

СОДЕРЖАНИЕ

Карплюк К. С. Резонансы Тонкса — Датнера и входная проводимость полусферического монополя, окруженного плазменным слоем	909
Сурин А. М. Излучение продольных волн в движущейся столкновительной плазме и в движущейся плазме с собственной пространственной дисперсией	917
Некрасов А. К. К нелинейной теории неустойчивых плоских волн и солитонов в плазме	926
Кузнецова М. Г., Рассадовский В. А., Троицкий А. В. Дистанционное измерение метеопараметров облачной атмосферы радиометрическим методом	938
Гинзбург Н. С., Миловский Н. Д., Ястребова Т. В. К вопросу о самофокусировке электромагнитного поля в активной среде	946
Горонина К. А., Кукин Л. М., Лубяко Л. В. Флуктуации частоты ЛОВ диапазона коротких миллиметровых волн	953
Богачев В. М., Лысенко В. Г. Естественные и избыточные флуктуации в высокочастотных транзисторных автогенераторах	958
Пономаренко В. П., Кивелева К. Г. Исследование влияния подобной помехи на динамику системы синхронизации псевдослучайного сигнала	969
Заворотный В. У. Четырехточечная функция когерентности поля в турбулентной среде в области сильных флуктуаций интенсивности волны	979
Вебер В. Л. О статистических характеристиках изображений, полученных при наблюдении через неровную поверхность раздела сред с различным показателем преломления	989
Борисов А. Ю., Бубнов Г. Г., Шапиро Р. В. Исследование дисперсии анизотропных искусственных диэлектриков	1002
Ергаков В. С., Моисеев М. А., Эрм Р. Э. Двухрезонаторный МЦР-генератор с внешней обратной связью	1011
Чистяков П. Н., Дубинин Н. П. Пробой вакуума при электрическом поле в диапазоне $(5 \div 7) \cdot 10^6$ В/см	1020

Краткие сообщения и письма в редакцию

Давыдовский В. Я. Нелинейное дисперсионное уравнение для поперечных волн в релятивистской плазме	1026
Никольский В. В., Пугачева Т. В. Алгоритм численного анализа полоскового резонатора	1028

УДК 533.9

РЕЗОНАНСЫ ТОНКСА—ДАТНЕРА И ВХОДНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО МОНОПОЛЯ, ОКРУЖЕННОГО ПЛАЗМЕННЫМ СЛОЕМ

K. C. Карплюк

Рассмотрено поведение полусферической антенны, запитываемой коаксиальной линией и окруженной плазменным слоем. Показано, что вблизи собственных частот плазменного слоя входная проводимость антенны и излучаемая ею мощность испытывает резкие изменения.

1. Хорошо известно, что в ограниченной плазме возможны высокочастотные поверхностные колебания. При рассеянии электромагнитных волн на ограниченных плазменных объектах наличие этих колебаний вызывает появление ряда максимумов в сечении рассеяния, называемых резонансами Тонкса — Датнера [1—5]. Для плазменного цилиндра частота, соответствующая главному (дипольному) резонансу Тонкса — Датнера, расположена вблизи $\Omega/\sqrt{2}$, для сферы — вблизи $\Omega/\sqrt{3}$ (Ω — ленгмюровская частота электронов плазмы). Можно показать (см. Приложение), что для плазменного слоя, окружающего металлическую сферу, эта частота расположена вблизи

$$\Omega / \sqrt{1 + 2 \left[1 - \left(\frac{a}{d} \right)^3 \right] / \left[1 + 2 \left(\frac{a}{d} \right)^3 \right]}, \quad (1)$$

где a — радиус сферы, d — внешний радиус слоя.

Существование высокочастотных собственных колебаний в ограниченной плазме, в частности, в плазменных слоях может привести также к появлению резонансных эффектов в характеристиках антенн, покрытых такими слоями. В настоящей работе мы исследуем поведение полусферического монополя, запитываемого коаксиальной линией и покрытого плазменным слоем, и покажем, что наличие этого слоя вызывает аномалии в поведении входного сопротивления такой антенны.

2. Итак, рассмотрим задачу об излучении полусферического монополя, запитываемого коаксиальной линией и покрытого плазменным слоем (рис. 1). Слой будем считать достаточно толстым, так что $d \geq b$. Область внутри коаксиальной линии ($z < 0$) заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , область вне слоя — диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , слой образован холодной плазмой с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (2)$$

где ν — частота соударений электронов плазмы. Ниже мы ограничимся рассмотрением высокочастотных колебаний, поэтому вкладом ионов в диэлектрическую проницаемость плазмы пренебрегаем. Также не бу-

дем учитывать пространственную дисперсию, поскольку опыт [6-7] показывает, что антенны рассматриваемого типа плохо возбуждают и воспринимают продольные (ленгмюровские) волны.

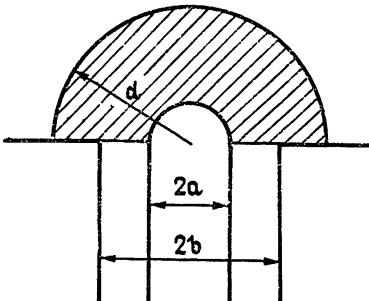
Найдем для рассматриваемой антенны входную проводимость Y относительно ТЕМ-волны, распространяющейся по коаксиальной линии и возбуждающей антенну. Эта проводимость определяется соотношением

$$Y = \frac{I_{\text{TEM}}(0)}{V_{\text{TEM}}(0)} = \frac{\int_0^{2\pi} H_{\varphi \text{ TEM}}(r, 0) r d\varphi}{\int_a^b E_r \text{ TEM}(r, 0) dr} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} Y_0. \quad (3)$$

Здесь Y_0 — проводимость бесконечной коаксиальной линии, I_{TEM} , V_{TEM} , $H_{\varphi \text{ TEM}}$ и $E_r \text{ TEM}$ — соответствующие ТЕМ-волны ток, напряжение, магнитное и электрическое поля на открытом конце коаксиальной линии, α и β — комплексные амплитуды падающей и отраженной ТЕМ-волн.

Таким образом, чтобы вычислить входную проводимость, нужно найти поля H_{φ} и E_r на открытом конце коаксиальной линии. Прежде всего, выразим азимутальную составляющую магнитного поля $H_{\varphi}^{(+)}(r, \theta)$ в плазме через $E_r(r)$ — радиальную составляющую электрического поля на апертуре антенны. Для этого используем уравнения Максвелла и граничные условия (непрерывность касательных составляющих электрического и магнитного полей при переходе через поверхность плазменного слоя и обращение в нуль касательной составляющей электрических полей на металлических поверхностях антенны). Поступая аналогично [8], найдем



$$H_{\varphi}^{(+)}(r, \theta) = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_1 k_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)} P_{2n+1}^{(1)}(0) P_{2n+1}^{(1)}(\cos \theta) \times$$

$$\times \frac{j_{2n+1}(k_1 d)}{j_{2n+1}(k_1 d) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 d)} \frac{D_{2n+1}^0}{D_{2n+1} a} \int_a^b [j_{2n+1}(k_1 r_<) +$$

$$+ \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_<)] [B_{2n+1} j_{2n+1}(k_1 r_>) + h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_>)] E_r(r_0) r_0 dr_0. \quad (4)$$

Здесь j_{2n+1} и $h_{2n+1}^{(1)}$ — сферические функции Бесселя и сферические функции Ханкеля первого рода, $P_{2n+1}^{(1)}$ — присоединенные полиномы Лежандра, $r_>$ и $r_<$ обозначают соответственно большее и меньшее из чисел r и r_0 ,

$$k_j = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_j} \quad \operatorname{Re} k_j > 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\Gamma_{2n+1} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dr} [r j_{2n+1}(k_1 r)] \\ \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r)] \end{array} \right\}_{r=a},$$

$$B_{2n+1} = - \left\{ \begin{array}{l} h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r) \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r)] - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r) \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r)] \\ h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r) \frac{d}{dr} [r j_{2n+1}(k_1 r)] - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} j_{2n+1}(k_1 r) \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r)] \end{array} \right\}_{r=d},$$

$$D_{2n+1}^0 = \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{d}{dr} [r j_{2n+1}(k_1 r)] - \frac{1}{\epsilon_2} \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=d},$$

$$D_{2n+1} = \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{d}{dr} [r j_{2n+1}(k_1 r)] + \Gamma_{2n+1} \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r)] - \frac{1}{\epsilon_2} \frac{d}{dr} [r h_{2n+1}^{(1)}(k_2 r)] \right\}_{r=d}.$$

С другой стороны, азимутальную составляющую магнитного поля внутри коаксиальной линии также можно выразить через тангенциальную составляющую электрического поля на апертуре [9]:

$$H_{\varphi}^{(-)}(r, z) = \frac{\alpha}{r} e^{ikz} + \frac{\beta}{r} e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n(r) \exp(-ik_{zn} z). \quad (5)$$

Здесь

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon} \quad (\operatorname{Re} k > 0), \quad k_{zn} = \sqrt{k^2 - k_n^2} \quad (\operatorname{Re} k_{zn} > 0),$$

$$R_n(r) = \frac{\pi k_n}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{J_0^2(k_n a)}{f_0^2(k_n b)}} - 1 \right]^{-1} [J_1(k_n r) N_0(k_n a) - J_0(k_n a) N_1(k_n r)],$$

J_n и N_n — функции Бесселя и Неймана, k_n — корни трансцендентного уравнения

$$J_0(k_n a) N_0(k_n b) = J_0(k_n b) N_0(k_n a),$$

α и β — амплитуды падающей и отраженной ТЕМ-волны,

$$\alpha - \beta = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{k} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \int_a^b E_r(r_0) dr_0,$$

A_n — амплитуды отраженных E -волн, причем,

$$A_n = - \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{k_{zn}} \int_a^b E_r(r_0) R_n(r_0) r_0 dr_0.$$

Используя непрерывность H_{φ} на открытом конце коаксиальной линии, составим интегральное уравнение для $E_r(r_0)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha + \beta}{r} - \omega \epsilon_0 \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{k_{zn}} \int_a^b E_r(r_0) R_n(r_0) r_0 dr_0 = \\
 & = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon k_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)} [P_{2n+1}^{(1)}(0)]^2 \frac{j_{2n+1}(k_1 d)}{j_{2n+1}(k_1 d) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 d)} \times \\
 & \quad \times \frac{D_{2n+1}^0}{D_{2n+1}} \int_a^b [j_{2n+1}(k_1 r_<) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_<)] \times \\
 & \quad \times [B_{2n+1} j_{2n+1}(k_1 r_>) + h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_>)] E_r(r_0) r_0 dr_0. \tag{6}
 \end{aligned}$$

С помощью этого интегрального уравнения можно получить удобное вариационное выражение для относительной входной проводимости

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

Для этого умножим (6) на $r E_r(r)$, проинтегрируем по r от a до b и затем умножим на

$$\left[\int_a^b E_r(r) dr \right]^{-2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon}} \ln \frac{b}{a}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
 \frac{Y}{Y_0} &= \frac{\ln \frac{b}{a}}{\left(\int_a^b E_r(r) dr \right)^2} \left\{ k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{zn}} \left[\int_a^b E_r(r) R_n(r) r dr \right]^2 + \right. \\
 &+ \frac{k k_1}{2} \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)} [P_{2n+1}^{(1)}(0)]^2 \frac{j_{2n+1}(k_1 d)}{j_{2n+1}(k_1 d) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 d)} \times \\
 &\quad \times \frac{D_{2n+1}^0}{D_{2n+1}} \int_a^b r dr \int_a^b [j_{2n+1}(k_1 r_<) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_<)] \times \\
 &\quad \times [B_{2n+1} j_{2n+1}(k_1 r_>) + h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r_>)] E_r(r) E_r(r_0) r_0 dr_0 \left. \right\}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Известно [9], что относительная входная проводимость является стационарной величиной относительно малых отклонений $E_r(r)$ от истинного значения. Поэтому можно получить достаточно точные значения Y , используя приближенные значения $E_r(r)$. Сравнение с опытом [6, 7] показывает, что достаточно точное значение Y получается, если принять для $E_r(r)$ такое распределение на апертуре антенны, какое существует для ТЕМ-волны в бесконечной коаксиальной линии, т. е.

$$E_r = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r}.$$

Используя (7), получим следующее выражение для относительной входной проводимости:

$$\frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{Y}{Y_0} \right)_0 + \left(\frac{Y}{Y_0} \right)_1, \quad (8)$$

где

$$\cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)_0 = - \frac{kk_1}{2 \ln \frac{b}{a}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)} [P_{2n+1}^{(1)}(0)]^2 \times \\ \times \int_a^b dr \int_a^b h_{2n+1}^{(1)}(k_p r_>) j_{2n+1}(k_p r_<) dr_0; \quad (9)$$

$$\left(\frac{Y}{Y_0} \right)_1 = \frac{kk_1}{2 \ln \frac{b}{a}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)} [P_{2n+1}^{(1)}(0)]^2 \times \\ \times \frac{j_{2n+1}(k_1 d)}{j_{2n+1}(k_1 d) + \Gamma_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(k_1 d)} \frac{D_{2n+1}^0}{D_{2n+1}} \left\{ B_{2n+1} \left[\int_a^b j_{2n+1}(k_1 r) dr \right]^2 + \right. \\ \left. + \Gamma_{2n+1} \left[\int_a^b h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r) dr \right]^2 + 2B_{2n+1} \Gamma_{2n+1} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_a^b j_{2n+1}(k_1 r) dr \right] \left[\int_a^b h_{2n+1}^{(1)}(k_1 r) dr \right] \right\}. \quad (10)$$

Первое слагаемое в (8) описывает входную проводимость кольцевой апертурной антенны в безграничной плазме [10]. Второе слагаемое характеризует добавку, возникающую из-за того, что в рассматриваемой антенне внутренний проводник оканчивается не плоским срезом, а полусферическим закруглением и, кроме того, плазма не безгранична, а образует сферический слой.

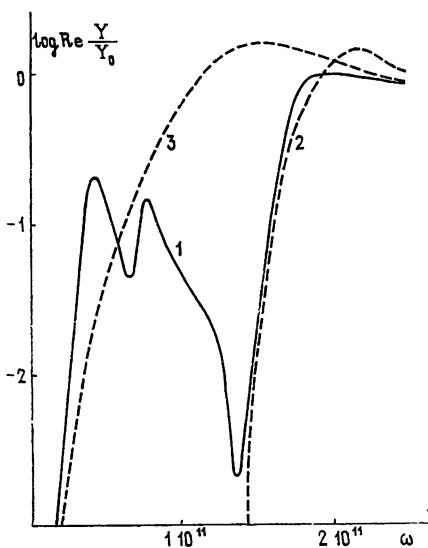


Рис. 2

Рис. 2 Активная часть входной проводимости полусферического монополя.

Рис. 3 Реактивная часть входной проводимости полусферического монополя.

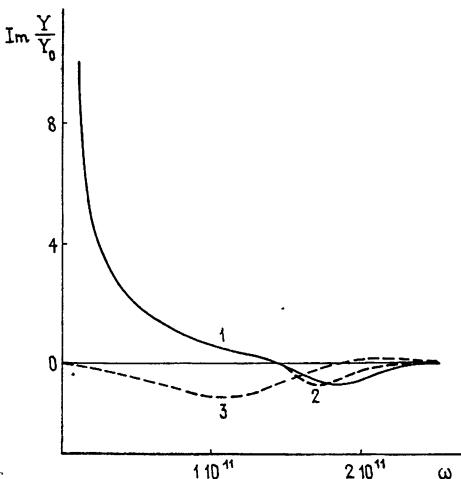


Рис. 3.

Уже общий вид выражения (10) говорит о том, что входная проводимость исследуемой антенны ведет себя резонансным образом вблизи частот, соответствующих частотам резонансов Тонкса — Датнера для плазменного слоя, окружающего металлическую сферу. Действительно, в знаменателях (10) содержатся выражения D_{2n+1} , и когда они близки к нулю, входная проводимость резко возрастает. Но уравнения

$$D_{2n+1} = 0$$

как раз и определяют частоты резонансов Тонкса — Датнера для плазменного слоя, окружающего металлическую сферу (см. Приложение). Численный расчет подтверждает эти соображения. На рис. 2, 3 кривыми 1 представлены активная и реактивная части входной проводимости полусферического монополя, окруженного плазменным слоем с параметрами $\Omega = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ рад/с}$, $\nu = 0$, $d/a = 3$. На этих же рисунках для сравнения приведены активная и реактивная части входной проводимости для полусферического монополя в безграничной плазме с такими же параметрами (кривые 2) и в вакууме (кривые 3). Все кривые рассчитаны для $\epsilon = \epsilon_2 = 1$, $b/a = 2,3$, $a = 2,17 \text{ мм}$. Видно, что вблизи $\omega = 0,4 \cdot 10^{11} \text{ рад/с}$ и $\omega = 0,78 \cdot 10^{11} \text{ рад/с}$ активная часть входной проводимости резко возрастает. Отметим, что приближенная (квазистатическая) формула (1) для частоты главного резонанса Тонкса — Датнера дает $\omega = 0,84 \cdot 10^{11} \text{ рад/с}$. Однако это значение в рассмотренном случае может служить лишь для грубой оценки, так как условие применимости (1) (квазистатичность) не выполнено (при $\omega = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ рад/с}$

$k_2 d = 1,7$). На рис. 4 приведены кривые для энергетического коэффициента излучения

$$A = 1 - \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}.$$

Видно, что при тех же частотах излучаемая антенной мощность также заметно изменяется.

Известно (см., например, [11—15]), что резонансное поведение входной проводимости антенн, погруженных в однородную плазму, позволяет использовать такие антенны для диагностики однородной плазмы. Аналогич-

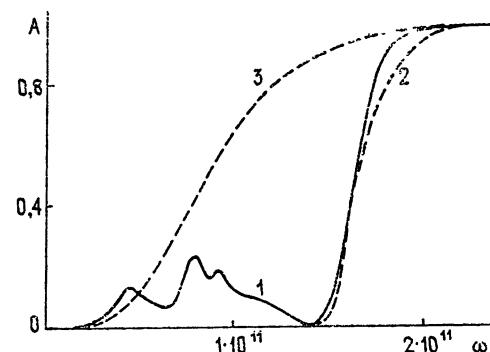


Рис. 4. Коэффициент излучения полусферического монополя.

ным образом можно было бы использовать и исследованное выше резонансное поведение входной проводимости антennы в слоистой плазме для диагностики слоистой плазмы.

Автор благодарен Т. А. Грязновой, выполнившей численный расчет кривых, представленных на рис. 2—4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим собственные аксиально-симметричные колебания плазменного слоя с внешним радиусом d , окружающего идеально проводящую сферу радиуса a . Нас будут интересовать колебания E -типа. В рассматриваемом случае из уравнений Максвелла получим следующие выражения для электрического и магнитного полей внутри слоя плазмы с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 :

$$E_\theta = \frac{A_n}{r} \frac{d}{dr} \{ r [j_n(k_1 r) + \Gamma_n h_n^{(1)}(k_1 r)] \} \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta},$$

$$H_\varphi = i \omega \epsilon_0 \epsilon_1 A_n [j_n(k_1 r) + \Gamma_n h_n^{(1)}(k_1 r)] \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta},$$

$$E_\varphi = E_r = H_\theta = H_r = 0.$$

Вне слоя (в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ_2) выражения для полей будут иметь следующий вид:

$$E_\theta = \frac{B_n}{r} \frac{d}{dr} [r h_n^{(1)}(k_2 r)] \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta},$$

$$H_\varphi = i \omega \epsilon_0 \epsilon_2 B_n h_n^{(1)}(k_2 r) \frac{d P_n(\cos \theta)}{d \theta}.$$

Здесь A_n , B_n и Γ_n —постоянные, P_n —полиномы Лежандра, $n=1, 2, 3, \dots$

Подчиним решение граничным условиям. Из требования равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности идеально проводящей сферы получаем

$$\Gamma_n = - \left\{ \frac{\frac{d}{dr} [r j_n(k_1 r)]}{\frac{d}{dr} [r h_n^{(1)}(k_1 r)]} \right\}_{r=a}.$$

Из условия непрерывности E_θ и H_φ на границе раздела плазма—диэлектрик находим дисперсионное уравнение для рассматриваемых колебаний

$$\left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\frac{d}{dr} [r j_n(k_1 r)] + \Gamma_n \frac{d}{dr} [r h_n^{(1)}(k_1 r)]}{j_n(k_1 r) + \Gamma_n h_n^{(1)}(k_1 r)} - \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\frac{d}{dr} [r h_n^{(1)}(k_2 r)]}{h_n^{(1)}(k_2 r)} \right\}_{r=a} = 0.$$

В квазистатическом случае ($k_{1,2} d \rightarrow 0$) это уравнение упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^{2n+1}}{1 + \frac{n+1}{n} \left(\frac{a}{d}\right)^{2n+1}} = - \frac{n}{n+1} \frac{1}{\epsilon_2}.$$

Отсюда легко получить выражение (1) для частоты дипольного ($n=1$) резонанса Тонкса—Датнера.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Tonks, Phys. Rev., 37, 1458 (1931).
2. L. Tonks, Phys. Rev., 38, 1219 (1931).
3. D. Romell, Nature, Lond., 167, 243 (1951).
4. A. Dattner, Ericsson Technics., 13, 309 (1957).
5. A. Dattner, Phys. Rev. Lett., 10, 205 (1963).
6. Т. А. Грязнова, Н. Н. Иванчиков, К. С. Карплюк, Е. Г. Филоненко, И. П. Шашурин, ЖТФ, 46, 1081 (1976).

7. Т. А. Грязнова, К. С. Карплюк, Е. Г. Филоненко, И. П. Шашурин, Труды XIII Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Берлин, 1977, стр. 211.
8. К. С. Карплюк, Изв. вузов — Радиофизика, 20, 669 (1977).
9. H. Levin and C. H. Papas, J. Appl. Phys., 22, 29 (1951).
10. К. С. Карплюк, В. П. Павленко, Радиотехника и электроника, 22, 15 (1977).
11. С. М. Левитский, И. П. Шашурин, Изв. АН СССР, серия физическая, 23, 948 (1959).
12. R. W. P. King, C. W. Harrison and D. H. Denton, J. Research NBS, 65D, 371 (1961).
13. J. A. Waletzko and G. Bekesi, Radio Sci., 2, 489 (1967).
14. L. D. Scott and B. R. Rao, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-17, 777 (1969).
15. R. W. King and L. D. Scott, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-19, 406 (1971).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
14 августа 1978 г.

TONKS — DATHNER RESONANCES AND INPUT CONDUCTIVITY OF A SEMISPHERIC MONOPOLE SURROUNDED BY A PLASMA LAYER

K. S. Karpluk

Behaviour of a semispheric antenna is considered which is supplied by the coaxial line and surrounded by a plasma layer. It is shown that close to eigenfrequencies of the plasma layer the input conductivity of the antenna and its radiated power are sharply modified.

УДК 533.951

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ И В ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ С СОБСТВЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

A. M. Сурин

Вычисляется функция Грина уравнения Пуассона для излучения продольных волн осциллирующим электрическим диполем в движущейся плазме с учетом соударений электронов, а также в движущейся плазме, обладающей собственной пространственной дисперсией в сопровождающей системе отсчета. Плазма считается негиротропной, однородной и безграничной. Рассматриваются различные предельные и частные случаи для движущейся столкновительной плазмы.

В [1] рассмотрены некоторые аспекты теории тонкой цилиндрической антенны, помещенной в движущуюся плазму; при этом среда считалась изотропной, негиротропной и однородной, тепловым движением заряженных частиц и их столкновениями пренебрегалось. Кроме того, параметры антенны были вычислены, исходя из уравнения, при выводе которого использовалась квазистатическая функция Грина для осциллирующего точечного заряда. В данной статье приводятся некоторые результаты для излучения продольных волн элементарным электрическим диполем в движущейся с нерелятивистской скоростью плазме с учетом соударений электронов, а также в движущейся плазме, обладающей собственной пространственной дисперсией в сопровождающей плазму системе отсчета.

Исследуемые вопросы затрагиваются в ряде работ (см., например, [2–4], а также обзор [5]). В частности, в [3] и [4] рассматривается излучение волн осциллирующим электрическим диполем в движущейся «теплой» плазме, когда в сопровождающей плазму системе отсчета становятся существенными эффекты, обусловленные пространственной дисперсией среды. Однако в указанных работах вычисляется поле диполя лишь в дальней зоне. Заметим при этом, что высказанное в [3] и [4] сомнение в использованном в [1] «формальном подходе» (осциллирующий заряд) является необоснованным. Действительно, исходя из результатов настоящей работы, можно показать, что параметры реальных источников в плазме оказываются теми же, что и при использовании функции Грина для точечного заряда (если при этом отвлечься от способа реализации такого элементарного излучателя).

В случае электрического диполя, произвольно ориентированного в пространстве, с плотностью тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}, t) = j_0 \delta(\mathbf{R}) e^{-i\omega t}, \quad j_0 = -i\omega \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (1)$$

где ω — частота излучения, \mathbf{p}_0 — дипольный момент, $\delta(\mathbf{R})$ — дельта-функция Дирака, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}' — радиус-вектор диполя, решение уравнения Пуассона (функцию Грина для диполя) в изотропной неограниченной нерелятивистской плазме можно представить в следующем виде (см. [1]):

$$G(\mathbf{R}) = (p_0 \nabla_{\mathbf{r}}) \Phi(\mathbf{R}); \quad (2)$$

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k_\perp J_0(k_\perp R_\perp) I(k_\perp, R_z) dk_\perp; \quad (3)$$

$$I(k_\perp, R_z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ik_z R_z) dk_z}{k^2 \epsilon(\omega, \mathbf{k})}; \quad (4)$$

$$R = (R_\perp^2 + R_z^2)^{1/2}, \quad R_\perp = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2}, \quad (5)$$

$$R_x = x - x', \quad R_y = y - y', \quad R_z = z - z'.$$

Здесь ось Oz прямоугольной системы координат (x, y, z) выбрана вдоль вектора скорости потока, $(k_\perp, 0, k_z)$ — цилиндрические координаты в пространстве \mathbf{k} , $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого индекса, $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ — диэлектрическая проницаемость движущейся изотропной плазмы, а значок r у оператора ∇ означает, что дифференцирование функции $\Phi(\mathbf{R})$ в (2) производится по координатам точки наблюдения.

Далее получим выражение для функции Грина (2) в случае движущейся столкновительной плазмы и движущейся плазмы с собственной пространственной дисперсией.

1. ДВИЖУЩАЯСЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ПЛАЗМА

Можно показать, что продольная диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы, перемещающейся в пространстве со скоростью \mathbf{u} , в гидродинамическом приближении дается формулой

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} + i\nu)}, \quad (6)$$

где ω_0 — плазменная частота, ν — эффективная частота соударений электронов. Подставляя (6) в интеграл (4), а затем в (3), функцию $\Phi(\mathbf{R})$ запишем таким образом:

$$\Phi(\mathbf{R}) = \Phi_e(\mathbf{R}) + \Phi_i(\mathbf{R}) 1(R_z); \quad (7)$$

$$\Phi_i(\mathbf{R}) = \frac{2ik_0}{k_{0c}} [K_0(k_{1c} R_\perp) \exp(ik_{1c} R_z) - K_0(k_{2c} R_\perp) \exp(ik_{2c} R_z)]; \quad (8)$$

$$\Phi_e(\mathbf{R}) = \frac{1}{R} - \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{e+}(\mathbf{R}), & R_z > 0 \\ \Phi_{e-}(\mathbf{R}), & R_z < 0 \end{array} \right.; \quad (9)$$

$$\Phi_{e+}(\mathbf{R}) = \frac{ik_0^2}{k_{0c}} [S_{1c}(\mathbf{R}) - S_{2c}(\mathbf{R})], \quad (10)$$

$$\Phi_{e-}(\mathbf{R}) = - \frac{ik_0^2}{k_{0c}} [\tilde{S}_{1c}(\mathbf{R}) - \tilde{S}_{2c}(\mathbf{R})];$$

$$S_{fc}(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp R_\perp) \exp(-k_\perp R_z)}{k_\perp + ik_{fc}} dk_\perp, \quad (11)$$

$$\tilde{S}_{jc}(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp R_\perp) \exp(k_\perp R_z)}{k_\perp - ik_{jc}} dk_\perp$$

$$(j = 1, 2).$$

Здесь $1(x)$ — единичная функция, $J_0(x)$ — функция Макдональда нулевого индекса, и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_{1c} &= \frac{1}{2} (2k + k_{0c} + ik_c), & k_{2c} &= \frac{1}{2} (2k - k_{0c} + ik_c), \\ k_{0c}^2 &= 4k_0^2 - k_c^2, & k &= \omega/u, & k_0 &= \omega_0/u, & k_c &= v/u, & k_1 &= k + k_0, & k_2 &= k - k_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из формул (7) — (12) видно, что характер поля диполя в движущейся столкновительной плазме остается прежним [1]. Отличие состоит лишь в том, что изменяется характерный масштаб неоднородностей квазистатического поля (соответствующий параметр $\lambda_j \sim \frac{1}{2} |2k \pm \pm \sqrt{4k_0^2 - k_c^2}|^{-1}$), а плазменные колебания оказываются, как и следовало ожидать, затухающими вдоль оси $0z$ с декрементом $\delta = v/2u$.

Функции $S_{jc}(\mathbf{R})$ и $\tilde{S}_{jc}(\mathbf{R})$ в (11) в виде конечной суперпозиции элементарных или специальных функций не выражаются. Однако их можно представить более наглядным образом, а именно:

$$\begin{aligned} S_{jc}(\mathbf{R}) &= -\frac{i}{k_{jc} R} + i T_{jc}(\mathbf{R}) \exp(ik_{jc} R_z), \\ \tilde{S}_{jc}(\mathbf{R}) &= \frac{i}{k_{jc} R} - i \tilde{T}_{jc}(\mathbf{R}) \exp(ik_{jc} R_z), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_{jc}(\mathbf{R}) &= \int_{k_{jc} R_z}^\infty \frac{te^{-it} dt}{[t^2 + (k_{jc} R_\perp)^2]^{3/2}}, \\ \tilde{T}_{jc}(\mathbf{R}) &= \int_{-k_{jc} R_z}^\infty \frac{te^{it} dt}{[t^2 + (k_{jc} R_\perp)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

При подстановке этих выражений в (10) и далее в (9) с учетом тождества

$$1 + \frac{k_0^2}{k_{0c}} \left(\frac{1}{k_{2c}} - \frac{1}{k_{1c}} \right) = \frac{1}{\epsilon_{0c}(\omega)}, \quad (15)$$

где $\epsilon_{0c}(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega(\omega + iv)$ — диэлектрическая проницаемость неподвижной столкновительной плазмы, получаем второе представление квазистатического поля:

$$\Phi_e(\mathbf{R}) = \frac{1}{\epsilon_{0c}(\omega) R} + \begin{cases} \Phi'_e(\mathbf{R}), & R_z > 0 \\ \tilde{\Phi}'_e(\mathbf{R}), & R_z < 0 \end{cases}; \quad (16)$$

$$\Phi'_e(\mathbf{R}) = \frac{k_0^2}{k_{0c}} [T_{1c}(\mathbf{R}) \exp(ik_{1c} R_z) - T_{2c}(\mathbf{R}) \exp(ik_{2c} R_z)]; \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}'_e(\mathbf{R}) = \frac{k_0^2}{k_{0c}} [\tilde{T}_{1c}(\mathbf{R}) \exp(ik_{1c} R_z) - \tilde{T}_{2c}(\mathbf{R}) \exp(ik_{2c} R_z)]. \quad (18)$$

Представление квазистатического поля в виде (9) оказывается более удобным при исследовании «коротких», а в виде (16) — при исследовании «длинных» излучателей в плазме (см. [1]).

В заключение этого раздела приведем выражения для функции Грина в различных предельных и частных случаях.

1. $\nu \rightarrow 0$ (движущаяся бесстолкновительная плазма). При $\nu = 0$ соответствующие параметры (12) равны

$$k_c = 0, \quad k_{0c} = 2k_0, \quad k_{1c} = k_1, \quad k_{2c} = k_2, \quad (19)$$

и мы приходим ко всем результатам работы [1]. Таким образом, для перехода к случаю движущейся плазмы без столкновений заряженных частиц достаточно во всех полученных здесь и ниже формулах формально опустить индекс «с».

2. $u \rightarrow 0$ (неподвижная плазма). Для исследования этого случая проще всего исходить из формул (8) — (11). Функции S_{jc} и \tilde{S}_{jc} (11) при $u \rightarrow 0$ оказываются равными соответственно

$$S_{jc}(\mathbf{R}) = \frac{1}{ik_{jc} R}, \quad \tilde{S}_{jc}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{ik_{jc} R}. \quad (20)$$

Тогда с учетом тождества (15) и асимптотического поведения функции $K_0(x)$ при больших значениях аргумента функция Грина (2), как и следовало ожидать, оказывается равной

$$G(\mathbf{R}) = \frac{p_0 R}{\epsilon_{0c} R^3}. \quad (21)$$

Если исходить из представления квазистатического поля в виде (16) — (18), то для получения того же результата необходимо учесть, что

$$\Phi'_e(\mathbf{R}) \sim u^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\Phi}'_e(\mathbf{R}) \sim u^2.$$

3. $\omega_0 \rightarrow 0$ (вакуум). При $\omega_0 = 0$ параметры (12) равны $k_0 = k_c = k_{0c} = 0$, $k_{1c} = k_{2c} = k$, и так как $\Phi_{e\pm}(\mathbf{R})$, $\Phi_t(\mathbf{R}) \sim \omega_0$, то $\Phi(\mathbf{R}) = 1/R$, и функция Грина вновь принимает известный вид (21).

4. $\omega \rightarrow \omega_0$ (плазменный резонанс). При этом будем считать, что и $\nu = 0$. Тогда соответствующие величины (12) равны

$$k_c = 0, \quad k_{0c} = 2k_0, \quad k = k_0, \quad k_{1c} = 2k, \quad k_{2c} = 0, \quad (22)$$

и из (7) — (11) видно, что функция Грина и в пренебрежении столкновениями, как уже отмечалось в [1], на плазменном резонансе не имеет особенностей.

5. $p_0 = p_{0z} z_0$ (диполь, ориентированный вдоль вектора скорости потока). Для такого «продольного» диполя, исходя из (7) — (11), функцию Грина запишем в виде

$$G^{\parallel}(\mathbf{R}) = G_e^{\parallel}(\mathbf{R}) + G_i^{\parallel}(\mathbf{R}) \mathbf{1}(R_z); \quad (23)$$

$$G_i^{\parallel}(\mathbf{R}) = \frac{2p_{0z}k_0^2}{k_{0c}} [k_{1c}K_0(k_{1c}R_{\perp}) \exp(ik_{1c}R_z) - k_{2c}K_0(k_{2c}R_{\perp}) \exp(ik_{2c}R_z)]; \quad (24)$$

$$G_e^{\parallel}(\mathbf{R}) = \begin{cases} G_{e+}^{\parallel}(\mathbf{R}), & R_z > 0 \\ G_{e-}^{\parallel}(\mathbf{R}), & R_z < 0 \end{cases}; \quad (25)$$

$$G_{e+}^{\parallel}(\mathbf{R}) = p_{0z} \left\{ \frac{R_z}{R^3} - \frac{k_0^2}{k_{0c}} [k_{1c}S_{1c}(\mathbf{R}) - k_{2c}S_{2c}(\mathbf{R})] \right\}, \quad (26)$$

$$G_{e-}^{\parallel}(\mathbf{R}) = p_{0z} \left\{ \frac{R_z}{R^3} - \frac{k_0^2}{k_{0c}} [k_{1c}\tilde{S}_{1c}(\mathbf{R}) - k_{2c}\tilde{S}_{2c}(\mathbf{R})] \right\}.$$

Выражения (23) — (26) позволяют получить уравнение цилиндрической антенны, ориентированной вдоль вектора скорости плазмы.

6. $\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{x}_0$ (диполь, ориентированный поперек вектора скорости плазмы). Для «поперечного» диполя функция Грина записывается таким образом:

$$G^{\perp}(\mathbf{R}) = G_e^{\perp}(\mathbf{R}) + G_i^{\perp}(\mathbf{R}) \mathbf{1}(R_z); \quad (27)$$

$$G_i^{\perp}(\mathbf{R}) = p_{0x} \frac{2ik_0^2R_x}{k_{0c}R_{\perp}} [k_{1c}K_1(k_{1c}R_{\perp}) \exp(ik_{1c}R_z) - k_{2c}K_1(k_{2c}R_{\perp}) \exp(ik_{2c}R_z)]; \quad (28)$$

$$G_e^{\perp}(\mathbf{R}) = \begin{cases} G_{e+}^{\perp}(\mathbf{R}), & R_z > 0 \\ G_{e-}^{\perp}(\mathbf{R}), & R_z < 0 \end{cases}; \quad (29)$$

$$G_{e+}^{\perp}(\mathbf{R}) = p_{0x} \left\{ \frac{R_x}{R^3} - \frac{k_0^2R_x}{k_{0c}R_{\perp}} [k_{1c}S_{1c}^{(1)}(\mathbf{R}) - k_{2c}S_{2c}^{(1)}(\mathbf{R})] \right\}, \quad (30)$$

$$G_{e-}^{\perp}(\mathbf{R}) = p_{0x} \left\{ \frac{R_x}{R^3} - \frac{k_0^2R_x}{k_{0c}R_{\perp}} [k_{1c}\tilde{S}_{1c}^{(1)}(\mathbf{R}) - k_{2c}\tilde{S}_{2c}^{(1)}(\mathbf{R})] \right\};$$

$$S_{j_c}^{(1)}(\mathbf{R}) = \int_0^{\infty} \frac{J_1(k_{\perp}R_{\perp}) \exp(-k_{\perp}R_z)}{k_{\perp} + ik_{j_c}} dk_{\perp},$$

$$\tilde{S}_{j_c}^{(1)}(\mathbf{R}) = \int_0^{\infty} \frac{J_1(k_{\perp}R_{\perp}) \exp(k_{\perp}R_z)}{k_{\perp} - ik_{j_c}} dk_{\perp} \quad (31)$$

$$(j = 1, 2).$$

Формулы (27) — (31) позволяют исследовать параметры антенны, ориентированной поперек скорости плазмы.

7. $\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{x}_0 + p_{0z}\mathbf{z}_0$ (диполь, произвольно ориентированный в пространстве). Этот общий случай сводится к последним двум.

2. ДВИЖУЩАЯСЯ ПЛАЗМА С СОБСТВЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В рассматриваемом гидродинамическом приближении для продольной диэлектрической проницаемости плазмы с учетом теплового движения электронов получаем формулу

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega - \mathbf{k}u)^2 - \mathbf{k}^2 v_T^2}, \quad (32)$$

где v_T — средняя тепловая скорость электронов. Подставляя (32) в (4) и производя интегрирование в (4) и (3) в плоскости комплексного переменного, приходим к выражениям (7) и (9), где

$$\Phi_{e+}(\mathbf{R}) = \frac{ik_0}{2} [S_1(\mathbf{R}) - S_2(\mathbf{R})], \quad (33)$$

$$\Phi_{e-}(\mathbf{R}) = -\frac{ik_0}{2} [\tilde{S}_1(\mathbf{R}) - \tilde{S}_2(\mathbf{R})];$$

$$S_j(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp R_\perp) \exp(-k_\perp R_z)}{k_\perp + ik_j} dk_\perp, \quad (34)$$

$$\tilde{S}_j(\mathbf{R}) = \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp R_\perp) \exp(k_\perp R_z)}{k_\perp - ik_j} dk_\perp$$

$$(j = 1, 2);$$

$$\Phi_i(\mathbf{R}) = ik_0^2 \int_0^\infty \frac{k_\perp J_0(k_\perp R_\perp)}{k_{0\perp}} \left(\frac{\exp(ik_{1\perp} R_z)}{k_{1\perp}^2 + k_{1\perp}^2} - \frac{\exp(ik_{2\perp} R_z)}{k_{2\perp}^2 + k_{2\perp}^2} \right) dk_\perp \quad (35)$$

и введены следующие параметры:

$$k_{i\perp} = \gamma(k \pm k_{0\perp}), \quad \gamma = 1/(1 - \xi^2), \quad \xi = v_T/u, \quad (36)$$

$$k_{0\perp} = (\alpha^2 k^2 + k_{0\xi}^2)^{1/2}, \quad \alpha^2 = \xi^2(1 - \xi^2), \quad k_{0\xi}^2 = k_0^2 + \xi^2 k_1 k_2,$$

а остальные величины имеют прежний смысл (12). Обычным образом квазистатическое поле $\Phi_e(\mathbf{R})$ (9) с учетом тождества

$$1 - \frac{k_0}{2} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0(\omega)}, \quad (37)$$

где $\epsilon_0(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ — диэлектрическая проницаемость неподвижной пространственно-недиспергирующей плазмы, можно представить и в другом виде:

$$\Phi_e(\mathbf{R}) = \frac{1}{\epsilon_0(\omega) R} + \begin{cases} \Phi'_e(\mathbf{R}), & R_z > 0 \\ \tilde{\Phi}'_e(\mathbf{R}), & R_z < 0, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\Phi'_e(\mathbf{R}) = k_0 [T_1(\mathbf{R}) \exp(ik_1 R_z) - T_2(\mathbf{R}) \exp(ik_2 R_z)], \quad (39)$$

$$\tilde{\Phi}'_e(\mathbf{R}) = k_0 [\tilde{T}_1(\mathbf{R}) \exp(ik_1 R_z) - \tilde{T}_2(\mathbf{R}) \exp(ik_2 R_z)],$$

а выражения для функций $T_j(\mathbf{R})$ и $\tilde{T}_j(\mathbf{R})$ совпадают с (14), если в последних опустить индекс « c ». В частном случае движущейся плазмы без пространственной дисперсии, т. е. при $\xi = 0$, $k_{0\perp} = k_0$, $k_{\perp} = k_j$. При этом выражения (33), (34) и (38), (39) для квазистатического поля $\Phi_e(\mathbf{R})$ не изменяются, а плазменно-волновое поле $\Phi_t(\mathbf{R})$ (35) принимает вид

$$\Phi_t(\mathbf{R}) = ik_0 [K_0(k_1 R_\perp) \exp(ik_1 R_z) - K_0(|k_2| R_\perp) \exp(ik_2 R_z)], \quad (40)$$

что совпадает с формулой (5) статьи [1] для движущейся плазмы без учета теплового движения частиц.

