delta \exp(-R^2/2) \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= g + \delta \frac{R^2 - 1}{R} \exp(-R^2/2) \sin \theta.\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда следует

$$\frac{d\theta}{dR} = \frac{g}{\delta} \frac{e^{R^2/2}}{\cos \theta} + \frac{R^2 - 1}{R} \operatorname{tg} \theta. \quad (15)$$

Точное аналитическое решение уравнения (15) можно получить лишь в двух случаях: при  $R^2 \gg 1$  и  $R^2 \ll 1$ . Второй случай эквивалентен  $g \rightarrow 0$ , когда в правой части (15) можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым; он был рассмотрен выше. При  $R^2 \gg 1$  уравнение фазовой траектории имеет вид

$$gR - \delta \exp(-R^2/2) \sin \theta = gR_0 - \delta \exp(-R_0^2/2) \sin \theta_0 \equiv c_3. \quad (16)$$

Его исследование показывает, что при  $g \neq 0$  на фазовой плоскости появляется точка ветвления (точка  $R'_2$  на рис. 3б; ср. рис. 3а), «спица» становится несимметричной. С увеличением  $g$  область, заключенная между точками  $R'_1$  и  $R'_2$  сужается, обращаясь в нуль при

$$g = g_{kp} = \frac{e}{2} b \quad (e = 2,718...). \quad (17)$$

Это и есть критическое значение  $g_{kp}$ , соответствующее срыву захвата электронов в «спицу». Об исчезновении группировки свидетельствует то, что электроны с различными фазами вылета следуют по приблизительно одинаковым траекториям.

Представим  $g$  в виде

$$g = R_0 \frac{E_0 - E_{0c}}{E_{0c}} = R_0 \frac{\Delta E_{0c}}{E_{0c}},$$

где  $E_{0c}$  — синхронная напряженность постоянного электрического поля, соответствующая точному выполнению условия резонанса (2).

Из (17) следует условие, определяющее максимально допустимое отклонение электрического поля от синхронного, при котором еще соблюдается условие захвата:

$$\frac{\Delta E_{0c}}{E_{0c}} < \frac{1,36}{\pi} \frac{E_1}{E_0} \frac{\sin(hD/2)}{\operatorname{sh} p}. \quad (18)$$

#### 4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАГНЕТРОНА В РЕЖИМЕ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Основываясь на приведенных соображениях, нетрудно оценить КПД резонансного магнетрона. Используя точные выражения для скоростей электронов в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_H}{h} R_0 [1 - f \cos(\varphi + \omega_H t)],$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_H}{h} R_0 f \sin(\varphi + \omega_H t),$$

где  $f = R_1/R_0$ , найдем

$$\eta = 1 - \frac{W_a}{W_k} = 1 - \frac{R_0}{2p} (1 + f)^2. \quad (19)$$

Здесь  $W_a$  и  $W_k$  — энергия электрона соответственно у анода и у катода. С учетом  $f = R_1/R_0$

$$\eta = 1 - \frac{(R_0 + R_1)^2}{2pR_0}.$$

Подставляя вместо  $R_1$  выражение (8), получим

$$\eta = 1 - \frac{(n + R_0 + \sqrt{(n + R_0)^2 + 2pn})^2}{2pR_0}. \quad (20)$$

Если  $p$  задан, то, как легко проверить, максимальный КПД достигается при  $R_0 = R_{0\min}$ :

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{n}{R_{0\min}} = \frac{1}{\sqrt{2pn} - n}. \quad (21)$$

При выводе формулы для КПД скорость вертикального дрейфа предполагалась много меньше  $v_e$ .

Как и в обычном магнетроне, КПД не зависит от начальной фазы электрона, поэтому все электроны, достигнув анода, отдают одну и ту же энергию.

Интересно, что соответствующие режиму циклотронного резонанса значения постоянного магнитного поля находятся вблизи критического. Действительно, задаваясь  $R_0$  и  $p$ , нетрудно получить

$$\frac{H_0}{H_{0\text{кр}}} = \sqrt{\frac{p}{2R_0}}.$$

При максимальном КПД  $p$  и  $R_0$  связаны соотношением (9). В этом случае имеем

$$\frac{H_0}{H_{0\text{кр}}} = \frac{n + R_0}{2\sqrt{nR_0}}. \quad (22)$$

В табл. 1 приведены рассчитанные по формулам (21), (22) значения КПД и соответствующие им  $H_0/H_{0\text{кр}}$  для  $n=1$ . Зависимость от  $H_0/H_{0\text{кр}}$  является довольно резкой вблизи  $H_0/H_{0\text{кр}} = 1$ .

Из таблицы видно, что КПД растет с увеличением  $p$ , т. е. расстояния между анодом и катодом. Но мощность, как будет показано ниже,

достигает максимального значения при определенном  $p$ , а затем уменьшается, что является следствием экспоненциального спадания от анода к катоду высокочастотного поля в замедляющей системе. Практически  $p$  принимает значения в пределах от 3 до 5, что соответствует  $\eta_{\max} = 0,35 \div 0,50$ .

Таблица 1

$R_0 \text{ min}$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$\eta_{\max}$	0,00	0,20	0,33	0,43	0,50	0,56	0,60
$H_0/H_0 \text{ кр}$	1,000	1,006	1,021	1,039	1,061	1,083	1,107

При обычном синхронизме в магнетроне радиусы орбит не меняются,  $f = 1$ , и из (19) следует известная формула для КПД магнетронного генератора [4]. В магнетроне, как правило, начальный радиус  $R_0 \ll 1$ , поэтому КПД достигает значительной величины. В случае же резонансного взаимодействия (хотя  $f$  может быть много меньше единицы), поскольку должно выполняться условие  $R_0 > n$ , при одинаковых  $p$  КПД получается меньше. Однако для полного сравнения необходимо знать мощность взаимодействия.

Следует отметить, что полученная формула не учитывает потерь на катоде, которые, по-видимому, будут несколько больше, чем при синхронном взаимодействии. Этот вопрос требует специального исследования.

Основываясь на уравнениях движения для усредненной за период комплексной мощности, отдаваемой одним электроном, найдем

$$P_{\text{компл}} = \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{dt} \tilde{E}_{\text{компл}}^* d(\omega_H t) = \pm \frac{e}{2} \tilde{E} e^{\mp i\hbar\alpha} \frac{(\mp i\hbar\beta)^n}{n!} \frac{\omega}{\hbar},$$

где  $\tilde{E}_{\text{компл}} = \tilde{E}_x + \tilde{E}_y$ , звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина; смысл знаков тот же, что и в формулах (4).