Таким образом, из формул (7), (9) и (33)–(35) видно, что при учете собственной пространственной дисперсии плазмы квазистатическая функция Грина остается прежней (см. [1]). В то же время плазменно-волновая функция Грина претерпевает значительные изменения.

Известно, что в движущейся плазме без пространственной дисперсии в сопровождающей плазму системе координат за источником образуется плазменный след в виде волны постоянной амплитуды при фиксированном R_\perp («дорожка»). Однако незатухающий след имеет бесконечно большое значение для поля E при $R_\perp = 0$, что приводит к бесконечно большим потерям для источника. Эта расходимость устраняется в данном случае при учете теплового движения частиц плазмы. Чтобы убедиться в этом, вычислим интеграл (35) для больших расстояний от диполя с помощью метода стационарной фазы [6]. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции Бесселя $J_0(x)$ при больших значениях аргумента и тождеством $\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$. Точка стационарной фазы для каждого из получающихся интегралов оказывается одинаковой и равной

$$k_\perp^c = \frac{k_{0\xi} R_\perp}{\alpha R_\beta}, \quad R_\beta = (\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2)^{1/2}, \quad \beta^2 = \alpha^2 \gamma^2 \equiv \frac{v_T^2}{u^2 - v_T^2}. \quad (41)$$

В результате асимптотика плазменно-волновой функции Грина принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_t(\mathbf{R}) \approx & \frac{k_0^2 \exp(i\gamma k R_z)}{\beta k_{0\xi}^2 R_\beta} \times \\ & \times \left\{ \frac{\left\{ 1 - \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k_{0\xi} R_\perp^2}{\alpha R_\beta} \right) \right] \right\} \exp \left(-\frac{ik_{0\xi} R_\beta}{\alpha} \right)}{\left(\frac{R_\perp}{\alpha R_\beta} \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{k}{k_{0\xi}} - \frac{\beta R_z}{R_\beta} \right)^2} + \right. \\ & + \left. \frac{\left\{ 1 - \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k_{0\xi} R_\perp^2}{\alpha R_\beta} \right) \right] \right\} \exp \left(\frac{ik_{0\xi} R_\beta}{\alpha} \right)}{\left(\frac{R_\perp}{\alpha R_\beta} \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{k}{k_{0\xi}} + \frac{\beta R_z}{R_\beta} \right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Гидродинамическое описание плазмы накладывает на величину k_\perp в точке стационарной фазы

$$k_\perp^c = \frac{R_\perp}{d} \sqrt{\frac{1 + (\beta \omega / \omega_0)^2}{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}}, \quad (43)$$

$$d = \frac{\xi}{k_0} \equiv \frac{v_T}{\omega_0}, \quad \sin \vartheta = \frac{R_\perp}{R}, \quad \cos \vartheta = \frac{R_z}{R}$$

ограничение

$$\sin \vartheta \sqrt{\frac{1 + (\beta \omega / \omega_0)^2}{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}} \ll 1, \quad (44)$$

т. е. асимптотика (42) правильно описывает плазменно-волновое поле вблизи оси Oz .

Для получения обозримого результата запишем интеграл (42) для случая $\beta^2 \ll 1$. Тогда соответствующие величины (36) и (41) принимают вид

$$\xi \ll 1, \quad \alpha \approx \beta, \quad \gamma \approx 1, \quad k_0 \xi \approx k_0, \quad k_0 \xi / \alpha \approx 1/d, \quad (45)$$

и структура плазменно-волнового поля описывается формулой

$$\Phi_i(R) \approx - \frac{\exp\left(i \frac{\omega z}{u}\right)}{\beta \sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\left(1 - \frac{\beta^2 R_z^2}{d \sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}}\right) \exp\left(-\frac{i}{d} \sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}\right)}{\frac{R_\perp^2}{\beta^2(\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2)} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\beta R_z}{\sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}}\right)^2} - \right. \\ \left. - \frac{\left(1 + \frac{\beta^2 R_z^2}{d \sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}}\right) \exp\left(\frac{i}{d} \sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}\right)}{\frac{R_\perp^2}{\beta^2(\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2)} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\beta R_z}{\sqrt{\beta^2 R_z^2 - R_\perp^2}}\right)^2} \right\}. \quad (46)$$

Из формулы (46) видно, что тепловое движение частиц плазмы размазывает плазменный след (см. формулу (40)) в конус раствором $\operatorname{tg}^2 \vartheta = \beta^2$ (черенковский конус на плазменных волнах), вследствие чего величина поля вдоль оси Oz убывает с ростом расстояния от источника. Все волновые возмущения лежат в пределах указанного конуса $\beta^2 R_z^2 = R_\perp^2$, а вне его возмущения равны нулю. Наличие предельного конуса для волн в движущейся плазме с собственной пространственной дисперсией объясняется тем, что угловое распределение векторов групповой скорости этих волн необходимо обрезать при $\cos \vartheta = v_T/u$ из-за того, что волны с групповой скоростью, большей средней тепловой скорости электронов, сильно затухают из-за обратного эффекта Черенкова (затухание Ландау). Далеко же от оси $R_\perp = 0$ функция Грина описывается формулами без учета пространственной дисперсии. Параметром обрезания служит характерный размер порядка дебаевского радиуса плазмы.

Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы для решения самосогласованной задачи о параметрах антенн, помещенных в плазму.

Выражаю благодарность С. Л. Рычкову за многочисленные полезные дискуссии и Митюковой Д. Г. за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Сурин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 5, 647 (1975).
2. М. Н. Сохен, Phys. Rev., 123, № 3, 711 (1961).
3. С. И. Зайцев, Г. И. Лупанов, в сб. Теория дифракции и распространения волн, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Краткие тезисы докладов, т. 1, М., 1977, стр. 131.
4. С. И. Зайцев, Г. И. Лупанов, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
5. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН, 114, № 4, 569 (1974).
6. М. В. Федорюк, Метод перевала, изд. Наука, М., 1977.

Кировский политехнический институт

Поступила в редакцию
26 июня 1978 гLONGITUDINAL WAVE RADIATION IN A MOVING COLLISION PLASMA AND
IN A MOVING PLASMA WITH INHERENT SPACE DISPERSION*A. M. Surin*

Green's function of Poisson equation is calculated to study longitudinal waves by an oscillating electric dipole in a moving plasma, taking into account electron collisions as well as in a moving plasma which possesses an inherent space dispersion in the accompanied reference frame. The plasma is considered to be nongyrotropic, homogeneous and infinite. Different limiting and particular cases are considered for a moving collision plasma

УДК 533.9.01 · 538.574.530.18

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН И СОЛИТОНОВ В ПЛАЗМЕ

A. K. Некрасов

Показано, как с помощью нелинейного волнового уравнения, полученного с использованием кинетического уравнения Власова для функции распределения частиц плазмы в магнитном поле, можно вычислять квазистатические поля для узких и широких волновых пакетов в общем случае. Это позволяет рассматривать сильно нелинейные колебания с учетом кинетических эффектов.

С помощью уравнения для амплитуды неустойчивой (нестационарной) квазимонохроматической волны, учитывающего влияние квазистатического поля, рассмотрена нелинейная эволюция анизотропной и конусной ионных циклотронных неустойчивостей вдали от порога устойчивости. Приведены оценки для амплитуды насыщения.

1. ВВЕДЕНИЕ

При выводе нелинейного уравнения для малой, но конечной амплитуды колебаний плазмы обычно предполагается выполнение условия $\text{Re } \omega > \gamma$, где $\text{Re } \omega$ — действительная частота колебаний, а величину γ можно представить в виде $\gamma = \gamma_L + \gamma_{NL}$, γ_L и γ_{NL} — линейный и нелинейный инкременты (декременты) соответственно [1–3]. Если плазма находится в магнитном поле, то написанное выше неравенство приобретает вид $|\text{Re } \omega - n \omega_c| > \gamma$, где ω_c — циклотронная частота, n — целое число. Последнее неравенство использовалось, например, в работах [4, 5] при исследовании нелинейной эволюции ионных циклотронных колебаний вблизи границы устойчивости. Однако приведенные условия реально выполняются не всегда. В том случае, когда плазма оказывается вдали от порога устойчивости, некоторые колебания становятся апериодическими: $\text{Re } \omega \leq \gamma_L$ (например, желобковые [6], дрейфово-конусные [7] и т. д.). Для циклотронных колебаний плазмы при достаточном удалении от порога устойчивости может иметь место неравенство $\text{Re } \omega > \gamma_L \geq |\text{Re } \omega - n \omega_c|$ (например, для анизотропной, конусной неустойчивостей [8] и т. д.). Поэтому представляет интерес получение уравнений, описывающих нелинейную эволюцию неустойчивых колебаний плазмы при произвольном соотношении между инкрементом (линейным) и частотой.

В настоящей работе мы приведем без вывода нелинейное уравнение для малой, но конечной амплитуды электростатических колебаний плазмы в магнитном поле, полученное с использованием кинетического уравнения Власова методом последовательных приближений с точностью до членов третьего порядка включительно по амплитуде колебаний [4]. С помощью этого уравнения мы рассмотрим нелинейную эволюцию анизотропной и конусной ионных циклотронных неустойчивостей относительно раскачки монохроматических колебаний вдали от границы устойчивости, когда линейный инкремент порядка или больше расстройки $|\text{Re } \omega - n \omega_c|$, но меньше циклотронной частоты. Отметим, что учитывая-

емая нами кубичная нелинейность правильно описывает нелинейную эволюцию рассматриваемых ионных циклотронных колебаний вдали от границы устойчивости на начальной стадии, когда амплитуда достаточно мала, чтобы пренебречь членами высших порядков (пятого, седьмого и т. д.). В данном случае это будет означать, что линейный инкремент должен быть больше нелинейного. Тем не менее мы можем качественно выяснить тенденцию эволюции колебаний: усиливают или ослабляют неустойчивость нелинейные члены и в случае стабилизирующего эффекта (что в действительности и окажется для интересующих нас ионных циклотронных неустойчивостей) провести экстраполяцию на большие времена для оценки амплитуды насыщения.

Характерной особенностью неустойчивых монохроматических бегущих волн является возбуждение ими нелинейного квазистатического электрического поля, пропорционального инкременту неустойчивости. Действие этого поля на плазму аналогично действию высокочастотного давления. Общее выражение для него мы получаем с помощью второго приближения нелинейного уравнения для амплитуды колебаний. Учет квазистатического поля необходим при выводе уравнения, описывающего нелинейную эволюцию амплитуды квазимохроматической волны, поскольку его вклад в нелинейное уравнение может оказаться сравнимым с остальными нелинейными членами. В Приложении 2 с помощью одномерных уравнений гидродинамики мы покажем, чем определяется и при каких условиях оказывается важным квазистатическое электрическое поле для квазиплоских бегущих волн. Отметим, что это поле отсутствует в случае стоячих неустойчивых монохроматических колебаний. Если линейный инкремент равен нулю, то нелинейное квазистатическое поле также возникает в нестационарном режиме колебаний.

Для широких волновых пакетов (типа солитонов) квазистатическое поле, возникающее под действием высокочастотного давления, можно, так же как и для узких пакетов, получить из нелинейного волнового уравнения во втором приближении, записанного в фурье-представлении. Тем самым можно учесть существенно кинетические эффекты: конечность ларморовского радиуса, детали функции распределения и т. д. Использование волнового уравнения в фурье-представлении позволяет получить нелинейное уравнение для широких волновых пакетов в случае произвольной пространственной дисперсии. В Приложении 3 мы покажем, как можно вывести уравнения для нелинейных ленгмюровских колебаний [9] непосредственно из одного общего нелинейного волнового уравнения в фурье-представлении.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ВЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. УЧЕТ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Приведем нелинейное уравнение для амплитуды потенциальных колебаний плазмы в магнитном поле, полученное с помощью кинетического уравнения Власова для функции распределения частиц методом последовательных приближений по амплитуде колебаний. Для однородной плазмы с малым β , которую мы будем ниже рассматривать, это уравнение в общем виде подробно выводится в [4]:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega)\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} A_{\omega\omega'\omega''}^{kk'k''} \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} + \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} B_{\omega\omega'\omega''\omega'''}^{kk'k''k'''} \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} \varphi_{\mathbf{k}''' \omega'''}. \quad (2.1)$$

Здесь $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ — коэффициенты разложения потенциала колебаний φ в ряд Фурье:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\omega} \varphi_{\mathbf{k}\omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t},$$

$\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$, $A_{\omega\omega'\omega''}^{kk'k''}$ и $B_{\omega\omega'\omega''\omega'''}^{kk'k''k'''}$ — диэлектрическая проницаемость и матричные элементы взаимодействия волн соответственно во втором и третьем приближениях. Выражения для этих величин приведены в Приложении 1.

С помощью уравнения (2.1) можно найти квазистатические поля как для узких (квазимохроматических), так и для широких (типа солитонов) волновых пакетов. Для этого рассмотрим (2.1) во втором приближении и найдем фурье-образ квазистатического потенциала:

$$\langle \varphi_{k\omega} \rangle = \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \epsilon^{-1}(\mathbf{k}, \omega) A_{\omega\omega'\omega''}^{kk'k''} \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение только по быстрым времененным осцилляциям ($|\omega' + \omega''| < \omega', \omega''$), в то время как все волновые векторы остаются произвольными. Умножая обе части равенства (2.2) на $e^{ikr - i\omega t}$ и суммируя по \mathbf{k} и ω , получим потенциал $\langle \varphi \rangle$. Квазистатическое электрическое поле $\langle E \rangle$ определится из равенства $\langle E \rangle = -\nabla \langle \varphi \rangle$. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle E \rangle = & -\frac{i}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}' \mathbf{k}'' \\ \omega' \omega''}} (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \epsilon^{-1}(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'', \omega' + \omega'') (A_{\omega'+\omega''\omega'\omega''}^{kk'+k''k'k''} + \\ & + A_{\omega'+\omega''\omega''\omega'}^{k'+k''k''k'}) \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \rangle \exp [i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'')\mathbf{r} - i(\omega' + \omega'')t]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) является совершенно общим. Оно получено без каких-либо упрощающих предположений. С помощью этого выражения можно находить квазистатические электрические поля в различных случаях: в устойчивой и неустойчивой плазме, для узких и широких волновых пакетов, при слабой и сильной пространственной дисперсии. Формула (2.3) позволяет учитывать такие сугубо кинетические эффекты, как детали функций распределения, резонансные частицы и т. д. Здесь мы приведем выражение для поля $\langle E \rangle$, возникающего под действием неустойчивых квазимохроматических бегущих волн, для которых выполнены условия

$$\gamma_L > \frac{|\omega - n\omega_j - k_z v_{zj}|^2}{|\operatorname{Re} \omega - n\omega_j - k_z v_{zj}|} \frac{x_z}{k_z}, \quad (2.4)$$

$$x_\perp < k_\perp, \rho_j^{-1},$$

где x_z^{-1} и x_\perp^{-1} — характерные пространственные масштабы изменения амплитуды колебаний вдоль и поперек внешнего магнитного поля ($\mathbf{x} \equiv \mathbf{k}' + \mathbf{k}''$), ρ_j — ларморовский радиус частиц сорта j . Из первого неравенства (2.4) также следует, что $\gamma_L > x_z v_{zj}$ и $k_z > x_z$. При выполнении условий (2.4) квазистатическое поле $\langle E \rangle$ равно

$$\begin{aligned} \langle E_z \rangle = & \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}} k_z |\bar{\varphi}_{\mathbf{k}}|^2 \sum_j \frac{e_j}{m_j} \frac{\omega_{pj}^2}{\sum_j \omega_{pj}^2} \sum_n \int d\mathbf{v} \times \\ & \times \frac{J_{nk}^2}{|\omega_{\mathbf{k}} - n\omega_j - k_z v_z|^2} \left(\frac{n\omega_j}{v_\perp} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} \right), \\ \langle E_x \rangle + i\langle E_y \rangle = & \langle E_\perp \rangle e^{i\alpha} = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} k_\perp e^{i\alpha_{\mathbf{k}}} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \times \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\times \sum_j \frac{e_j}{m_j} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega_j^2} \left(1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega_j^2} \right)^{-1} \sum_n \int d\mathbf{v} \times \\ \times \frac{J_{nk}^2}{|\omega_k - n\omega_j - k_z v_z|^2} \left(\frac{n\omega_j \partial f_{0j}}{v_\perp \partial v_\perp} + k_z \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_z} \right).$$

Здесь $\bar{\varphi}_k = \varphi_k \exp(\gamma_k t)$ ($\gamma_k \equiv \gamma_L$), где φ_k — амплитуда собственных колебаний: $\varphi_{k\omega} = \varphi_k \delta_{\omega, \omega_k}$; частота ω_k удовлетворяет дисперсионному уравнению $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_k) = 0$. Суммирование в (2.5) проводится по всем возбужденным собственным колебаниям. При получении (2.5) мы считали, что $\gamma_L > \gamma_{NL}$, т. е. сумму $\omega' + \omega''$ заменили на $2i\gamma_L$. При $\gamma_{NL} \gtrsim \gamma_L$ будем иметь $\langle \mathbf{E} \rangle \sim \frac{\partial \langle \varphi^2 \rangle}{\partial t}$ (см. Приложение 2). Поле $\langle E_z \rangle$ в (2.5) является обобщением выражения для квазистатического поля, полученного в [10] в рамках одномерной модели плазмы без внешнего магнитного поля. Отметим, что точно такие же значения для $\langle \mathbf{E} \rangle$ можно получить из уравнения $4\pi \langle \mathbf{j} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} = 0$.

Найдем теперь вклад квазистатического поля в третье приближение уравнения (2.1). Рассматривая первый член в правой части (2.1) в третьем приближении, где один из фурье-образов представляет собой фурье-образ квазистатического потенциала (2.2), легко получить

$$[\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi_{k\omega}]^{(3)} \sim \text{вкладу } \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} \epsilon^{-1}(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \omega'' + \omega''') \times \\ \times (A_{\omega\omega'\omega''+\omega'''}^{kk'k''+k'''} + A_{\omega\omega''+\omega'''\omega'}^{kk''+k'''k'}) (A_{\omega''+\omega'''\omega''\omega'''}^{k''+k'''k''''k''''} + A_{\omega''+\omega'''\omega''\omega'''}^{k'''+k''''k''''k''''}) \varphi_{k'\omega'} \langle \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k'''\omega'''} \rangle. \quad (2.6)$$

Выражения для матричных элементов $A_{\omega\omega'\omega''+\omega'''}^{kk'k''+k'''}$, заключенных в первых скобках, при рассматриваемых условиях (2.4) можно представить в виде

$$A_{\omega\omega'\omega''+\omega'''}^{kk'k''+k'''} = -(k'' + k''')_z V_1 - (k'' + k''')_\perp V_3,$$

$$A_{\omega\omega''+\omega'''\omega'}^{kk''+k'''k'} = -(k'' + k''')_z V_2 - (k'' + k''')_\perp V_4.$$

Общий вид величин V_i , $i=1, 2, 3, 4$, довольно громоздкий. Некоторые конкретные значения для V_1 и V_2 будут приведены в разд. 4. Матричные элементы во вторых скобках в (2.6) связаны с $\langle \mathbf{E} \rangle$.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ НЕУСТОЙЧИВОЙ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Получим уравнение, описывающее нелинейную эволюцию амплитуды неустойчивой квазимонохроматической волны. Для этого умножим обе стороны уравнения (2.1), в котором правая часть записана в третьем приближении, на $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$ и просуммируем по \mathbf{k} и ω . В результате для амплитуды φ_k получим уравнение

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial t} + \mathbf{v}_g \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \mathbf{r}} = \gamma_k \bar{\varphi}_k - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} [(V_1 + V_2) \langle E_z \rangle + (V_3 + V_4) \langle E_\perp \rangle + \\ + iC_\omega^k |\bar{\varphi}_k|^2 \bar{\varphi}_k]. \quad (3.1)$$

Здесь ϑ_g — групповая скорость колебаний, $C_\omega^k = \sum_{i=2}^4 C_i$, коэффициенты C_i приведены в работе [4], где под γ следует теперь понимать γ_k . Член $V_1 \langle E_z \rangle$ в (3.1) учитывает вклад C_1 в [4]. Заметим, что при выводе общего уравнения (3.1) требуется условие $|\omega_k - n\omega_i| > \gamma_{NL}$.

Запишем действительную часть уравнения (3.1) схематически в виде (пренебрегая изменением амплитуды в пространстве)

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \gamma\varphi_0 - \gamma a^2\varphi_0^3, \quad (3.2)$$

где, по предположению, $a^2 > 0$. Решение уравнения (3.2) равно

$$\varphi_0 = \frac{\varphi(0)e^{it}}{[1 + a^2\varphi^2(0)e^{2it}]^{1/2}}. \quad (3.3)$$

Из выражения (3.3) найдем амплитуду насыщения:

$$\varphi_0^* = a^{-1}. \quad (3.4)$$

Ниже мы рассмотрим конкретный вид уравнения (3.1) для анизотропной и конусной ионных циклотронных неустойчивостей вдали от границы устойчивости, когда $\gamma_k \gg |\text{Re } \omega_k - n\omega_i|$.

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ АНИЗОТРОПНОЙ И КОНУСНОЙ ИОННЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Рассмотрим сначала нелинейное уравнение (3.1) для анизотропной ионной циклотронной неустойчивости, которая описывается диэлектрической проницаемостью [8]:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\omega_{pi}^2 \zeta_{nk}}{(\omega - n\omega_i)^2} \frac{k_z^2}{k^2}, \quad (4.1)$$

где $\zeta_{nk} = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_{nk}^2 f_{0i}(v_\perp)$. Выражение (4.1) справедливо при выполнении условий

$$|\omega - n\omega_i| > k_z v_{T\parallel i}, \quad k_z^2 \rho_i^2 > \frac{|\omega - n\omega_i|}{\omega_i}$$

($v_{T\parallel i}$ — тепловая скорость частиц вдоль магнитного поля), откуда следует, что анизотропия температуры ионов вдоль и поперек магнитного поля должна быть достаточно велика: $\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} > \frac{\omega_i}{|\omega - n\omega_i|}$.

Если плазма находится близко к границе устойчивости, когда $n\omega_i \approx \omega_{pe}(k_z/k)$ (при этом основной вклад в $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ дают электроны), то решение уравнения $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ равно

$$\omega_k = \Omega_k + i\gamma_k = n\omega_i + \frac{(-1 + i\sqrt{3})}{2} \left(\frac{\zeta_{nk}}{2} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} n\omega_i. \quad (4.2)$$

Таким образом, отклонение реальной части частоты колебаний от n -й гармоники ионной циклотронной частоты и инкремент являются величинами одного порядка. В этом случае нелинейность ионов не важна и достаточно учесть нелинейное движение одних электронов. Приведем результаты вычислений величин V_i и квазистатического поля $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$V_1 = \frac{e\omega_{pe}^2 k_z^3}{m_e \Omega_k^4 k^2} \left(-i \frac{\Omega_k}{\gamma_k} - 9 \right), \quad (4.3)$$

$$V_2 = 3 \frac{e\omega_{pe}^2 k_z^3}{m_e \Omega_k^4 k^2},$$

$$\langle E_z \rangle = 4\gamma_k \frac{e k_z^3}{m_e \Omega_k^3} |\bar{\varphi}_k|^2.$$

Вклад в нелинейное уравнение членов $\sim \langle E_\perp \rangle$ меньше вклада членов $\sim \langle E_z \rangle$ в $\frac{k_z^2}{k^2} \frac{m_i}{m_e} \gg 1$ раз. Для коэффициентов C_2 , C_3 и C_4 , взятых из работы [4], получим выражения

$$C_2 = \frac{3}{2} \frac{e^2 \omega_{pe}^4 k_z^8}{m_e^2 \Omega_k^8 k^4} \left(1 - 8i \frac{\gamma_k}{\Omega_k} - \Delta e \right),$$

$$C_3 = 10 \frac{e^2 \omega_{pe}^2 k_z^6}{m_e^2 \Omega_k^6 k^2} \left(1 - \frac{54}{5} i \frac{\gamma_k}{\Omega_k} \right), \quad (4.4)$$

$$C_4 = -\frac{15}{2} \frac{e^2 \omega_{pe}^2 k_z^6}{m_e^2 \Omega_k^6 k^2} \left(1 - \frac{62}{5} i \frac{\gamma_k}{\Omega_k} \right),$$

где $\Delta e = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\zeta_{2n} 2k}{\zeta_{nk}} \right) \frac{\omega_k - n \omega_i}{n \omega_i}$. Подставляя результаты (4.3), (4.4) в (3.1), получим следующее нелинейное уравнение для амплитуды $\bar{\varphi}_k$:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial t} = \gamma_k \bar{\varphi}_k - \gamma_k \frac{e^2 k_z^4 |\bar{\varphi}_k|^2}{6m_e^2 \Omega_k^4} \left(4 - \frac{\zeta_{2n} 2k}{\zeta_{nk}} \right) \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \bar{\varphi}_k. \quad (4.5)$$

Таким образом, нелинейность оказывает стабилизирующее действие на анизотропную неустойчивость. Механизм стабилизации заключается в возбуждении нелинейного кубического тока на частоте неустойчивых колебаний, находящегося в противофазе с линейным током.

Подставим в (4.5) комплексную амплитуду φ_k в виде $\bar{\varphi}_k = \frac{1}{2} \varphi_0(t) e^{i\psi(t)} \delta_k$, где φ_0 и ψ — действительные амплитуда и фаза волны, δ_k — заданный волновой вектор. Выделяя в полученном уравнении действительную часть и используя (3.2) — (3.4), найдем оценку для амплитуды насыщения:

$$\frac{e\varphi_0^*}{W_{\perp t}} \approx \sqrt{6} n^2 \frac{m_e}{m_i} (k_{z0} \rho_t)^{-2}, \quad (4.6)$$

где $W_{\perp t}$ — средняя энергия ионов поперек магнитного поля, $\rho_t = (W_{\perp t}/m_i \omega_i^2)^{1/2}$. Оценка для нелинейного сдвига частоты равна $\Delta\omega_{NL} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_k$. Отметим, что, строго говоря, уравнение (4.5) справедливо при $\gamma_t > \gamma_{NL}$. В этом случае выполняется также неравенство $k_z \Delta z < 1$, где Δz — амплитуда смещения электронов под действием электрического поля колебаний вдоль внешнего магнитного поля. Эти

неравенства означают применимость метода последовательных приближений. Таким образом, экстраполяционная оценка амплитуды насыщения (4.6) получена на границе применимости теории. Отметим, что эта оценка совпадает по порядку величины с амплитудой насыщения, полученной в [4].

Если плотность плазмы выше пороговой: $n\omega_i < \omega_{pe}(k_z/k)$ (при этом электроны и ионы дают одинаковый вклад в $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$), то плазма также неустойчива, но с меньшим инкрементом,

$$\omega_k = n\omega_i + i \left(\frac{m_e}{m_i} \zeta_{nk} \right)^{1/2} \omega_k. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что отклонение действительной части частоты колебаний Ω_k от n -й гармоники ионной циклотронной частоты значительно меньше инкремента неустойчивости. В этом случае необходимо учитывать как нелинейное движение электронов, так и нелинейное движение ионов. Приведем результаты вычислений нелинейной части уравнения (3.1) с учетом вклада ионов:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{e\omega_{pe}^2 k_z^3}{m_e \Omega_k^4 k^2} \left[-i \frac{\Omega_k}{\gamma_k} - \left(9 + \frac{1}{27 \zeta_{nk}} \right) \right], \\ V_2 &= \frac{e\omega_{pe}^2 k_z^3}{m_e \Omega_k^4 k^2} \left(3 - \frac{5}{27 \zeta_{nk}} \right), \\ \langle E_z \rangle &= 4\gamma_k \frac{ek_z^3}{m_e \Omega_k^3} |\bar{\varphi}_k|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вклад членов $\sim \langle E_\perp \rangle$ мал. Для нелинейных членов $\sim C_i$, $i=2, 3, 4$, получим

$$\begin{aligned} iC_2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} |\bar{\varphi}_k|^2 &= -\frac{9}{4} \gamma_k \frac{e^2 k_z^4 |\bar{\varphi}_k|^2}{m_e^2 \Omega_k^4} \left(1 - \frac{\zeta_{nk2}}{\zeta_{nk}^2} \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{\zeta_{2n2k}}{\zeta_{nk}} \right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{\zeta_{nk2}}{27 \zeta_{nk}^2} \right) - i \frac{\gamma_k}{\Omega_k} \left(2 + \frac{14}{81} \frac{\zeta_{nk2}}{\zeta_{nk}^2} \right) \right], \\ i(C_3 + C_4) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)^{-1} |\bar{\varphi}_k|^2 &= \frac{1}{2} \gamma_k \frac{e^2 k_z^4 |\bar{\varphi}_k|^2}{m_e^2 \Omega_k^4} \times \\ &\times \left[\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{18} \frac{\zeta_{nk1}}{\zeta_{nk}^3} \right) - i \frac{\gamma_k}{\Omega_k} \left(5 - \frac{1}{9} \frac{\zeta_{nk1}}{\zeta_{nk}^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $\zeta_{nk1} = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_{nk}^4 f_{0i}(v_\perp)$, $\zeta_{nk2} = 2\pi \int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_{2n2k} J_{nk}^2 f_{0i}(v_\perp)$.

Для наглядности мы рассмотрим выражения (4.8) и (4.9) в случае, когда возбуждены длинноволновые колебания с $k_\perp \rho_i < 1$ на первой гармонике ионной циклотронной частоты. Предполагая, что функция распределения ионов по поперечным скоростям является максвелловской, и производя вычисления, получим следующее нелинейное уравнение для эволюции амплитуды колебаний вдали от порога устойчивости:

$$\frac{d\bar{\varphi}_k}{dt} = \gamma_k \bar{\varphi}_k - \gamma_k \frac{e^2 k_z^4 |\bar{\varphi}_k|^2}{m_e^2 \Omega_k^4} \left[7 \left(1 + \frac{1}{9k_\perp^2 \rho_i^2} \right) - i \frac{10}{3} \left(5 - \frac{1}{3k_\perp^2 \rho_i^2} \right) \frac{\gamma_k}{\Omega_k} \right] \bar{\varphi}_k, \quad (4.10)$$

где $\rho_i = (T_{\perp i}/m_i \omega_i^2)^{1/2}$. Отсюда найдем выражение для амплитуды насыщения:

$$\frac{e\varphi_0^*}{T_{\perp i}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(1 + \frac{1}{9k_{\perp 0}^2 \rho_i^2} \right)^{-1/2} \frac{m_e}{m_i} (k_{z0} \rho_i)^{-2}. \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что при достаточно малых $k_{\perp 0} \rho_i$ основной вклад в стабилизацию анизотропной неустойчивости вносит нелинейное движение ионов вдоль внешнего магнитного поля, поскольку нелинейный ионный ток, пропорциональный $|\omega_k - n\omega_i|^{-p}$ ($p > 0$), растет при $k_{\perp} \rho_i \rightarrow 0$.

Если функция распределения ионов по поперечным скоростям имеет конус потерь $f_{0i}(v_{\perp} = 0) = 0$, то при $n\omega_i \approx \omega_{pe}$ (k_z/k) может возникнуть конусная ионная циклотронная неустойчивость с $k_{\perp} \rho_i > 1$ и частотой $\omega_k \approx n\omega_i [1 + in(m_e/m_i)^{1/2} (k_z^2 k_{\perp} \rho_i^3)^{-1/2}]^{1/2}$ [4, 8].

В этом случае в нелинейной части уравнения (3.1) достаточно учесть вклад одних электронов (так же, как и для анизотропной неустойчивости вблизи границы устойчивости). В результате получим амплитуду насыщения, аналогичную (4.6).

Мы показали, как с помощью одного нелинейного волнового уравнения, записанного в фурье-представлении, можно получать квазистатические поля в различных случаях: для узких и широких волновых пакетов, в устойчивой и неустойчивой плазме, при произвольной пространственной дисперсии. Мы привели нелинейное уравнение для амплитуды неустойчивых квазимохроматических колебаний, которое учитывает вклад квазистатического электрического поля, возникающего под действием бегущих волн. Для этого поля получены явные общие выражения. С помощью нелинейного уравнения рассмотрена эволюция анизотропной и конусной ионных циклотронных неустойчивостей вдали от границы устойчивости, когда $\gamma_L \gg |\text{Re } \omega - n\omega_i|$. Показано, что в случае, когда основной вклад в диэлектрическую проницаемость рассмотренных колебаний вносят электроны, достаточно учитывать нелинейное движение одних электронов. В случае же, когда электроны и ионы дают одинаковый вклад в диэлектрическую проницаемость, необходимо учитывать также нелинейное движение ионов вдоль внешнего магнитного поля. Получено, что нелинейность оказывает стабилизирующее действие на рассмотренные неустойчивости, что находится в соответствии с экспериментальными данными для магнитных ловушек [11]. Найдены оценки для амплитуды насыщения.

В настоящей работе предполагалось, что плазма однородна. Неоднородность плазмы учитывается с помощью выражений вида $\frac{k_x}{\omega_j} \frac{\partial}{\partial y}$ (неоднородность вдоль оси Oy) в операторах \hat{L} (см., например, [5]).

Автор приносит благодарность В. В. Арсенину, В. А. Жильцову и в особенности В. И. Петвиашвили за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \sum_n \int d\mathbf{v} \hat{L}_{j\mathbf{k}\omega}^{nn} f_{0i} \quad (\text{П.1.1})$$

— диэлектрическая проницаемость плазмы;

$$A_{\omega\omega'\omega''}^{kk'k''} = \sum_j \frac{e_j}{m_j} \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \sum_{n-p+q-r=0} \exp [i(n-p)(\alpha_{k''} - \alpha_k)] \times \quad (\text{П.1.2})$$

$$\times \int d\mathbf{v} \hat{L}_{jkk'\omega}^{npqr} \hat{L}_{jk''\omega''}^{np} f_{0j};$$

$$B_{\omega\omega'\omega''\omega'''}^{kk'k''k'''} = - \sum_l \frac{e_l^2}{m_l^2} \frac{\omega_{pl}^2}{k^2} \sum_{n-p+q-r+s-t=0} \exp [i(n-p)(\alpha_{k'''} - \alpha_k) + i(q-r) \times \quad (\text{П.1.3})$$

$$\times (\alpha_{k''+k'''} - \alpha_k)] \int d\mathbf{v} \hat{L}_{jkk'\omega}^{npqrst} \hat{L}_{jk''+k''''k''''\omega''''}^{np} \hat{L}_{jk''''\omega''''}^{np} f_{0j}$$

— матричные элементы взаимодействия волн соответственно во втором и третьем приближениях;

$$\hat{L}_{jk\omega}^{np} = \frac{J_{nk} J_{pk}}{\omega - n\omega_j - k_z v_z} \left(\frac{n\omega_j}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} + k_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right); \quad (\text{П.1.4})$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{jkk'\omega}^{npqr} = & \frac{J_{rk}}{\omega - (n-p+q)\omega_j - k_z v_z} \left\{ \frac{k'_\perp}{2} J_{q+1k} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n-p}{v_\perp} \right) \exp [i(\alpha_k - \alpha_{k'})] + \frac{k'_\perp}{2} J_{q-1k} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{n-p}{v_\perp} \right) \times \right. \quad (\text{П.1.5}) \\ & \left. \times \exp [-i(\alpha_k - \alpha_{k'})] + J_{qk} k'_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{L}_{jkk'\omega}^{npqrst} = & \frac{J_{tk}}{\omega - (n-p+q-r+s)\omega_j - k_z v_z} \left\{ \frac{k'_\perp}{2} J_{s+1k} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n-p+q-r}{v_\perp} \right) \exp [i(\alpha_k - \alpha_{k'})] + \frac{k'_\perp}{2} J_{s-1k} \left(\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n-p+q-r}{v_\perp} \right) \exp [-i(\alpha_k - \alpha_{k'})] + J_{sk} k'_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right\}. \quad (\text{П.1.6}) \end{aligned}$$

Здесь e_j и m_j — заряд и масса частиц сорта j ($j = e, i$, i означает соответственно электроны и ионы), ω_{pj} — плазменная частота, ω_j — циклотронная частота, f_{0j} — невозмущенная функция распределения, $J_{nk} = J_n(k_\perp v_\perp / \omega_j)$ — функция Бесселя n -го порядка, α_k — азимутальный угол волнового вектора \mathbf{k} в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю, направленному вдоль оси Oz .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, при каких условиях возникает квазистатическое поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ для неустойчивых монохроматических бегущих волн, общие выражения для которого имеют вид (2.5), исходя из одномерных уравнений гидродинамики для холодных электронов:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{e}{m} E,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} nv = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - 4\pi e n v = 0.$$

Продифференцируем нижнее уравнение по времени и проведем усреднение по быстрым колебаниям. Тогда для медленно меняющегося (квазистатического) поля $\langle E \rangle$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \langle E \rangle}{\partial t^2} + \omega_p^2 \langle E \rangle = 4\pi e \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{n} \tilde{v} \rangle + 2\pi e n_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{v}^2 \rangle, \quad (\text{П.2.2})$$

где мы использовали уравнение движения для неосциллирующей скорости. Знаком «~» относится к осциллирующим величинам, n_0 — невозмущенная плотность плазмы. Второй член справа в (П.2.2) представляет собой действие высокочастотного давления, первый член связан с нестационарностью колебаний (в частности, с наличием неустойчивости). Оба эти члена приводят к ускорению квазистатического тока $\langle j \rangle$, которому препятствует возникающее при этом поле $\langle E \rangle$. В результате при $\omega_p > \frac{\partial}{\partial t}$ оказываются выполненными равенства $\langle j \rangle = \frac{\partial \langle j \rangle}{\partial t} = 0$, т. е. отсутствует квазистационарный снос электронов плазмы под действием колебаний.

Для нестационарных узких волновых пакетов первый член справа в (П.2.2) может превысить второй. В данном случае это условие можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\omega \partial t} > \frac{\partial}{k \partial x}. \quad (\text{П.2.3})$$

Нетрудно видеть, что это неравенство аналогично условию (2.4). Считая, что (П.2.3) выполнено, и опуская первый член слева в (П.2.2), получим

$$\langle E \rangle = \frac{4\pi e}{\omega_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{n} \tilde{v} \rangle. \quad (\text{П.2.4})$$

Выражения для \tilde{v} и \tilde{n} находятся из линеаризованных уравнений движения и непрерывности (П.2.1). Полученные нами выражения (2.5) являются обобщением квазистатического поля (П.2.4). Легко видеть, что последнее отсутствует в случае стоячих монохроматических волн. Для бегущей волны $E = E_0(t) \cos(kx - \omega t)$ получим

$$\langle E \rangle = \frac{ek}{2m \omega^3} \frac{\partial E_0^2}{\partial t}. \quad (\text{П.2.5})$$

Для неустойчивых колебаний при $\tau_L > \tau_{NL}$ это выражение совпадает с соответствующим выражением в (4.3). Отметим, что для непотенциальных колебаний квазистатическое поле, возникающее в нестационарном случае под действием усредненной по «быстрому» времени нелинейной силы Лоренца, приведено в [12].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Покажем, как с помощью одного общего нелинейного уравнения (2.1) можно получить уравнения для нелинейных ленгмюровских колебаний [9]. Для этого необходимо найти выражение (2.6), учитывающее влияние квазистатического поля, а также матричные элементы $B_{\omega\omega'\omega''\omega'''}^{kk'k''k''}$, связанные с учетом квазистатической поправки к функции распределения

ления (коэффициент C_3 в [4]). Рассмотрим сначала статический режим, когда $(\omega'' + \omega''') < (k_z'' + k_z'')v_{T_{||j}}$ для электронов и ионов (см. (2.6)). В этом случае для $\epsilon(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \omega'' + \omega''')$ получим

$$\epsilon(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \omega'' + \omega''') = \frac{4\pi n_0 e^2}{(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''')^2} \left(\frac{1}{T_{||e}} + \frac{1}{T_{||i}} \right) \quad (\text{П.3.1})$$

(для простоты рассматриваются замагниченные ленгмюровские колебания с $k_{\perp p_j} < 1$). Учитывая в матричных элементах $A_{\omega'' \omega''' \omega'''}^{kk' k''}$ только одни электроны (это соответствует тому, что ионы не участвуют в высокочастотных колебаниях), получим

$$\begin{aligned} A_{\omega'' + \omega''' \omega'''}^{kk'' k'' k'''} + A_{\omega'' + \omega'''' \omega'''}^{kk'' k'' k'''} &= - \frac{e}{T_{||e}} \frac{k_z'' k_z'''}{(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''')^2}, \\ A_{\omega \omega' \omega'' + \omega'''}^{kk' k'' k'''} + A_{\omega \omega'' + \omega''' \omega'}^{kk'' + k''' k'} &= \frac{e}{T_{||e}} \frac{k_z' k_z'}{k^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

Вычисляя далее матричные элементы $B_{\omega \omega' \omega'' \omega'''}^{kk' k'' k'''}$, будем иметь

$$B_{\omega \omega' \omega'' \omega'''}^{kk' k'' k''' k''} + B_{\omega \omega' \omega''' \omega''}^{kk' k''' k'' k'''} = \frac{k_z' k_z'' k_z'''}{4\pi n_0 T_{||e} k^2}. \quad (\text{П.3.3})$$

Подставляя выражения (П.3.1), (П.3.2) и (П.3.3) в (2.6) и (2.1) соответственно, получим

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi_{k\omega} = \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' + \omega''' = \omega}} \frac{k_z' k_z'' k_z'''}{8\pi n_0 k^2 (T_{||e} + T_{||i})} \varphi_{k'\omega'} \langle \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k'''\omega'''}, \rangle. \quad (\text{П.3.4})$$

Умножая обе части (П.3.4) на $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ и суммируя по \mathbf{k} и ω , получим для амплитуды ленгмюровских колебаний φ_0 уравнение

$$\begin{aligned} \Delta \left(i \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} \right) + \frac{e^2}{8 m_e \omega_{pe} (T_{||e} + T_{||i})} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial z} |\nabla_z \varphi_0|^2 \nabla_z \varphi_0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

где r_{De} — дебаевский радиус электронов. Переход к плазме без магнитного поля очевиден: $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \rightarrow \Delta$, $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \operatorname{div}$, $\nabla_z \rightarrow \nabla$, $T_{||j} \rightarrow T_j$. В этом случае уравнение (П.3.5) совпадает с уравнением (1.8) в [9].

Пусть теперь ионы описываются гидродинамически в квазистатическом поле: $(\omega'' + \omega''') > (k_z'' + k_z'')v_{T_{||i}}$, а электроны остаются статическими. В этом случае $\epsilon(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \omega'' + \omega''')$ имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \omega'' + \omega''') &= \frac{\omega_{pl}^2}{(\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''')^2} \left\{ \frac{m_i}{T_{||e}} - \frac{(k_z'' + k_z''')^2}{(\omega'' + \omega''')^2} \times \right. \\ &\times \left. \left[1 + 3 \frac{(k_z'' + k_z'')^2 T_{||i}}{(\omega'' + \omega''')^2 m_i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.6})$$

Выражения для матричных элементов остаются прежними. Подставляя, как и выше, необходимые величины в (2.6) и (2.1), получим

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)\varphi_{k\omega} = - \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \omega' + \omega'' = \omega}} \frac{k_z k'_z k''_z k'''_z}{8\pi n_0 m_i k^2} \frac{(k''_z + k'''_z)^2}{(\omega'' + \omega''')^2 - (k''_z + k'''_z)^2 c_s^2} \times \\ \times \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \langle \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} \varphi_{\mathbf{k}'''\omega'''} \rangle, \quad (\text{П.3.7})$$

где $c_s = \left(\frac{T_{\parallel e} + 3T_{\perp i}}{m_i} \right)^{1/2}$ — скорость звука. Умножим (П.3.7) на $e^{ikr - i\omega t}$ и просуммируем по \mathbf{k} и ω . В результате получим

$$\Delta \left(i \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} \right) = \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta n \nabla_z \varphi_0, \quad (\text{П.3.8})$$

где нелинейная флуктуация плотности δn описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta n = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |\nabla_z \varphi_0|^2. \quad (\text{П.3.9})$$

В плазме без магнитного поля уравнения (П.3.8) и (П.3.9) совпадают с уравнениями (1.2) и (2.9) в [9].

Таким образом, уравнение (2.1) можно применять для исследования широких волновых пакетов (типа солитонов) с учетом кинетических эффектов и при произвольной пространственной дисперсии.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. Б. Кадомцев, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
- 2 В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
- 3 А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, М., 1973.
- 4 А. К. Некрасов, Plasma Phys., 17, № 11, 841 (1975).
- 5 А. К. Некрасов, Nucl. Fusion, 14, № 6, 865 (1974).
- 6 А. Б. Михайловский, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Атомиздат, М., 1963.
- 7 R F Post and M N Rosenbluth, Phys. Fluids, 9, № 4, 730 (1966).
- 8 А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 5, Атомиздат, М., 1967.
- 9 В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, № 5, 1745 (1972).
- 10 Р. Martin, Phys. Fluids, 17, № 2, 384 (1974).
- 11 В. А. Жильцов и др., Физика плазмы, 3, № 1, 37 (1977).
- 12 Х. Вашими, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 71, № 9, 1010 (1976).

Поступила в редакцию
19 июля 1978 г.

ABOUT NONLINEAR THEORY OF UNSTABLE PLANE WAVES AND SOLITONS IN A PLASMA

A. K. Nekrasov

It is shown that the nonlinear wave equation obtained by using the kinetic Vlasov equation for the function of particle plasma distribution in the magnetic field allows to calculate in the general case quasi-static fields for narrow and wide wave packets. This permits to consider strongly nonlinear oscillations taking into account the kinetic effects.

By the equation for the amplitude of an unstable (unsteady) quasi-monochromatic wave regarding the influence of the quasi-static field the nonlinear evolution of anisotropic and loss-cone ion cyclotron instabilities are analysed far from the instability threshold. Estimations of the saturation amplitude are given.

УДК 551.501.8

ДИСТАНЦИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ МЕТЕОПАРАМЕТРОВ ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ РАДИОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

М. Г. Кузнецова, В. А. Рассадовский, А. В. Троицкий

Предложен и обоснован метод дистанционного определения основных метеопараметров облачной атмосферы по ее собственному радиоизлучению в полосах поглощения кислорода $\lambda \sim 5$ мм и водяного пара $\lambda \sim 13,5$ мм и микроволновых окнах прозрачности. Приводятся результаты совместного определения профиля температуры, интегрального влагосодержания, водозапаса облаков и скорости ветра. Дискутируются оптимальные условия и точность определения указанных метеопараметров.

В настоящее время достигнут определенный прогресс в области дистанционного зондирования метеопараметров атмосферы как с поверхности Земли, так и сверху [1, 2]. Однако большинство результатов были получены для безоблачной атмосферы, в частности, определение высотного профиля температуры вообще не проводилось в условиях облачности. Наличие облачных образований существенно затрудняет проведение указанных исследований и требует применения многочастотных методов зондирования атмосферы. Как неоднократно отмечалось [1–3], наиболее перспективными при дистанционном зондировании облачной атмосферы являются радиометрические методы, позволяющие оперативно и непрерывно определять основные метеопараметры атмосферы: профили температуры и влажности, интегральное влагосодержание, водность облаков и т. д.

В настоящей работе сообщаются методика и результаты комплексных радиометрических измерений излучения облачной атмосферы в полосах поглощения водяного пара ($\lambda = 13,5$ мм) и кислорода ($\lambda = 5,6$ мм), а также в окне прозрачности ($\lambda = 6$ мм) с целью последующего определения высотного профиля температуры $T(h)$, интегрального влагосодержания Q , интегральной водности (водозапаса) W и скорости ветра на высоте облачных образований.

1. В качестве исходной величины для получения физической информации в радиодиапазоне обычно используют значения яркостной температуры атмосферы $T_{\text{я}}$, которая может быть представлена в виде

$$T_{\text{я}, \lambda}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^H T(h) \gamma(h, T) \exp \left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^h \gamma(h', T) dh' \right) dh, \quad (1)$$

где $T(h)$ — высотный профиль температуры атмосферы, $\gamma(h, T)$ — суммарный коэффициент поглощения, H — высота верхней границы атмосферы, θ — зенитный угол. Для случая облачной атмосферы коэффициент поглощения определяется вкладами водяного пара, молекулярного кислорода и водяных капель облака:

$$\gamma(h, T) = \gamma_{\text{H}_2\text{O}}(h, T) + \gamma_{\text{O}_2}(h, T) + \gamma_W(T).$$

Решение задачи по комплексному определению указанных метеопараметров облачной атмосферы предполагает одновременное измерение ее радиоизлучения как минимум на 3 длинах волн в диапазонах $\lambda \sim 5 \text{ мм}$, $\lambda \sim 8 \text{ мм}$ или $\lambda \sim 3 \text{ мм}$ и $\lambda \sim 13,5 \text{ мм}$ с последующим решением соответствующих обратных задач. Спектральные особенности излучения атмосферных газов позволяют определить интегральное влагосодержание Q и водозапас облаков W (по измерениям на 2 длинах волн — $\lambda \sim 13,5 \text{ мм}$ и $\lambda \sim 8 \text{ мм}$ или $\lambda \sim 3 \text{ мм}$ [2]) и, тем самым, задать ядро интегрального уравнения (1). Решение обратной задачи ($T_{\lambda}, \lambda(0)$) определяется по измерениям на $\lambda \sim 5 \text{ мм}$) дает высотное распределение температуры атмосферы $T(h)$. Рассмотрим несколько подробнее указанную схему.

Определение интегрального влагосодержания облачной атмосферы и водозапаса облаков по совместным радиометрическим измерениям на двух длинах волн (в полосе поглощения $\text{H}_2\text{O} \lambda \sim 13,5 \text{ мм}$ и в окнах прозрачности $\lambda \sim 8 \text{ мм}$ или $\lambda \sim 3 \text{ мм}$) встречает определенные затруднения из-за сильной зависимости коэффициента поглощения водяных капель γ_w от температуры (см. рис. 1). Однако, как видно из рис. 1, определенным интервалам температур облачных образований отвечают длины волн λ_{opt} , на которых коэффициент поглощения γ_w практически не зависит от температуры облака. Для эффективной температуры облаков в интервале $t_a = -40 \div -10^\circ\text{C}$ $\lambda_{opt} = 6 \text{ мм}$; для интервала $t_a = -10 \div +10^\circ\text{C}$ $\lambda_{opt} = 3 \text{ мм}$. Указанные интервалы «неопределенности» температуры облаков определяются по приземной температуре атмосферы и для ЕТ СССР отвечают зимним и летним условиям. При измерениях на двух длинах волн в зимних условиях (что и реализуется в данной работе) набор $\lambda = 13,5 \text{ мм}$ и $\lambda = 6 \text{ мм}$ является оптимальным для определения W . При этом неопределенность коэффициента поглощения капель на $\lambda = 13,5 \text{ мм}$ $\gamma_w(13,5)$, отвечающая неопределенности температуры облака $\pm 10^\circ\text{C}$, составляет 15%, что приводит к ошибке в определении интегральной водности — 15% и водозапаса облака — 8% (влияние ошибки в задании $\gamma_w(13,5)$ на точность определения W ослаблено через фактор 0,33 см (3)). Реальный интервал неопределенности в t_a для зимних условий можно ограничить $\pm 5^\circ\text{C}$ вследствие малости температурного градиента, что соответственно вдвое уменьшит указанные ошибки.

Следует отметить, что привлечение третьей длины волны $\lambda \sim 3 \text{ мм}$ повышает точность измерения Q и W и позволяет определять эффективную температуру облака [2, 4], а при известном профиле $T(h)$ и его высоту. Заметим также, что при использовании $\lambda_{opt} = 6 \text{ мм}$ положительным выступает тот факт, что радиоизлучение атмосферы на этой длине волны не зависит от реальных вариаций ее температуры [3, 5], а, следовательно, поглощение

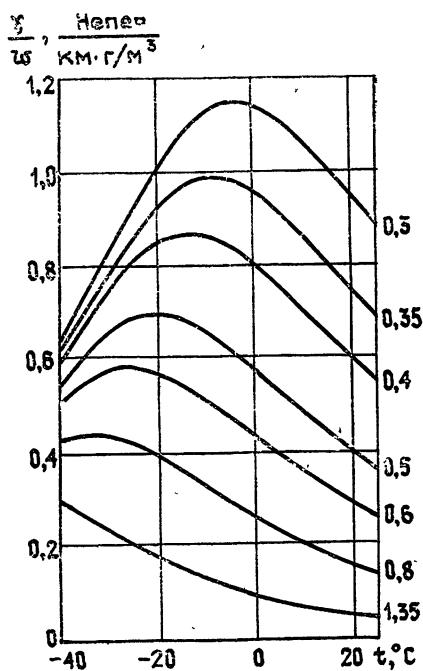


Рис. 1. Зависимость приведенного коэффициента поглощения капельной фазы облаков от температуры для различных длин волн $\lambda, \text{ см.}$

в кислороде может быть учтено достаточно точно из теории поглощения.

Применительно к измерениям на длинах волн $\lambda = 13,5 \text{ мкм}$ и $\lambda = 6 \text{ мкм}$ можно записать систему линейных уравнений для полного поглощения радиоволн в облачной атмосфере $\tau(\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned}\tau(6) &= \tau_{\text{O}_2}(6) + \tau_{\text{H}_2\text{O}}(6) + \tau_w(6), \\ \tau(13,5) &= \tau_{\text{O}_2}(13,5) + \tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5) + \tau_w(13,5).\end{aligned}\quad (2)$$

Из теории поглощения водяным паром может быть получено уравнение связи $\tau_{\text{H}_2\text{O}}(6) = (0,33 \pm 0,02) \tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5)$. Разброс коэффициентов обусловлен вариациями высотных профилей температуры и влажности. За вычетом поглощения в кислороде и принимая $\tau_w = \psi(\lambda, t_s) W$, система (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\Delta \tau(6) &= 0,33 \tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5) + \psi(6; t_s) W, \\ \Delta \tau(13,5) &= \tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5) + \psi(13,5; t_s) W,\end{aligned}\quad (3)$$

где значения $\psi(\lambda, t_s) = \frac{\tau_w(\lambda, t_s)}{w}$ приведены на рис. 1. Величина $\tau(\lambda)$ связана с измеряемой яркостной температурой соотношением

$$T_{\text{я}, \lambda} = T_{\text{ср}}(\lambda, \theta) (1 - e^{-\tau(\lambda)}), \quad (4)$$

где

$$T_{\text{ср}}(\lambda, \theta) = \frac{\int_0^H T(h) \gamma(h, T) \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^h \gamma(h', T) dh'\right) dh}{\int_0^H \gamma(h, T) \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^h \gamma(h', T) dh'\right) dh} \quad (5)$$

— средняя температура атмосферы. Решая систему (3) совместно с уравнением (4) итерационным методом (достаточно двух итераций), находим $\tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5)$ и W . Первое приближение для $T_{\text{ср}}(\lambda, \theta)$ рассчитывается по экстраполированным [6] значениям метеопараметров атмосферы. При отсутствии приземных инверсий температуры экстраполированные значения $T_{\text{ср}}(\lambda, \theta)$ хорошо согласуются с [7] (итерационный процесс можно проводить и с использованием результатов восстановления профиля $T(h)$, который сходится и дает практически аналогичный результат). Ошибка $T_{\text{ср}}(\lambda, \theta)$ обусловлена, в основном, неопределенностью высоты облака и не превосходит 1%.

Переход от $\tau_{\text{H}_2\text{O}}(13,5)$ к интегральному влагосодержанию Q осуществляется через уравнение связи, получаемое из теории поглощения водяным паром:

$$\tau_{\text{H}_2\text{O}}(\text{Непер}) = (0,068 \pm 0,005) Q \text{ г/см}^2. \quad (6)$$

Точность определения интегральной водности облаков W по описанной методике и при реализованных в данной работе точностях измерений яркостных температур составила величину $0,05\text{--}0,1 \text{ кг/м}^2$ в зависимости от W в пределах $0\text{--}2 \text{ кг/м}^2$ соответственно. Точность определения интегрального влагосодержания $Q \sim 15\%$.

Полученные значения Q и W используются для задания ядра $K(\theta, h, T)$ уравнения (1). При решении задачи восстановления профиля температуры $T(h)$, уравнение (1) линеаризуется путем подстановки экстраполированных значений температуры $T^*(h)$ в ядро $K(\theta, h, T)$ и принимает вид

$$\delta T_{\lambda, \lambda}(\theta) = \int_0^H K(\theta, h, T^*) \delta T(h) dh, \quad (7)$$

где

$$\delta T(h) = T(h) - T^*(h), \quad \delta T_{\lambda, \lambda}(\theta) = T_{\lambda, \lambda}(\theta) - \int_0^H T^*(h) K(\theta, h, T^*) dh.$$

Уравнение (7) решается методом статистической регуляризации [8], в результате применения которого решение получается в виде вектора

$$\delta T = (K^* V K + B_{TT}^{-1})^{-1} K^* V \delta T_{\lambda}, \quad (8)$$

где B_{TT} — ковариационная матрица температуры, K — матрица, получаемая при алгебраизации уравнения (7); K^* — транспонированная матрица K ; V — матрица ошибок измерений.

Естествен вопрос о влиянии точности определения интегральной водности облаков W и их эффективной температуры (или высоты, что одно и то же) на результаты восстановления температурного профиля $T(h)$ из угломестных измерений в области $\lambda \sim 5 \text{ мкм}$ (влияние Q рассмотрено в [3, 5]). Численные эксперименты по решению прямой и обратной задач показали, что ошибка определения W должна быть не больше $0,1 \text{ кг}/\text{м}^2$ для зимних условий, когда $t_0 \approx -30 \div 0^\circ\text{C}$, и меньше или порядка $0,15 \text{ кг}/\text{м}^2$ для летних — $t_0 \approx 0 \div 20^\circ\text{C}$ (т. е. чем больше значения $\gamma_W(t_0)$ на $\lambda \sim 5 \text{ мкм}$, тем выше должна быть точность определения W). При указанных ошибках среднее отклонение восстановленных значений температуры от зондовых не превосходит $1,5 \text{ К}$, что соизмеримо с результатами, полученными для безоблачной атмосферы [3, 9]. Дальнейшее увеличение систематической ошибки в W приводит к смещению надоблачного участка профиля $T(h)$ по оси температур на величину $\sim 1 \text{ К}$ на каждые $0,1 \text{ кг}/\text{м}^2$ ошибке в величине W . Случайная ошибка в W (до 50%) на различных углах зондирования (или, что эквивалентно вариации приведенных к вертикальному столбу значений интегральной водности на луче зондирования) не влияет на результат восстановления профиля $T(h)$. Это обстоятельство объясняется слаживающим действием регуляризирующего члена уравнения (8).

Неопределенность задания высоты облачных образований также слабо сказывается как на результатах измерения яркостной температуры атмосферы, так и на результатах восстановления температурного профиля. Например, ошибка определения высоты облака в 4 км при условии, что его эффективная температура меняется в пределах $t_0 \approx -20 \div 20^\circ\text{C}$, приводит к увеличению ошибки восстановления $T(h)$ на величину $\sim 0,7 \text{ К}$. Указанное обстоятельство объясняется тем, что возрастание коэффициента поглощения облака, а следовательно, и его вклада в радиояркостную температуру с ростом высоты (уменьшением t_0) компенсируется экранирующим действием подоблачной атмосферы и уменьшением собственной температуры облака. Рассмотренные выше количественные оценки приведены для рабочей частоты зондирования $\nu = 53,5 \text{ ГГц}$.

2. Комплексные радиометрические измерения собственного излучения облачной атмосферы проводились в декабре—январе 1977—78 гг. на радиоастрономическом полигоне НИРФИ «Зименки» с помощью радиометрических приемников [10, 11] на частотах $\nu_1 = 53,5 \text{ ГГц}$, $\nu_2 = 50 \text{ ГГц}$, $\nu_3 = 22,23 \text{ ГГц}$. Флуктуационная чувствительность радиометров при наблюдениях составляла соответственно $\delta T_1 \approx 1,5 \text{ К}$; $\delta T_2 \approx 1,5 \text{ К}$; $\delta T_3 \approx 0,3 \text{ К}$ при постоянной времени интегрирования

$\Delta t = 1$ с (измерения проводились обычно при $\Delta t = 4$ с). Прием радиоизлучения осуществлялся на рупорные антенны с диаграммой направленности по уровню половинной мощности — 8°. Абсолютная калибровка принимаемого радиоизлучения на частотах ν_1 и ν_2 осуществлялась аналогично [10], а на ν_3 с предварительной калибровкой параметров антенн по собственному радиоизлучению безоблачной атмосферы, яркостная температура которой рассчитывалась по аэрологическим данным. Точность определения яркостных температур на ν_1 составляла величину 0,5—1,5 К при изменении зенитного угла $\theta = 90 \div 0^\circ$ соответственно [9] на ν_2 1 К, на ν_3 2 К. Измеренные значения яркостных температур обрабатывались по описанной методике.

В табл. 1 приведены значения интегрального влагосодержания Q и интегральной водности облаков W на время, соответствующее аэрологическому зондированию. Поскольку стандартными аэрогологическими средствами измерения водности облаков не проводятся, критерием точности определения W является соответствие измеренных и вычисленных по данным аэрологического зондирования значений Q (ошибки в определении W приводят к увеличению ошибок в Q , см. (3)).

Таблица 1

Дата	W, кг/м ²	Q, кг/м ²	Q _{зонд} , кг/м ²	Примечания
6.12.77	0,39	9,2	10,7	Сплошная равномерная облачность, st
7.12.77	0,14	6,0	4,9	Сплошная равномерная облачность, st
9.12.77	0,07	2,6	3,5	Разрывная облачность AS, AC
11.12.77	0	4,9	5,8	Чисто
18.12.77	0,32	8,7	7,3	Сплошная равномерная облачность, st
21.12.77	0	5,1	4,9	Чисто
22.12.77	0	2,3	2,9	Чисто
3.01.78	0,05	7,1	7,9	Разрывная облачность AS, AC

Примеры восстановления высотных профилей температуры $T(h)$ при наличии облачных образований различной мощности приведены на рис. 2—4. При решении интегрального уравнения (1) использовалась ковариационная матрица температуры B_{tt} , построенная по данным аэрологического зондирования атмосферы в Центральной части ЕТ СССР. При восстановлении вводилась дополнительная информация о приземной температуре. Для всех дней наблюдений восстановленные профили оказались предпочтительнее профилей, рассчитанных методом оптимальной экстраполяции. Восстановленные профили хорошо соглашаются с аэрологическими данными на высотах $h \approx 4 \div 8$ км, хотя принимаемое радиоизлучение формируется, в основном, в слое $h \approx 0 \div 4$ км (уровень выхода излучения на $\nu = 53,5$ ГГц равен $H_\lambda \approx 3$ км) и информация о профиле $T(h)$ с высот $h > 4$ км невелика [9]. Это свидетельствует о том, что корреляционные связи, заложенные в матрице B_{tt} , достаточны для удовлетворительного восстановления профиля температуры на высотах $h \approx 4 \div 8$ км. Отметим, что влияние слабой облачности — $W < 0,1$ кг/м² на измерения в области $\lambda \sim 5$ мм незначительно и при восстановлении профиля $T(h)$ может не учитываться. Восстановление за 9.12.77 г. (рис. 4) осуществлялось в предположении $\gamma_W(h, T) = 0$, в то время как измерения проводились в облачную ситуацию с $W = 0,07$ кг/м²:

На рис. 5 (нижняя кривая) приведена типичная запись (на длине волны $\lambda = 6 \text{ мм}$) флюктуаций интегральной водности сплошной равномерной облачности, которые в среднем составляют величину $\sim 0,05 \text{ кг}/\text{м}^2$ с характерным пространственным масштабом неоднородностей $\sim 2 \text{ км}$. В пределах точности измерений не было замечено коррелированных флюктуаций интегральной влажности. При наличии разрывной облачности (с $W < 0,4 \text{ кг}/\text{м}^2$) также не отмечалось существенного увеличения влагосодержания Q в облачных участках по сравнению с безоблачными.

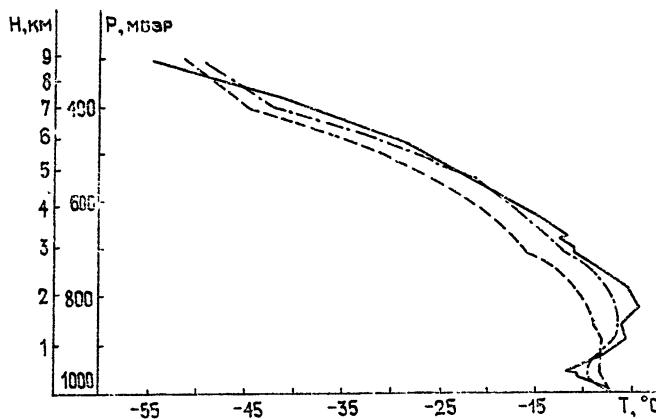


Рис. 2. Пример восстановления профиля температуры для 6.12.77 г.
($W = 0,39 \text{ кг}/\text{м}^2$):
сплошная линия — зонд, пунктир — экстраполяция, точки — восстановление.

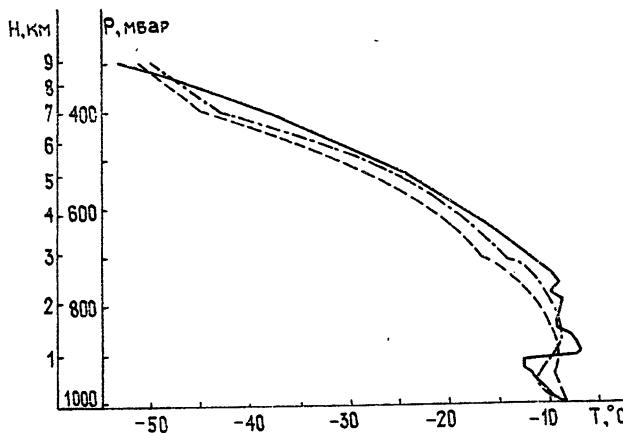


Рис. 3. Пример восстановления профиля температуры для 7.12.77 г.
($W = 0,17 \text{ кг}/\text{м}^2$).
Обозначения те же, что на рис. 2.

Наиболее сильные неоднородности интегральной водности и влагосодержания наблюдались во фронтальных зонах. На рис. 5 (верхняя кривая) приведена запись прохождения участка фронтальной зоны атлантического циклона 18.12.77 г., где уверенно регистрировались области значительно большей интегральной водности (до $1,5 \text{ кг}/\text{м}^2$) по сравнению со средней ($\sim 0,3 \text{ кг}/\text{м}^2$). Эти области представляют со-

бий компактные образования с размерами по горизонтали около 200—400 м. Интегральное содержание водяного пара в них также превышает средний уровень в 1,5—2 раза. По-видимому, в этих областях происходят интенсивные процессы смены агрегатных состояний воды.

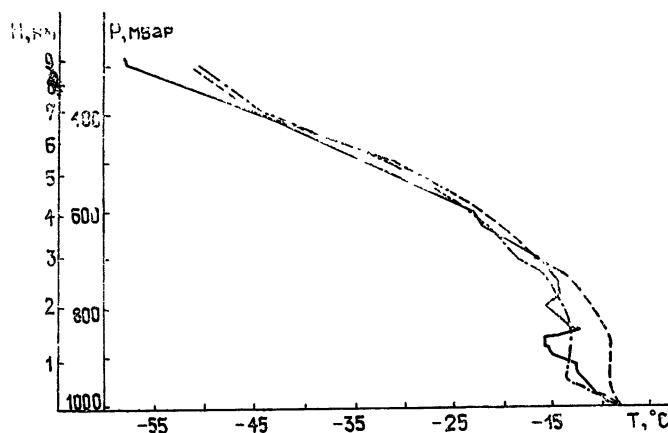


Рис. 4. Пример восстановления профиля температуры для 9.12.77 г.
($W = 0,07 \text{ кг}/\text{м}^2$).

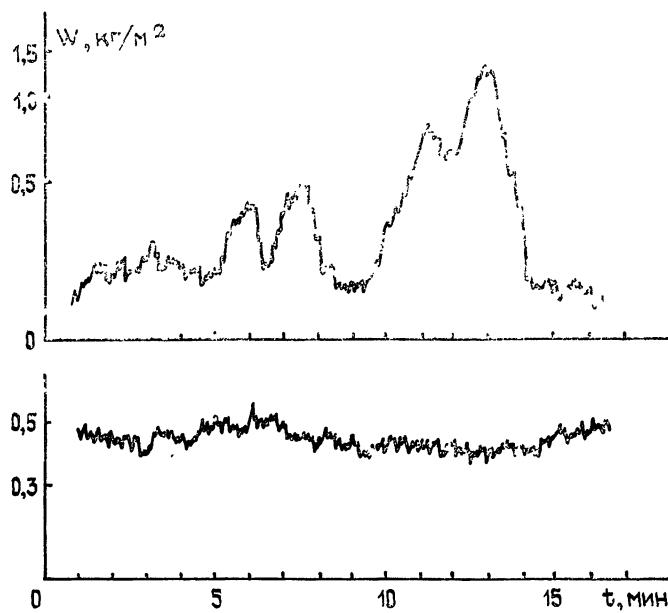


Рис. 5.

Радиометрические методы позволяют в принципе осуществлять измерения направления и скорости ветра на высоте облачных образований. Эти измерения основываются на принципе «замороженной» турбулентности и корреляционном анализе результатов измерений радиоизлучения неоднородностей интегральной водности тремя пространственно разнесеными приемниками. При известной эффективной высоте облачных образований, которая также определяется радиометрическим

методом [2], измерения направления и скорости ветра можно проводить с помощью одного приемника, осуществляя, скажем, коническое или раcтровое сканирование диаграммы направленности. Оцененная по результатам радиометрических наблюдений неоднородностей вторым способом, скорость движения фронтальной зоны 18.12.77 г. оказалась равной. $\sim 27 \text{ км/час}$, что хорошо согласуется с синоптическими данными.

Полученные результаты показывают реальную возможность осуществления дистанционных измерений широкого класса метеопараметров атмосферы радиометрическими методами, применение которых в метеорологической практике позволяет оперативно и непрерывно получать важную синоптическую информацию.

Авторы благодарны В. И. Алешину, А. П. Наумову, С. А. Жевакину за обсуждение полученных результатов и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Башаринов, А. С. Гурвич, С. Т. Егоров, Радиоизлучение Земли как плацеты, изд. Наука, М., 1974.
2. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутузов, Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова, вып. 222, 111 (1968).
3. В. И. Алешин, А. П. Наумов, В. М. Плечков, М. И. Сумин, А. В. Троицкий, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 1198 (1977).
4. С. А. Жевакин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 8, 1122 (1978).
5. А. Т. Ершов, Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 11, № 2, 1220 (1975).
6. А. С. Гандин, Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова, вып. 114, 75 (1963).
7. А. Г. Кисляков, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 3, 451 (1966).
8. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, 102, вып. 3, 345 (1970).
9. М. И. Сумин, А. В. Троицкий, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 13, № 10, 1090 (1977).
10. Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Л. К. Сизьмина, А. В. Троицкий, А. М. Штанюк, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 1, 25 (1976).
11. В. С. Зборовский, Л. Ф. Ларионова, Р. А. Самойлов, Б. Н. Федянеев, В. В. Хрулев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 1, 295 (1978).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 июля 1978 г.

MEASUREMENTS OF METEOPARAMETERS BY REMOTE SENSING OF CLOUDINESS ATMOSPHERE

M. G. Kuznetsova, V. A. Rassadovsky, A. V. Troitsky

A method is suggested determining the basic meteoparameters by remote sensing of cloudiness atmosphere in the bands of oxygen ($\lambda \sim 5 \text{ mm}$) and water vapour ($\lambda \sim 13.5 \text{ mm}$) absorption, as well as in the microwave transparency windows. The temperature profile, integral moisture content, water storage of clouds and wind velocity are detected and the results are given. Optimal conditions and the accuracy of the parameters given are discussed

УДК 621.378.3

К ВОПРОСУ О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Н. С. Гинзбург, Н. Д. Миловский, Т. В. Ястребова.

Исследуется инкремент нарастания возмущений, распространяющихся под углом к волновому вектору интенсивной волны $E(\zeta, \tau) = \mathcal{E}(\zeta) \cos [\Omega(\tau - \zeta) + \varphi(\zeta)]$ в нелинейной среде, представляющей собой однородно уширенное активное вещество с линейными потерями Г. Учитывается влияние расстройки $\delta = \Omega - \Omega_0$ частоты волны Ω от центра линии люминесценции Ω_0 активного вещества. Исследуются механизмы, формирующие инкремент развития возмущений. В случае, когда в качестве интенсивного поля рассматривается поле стационарной генерации ОКГ бегущей волны, определено влияние пакетки $\Omega_0 t^{p_0}$, расстройки δ и линейных потерь Г на инкремент нарастания и структуру развивающихся возмущений. Результат развития пространственных возмущений рассматривается как один из возможных путей образования поперечной структуры внутреннего поля ОКГ бегущей волны. На основе этого предположения произведены оценки поперечного масштаба и времени развития поперечной структуры поля.

В связи с прогрессом в области создания мощных источников когерентного излучения становится все более актуальным исследование возможности самовоздействия (в частности, самофокусировки) поля при резонансных взаимодействиях поля с активной (а также пассивной) средой. Некоторые аспекты этой задачи рассматривались в работах [1–5]. Например, в [1–4] обсуждалась принципиальная возможность самофокусировки в нелинейной среде с резонансным усилением или поглощением, в [1, 5] изучалась зависимость ширины распространяющегося в активной среде пучка от параметров вещества, начальной ширины пучка и расстояния.

В настоящей работе некоторые вопросы резонансных взаимодействий поля с активной средой рассматриваются в связи с исследованием устойчивости интенсивной плоской монохроматической волны $\mathcal{E}(\zeta) \cos [\Omega(\tau - \zeta) + \varphi(\zeta)]$, распространяющейся в полуబезграничной нелинейной среде, которая представляет собой активное вещество с однородно уширенной линией люминесценции. Учитывается влияние расстройки $\delta = \Omega - \Omega_0$ частоты волны Ω от центра линии люминесценции Ω_0 , а также влияние линейных потерь Г.

Исследуется развитие амплитудно-фазовых возмущений

$$\tilde{\mathcal{E}}(\xi, \zeta) = [\mathcal{E}(\zeta) + u(\xi, \zeta) - iv(\xi, \zeta)] \exp [i\varphi(\zeta)] \quad (1)$$

$$(u, v \ll \mathcal{E}),$$

распространяющихся на частоте основного поля под малыми углами к волновому вектору основного поля. Исходным уравнением для описания изменения медленной комплексной амплитуды поля в пучке является параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \xi^2} - 2i \Omega_0 \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial \zeta} + 2i \Omega_0 \left[\frac{\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2} (1 - i\delta)}{1 + \delta^2 + \tilde{\mathcal{E}}^2} - \Gamma \right] \tilde{\mathcal{E}} = 0, \quad (2)$$

которое получается в рассматриваемом стационарном случае из совокупности волнового уравнения для поля и уравнений для матрицы плотности двухуровневой системы. В уравнении (2) введены безразмерные величины и координаты: напряженность электрического поля $E(\xi, \zeta) = |(E(\xi, \zeta)d_{12})/\hbar V_{\parallel} V_{\perp}|$, где $E \parallel d_{12} = y_0 d_{12} = d_{21}$, инверсная разность населеностей (в отсутствие поля) $n^0 = (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) 4\pi N |d_{12}|^2 / \hbar e V_{\parallel} V_{\perp}$, коэффициент линейного поглощения в материале $2\Gamma = 4\pi \sigma/e V_{\perp}$, отношение времени поперечной релаксации к времени продольной релаксации $\gamma^2 = V_{\parallel} V_{\perp}^{-1}$, центральная частота перехода $\Omega_0 = \omega_0 V_{\perp}^{-1}$ и соответственно время $\tau = t V_{\perp}$, координаты $(\xi, \zeta) = V_{\perp} \sqrt{\varepsilon \mu} c^{-1}(x, z)$. В свою очередь символами ρ_{ij} и d_{ij} обозначены элементы операторов матрицы плотности и дипольного момента молекулы, N — концентрация, остальные обозначения общепринятые.

Уравнение (2) корректно в приближении параксиальных волновых пучков, когда характерный безразмерный масштаб Λ_{\parallel} изменения медленной амплитуды по продольной координате ζ велик по сравнению с характерным масштабом Λ_{\perp} изменения $\tilde{\mathcal{E}}(\xi, \zeta)$ по поперечной координате ξ^* :

$$\Lambda_{\parallel} \gg \frac{2\pi}{\Omega_0}, \quad \Lambda_{\perp} \gg \frac{2\pi}{\Omega_0}, \quad \Lambda_{\parallel} \sim \Lambda_{\perp} \Omega_0^2. \quad (3)$$

Исходная плоская волна $\tilde{\mathcal{E}}(\zeta) e^{i\varphi(\zeta)}$ является одномерным решением уравнения (2). Подставляя (1) в (2) и линеаризуя (2) относительно малых полей $(u - iv)e^{i\varphi}$, получим два действительных уравнения для медленных амплитуд реальной $u(\xi, \zeta)$ и мнимой $v(\xi, \zeta)$ частей возмущений:

$$\left\{ \frac{1}{2\Omega_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} + v \left[\frac{\Omega_0 \gamma n^0 / 2}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2(\zeta)} - \Gamma \right] - u \frac{\Omega_0 \gamma n^0 \delta \mathcal{E}^2(\zeta)}{[1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2(\zeta)]^2} = 0; \quad (4a) \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\Omega_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} - u \left[\frac{\Omega_0 \gamma n^0 / 2}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2(\zeta)} - \Gamma \right] + u \frac{\Omega_0 \gamma n^0 \mathcal{E}^2(\zeta)}{[1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2(\zeta)]^2} = 0. \quad (4b) \right.$$

Система (4) имеет переменные по ζ коэффициенты, так что в общем случае не удается отыскать ее аналитическое решение. Однако во многих случаях зависимости коэффициентов от ζ можно считать весьма слабыми. Поэтому представляется целесообразным найти и проанализировать решения (4) в приближении, в котором интенсивность сильного поля \mathcal{E}^2 считается не зависящей от ζ ($\mathcal{E}^2 = \text{const}$). Указанное приближение можно считать корректным на тех участках активного слоя, где скорость изменения (нарастания или затухания) возмущений $e = u - iv$ значительно превосходит скорость изменения амплитуды основного поля:

$$\frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial \zeta} \gg \frac{1}{\mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{d\xi}. \quad (5)$$

* Необходимо отметить, что приближение (3) является фактически условием адекватности описания распространения пучков линейно-поляризованного поля в однородной изотропной среде. Поэтому справедливо обобщение уравнения (2) на трехмерный случай, которое сводится к замене оператора $\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)$ на оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$.

В приближении $\mathcal{E}^2 = \text{const}$ система (4) имеет решения в виде

$$u, v = u^0 e^{-ix\xi - i\alpha z}, \quad (6)$$

где x — поперечное волновое число, α — часть продольного волнового числа. Подставляя (6) в (4), можно получить характеристическое уравнение и найти его корни

$$\left(-\frac{i\alpha}{\Gamma} \right)_{1,2} = - \left[\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} \frac{\mathcal{E}^2}{(1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2)^2} - \frac{\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} - 1 - \delta^2 - \mathcal{E}^2}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} \frac{\mathcal{E}^4}{(1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2)^2} \right]^2 - \frac{x^2}{2\Omega_0 \Gamma} \left[\frac{x^4}{2\Omega_0 \Gamma} + 2\delta \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} \frac{\mathcal{E}^2}{(1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2)^2} \right]} \quad (7)$$

Исследование выражения (7) приводит к выводу, что в диапазоне отрицательных расстроек $\delta < 0$ имеется область пространственных частот $(0, x_{\text{lim}})$, внутри которой реальная часть одного из корней $w_1 = \text{Re}(-i\alpha_1)$ положительна.