Для средней активной мощности получим

$$P_a = \pm \frac{e \tilde{E} v_\phi}{2} e^{\pm \gamma} \frac{(\mp R)^n}{n!} \cos(X \pm n\varphi) = e \frac{dy}{dt} E_0 \frac{v_\phi}{v_e},$$

откуда следует, что с точностью до постоянного множителя  $v_\phi/v_e$  при вычислении мощности движение реального электрона можно заменить движением фиктивного заряда, равного заряду электрона и помещенного в центр электронной орбиты, подобно тому, как это делается для обычных магнетронов [4]. Очевидно, что коэффициент  $v_\phi/v_e$  учитывает мощность, обусловленную изменением ларморовских радиусов. С учетом того, что для ведущих центров выполняется условие несжимаемости

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} = 0,$$

мощность при резонанском взаимодействии может быть найдена интегрированием по площади «спицы».

Поскольку КПД известен, то активную мощность можно найти иначе, по формуле

$$P_a = \eta u_a J_0, \quad (23)$$

где  $u_a$  — анодное напряжение,  $J_0$  — постоянный ток.

Для оценки мощности воспользуемся вышеупомянутой моделью, т. е. будем рассматривать движение ведущих центров, а изменение радиусов орбит учтем соответствующим множителем. Имеем

$$J_0 = \frac{N \rho_0 L \omega_H}{h^2} \frac{(R_0 + n)}{R_0} \int \dot{Y} \Big|_{\substack{Y=R=R_0 \\ \varphi=0}} dX,$$

где  $L$  — высоты анодного блока,  $N$  — число «спиц»,  $\rho_0$  — плотность пространственного заряда в основании «спицы»; ее мы считаем постоянной. Интегрирование ведется по интервалу тормозящих фаз. После подстановки  $\dot{Y}$  из (4) и интегрирования получим

$$J_0 = \frac{N \rho_0 L \omega_H}{h^2} \frac{b R_0}{n!} \frac{R_0^{n-1} e^{R_0}}{R_0 + n}.$$

Для оценки  $\rho_0$  предположим, что плотность заряда постоянна не только на границе, но и во всем объеме прикатодной «втулки». Тогда напряженность электростатического поля на границе «втулки»  $E_{\text{пл. з. гр.}}$  равна

$$E_{\text{пл. з. гр.}} = 4\pi \rho_0 a_0.$$

Вводя параметр пространственного заряда

$$q = \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} = \frac{E_{\text{пл. з. гр.}}}{E_0}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{m},$$

запишем плотность пространственного заряда в виде

$$\rho_0 = q \frac{h E_0}{4\pi}.$$

Условием, при котором можно пренебречь влиянием пространственного заряда, является ([2], стр. 81)  $q \ll 1$ .

После подстановки  $\rho_0$  и несложных преобразований выражение для тока принимает вид

$$J_0 = \frac{qm \omega L c^2 \beta_\Phi^2}{4\pi^2 e} \left( \frac{E_1}{E_0} \right) \sin \left( \frac{h\bar{D}}{2} \right) \frac{R_0^n e^{R_0}}{n! \operatorname{sh} p(n + R_0)^2}, \quad (24)$$

где  $\beta_\Phi = \frac{v_\Phi}{c}$ ,  $c$  — скорость света.

Подставляя (24) и (20) в (23), найдем мощность

$$P_a = \frac{qE_1}{4\pi^2 e} \frac{mc^3 L \beta_\Phi^3}{e} \sin \left( \frac{h\bar{D}}{2} \right) \left[ 1 - \frac{(n + R_0 + \sqrt{(n + R_0)^2 - 2pn})^2}{2pR_0} \right] \times \\ \times \frac{pR_0^n e^{R_0}}{n! \operatorname{sh} p(R_0 + n)^2}:$$

Как показывают расчеты,  $P_a$  принимает максимальное значение при связи между  $p$  и  $R_0$  в виде (9):

$$P_{a \max} = \frac{m^2 c^4 \beta_\Phi^4 L}{4\pi^2 e^2} \left( \frac{E_1}{E_0} \right) \sin \left( \frac{h\bar{D}}{2} \right) \frac{R_0^n e^{R_0} (R_0 - n)}{2n! n(n + R_0)^2 \operatorname{sh} \left[ \frac{(n + R_0)^2}{2n} \right]}.$$

На рис. 4 приведены графики функций

$$F_J(R_0) = \frac{R_0^n e^{R_0}}{n! (n + R_0)^2 \operatorname{sh} \left[ \frac{(n + R_0)^2}{2n} \right]},$$

$$F_p(R_0) = \frac{R_0^n e^{R_0} (R_0 - n)}{2n! n(n + R_0)^2 \operatorname{sh} \left[ \frac{(n + R_0)^2}{2n} \right]},$$

определяющих безразмерные части тока и мощности для  $n = 1$  (сплошные линии) и  $n = 2$  (пунктирные линии). Видно, что с увеличением номера гармоники  $n$  уменьшаются значения всех величин. При некотором  $R_0$  мощность достигает максимального значения.

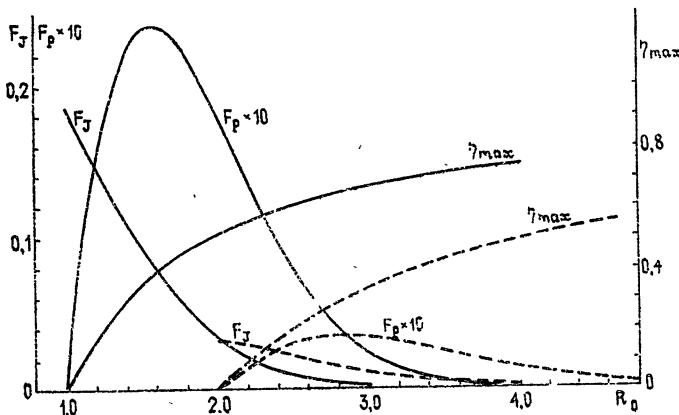


Рис. 4.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью приближенного аналитического метода получены траектории и исследованы особенности фазовой группировки электронов в магнетроне в режиме циклотронного резонанса.

Показана возможность работы магнетрона в таком режиме со значениями КПД порядка  $0,3 \div 0,5$  при соблюдении условий  $R_0 > n$ ,  $v_e < v_\phi$  ( $v_e$  и  $v_\phi$  должны быть направлены в одну и ту же сторону). Первое из этих условий означает, что для эффективного взаимодействия в режиме циклотронного резонанса начальный радиус электронной орбиты должен быть достаточно велик.

Установлено, что режим циклотронного резонанса соответствует магнитным полям, близким к критическому:  $H_0/H_{0\text{ кр}} = 1,01 \div 1,10$ .