Таким образом, возмущения, в пространственном спектре которых содержатся частоты, удовлетворяющие условию $0 < x < x_{\text{lim}}$, имеют положительный инкремент. В результате нарастания пространственных возмущений в интервале $(0, x_{\text{lim}})$, по-видимому, неизбежно должно происходить первичное дробление плоской волны на отдельные неоднородности. В рамках рассматриваемой задачи (линейной относительно возмущений) вопрос о дальнейшем развитии образовавшихся неоднородностей, вообще говоря, не может быть рассмотрен. Однако, опираясь на выводы подобных исследований [7, 8], проведенных для пассивных сред, а также на экспериментальные результаты [6] по наблюдению поперечных структур поля ОКГ в ближней зоне, можно предположить, что в области параметров $\delta < 0$ и $0 < x < x_{\text{lim}}$ в активной среде происходит дальнейшее развитие образовавшихся неоднородностей, в результате которого из них формируются узкие пучки-нити поля излучения. Происходит процесс, аналогичный процессу самофокусировки поля в пассивной среде. При этом в поперечном сечении пучка может ожидаться «мозаичная» структура поля.

Анализируя выражение (7), можно оценить вклад каждого члена уравнений (4а), (4б) в развитие возмущений.

Первые члены системы (4) учитывают дифракционное расплывание пучка, член $\frac{\Omega_0 \gamma n^0 / 2}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2}$ — линейное усиление возмущений в активной среде за счет средней (с учетом эффекта насыщения) инверсной разности населенностей $\bar{n} = \frac{n_0}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2}$, член $(-\Gamma)$ — ослабление за счет распределенных в слое линейных потерь. Последние члены в (4а) и (4б) учитывают изменение возмущений из-за наличия реальной и мнимой частей (соответственно) эффективной нелинейной диэлектрической проницаемости среды на частоте рассматриваемого монохроматического процесса. Они описывают развитие возмущений, происходящее в результате параметрического взаимодействия слабых полей через посредство сильного*.

* Необходимо отметить, что термин «параметрическое взаимодействие» употребляется, как правило, при исследовании развития немонохроматических возмущений. Однако и в частном случае монохроматического процесса такая терминология, по-видимому, корректна.

Линейное усиление за счет средней инверсной разности населенностей частично (или полностью в режиме насыщения усиления) компенсируется ослаблением за счет распределенных в слое линейных потерь Г. Создаваемый за счет этих механизмов инкремент нарастания возмущений $\frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial \zeta}$ в точности равен локальному инкременту нарастания

основного поля $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\zeta}$. В режиме насыщения усиления $(\varepsilon^2 = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} - 1 - \delta^2)$ этот инкремент равен нулю, и развитие возмущений возможно лишь за счет параметрического взаимодействия слабых полей через посредство сильного. Из уравнения (4а) следует, что при $\delta \rightarrow 0$ уменьшается и стремится к нулю вклад в развитие возмущений параметрического взаимодействия, обусловленного наличием действительной части нелинейной диэлектрической проницаемости среды. При этом уменьшается область пространственных частот, в которой возможно усиление возмущений ($\omega_{\text{lim}} \rightarrow 0$) и величина положительного инкремента нарастания ($\omega_{\text{max}} \rightarrow 0$). Параметрическое взаимодействие слабых полей, обусловленное наличием мнимой части нелинейной диэлектрической проницаемости активной среды и представленное в системе (4) последним членом уравнения (4б), вызывает монотонное (внутри всего диапазона изменения ω) затухание слабых полей возмущений. При этом зависимость декремента затухания $\omega(\omega)$ от пространственной частоты такова, что с уменьшением частоты уменьшается декремент, и в точке $\omega = 0$ он обращается в нуль. Такая зависимость $\omega(\omega)$ должна приводить к быстрому затуханию высших пространственных гармоник возмущений и, следовательно, к увеличению поперечного масштаба поля возмущения.

Таким образом, можно сделать вывод, что именно параметрическое взаимодействие полей, происходящее из-за наличия действительной части эффективной нелинейной диэлектрической проницаемости активной среды, формирует поперечную структуру поля при распространении плоской волны в активной среде.

Из выражения (7) можно определить, что максимальный положительный инкремент

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \delta^2 + \varepsilon^2)^2} (\sqrt{1 + \delta^2} - 1) + \frac{(\Omega_0 \gamma n^0 / 2) - \Gamma(1 + \delta^2 + \varepsilon^2)}{1 + \delta^2 + \varepsilon^2} \quad (8)$$

имеет возмущения с пространственным периодом

$$L_{\perp} = \pi (\omega_{\text{opt}})^{-1} = \pi \left[-\Omega_0^2 \gamma n^0 \delta \frac{\varepsilon^2}{(1 + \delta^2 + \varepsilon^2)^2} \right]^{-1/2}. \quad (9)$$

Считая, что образование поперечной структуры поля происходит в результате исследуемого развития возмущений, по максимальному инкременту ω_{max} и соответствующему ему пространственному периоду L_{\perp} можно оценить характерные продольный и поперечный масштабы формирующейся структуры. Так величину L_{\perp} пространственного периода наиболее быстро развивающихся возмущений можно считать некоторым оценочным характерным поперечным масштабом образующейся структуры поля, а величину $L_{\parallel} = (\omega_{\text{max}})^{-1}$ принять в качестве ее характерного продольного масштаба. От продольного масштаба L_{\parallel} можно перейти к характерному времени развития T поперечной струк-

туры. В некоторых случаях* (например, в случае рубина) оно определяется формулой

$$T = \frac{L_{\parallel} V \epsilon}{c}. \quad (10)$$

На участке насыщения усиления, где

$$\mathcal{E}^2 = \text{const} = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} - 1 - \delta^2, \quad (11)$$

выражения (8) и (9) примут вид

$$w_{\max} = \Gamma \frac{\Omega_0 \gamma n^0 - 2\Gamma(1 + \delta^2)}{\Omega_0 \gamma n^0} (\sqrt{1 + \delta^2} - 1); \quad (12)$$

$$x_{\text{opt}} = \left[-2\Omega_0 \Gamma \delta \frac{\Omega_0 \gamma n^0 - 2\Gamma(1 + \delta^2)}{\Omega_0 \gamma n^0} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Необходимо отметить, что именно такую величину, структуру и, следовательно, такие же основания для развития поперечных неоднородностей имеет и внутреннее поле ОКГ бегущей волны**. Поэтому полученные ниже оценки параметров образующейся поперечной структуры могут быть использованы для объяснения эффектов образования поперечной неустойчивости в лазерах бегущей волны.

В рассматриваемом случае характерные размеры образующейся поперечной структуры L_{\parallel} и L_{\perp} определяются тремя параметрами: накачкой $\Omega_0 \gamma n^0$, расстройкой δ и линейным поглощением в среде Γ .

С ростом накачки $\Omega_0 \gamma n^0$ происходит уменьшение характерного поперечного размера поля и уменьшение времени развития его структуры. Зависимость масштабов от расстройки δ такова, что характерный поперечный масштаб имеет минимальное значение при $\delta_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} - 1 \right)$, а характерное время развития минимально при $\sqrt{1 + \delta^2} = \frac{1}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 + 3 \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma}} \right)^{***}$. При $\delta \rightarrow 0$ обе величины L_{\perp} и T становятся бесконечно большими****. Зависимости L_{\perp} и T от линейного поглощения Γ имеют минимальное значение при $2\Gamma_m = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2(1 + \delta^2)}$ и обращаются в нуль при $2\Gamma = 0$ и $2\Gamma = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{1 + \delta^2}$.

Существование оптимума по параметру Γ может быть объяснено тем, что при значении $\Gamma = \Gamma_m$ максимален вклад параметрического

* Переход ко времени развития нити возможен только при $T \gg \gamma_{\perp}^{-1}$.

** Предполагается, что внутреннее поле ОКГ бегущей волны рассматривается в приближении модели, в которой потери и активная среда равномерно «размазаны» по всему объему резонатора.

*** В ОКГ (в частности, в ОКГ на рубине) расстройки δ , как правило, малы, $\delta \gg 1$, так что δ_m находится вне области этих расстроек.

**** Для значений интенсивности, отличных от величины уровня насыщения, рассматриваемое геометрическое приближение становится некорректным при $\delta \rightarrow 0$. Изучение усиления электромагнитного поля на частоте центра линии представляет самостоятельный интерес. Так ранее, в ряде работ [9-11], было показано, что генерация лазера бегущей волны на центре линии однородно уширенного активного вещества устойчива по отношению к любым возмущениям на той же частоте. Из результатов настоящей работы следует, что в случае режима компенсации усиления, при $\delta \rightarrow 0$ область неустойчивости, сжимаясь в точку, стремится к нулю.

усиления в развитие возмущений. Исследование последнего члена уравнения (4а) показывает, что одним из ряда параметров, определяющих эффективность параметрического усиления, является интенсивность поля \mathcal{E}^2 . При значении $\mathcal{E}_m^2 = 1 + \delta^2$ вклад параметрического усиления в развитие возмущений максимален. В случае, когда в качестве интенсивного поля рассматривается внутреннее поле ОКГ (11), эффективность параметрического усиления возмущений определяется (при заданных δ и $\Omega_0 \gamma n^0$) величиной линейных потерь Γ . Значение $\Gamma = \Gamma_m$ соответствует значению $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_m^2$ интенсивности поля ОКГ.

Таким образом, наиболее быстрое развитие пространственных возмущений в ОКГ происходит тогда, когда величина линейных потерь Γ принимает значение Γ_m . Возмущения затухают, если линейные потери в активной среде малы, $\Gamma \rightarrow 0$, или если величина их стремится к значению $\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{1 + \delta^2}$.

Если считать рассматриваемые процессы параметрического усиления слабых полей в активной среде ОКГ тождественными процессу самофокусировки поля в ОКГ, то, несмотря на различия в постановках задач, могут быть поняты результаты работы [1]. Расчеты на ЭВМ, проведенные авторами [1], показывают, что в однородно уширенной активной среде без линейных потерь не происходит обужения пучка в целом, т. е. не меняется его пространственный спектр. Этот вывод находится в соответствии с приведенным выше результатом, согласно которому в ОКГ без линейных потерь $\Gamma = 0$ невозможно развитие возмущений, которые могли бы изменить спектр пространственных частот поля излучения.

Проведенные для рубина ($\gamma_{\perp} = 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $\gamma_{\parallel} = 10^3 \text{ c}^{-1}$, $\epsilon = 2,7$, $\omega = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ rad/c}$) оценки дают следующие характерные параметры развития поперечной структуры (пучков-нитей) поля: поперечный размер — 0,04 см (при $\delta = -1$, $\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} = 11$) или 0,15 см (при $\delta = -0,1$, $\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} = 2$), время развития $5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ ($\delta = -1$, $\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} = 11$) или $0,7 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ (при $\delta = -0,1$, $\frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} = 2$). Эти результаты находятся

в достаточно хорошем соответствии с экспериментально наблюдаемой поперечной структурой поля ОКГ на рубине и полученными параметрами пичков генерации лазера на рубине [6], если предположить, что центральная частота линии люминесценции в процессе генерации смещается в зеленую часть спектра.

Проведенное в работе рассмотрение дает возможность составить некоторое, не противоречащее известным экспериментальным (а также теоретическим) результатам представление о возможных процессах самовоздействия электромагнитных волн в резонаторах оптических квантовых генераторов бегущей волны.

В активной нелинейной среде стационарная волна генерации распадается на отдельные неоднородности, которые затем развиваются в нити генерации. Образовавшиеся вдоль оси каналы высвечиваются. Из неоднородностей образуются новые каналы в соседних областях, формируя тем самым пички генерации и «зернистую» поперечную структуру поля.

При сопоставлении выводов работы с экспериментальными результатами необходимо учесть, что в приведенном исследовании не рассматривались возмущения с частотами, отличными от частоты поля излуче-

ния. Можно ожидать, что расширение класса рассматриваемых возмущений приведет к существенному изменению характера неустойчивости при $\delta = 0$.

В заключение авторы выражают признательность за дискуссию и интерес к работе В. И. Таланову.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Javan and P. L. Kelly, IEEE J. Quant. Electr., QE-2, № 9, 470 (1965).
2. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖТФ, 36, № 2, 401 (1966).
3. Б. Л. Желнов, В. С. Смирнов, ЖТФ, 55, № 4 (10), 1332 (1968).
4. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопулло, ЖЭТФ, 61, 2(8), 520 (1971).
5. C. James Elliott, Appl. Phys Lett., 24, № 2, 91 (1974).
6. Я. И. Ханин, Динамика квантовых генераторов, Квантовая радиофизика, т. 2, изд. Сов. радио, М., 1975.
7. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 47 (1966).
8. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Нелинейная оптика, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, изд. Наука, Сибирское отделение, 1967, стр. 428.
9. Ю. Л. Климонтович, В. Н. Курятов, П. С. Ланда, ЖЭТФ, 51, № 1, 3 (1966).
10. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия, 21, № 3, 386 (1966).
11. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, ЖЭТФ, 52, № 6, 1616 (1967).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 мая 1978 г.

TO THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD SELF-FOCUSING IN AN ACTIVE MEDIUM

N. S. Ginzburg, N. D. Milovskij, T. V. Yastrebova

The authors studied the increment of disturbances development propagating at the angle to the wave vector of an intensive wave $E(\zeta, \tau) = E(\zeta) \cos [\Omega(\tau - \zeta) + \varphi(\zeta)]$ in a nonlinear medium which is a homogeneous broadened active material with linear losses Γ . The effect of detuning $\delta = \Omega - \Omega_0$ of the wave frequency Ω from the centre of the luminescence line Ω_0 of the active material is taken into account. Mechanisms forming the increment of the disturbance development is investigated. The effect of the pump $\Omega_0 \gamma n^0$, detuning δ , and linear losses Γ on the increment of decreasing and the structure of the developed disturbances are defined for the case when an intensive field is considered as a field of the stationary oscillation of a travelling wave laser. The result of space disturbances development is treated as one of the possible ways of formation of transverse structure of the travelling wave laser internal field. On the basis of this assumption estimations have been made of the transverse scale and the time of the field transverse structure development.

УДК 621.385.6

ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ ЛОВ ДИАПАЗОНА КОРОТКИХ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН

К. А. Горонина, Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко

Экспериментально исследованы флюктуации частоты ЛОВ, работающей в коротковолновой части миллиметрового диапазона. Метод измерения аналогичен известному «методу линии задержки». В качестве дискриминатора применен интерферометр. Измерен спектр флюктуаций в интервале частот 0,15—900 МГц. Порядок величины спектральной плотности флюктуаций $50 \text{ Гц}^2/\text{Гц}$ и зависимость флюктуаций частоты от ускоряющего напряжения могут быть объяснены флюктуациями скорости электронов.

В последние годы лампы обратной волны (ЛОВ) широко применяются в качестве гетеродинов приемников коротковолновой части миллиметрового диапазона волн. Как известно, чувствительность этих приемников в значительной степени определяется величиной шумов гетеродина. Вместе с тем, отсутствие достаточно полных данных о шумах ЛОВ миллиметрового диапазона затрудняет количественные оценки, необходимые при выборе параметров конструкции приемника. Указанное обстоятельство явилось причиной, побудившей к проведению экспериментального исследования шумов ЛОВ и, в частности, частотных флюктуаций.

АППАРАТУРА И МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Исследование частотных флюктуаций проводилось методом, в основном не отличающимся от известного «метода линии задержки» [1, 2]. Роль линии задержки выполняет интерферометр Маха — Цендера на сверхразмерных волноводах [3, 4].

Схема измерительной установки приведена на рис. 1. Излучение исследуемой ЛОВ через градуированный аттенюатор поступает на вход интерферометра Маха — Цендера, в котором осуществляется преобразование частотных флюктуаций в амплитудные. В интерферометре введена постоянная задержка $\tau \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ и имеется возможность плавной ее перестройки с точным отсчетом. Во всем диапазоне генерации ЛОВ коэффициент преобразования остается постоянным. К выходу интерферометра подключен диод, являющийся детектором. Спектр напряжения на нагрузке диода измерялся с помощью селективного вольтметра.

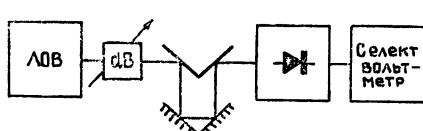


Рис. 1.

Наиболее эффективно преобразование частотных флюктуаций происходит при отстройке от интерференционного максимума на четверть длины волны. В самом же максимуме преобразования не происходит, на выходе детектора присутствуют лишь собственные шумы диода и шумы, связанные с амплитудными флюктуациями ЛОВ. Причем, на низких спектральных частотах

терференционного максимума на четверть длины волны. В самом же максимуме преобразования не происходит, на выходе детектора присутствуют лишь собственные шумы диода и шумы, связанные с амплитудными флюктуациями ЛОВ. Причем, на низких спектральных частотах

так шумы диода становятся преобладающими, что заставляет более тщательно подбирать диод [5].

Амплитудные флюктуации и собственный шум диода можно исключить и вычислить спектральную плотность частотных флюктуаций S_v на основе трех измерений шума на нагрузке диода: в интерференционном максимуме и на обоих его склонах (при этом необходимо установить одну и ту же СВЧ мощность на диоде с помощью аттенюатора). Рабочая формула для вычисления S_v имеет вид*

$$S_v(f) = k^2 \frac{\bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 - 2\bar{v}_1^2}{2\pi^2 \tau^2 \Delta f} \left(\frac{\pi f \tau}{\sin \pi f \tau} \right)^2. \quad (1)$$

Здесь \bar{v}_1^2 , \bar{v}_2^2 , \bar{v}_3^2 — средние квадраты напряжения в полосе селективного вольтметра Δf соответственно в интерференционном максимуме и на его склонах; k — калибровочный множитель, который определяется параметрами цепи детектора и выбором рабочей точки. Нетрудно получить формулу для определения k :

$$k = \frac{d}{8,6 \cdot \Delta I R} \frac{R_d + R}{R_d + r}, \quad (2)$$

где ΔI — приращение тока детектора при малом относительном изменении СВЧ мощности на $d \text{ dB}$, R и r — сопротивления по переменному и постоянному току нагрузки диода, R_d — дифференциальное сопротивление диода в рабочей точке.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Исследование спектра частотных флюктуаций проводилось в полосе частот 0,15—900 МГц в диапазоне перестройки ЛОВ 120—200 ГГц.

На рис. 2 приведены экспериментальные зависимости $\sqrt{S_v}$ от напряжения V на замедляющей системе ЛОВ для двух частот анализа $f_1 = 6,9 \text{ МГц}$, $f_2 = 900 \text{ МГц}$ (кривые 1 и 2). Как видно из рисунка, величина S_v не остается постоянной даже в сравнительно узком диапазоне перестройки.

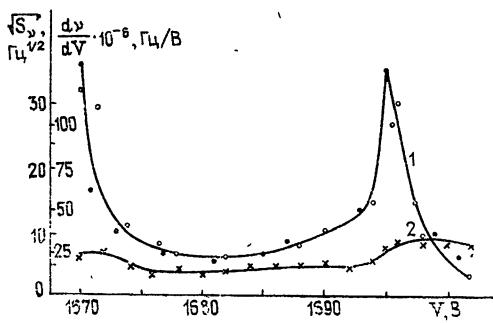


Рис. 2.

Рис. 2. Крутизна частотной характеристики $d\nu/dV$ и корень из спектральной плотности $\sqrt{S_v}$ (на двух спектральных частотах) в зависимости от ускоряющего напряжения V (темные кружки — $\sqrt{S_v}$, $f = 6,9 \text{ МГц}$, крестики — $\sqrt{S_v}$, $f = 900 \text{ МГц}$, светлые кружки — $d\nu/dV$).

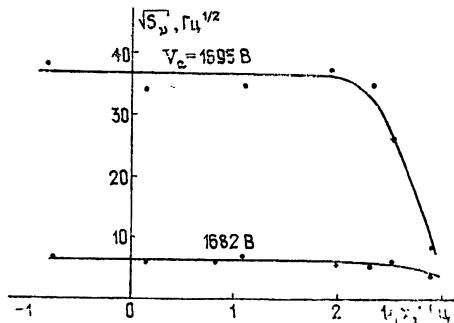


Рис. 3.

Рис. 3. Спектр частотных флюктуаций (при ускоряющих напряжениях, соответствующих максимуму и минимуму мощности).

* Исходные положения для вывода формулы имеются в [2].

Известно, что паразитная обратная связь в ЛОВ приводит к появлению перепадов генерируемой мощности при перестройке частоты и соответствующих изгибов частотной характеристики $v(V)$. Минимумы S_v приходятся на максимумы мощности, где минимальна и крутизна $d v/dV$. На рис. 2 приведены экспериментальные точки для $d v/dV^*$, они располагаются вблизи кривой 1, что указывает на пропорциональность величин $\sqrt{S_v}$ и $d v/dV$, которая четко прослеживается до частот анализа 200 МГц. На более высоких частотах максимумы S_v становятся менее острыми, для 900 МГц это можно видеть на кривой 2.

Линейную связь $\sqrt{S_v}$ и $d v/dV$ можно было бы объяснить, если считать источником нестабильности питания ЛОВ. В этом случае квазистатическая девиация частоты $\Delta v(t)$ связана с изменением напряжения $\Delta V(t)$,

$$\Delta v(t) = \frac{d v}{dV} \Delta V(t),$$

и отношение

$$g = S_v / (d v/dV)^2$$

равно спектральной плотности флюктуаций напряжения.

Для двух исследовавшихся экземпляров ЛОВ на частотах анализа 200 МГц были получены величины

$$\sqrt{g_1} = 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ В}\cdot\text{Гц}^{-1/2}, \quad \sqrt{g_2} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ В}\cdot\text{Гц}^{-1/2}. \quad (3)$$

Вместе с тем, измерение флюктуаций питающего напряжения дало величину $10^{-8} \text{ В}\cdot\text{Гц}^{-1/2}$, т. е. на два порядка меньшую. Это говорит о том, что флюктуации частоты создаются не источником питания, а внутренними шумами лампы. Величина g имеет смысл спектральной плотности эквивалентных флюктуаций напряжения на замедляющей системе и определяет требования к источнику питания.

Результаты, полученные для нескольких интервалов ΔV в разных частях диапазона генерации ЛОВ, носят аналогичный характер. Пропорциональность $\sqrt{S_v}$ и $d v/dV$ наблюдается всюду. Коэффициент пропорциональности в середине диапазона уменьшается на 10–15%.

На рис. 3 приведены спектральные зависимости флюктуаций частоты для двух значений V , соответствующих максимуму и минимуму генерируемой мощности. Некоторые наблюдавшиеся особенности на рисунке не отражены. В частности, вблизи частоты $f = 15$ МГц при всех V имеется подъем в спектре (~ 3 раз от основного уровня). Кроме того, вблизи 20 и 200 МГц при некоторых напряжениях также наблюдалось увеличение флюктуаций, которые были неустойчивы, величина же всплесков превышала средний уровень на несколько порядков.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обнаруженная на опыте зависимость между $\sqrt{S_v}$ и $d v/dV$ объясняется, если считать причиной флюктуаций частоты флюктуации скорости электронного пучка. Для оценки вклада тепловых флюктуаций скорости воспользуемся моделью, в которой многоскоростной поток электронов, эмиттируемых катодом, заменяется односкоростным и принимается величина спектральной плотности для случайной начальной скорости, равной [6]

* Изменение частоты определялось по смещению интерференционного максимума 90-го порядка.

$$\frac{\bar{v^2}}{\Delta f} = \frac{e(4 - \pi) kT}{mI}, \quad (4)$$

где e , m — заряд и масса электрона, k — постоянная Больцмана, T — температура катода, I — ток электронного пучка. В наших условиях под I следует понимать не полный ток пучка I_0 , а лишь часть его, которая эффективно взаимодействует с СВЧ полем, будем считать, что эта часть равна ηI_0 , где η — коэффициент полезного действия ЛОВ.

Используя (4), легко получить выражение для спектральной плотности эквивалентных флюктуаций напряжения

$$g_T = \frac{\pi}{2} (4 - \pi) \frac{(kT)^2}{e \eta I_0} \quad (5)$$

и численное значение $\sqrt{g_T} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ В} \cdot \text{Гц}^{-1/2}$.

Сравнивая полученную величину $\sqrt{g_T}$ с экспериментальными, приведенными выше (3), видим, что теоретическая величина меньше в 15 или 50 раз (для первого или второго экземпляров ЛОВ). Разница возможна из-за добавочных шумов [6, 7], которые увеличивают разброс скоростей по сравнению с тепловым; но, кроме того, следует иметь в виду, что принятая для оценки величина тока в пространстве взаимодействия (ηI_0) может не соответствовать действительности.

В работе [8] исследовалась ЛОВ 3-сантиметрового диапазона. Относительные величины S_v / v_0 (v_0 — частота генерации) для сантиметровой и миллиметровой ЛОВ оказались близкими. (В режимах, при которых наилучшая стабильность, значение S_v / v_0 соответственно равно $2 \cdot 10^{-10}$ и $3 \cdot 10^{-10}$.) Однако в [8] шум не зависит от ускоряющего напряжения и результаты измерений объясняются дробовым шумом, а не флюктуациями скорости. Интересно, что расчет, аналогичный [8], применительно к миллиметровой ЛОВ дает S_v , близкие к экспериментальным. Но все-таки без учета флюктуаций скорости остается непонятной связь между $\sqrt{S_v}$ и $d v/dV$. (В [8] эта связь, возможно, не проявилась, потому что были незначительны паразитная обратная связь и связанные с ней изменения крутизны $d v/dV$.)

В итоге можно сказать, что есть основания считать причиной нестабильности частоты ЛОВ флюктуации скорости электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 2, 145 (1950).
2. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
3. Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Кулаков, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 554 (1971).
4. Ю. А. Дрягин, Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1779 (1974).
5. О. Ф. Гришин, Техника средств связи, сер. Радиоизмерительная техника, вып. 1, 52 (1976).
6. Шумы в электронных приборах, под ред. Смуллина Л. Д. и Хауса Г. А. (пер. с англ.), изд. Энергия, М.—Л., 1964.
7. Б. Я. Мойжес, Физические процессы в оксидном катоде, изд. Наука, М., 1960.
8. J. B. Cicchetti and J. Munushian, IRE National Convention Record, part 3, Electron Devices, v. 6, p. 84.

FLUCTUATIONS OF BWO FREQUENCY OF SHORT MILLIMETER WAVE RANGE

K. A. Goronina, L. M. Kukin, L. V. Lubyako

Fluctuations of BWO frequency operating in the short-wave part of the millimeter range is experimentally investigated. The method of measurement is similar to the known «method of the line delay». An interferometer is used as a discriminator. The spectrum of fluctuations is measured in the frequency interval 0.15—900 MHz. The value order of the spectral density of fluctuations is $50 \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ and the dependence of the frequency fluctuations on the accelerating voltage may be explained by fluctuations of electron velocity.

УДК 621.373.42

ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ИЗБЫТОЧНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ТРАНЗИСТОРНЫХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ

В. М. Богачев, В. Г. Лысенко

Исходя из эквивалентной шумовой схемы биполярного транзистора и его кусочно-линейной модели, получено стохастическое дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами с периодически нестационарной правой частью, описывающее естественные и избыточные флюктуации в транзисторном генераторе в диапазоне высоких частот. На основе метода импульсных характеристик найдено точное решение этого уравнения. Проведен расчет на ЭВМ нормированных шумовых коэффициентов, с помощью которых вычисляются энергетические спектры флюктуаций в различных нелинейных транзисторных устройствах.

ВВЕДЕНИЕ

Повышенные требования к чистоте спектра радиосигнала в транзисторных автогенераторах, преобразователях, усилителях квазигармонических колебаний делают задачу расчета флюктуаций, обусловленных внутренними шумами транзистора, весьма актуальной. Анализу флюктуаций в транзисторных устройствах посвящено большое число работ, например [1–6]. В [1–5] проведен расчет флюктуаций в случае низких для транзистора частот, когда его инерционными свойствами можно пренебречь, а в [6] на основе одномерной теоретической модели транзистора изучены шумы в области высоких частот. Однако исследование флюктуаций на высоких частотах нельзя считать завершенным, поскольку в [6] принят ряд упрощений (не учитывается периодическая нестационарность шумовых процессов в транзисторе при больших амплитудах входных и выходных напряжений, сопротивление материала базы полагается равным нулю и т. д.). Поэтому цель данной работы двоякая: провести расчет спектральных плотностей естественных и избыточных флюктуаций в транзисторе в отсутствие перечисленных выше ограничений и проиллюстрировать использование результатов расчета на примере анализа флюктуаций в транзисторном автогенераторе.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ В ТРАНЗИСТОРЕ

Рассмотрим эквивалентную схему биполярного транзистора [7–9], изображенную на рис. 1. Шумовые источники представлены здесь

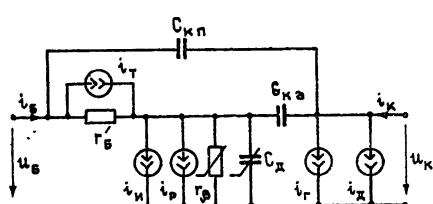


Рис. 1.

четырьмя генераторами тока, характеризующими тепловой шум сопротивления базы (i_T), шум рекомбинации неосновных носителей в базе (i_p), дробовой шум тока коллектора (i_d) и низкочастотный избыточный или фликкер-шум (i_u). В диапазоне высоких частот ($f < f_t/V\beta_0$) первые три источника при постоянных токах электродов

имеют равномерную спектральную плотность, т. е. являются источниками белого шума [7, 8], а четвертый обладает спектральной плотностью типа $1/\Omega$ [9]:

$$F_u(\Omega) = AJ_6/|\Omega|, \quad (1)$$

где A — константа, определяемая экспериментально, J_6 — постоянная составляющая тока базы.

В усилителях мощности, автогенераторах, умножителях частоты и т. д. транзистор работает при больших амплитудах входных и выходных напряжений и токов. В этом случае случайные функции $i_p(t)$, $i_d(t)$ и $i_t(t)$ оказываются периодически нестационарными процессами:

$$\begin{aligned} B_p(t, \tau) &= \frac{q i_r(t)}{\beta_0} \delta(\tau), \quad B_d(t, \tau) = q i_r(t) \delta(\tau), \\ B_t(t, \tau) &= \frac{2kT}{r'_6} \delta(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь q — заряд электрона, $i_r(t)$ — ток генератора на рис. 1 в отсутствие шумов, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура эмиттерного перехода, r'_6 — сопротивление материала базы.

Поскольку шумовые напряжения малы по сравнению с большими синусоидальными напряжениями на входе (u_b) и выходе (u_k) транзистора (рис. 1), то задача анализа разбивается на два этапа: расчет периодического режима в отсутствие шумов, прохождение шумов через линейную цепь с переменными параметрами.

Для описания как регулярных, так и шумовых процессов в транзисторе используем его высокочастотную кусочно-линейную модель [10]. Для этой модели флюктуирующая компонента управляющего заряда $\Delta q(t)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\tau_{bx}(t) \frac{d \Delta q(t)}{dt} + \Delta q(t) = \tau_{bx}(t) \cdot [i_r(t) - i_p(t) - i_u(t)], \quad (3)$$

где $\tau_{bx}(t) = \tau_s \gamma_0(t) + \tau_e \gamma_s(t)$, τ_s , τ_e и $\gamma_0(t)$, $\gamma_s(t)$ — постоянные времени и единичные функции открытого и запертого транзисторов [10].

Если решение уравнения (3) $\Delta q(t)$ найдено, то флюктуирующие компоненты токов коллектора $\Delta i_k(t)$ и базы $\Delta i_b(t)$ записутся так:

$$\Delta i_k(t) = \Delta q_0(t)/\tau_t + i_d(t); \quad (4)$$

$$\Delta i_b(t) = -\frac{1}{\beta_0} \frac{r_p}{r'_6} \frac{\Delta q_0(t)}{\tau_t} - \frac{\Delta q_s(t)}{\tau_e} + i_t(t), \quad (5)$$

где $\Delta q_0(t) = \Delta q(t) \gamma_0(t)$, $\Delta q_s(t) = \Delta q(t) \gamma_s(t)$ — шумовые составляющие управляющего заряда при открытом и запертом эмиттерном переходе.

Токи $\Delta i_k(t)$ и $\Delta i_b(t)$ являются аддитивными добавками к регулярным токам, поэтому их целесообразно представить в виде двух генераторов, включенных на входе и выходе нешумящего транзистора [4—6].

Для периодически нестационарных процессов, входящих в (2) — (5), справедлива пара преобразований Фурье, связывающих мгновенный спектр и корреляционную функцию [11]:

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad B(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, t) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6)$$

Поскольку дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (3) является линейным, то его решение можно представить в виде свертки импульсной переходной характеристики $h(t, z_1)$ с внешним воздействием $\xi(z_1) = \tau_{\text{вх}}(z_1)[i_t(z_1) - i_p(z_1) - i_u(z_1)]$:

$$\Delta q(t) = \int_{-\infty}^t h(t, z_1) \xi(z_1) dz_1. \quad (7)$$

Импульсная переходная характеристика $h(t, z_1)$ для уравнения (3) зависит не только от момента наблюдения t , но и от момента действия z_1 δ -функции:

$$h(t, z_1) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{\text{вх}}(z_1)} \exp\left(-\int_{z_1}^t \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) & (t \geq z_1) \\ 0 & (t < z_1) \end{cases}. \quad (8)$$

Рассмотрим решение уравнения (3) отдельно для естественных и избыточных шумов.

Вычислим флюктуирующую компоненту управляющего заряда в активной области $\Delta q_0(t)$, обусловленную естественными шумами. Подставив (8) в (7), получим

$$\Delta q_0(t) = \gamma_0(t) \int_{-\infty}^t \exp\left(-\int_{z_1}^t \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) [i_t(z_1) - i_p(z_1)] dz_1. \quad (9)$$

Отсюда корреляционная функция заряда $\Delta q_0(t)$

$$B_{\Delta q_0}(t_1, t_2) = \gamma_0(t_1) \gamma_0(t_2) \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \exp\left[-\left(\int_{z_1}^{t_1} \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')} + \int_{z_2}^{t_2} \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right)\right] [B_T(z_1, z_2) + B_p(z_1, z_2)] dz_1 dz_2. \quad (10)$$

Подставив в (10) формулу (8), произведя замену переменных $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, учитя (6) и фильтрующее свойство δ -функции, найдем

$$B_{\Delta q_0}(t, \tau) = \begin{cases} \gamma_0(t) \gamma_0(t + \tau) \exp\left(-\int_t^{t+\tau} \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) \int_{-\infty}^t \exp\left(-2 \int_z^t \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) \times \\ \times \left[\frac{2kT}{r'_6} + \frac{qi_r(z)}{\beta_0} \right] dz \quad (\tau > 0), \\ \gamma_0(t) \gamma_0(t + \tau) \exp\left(-\int_{t+\tau}^t \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) \int_{-\infty}^{t+\tau} \exp\left(-2 \int_z^{t+\tau} \frac{dt'}{\tau_{\text{вх}}(t')}\right) \times \\ \times \left[\frac{2kT}{r'_6} + \frac{qi_r(z)}{\beta_0} \right] dz \quad (\tau < 0). \end{cases} \quad (11)$$

Зная корреляционную функцию, вычислим мгновенный спектр заряда $\Delta q_0(t)$. Подставив (11) в (6) при $\omega = n\omega_0$ (ω_0 — частота возбуждения), произведя замену переменных $\bar{t} = \omega_0 t$, $\bar{\tau} = \omega_0 \tau$, $\bar{z} = \omega_0 z$ (чертат далее опускается) и перейдя к физическому спектру, получим

$$F_{\Delta q_0}(n, t) = \frac{2kT}{\omega_0^2 r'_6} F_r(t) + \frac{qS_6 U}{\omega_0^2} F_p(t). \quad (12)$$

Здесь S_6 — крутизна спрямленной характеристики $i_6(e_6)$, U — амплитуда управляющего напряжения,

$$\begin{aligned} F_r(t) &= 2\gamma_0(t) \left\{ \int_0^\infty \cos n\tau \gamma_0(t+\tau) \exp \left(- \int_t^{t+\tau} \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) d\tau \times \right. \\ &\times \int_{-\infty}^t \exp \left(-2 \int_z^t \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) dz + \int_{-\infty}^0 \cos n\tau \gamma_0(t+\tau) \exp \left(- \int_{t+\tau}^t \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) \times \\ &\left. \times \int_{-\infty}^{t+\tau} \exp \left(-2 \int_z^{t+\tau} \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) dz d\tau \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F_p(t) &= 2\gamma_0(t) \left\{ \int_0^\infty \cos n\tau \gamma_0(t+\tau) \exp \left(- \int_t^{t+\tau} \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) d\tau \times \right. \\ &\times \int_{-\infty}^t i_h(z) \exp \left(-2 \int_z^t \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) dz + \int_{-\infty}^0 \cos n\tau \gamma_0(t+\tau) \times \\ &\times \exp \left(- \int_{t+\tau}^t \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) \int_{-\infty}^{t+\tau} i_h(z) \exp \left(-2 \int_z^{t+\tau} \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) dz d\tau \left. \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $i_h(z)$ — импульс коллекторного тока [10],

$$\begin{aligned} i_h(z) &= \gamma_0(z) \left\{ \cos \varphi_1 \cos(z + \varphi_1) - \cos \theta - [\cos \varphi_1 \cos(\theta_0 - \varphi_1) - \cos \theta] \times \right. \\ &\times \exp \left(-\frac{z + \theta_0}{\Omega_1} \right) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Omega_{bx}(t) = \Omega_1 \gamma_0(t) + \Omega_2 \gamma_3(t), \quad \Omega_1 = \omega_0 \tau_s, \quad \Omega_2 = \omega_0 \tau_3, \quad \cos \varphi_1 = 1/V(1 + \Omega_1^2),$$

θ_0 и θ_3 — углы отпирания и запирания.

Отметим, что интегралы в (13), (14) выражаются в виде суммы конечного числа элементарных функций. Например, $F_p(t)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F_p(t) &= 2\gamma_0(t) \left\{ J(t) \left[\int_0^{\theta_3-t} \cos n\tau \exp \left(-\frac{\tau}{\Omega_1} \right) d\tau + \frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \int_{-\theta_0-t}^{\theta_3-t} \cos n\tau \exp \left(-\frac{\tau}{\Omega_1} \right) d\tau \right] + \int_{-\theta_0-t}^0 \cos n\tau \exp \left(\frac{\tau}{\Omega_1} \right) J(t+\tau) d\tau + \right. \\ &\left. + \frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}} \int_{-\theta_0-t}^{\theta_3-t} \cos n\tau \exp \left(\frac{\tau}{\Omega_1} \right) J(t+\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

$$J(t) = \exp \left(-\frac{2t}{\Omega_1} \right) \left[\int_{-\theta_0}^t i_h(z) \exp \left(\frac{2z}{\Omega_1} \right) dz + \frac{e^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} \times \right]$$

$$\times \int_{-\theta_0}^{\theta_3} i_n(z) \exp\left(\frac{2z}{\Omega_1}\right) dz \Bigg],$$

$$\beta = 2\theta_b/\Omega_1 + 2(\pi - \theta_b)/\Omega_2, \quad \theta_b = 0.5(\theta_3 + \theta_0).$$

Воспользуемся соотношением (4) для вычисления мгновенного спектра шумового тока коллектора $\Delta i_k(t)$. Подставив сюда (12), учитя (2), (6) и то, что $\Omega_1/(\omega_0 \tau_p) = S r'_6$, $i_p(t) = S U i_n(t)$ [10], найдем:

$$F_{\Delta i_k}(n, t) = \frac{2kTS^2 r'_6}{\Omega_1^2} F_p(t) + \frac{qS^2 r'^2_6 S_6 U}{\Omega_1^2} F_p(t) + 2qSU i_n(t). \quad (16)$$

Спектр шумового тока базы $\Delta i_b(t)$ можно вычислить аналогичным путем. Но поскольку он, как правило, существенно меньше спектра шумового тока $\Delta i_k(t)$, то здесь на его расчете останавливаться не будем.

Спектр $F_{\Delta i_k}(n, t)$ состоит из трех составляющих. Первая обусловлена тепловым шумом сопротивления базы, вторая — шумом рекомбинации, а третья — дробовым шумом коллектора. Видно, что шумовой ток $\Delta i_k(t)$ является периодически нестационарным процессом. Действие такого процесса на узкополосную систему, например, на колебательный контур с резонансной частотой $n\omega_0$, можно заменить действием эквивалентного узкополосного процесса [12]

$$\Delta i_k = \operatorname{Re}[(\Delta I_k^c + j \Delta I_k^s) \exp(j n t)]. \quad (17)$$

Здесь ΔI_k^c , ΔI_k^s — синфазная с напряжением возбуждения и квадратурная компоненты, представляющие собой коррелированные стационарные случайные процессы с энергетическими спектрами F_k^c , F_k^s и взаимным спектром F_{ks}^{cs} :

$$F_k^c = 2F_k^0 + F_k^{2nc}, \quad F_k^s = 2F_k^0 - F_k^{2nc}, \quad F_{ks}^{cs} = F_k^{2ns}, \quad (18)$$

где

$$F_k^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_3} F_{\Delta i_k}(n, t) dt, \quad F_k^{2nc} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_3} F_{\Delta i_k}(n, t) \times \\ \times \cos 2nt dt, \quad F_k^{2ns} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_3} F_{\Delta i_k}(n, t) \sin 2nt dt. \quad (19)$$

Комбинируя (16), (18) и (19), найдем энергетические спектры синфазной ΔI_k^c и квадратурной ΔI_k^s компонент:

$$F_k^{c, s, cs} = 4kTS^2 r'_6 F_p^{c, s, cs} + 2qS^2 r'^2_6 S_6 U F_p^{c, s, cs} + 2qSU F_{\Delta}^{c, s, cs}. \quad (20)$$

Здесь

$$F_{t, p}^{c, s} = (F_{t, p}^0 \pm 0.5F_{t, p}^{2nc})/\Omega_1^2, \quad F_{t, p}^{cs} = 0.5F_{t, p}^{2ns}/\Omega_1^2, \quad (21)$$

$$F_{\Delta}^{c, s} = 2F_{\Delta}^0 \pm F_{\Delta}^{2nc}, \quad F_{\Delta}^{cs} = F_{\Delta}^{2ns},$$

где составляющие $F_{t, p, d}^0$, $F_{t, p, d}^{2nc}$, $F_{t, p, d}^{2ns}$ вычисляются по формулам (19), при этом вместо $F_{\Delta i_k}(n, t)$ подставляются функции $F_t(t)$, $F_p(t)$ и $i_n(t)$ соответственно.

Энергетические спектры (20) найдены для случая, когда синфазная компонента шумового тока ΔI_k^c совпадает по фазе с напряжением воз-

буждения. Однако, как правило, более удобным оказывается разложение эквивалентного шумового тока Δi_k на синфазную $\tilde{\Delta I}_k^c$ и квадратурную $\tilde{\Delta I}_k^s$ компоненты по направлению n -й гармоники коллекторного тока. Можно показать, что

$$\tilde{\Delta I}_k^c = \Delta I_k^c \cos \varphi_n - \Delta I_k^s \sin \varphi_n, \quad \tilde{\Delta I}_k^s = \Delta I_k^c \sin \varphi_n + \Delta I_k^s \cos \varphi_n, \quad (22)$$

где φ_n — фаза n -й гармоники тока коллектора.

Перейдя в (22) к энергетическим спектрам и учитя (20), (21), получим окончательно

$$\tilde{F}_k^{c, s, cs} = 4kTS^2 r_6' \tilde{F}_T^{c, s, cs} + 2qS^2 r_6'^2 S_6 U \tilde{F}_p^{c, s, cs} + 2qSU \tilde{F}_{\Delta}^{c, s, cs}, \quad (23)$$

где

$$\tilde{F}_{T, p, \Delta}^c = \cos^2 \varphi_n F_{T, p, \Delta}^c + \sin^2 \varphi_n F_{T, p, \Delta}^s - \sin 2\varphi_n F_{T, p, \Delta}^{cs},$$

$$\tilde{F}_{T, p, \Delta}^s = \sin^2 \varphi_n F_{T, p, \Delta}^c + \cos^2 \varphi_n F_{T, p, \Delta}^s + \sin 2\varphi_n F_{T, p, \Delta}^{cs}, \quad (24)$$

$$\tilde{F}_{T, p, \Delta}^{cs} = 0,5(F_{T, p, \Delta}^c - F_{T, p, \Delta}^s) \sin 2\varphi_n + \cos 2\varphi_n F_{T, p, \Delta}^{cs}.$$

Нормированные шумовые коэффициенты $\tilde{F}_{T, p, \Delta}^{c, s, cs}$ (24) зависят только от параметров инерционности транзистора Ω_1 , Ω_2 и высокочастотного угла отсечки θ_b . В области низких частот ($\Omega_1 \rightarrow 0$, $\Omega_2 \rightarrow 0$, $\theta_b \rightarrow \theta$) формулы (23), (24) при $n = 1$ превращаются в известные [4].

Рассмотрим теперь флюктуирующую компоненту управляющего заряда $\Delta q(t)$, обусловленную источником избыточного шума $i_u(t)$. Эта компонента описывается уравнением (3) при $i_T(t) = i_p(t) = 0$.

Обычно полоса частот, занимаемая спектром избыточного шума, существенно меньше рабочей частоты транзистора, особенно в диапазоне СВЧ. Поэтому можно считать, что в течение многих периодов высокочастотного колебания ток $i_u(t)$ практически остается неизменным. Тогда общий интеграл уравнения (3) с учетом (7), (8) запишется так:

$$\Delta q(t) = -i_u \int_{-\infty}^t \exp \left(- \int_z^t \frac{dt'}{\tau_{bx}(t')} \right) dz. \quad (25)$$

Произведя в (25) замену переменных $\bar{t} = \omega_0 t$, $\bar{z} = \omega_0 z$ (черта дальше опускается), вычислим синфазную ΔQ_0^c и квадратурную ΔQ_0^s компоненты n -й гармоники заряда в активной области $\Delta q_0(t)$:

$$\Delta Q_0^{c, s} = -i_u \tau_s \lambda_{c, s},$$

$$\lambda_{c, s} = \frac{1}{\Omega_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos nt \int_{-\infty}^t \exp \left(- \int_z^t \frac{dt'}{\Omega_{bx}(t')} \right) dz dt. \quad (26)$$

Энергетические спектры синфазной $\tilde{\Delta I}_k^c$ и квадратурной $\tilde{\Delta I}_k^s$ компонент шумового тока коллектора $\Delta i_k(t)$ найдем, комбинируя (1), (4) и (26):

$$\tilde{F}_k^{c, s, cs} = \frac{AS^2 r_6'^2 S_6 U}{|\Omega|} \tilde{F}_u^{c, s, cs}, \quad (27)$$

где $F_{\eta}^{c,s} = F_k^0 \lambda_{c,s}^2$, $F_{\eta}^{cs} = F_k^0 \lambda_c \lambda_s$, а $\tilde{F}_{\eta}^{c,s,cs}$ вычисляются с помощью преобразования (24).

Нормированные шумовые коэффициенты $\tilde{F}_{t,p,d,i}^{c,s,cs}$ были рассчитаны на ЦВМ типа «БЭСМ-6». Часть результатов расчета при $n=1$, $\Omega_2/\Omega_1=0$ и 0,2 приведены в табл. 1 и 2. Здесь используется форма записи чисел с плавающей запятой (например, запись $-1,44-01$ означает число $-1,44 \cdot 10^{-1}$).

Из табл. 1, 2 видно, что синфазные и квадратурные компоненты отдельных шумовых составляющих не равны между собой, что обусловлено периодической нестационарностью шумовых процессов в транзисторе. На высоких частотах, в отличие от лампы, кроме того, появляется корреляционная связь между синфазными и квадратурными компонентами ($\tilde{F}_{t,p,d,i}^{cs} \neq 0$). Это объясняется проявлением инерционных свойств транзистора, а именно, асимметрией импульса коллекторного тока [10].

ФЛУКТУАЦИИ В ТРАНЗИСТОРНОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ

В предположении малости флюктуаций приращения амплитуды η и фазы α колебаний в автогенераторе описываются линейными дифференциальными уравнениями

$$Y_{11}(p)\eta + Y_{12}(p)U_k \alpha = \tilde{\Delta I}_k^c, \quad Y_{21}(p)\eta + Y_{22}(p)U_k \alpha = \tilde{\Delta I}_k^s. \quad (28)$$

Здесь $Y_{ij}(p)$ — операторы, явный вид которых для неизохронного автогенератора с произвольными колебательной системой и цепями автосмещения приведен в [13], U_k — амплитуда напряжения $u_k(t)$.

Зная энергетические спектры шумовых токов $\tilde{\Delta I}_k^c$, $\tilde{\Delta I}_k^s$ (23), (27), нетрудно рассчитать различные статистические характеристики амплитуды и фазы автоколебаний [5, 14].

Рассмотрим, например, амплитудные флюктуации в одноконтурном высокочастотном транзисторном автогенераторе. Можно показать [10, 13], что в случае использования безынерционного эмиттерного автосмещения энергетический спектр амплитудных флюктуаций

$$F_\eta(\Omega) = \tilde{F}_k^c R_k^2 \left\{ \left[\frac{2 \sin \theta_b}{\pi \gamma_1(\theta_b)} \right]^2 \left[\frac{SR_9 \gamma_0(\theta_b) - \cos \theta_b - \rho \gamma_0(\pi - \theta_b)}{1 + SR_9 \theta_b / \pi + \rho(\pi - \theta_b) / \pi} \right]^2 + (\Omega T)^2 \right\}^{-1},$$

где R_k — активное сопротивление контура при резонансе и его постоянная времени, R_9 — сопротивление автосмещения, $\rho = V(1 + \Omega_1^2)/(1 + \Omega_2^2) - 1$.

Оценим вклад отдельных шумовых составляющих в F_η на примере высокочастотного автогенератора на транзисторе ГТ311Е с параметрами $S = 0,3 \text{ A/B}$, $r_b' = 60 \text{ Ом}$, $S_b = 3 \text{ mA/B}$, $C_{k,a} = C_{k,p} = 1,25 \text{ nF}$, $C_9 = 5 \text{ nF}$, $f_t = 250 \text{ МГц}$, $A = 10^{-13} \text{ A}$ на частоте анализа $\Omega/(2\pi) = 1 \text{ кГц}$. Полагая, что автогенератор работает на частоте 100 МГц при $\theta_b = 65^\circ$, $R_k = R_9 = 200 \text{ Ом}$ и амплитуде тока $I_{k,\max} = 20 \text{ мA}$, используя [10] и табл. 1, 2, найдем, что наибольший вклад в F_η вносит избыточный шум ($8 \cdot 10^{-16} \text{ B}^2 \cdot \text{Гц}^{-1}$), за ним следует дробовой шум тока коллектора ($5,4 \cdot 10^{-16} \text{ B}^2 \cdot \text{Гц}^{-1}$), потом — тепловой шум ($4 \cdot 10^{-16} \text{ B}^2 \cdot \text{Гц}^{-1}$) и, наконец, — шум рекомбинации неосновных носителей в базе ($2,4 \cdot 10^{-17} \text{ B}^2 \cdot \text{Гц}^{-1}$). Как и следовало ожидать, на малых частотах анализа основной вклад в амплитудные флюктуации вносит избыточный шум.

Таблица 1

Нормированные шумовые коэффициенты ($\Omega_2/\Omega_1 = 0$)

$\cos \varphi_l$	θ_B^0	\tilde{F}_T^c	\tilde{F}_T^s	\tilde{F}_T^{cs}	\tilde{F}_p^c	\tilde{F}_p^s	\tilde{F}_p^{cs}	\tilde{F}_u^c	\tilde{F}_u^s	\tilde{F}_u^{cs}	\tilde{F}_u^c	\tilde{F}_u^s	\tilde{F}_u^{cs}
0,9	40	3,11 - 01	1,27 - 01	- 1,44 - 01	1,57 - 02	9,67 - 03	- 1,04 - 02	4,04 - 02	1,56 - 02	- 2,01 - 02	1,15 - 02	0,32 - 06	5,03 - 05
	65	5,08 - 01	3,83 - 01	- 2,07 - 01	8,41 - 02	1,05 - 01	6,10 - 02	1,73 - 01	1,28 - 01	- 9,18 - 02	1,75 - 02	4,17 - 05	8,53 - 04
	90	6,79 - 01	6,63 - 01	- 1,09 - 01	1,23 - 02	6,36 - 01	- 1,11 - 01	4,25 - 01	4,14 - 01	- 1,64 - 01	7,31 - 02	2,17 - 04	3,98 - 03
	115	8,83 - 01	8,08 - 01	7,32 - 02	5,21 - 01	- 6,14 - 02	8,04 - 01	8,49 - 01	- 1,54 - 01	1,43 - 01	1,64 - 04	9,75 - 03	
0,4	40	3,41 - 02	3,75 - 02	- 2,79 - 02	3,78 - 02	0,46 - 04	- 4,16 - 04	9,22 - 04	8,69 - 03	- 7,50 - 03	6,43 - 03	4,91 - 07	5,92 - 06
	65	5,93 - 02	1,40 - 01	- 3,38 - 01	2,01 - 02	0,39 - 03	- 1,05 - 03	2,98 - 03	0,27 - 02	- 2,39 - 02	1,45 - 02	3,93 - 05	2,06 - 04
	90	1,22 - 01	2,22 - 01	- 0,782 - 03	1,55 - 02	0,33 - 02	7,66 - 03	9,23 - 02	2,12 - 01	- 7,33 - 03	8,79 - 03	3,87 - 04	1,84 - 03
	115	2,24 - 01	2,44 - 01	- 2,85 - 02	6,77 - 02	0,63 - 02	2,05 - 02	5,75 - 02	5,75 - 01	3,81 - 01	3,71 - 02	2,42 - 02	2,35 - 03
0,1	40	1,10 - 03	5,98 - 03	- 1,13 - 03	2,94 - 06	3,18 - 05	- 2,33 - 06	1,21 - 03	0,36 - 03	- 1,76 - 03	4,25 - 03	6,07 - 08	3,61 - 07
	65	5,57 - 03	1,51 - 02	2,41 - 03	1,01 - 04	2,54 - 04	8,75 - 05	7,49 - 04	0,32 - 02	1,59 - 03	7,21 - 02	0,02 - 06	1,21 - 05
	90	1,85 - 02	1,89 - 02	6,26 - 03	9,17 - 04	4,96 - 04	3,29 - 04	3,97 - 02	5,97 - 02	1,46 - 02	3,90 - 04	3,10 - 05	1,10 - 04
	115	3,11 - 02	2,06 - 02	2,66 - 03	2,70 - 03	1,29 - 03	- 1,10 - 04	1,04 - 01	9,42 - 02	1,54 - 02	9,98 - 04	2,16 - 04	4,65 - 04
0,1	140	3,38 - 02	2,61 - 02	- 2,62 - 03	3,89 - 03	3,24 - 03	- 9,47 - 04	1,61 - 01	1,48 - 01	2,63 - 03	1,28 - 03	8,11 - 04	1,02 - 03

Таблица 2

Нормированные шумовые коэффициенты ($\Omega_2/\Omega_1 = 0,2$)

$\cos \varphi_1$	θ_B^0	\tilde{F}_T^c	\tilde{F}_T^s	\tilde{F}_P^{cs}	\tilde{F}_P^c	\tilde{F}_P^s	\tilde{F}_H^{cs}	\tilde{F}_H^c	\tilde{F}_H^s	\tilde{F}_H^{cs}
0,9	40	3,10 - 01	1,47 - 01	- 1,56 - 01	1,82 - 02	1,30 - 02	- 1,30 - 02	4,62 - 02	2,02 - 02	- 2,45 - 02
	65	5,04 - 01	4,07 - 01	- 2,09 - 01	1,91 - 01	- 6,62 - 02	- 6,62 - 02	1,87 - 01	1,45 - 01	- 1,00 - 01
	90	6,82 - 01	6,79 - 01	- 0,03 - 01	2,52 - 01	1,31,90 - 01	1,12 - 01	- 0,48 - 01	- 0,45 - 01	- 1,68 - 01
	115	8,96 - 01	9,14 - 01	8,12 - 02	5,49 - 02	0,17,60 - 01	8,65 - 02	8,38 - 01	8,018,86 - 01	- 1,51 - 01
0,4	140	1,15 - 00	1,11 - 00	2,07 - 01	9,66 - 01	1,12 - 00	1,46 - 02	1,31 - 00	1,35 - 00	- 6,67 - 02
	40	1,95 - 02	7,14 - 02	- 2,26 - 02	2,38 - 04	1,78 - 03	- 3,49 - 04	6,89 - 03	2,43 - 02	- 9,47 - 03
	65	5,77 - 02	1,70 - 01	- 3,31 - 03	3,57 - 03	1,42 - 02	2,14 - 03	3,08 - 02	1,14 - 01	- 1,15 - 02
	90	1,58 - 01	2,24 - 01	3,15 - 02	2,87 - 02	3,8 - 02	1,43 - 02	1,29 - 02	2,62 - 01	2,19 - 02
0,1	115	2,50 - 01	2,40 - 01	2,54 - 01	2,9,26 - 02	6,46 - 02	1,86 - 02	3,49 - 01	1,4,24 - 01	5,05 - 02
	140	3,03 - 01	2,70 - 01	- 1,19 - 02	1,57 - 01	1,05 - 01	1,19 - 03	6,08 - 01	6,09 - 01	2,70 - 02
	40	8,62 - 03	8,03 - 03	- 6,10 - 03	4,77 - 03	5,97 - 05	- 5,24 - 05	1,32 - 05	2,17 - 02	- 1,34 - 02
	65	2,20 - 02	2,08 - 02	9,98 - 03	5,73 - 04	2,74 - 04	2,14 - 04	3,37 - 04	3,15 - 02	1,76 - 02
0,1	90	4,54 - 02	2,64 - 02	6,07 - 03	2,09 - 03	6,78 - 04	8,39 - 05	7,30 - 05	7,30 - 02	1,72 - 02
	115	5,94 - 02	3,21 - 02	3,64 - 03	4,38 - 03	2,22 - 03	- 5,20 - 04	1,23 - 04	1,23 - 02	9,52 - 03
	140	5,81 - 02	2,80 - 02	2,63 - 03	5,98 - 03	3,29 - 03	- 6,76 - 04	1,65 - 01	1,54 - 01	2,12 - 03

Рассмотрим теперь другой пример использования полученных выше соотношений. Сравним коэффициенты диффузии фазы одноконтурных транзисторного и лампового автогенераторов, обусловленные естественными шумами. Используя [12, 13] в случае с фазированных автогенераторов с одинаковыми контурами, имеем

$$\frac{D_t}{D_a} = \frac{4kTS^2 r'_6 \tilde{F}_t^s + 2qS^2 r'^2_6 S_6 U \tilde{F}_p^s + 2qS U \tilde{F}_d^s I_a^2}{24kTS_a \gamma_i(\theta) I_k^2}.$$

Оценим отношение D_t/D_a для автогенераторов на транзисторах ГТ311Е, ГТ330Д и лампе 6Н23П с параметрами $S = 0,4 \text{ A/B}$, $r'_6 = 12 \Omega$, $S_6 = 2,7 \text{ mA/B}$, $C_{\text{к.а}} = C_{\text{к.п}} = 1,25 \text{ nF}$, $f_t = 500 \text{ MHz}$ (ГТ330Д), $S_a = 10 \text{ mA/B}$ (6Н23П). Параметры автогенератора на транзисторе ГТ311Е возьмем из предыдущего примера. Полагая, что активные элементы работают при равных амплитудах токов ($I_{\text{k max}} = I_{\text{a max}} = 20 \text{ mA}$) и используя [10] и табл. 1, 2, получим $D_t/D_a = 18$ (ГТ311Е) и 13 (ГТ330Д).

Из последнего примера видно, что при одинаковых контурах и одном и том же запасе по самовозбуждению ламповый автогенератор имеет значительно меньшую ширину спектральной линии, чем транзисторный.

ВЫВОДЫ

1. Найдено точное решение стохастического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и периодически нестационарной правой частью, описывающего в режиме большого сигнала естественные и избыточные шумы транзистора в области высоких частот.

2. Проведен расчет на ЦВМ нормированных шумовых коэффициентов, с помощью которых легко вычисляются энергетические спектры флуктуаций транзистора по известным параметрам его эквивалентной схемы и выбранному режиму работы. Результаты расчета можно использовать при изучении флуктуаций в различных транзисторных устройствах квазигармонических колебаний (усилителях мощности, автогенераторах, автодинах и т. д.).

3. Рассмотрены два примера использования нормированных шумовых коэффициентов для анализа флуктуаций в высокочастотных транзисторных автогенераторах. Оценен вклад отдельных шумовых составляющих в амплитудные флуктуации. Проведено сравнение коэффициентов диффузии фазы лампового и транзисторного автогенераторов и показано, что последний имеет существенно большую ширину спектральной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 13, № 8, 1460 (1968).
2. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 299 (1969).
3. А. В. Якимов, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 5, 727 (1969).
4. В. Н. Кулешов, Б. Е. Лешуков, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 6, 840 (1974).
5. В. Жалуд, В. Н. Кулешов, Шумы в полупроводниковых устройствах, изд. Сов. радио, М., 1977.
6. М. М. Шачнева, А. В. Якимов, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 10, 1523 (1970).
7. А. Ван-дер Зил, Шум, изд. Сов. радио, М., 1973.
8. F. N. H. Robinson, Electron. Engineering, 41, № 2, 218 (1969).
9. J. L. Plumbe and E. R. Cheneatte, IEEE Trans, ED-10, № 9, 304 (1964).
10. В. М. Богачев, В. В. Никифоров, Транзисторные усилители мощности, изд. Энергия, М., 1978.

11. В. Л. Лебедев, НДВШ (Радиотехника и электроника), 2, № 2, 27 (1959).
12. А. Н. Бруевич, Радиотехника, 23, № 5, 35 (1968).
13. В. М. Богачев, В. Г. Лысенко, С. М. Смольский, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 19, № 5, 62 (1976).
14. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
19 июля 1978 г.

NATURAL AND FLICKER FLUCTUATIONS IN HIGH FREQUENCY TRANSISTOR OSCILLATORS

V. M. Bogatchev, V. G. Lysenko

On the basis of equivalent noise circuit of bipolar transistor and its two piece-line model the stochastic differential equation with variable terms and periodic nonstationarity right part has been derived. This equation determines natural and flicker fluctuations in the high frequency transistor oscillator. On the basis of impulse characteristic method the solution of this equation is given. The standardized noise coefficients are calculated by the computer using which the power spectra of fluctuations in different nonlinear transistor circuits are determined.

УДК 621.391.82

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОДОБНОЙ ПОМЕХИ НА ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

B. P. Пономаренко, K. Г. Кивелева

Приводятся результаты исследования устойчивости системы слежения за задержкой псевдослучайного видеосигнала в условиях воздействия удающей помехи, однотипной по структуре с полезным сигналом. Исследовано влияние помехи на установившийся режим слежения и на процесс вхождения в синхронизм. Определены динамические характеристики устойчивости системы: области сохранения и срыва слежения, области и вероятности захвата полезным сигналом и помехой

В современных системах связи и управления для эффективного решения задач измерения параметров движения, обеспечения защиты от воздействия помех, повышения скрытности работы используется расширение спектра передаваемого сигнала [1]. Во многих системах для формирования сигнала с расширенным спектром используется метод модуляции псевдослучайным сигналом [2, 3]. В приемном устройстве таких систем необходимо производить синхронизацию принимаемого псевдослучайного кода с опорным псевдослучайным кодом, формируемом в приемнике. При этом, как известно [4], вначале производится грубое совмещение принимаемого и опорного сигналов, а затем, после вхождения в синхронизм, поддерживается с малой ошибкой точное совмещение этих сигналов. Первая задача (грубого вхождения в синхронизм) решается [4] с помощью осуществления поиска по временной задержке. Для решения второй задачи (точной синхронизации и слежения) широко применяется система слежения за задержкой (ССЗ), построенная по функциональной схеме, представленной на рис. 1а. Система содержит двухканальный дискриминатор (Δ), осуществляющий корреляционную обработку принимаемого сигнала, сформированного на основе псевдослучайной последовательности [4], усилитель ($>$), фильтр низких частот (ФНЧ), управляемый тактовый генератор (УТГ) и генератор опорного псевдослучайного сигнала (ГПСП). В дискриминаторе вырабатывается сигнал ошибки, зависящий от рассогласования $\epsilon = T_1(t) - T^*(t)$ временных задержек принимаемого и опорного сигналов, который используется для управления частотой УТГ в соответствии с тактовой частотой входного сигнала.

Явление синхронизации в рассматриваемой системе состоит в установлении и поддержании одинаковой временной задержки принимаемого и опорного сигналов. Исследование нелинейных процессов и нахождение условий наступления устойчивого синхронизма в этой системе без учета влияния помех проведено в работе [5], где получены зависимости области устойчивости от параметров системы. В [4] показано, что в рассматриваемой ССЗ при соответствующем типе ФНЧ и небольших отклонениях от стационарного состояния реализуется оптимальный алгоритм фильтрации псевдослучайного видеосигнала на фоне случайных помех. Результаты [5] позволяют оценить устойчивость этого алго-

ритма по отношению к произвольным отклонениям от стационарного состояния, при которых непременно сказывается нелинейность системы.

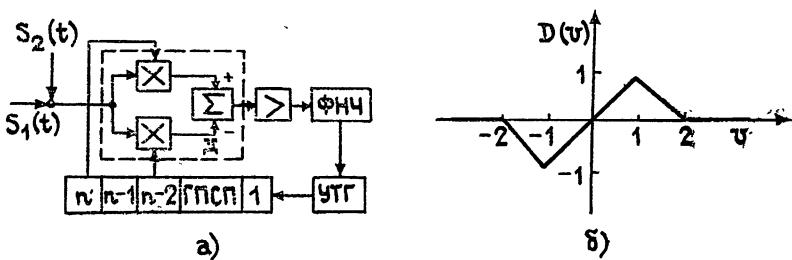


Рис. 1.

Одной из важных проблем, возникающих при разработке и использовании систем с псевдослучайными сигналами, в том числе и ССЗ, является защита от преднамеренных радиопомех и, в частности [6, 7], от подобных уводящих помех, имеющих однотипную с полезным сигналом структуру, но отличающихся от него амплитудой и временными сдвигом. Воздействие мешающего подобного сигнала может привести к нарушению сложения в ССЗ и переходу ее на сложение за мешающим сигналом, т. е. к подавлению системы. В этой связи актуальной становится наряду с задачей оптимизации алгоритма фильтрации, приводящей к более сложным корреляционно-компенсационным алгоритмам, задача оценки устойчивости ССЗ по отношению к подобной помехе. Свойство устойчивости понимается здесь как способность системы противостоять воздействию помехи при изменении ее амплитуды и временной расстройки. Решение этой задачи неразрывно связано с исследованием возможных режимов синхронизма, возникающих в системе в условиях воздействия уводящей помехи, и определением областей значений параметров системы и помехи, при которых существуют и устанавливаются эти режимы. В данной работе приводятся результаты исследования стационарных режимов и определения областей устойчивости ССЗ, находящейся под воздействием подобной уводящей помехи.

1. В соответствии с постановкой задачи предполагается, что на входе ССЗ, кроме полезного сигнала, действует мешающий сигнал, аналогичный по структуре полезному сигналу, изменение временной задержки $T_2(t)$, которого описывается уравнением

$$T_2(t) = T_1(t) + T_0 + \delta t, \quad (1)$$

где $T_1(t)$ — задержка сигнала, T_0 — начальная разность задержек T_2 и T_1 , δ — скорость изменения T_2 . Амплитуды обоих сигналов считаются постоянными. При сделанных предположениях динамика ССЗ описывается уравнениями [8]

$$\frac{px}{k} = \beta - F(p) [D(x) + \mu D(z)], \\ pz = px + \alpha, \quad (2)$$

где $p \equiv \frac{d}{dt}$, $x = (T_1 - T^*)\Delta^{-1}$ — относительная разность задержек полезного и опорного сигнала, $z = (T_2 - T^*)\Delta^{-1} = x + x_0 + \alpha t$ — относительная разность задержек помехи и опорного сигнала, $x_0 = T_0\Delta^{-1}$, $\alpha = \delta\Delta^{-1}$, Δ — длительность одного импульса сигнала, β — относительная начальная расстройка тактовых частот полезного и опорного сигна-

лов, k — коэффициент усиления ССЗ, $F(p)$ — передаточная функция ФНЧ, μ — отношение амплитуд помехи и сигнала, $D(\cdot)$ — апериодическая дискриминационная характеристика ССЗ, форма которой приведена на рис. 1б. Характеристика $D(v)$ на одном периоде изменения v определяется следующим образом:

$$D(v) = \begin{cases} v & (|v| \leq 1) \\ 2 - v & (1 \leq v \leq 2) \\ -(2 + v) & (-2 \leq v \leq -1) \\ 0 & (2 \leq |v| \leq M - 2) \end{cases}, \quad (3)$$

где M — число импульсов в одном периоде сигнала. Практически наиболее реален случай, когда $M \gg 1$, тогда можно считать, что $D(v) = 0$ для $|v| \geq 2$, т. е. $D(v)$ — непериодическая по v .

Предполагается, что в качестве ФНЧ используется пропорционально-интегрирующий фильтр с передаточной функцией $F(p) = (1 + nTp)(1 + Tp)^{-1}$, где T — постоянная времени, $n < 1$. В этом случае уравнения (2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dz}{d\tau} &= y + \gamma, \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} &= \beta - D(x) - \mu D(z) - y - n \varepsilon [D'_x(x)y + \\ &+ \mu D'_z(z)(y + \gamma)] \equiv Q(x, y, z), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varepsilon = kT$, $\gamma = \alpha k^{-1}$, $D(x)$ и $D(z)$ определены (3), а дифференцирование ведется по безразмерному времени $\tau = kt$. Система (4) является математической моделью ССЗ с пропорционально-интегрирующим ФНЧ при воздействии подобной помехи, закон изменения задержки которой определяется уравнением (1). Фазовым пространством системы (4) является трехмерное пространство x, y, z . Особенностью этой модели является наличие непериодических нелинейностей $D(x)$ и $D(z)$ по переменным x и z .

2. В случае $\varepsilon = 0$ (безынерционная ССЗ) исследование системы (4), сводящейся к системе

$$\frac{dx}{d\tau} = \beta - D(x) - \mu D(z), \quad \frac{dz}{d\tau} = \beta + \gamma - D(x) - \mu D(z) \quad (5)$$

на поверхности медленных движений $Q(x, y, z) = 0$, проведено в [8], где установлены все режимы работы системы и области их существования в пространстве параметров β, μ, γ . Согласно [9] при малых значениях $\varepsilon \ll 1$ система (4) имеет, в силу того что $Q_y(x, y, z) = -1 < 0$, асимптотически устойчивую интегральную поверхность, близкую к поверхности $Q(x, y, z) = 0$, уравнения на которой близки к системе (5).

Для решения поставленной в работе задачи необходимо прежде всего установить соответствие между установившимися движениями в фазовом пространстве системы (4) и стационарными режимами ССЗ. Чтобы это сделать, необходимо выделить в фазовом пространстве ограниченные установившиеся движения [9, 10] системы (4), при которых изображающая точка не выходит при $-\infty < \tau < \infty$ из заданной области V фазового пространства. Для системы (4) областью V являются области $V_x: |x| < 2$ и $V_z: |z| < 2$, в которых нелинейности $D(x)$ и $D(z)$

отличны от нуля. Режим слежения за задержкой T_1 сигнала (режим P_s) определяется устойчивой траекторией L_s системы (4), не выходящей при $-\infty < \tau < \infty$ из области V_x . Режим слежения за задержкой T_2 помехи (режим P_n) определяется устойчивой траекторией L_n системы (4), расположенной при $-\infty < \tau < \infty$ целиком в области V_z .

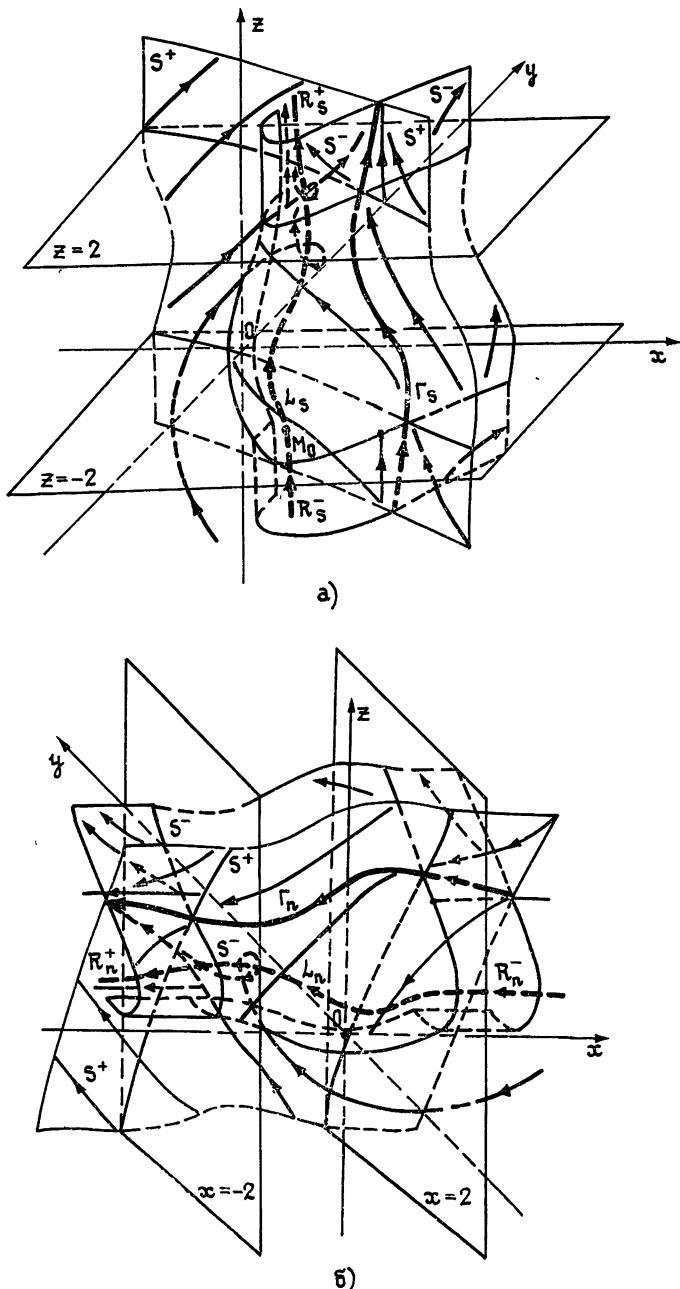


Рис. 2.

Для определения вида траекторий L_s и L_n воспользуемся результатами [8, 11] и свойством системы (4), связанным с апериодической фор-

мой нелинейностей $D(x)$ и $D(z)$ и состоящем в том, что согласно (3) система (4) в областях $|x| \geq 2$ и $|z| \geq 2$ фазового пространства распадается на две независимые системы первого и второго порядка с известной картиной [5] поведения фазовых траекторий. В результате устанавливаем, что устойчивая траектория L_s при $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ($\beta > 0$, $\gamma < 0$) совпадает в области $z \leq -2$ ($z \geq 2$) фазового пространства (рис. 2а) с полупрямой R_s^- : $x = \beta$, $y = 0$, а при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к полупрямой R_s^+ : $x = \beta$, $y = 0$, в области $z \geq 2$ ($z \leq -2$). Полупрямые R_s^+ и R_s^- являются устойчивым состоянием равновесия $(\beta, 0)$ автономной модели (4) при отсутствии помех. Устойчивая траектория L_n при $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ($\beta > 0$, $\gamma < 0$) совпадает в области $x \geq 2$ ($x \leq -2$) с полупрямой R_n^- : $z = (\beta + \gamma) \mu^{-1}$, $y = -\gamma$, а при $\tau \rightarrow \infty$ стремится (рис. 2б) к полупрямой R_n^+ : $z = (\beta + \gamma) \mu^{-1}$, $y = -\gamma$ в области $x \leq -2$ ($x \geq 2$). Полупрямые R_n^- и R_n^+ являются устойчивым состоянием равновесия $((\beta + \gamma) \mu^{-1}, -\gamma)$ модели (4) в области $|x| > 2$. На рис. 2 Γ_s и Γ_n — неустойчивые седловые траектории с их сепаратрисными многообразиями S^+ и S^- . При отсутствии у системы (4) траекторий L_s и L_n будем считать, что режимы P_s и P_n определяются соответственно полупрямыми R_s^+ и R_n^+ . Полупрямая R_s^+ существует при значениях $|\beta| < 1$, а полупрямая R_n^+ — при значениях параметров $|(\beta + \gamma) \mu^{-1}| < 1$.

В режиме слежения P_s устанавливается постоянная ошибка ϵ_s разности задержек полезного и опорного сигналов $\epsilon_s = \beta \Delta$ при нулевой разности их тактовых частот. В режиме слежения P_n устанавливается постоянная ошибка ϵ_n разности задержек помехи и опорного сигнала $\epsilon_n = (\beta + \gamma) \mu^{-1} \Delta$ при нулевой разности их тактовых частот, а величина ошибки ϵ_s изменяется во времени по закону $\epsilon_s = [(\beta + \gamma) \mu^{-1} - x_0 - \gamma \tau] \Delta$ при постоянной разности тактовых частот полезного и опорного сигналов, равной $-\gamma$.

Задача определения режимов ССЗ и соответствующих им областей значений параметров заключается, следовательно, в определении траекторий L_s и L_n , областей их существования и областей их притяжения. В данной работе эта задача решается с помощью численного исследования модели (4) с применением ЭВМ. Исследование проведено в двух различных случаях, когда помеха воздействует на захваченную систему (т. е. на систему, находящуюся в синхронизме с полезным сигналом) и когда сигнал и помеха поступают на вход системы одновременно.

3. Рассмотрим вначале случай, когда помеха воздействует на «захваченную» ССЗ. Этот случай имеет место, когда помеха по времени отстает от сигнала настолько, что к моменту ее поступления в ССЗ может закончиться поиск и установиться режим синхронизма [6, 8]. В соответствии с рассматриваемой ситуацией предполагаем [8], что параметр $x_0 \geq 4$, $\gamma < 0$, а параметры β , ϵ , n модели (4) принадлежат области захвата C_s : $\beta < \beta^*(\epsilon, n)$ автономной ССЗ (кривые $\beta = \beta^*(\epsilon, n)$ построены в [5]). Начальное состояние системы в момент $\tau_0 = (2 - x_0 - \beta) \gamma^{-1}$ прихода помехи определяется в фазовом пространстве точкой на полупрямой R_s^- . При $\tau > \tau_0$ под влиянием помехи изображающая точка в фазовом пространстве отклоняется от стационарного состояния $(\beta, 0)$ захваченной ССЗ. Режим синхронизма P_s не нарушается, если в фазовом пространстве x , y , z существует устойчивая траектория L_s . Тогда изображающая точка, двигаясь при возрастании времени τ по траектории L_s , выходит в область $z \leq -2$ и попадает в область притяжения $\Pi(R_s^+)$ полупрямой R_s^+ . При этом разность задержек x полезного и опорного сигналов удерживается системой в пределах дискриминационной характеристики $D(x)$.

Явление срыва слежения и связанные с ним потеря устойчивости ССЗ наступают при отсутствии траектории L_s . При этом имеет место либо нарастание в соответствии с результатами [5] абсолютных величин разности задержек $\epsilon_s = |T_1 - T^*|$ полезного и опорного сигналов и $\epsilon_n = |T_2 - T^*|$ помехи и опорного сигнала и выход ϵ_s и ϵ_n за пределы дискриминационных характеристик $D(x)$ и $D(z)$, обусловленный выходом изображающей точки за пределы области притяжения $\Pi(R_s^+)$ полуправой R_s^+ , либо переход на слежение за помехой в случае, если в фазовом пространстве существует полуправая R_n^+ и полуправая R_s^+ принадлежит области притяжения $\Pi(R_n^+)$ полуправой R_n^+ .

Устойчивость захваченной системы в рассматриваемом случае следует оценивать, таким образом, по величине области сохранения слежения, определяемой как область G_s существования устойчивой траектории L_s в области V_x фазового пространства. Срыв слежения, определяющий границу устойчивости системы, изучался путем численного построения траектории L_s . Уравнения (4) интегрировались на ЭВМ при значении $\beta = 0,3$ для различных значений параметров n , μ , γ , ϵ . На рис. 3 приведены кривые $\mu = \mu_1(\gamma)$ (сплошные линии) и $\mu = \mu_2(\gamma)$ (прерывистые линии), определяющие в параметрах помехи γ и μ области G_s сохранения слежения и G_n слежения за помехой. Пороговые кривые $\mu = \mu_1(\gamma)$ делят плоскость параметров μ , γ на две области: область сохранения слежения G_s : $\mu < \mu_1(\gamma)$ — и область срыва слежения G_0 : $\mu > \mu_1(\gamma)$, в которой происходит подавление ССЗ помехой.