К достоинствам резонансного взаимодействия следует отнести возможность взаимодействия с незамедленными волнами в гладком волноводе либо в системах с малым замедлением, что особенно важно в коротковолновой части диапазона, где период замедляющей структуры весьма мал. Это создает трудности в изготовлении последней и ухудшает тепловой режим. Другим достоинством может явиться использование меньших магнитных полей на тех же частотах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
2. Л. А. Вайиштейн, В. А. Солинцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
3. В. Н. Галимуллин, П. В. Романов, Вопросы радиоэлектроники, серия 1, Электроника, вып. 12, 3 (1964).
4. В. Е. Нечаев, Изв. вузов — Радиофизика, 5, № 3 (1962).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
2 февраля 1978 г.

## ELECTRON TRAJECTORIES IN A MAGNETRON IN THE CYCLOTRON RESONANCE REGIME

*M. Yu. Krasnikov, M. I. Kuznetsov*

By the averaging method an analysis of equations of electron motion is carried out in a plane magnetron operating in the regime of the cyclotron resonance when radii of electron orbits are changed. Conditions obtained provide the effective operation of the magnetron in such regime with a sufficient high efficiency values. An approximate analytic consideration of nonsynchronism and the estimation of some parameters of the device are carried out.

УДК 533.924

## ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАЗМЫ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ НОСИТЕЛЕЙ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

*B. B. Колесов*

Получено выражение для диэлектрической проницаемости системы электронов в скрещенных полях при учете их разогрева и квантования орбитального движения. Результаты используются для исследования влияния разогрева и квантования на спектр и декремент затухания потенциальных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое и экспериментальное исследование поведения полупроводниковой плазмы в сильных электрических и магнитных полях привлекает в настоящее время внимание многих исследователей, что в первую очередь обусловлено широким внедрением полупроводниковых материалов в радиотехнике и электронике. Как известно, сильные магнитные поля, в которых квантуется орбитальное движение носителей (квантующие магнитные поля), существенно изменяют энергетический спектр, создают дискретные энергетические уровни (уровни Ландау). Это приводит к зависимости от магнитного поля скорости релаксационных процессов. Что же касается сильного электрического поля, то с его помощью можно приводить полупроводники в состояния, далекие от термодинамического равновесия, одним из примеров которых являются «горячие» электроны в полупроводниках. Условия разогрева носителей, в свою очередь, зависят от скорости релаксационных процессов в электронной и фононной подсистемах полупроводника, а тем самым, — от магнитного поля, если таковое имеется.

В задачу данной работы входит изучение влияния взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей ( $E \perp B$ ) на характер поведения потенциальных электромагнитных колебаний невырожденной полупроводниковой плазмы. При этом магнитное поле считается достаточно сильным, чтобы орбитальное движение носителей было квантованным, а электрическое поле таковым, что в состоянии разогреть электронную подсистему, хотя работу электрического поля на расстояниях порядка квантового радиуса Лармора  $\lambda = (c\hbar/|e|B)^{1/2}$  будем считать малой по сравнению с характерной энергией электронов  $\epsilon$ . Это допущение позволяет пренебречь влиянием электрического поля на состояние электрона в отсутствие рассеяния. Кроме того, рассмотрение будет ограничено случаем малого числа носителей, когда распределение их по энергиям при наличии греющего поля  $E$ , вообще говоря, является немаксвелловским [1]. С немаксвелловской функцией распределения связан целый ряд эффектов, что существенно отличает полупроводниковую плазму с малым числом носителей от плазмы с большим их числом.

Исходя из поставленной задачи, нам необходимо прежде всего запи-

сать дисперсионное уравнение потенциальных колебаний однородной электронной плазмы при наличии скрещенных электрического и магнитного полей с учетом орбитального квантования и разогрева, которое имеет вид

$$\epsilon(q, \omega) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\epsilon(q, \omega)$  — диэлектрическая проницаемость. Далее нужно проанализировать влияние внешних полей на спектры  $\omega$  и декременты затухания  $\gamma$  продольных колебаний рассматриваемой среды.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Рассмотрим однородную электронную плазму в скрещенных полях. При этом полагаем, что постоянное и однородное электрическое поле  $E\{E, 0, 0\}$  может приводить к нагреву электронной системы, а магнитное поле  $B\{0, 0, B\}$  с калибровкой  $A\{0, Bx, 0\}$  является квантующим ( $\hbar\Omega > T_e$ ,  $\Omega = |e|B/mc$ ). Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением только потенциальных колебаний, то можно воспользоваться уравнением Пуассона для потенциала самосогласованного электромагнитного поля с целью отыскания дисперсионного уравнения потенциальных колебаний электронной плазмы в скрещенных полях. Отсюда возникает необходимость найти добавку  $\delta N(r, t)$  к концентрации электронов, обусловленную самосогласованным возмущающим полем, которое описывается потенциалом

$$\varphi(r, t) = \varphi_{q\omega} e^{iqr - i\omega t} = \varphi_\omega e^{-i\omega t}. \quad (2.1)$$

Искомая добавка к концентрации  $\delta N(r, t) = N_{q\omega} e^{iqr - i\omega t}$  может быть найдена обычным способом:

$$\delta N(r, t) = \text{Sp}(\hat{\delta \rho} \hat{N}), \quad (2.2)$$

где  $\hat{N}$  — квантовомеханический оператор плотности частиц, а  $\hat{\delta \rho} = \hat{\rho}_\omega e^{-i\omega t}$  — возмущение матрицы плотности, обусловленное самосогласованным полем (2.1).

Итак, все сводится к отысканию добавки  $\hat{\delta \rho}$  на основе уравнения движения матрицы плотности, которое в линейном по самосогласованному полю приближении принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\delta \rho} = [\hat{H}_0, \hat{\delta \rho}]_- + [\hat{\delta \rho}, \hat{\rho}_0]_- + I(\hat{\delta \rho}). \quad (2.3)$$

Здесь  $\hat{H}_0$  и  $\hat{\rho}_0$  — соответственно гамильтониан и матрица плотности невозмущенного состояния (т. е. в отсутствие поля (2.1)),  $\hat{\delta H} = -|e|\varphi$ , а  $I(\hat{\delta \rho})$  — член, учитывающий влияние столкновений («интеграл столкновений»).

Поскольку мы в дальнейшем будем исследовать колебания с частотами, намного превышающими характерные частоты столкновений электронов, то последним слагаемым в (2.3) можно пренебречь и рассматривать задачу о колебаниях бесстолкновительной плазмы. Таким образом, при нашем рассмотрении столкновения сказываются только на явном виде матрицы плотности невозмущенного состояния  $\hat{\rho}_0$ .