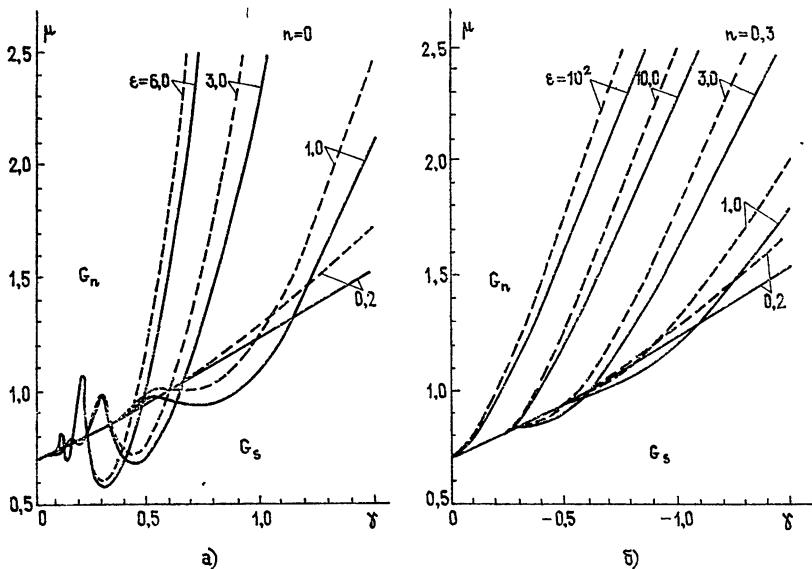


Рис. 3.

При значениях параметров из области устойчивости G_s захваченная ССЗ устойчива к воздействию уводящей помехи. Вызываемые помехой отклонения фазовых координат системы от стационарного состояния $(\beta, 0)$ компенсируются системой. При значениях μ , больших порогового значения $\mu_1(\gamma)$, помеха эффективна, так как система не в состоянии скомпенсировать вызываемые помехой отклонения от стационарного состояния $(\beta, 0)$, происходит срыв слежения и нарушение устойчивости ССЗ. При этом для значений параметров из области G_n ССЗ переходит на слежение за помехой. Переход из области G_s в область G_n происходит

дит через область G_{sn} : $\mu_1(\gamma) < \mu < \mu_2(\gamma)$, для точек которой траектория, выходящая при $\tau = \tau_0$ из точки M_0 : $R_s^- \cap \{z = -2\}$, уходит при возрастании τ в бесконечность. Такому движению изображающей точки соответствует режим P_0 работы ССЗ с нарастанием ошибок ε_s и ε_n и выходом их значений за пределы дискриминационных характеристик. Величина области G_{sn} уменьшается при уменьшении абсолютной величины скорости изменения задержки помехи.

Из представленных результатов видно, что наиболее уязвимой система оказывается в области малых значений $|\gamma|$, где срыв слежения происходит при пороговом отношении амплитуд помехи и сигнала $\mu < 1$. При уменьшении параметра n , изменяющего частотную характеристику ФНЧ, появляются и растут выбросы и провалы границ $\mu = \mu_1(\gamma)$ и $\mu = \mu_2(\gamma)$ областей G_s и G_n . При увеличении безразмерной постоянной времени ε эти выбросы и провалы смещаются в сторону меньших значений $|\gamma|$. Проследив характер кривых $\mu = \mu_1(\gamma)$ и $\mu = \mu_2(\gamma)$ при разных значениях параметра n , видим, что в области небольших значений $|\gamma|$ более высокую устойчивость системы обеспечивает пропорционально-интегрирующий ФНЧ, а в области $|\gamma| > 1$ лучший результат в этом смысле дает интегрирующий фильтр ($n = 0$), так как величина области G_s при небольших значениях $|\gamma|$ при $n = 0$ меньше, чем при $n > 0$, а при $|\gamma| > 1$ величина G_s при $n = 0$ больше, чем при $n > 0$. Так как параметры n и ε не влияют на величину области существования полупрямой R_s^+ , то их величина может быть выбрана, исходя из требуемой величины области устойчивости G_s .

4. В случае одновременного воздействия полезного и мешающего сигналов последний влияет на процесс входления в синхронизм. В этом случае параметр γ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Величина начальной расстройки β , должна по-прежнему быть $\beta < \beta^*(\epsilon, n)$, для того чтобы был возможен захват. При выполнении условий устойчивости автономной ССЗ устойчивость модели (4) может быть нарушена при некоторых значениях параметров помехи μ, γ, x_0 из-за невозможности установления режима P_s .

Уточним области изменения начальных значений фазовых переменных x, y, z при $\tau = 0$. Начальные значения $x_{\text{нач}}$ и $y_{\text{нач}}$ в ССЗ обычно задаются режимом поиска сигнала [4, 5] после грубого совмещения приемаемого и опорного сигналов, в результате которого $x_{\text{нач}} = -2$, а $y_{\text{нач}} = \beta$. Что касается начальных значений координаты z , то они определяются случайными начальными значениями величины x_0 , характеризующей начальное отставание помехи от сигнала. В силу апериодической формы дискриминационной характеристики следует рассматривать значения параметра x_0 в интервале $0 \leq x_0 \leq 4$, тогда величина $z_{\text{нач}}$ принимает значения из интервала $-2 \leq z_{\text{нач}} \leq 2$. Таким образом, начальное состояние системы определяется множеством точек отрезка начальных условий L_0 : $\{x = -2, y = \beta, |z| \leq 2\}$.

Возможность установления того или иного режима в незахваченной ССЗ под воздействием помехи определяется взаимным расположением в фазовом пространстве отрезка L_0 и областей притяжения $\Pi(R_s^+)$ и $\Pi(R_n^+)$ полупрямых R_s^+ и R_n^+ . Установление режима синхронизма P_s происходит в том случае, если отрезок начальных условий L_0 принадлежит области притяжения $\Pi(R_s^+)$. Область значений параметров, при которых это условие выполняется, будем называть областью захвата Ω_s полезным сигналом. Область устойчивости системы в рассматриваемом случае следует оценивать по величине области захвата Ω_s .

Невхождение в режим P_s при значениях параметров вне области Ω_s обусловлено возможностью установления режимов P_n или P_0 . Если

отрезок L_0 принадлежит области притяжения $\Pi(R_n^+)$, то при этом значения параметров системы и помехи принадлежат области захвата Ω_n в режиме P_n . Если же отрезок L_0 разбивается на области, одна часть которых принадлежит $\Pi(R_s^+)$, другая часть принадлежит $\Pi(R_n^+)$, а траектории, начинающиеся из остальных точек L_0 , уходят в бесконечность, то при этих значениях параметров возможно установление и режима P_s , и режима P_n , и режима P_0 в зависимости от начального значения координаты z .

Поскольку начальное временное положение помехи является случайной величиной, устойчивость системы можно оценить по вероятности захвата. Для определения вероятностей захвата p_s в режиме P_s слежения за сигналом и p_n в режиме P_n слежения за помехой зададимся функцией распределения $F(z)$ случайных начальных условий $z_{\text{нач}}$, такой, что $\int_{-2}^2 F(z) dz = 1$. Пусть Δ_s и Δ_n — множества точек на отрезке начальных условий L_0 , принадлежащих областям притяжения $\Pi(R_s^+)$ и $\Pi(R_n^+)$. Тогда аналогично [8] вероятности захвата p_s и p_n определяются выражениями

$$p_s = \int_{\Delta_s} F(z) dz, \quad p_n = \int_{\Delta_n} F(z) dz. \quad (6)$$

В области захвата $\Omega_s(\Omega_n)$ в режиме $P_s(P_n)$ $p_s = 1$ ($p_n = 1$). В том случае, если значения $z_{\text{нач}}$ распределены равновероятно [6] в интервале $[-2, 2]$, $F(z) = \text{const}$, тогда из (6) получаем $p_s = \Delta_s/4$, $p_n = \Delta_n/4$. Задаваясь конкретными значениями p_s и p_n , можно определить величину области устойчивости Ω_s и области захвата помехой Ω_n с требуемыми вероятностями.

Изучение процесса входления в синхронизм и определение Δ_s , Δ_n , p_s , p_n , Ω_s , Ω_n производились с помощью численного исследования модели (4). Алгоритм расчета вероятностей и областей захвата основан на выделении в фазовом пространстве на отрезке L_0 областей притяжения Δ_s и Δ_n и соответствующих им областей в пространстве параметров.

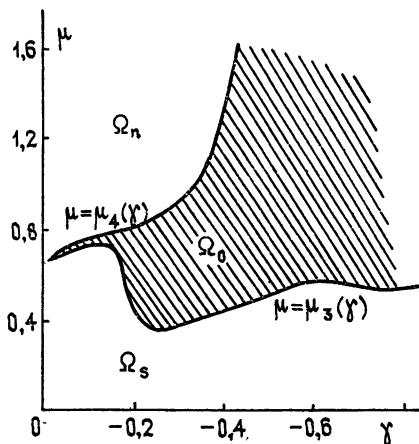


Рис. 4.

В качестве примера по данным численного исследования модели (4) на рис. 4 приведены в параметрах μ , γ кривые $\mu = \mu_3(\gamma)$ и $\mu = \mu_4(\gamma)$, определяющие область устойчивости Ω_s : $\mu < \mu_3(\gamma)$ — с веро-

ятностью $p_s = 1$ и область захвата помехой Ω_n : $\mu > \mu_4(\gamma)$ — с вероятностью $p_n = 1$ при $\gamma < 0$ для значений параметров $\beta = 0,3$, $n = 0,3$, $\epsilon = 10$. При значениях параметров из области Ω_0 , $\mu_3(\gamma) < \mu < \mu_4(\gamma)$, в зависимости от начального значения z в системе может устанавливаться и режим P_s , и режим P_n , и режим P_0 .

На рис. 5 приведен вид кривых $\beta = \beta_1(\mu)$ и $\beta = \beta_2(\mu)$, определяющих область устойчивости Ω_s : $\beta_2(\mu) < \beta < \beta_1(\mu)$ — с вероятностью $p_s = 1$ в параметрах β и μ при значениях параметров $n = 0,3$, $\gamma = 0,1$, $\epsilon = 0,2$; 3,0; 10; 100. Эти результаты показывают характер изменения величины интервала значений начальной расстройки β , в котором происходит захват под полезный сигнал, в зависимости от уровня помехи μ . Для значений параметров из области Ω_0 , $\beta > \beta_1(\mu)$, $\beta < \beta_2(\mu)$, в системе возможно установление и режима P_s , и режима P_n , и режима P_0 в зависимости от начальных условий.

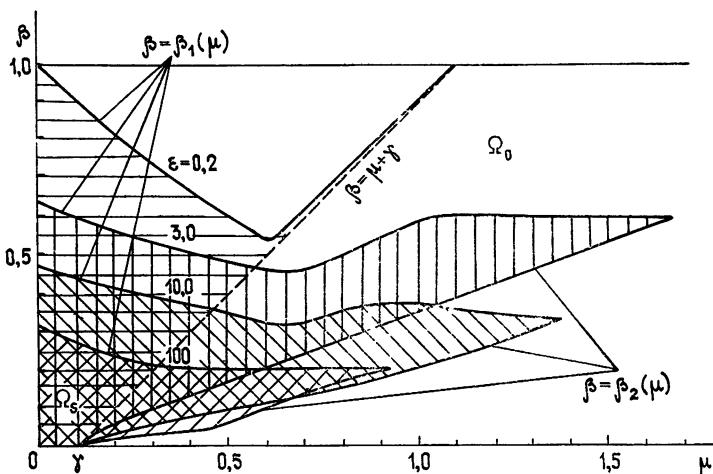


Рис. 5.

5. Полученные в работе результаты о режимах и устойчивости ССЗ позволяют сделать следующие выводы. При отсутствии помех устойчивость ССЗ характеризуется областью C_s , $\beta < \beta^*(\epsilon, n)$, детально рассчитанной в работе [5]. При воздействии уводящей помехи характеристиками устойчивости ССЗ являются область сохранения слежения G_s и область захвата Ω_s с вероятностью p_s . Нарушение устойчивости связано с выходом ошибки x за пределы дискриминационной характеристики или с переходом на слежение за помехой. Результаты о режимах и параметрах ССЗ могут быть использованы для оценки устойчивости ССЗ к воздействию помехи, а также для оценки эффективности помехи, исходя из условия подавления системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. P. Ristenbatt and J. L. Dawes, IEEE Trans Communs, 25, № 8, 756 (1977).
2. P. M. Hopkins, IEEE Trans. Communs, 25, № 8, 770 (1977).
3. J. K. Holmes and C C Chen, IEEE Trans Communs, 25, № 8, 778 (1977).
4. Г. И. Тузов, Статистическая теория приема сложных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1977.
5. Л. Н. Белюстина, В. П. Пономаренко, В. Д. Шалфеев, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 11, 1669 (1970).
6. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации, под ред. В. Б. Пестрякова, изд. Сов. радио, М., 1973.

7. В. М. Свистов, Радиолокационные сигналы и их обработка, изд. Сов. радио, М., 1977.
8. В. П. Пономаренко, Радиотехника и электроника, 23, № 10, 2141 (1978).
9. Ю. И. Неймарк, Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1972.
10. В. Н. Белых, Дифференциальные уравнения, 11, № 10, 1738 (1975).
11. Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, в Межвуз. сб. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика, вып. 1, 94 (1973).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
12 июня 1978 г.

THE EFFECT OF A SIMILAR NOISE ON DYNAMICS OF THE SYNCHRONIZATION SYSTEM OF A PSEUDORANDOM SIGNAL

V. P. Ponomarenko, K. G. Kiveleva

Investigation results are presented of a control system stability of a pseudorandom signal delay under the action of the driving noise similar in structure to the useful signal. The effect of the noise on the stable regime of control as well as on the process of incoming into the synchronization is investigated. Dynamic characteristics of the stable system are defined, regions of preserving and breakdown of control, regions and probabilities of trapping by the useful signal and the noise

УДК 538.574.33

**ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ
В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ В ОБЛАСТИ СИЛЬНЫХ
ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ**

B. Y. Заворотный

Рассматривается асимптотическое поведение четырехточечной функции когерентности поля волны $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ в случайно-неоднородной турбулентной среде в области сильных флюктуаций интенсивности. Исследуется величина действительной и мнимой части Γ_4 в зависимости от положения точек наблюдения и при различных соотношениях между радиусом когерентности волны и внутренним масштабом турбулентности среды. Проводится сравнение полученных результатов с экспериментом.

Поведение поля волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, может быть описано его статистическими моментами, уравнения для которых были получены в работах [1, 2]. Наибольший интерес в настоящее время привлекает четвертый момент поля, который в случае начальной плоской монохроматической волны можно определить следующим образом:

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, 0) u^*(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) u(x, \rho_1 + \rho_2) \rangle, \quad (1)$$

где для удобства точки наблюдения помещены в вершины параллелограмма, образованного векторами ρ_1 и ρ_2 в плоскости $x = \text{const}$.

Строгое решения уравнения для Γ_4 получить не удается. Существует ряд работ, посвященных исследованию Γ_4 численными методами [3–6] и приближенными асимптотическими методами в области сильных флюктуаций интенсивности волны [7–9]. В этих работах фактически рассматривались одноточечная функция $\Gamma_4(x, 0, 0)$ или двухточечная функция $\Gamma_4(x, 0, \rho)$, описывающие соответственно дисперсию и корреляционную функцию флюктуаций интенсивности волны. Представляет также интерес исследовать асимптотическое поведение $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ в случайно-неоднородной среде, когда разнесены все четыре точки наблюдения. Подобная ситуация была воспроизведена в экспериментальных работах [10–12]. Характерной особенностью такой функции когерентности является то, что она представляет собой в этом случае комплексную величину, связанную с амплитудно-фазовыми флюктуациями волны.

В данной работе будет проведено исследование асимптотических свойств четырехточечной функции когерентности поля $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ в турбулентной среде для плоской монохроматической начальной волны. Используя любой из асимптотических методов, изложенных в работах [7–9], в области сильных флюктуаций волны $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ можно представить в следующем виде:

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_2^2(x, \rho_1) + \Gamma_2^2(x, \rho_2) + \gamma(x, \rho_1, \rho_2) + \gamma(x, \rho_2, \rho_1) + \dots, \quad (2)$$

где $\Gamma_2(x, \rho) = \exp[-k^2 x D(\rho)/4]$ — функция когерентности поля второго порядка,

$$\gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \pi k^2 \int_0^x dy \iint d^2 x \Phi_\epsilon(0, x) \left[1 - \cos \left(\rho_1 x - \frac{x^2 y}{k} \right) \right] \times \\ \times \exp \left[i x \rho_2 - \frac{k^2}{2} (x - y) D \left(\rho_1 - \frac{x y}{k} \right) - \frac{k^2}{2} \int_0^y dy' D \left(\rho_1 - \frac{x}{k} y' \right) \right], \quad (3)$$

$$D(\rho) = 2\pi \iint \Phi_\epsilon(0, x) (1 - \cos x \rho) d^2 x,$$

$\Phi_\epsilon(0, x) = AC_\epsilon^2 x^{-\mu}$ $\exp(-x^2/x_m^2)$ — трехмерная спектральная плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости среды ϵ , где C_ϵ^2 — структурная характеристика флюктуаций ϵ . Для кольмогоровской модели турбулентности — $A = 0,033$, $\mu = 11/3$, $x_m = 5,92/\lambda_0$, λ_0 — внутренний масштаб турбулентности.

Выражение (2) представляет собой асимптотическое разложение Γ_4 по малому параметру $\delta = k \rho_{\text{кор}}^2 / x$, где $\rho_{\text{кор}}$ — радиус когерентности находится из равенства $|\ln \Gamma_2(x, \rho_{\text{кор}})| = 1$. Первые два члена в (2) являются главными членами разложения, а остальные — поправками к асимптотике. Для функции $D(\rho)$, входящей в (3), можно записать асимптотики при $\rho \ll \lambda_0$ и $\rho \gg \lambda_0$ в виде общей формулы:

$$D(\rho) = NC_\epsilon^2 \rho^\nu, \quad (4)$$

где

$$N = \begin{cases} M_1, & \nu = \mu - 2 \quad (\rho \gg \lambda_0) \\ M_2 \lambda_0^{\mu-4}, & \nu = 2 \quad (\rho \ll \lambda_0) \end{cases}$$

M_1, M_2 — численные коэффициенты, $M_1 = 1,46$ и $M_2 = 1,64$ при $\mu = 11/3$. Исходя из вида (4) для функции $D(\rho)$, можно найти выражение для радиуса когерентности:

$$\rho_{\text{кор}} = \left(\frac{k^2 x N C_\epsilon^2}{4} \right)^{-1/\nu}. \quad (5)$$

Между малым параметром $\delta = k \rho_{\text{кор}}^2 / x$ и большим параметром β_0^2 — дисперсией флюктуаций интенсивности, вычисленной в первом приближении метода возмущений, — существует прямая связь. В частности, для случая $\mu = 11/3$ справедливы соотношения

$$\delta = \begin{cases} 0,81 \beta_0^{-12/5} & (\rho_{\text{кор}} \gg \lambda_0) \\ 0,75 \beta_0^{-2} G^{-1/6} & (\rho_{\text{кор}} \ll \lambda_0) \end{cases}, \quad (6)$$

где $\beta_0^2 = 0,31 C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$, $G = x/k \lambda_0^2$ — волновой параметр.

Введем новые переменные ξ , q и η_1 , η_2 , связанные с прежними следующим образом:

$$y = x \xi, \quad \rho_{1,2} = \rho_{\text{кор}} \eta_{1,2}, \quad x = \frac{\delta \left(q + \frac{\eta_1}{\xi} \right)}{\rho_{\text{кор}}}.$$

Тогда из (3) получим, что

$$\gamma(x, \eta_1, \eta_2) = 4\pi N_0^{-1} A \delta^{1-(\mu+\nu)/2} \int_0^1 d\xi \iint d^2 q \left| q + \frac{\eta_1}{\xi} \right|^{-\mu} \times$$

$$\times [1 - \cos \delta q(\eta_1 + q\xi)] \exp \left[-\frac{\delta^2 \left(q + \frac{\eta_1}{\xi} \right)^2}{\rho_{\text{кор}}^2 x_m^2} + i\delta \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{\xi} + \right. \right. \quad (7)$$

$$\left. \left. + q\eta_2 \right) - 2(1 - \xi)\xi^\nu q^\nu - 2 \int_0^\xi d\xi' \left| \eta_1 \left(1 - \frac{\xi'}{\xi} \right) - q\xi' \right|^\nu \right],$$

где

$$N_0 = \begin{cases} M_1 & (\rho_{\text{кор}} \gg \lambda_0) \\ M_2 G^{(4-\mu)/2} & (\rho_{\text{кор}} \ll \lambda_0) \end{cases}. \quad (8)$$

В общем случае $\gamma(x, \eta_1, \eta_2)$ является комплексной величиной, но при выполнении условия $\eta_1 \eta_2 = 0$ ее мнимая часть обращается в нуль. Ограничим диапазон интересующих нас величин ρ_1 и ρ_2 интервалом $(0, r_0)$ (для безразмерных векторов $\eta_1, \eta_2 = (0, \delta^{-1})$), где $r_0 = x/k\rho_{\text{кор}}$ — больший из двух масштабов корреляционной функции интенсивности [7, 8]. Это условие позволит нам в дальнейшем упростить исходные выражения. Разобьем пределы интегрирования по ξ в (7) на два участка: $(0, \delta)$ и $(\delta, 1)$. Исследование подынтегрального выражения показывает, что для действительной части $\gamma(x, \rho_1, \rho_2)$ при любых значениях η_1, η_2 участок интегрирования $(0, \delta)$ дает асимптотически малую поправку по сравнению с интегралом по остальному промежутку. Тогда на интервале $(\delta, 1)$ с учетом указанных выше ограничений на η_1, η_2 можно считать, что основной вклад в интеграл вносят значения $q\xi \leq 1$, что позволяет разложить в ряд $\cos \delta q(\eta_1 + q/\xi)$ и $\exp(i\delta q\eta_2)$. Оставляя первые неисчезающие члены разложений, получим для действительной части $\gamma(x, \eta_1, \eta_2)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \gamma(x, \eta_1, \eta_2) \approx 2\pi A N_0^{-1} \delta^{(6-\mu-\nu)/2} \int_0^\delta d\xi \cos \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi} \times \\ \times \iint d^2 q \left| q + \frac{\eta_1}{\xi} \right|^{-\mu} [q(\eta_1 + q\xi)]^\nu \exp \left[-\frac{\left(q + \frac{\eta_1}{\xi} \right)^2}{r_0^2 x_m^2} - \right. \\ \left. - 2(1 - \xi)\xi^\nu q^\nu - 2 \int_\delta^1 d\xi' \left| \eta_1 \left(1 - \frac{\xi'}{\xi} \right) - q\xi' \right|^\nu \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для мнимой части $\gamma(x, \eta_1, \eta_2)$ ситуация иная. Вклад в интеграл от участков $\xi = (0, \delta)$ и $\xi = (\delta, 1)$ при некоторых значениях η_1 и η_2 может быть одного порядка, поэтому необходимо учитывать оба участка.

Представим $\operatorname{Im} \gamma(x, \eta_1, \eta_2)$ в следующем виде:

$$\operatorname{Im} \gamma(x, \eta_1, \eta_2) = \gamma^0(x, \eta_1, \eta_2) + \gamma^1(x, \eta_1, \eta_2),$$

где

$$\gamma^0(x, \eta_1, \eta_2) \approx 4\pi A N_0^{-1} \delta^{(2-\mu-\nu)/2} \exp(-2\eta_1^\nu) \times \quad (10)$$

$$\times \int_0^\delta d\xi \iint d^2 q q^{-\mu} [1 - \cos \delta q(\eta_1 - q\xi)] \sin \delta q \eta_2 \exp \left(-\frac{\delta^2 q^2}{\rho_{\text{кор}}^2 x_m^2} \right);$$

$$\gamma^1(x, \eta_1, \eta_2) \approx 2\pi A N_0^{-1} \delta^{(6-\mu-\nu)/2} \int_\delta^1 d\xi \iint d^2 q \left| q + \frac{\eta_1}{\xi} \right|^{-\mu} \times$$

$$\times [q(\eta_1 + q \xi)]^2 \left(\delta q \eta_2 \cos \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi} + \sin \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi} \right) \times \quad (11)$$

$$\times \exp \left[- \frac{\left(q + \frac{\eta_1}{\xi} \right)^2}{r_0^2 \kappa_m^2} - 2(1-\xi) \xi^\nu q^\nu - 2 \int_0^\xi d\xi' \left| \eta_1 \left(1 - \frac{\xi'}{\xi} \right) - q \xi' \right|^\nu \right].$$

Итак, вычисление комплексной величины четырехточечной функции когерентности Γ_4 сводится к вычислению интегралов (9), (10) и (11). Хотя они уже в значительной степени упрощены по сравнению с исходным видом, тем не менее точно вычислить эти интегралы не удается. Можно, однако, исследовать их асимптотическое поведение по переменным η_1 и η_2 .

При рассмотрении той или иной асимптотики $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$ удобно выделить на плоскости $\eta_1 = |\eta_1|$, $\eta_2 = |\eta_2|$ характерные области изменения этих величин при $\eta_1 \eta_2 \neq 0$. Приведенные на рис. 1 кривые и прямые линии соответствуют границам действия тех или иных асимптотик величин, составляющих $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$. Поскольку $\Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)$ симметрична относительно η_1 и η_2 , то будем рассматривать только лежащую ниже биссектрисы часть плоскости. Такое разбиение позволяет произвести упрощение подынтегральных выражений в (9), (10) в каждой из обозначенных областей.

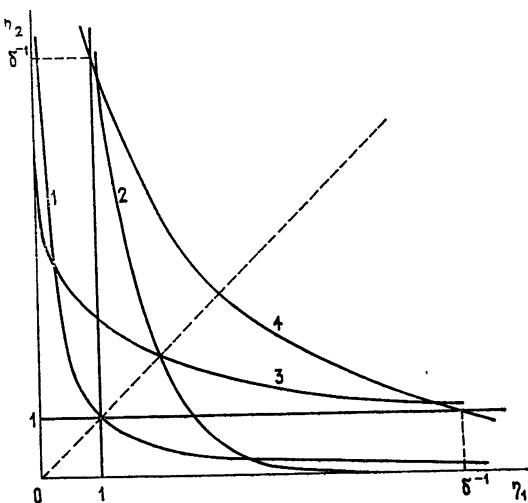


Рис. 1. Области действия асимптотик Γ_4 по η_1, η_2 :
 кривые $1 - \eta_1 \eta_2 = 1$, $2 - 2 \delta \eta_2 \eta_1^{\nu+1}/(\nu+1) = 1$,
 $3 - 2 \delta \eta_1 \eta_2^{\nu+1}/(\nu+1) = 1$, $4 - \delta \eta_1 \eta_2 = 1$.

Ниже приводятся полученные для каждой области асимптотические выражения $\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)$.

A . В этой области $\eta_{1,2} < 1$ (при вычислении асимптотик все неравенства понимаются в сильном смысле):

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(x, \eta_1) + \Gamma_2^2(x, \eta_2) + 2 \operatorname{Re} \gamma_A + \dots,$$

где

$$\operatorname{Re} \gamma_A = \frac{4 \pi^2 A \Gamma \left(\frac{6-\mu}{\nu} \right)}{N_0 \nu (\mu-3) 2^{(6-\mu)/\nu}} {}_2F_1 \left(\frac{6-\mu}{\nu}, \mu-3, \mu-2; \frac{\nu}{1+\nu} \right) \delta^{(6-\mu-\nu)/2}. \quad (12)$$

B. Здесь $\eta_1 > 1$, $\eta_2 < 1$, но $\eta_1 \eta_2 < 1$, тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(x, \eta_1) + \Gamma_2^2(x, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_A + \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_1, \eta_2) + \dots,$$

где

$$\operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_1, \eta_2) = \frac{2\pi^2 A}{N_0 v} 2^{-\mu+3-4/v} (v+1)^{\mu-3} \Gamma(\mu-3) \delta^{(6-\mu-v)/2} \eta_1^{v+(v+1)(2-\mu)}. \quad (13)$$

C1. Здесь $\eta_1 > 1$, $\eta_2 < 1$, но $\eta_1 \eta_2 > 1$ и $\frac{2\delta \eta_2 \eta_1^{v+1}}{v+1} < 1$, тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(x, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_c(\eta_2, \eta_1) + \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_1, \eta_2) + \dots,$$

где

$$\operatorname{Re} \gamma_c(\eta_1, \eta_2) \approx \frac{4\pi^2 A \Gamma\left(\frac{6-\mu}{v}\right) \delta^{(6-\mu-v)/2}}{v N_0 (\mu-3) 2^{(6-\mu)/v}} \left[{}_2F_1\left(\frac{6-\mu}{v}, \mu-3, \mu-2; \frac{v}{1+v} \delta \eta_1 \eta_2\right) \right. \quad (14)$$

$$\left. - (\delta \eta_1 \eta_2)^{\mu-3} {}_2F_1\left(\frac{6-\mu}{v}, \mu-3, \mu-2; \frac{v}{1+v} \delta \eta_1 \eta_2\right) \right].$$

C2. Здесь $\eta_1 > 1$, $\eta_2 < 1$, но $\eta_1 \eta_2 > 1$ и $\frac{2\delta \eta_2 \eta_1^{v+1}}{v+1} > 1$, тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(x, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_c(\eta_2, \eta_1) + \operatorname{Re} \gamma_{D_2}(\eta_1, \eta_2) + \dots,$$

где

$$\operatorname{Re} \gamma_{D_2}(\eta_1, \eta_2) = \frac{\pi^2 A}{v N_0 2^{4/v-1}} \delta^{(\mu-v)/2} (\eta_1 \eta_2)^{\mu-3} \eta_1^{2-\mu} \frac{e^{-z}}{z}, \quad (15)$$

$$z = \frac{2\eta_1^v \delta \eta_1 \eta_2}{v+1}.$$

D1. Здесь $\eta_{1,2} > 1$, но $\frac{2\delta \eta_2 \eta_1^{v+1}}{v+1} < 1$, тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(x, \eta_1) + \Gamma_2^2(x, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_1, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_2, \eta_1) + \dots, \quad (16)$$

где $\operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_2, \eta_1)$ получаем из (13) заменой η_1 на η_2 .

D2. Здесь $\eta_{1,2} > 1$, $\frac{2\delta \eta_2 \eta_1^{v+1}}{v+1} > 1$, но $\frac{2\delta \eta_1 \eta_2^{v+1}}{v+1} < 1$, а также $\delta \eta_1 \eta_2 < 1$. Тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_1, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_{D_1}(\eta_2, \eta_1) + \Gamma_2^2(x, \eta_2) + \dots \quad (17)$$

D3. Здесь $\eta_{1,2} > 1$, $\frac{2\delta \eta_1 \eta_2^{v+1}}{v+1} > 1$, $\frac{2\delta \eta_2 \eta_1^{v+1}}{v+1} > 1$, но $\delta \eta_1 \eta_2 < 1$,

тогда

$$\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx \operatorname{Re} \gamma_{D_2}(\eta_1, \eta_2) + \operatorname{Re} \gamma_{D_2}(\eta_2, \eta_1) + \dots, \quad (18)$$

где $\operatorname{Re} \gamma_{D_2}(\eta_2, \eta_1)$ получаем из (15) заменой η_1 на η_2 и η_2 на η_1 . В области $\delta \eta_1, \eta_2 \gg 1$ поправки к главным членам асимптотики $\operatorname{Re} \Gamma_4$, а также и к $\operatorname{Im} \Gamma_4$ пренебрежимо малы из-за быстрых осцилляций подынтегрального выражения в (7).

Следует отметить, что при вычислении асимптотик $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$ при $\eta_{1,2} \ll 1$ или $\eta_{1,2} \gg 1$ удерживались только первые неисчезающие члены разложений. В частности, интеграл, стоящий в показателе экспоненты (9), брался в виде

$$\int_0^\xi d\xi' \left| \eta_1 \left(1 - \frac{\xi'}{\xi} \right) - q \xi' \right|^v \approx \begin{cases} \frac{q^v \xi^{v+1}}{v+1} & (\eta_1 \ll 1) \\ \frac{\eta_1^v \xi}{v+1} + \frac{q^v \xi^{v+1}}{v+1} & (\eta_1 \gg 1) \end{cases}$$

Такая аппроксимация приводит к ошибкам, имеющим более высокий порядок по δ , чем учитываемые члены. При $\eta_{1,2} \ll (r_0 x_m)^{1/2}$ можно не принимать во внимание слагаемое $(q + \eta_1/\xi)^2/r_0^2 x_m^2$ в показателе экспоненты (9), что и делалось при вычислении асимптотик $\operatorname{Re} \Gamma_4$. В области значений $\eta_{1,2} \gg (r_0 x_m)^{1/2}$ различие между приближенным и точным результатами не будет влиять на общий характер асимптотического поведения $\operatorname{Re} \Gamma_4$.

Итак, если теперь восстановить по полученным формулам вид $\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)$ в области сильных флюктуаций интенсивности, то получим рельеф, схематически изображенный на рис. 2.

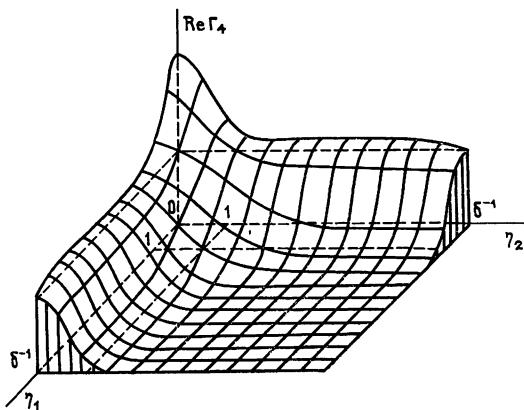


Рис. 2. Рельеф $\operatorname{Re} \Gamma_4$.

Обратимся теперь к результатам, полученным для $\operatorname{Im} \Gamma_4$. Отметим сразу, что $\operatorname{Im} \Gamma_4$ равна нулю при $\eta_1 \eta_2 = 0$ независимо от величины параметра δ из соображений изотропности. В области сильных флюктуаций интенсивности, где $\delta \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\operatorname{Im} \Gamma_4 = \operatorname{Im} \Gamma_4^0 + \operatorname{Im} \Gamma_4^1.$$

Первое слагаемое определяется участком трассы толщиной $x\delta$, прилегающим к плоскости приема, второе — всей остальной трассой. Рассмотрим сначала $\operatorname{Im} \Gamma_4^0$ в различных областях плоскости $\eta_1 \eta_2$ при $\rho_{\text{кор}} \gg \lambda_0$.

$$A. \operatorname{Im} \Gamma_{4i}^0 \approx -\frac{8\pi^2 A \sin \frac{\mu \pi}{4}}{N_0(\mu-2)(4-\mu)} \Gamma \left(\frac{6-\mu}{2} \right) \delta^{(\mu-v)/2} \eta_1 \eta_2. \quad (19)$$

B, C_1, C_2 .

$$\operatorname{Im} \Gamma_4^0 \approx -\frac{8\pi^2 A \mu (\mu-2)(4-\mu)}{2^\mu N_0 \Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{4-\mu}{2}\right) \delta^{(\mu-\nu)/2} \eta_1^{\mu-6} \eta_1 \eta_2. \quad (20)$$

В областях $D_{1,2,3}$ $\operatorname{Im} \Gamma_4^0$ экспоненциально спадает по η_1 и η_2 на масштабе $\eta_{1,2} \sim 1$. К тому же $\operatorname{Im} \Gamma_4^0 \sim \delta^{(\mu-\nu)/2} (\rho_{\text{ког}} \kappa_m)^{6-\mu}$ при $\rho_{\text{ког}} \ll \lambda_0$, а поскольку, как будет показано ниже, $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \geq \delta^{(\mu-\nu)/2}$, то в этом случае слагаемым $\operatorname{Im} \Gamma_4^0$ можно пренебречь, в то время как при выполнении неравенства $\rho_{\text{ког}} \gg \lambda_0$ $\operatorname{Im} \Gamma_4^0$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4^1$ одного порядка. Перейдем теперь к $\operatorname{Im} \Gamma_4^1$.

A. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1(x, \eta_1, \eta_2) \approx \gamma_A^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_A^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$,
где

$$\gamma_A^1(\eta_1, \eta_2) = \frac{2\pi^2 A \Gamma\left(\frac{6-\mu}{\nu}\right)}{\nu N_0 2^{(6-\mu)/\nu}} \delta^{(\mu-\nu)/2} \eta_1 \eta_2. \quad (21)$$

B. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_B^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_A^1(\eta_2, \eta_1),$
где

$$\begin{aligned} \gamma_B^1(\eta_1, \eta_2) = \\ = \begin{cases} J = \frac{2\pi^2 A \delta^{(\mu-\nu)/2}}{\nu N_0 2^{4/\nu} (4-\mu)} (\eta_1 \eta_2) \eta_1^{2-\mu} & \left(\eta_1 \ll \left(\frac{2\delta}{\nu+1}\right)^{-1/\nu}\right) \\ J \frac{(\nu+1)(4-\mu)}{2} \exp\left(-\frac{2\eta_1^\nu \delta}{\nu+1}\right) / \left(\frac{2\eta_1^\nu \delta}{\nu+1}\right) & \left(\eta_1 \gg \left(\frac{2\delta}{\nu+1}\right)^{-1/\nu}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

C. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_{D_1}^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_c^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$,

где

$$\gamma_c^1(\eta_2, \eta_1) \approx \frac{2\pi^2 A \Gamma\left(\frac{6-\mu}{\nu}\right)}{\nu N_0 2^{(6-\mu)/\nu}} \delta^{(\mu-\nu)/2} (\eta_1 \eta_2)^{\mu-3}; \quad (23)$$

$$\gamma_{D_1}^1(\eta_1, \eta_2) \approx \frac{2\pi^2 A \delta^{(\mu-\nu)/2}}{\nu N_0 (4-\mu) 2^{4/\nu}} (\eta_1 \eta_2)^{\mu-3} \eta_1^{2-\mu}. \quad (24)$$

C. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_{D_2}^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_c^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$,

где

$$\begin{aligned} \gamma_{D_2}^1(\eta_1, \eta_2) &= \gamma_{D_1}^1(\eta_1, \eta_2) (4-\mu)(\nu+1) \frac{e^{-z}}{2z}, \\ z &= \frac{2\eta_1^\nu \delta \eta_1 \eta_2}{\nu+1}. \end{aligned} \quad (25)$$

D. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_{D_1}^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_{D_1}^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$

D. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_{D_2}^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_{D_1}^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$

D. $\operatorname{Im} \Gamma_4^1 \approx \gamma_{D_2}^1(\eta_1, \eta_2) + \gamma_{D_2}^1(\eta_2, \eta_1) + \dots$

На рис. 3 и 4 схематически показаны зависимости $\text{Im} \Gamma_4^0$ и $\text{Im} \Gamma_4^1$ от η_1 и η_2 . Чтобы получить полную величину $\text{Im} \Gamma_4$, нужно сложить обе составляющие с учетом знаков. Ясно, что при $\rho_{\text{ког}} \ll \lambda_0$ все будет определяться поведением $\text{Im} \Gamma_4^1$, поскольку в этом случае $|\text{Im} \Gamma_4^0| \ll \ll |\text{Im} \Gamma_4^1|$. При $\rho_{\text{ког}} \gg \lambda_0$ то же самое можно утверждать только для удаленных областей плоскости $\eta_1 \eta_2$, где $\eta_1 \eta_2 \gg 1$, поскольку на масштабах $\eta_{1,2} \leq 1$ определяющую роль будет играть составляющая $\text{Im} \Gamma_4^0$, которая имеет знак, противоположный знаку $\text{Im} \Gamma_4^1$. Вычисления показывают, что при $\eta_{1,2} \leq 1$ $|\text{Im} \Gamma_4^0| > |\text{Im} \Gamma_4^1|$. Таким образом, при $\eta_{1,2} \leq 1$ имеется область отрицательных значений $\text{Im} \Gamma_4$, если считать, что $\eta_1 \eta_2 > 0$. Кстати, следует отметить, что в области слабых флюктуаций, где справедлив метод плавных возмущений (МПВ), при $\eta_1 \eta_2 > 0$ $\text{Im} \Gamma_4$ имеет также отрицательный знак. При движении в область сильных флюктуаций $\text{Im} \Gamma_4$ меняет знак сначала на периферии, где $\eta_{1,2} \gg 1$, а затем и при $\eta_{1,2} \leq 1$ $\text{Im} \Gamma_4$ приобретает положительный знак. Это происходит, когда $\rho_{\text{ког}}$ становится меньше внутреннего масштаба λ_0 .