С учетом этого замечания уравнение движения (2.3) в представлении гамильтониана  $\hat{H}_0$  можно записать так:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle v | \overset{\wedge}{\delta \rho} | v' \rangle = (\epsilon_v - \epsilon_{v'}) \langle v | \overset{\wedge}{\delta \rho} | v' \rangle + ([\overset{\wedge}{\delta H}, \overset{\wedge}{\rho_0}]_{vv'})_{vv'}, \quad (2.4)$$

причем мы учли, что матрица плотности невозмущенного состояния  $\overset{\wedge}{\rho_0}$  недиагональна в представлении гамильтонiana  $\overset{\wedge}{H_0}$  (недиагональный элемент матрицы плотности  $\overset{\wedge}{\rho_0}$  определяет потоки заряда и энергии, обусловленные статическим полем  $E$ ). Если же принять во внимание, что работа электрического поля  $E$  на расстояниях порядка квантового радиуса Лармора  $\lambda$ , по предположению, мала по сравнению с характерной энергией электронов  $\epsilon_e (|e|E\lambda \ll \epsilon_e)$ , то вклад недиагональных элементов матрицы плотности  $\overset{\wedge}{\rho_0}$  в (2.4) можно не учитывать.

В результате выражение для  $\overset{\wedge}{\delta \rho}$  в представлении гамильтонiana  $\overset{\wedge}{H_0}$  определяется следующим образом:

$$(\overset{\wedge}{\rho_\omega})_{vv'} = \frac{(f_{v'} - f_v)}{(\epsilon_{v'} - \epsilon_v + \hbar\omega)} (\overset{\wedge}{\delta H_\omega})_{vv'}, \quad (2.5)$$

где, как обычно, мы выбрали диагональный элемент матрицы плотности основного состояния в виде функции от той части собственной энергии электрона  $\epsilon_v$ , которая не зависит от электрического поля  $E$ .

Для выбранной нами калибровки внешних статических полей  $E$  и  $B$  гамильтониан  $\overset{\wedge}{H_0}$  имеет вид

$$\overset{\wedge}{H_0} = \frac{1}{2m} \left( p + \frac{|e|}{c} A_0 \right)^2 + |e| Ex, \quad (2.6)$$

а собственные волновые функции  $|v\rangle$  и собственные значения энергии  $\epsilon_v$  определяются выражениями

$$|v\rangle = |n, k_y, k_z\rangle = \exp(ik_y y + ik_z z) \Phi_n \left( \frac{x - X_0}{\lambda} \right), \quad (2.7)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_v + |e| E X_0 - \frac{1}{2} m v_B^2, \quad \epsilon_v = \hbar \Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}.$$

Здесь  $\Phi_n(x)$  — нормированная волновая функция одномерного гармонического осциллятора,  $X_0 = -\lambda^2 k_y + (v_B/\Omega)$ ,  $v_B = cE/B$ .

Используя выражения (2.2), (2.5)–(2.7) для отыскания добавки  $\delta N$  и подставляя полученный результат в уравнение Пуассона, приходим к дисперсионному уравнению вида (1.1) для потенциальных колебаний электронной плазмы в скрещенных полях. При этом выражение для диэлектрической проницаемости  $\epsilon(q, \omega)$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon(q, \omega) = 1 &+ \frac{4\pi e^2}{\hbar q} \sum_{\substack{n, n' \\ k_z}} f_{nk_z} \left\{ \frac{|I_{nn'}|^2}{\left[ \Omega(n' - n) + \omega + q_y v_B + \frac{\hbar q_z^2}{2m} - \frac{\hbar q_z k_z}{m} \right]} + \right. \\ &+ \left. \frac{|I_{n'n}|^2}{\left[ \Omega(n' - n) - \omega - q_y v_B + \frac{\hbar q_z^2}{2m} + \frac{\hbar q_z k_z}{m} \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$|I_{nn'}|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\tilde{n}!}{\sqrt{n!n'!}} \right)^2 \left( \frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right)^{|n-n'|} \times \\ \times \exp \left( -\frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right) \left[ L_n^{|n-n'|} \left( \frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right) \right]^2, \quad (2.9)$$

$q_\perp^2 = q_x^2 + q_y^2$ ,  $\tilde{n} = \min\{n, n'\}$ ,  $L_n^m(x)$  — полиномы Лагерра.

Для максвелловского распределения с температурой электронов  $T_e$  диэлектрическую проницаемость (2.8) можно представить через табулированные интегралы точно так же, как и в отсутствие однородного электрического поля  $E$  [2]:

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - \frac{m\omega_p^2}{\hbar q^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s(\lambda^2 q_\perp^2) \exp \left( \frac{\hbar\Omega}{2T_e} s \right) \left[ \frac{J_+^-(s)}{\omega^-(s)} - \frac{J_+^+(s)}{\omega^+(s)} \right]. \quad (2.10)$$

Здесь

$$A_s(\lambda^2 q_\perp^2) = \exp \left( -\frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T_e} \right) I_s \left( \frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \operatorname{csch} \frac{\hbar\Omega}{2T_e} \right); \quad (2.11)$$

$$J_+^\pm(s) = J_+ \left( \frac{\omega^\pm(s)}{q_z v_T} \right) = J_+ \left( \frac{\omega + q_y v_B \pm \Omega s \pm \frac{\hbar q_z^2}{2m}}{q_z v_T} \right), \quad (2.12)$$

$$J_+(x) = x \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) \int_{-\infty}^x d\tau \exp \left( \frac{\tau^2}{2} \right),$$

$I_s(x)$  — функция Бесселя от мнимого аргумента,  $\omega_p^2 = 4\pi Ne^2/m$ ,  $v_T = \sqrt{T_e/m}$ .

Как и следовало ожидать, в отсутствие электрического поля ( $E = 0$ ) полученное выражение (2.10) для диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы совпадает с известными результатами для плазмы в квантующем магнитном поле [2].

Однако в общем случае разогретых электронов функция распределения  $f_{nk_z}$ , входящая в (2.8), не является максвелловской, а имеет более сложный характер зависимости от энергии электрона. Соответственно и выражение для диэлектрической проницаемости  $\epsilon(q, \omega)$  будет отлично от (2.10). Проще всего рассмотреть ультраквантовый предел  $\left( \frac{\hbar\Omega}{2} \ll \epsilon_{nk_z} < \frac{3\hbar\Omega}{2} \right)$ , когда практически все электроны в основном состоянии находятся на уровне Ландау с  $n=0$ , т. е.  $f_{nk_z} = f_{0k_z} \delta_{n0}$ . Тогда из (2.8) находим

$$\epsilon(q, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\hbar\lambda^2 q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right)^n \exp \left( -\frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right) \times \\ \times \int_{-\sqrt{2/\lambda}}^{+\sqrt{2/\lambda}} dk_z f_{0k_z} \left[ \frac{1}{\left( \omega + q_y v_B + \Omega n + \frac{\hbar q_z^2}{2m} - \frac{\hbar q_z k_z}{m} \right)} \right] \quad (2.13)$$

$$-\frac{1}{\left(\omega + q_y v_B - \Omega n - \frac{\hbar q_z^2}{2m} - \frac{\hbar q_z k_z}{m}\right)} \Bigg].$$

Если теперь воспользоваться результатами работы [1] (см. соотношение (7.4) работы [1]), то кинетическое уравнение для диагонального элемента матрицы плотности электронов  $f_{0k_z}$  может быть записано так:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ \epsilon g_0^2(\epsilon) \left( \frac{f_0(\epsilon)}{T} + \frac{df_0(\epsilon)}{d\epsilon} \right) + \beta \left( 1 + \frac{\nu_{el}}{\nu_{ep}} \right) \frac{\hbar \Omega}{2} g_0^2(\epsilon) \frac{df_0(\epsilon)}{d\epsilon} \right] = 0, \quad (2.14)$$

где  $g_0(\epsilon)$  — плотность электронных состояний, соответствующая нулевому уровню Ландау в интервале энергий  $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ ;  $\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{cE}{sB} \right)^2$  — параметр разогрева, введенный в работе [3];  $\nu_{ep}$  и  $\nu_{el}$  — частоты релаксации импульса электрона на акустических фонах и короткодействующих примесях соответственно;  $\epsilon = \epsilon_{0k_z} = \frac{\hbar \Omega}{2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$ .

Решая уравнение (2.14), находим явное выражение для функции распределения разогретых электронов в ультраквантовом пределе:

$$f_{0k_z} = C \left( 1 + \frac{\lambda^2 k_z^2}{1 + \beta^*} \right)^{\beta^* \frac{\hbar \Omega}{2T}} \exp \left( -\frac{\hbar^2 k_z^2}{2mT} \right). \quad (2.15)$$

Здесь  $\beta^* = \beta (1 + \nu_{el}/\nu_{ep})$ ,  $T$  — температура решетки в единицах энергии, а постоянная  $C$  определяется условием нормировки

$$N = \int_{-\sqrt{2}/\lambda}^{+\sqrt{2}/\lambda} dk_z f_{0k_z}. \quad (2.16)$$

Ограничимся рассмотрением достаточно слабого разогрева ( $\beta^* \ll 1$ ), когда функция распределения  $f_{0k_z}$  с учетом условия нормировки (2.16) может быть представлена в виде

$$f_{0k_z} = \frac{\hbar N}{\sqrt{2\pi mT}} \exp \left( -\frac{\hbar^2 k_z^2}{2mT} \right) \left\{ 1 - \frac{\beta^*}{2} \left[ 1 - \frac{\hbar \Omega}{T} \ln (1 + \lambda^2 k_z^2) \right] \right\}, \quad (2.17)$$

причем при отыскании нормировочных констант для функции (2.17) мы расширим пределы интегрирования в условии (2.16) до бесконечности, учитывая тот факт, что  $\hbar \Omega \gg T$ .

Подставляя (2.17) в (2.13), после несложных выкладок находим диэлектрическую проницаемость «теплых» электронов в ультраквантовом пределе:

$$\epsilon(q, \omega) = 1 + \frac{m \omega_p^2}{\hbar q^2} \exp \left( -\frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda^2 q_\perp^2}{2} \right)^n \times \\ \times \left\{ \frac{J_+^+(n)}{\omega^+(n)} - \frac{J_-^-(n)}{\omega^-(n)} + \frac{\beta^*}{2} \frac{[1 - J_+^+(n)]}{\omega^+(n)} \left[ 1 - \frac{\hbar \Omega}{T} \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^+(n)]^2}{q_z^2 v_T^2} \right) \Big] - \frac{\beta^*}{2} \frac{[1 - J_+^-(n)]}{\omega^-(n)} \left[ 1 - \right. \\ & \left. - \frac{\hbar \Omega}{T} \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^-(n)]^2}{q_z^2 v_T^2} \right) \right] - \frac{\hbar \Omega}{T} \frac{\beta^*}{2} q_z^2 v_T^2 \times \\ & \times \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^+(n)]^2}{q_z^2 v_T^2} \right)}{[\omega^+(n)]^3} - \frac{\ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^-(n)]^2}{q_z^2 v_T^2} \right)}{[\omega^-(n)]^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из последнего выражения видно, что потенциальные волны, распространяющиеся строго поперек магнитного поля  $\mathbf{B}$  ( $q_z = 0$ ), практически не чувствуют разогрева электронной подсистемы, а эффект электрического поля  $\mathbf{E}$  заключается в простой замене  $\omega$  на  $(\omega + q_y v_B)$  в выражении для диэлектрической проницаемости электронов в квантующем магнитном поле (см., например, [2]). Подобный результат вполне понятен, если вспомнить, что в ультраквантовом пределе разогрев электронов сказывается только на характеристиках движения частиц вдоль магнитного поля (см. формулы (2.15), (2.17)).

### 3. ВОЛНЫ В РАЗОГРЕТОЙ КВАНТОВОЙ ПЛАЗМЕ

Перейдем теперь к исследованию спектров потенциальных колебаний разогретой электронной плазмы в квантующем магнитном поле. Число различных ветвей колебаний магнитоактивной плазмы очень велико, поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь наиболее характерных из них с точки зрения особенностей, обусловленных разогревом и орбитальным квантованием.

Поскольку разогрев электронов практически не влияет на характеристики волн, распространяющихся строго поперек магнитного поля, то естественно рассмотреть противоположный предел, когда волна распространяется вдоль магнитного поля ( $q \equiv q_z$ ). В этом простейшем случае, как следует из (1.1) и (2.18), дисперсионное уравнение потенциальных колебаний запишется так:

$$\begin{aligned} \epsilon(q, \omega) = 1 + \frac{m \omega_p^2}{\hbar q^2} & \left\{ \frac{J_+^+(0)}{\omega^+(0)} - \frac{J_+^-(0)}{\omega^-(0)} + \frac{\beta^*}{2} \frac{(1 - J_+^+(0))}{\omega^+(0)} \times \right. \\ & \times \left[ 1 - \frac{\hbar \Omega}{T} \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^+(0)]^2}{q^2 v_T^2} \right) \right] - \frac{\beta^*}{2} \frac{(1 - J_+^-(0))}{\omega^-(0)} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{\hbar \Omega}{T} \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^-(0)]^2}{q^2 v_T^2} \right) \right] - \frac{\beta^*}{2} \frac{\hbar \Omega}{T} q^2 v_T^2 \times \\ & \times \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^+(0)]^2}{q^2 v_T^2} \right)}{[\omega^+(0)]^3} - \frac{\ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{[\omega^-(0)]^2}{q^2 v_T^2} \right)}{[\omega^-(0)]^3} \right] \Big\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В отсутствие разогрева ( $\beta^* = 0$ ) соотношение (3.1) переходит в известное дисперсионное уравнение для потенциальных волн, распространяющихся строго вдоль магнитного поля в ультраквантовом пределе.