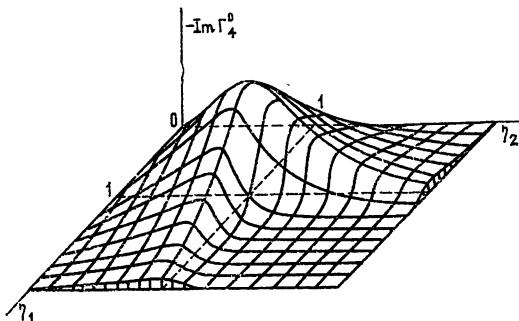


Рис. 3. Рельеф $\text{Im} \Gamma_4^0$.

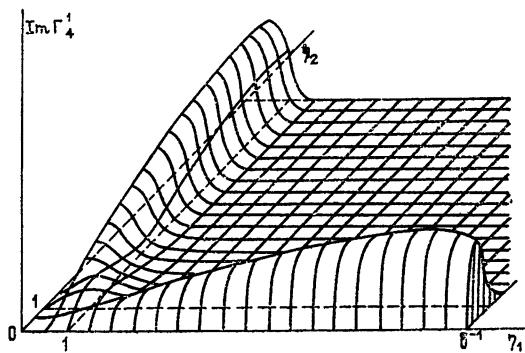


Рис. 4. Рельеф $\text{Im} \Gamma_4^1$.

Перейдем теперь к обсуждению деталей рельефа $\text{Im} \Gamma_4$. Как уже отмечалось, $\text{Im} \Gamma_4$ обращается в нуль на осах $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = 0$. При $\eta_{1,2} \sim 1$ $|\text{Im} \Gamma_4^0|$ имеет максимум, а $\text{Im} \Gamma_4$ — седловину. В этой окрестности они имеют порядок $\delta^{(\mu-\nu)/2}$. При $\mu = 11/3$ и $\nu = 5/3$ это будет соответствовать величине δ или $\beta_0^{-12/5}$. При $\eta_1 \sim 1$ и $\eta_2 \sim \delta^{-1}$, а также в симметричной области $\text{Im} \Gamma_4^1$ имеет порядок $\delta^{(6-\mu-\nu)/2}$ (или для тех же μ и ν , что упоминалось выше, — $\delta^{1/3}$ или $\beta_0^{-4/5}$), т. е. тот же

порядок, что и $\operatorname{Re} \gamma$ — поправка к асимптотике $\operatorname{Re} \Gamma_4$. При $\eta_1 \sim 1$ и $\eta_2 > \delta^{-1}$ $\operatorname{Im} \Gamma_4$ будет спадать за счет быстрых осцилляций подынтегрального выражения. Если обратиться к формуле (7) для комплексной величины $\gamma(x, \eta_1, \eta_2)$, то легко увидеть, что различие между $\operatorname{Re} \gamma$ и $\operatorname{Im} \gamma$ велико только при $\eta_1 \eta_2 \ll 1$, когда $\cos \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi} \sim 1$, а $\sin \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi} \sim \frac{\delta \eta_1 \eta_2}{\xi}$, но уже при $|\delta \eta_1 \eta_2| \geq 1$ косинус и синус становятся одного порядка. Этим и объясняется появление максимумов $\operatorname{Im} \Gamma_4$ в окрестностях $\eta_1 \sim 1$, $\eta_2 \sim \delta^{-1}$.

Как указывалось в начале статьи, имеется ряд работ [10–12], посвященных экспериментальным исследованиям четырехточечной функции Γ_4 , в которых проводилось сопоставление с теоретическими зависимостями, вытекающими из МПВ. Проведем сравнение полученных здесь результатов с данными указанных работ, а также с дополнительными данными, любезно предоставленными А. С. Гурвичем и В. Каном.

Во-первых, отметим, что приведенные в работах [10–12] рельефы $|\Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)|$ качественно хорошо согласуются с рельефом $\operatorname{Re} \Gamma_4$, изображенным на рис. 2 ($\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx |\Gamma_4|$ при $|\delta \eta_1 \eta_2| < 1$). С другой стороны, если пересекать поверхность $|\Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)|$ плоскостями, перпендикулярными основанию $\eta_1 \eta_2$ и проходящими через начало координат, то будем получать сечения, подобные тем, что изображены на рис. 5. На нем представлены экспериментальные данные для трех сечений рельефа $\tilde{\Gamma}_4 = |\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)| / \Gamma_4(x, 0, 0)$ при $\beta_0 \approx 2,3$ ($\delta \approx 0,11$). Теоретические кривые рассчитывались для тех же условий, при этом полагалось, что $\mu = 11/3$, $\nu = 5/3$ (в эксперименте выполнялось условие $\rho_{\text{ног}} > \lambda_0$). Несмотря на относительно небольшие значения β_0 , наблюдается хорошее согласие между экспериментом и асимптотической теорией. Что касается $\operatorname{Im} \Gamma_4$, то большой разброс экспериментальных данных не позволяет произвести количественное сравнение, однако имеется неплохое качественное согласие с выводами теории. В частности, предсказываемая смена знака $\operatorname{Im} \Gamma_4$ при определенных разносах точек наблюдения отчетливо проявляется на экспериментальных зависимостях.

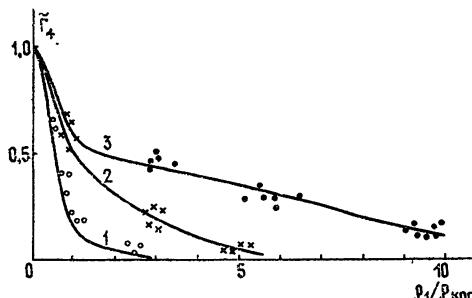


Рис. 5 Сечения $\tilde{\Gamma}_4 = |\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_1/m)| / \Gamma_4(x, 0, 0)$; 1, 2, 3 — теоретические кривые соответственно при $m=1, 4, 12$; светлые кружки, крестики, темные кружки — эксперимент.

В заключение автор выражает благодарность В. И. Татарскому, А. С. Гурвичу, В. Кану за обсуждение результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
3. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 1, 16 (1970).
4. W. P. Brown, J. Opt Soc. Am., 62, № 1, 45 (1972).
5. Б. С. Елепов, Г. А. Михайлов, ЖВМ и МФ, 16, № 5, 1264 (1976).
6. А. С. Гурвич, Б. С. Елепов, В. В. Покасов, К. К. Сабельфельд, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 2, 198 (1979).
7. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
8. И. Г. Якушкин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
9. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, № 8, 481 (1977).
10. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 398 (1978).
11. А. С. Гурвич, В. Кан, Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, изд. Наука, М., 1978.
12. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 2, 192 (1979).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
21 июля 1978 г.

FOUR-POINT FUNCTION OF THE FIELD COHERENCE IN A TURBULENT MEDIUM IN THE REGION OF STRONG FLUCTUATIONS OF THE WAVE INTENSITY

V. U. Zavorotnyi

Asymptotic behaviour of a four-point function of the wave field coherence $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ is considered in a randomly inhomogeneous turbulent medium in the region of strong intensity fluctuations. The value of real and imaginary parts of Γ_4 is investigated as a function of location of observation points and in different relations between the radius of the wave coherence and the inner scale of the medium turbulence. A comparison of the results obtained with the experiment is carried out.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЧЕРЕЗ НЕРОВНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА СРЕД С РАЗЛИЧНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

B. L. Вебер

Описывается приближенная модель переноса изображения через взволнованную поверхность раздела двух сред с различным показателем преломления. На базе теории оптических пространственных фильтров определяются многоточечные статистические характеристики яркостного изображения самосветящегося объекта, наблюдаемого через взволнованную границу раздела. Приводится конкретный расчет функций корреляции и энергетических спектров изображений объектов шумового типа, прямой линии и синусоидальной структуры. Поверхность раздела предполагается случайной однородной с гауссовым распределением уклонов.

Вопросы теории и практики построения систем наблюдения применительно к морским условиям представляют в настоящее время значительный интерес для исследователей. Большое количество работ теоретического и экспериментального плана посвящено исследованию влияния оптических свойств воды на видимость в гидросфере. Подробный обзор основных результатов содержится в [1]. В то же время необходимо отметить, что вопросы переноса изображения через взволнованную поверхность моря до сих пор еще не получили должного освещения в теории и эксперименте. В этом плане можно отметить лишь работу Мулламаа [2], предметом анализа в которой является усредненная по временными или пространственным интервалам яркостная картина, полученная от самосветящегося объекта под водой.

В данной работе на основе приближенной модели определяются многоточечные статистические характеристики изображения самосветящегося объекта, наблюдаемого через границу раздела сред с различным показателем преломления. Приводится ряд конкретных примеров расчета функций корреляции и энергетических спектров для некоторых достаточно «представительных» типов объектов.

1. Рассмотрим следующую схему наблюдения (рис. 1). В плоскости z_1 расположен объект наблюдения — плоская диффузно светящаяся поверхность с произвольным распределением яркости $B_0(\mathbf{r}_0)$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки в плоскости z_1 . Процесс наблюдения сводится к измерению в плоскости z_3 яркости $B_i(\mathbf{r})$ в направлении единичного фиксированного вектора Ω_i , здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки в плоскости z_3 .

Будем полагать, что объект находится в среде с показателем преломления $m > 1$ (вода), а наблюдатель — в среде с показателем преломления 1 (воздух). Неровная (взволнованная) поверхность раздела задана функцией $\zeta(\mathbf{r}_n)$ отклонений ее от плоскости z_2 , где \mathbf{r}_n — радиус-вектор точки в плоскости z_2 . Глубина погружения объекта h , высота

наблюдателя H . Все рассмотрение ведется в рамках геометрооптического приближения в терминах фотометрических величин.

Для простоты анализа будем рассматривать процесс формирования светового поля в пренебрежении возвышенностями взволнованной поверхности, но с учетом вариаций ее уклонов, т. е. зададим поверхность функцией $n = n(r_n)$. Здесь n — единичный вектор нормали к микроплощадке поверхности ζ в точке r_n :

$$n = \frac{-x_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - y_0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + z_0}{\left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}},$$

где x_0, y_0, z_0 — единичные орты соответственно осей x, y, z . Аналогичное рассмотрение встречается в некоторых задачах электродинамики. В этом случае говорят, что поверхность выполняет функции тонкого фазового экрана.

Для того, чтобы связать распределение яркости $B_i(r)$ (для фиксированного направления Ω_i) в плоскости наблюдения с распределением яркости на объекте $B_0(r_0)$, воспользуемся оптическим принципом взаимности. Из точки r плоскости z_3 в направлении вектора Ω_i пошлем пробный узкий пучок света яркостью B_i . После преломления в точке r_n плоскости z_2 пучок будет распространяться вдоль направления вектора Ω_0 и в результате попадает в точку r_0 плоскости z_1 . Учитывая усиление яркости пучка при переходе его через границу сред с различным показателем преломления, получим в итоге

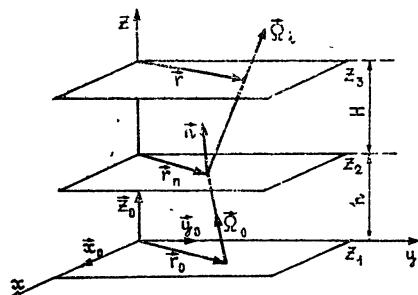


Рис. 1.

где r_0 определяется из соотношения

$$r_0 = r - \frac{H}{(z_0 \Omega_i)} \Omega_i - \frac{h}{(z_0 \Omega_0)} \Omega_0 + (H + h) z_0. \quad (1)$$

Векторы Ω_0, Ω_i, n связаны законом преломления

$$m[\Omega_0 n] = [\Omega_i n], \quad (2)$$

из которого путем несложных преобразований можно определить Ω_0 :

$$\Omega_0 = \frac{1}{m} \{ \Omega_i + n [\sqrt{m^2 - 1 + (n \Omega_i)^2} - (n \Omega_i)] \}. \quad (3)$$

Последующее решение задачи базируется на приближении малости углов наклона взволнованной поверхности, которое записывается в следующем виде:

$$(n z_0) \approx 1. \quad (4)$$

С использованием приближения (4) для $\Omega_i = z_0$ выражение (1) примет вид

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + h \frac{m-1}{m} (\mathbf{z}_0 - \mathbf{n}). \quad (5)$$

Выражение (5) может быть упрощено, если воспользоваться вектором-градиентом неровной поверхности $\mathbf{q} = \nabla_{\perp} \zeta(\mathbf{r}_n)$. Связь между \mathbf{n} и \mathbf{q} выражается следующими простыми соотношениями:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{z}_0 - \mathbf{q}}{\sqrt{1 + |\mathbf{q}|^2}}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{z}_0 - \frac{\mathbf{n}}{(n z_0)} \approx \mathbf{z}_0 - \mathbf{n}.$$

Зависимость значений яркости в плоскости наблюдения $B_i(\mathbf{r})$ от функции распределения яркости объекта $B_0(\mathbf{r}_0)$, выраженная через векторное поле уклонов вззволнованной поверхности, определяется соотношением

$$B_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{m^2} B_0 [\mathbf{r} + a \mathbf{q}(\mathbf{r})]. \quad (6)$$

Здесь $a = h \frac{m-1}{m}$ ^{*}. (Функция $B_i(\mathbf{r})$ суть изображение подводного объекта. При отсутствии волнения $B_i(\mathbf{r}) \equiv B_0(\mathbf{r})$.) Выражение (6) допускает запись в наиболее общем виде, принятом в теории линейных пространственных фильтров:

$$B_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{m^2} \iint_{-\infty}^{\infty} B_0(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0, \quad (7)$$

где

$$g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta[\mathbf{r}_0 - \mathbf{r} - a \mathbf{q}(\mathbf{r})]. \quad (8)$$

Рассмотрим подробнее физический смысл этой формы записи. Линейную неоднородную систему, описываемую функцией рассеяния точки (ФРТ) вида (8), можно трактовать как пространственный фильтр со случаем смещением (ФСС), входным сигналом для которого является функция $B_0(\cdot)$, а выходным — $B_i(\cdot)$, причем действие оператора $g(\cdot)$ на сигнал $B_0(\cdot)$ сводится к процессу случайногом смещения и дробления точек этого сигнала. Можно ввести функцию, эквивалентную частотной передаточной функции для линейных однородных систем, путем фурье-преобразования выражения (8) по переменной \mathbf{r}_0 :

$$G(\mathbf{k}; \mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0. \quad (9)$$

Запишем также обратное преобразование:

$$g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{k}; \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} d\mathbf{k}. \quad (10)$$

* Формула (6) остается справедливой и в том случае, когда вывод проведен с учетом возвышенной неровной поверхности преломления; изменится лишь значение коэффициента a :

$$a = [h + \zeta(\mathbf{r})] \frac{m-1}{m}.$$

Использованное ранее приближение «тонкого фазового экрана» справедливо при выполнении условия $h \gg \zeta_{\max}$.

Из выражения (9) с учетом (8) следует

$$G(\mathbf{k}; \mathbf{r}) = \exp \{-i\mathbf{k}[\mathbf{r} + aq(\mathbf{r})]\}. \quad (11)$$

Введение понятия фильтра со случайным смещением позволяет рассматривать вопросы переноса изображения через взволнованную водную поверхность с общих позиций теории прохождения сигналов через системы со случайными параметрами, которая наиболее полным образом развита в радиофизических и технических приложениях.

2. В данной части работы будут получены выражения для моментов распределения произвольного порядка случайного сигнала на выходе ФСС, а также формулы, определяющие связь многоточечных функций распределения сигнала на выходе ФСС с соответствующими функциями случайного сигнала на входе.

Запишем выражение для смешанного момента распределения произвольного порядка $M_{t, k}$ случайного сигнала $B_i(\mathbf{r})^*$:

$$M_{t, k}(\mathbf{r}; \rho) = \langle \overset{n}{\wedge} B_i^{k_0}(\mathbf{r}) B_i^{k_1}(\mathbf{r} + \rho_1) \dots B_i^{k_n}(\mathbf{r} + \rho_n) \rangle, \quad (12)$$

здесь с помощью значка $\overset{n}{\wedge}$ введено обозначение множества

$$\rho \sim \rho_1; \rho_2; \dots; \rho_n,$$

$\langle \rangle$ — обозначение статистического усреднения. Подставляя (7) в (12), получим выражение

$$M_{t, k}(\mathbf{r}; \rho) = \int_{-\infty}^{s_n} \int_{-\infty}^{s_n} \dots \int_{-\infty}^{s_n} \langle B_0(\mathbf{r}_1) \dots B_0(\mathbf{r}_{s_n}) \rangle \langle g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \dots \\ \dots g(\mathbf{r} + \rho_n; \mathbf{r}_{s_n}) \rangle d\overset{s_n}{\wedge} \mathbf{r}. \quad (13)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\int_{-\infty}^{s_n} \int_{-\infty}^{s_n} \dots \int_{-\infty}^{s_n} \sim d\overset{s_n}{\wedge} \mathbf{r} \sim d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{s_n}, \quad s_n = k_0 + k_1 + \dots + k_n.$$

Рассмотрим в выражении (13) член

$$M_{g, k}(\mathbf{r}; \rho) = \langle g(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \dots g(\mathbf{r} + \rho_n; \mathbf{r}_{s_n}) \rangle.$$

Используя (8), запишем его в виде

$$M_{g, k}(\mathbf{r}; \rho) = \int_{-\infty}^{s_{n+1}} \int_{-\infty}^{s_n} \delta[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} - aq_0] \dots \delta[\mathbf{r}_{s_n} - (\mathbf{r} + \rho_n) - \\ - aq_n] \tilde{w}_{n+1}(\overset{n+1}{\wedge} \mathbf{q}; \rho) d\overset{n+1}{\wedge} \mathbf{q}. \quad (14)$$

* В дальнейшем множитель m^2 везде опускается.

Здесь

$$\begin{aligned} \overset{s_n+1}{\underset{\wedge}{r}} &\sim r; \quad r_1; \quad r_2; \quad \dots; \quad r_{s_n}, \\ q_i = q(r + p_i), \quad i &= 0, 1, \dots, n, \quad p_0 = 0, \\ \overset{n+1}{\underset{\wedge}{dq}} &\sim d q_0 d q_1 \dots d q_n, \end{aligned}$$

$\tilde{w}_{n+1}(\cdot) - (n+1)$ — точечная функция распределения уклонов случайной границы раздела.

Проведем частичное интегрирование в выражении (14), используя фильтрующие свойства δ -функций вида

$$\delta [r_{s_i} - (r + p_i) - a q_i] \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

В результате интегрирования получим

$$\begin{aligned} M_{g, k}(r; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}) &= \frac{1}{a^{2(n+1)}} \tilde{w}_{n+1} \left[\frac{\overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}} - (r + \overset{n}{\underset{\wedge}{p}})}{a}; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}} \right] \prod_{i=1}^{s_0-1} \delta(r_i - r_{s_0}) \times \\ &\times \prod_{i=s_0+1}^{s_1-1} \delta(r_i - r_{s_1}) \dots \prod_{i=s_{n-1}}^{s_n-1} \delta(r_i - r_{s_n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}} - (r + \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}) \sim r_{s_0} - r; \quad r_{s_1} - (r + p_1); \dots; \quad r_{s_n} - (r + p_n).$$

Подставим (15) в выражение (13) и проведем выборочное интегрирование по переменным r_i ($i = 1, 2, \dots, s_n - 1$; $i \neq s_0, s_1, \dots, s_n$). В итоге получим

$$M_{l, k}(r; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}) = \frac{1}{a^{2(n+1)}} \iint_{-\infty}^{\overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}}} M_{0, k}(r_{s_0}; \overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}} - r_{s_0}) \tilde{w}_{n+1} \left[\frac{\overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}} - (r + \overset{n}{\underset{\wedge}{p}})}{a}; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}} \right] \overset{n+1}{\underset{\wedge}{dr}}, \quad (16)$$

где $M_{0, k}(r_{s_0}; \overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}} - r_{s_0}) = \langle B_0^{k_0}(r_{s_0}) B_0^{k_1}(r_{s_1}) \dots B_0^{k_n}(r_{s_n}) \rangle$ имеет смысл смешанного момента распределения случайного сигнала на входе

$\Phi\text{СС}$ и $\overset{n+1}{\underset{\wedge}{dr}} \sim d r_{s_0} d r_{s_1} \dots d r_{s_n}$.

Выражение (16) заменой переменных может быть преобразовано к виду

$$M_{l, k}(r; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}) = \iint_{-\infty}^{\overset{n+1}{\underset{\wedge}{r}}} M_{0, k}[a q_0 + r; a(\overset{n+1}{\underset{\wedge}{q}} - q_0) + \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}] \tilde{w}_{n+1}(\overset{n+1}{\underset{\wedge}{q}}; \overset{n}{\underset{\wedge}{p}}) \overset{n+1}{\underset{\wedge}{dq}}. \quad (17)$$

Как известно [3], задание всех n -точечных моментов распределения случайной величины (или процесса) полностью определяет остальные статистические характеристики этой величины. Определим $n+1$ -точечную характеристическую функцию $\Theta_{i, n+1}(\cdot)$ распределения сигнала на выходе $\Phi\text{СС}$, воспользовавшись известным представлением ее в виде ряда

$$\Theta_{l, n+1}(\hat{v}; \hat{r}; \overset{\wedge}{\rho}) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \hat{v}^k M_{l, k}(\hat{r}; \overset{\wedge}{\rho}). \quad (18)$$

Здесь

$$\hat{v} \sim v_0; v_1; v_2; \dots; v_n,$$

$$\hat{v}^k \sim v_0^{k_0} v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n},$$

$$a_k = \frac{i^{k_0+k_1+\dots+k_n}}{k_0! k_1! \dots k_n!},$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \text{знак многомерной суммы } \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty}.$$

Подставим (17) в (18) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, получим в итоге следующее выражение:

$$\Theta_{l, n+1}(\hat{v}; \hat{r}; \overset{\wedge}{\rho}) = \iint_{-\infty}^{\hat{v}} \Theta_{0, n+1}[\hat{v}; aq_0 + \hat{r}; a(q - q_0) + \overset{\wedge}{\rho}] \tilde{w}_{n+1}(\hat{q}; \overset{\wedge}{\rho}) d\hat{q}, \quad (19)$$

где $\Theta_{0, n+1}(\cdot) - (n+1)$ -точечная характеристическая функция распределения случайного сигнала на входе ФСС.

Применяя преобразование Фурье по переменным \hat{v} к обеим частям выражения (19), приходим к $(n+1)$ -точечной функции распределения случайного сигнала на выходе ФСС:

$$\tilde{w}_{l, n+1}(\hat{x}; \hat{r}; \overset{\wedge}{\rho}) = \iint_{-\infty}^{\hat{v}} \tilde{w}_{0, n+1}[\hat{x}; aq_0 + \hat{r}; a(q - q_0) + \overset{\wedge}{\rho}] \tilde{w}_{n+1}(q; \overset{\wedge}{\rho}) dq. \quad (20)$$

Здесь $\tilde{w}_{0, n+1}(\cdot) - (n+1)$ -точечная функция распределения случайного сигнала на входе ФСС.

Выражения (17), (19), (20), связывающие статистические характеристики сигнала на выходе ФСС с соответствующими характеристиками на входе, могут быть записаны в обобщенном виде:

$$L_l(\hat{r}; \overset{\wedge}{\rho}) = \iint_{-\infty}^{\hat{v}} L_0[aq_0 + \hat{r}; a(q - q_0) + \overset{\wedge}{\rho}] \tilde{w}_{n+1}(q; \overset{\wedge}{\rho}) dq, \quad (21)$$

где роль $L(\cdot)$ могут играть функции $M_k(\cdot)$, $\Theta_{n+1}(\cdot)$ или $w_{n+1}(\cdot)$. Если сигнал $B_0(\hat{r}_0)$ на входе ФСС носит случайный однородный характер, то выражение (21) преобразуется к виду

$$L_l(\overset{\wedge}{\rho}) = \iint_{-\infty}^{\hat{v}} L_0[a(q - q_0) + \overset{\wedge}{\rho}] \tilde{w}_{n+1}(q; \overset{\wedge}{\rho}) dq, \quad (22)$$

допускающему «частотную» форму записи

$$L_l(\overset{\wedge}{\rho}) = \frac{1}{(2\pi a)^{2n}} \iint_{-\infty}^{\hat{v}} \Phi_0\left(-\frac{\hat{k}}{a}\right) \tilde{\Theta}_{n+1}\left(-\sum_1^n \hat{k}_i; \hat{k}; \overset{\wedge}{\rho}\right) \exp\left(i \frac{\hat{k} \overset{\wedge}{\rho}}{a}\right) d\hat{k}, \quad (23)$$

где

$$\hat{\mathbf{k}} \hat{\rho} \sim \sum_{i=1}^n (\hat{\mathbf{k}}_i; \hat{\rho}_i),$$

$$\Phi_0(\hat{\mathbf{k}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_0(\hat{\rho}) \exp(-i \hat{\mathbf{k}} \hat{\rho}) d\hat{\rho},$$

$$\tilde{\Theta}_{n+1}(\hat{\mathbf{k}}; \hat{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_{n+1}(\hat{\mathbf{q}}; \hat{\rho}) \exp(-i \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}.$$

Как следствие, из формул (21) и (22) могут быть получены выражения для среднего значения и корреляционной функции распределения яркости изображения B_i подводного объекта B_0 при наблюдении его через случайную взволнованную поверхность.

Так, для детерминированного объекта

а) среднее значение яркости изображения —

$$M_{i,1}(\mathbf{r}) = \langle B_i \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\mathbf{k}) \tilde{\Theta}_1(a\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (24)$$

где $F_0(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\mathbf{r}_0) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$. Этот результат был впервые получен в работе [2], причем функция $\tilde{\Theta}_1(a\mathbf{k})$ определялась как ЧКХ взволнованной поверхности моря;

б) корреляционная функция яркости изображения —

$$M_{i,2}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\mathbf{k}_1) F_0(\mathbf{k}_2) \tilde{\Theta}_2(a\mathbf{k}_1; a\mathbf{k}_2; \rho) \times \\ \times \exp[i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \quad (25)$$

Для случайного однородного объекта

а) среднее значение яркости изображения —

$$M_{i,1} = M_{0,1}.$$

Вообще необходимо отметить, что все одноточечные статистические характеристики случайного однородного объекта и его изображения совпадают в силу «фазового» характера искажений;

б) корреляционная функция яркости изображения —

$$M_{i,2}(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\mathbf{k}) \tilde{\Theta}_2(-a\mathbf{k}; a\mathbf{k}; \rho) e^{-t\mathbf{k}\rho} d\mathbf{k}, \quad (26)$$

где $\Phi_0(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{0,2}(\rho) e^{-i\mathbf{k}\rho} d\rho$ есть энергетический спектр распределения яркости на объекте.

3. Нашей следующей задачей является определение конкретного вида функций $\tilde{w}_2(q_1; q_2; \rho)$ и $\tilde{\Theta}_2(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_2; \rho)$ применительно к условиям

морской поверхности. Известно [4], что морское волнение можно описывать стационарным гауссовым процессом. Исходя из этого, запишем двухточечную функцию распределения уклонов взволнованной поверхности моря следующим образом:

$$\tilde{w}_2(q_1; q_2; \rho) \sim \tilde{w}(\xi_1; \xi_2; \eta_1; \eta_2; \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|M|}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} V M^{-1} V^t \right),$$

где

$$\xi_1 = q_{1x}, \quad \xi_2 = q_{2x}, \quad \eta_1 = q_{1y}, \quad \eta_2 = q_{2y},$$

$V = (\xi_1 \ \xi_2 \ \eta_1 \ \eta_2)$ — матрица-строка, V^t — транспонированная матрица V , $|M|$ — детерминант матрицы M , M^{-1} — матрица, обратная M ,

$$M = \begin{pmatrix} M_\xi(0) & M_\xi(\rho) & M_{\xi\eta}(0) & M_{\xi\eta}(\rho) \\ M_\xi(-\rho) & M_\xi(0) & M_{\xi\eta}(-\rho) & M_{\xi\eta}(0) \\ M_{\eta\xi}(0) & M_{\eta\xi}(\rho) & M_\eta(0) & M_\eta(\rho) \\ M_{\eta\xi}(-\rho) & M_{\eta\xi}(0) & M_\eta(-\rho) & M_\eta(0) \end{pmatrix},$$

$M(\rho)$ — авто- и взаимно-корреляционные функции уклонов морской поверхности.

Из самых общих положений о свойствах корреляционных функций следует, что

$$M_\xi(\rho) = M_\xi(-\rho), \quad M_\eta(\rho) = M_\eta(-\rho), \quad M_{\xi\eta}(\rho) = M_{\eta\xi}(-\rho),$$

$$M_\xi(0) = \sigma_\xi^2, \quad M_\eta(0) = \sigma_\eta^2.$$

Для однородного морского волнения нетрудно показать, что

$$M_{\xi\eta}(\rho) = M_{\eta\xi}(\rho) \quad \text{или} \quad M_{\xi\eta}(\rho) = M_{\xi\eta}(-\rho).$$

Как показано в [4], при соответствующем выборе осей x, y (ось x направлена вдоль генерального направления распространения волн)

$$M_{\xi\eta}(0) = 0.$$

В итоге матрица M может быть записана в виде

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & M_\xi(\rho) & 0 & M_{\xi\eta}(\rho) \\ M_\xi(\rho) & \sigma_\xi^2 & M_{\xi\eta}(\rho) & 0 \\ 0 & M_{\xi\eta}(\rho) & \sigma_\eta^2 & M_\eta(\rho) \\ M_{\xi\eta}(\rho) & 0 & M_\eta(\rho) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция нормального распределения, как известно, определяется через элементы матрицы M и для случая морской поверхности имеет вид

$$\tilde{\Theta}_2(k_1; k_2; \rho) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\sigma_\xi^2(k_{1x}^2 + k_{2x}^2) + \sigma_\eta^2(k_{1y}^2 + k_{2y}^2) + \right. \\ \left. + 2M_\xi(\rho)k_{1x}k_{2x} + 2M_\eta(\rho)k_{1y}k_{2y} + 2M_{\xi\eta}(\rho)(k_{1x}k_{2y} + k_{2x}k_{1y})] \right\}. \quad (27)$$

4. Как известно, использование аппарата корреляционного анализа при исследовании стохастических процессов и сигналов может быть полезно с точки зрения получения информации как о поведении самих сигналов, так и о свойствах систем, через которые эти сигналы проходят. Полученные выше выражения позволяют, в принципе, решить задачу определения функции корреляции или энергетического спектра изображения для объекта с любым произвольно заданным распределением яркости. В данном разделе будет рассмотрено несколько примеров расчета этих статистических характеристик для объектов типа «шум», «линия» и «синусоида». Все расчеты будут проводиться без учета конкретного вида функций M_ξ , M_η , $M_{\xi\eta}$ — по возможности в общем виде.

Объект шумового типа. Энергетический спектр объекта зададим в виде

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = N_0 e^{-\alpha k^2}, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (28)$$

Корреляционная функция объекта

$$M_{0,2}(\rho) = \frac{N_0}{4\pi\alpha} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\alpha}\right), \quad \rho = |\mathbf{r}|.$$

Корреляционную функцию изображения найдем в предположении изотропности волнения, т. е. положим $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma_q^2$,

$$M_\zeta(\rho) = M_\zeta(r)$$

— функция корреляции возвышений случайной границы раздела.

Подставляя (28) в (26) и используя (27), получим

$$M_{i,2}(\rho) = \frac{N_0/4\pi}{\{[a^2(\sigma_q^2 + M_1) + \alpha] [a^2(\sigma_q^2 + M_2) + \alpha]\}^{1/2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{4} \frac{\rho^2}{a^2(\sigma_q^2 + M_2) + \alpha}\right\}, \quad (29)$$

где

$$M_1 = M_1(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{dM_\zeta}{d\rho}, \quad M_2 = M_2(\rho) = \frac{d^2M_\zeta}{d\rho^2}.$$

Исследование поведения функции $M_{i,2}$ целесообразно провести раздельно для двух областей изменения аргумента ρ , а именно: а) для области $\rho \ll \rho_q$ (ρ_q — некоторый характерный масштаб корреляции уклонов поверхности) и б) для области $\rho \gg \rho_q$.

а) Представляя функцию корреляции возвышений взволнованной поверхности в виде полинома четвертой степени (что соответствует параболической аппроксимации корреляционных функций уклонов)

$$M_\zeta(\rho) = \sigma_z^2 - \frac{1}{2} \sigma_q^2 \rho^2 + \frac{1}{4!} \sigma_p^2 \rho^4,$$

где σ_z^2 — дисперсия возвышений, σ_q^2 — дисперсия уклонов, σ_p^2 — дисперсия кривизны поверхности, и определяя соответственно этому величину ρ_q , запишем выражение для $M_{i,2}$:

$$M_{i,2}(\rho) = \frac{N_0 \sqrt{3}}{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\epsilon \rho^2 + \rho_0^2}\right)}{\{[\epsilon \rho^2 + 3\rho_0^2] (\epsilon \rho^2 + \rho_0^2)\}^{1/2}} \text{ при } \rho \leq \rho_q = \sqrt{\frac{2\sigma_q^2}{\sigma_p^2}}. \quad (30)$$

Здесь $\rho_0 = \sqrt{2\alpha}$ — радиус корреляции распределения яркости на объекте, $\epsilon = a^2 \sigma_p^2$ — безразмерный параметр. Легко видеть, что для значений ρ , удовлетворяющих условию $\epsilon \rho^2 \ll \rho_0^2$, корреляционные функции объекта и изображения тождественно совпадают.

Рассмотрим более подробно случай $\rho_0 \ll \rho_q$ (случай «квазибелого» шума). Для значений ρ , удовлетворяющих условию $\sqrt{\frac{3}{\epsilon}} \rho_0 \ll \rho \leq \rho_q$, корреляционная функция изображения будет иметь следующий вид:

$$M_{l,2}(\rho) = \frac{N_0 \sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{\epsilon \rho^3} e^{-1/2\epsilon}. \quad (31)$$

Выражение (31) в функции от параметра ϵ принимает максимальное значение при $\epsilon = \epsilon_\Phi = 1/2$. Соответственно можно утверждать, что при $\epsilon = \epsilon_\Phi$ ширина функции корреляции изображения максимальна. Существование максимума у функции $M_{l,2}$ объясняется линзовым эффектом взволнованной поверхности, который наиболее ярко проявляется при глубине погружения объекта $h = h_\Phi$, приблизительно равной фокусному расстоянию эквивалентной «водянной линзы» радиуса $R = 1/\sigma_p$,

$$h_\Phi = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m}{m-1}.$$

б) Для области $\rho \gg \rho_q$ в выражении (29) можно положить $M_1 = M_2 = 0$, после чего функция корреляции изображения будет иметь следующий вид:

$$M_{l,2}(\rho) = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1}{\alpha + a^2 \sigma_q^2} \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\alpha + a^2 \sigma_q^2} \right). \quad (32)$$

Можно отметить, что выражение (32) описывает функцию корреляции сигнала на выходе фильтра с передаточной функцией $\tilde{\Theta}_1(ak)$ при действии на его входе случайного сигнала вида (28).

Объект в виде прямой линии. Зададим распределение яркости на объекте следующим образом:

$$B_0(r) = B_0 \exp \left(-\frac{x^2}{x_0^2} \right). \quad (33)$$

Его фурье-образ

$$F_0(k) = 2\pi \sqrt{\pi} B_0 x_0 \exp \left(-\frac{x_0^2}{4} k_x^2 \right) \delta(k_y). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (25) и используя (27), получим выражение для второго смешанного момента распределения яркости изображения

$$M_{l,2}(r_1; r_2) = \frac{B_0^2 x_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha(x_1^2 + x_2^2) - 2\beta x_1 x_2}{\alpha^2 - \beta^2} \right), \quad (35)$$

где

$$\alpha = a^2 \sigma_\xi^2 + \frac{x_0^2}{2}, \quad \beta = a^2 \sigma_\xi^2 R_\xi, \quad R_\xi = R_\xi(\rho) = \frac{M_\xi(\rho)}{\sigma_\xi^2}, \quad \rho = r_2 - r_1.$$

Из выражения (24) с учетом (27) получим выражение для средней составляющей изображения:

$$M_{l,1}(r) = \frac{B_0 x_0}{V^\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right). \quad (36)$$

Рассмотрим случай, когда угловой размер объекта при наблюдении его с поверхности воды не зависит от глубины погружения, т. е. положим $x_0 = \sigma_0 h$. При этом выражения (35) и (36) принимают следующий вид:

$$M_{l,2}(r_1; r_2) = 2B_0^2 \frac{\alpha_0 - 1}{V \alpha_0^2 - R_\xi^2} \exp\left(-\frac{\alpha_0(x_1^2 + x_2^2) - 2R_\xi x_1 x_2}{2a^2 \sigma_\xi^2 (\alpha_0^2 - R_\xi^2)}\right),$$

$$M_{l,1}(r) = B_0 \sqrt{2 \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_\xi^2 \alpha_0}\right),$$

где $\alpha_0 = 1 + \frac{\sigma_0^2}{2s^2 \sigma_\xi^2}$, $s = \frac{m-1}{m}$. В случае выполнения неравенства $x_1^2 + x_2^2 \ll h^2 (2s^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_0^2)$

(что можно интерпретировать как случай весьма удаленного источника), корреляционная функция изображения зависит лишь от аргумента $\rho = r_2 - r_1$:

$$\tilde{M}_{l,2}(\rho) = 2B_0^2(\alpha_0 - 1) \left(\frac{1}{V \alpha_0^2 - R_\xi^2(\rho)} - \frac{1}{\alpha_0} \right). \quad (37)$$

В приближении $\sigma_\xi^2 \ll \sigma_0^2/s^2$ или $\alpha_0 \gg 1$ (случай слабых искажений изображения подводного объекта) выражение (37) может быть разложено в ряд по R_ξ и представлено в виде

$$\tilde{M}_{l,2}(\rho) \approx \frac{B_0^2}{\alpha_0^2} R_\xi^2(\rho). \quad (38)$$

Как видно из выражений (37) и (38), тест-объект вида (33) может быть полезен при исследовании статистических свойств взволнованной поверхности раздела двух сред с различным показателем преломления.

*Синусоидальная структура**. В качестве очередного примера рассмотрим случай объекта с распределением яркости вида

$$B_0(r) = B_0 [1 + \lambda \sin(k_{0x} x + k_{0y} y + \psi)], \quad (39)$$

где $\lambda \leq 1$, ψ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0 - 2\pi]$. При расчетах можно не принимать во внимание постоянную составляющую яркости объекта, так как она «проходит» через ФСС без искажений и не является информативной составляющей.

Энергетический спектр переменной составляющей яркости объекта имеет следующий вид:

$$\Phi_0(k) = \pi^2 B_0^2 \lambda^2 [\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)].$$

Подставляя это выражение в формулу (26) и преобразуя последнюю

* Результаты, аналогичные полученным в данном разделе, можно найти в работах по дифракции плоской волны на нерегулярном фазовом экране [5] и по прохождению электрического сигнала синусоидальной формы через радиотехническое звено со случайной задержкой [3].

по Фурье, найдем выражение для энергетического спектра яркости изображения:

$$\Phi_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} B_0^2 \lambda^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Theta}_2(-a\mathbf{k}_0; a\mathbf{k}; \rho) \cos k_0 \rho e^{ik\rho} d\rho. \quad (40)$$

Допустим, что объект расположен по отношению к главной системе координат волнения таким образом, что $k_{0y} = 0$. В этом случае

$$\tilde{\Theta}_2(-a\mathbf{k}_0; a\mathbf{k}_0; \rho) = \exp \{-a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2 [1 - R_\xi(\rho)]\}. \quad (41)$$

Здесь $k_0 = k_{0x}$.

Остановимся на способах вычисления функции (40) в некоторых предельных случаях.

а) Случай слабых искажений: $a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2 \ll 1$. Представляя экспоненту в (41) в виде ряда

$$\tilde{\Theta}_2(\cdot) \approx 1 - a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2 [1 - R_\xi(\rho)],$$

получим после простых вычислений выражение для энергетического спектра яркости изображения

$$\begin{aligned} \Phi_i(\mathbf{k}) = & \pi^2 B_0^2 \lambda^2 (1 - a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2) [\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)] + \\ & + \frac{1}{4} a^2 k_0^2 B_0^2 \lambda^2 [\Phi_\xi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \Phi_\xi(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)], \end{aligned}$$

где

$$\Phi_\xi(\mathbf{k}) = \iint_{-\infty}^{\infty} M_\xi(\rho) e^{-ik\rho} d\rho.$$

Таким образом, в случае слабых искажений изображения подводного объекта энергетический спектр яркости изображения представляет собой сумму дискретных линий на частоте, соответствующей $\pm \mathbf{k}_0$, и энергетического спектра уклонов взволнованной поверхности в направлении оси x , сдвинутого на величину $\pm \mathbf{k}_0$. Полученный результат, по-видимому, может быть использован в практических целях для определения вида энергетического спектра поверхности моря.