В области частот колебаний  $\omega^\pm(0) \equiv \omega \pm \frac{\hbar q^2}{2m} \gg q v_T$  и при усло-

вии  $\operatorname{Re} \omega \gg \operatorname{Im} \omega$ , если воспользоваться асимптотическим представлением функций  $J_{\pm}^{\pm}(0)$  (см., например, [4]), дисперсионное уравнение (3.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \epsilon(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & \left[ 1 + 3 \left( 1 - \frac{\beta^*}{2} \right) \frac{q^2 v_T^2}{\omega^2} \right] + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2T}{\hbar \omega} \frac{\omega \omega_p^2}{q^3 v_T^3} \times \\ & \times \exp \left( - \frac{\omega^2}{2q^2 v_T^2} \right) \left\{ \left( 1 - \frac{\beta^*}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\hbar \omega}{2T} + \frac{\beta^*}{2} \frac{\hbar \Omega}{2T} \left[ \exp \left( \frac{\hbar \omega}{2T} \right) \times \right. \right. \\ & \times \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{\omega^2}{q^2 v_T^2} - \frac{\omega}{\Omega} \right) - \exp \left( - \frac{\hbar \omega}{2T} \right) \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{\omega^2}{q^2 v_T^2} + \frac{\omega}{\Omega} \right) \left. \right] \left. \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решая это уравнение, определяем спектр  $\omega$  и декремент затухания  $\gamma$  рассматриваемых колебаний ( $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ ):

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_p^2 + 3 \left( 1 - \frac{\beta^*}{2} \right) q^2 v_T^2, \\ \gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p^4}{q^3 v_T^3} \exp \left( - \frac{\omega_p^2}{2q^2 v_T^2} - \frac{3}{2} \right) \frac{2T}{\hbar \omega_p} \left\{ \left( 1 - \frac{\beta^*}{2} \right) \operatorname{sh} \frac{\hbar \omega_p}{2T} + \right. \\ + \frac{\beta^*}{2} \frac{\hbar \Omega}{2T} \left[ \exp \left( \frac{\hbar \omega_p}{2T} \right) \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{\omega_p^2}{q^2 v_T^2} - \frac{\omega_p}{\Omega} \right) - \right. \\ \left. \left. - \exp \left( - \frac{\hbar \omega_p}{2T} \right) \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{\omega_p^2}{q^2 v_T^2} + \frac{\omega_p}{\Omega} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Когда электроны холодные ( $\beta^* = 0$ ), а  $\hbar \omega_p \ll T$ , полученные выражения (3.3) совпадают с классическими результатами для высокочастотных ленгмюровских колебаний электронной плазмы. Кроме того, из (3.3) следует, что разогрев электронов в квантующем магнитном поле, не отражаясь на частоте колебаний, заметно меняет характер дисперсионной зависимости  $\omega(q)$ . При этом видно, что фазовая скорость волн осталась прежней ( $v_{ph} = \omega_p/q$ ), тогда как групповая скорость ленгмюровских волн в системе разогретых электронов, помещенных в квантующее магнитное поле, стала меньше:

$$\frac{v_g(\beta^* \neq 0)}{v_g(\beta^* = 0)} = 1 - \frac{1}{2} \beta^* < 1. \quad (3.4)$$

Таким образом, если определять температуру электронов в скрещенных полях исходя из групповой скорости ленгмюровских волн, то налицо некоторое понижение температуры, несмотря на греющий эффект электрического поля. Следует, однако, заметить, что это уменьшение групповой скорости возможно лишь в условиях достаточно слабого разогрева. При сильном разогреве в условиях орбитального квантования в магнитном поле, когда применимы результаты работы [3], наблюдается вновь возрастание групповой скорости ленгмюровских волн в полном соответствии тому, что увеличивается эффективная температура  $T_e = T(1 + \beta^*)$ .

Обратимся теперь к декременту затухания  $\gamma$  ленгмюровских волн в системе разогретых электронов. Для случая достаточно низких концентраций носителей ( $\hbar \omega_p \ll T$ ) из (3.3) находим

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p^4}{q^3 v_T^3} \exp\left(-\frac{\omega_p^2}{2q^2 v_T^2} - \frac{3}{2}\right) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\beta^*}{2} \left[ \frac{\hbar \Omega}{T} \ln \left( 1 + \frac{T}{\hbar \Omega} \frac{\omega_p^2}{q^2 v_T^2} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (3.5)$$

Тем самым, нагрев электронной системы в рассматриваемом случае способствует усилению затухания ленгмюровских колебаний ввиду того, что вклад добавки, обусловленный разогревом, всегда положителен.

Следует обратить внимание на тот факт, что с уменьшением длины волны колебаний этот эффект усиления затухания за счет разогрева уменьшается и на границе рассматриваемой области колебаний ( $q^2 v_T^2 \leq \omega_p^2$ ) практически исчезает, чего не наблюдается, если применимо приближение эффективной температуры  $T_e$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Злобин, П. С. Зырянов, УФН, **104**, вып. 3, 353 (1971).
2. Р. Д. Джамалов, В. В. Колесов, А. А. Рухадзе, ФММ, **40**, вып. 4, 893 (1975); Р. Д. Джамалов, В. В. Колесов, ЖЭТФ, **69**, вып. 4(10), 1203 (1975).
3. Р. Ф. Казаринов, В. Г. Скобов, ЖЭТФ, **42**, вып. 4, 1047 (1962).
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Уральский государственный университет

Поступила в редакцию  
6 марта 1978 г.

#### LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A SEMICONDUCTING PLASMA WITH A SMALL VALUES OF CARRIERS IN CROSSED FIELDS

V. V. Kolesov

An expression has been obtained for the dielectric permittivity of a system of electrons in crossed fields taking into account their heating and quantization of the orbital motion. Results are used to investigate the effect of heating and quantization on the spectrum and damping decrement of potential waves propagating along the magnetic field.

## ХРОНИКА

### ВСЕСОЮЗНЫЙ СЕМИНАР «ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА»

Первый Всесоюзный семинар «Высокочастотная релятивистская электроника» был организован на основании решения научных советов АН СССР по проблемам «Физическая электроника» и «Физика плазмы» Институтом прикладной физики АН СССР, Физическим институтом им. П. Н. Лебедева АН СССР и Институтом сильноточной электроники СО АН СССР и проведен с 26 по 28 сентября 1978 г. в Горьком.

В работе семинара приняли участие около 200 представителей 36 научных организаций. Было заслушано и обсуждено 43 доклада и сообщения. Во вступительном слове председатель оргкомитета семинара академик А. В. Гапонов-Грехов (ИПФ АН СССР) определил перспективы развития и отметил ряд важных физических и технических проблем, стоящих перед высокочастотной релятивистской электроникой:

- теоретическое исследование физических механизмов индуцированного когерентного излучения релятивистских электронных пучков;
- разработка высокоэффективных приборов — особенно привлекательны приборы, КПД которых (предсказываемый теорией) может быть близок к 100%;
- совершенствование систем формирования сильноточных пучков;
- увеличение длительности токового импульса;
- разработка приборов, работающих в режиме периодического следования импульсов;
- увеличение рабочих (оптимальных) токов приборов путем создания пространственно-развитых систем — в настоящее время предельный ток ускорителей во много раз превосходит ток, необходимый для СВЧ приборов, работающих на низших модах;
- повышение частоты излучения — особый интерес в этом отношении представляют системы, основанные на вынужденном рассеянии волн электронными пучками.

О современном состоянии исследования этих проблем и шла речь на семинаре.

### ФОРМИРОВАНИЕ И ТРАНСПОРТИРОВКА СИЛЬНОТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Поскольку уровень развития электронно-оптических систем, как известно, во многом определяет возможности высокочастотной электроники, на семинаре большое внимание было удалено вопросам получения и транспортировки релятивистских электронных пучков с оптимальными параметрами.

Взрывной электронной эмиссии в диодах сильноточных ускорителей электронов был посвящен обзорный доклад Г. А. Месяца (ИСЭ СО АН СССР). Докладчик проанализировал закономерности образования центров взрывной эмиссии в процессе протекания тока с катода, привел результаты экспериментального исследования динамики пучковой плазмы и показал, что присутствие в плазме нейтралов и продуктов крекинг-

та углеводородов может определять скорость движения плазмы попереck магнитного поля.

Уровень разработки сильноточных электронных ускорителей был охарактеризован в докладе Ю. П. Усова (НИИЯФ при Томском политехническом институте). Докладчик привел результаты исследования электронных пушек наносекундного и микросекундного диапазонов, описал методы управления параметрами релятивистских пучков. Ряд сообщений об ускорителях, формирующих электронные пучки различной длительности (от 100  $\mu$ s до 100  $\mu$ ks), был сделан на семинаре сотрудниками НИИЭФА им. Д. В. Ефремова.

Наибольшее внимание на семинаре уделялось диодам с магнитной изоляцией, поскольку такие электронно-оптические системы обеспечивают высокое качество электронного пучка, а также перспективны в отношении увеличения длительности импульса и укорочения длины волны. Теория коаксиальных пушек с магнитной изоляцией была изложена в совместном докладе сотрудников ВЦ СО АН СССР и ИПФ АН СССР (М. А. Горшкова, В. П. Ильин, В. Е. Нечаев и др.). Результаты экспериментального исследования таких пушек описывались в сообщениях сотрудников ИСЭ СО АН СССР (С. П. Бугаев, А. А. Ким, В. И. Кошелев) и ИПФ АН СССР (Н. И. Зайцев, Г. С. Кораблев, Б. П. Шемякин). Ряд сообщений о теоретическом исследовании вопросов устойчивости релятивистских электронных пучков был сделан сотрудниками НИИЯФ при ТПИ, МИЭМа, ИПФ АН СССР.

## МЕХАНИЗМЫ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

Современный уровень теоретических и экспериментальных исследований в области разработки эффективных высокочастотных релятивистских электронных приборов был проанализирован в обзорном докладе М. И. Петелина (ИПФ АН СССР). В настоящее время уже проведены теоретические исследования простейших разновидностей электронных СВЧ генераторов и усилителей, основанных на всех известных механизмах индуцированного излучения релятивистских электронных потоков, и показано, что все приборы сохраняют, в принципе, высокий КПД при сколь угодно больших энергиях электронов. Однако с ростом напряжения изменяются (и, в ряде случаев, радикально) законы подобия, в соответствии с которыми следует подбирать оптимальные параметры приборов. Наибольший интерес представляют приборы, основанные на распределенном взаимодействии электронов с высокочастотным полем. Увеличение напряжения электронных пучков расширяет возможности применения поверхностно- и пространственно-развитых электродинамических систем, пригодных для освоения больших токов в одномодовом режиме. Доклад завершался обзором экспериментальных результатов.

В докладах, сделанных на семинаре, обсуждались теоретические и экспериментальные исследования приборов, основанных практически на всех механизмах индуцированного излучения электронных пучков.

## ПРИБОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНДУЦИРОВАННОМ ЧЕРЕНКОВСКОМ И ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Асимптотическая теория, позволяющая использовать результаты расчетов слаборелятивистских приборов типа «О» при произвольных энергиях электронов, была предложена Н. Ф. Ковалевым (ИПФ АН СССР). Д. И. Трубецковым и А. П. Четвериковым (НИИМФ при СГУ) были рассмотрены переходные процессы и конкуренция колебаний в релятивистском монотроне бегущей волны.

В докладе А. Н. Диденко (НИИЯФ при ТПИ) была описана разработка наряду с другими релятивистскими СВЧ приборами (карсион-трон, МЦР) высокоэффективного магнетрона с рекордным уровнем мощности  $\sim 2 \text{ ГВт}$  при КПД  $\sim 40\%$  на длине волны  $\sim 12 \text{ см}$ .

Под руководством Г. И. Будкера сотрудниками ИЯФ СО АН СССР создан высокоэффективный генератор, основанный на переходном излучении потока релятивистских электронов — гирокон. На семинаре была заслушана серия сообщений сотрудниками ИЯФ СО АН СССР (И. А. Шехтман и др.) о разработке мощных высокоэффективных (КПД выше 70%) гироконов длинноволновой части СВЧ диапазона, предназначенных для ускорения пучков электронов и позитронов в непрерывном ( $P = 0.5 \text{ МВт}$ ,  $\lambda = 1.65 \text{ м}$ ) и импульсном ( $P = 40 \text{ МВт}$ ,  $\lambda = 0.7 \text{ м}$ ) режимах работы.

Большой интерес вызвало совместное сообщение сотрудников ФИ АН СССР, ИСЭ СО АН СССР и ИПФ АН СССР (В. И. Белоусов, Б. В. Бункин, А. В. Гапонов-Греков и др.) о разработке первого релятивистского СВЧ прибора, работающего в режиме периодического следования импульсов\*. Карсионтрон с длиной волны 3 см имел выходную мощность  $\sim 100 \text{ МВт}$  при КПД  $\sim 10\%$  и частоте следования импульсов 50 Гц.

### ПРИБОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНДУЦИРОВАННОМ МАГНИТОПРОМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Теория релятивистских МЦР была изложена в докладе В. Л. Братмана, Н. С. Гинзбурга, Г. С. Нусиновича, М. И. Петелина (ИПФ АН СССР). Показано, что наряду с гиротронами высокой эффективностью могут обладать различные разновидности МЦР, работающие в режимах, близких к авторезонансу: МЦР с попутной и встречной волнами, МЦР на аномальном эффекте Доплера, МЦР с первоначально прямолинейным электронным пучком и др.

В сообщении А. А. Кураева (МРТИ) были изложены результаты численной оптимизации параметров релятивистских МЦР-усилителей с прямолинейным электронным потоком. В сообщении А. Ф. Курина (ВГУ) исследовалось влияние несинхронных волн на работу МЦР. В. И. Канавец (МГУ) сообщил о результатах расчетов релятивистского МЦР с квазиоптическим диафрагменным волноводом. В сообщении С. П. Кузнецова, Д. И. Трубецкова и А. П. Четверикова (НИИМФ при СГУ) рассматривались особенности работы МЦР на аномальном эффекте Доплера в режиме малых КПД.

Результаты эксперимента, в ходе которого был разработан первый эффективный релятивистский гиротрон (КПД около 20%, длина волны 3 см), были сообщены на семинаре сотрудниками ФИ АН СССР и ИПФ АН СССР (П. С. Стрелков и др.). Было доказано экспериментально, что введение плазмы в пространство взаимодействия с целью компенсации пространственного заряда электронного пучка позволяет в несколько раз повысить ток пучка и выходную мощность СВЧ излучения.

### ПРИБОРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ

Приборам, основанным на рассеянии волн (скаттроны, или комптоновские лазеры), а также на родственном процессе — индуцирован-

\* Первый высокоэффективный релятивистский генератор когерентного электромагнитного излучения — карсионтрон с КПД около 15% — был разработан в СССР (ФИ, ИПФ АН СССР, совместный эксперимент, 1973 г.). Впоследствии аналогичный прибор был разработан в США (Корнельский университет, 1975 г.).

ном тормозном излучении электронов в периодических статических полях (убитроны), было посвящено более четверти общего числа докладов, представленных на семинар. Это обстоятельство отражает чрезвычайно, возросший в последние годы интерес к этим приборам. В скатронах и убитронах, в соответствии с эффектом Доплера, частота волны, излучаемой в направлении поступательного движения осциллирующих электронов, во много раз превышает частоту колебаний электрона\*.

Нелинейная теория релятивистского скатрона и убитрона, базирующаяся на релятивистском обобщении метода усредненного описания движения электрона в поле двух разночастотных электромагнитных волн, была изложена в докладе В. Л. Братмана, Н. С. Гинзбурга, М. И. Петелина, А. В. Сморгонского (ИПФ АН СССР). Показано, что уравнения скатрона и убитрона в важном случае большого преобразования частоты сводятся к известным уравнениям обычной ЛБВ. Вероятный частотный диапазон скатронов и убитронов простирается до ультрафиолетовых (и более коротких) волн.

Доклад члена-корреспондента АН СССР Л. А. Вайнштейна (ИФП) АН СССР был посвящен исследованию аналогии между процессами группировки электронов в комптоновском лазере и приборах типа «О».

В сообщении С. А. Соколова и В. А. Черепенина (МГУ) рассматривалось влияние однородного магнитного поля на эффективность скатронов. Теория скатронов и убитронов типа «М», работающих в режимах, аналогичных режимам работы МЦР на аномальном эффекте Доплера, была изложена в сообщении Н. С. Гинзбурга (ИПФ АН СССР). В сообщении П. Г. Жукова, И. П. Золоторева, А. А. Рухадзе (ФИ АН СССР) продемонстрирована в рамках линейной теории связь между индуцированным рассеянием волн на релятивистском электронном пучке и на неподвижной плазме. Особенности работы скатронов с замедляющими системами, а также каскадные схемы скатронов рассматривались в сообщении Н. Я. Коцаренко и В. В. Кулиша (КГУ).

Результаты экспериментального исследования индуцированного рассеяния волн были изложены в сообщении В. С. Иванова, М. С. Рабиновича, М. Д. Райзера, А. А. Рухадзе (ФИ АН СССР). При рассеянии излучения с длиной волны 3 см и мощностью до 300 МВт на электронном пучке с напряжением  $\sim 700$  кВ и током  $\sim 4$  кА получено излучение диапазона миллиметровых волн.

На семинаре был заслушан ряд обзорных докладов по смежным с высокочастотной релятивистской электроникой проблемам: доклад В. А. Афанасьева и Д. М. Петрова «Проблемы традиционной СВЧ электроники большой мощности», доклад В. П. Саранцева (ОИЯИ) «Современное состояние коллективных методов ускорения», доклад Л. И. Рудакова (ИАЭ им. И. В. Курчатова) «Проблемы получения УТС с помощью релятивистских электронных пучков» и доклад В. А. Флягина (ИПФ АН СССР) «Гиротрон — мощный генератор диапазона миллиметровых и субмиллиметровых волн».

Следующий семинар «Высокочастотная релятивистская электроника» состоится в 1980 г. в г. Томске.

Во время работы семинара состоялось также первое заседание организованной в 1978 г. секции «Высокочастотная релятивистская электроника» Научного совета АН СССР по проблеме «Физическая электроника». Секция и семинар сочли целесообразным издание сборника «Релятивистская высокочастотная электроника». Такой сборник издан ИПФ АН СССР в 1979 г. Его содержание составляют следующие работы:

\* В убитроне, созданном на базе Стенфордского линейного ускорителя (США, 1976), длина волны излучения инфракрасного диапазона была в  $10^4$  раз меньше периода магнитного поля.

1) Формирование сильноточных релятивистских электронных пучков для мощных генераторов и усилителей СВЧ, Бугаев С. П., Ильин В. П., Кошелев В. И., Месяц Г. А., Нечаев В. Е., Усов Ю. П., Фукс М. И., Яблоков Б. Н.;

2) Приборы типа «О», основанные на индуцированном черенковском и переходном излучениях релятивистских электронов, Ковалев Н. Ф., Петелин М. И., Райзер М. Д., Сморгонский А. В.;

3) Релятивистский магнетрон, Нечаев В. Е., Сулакшин А. С., Фукс М. И., Штейн Ю. Г.;

4) Гирокон, Горникер Э. И., Карлингер М. М., Козырев Е. В., Макаров И. Г., Морозов С. Н., Нежевенко О. А., Острейко Г. Н., Петров В. М., Сердобинцев Г. В., Шехтман И. А.;

5) Циклотронные и синхротронные мазеры, Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С., Петелин М. И., Стрелков П. С., Юлпатов В. К.;

6) Убитроны и скаттроны, Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И., Сморгонский А. В.;

7) Общие свойства коротковолновых приборов с длительной инерционной группировкой электронов, Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Ковалев Н. Ф., Нусинович Г. С., Петелин М. И.;

8) Высокочастотные измерения в релятивистской электронике, Офицеров М. М., Райзер М. Д., Цопп Л. Э..

В. Л. Братман  
Г. С. Нусинович

Заказы на сборник можно направлять по адресу: 603600, Горький, ул. Ульянова, 46, Институт прикладной физики АН СССР, Городецкой Н. А.