б) Случай сильных искажений: $a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2 \gg 1$. В этом случае значение интеграла (40) определяется окрестностью стационарной точки функции $R_\xi(\rho)$ и, следовательно, формула (41) может быть представлена в виде

$$\tilde{\Theta}_2(\cdot) \approx \exp \left\{ \frac{1}{2} a^2 \sigma_\xi^2 k_0^2 [R''_{xx} \rho_x^2 + R''_{yy} \rho_y^2 + 2R''_{xy} \rho_x \rho_y] \right\}, \quad (42)$$

где

$$R''_{ij} = \left. \frac{\partial^2 R_\xi(\rho)}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \right|_{\rho=0} \quad (i, j \sim x, y).$$

Не ограничивая общности рассуждений, допустим, что волнение изотропно. В этом случае нетрудно показать, что

$$R''_{xx} = -\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2}, \quad R''_{yy} = -\frac{1}{3} \frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2}, \quad R''_{xy} = 0. \quad (43)$$

Интегрируя (40) с учетом (42) и (43), получим в итоге

$$\Phi_1(\mathbf{k}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2\alpha} B_0^2 \lambda^2 \left\{ \exp \left[-\frac{(k_x + k_0)^2}{2\alpha} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[-\frac{(k_x - k_0)^2}{2\alpha} \right] \right\} \exp \left(-\frac{3k_y^2}{2\alpha} \right),$$

где $\alpha = a^2 \sigma_p^2 k_0^2$.

Таким образом, в случае сильных искажений энергетический спектр яркости изображения описывается двумерной гауссовой функцией в окрестности $k_x = \pm k_0$. Характерная ширина спектра целиком определяется параметром $\alpha = \epsilon k_0^2$, где $\epsilon = a^2 \sigma_p^2$ — уже встречавшийся (в задаче об объекте шумового типа) параметр, который в данном примере может служить характеристикой относительной ширины спектра изображения синусоидальной структуры.

В заключение автор выражает глубокую признательность Л. С. Долину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Иванов, Физические основы гидрооптики, изд. Наука и техника, Минск, 1975.
2. Ю.-А. Р. Мулламаа, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 11, № 2, 199 (1975).
3. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1969.
4. М. С. Лонге-Хиггинс, в сб. Ветровые волны, ИЛ, М., 1962
5. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. вузов — Радиофизика, 2, № 4, 521 (1959).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
12 июня 1978 г

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF IMAGES OBTAINED WHEN OBSERVING THROUGH THE ROUGH SEPARATION SURFACE OF THE MEDIUM WITH DIFFERENT REFRACTION INDEXES

V. L. Weber

An approximate model of the image transfer through the disturbed separation surface of two media with different refraction indexes is described. Multipoint statistical characteristics of the brightness image of a self-luminous object observed through the disturbed boundary of separation are defined on the basis of the theory of optical space filters. A concrete calculation of correlation functions and energetic spectra of images of noise type objects, a straight line and a sinusoidal structure is given. The separation surface is assumed to be randomly homogeneous with Gaussian distribution of slopes.

УДК 621.396.67; 621.372.8.092.22

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ АНИЗОТРОПНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

А. Ю. Борисов, Г. Г. Бубнов, Р. В. Шапиро

Исследуются дисперсионные свойства анизотропных искусственных диэлектриков, образованных произвольными периодическими решетками рассеивающих элементов. Показано, что в длинноволновом приближении задача сводится к определению среднего внутреннего поля в анизотропном искусственном диэлектрике и функции плотности распределения излучателей вторичных волн по объему элементарной ячейки пространственной решетки с учетом дисперсионных поправок. Получены дисперсионные выражения для компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей анизотропной решетчатой среды с точностью до членов произвольного порядка малости по параметрам разложения. Рассматривается влияние потерь, обусловленных конечной проводимостью материала рассеивателей, на величину электродинамических характеристик. Отмечается наличие резонансов действительных и мнимых составляющих компонент тензоров, а также анизотропии дисперсионных свойств и потерь мощности в анизотропных решетчатых структурах. Приводятся результаты численных расчетов дисперсии компонент тензоров и экспериментальные данные для конкретных типов искусственных диэлектриков.

Анизотропные искусственные среды, выполненные на основе двумерно- и трехмерно-периодических решеток, рассеивающих элементов (эллипсоиды, сферы, диски, короткие и длинные цилиндры, полосы), применяются для линзовых антенн, фазовых корректоров, антенных обтекателей и укрытий.

Электродинамический расчет искусственных структур, как известно [1-8], сводится к расчету эквивалентного коэффициента преломления, а в более общем случае [5, 6] — к определению эквивалентных значений компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. В работах [1-5] электродинамические свойства искусственных диэлектриков исследуются в квазистатическом приближении. Использование искусственных сред в более коротковолновой области диапазона длин волн приводит к расхождению между экспериментальными и теоретическими данными.

Необходимость исследования электродинамических свойств решетчатых структур при условии, когда характерные размеры параметров решеток и рассеивателей становятся соизмеримыми с длиной волны, привела к разработке новых методов [7-9], существенным недостатком которых является значительный объем необходимых вычислений.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие предложенного Хижняком электродинамического метода [5] для изучения дисперсионных эффектов в анизотропных решетчатых структурах.

Сущность развития метода заключается в представлении внутреннего поля в искусственном диэлектрике через среднее по объему элементарной ячейки электромагнитное поле с учетом дисперсионных поправок, обусловленных как дисперсионными свойствами коэффициентов рассеяния поля на рассеивающих элементах, так и дисперсионными

свойствами функции распределения плотности источников вторичных волн в пространственной решетке диэлектрика. Связь между электрическими и магнитными составляющими среднего внутреннего поля в искусственном диэлектрике выражается через эквивалентные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей с учетом дисперсионных поправок. В квазистатическом приближении, используемом в работе [5] и в работе [6], влиянием дисперсионных эффектов на вид и величину соотношений для компонент тензоров ϵ и μ пренебрегают.

Рассмотрим искусственный диэлектрик, образованный произвольной регулярной решеткой рассеивающих элементов. Пусть на него падает плоская волна. Полное истинное поле в решетчатой среде будет состоять из падающего поля и поля, рассеянного элементами. В соответствии с работой [5] среднее рассеянное поле в среде, при условии, что истинное рассеянное поле является четной функцией параметров решетки и вне рассеивающих элементов удовлетворяет однородному волновому уравнению, может быть представлено в виде разложения в ряд по параметру $ks_i \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$:

$$\begin{aligned} E_{\text{ср.р.}}(\mathbf{r}_n, \xi_n) &= E_p(\mathbf{r}_n, \xi_n) \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\eta) d\eta - k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{E_p}{2\Omega} \times \\ &\quad \times \int_{\Omega} \eta_i^2 f(\eta) d\eta + (k^2 \epsilon_0 \mu_0)^2 \frac{E_p}{24\Omega} \int_{\Omega} \eta_i^2 \eta_k^2 f(\eta) d\eta + \dots, \\ H_{\text{ср.р.}}(\mathbf{r}_n, \xi_n) &= H_p(\mathbf{r}_n, \xi_n) \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\eta) d\eta - k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{H_p}{2\Omega} \times \\ &\quad \times \int_{\Omega} \eta_i^2 f(\eta) d\eta + (k^2 \epsilon_0 \mu_0) \frac{H_p}{24\Omega} \int_{\Omega} \eta_i^2 \eta_k^2 f(\eta) d\eta + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi_n = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$, \mathbf{r}_n — радиусы-векторы n -го рассеивающего элемента и точки наблюдения, η — радиус-вектор точек внутри элементарной ячейки пространственной решетки объемом Ω , μ_0 , ϵ_0 — магнитная и диэлектрическая проницаемости межрешеточного пространства, $f(\eta)$ — функция распределения плотности излучателей вторичных волн по объему Ω , E_p , H_p — истинное рассеянное поле, s_i — параметр пространственной решетки, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, i — индекс, принимающий значения x , y , z . В (1) функция $f(\eta)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\Omega} \eta_x^2 f(\eta) d\eta = \int_{\Omega} \eta_y^2 f(\eta) d\eta = \int_{\Omega} \eta_z^2 f(\eta) d\eta. \quad (2)$$

Потребуем, чтобы среднее рассеянное поле отличалось от истинного на величину четвертого порядка малости по параметру разложения, получим

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\eta) d\eta - \frac{1}{2\Omega} k^2 \epsilon_0 \mu_0 \int_{\Omega} \eta_i^2 f(\eta) d\eta = 1. \quad (3)$$

Обычно функция $f(\eta)$ представляется отрезком ряда по степеням параметров решетки η_i [5, 6], коэффициенты которого в квазистатическом приближении определяются из системы уравнений (2), (3) без дисперсионной составляющей.

Соотношение (3) показывает, что $f(\eta)$ существенным образом за-

висит от частоты поля. Ограничивааясь в разложении $f(\eta)$ двумя первыми членами, решая систему (2), (3), для ортогональной пространственной решетки искусственного диэлектрика получим

$$\begin{aligned} f(\eta) &= a_1 + b_1 \eta_y^2 + c_1 \eta_z^2, \\ a_1 &= \left[\frac{7}{2} - \frac{5}{4} \left(\frac{s_1^2}{s_2^2} + \frac{s_1^2}{s_3^2} \right) \right] \sigma_1(x), \\ b_1 &= 15 \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_2^4} \sigma_1(x), \quad c_1 = 15 \frac{s_1^2 - s_3^2}{s_3^4} \sigma_1(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= s_2^2 s_3^2 \left[s_2^2 s_3^2 - \frac{\pi}{18} \epsilon_0 \mu_0 (s_2^2 s_3^2 x_1^2 + s_1^2 s_3^2 x_2^2 + s_1^2 s_2^2 x_3^2) \right]^{-1}, \\ x_1 &= \frac{s_1}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{s_2}{\lambda}, \quad x_3 = \frac{s_3}{\lambda}, \end{aligned}$$

s_1, s_2, s_3 — параметры пространственной решетки. Чем выше частота рассеиваемого поля, тем больше вклад дисперсионных составляющих в величину коэффициентов разложения. В квазистатическом приближении, когда $x_i = 0$, коэффициенты a_1, b_1 и c_1 полностью совпадают с выражениями, полученными ранее в [5].

В искусственных диэлектриках с кубической пространственной решеткой анизотропия решетки и дисперсионных поправок отсутствует, а функция $f(\eta)$ отличается от единицы на величину дисперсионной поправки $f(\eta) = \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \epsilon_0 \mu_0 x^2 \right)^{-1}$. Соотношения для средних рассеянных полей (1), принимая во внимание (3), можно переписать в виде

$$E_{\text{ср.} p}(r_n, \xi_n) = E_p(r_n, \xi_n) + (k^2 \epsilon_0 \mu_0)^2 \frac{E_p}{24 \Omega} \int \eta_i^2 \eta_k^2 f(\eta) d\eta + \dots, \quad (5)$$

$$H_{\text{ср.} p}(r_n, \xi_n) = H_p(r_n, \xi_n) + (k^2 \epsilon_0 \mu_0)^2 \frac{H_p}{24 \Omega} \int \eta_i^2 \eta_k^2 f(\eta) d\eta + \dots$$

Среднее рассеянное поле (5) отличается теперь от истинного рассеянного поля E_p, H_p малой добавкой, пропорциональной $(ks, \sqrt{\epsilon_0 \mu_0})^4$. Среднее внутреннее поле в искусственном диэлектрике $E_{\text{ср.} \text{вн}}, H_{\text{ср.} \text{вн}}$ является суперпозицией падающего поля и суммы средних полей, рассеянных всеми центрами среды. Вычисляя операцию rot от среднего внутреннего поля, находим уравнения, учитывающие изменения среднего поля в искусственном диэлектрике:

$$\text{rot } E_{\text{ср.} \text{вн}} = -ik \mu_0 H_{\text{ср.} \text{вн}} - ik \mu_0 \frac{4\pi}{\Omega} \hat{p} H_{\text{возб}}(r) \int_V x(\tau) \delta(|r - \tau|) d\tau, \quad (6)$$

$$\text{rot } H_{\text{ср.} \text{вн}} = ik \epsilon_0 E_{\text{ср.} \text{вн}} + ik \epsilon_0 \frac{4\pi}{\Omega} \hat{g} E_{\text{возб}}(r) \int_V x(r) \delta(|r - \tau|) d\tau,$$

где $E_{\text{возб}}, H_{\text{возб}}$ — поля, возбуждающие рассеиватели, \hat{g}, \hat{p} — матрицы рассеяния поля на рассеивателях, $x(\tau)$ — периодическая функция, которая в пределах Ω равна $f(\eta)$, V — объем искусственного диэлектрика, δ — дельта-функция.

Интегралы справа в (6) вычисляются так же, как и в [5], однако среднее значение функции $\chi(\tau)$ отлично от единицы и определяется дисперсионным соотношением

$$\chi_{\text{ср. вн}}(\tau) = 1 + \frac{1}{2\Omega} k^2 \epsilon_0 \mu_0 \int_{\Omega} \eta_i^2 f(\eta) d\eta.$$

Поэтому вместо (6) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{ср. вн}} = -i k \mu_0 \left\{ \mathbf{H}_{\text{ср. вн}} + \frac{4\pi}{\Omega} \left[1 + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \hat{\eta}_0 f(\eta) d\eta \right] \hat{p} \mathbf{H}_{\text{возд}} \right\}, \quad (7)$$

где $\hat{\eta}_0$ — диагональная матрица с компонентами $\eta_x^2, \eta_y^2, \eta_z^2$. Уравнение для магнитного поля $\mathbf{H}_{\text{ср. вн}}$ получается из (7) заменой электрических величин на магнитные и наоборот. Возбуждающее рассеивающий элемент поле $\mathbf{H}_{\text{возд}}$ представляет сумму падающего и вторичного поля, индуцированного всеми рассеивающими элементами среды за исключением рассматриваемого:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{возд}}(\mathbf{r}_n) &= \mathbf{H}_{\text{ср. вн}} - (k^2 \epsilon_0 \mu_0)^2 \frac{1}{24 \Omega} \int_{\Omega} \eta_i^2 \eta_k^2 f(\eta) d\eta \times \\ &\times \Sigma' \mathbf{H}_p(\mathbf{r}_{mn}) + \dots - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\eta) \mathbf{H}_p d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

Штрих у суммы означает, что суммирование происходит по всем центрам среды за исключением рассматриваемого. Последний интеграл в (8) при помощи [5, 6] и соотношений (2), (3) вычисляется с учетом дисперсионных поправок:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f(\eta) \mathbf{H}_p(\mathbf{r}_n, \eta) d\eta = \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p} \mathbf{H}_{\text{возд}}, \quad (9)$$

причем компоненты матрицы рассеяния поля на элементарной ячейке пространственной решетки с учетом дисперсионных поправок имеют вид

$$\hat{\delta}_H = \int_{\Omega} f(\eta) \left(\frac{3\eta_i^2 - \eta^2}{\eta^5} + \frac{1}{2} k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\eta_i^2 + \eta^2}{\eta^3} \right) d\eta. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (8), при помощи (7) приходим к уравнениям Максвелла для среднего поля в искусственном анизотропном диэлектрике. Сравнивая полученные уравнения с уравнениями Максвелла для однородной анизотропной сплошной среды, находим тензор диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \left[1 + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \hat{\eta}_0 f(\eta) d\eta \right] \hat{g} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g} \right)^{-1} \right\} \quad (11)$$

и тензор магнитной проницаемости

$$\hat{\mu} = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \left[1 + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \hat{\eta}_0 f(\eta) d\eta \right] \hat{p} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p} \right)^{-1} \right\}. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) получены с учетом дисперсионных составляющих, пропорциональных членам разложения второго порядка малости, и позволяют осуществить переход от дискретной решетчатой анизот-

тропной среды к эквивалентной ей в электродинамическом отношении сплошной однородной анизотропной среде и в то же время учесть определенные дисперсионные свойства, присущие дискретным решетчатым структурам. Аналогичным образом могут быть получены выражения для тензоров $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ с точностью до дисперсионных слагаемых произвольного порядка малости:

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} &= \epsilon_0 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \sigma_2(x) \hat{g} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{g} \right)^{-1} \right\}, \\ \hat{\mu} &= \mu_0 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\Omega} \sigma_2(x) \hat{p} \left(1 + \frac{1}{\Omega} \hat{\delta} \hat{p} \right)^{-1} \right\},\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\sigma_2(x) = 1 + \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(k \sqrt{\epsilon_0 \mu_0})^{2n}}{(2n)!} \int_{\Omega} \hat{\eta}_n f(\eta) d\eta,$$

$$f(\eta) = a_1 + d_1 \eta_x^2 + b_1 \eta_y^2 + c_1 \eta_z^2 + \dots,$$

$\hat{\eta}_n$ — диагональная матрица с компонентами η_x^{2n} , η_y^{2n} , η_z^{2n} . Электродинамические свойства искусственных диэлектриков определяются не только взаимным расположением рассеивателей в пространственной решетке, но и электромагнитными и геометрическими свойствами рассеивающих центров и вещества, заполняющего межрешеточное пространство. В качестве последнего в конструировании линзовых антенн обычно применяется пенопласт с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 \approx 1,1$, практически не зависящей от частоты поля, и тангенсом угла диэлектрических потерь не более 0,001. Поэтому дисперсионные свойства и величина потерь таких искусственных диэлектриков в основном определяются параметрами решетки (матрица $\hat{\delta}$) и свойствами рассеивающих элементов (матрицы \hat{g} и \hat{p}). Дисперсия и потери, обусловленные рассеянием поля на элементах, приводят к дисперсии и комплексности компонент матриц \hat{g} и \hat{p} , причем эти свойства определяются свойствами материала, из которого изготовлены рассеивающие элементы. В некоторых случаях дисперсионная поправка может оказаться весьма существенной [3], так как в определенном диапазоне частот эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости рассеивателей могут значительно отличаться от истинных. Учет дисперсионных поправок компонент матриц \hat{g} и \hat{p} в этих случаях является необходимым.

В общем случае задача определения компонент рассеянного поля рассеивателей различной формы представляет известные трудности. Однако в длинноволновом приближении компоненты матриц рассеяния могут быть найдены путем решения цепочки электростатических задач [10]. В дипольном приближении задача упрощается. Используя результаты работы [10], нетрудно показать, что компоненты матрицы дипольного рассеяния поля \hat{g} на металлических эллипсоидальных элементах в длинноволновом приближении имеют вид

$$g_{ii} = \frac{\alpha}{\beta_i} \left\{ \left(\frac{\gamma_i}{\epsilon_0} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\gamma_i}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{I_i}{4\pi} \right] + \frac{\gamma_i^2}{\epsilon_0^2} \frac{I_i}{4\pi} \right\} - i \frac{\alpha}{\beta_i} \frac{\gamma_i}{\epsilon_0}, \quad (14)$$

где

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi\omega\epsilon_i^2}}, \quad \alpha = \frac{1}{4\pi} V_0 \sigma_3(x), \quad \omega = \frac{2\pi v_{cb}}{\lambda},$$

$$\beta_i = \left[1 + \left(\frac{\gamma_i}{\varepsilon_0} - 1 \right) \frac{I_i}{4\pi} \right]^2 + \left[\frac{\gamma_i}{\varepsilon_0} \frac{I_i}{4\pi} \right]^2, \quad x_i = \frac{d_i}{\lambda}, \quad V_s = \frac{4}{3} \pi abc,$$

$$\sigma_3(x) = 1 - \frac{1}{30} (\delta_1^2 x_1^2 + \delta_2^2 x_2^2 + \delta_3^2 x_3^2), \quad \delta_1 = \pi \frac{2a}{s_1},$$

$$\delta_2 = \pi \frac{2b}{s_2}, \quad \delta_3 = \pi \frac{2c}{s_3},$$

a, b, c — полуоси эллипсоида, d_i — максимальный размер рассеивателя в плоскости вектора электрического поля E , v_{cb} — скорость света, σ — проводимость материала рассеивателя, I_i — эллиптические интегралы, которые в частных случаях вычислены в [10].

Аналогичный вид имеют компоненты матрицы ρ и поэтому здесь не приводятся.

Рассмотрим два частных случая, когда искусственный диэлектрик образован тетрагональной решеткой тонких металлических дисков ($s_1 = s_3 \neq s_2$ и $a = c \gg b$) и ортогональной решеткой бесконечно длинных круглых металлических цилиндров ($s_1 = s_2, a = b$).

Связем с пространственной решеткой искусственных сред оси прямоугольной системы координат так, что в первом случае ось y перпендикулярна поверхности дисков, во втором — ось z направлена вдоль оси цилиндров. Остальные оси направлены вдоль главных осей пространственных решеток. Параметры решеток s_1, s_2, s_3 соответствуют осям x, y, z .

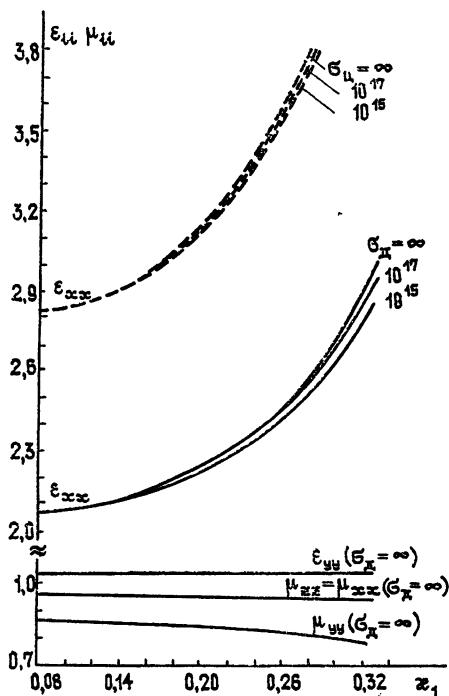


Рис. 1.

На рис. 1 представлены результаты теоретического расчета дисперсионных зависимостей компонент тензоров ϵ_{ii} и μ_{ii} тетрагональной

решетки дисков $\left(\beta = \frac{s_2}{s_1} = 0,346, \frac{b}{a} = 0,05, \frac{2d}{s} = 0,77, \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \right)$ и прямоугольной решетки металлических цилиндров $\left(\beta = 1, \frac{b}{a} = 1, \frac{2d}{s_1} = 0,77, \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \right)$ — пунктирная кривая) для различных значений проводимости рассеивателей $\sigma = \infty, 10^{17}, 10^{15}$ CGSE. Видно, что уже при $\chi_1 > 0,15$ (характерная величина параметра для устройств СВЧ) величина компонент тензоров значительно отличается от значений, полученных при помощи квазистатических формул ($\chi_1 = 0$) работы [5]. Плотность упаковки решеток дисков и цилиндров одинакова $\left(\frac{d_x}{s_1} = \frac{d_u}{s_1} = 0,77 \right)$, однако решетка цилиндров представляет более дисперсионный, чем решетка дисков, искусственный диэлектрик, с большими значениями компоненты ϵ_{xx} тензора диэлектрической проницаемости. Величина проводимости влияет на величину проницаемости, которая с уменьшением первой также уменьшается. На рис. 2 показана дисперсионная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь для обеих решеток. В статической области ($\chi_1 \rightarrow 0$) величина диэлектрических потерь исчезающе мала. С ростом частоты поля влияние потерь в рассеивателях на потери в искусственном диэлектрике растет. При $\chi_1 > 0,15$ и $\sigma = 10^{17}$ вклад потерь в рассеивателях становится соизмеримым с потерями материала, заполняющего межрешеточное пространство, в качестве которого обычно используется пенопласт с тангенсом угла диэлектрических потерь $\Delta_\epsilon = 0,0005 \div 0,001$, что определяет необходимость их оценки и учета в устройствах СВЧ. Уменьшение проводимости рассеивателей приводит к значительному росту тангенса угла диэлектрических потерь в искусственном диэлектрике. В области резонансных значений параметра $\chi > 0,3$ вместе с ростом диэлектрической проницаемости (рис. 1) резонансным образом возрастают и диэлектрические потери (рис. 2). То же относится и к комплексной магнитной проницаемости искусственной среды. С той лишь разницей, что магнитная проницаемость μ_{zz} имеет аномальный закон зависимости от частоты рассеиваемого поля.

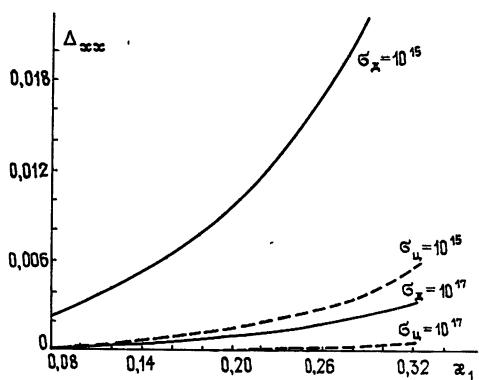


Рис. 2.

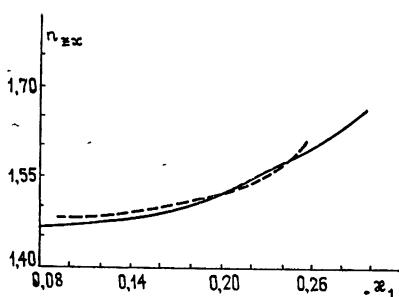


Рис. 3.

На рис. 3 сравниваются теоретическая и экспериментальная (пунктирная линия) дисперсионные зависимости коэффициента преломления $n_{\epsilon XX} = \sqrt{\mu_{zz} \epsilon_{xx}}$ решетки дисков. Теоретическая кривая рассчитана с уч-

том проводимости $\sigma = 10^{17}$ рассеивателей, диэлектрической проницаемости материала, заполняющего межрешеточное пространство ($\epsilon_0 = 1,08$, $\mu_0 = 1,00$), и некоторых технологических факторов, влияющих на величину n_{zx} при изготовлении блоков искусственного диэлектрика. Так, при штамповке листов искусственного диэлектрика диски из алюминиевой фольги запрессовываются на определенную глубину с некоторым разбросом и кроме того незначительно деформируются. Пересчет величины влияния этих факторов на отношение толщины диска к его диаметру дает значение $\frac{b}{a} \approx 0,045 - 0,055$, в то время как для отдельного недеформированного диска это отношение составляет $\frac{b}{a} = 0,01$.

В теоретических расчетах была принята величина отношения, равная 0,05. Методика экспериментальных измерений коэффициента преломления была уже достаточно подробно изложена в работе [6] и поэтому здесь не приводится. Точность измерения исследуемых величин лежит в пределах 3—6%. На рис. 4 построены зависимости компонент ϵ_{xx} , μ_{zz} и коэффициента преломления $n_{zx} = \sqrt{\mu_{zz} \epsilon_{xx}}$ от параметра решетки дисков $\beta = s_2/s_1$ при $\sigma = \infty$, $b/a = 0,05$ и $x_1 = 0,216$. С уменьшением расстояния s_2 между рядами дисков компонента ϵ_{xx} возрастает, а компонента μ_{zz} уменьшается. При определенных значениях параметра β существуют узкие области резонансного поведения компоненты ϵ_{xx} , а значит и коэффициента преломления. Величина диэлектрических потерь в этих областях резко возрастает. Пунктирной линией на рис. 4 показана экспериментально полученная зависимость коэффициента преломления. Сравнивая зависимость ϵ_{xx} от β (рис. 4) и ту же зависимость, полученную в [5], рис. 1, без учета дисперсии в искусственном диэлектрике, приходим к выводу, что учет дисперсионных свойств приводит к появлению качественно новых эффектов — наличию резонансных областей. Нетрудно показать, что в квазистатической области ($x_1 = 0$) резонансные эффекты полностью отсутствуют, а указанные кривые совпадают.

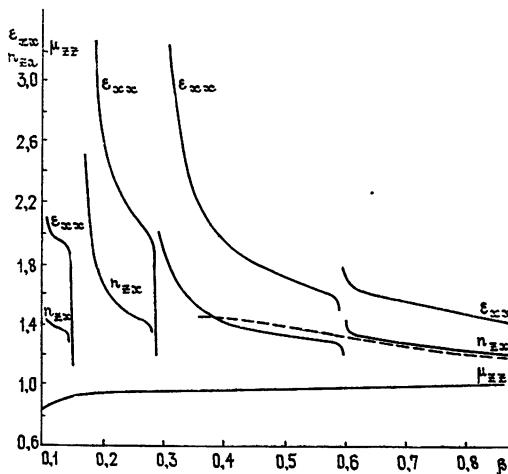


Рис. 4.

Таким образом, в работе получены дисперсионные выражения для компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей искусственных диэлектриков, образованных решетками с произвольной сте-

пенью симметрии. Если в квазистатическом приближении работы [5] нормировка функции распределения источников вторичных волн по объему элементарной ячейки пространственной решетки выполнялась без учета изменения частоты рассеиваемого поля, то в настоящей работе эта нормировка выполнена с учетом дисперсионных составляющих, что обеспечивает изменение распределения источников вторичных волн по объему Ω при изменении частоты поля, тем самым удовлетворяя физическому смыслу задачи.

Показано, что компоненты тензоров ϵ и μ в условиях отсутствия потерь мощности представляются разложениями в знакопеременные ряды по четным степеням малого параметра $k s_i \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Установлено наличие резонансов компонент тензоров ϵ и μ и эквивалентного коэффициента преломления. Развиваемая теория дает качественное и количественное описание возникающих резонансных эффектов, позволяя определить местоположение резонансных областей.

Необходимо заметить, что потери в металлических рассеивателях, определяемые проводимостью σ , существенным образом влияют как на мнимые, так и на действительные составляющие компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей искусственных диэлектриков.

Хорошее совпадение результатов теоретических расчетов и экспериментальных данных в широкой области параметров α и β свидетельствует о хорошем приближении аналитических выражений, полученных в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. B. Cohn, J. Appl. Phys., № 20, 257 (1949).
2. G. Estrin, Proc. IRE, № 39, 820 (1951).
3. Л. Н. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954, стр. 177.
4. Г. З. Айзенберг, В. Г. Ямпольский, О. Н. Терешин, Антенны УКВ, ч. 1, Связьиздат, М., 1977, стр. 287.
5. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 27, вып. 9, 2006 (1957).
6. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Р. В. Шапиро, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 40, № 3, 631 (1970).
7. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 4, № 3, 417 (1959).
8. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Н. Г. Савенко, В. П. Шестопалов, УФЖ, 15, № 12, 2021 (1970).
9. В. Н. Скуров, Радиотехника, Респ. межвед. научно-техн. сб., № 1, 116 (1965).
10. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, № 7, 1593 (1958).

Поступила в редакцию
24 июля 1978 г.

INVESTIGATION OF DISPERSION OF ANISOTROPIC ARTIFICIAL DIELECTRICS

A Yu Borisov, G. G. Bubnov, R. V. Shapiro

Dispersive properties of anisotropic artificial dielectrics are studied which are formed by an arbitrary periodic lattice of scattering elements. It is shown, that in the long-wave approximation the problem is reduced to the definition of an average internal field in an anisotropic artificial dielectric and the function of the density distribution of the second wave radiators over the volume of an elementary cell of the space lattice taking into account the dispersion corrections. Dispersion expressions have been obtained for the tensor components of dielectric and magnetic permittivity of an anisotropic latticed medium with the accuracy up to the members of an arbitrary order of smallness over the expansion parameters. The influence of losses due to the finite conductivity of the scatterer substance on the value of electrodynamic characteristics is considered. The presence of real and imaginary resonances of tensor components is noted, as well as anisotropies of dispersive properties and power losses in anisotropic latticed structures. Results of numerical calculation of tensor component dispersion and experimental data for the concrete types of artificial dielectrics are presented.

УДК 621.385.69

ДВУХРЕЗОНАТОРНЫЙ МЦР-ГЕНЕРАТОР С ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

B. C. Ергаков, M. A. Моисеев, P. Э. Эрм

Рассмотрен двухрезонаторный МЦР-генератор на основном циклотронном резонансе и определены оптимальные значения его параметров. На плоскости параметров, пропорциональных току электронного пучка и длине выходного резонатора, найдены области качественно различных характеристик. Показано, что в оптимальном режиме двухрезонаторный МЦР-генератор по сравнению с автономным МЦР-монотроном имеет более высокий КПД. В режиме, отличном от оптимального, при КПД, примерно равном максимальному КПД МЦР-монотрона, двухрезонаторный МЦР-генератор позволяет достичнуть большего уровня выходной мощности и лучшей селекции колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

В МЦР-монотронах при увеличении тока электронного пучка сверх некоторой оптимальной величины начинается падение КПД, а затем и выходной мощности [1, 2]. С целью достижения большого уровня выходной мощности режимы с высокими КПД могут быть смешены в область больших значений токов, например, уменьшением добротности резонатора. Однако добротность резонатора ограничена снизу величиной $Q_{\min} \approx 4\pi(L/\lambda)^2$, где L — эффективная длина резонатора, λ — длина волн генерируемых колебаний. Снижение Q_{\min} путем уменьшения длины резонатора L приводит при постоянном напряжении электронного пучка к уменьшению параметра неизохронности и, как следствие, к существенному падению КПД. В некотором смысле противоположная ситуация возникает при разработке мощных МЦР коротковолновой части диапазона СВЧ, специфика которых обусловлена тем, что с укорочением длины волн возникают трудности получения интенсивных электронных пучков, имеющих малый разброс скоростей. Предельный ток электронно-оптических систем падает примерно пропорционально λ . Поэтому в коротковолновых МЦР-монотронах, особенно в тех случаях, когда взаимодействие электронов с переменным полем осуществляется не на основном циклотронном резонансе, не всегда удается приблизить рабочий ток пучка к оптимальному значению. Вместе с тем, известно, что в МЦР-монотроне, синхронизованном сторонним сигналом путем предварительной модуляции электронного пучка [3], оптимальный ток пучка при одинаковых сопоставимых параметрах меньше оптимального тока автономного МЦР-монотрона, а падение КПД, вызываемое изменением параметра неизохронности, менее резкое. Поэтому представляет интерес двухрезонаторный МЦР, в котором предварительная модуляция электронного пучка в первом резонаторе осуществляется не сторонним сигналом, а сигналом, подаваемым с выхода. В настоящей работе исследование такого автономного МЦР-генератора проводится в предположении, что моноскоростной слаборелятивистский электронный пучок взаимодействует только с одной высокодобротной модой в каждом резонаторе. Количественные результаты получены для МЦР

на основном циклотронном резонансе с параметрами, исключающими возможность самовозбуждения колебаний в первом резонаторе.

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим МЦР-генератор, электродинамическая система которого состоит из двух открытых резонаторов, образованных отрезками слабонерегулярных волноводов, и отрезка запредельного волновода, обеспечивающего развязку высокочастотных полей резонаторов и выполняющего одновременно роль трубы дрейфа электронов. Связь между резонаторами осуществляется через электронный пучок и по специальному каналу обратной связи.

При достаточно высоких добротностях резонаторов в приближении фиксированной структуры высокочастотного поля фаза φ_s и безразмерная амплитуда F_s колебаний в модулирующем ($s = 1$) и основном ($s = 2$) резонаторах удовлетворяют уравнениям [3]

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dt} + iF_s \frac{d\varphi_s}{dt} + \frac{\omega_s}{2Q_s} \{ F_s (1 + i\gamma_s + iI_s \chi_s) + \\ + A_s \exp[i(\varphi_{\text{вх},s} - \varphi_s)] \} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω_s и Q_s — собственная частота и добротность s -резонатора, $\gamma_s = -2Q_s(\omega - \omega_s)/\omega_s$, ω — средняя частота установившихся колебаний, A_s и $\varphi_{\text{вх},s}$ — амплитуда и фаза сигнала, приходящего в s -резонатор по каналу обратной связи, I_s — параметр, пропорциональный току пучка. В случае аксиально-симметричных электродинамической системы и трубчатого электронного пучка, когда взаимодействие электронов происходит с полями симметричных или вращающихся несимметрических ТЕ_{mp1}-мод в резонаторах, параметр I_s для МЦР на основном циклотронном резонансе с гауссовой функцией продольного распределения переменного поля в резонаторе $f_s(\zeta_s) = \exp \left[-3 \left(\frac{2\zeta_s}{\mu_s} - 1 \right)^2 \right]$ равен

$$I_s = 10^{-4} I_0 Q_s \beta_{\perp}^{-4} \frac{\lambda}{L_s} \frac{J_{m-1}^2(kR_0)}{[(kR_p)^2 - m^2] J_m^2(kR_p)}. \quad (2)$$

Здесь I_0 — ток пучка в амперах, $\zeta_s = (\pi \beta_{\perp}^2 / \beta_{\parallel}) (z_s / \lambda)$ — безразмерная продольная координата, отсчитываемая от входного сечения резонатора; $\mu_s = (\pi \beta_{\perp}^2 / \beta_{\parallel})(L_s / \lambda)$, L_s — длина резонатора; $\beta_{\perp} = v_{\perp 0} / c$ и $\beta_{\parallel} = v_{\parallel 0} / c$ — отношение скоростей невозмущенных вращательного и поступательного движений электронов к скорости света, $J_m(kR)$ — функция Бесселя первого рода, m — азимутальный индекс рабочей моды, $k = 2\pi/\lambda$, R_p — радиус резонатора, R_0 — радиус трубчатого электронного пучка. Комплексные величины $\chi_s = \chi_s' + i\chi_s''$, пропорциональные электронным восприимчивостям резонаторов, являются функциями амплитуд F_s , фаз φ_s , параметров

$$\Delta_s = (2\beta_{\perp}^2 \omega) (\omega - \omega_H), \quad \mu_s \text{ и } \mu_{dp} = (\pi \beta_{\perp}^2 / \beta_{\parallel})(L_{dp} / \lambda),$$

где L_{dp} — длина участка дрейфа.

Система уравнений (1) совместно с уравнениями движения электронов [3, 4] позволяет исследовать различные варианты двухрезонаторных МЦР. Рассмотрим автономный двухрезонаторный МЦР-генератор, в котором путем выбора параметров исключается возможность самовозбуждения колебаний в первом резонаторе [3, 5]. В таком генераторе

с участком дрейфа достаточно большой длины ($\mu_{dp} \gg \mu_s$) эффективная группировка электронов достигается при малой амплитуде поля в первом резонаторе и слабой связи между резонаторами. В случае малой связи, когда внешняя добротность второго резонатора, обусловленная нагрузкой каналом внешней связи, много больше полной добротности ($Q_{vn2} \gg Q_2$), в системе (1) можно пренебречь членом, пропорциональным A_2 . Тогда, предполагая, что время запаздывания сигнала в цепи обратной связи и трубке дрейфа мало по сравнению с временем установления колебаний в резонаторах

$\left(\left| \frac{d(\varphi_{cb} - \theta_{dp})}{d\omega} \right| \ll \frac{Q_s}{\omega}, \text{ где } \tilde{\varphi}_{cb} - \text{фаза коэффициента связи, } \theta_{dp} = (\omega - \omega_H) L_{dp}/v_{l0} - \text{угол пролета электронов через участок дрейфа} \right)$, уравнения (1) можно представить в виде

$$q \frac{dF_1}{d\tau} + F_1(1 - I_1 \chi_1'') + \beta F_2 \cos(\varphi + \varphi_{cb}) = 0; \quad (3a)$$

$$\frac{dF_2}{d\tau} + F_2(1 - I_2 \chi_2'') = 0; \quad (3b)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \tilde{\gamma} + I_2 \chi_2' - (\beta F_2/qF_1) \sin(\varphi + \varphi_{cb}) = 0; \quad (3c)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} + \gamma_2 + I_2 \chi_2' = 0, \quad (4)$$

где $\beta = A_1/F_2$ — модуль коэффициента обратной связи, $\varphi_{cb} = \varphi_{cb} - \theta_{dp}$ — суммарный набег фазы в цепи обратной связи и на участке дрейфа, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + \theta_{dp}$, $\tau = \omega t/2Q_2$ — безразмерное время, $q = Q_1/Q_2$ — отношение добротностей резонаторов, $\tilde{\gamma} = \gamma_2 - (\gamma_1 + I_1 \chi_1')/q$ — величина, пропорциональная расстройке собственных частот выходного и нагруженного электронным пучком первого резонатора.

В режиме малого сигнала в модулирующем резонаторе функция χ_1 не зависит от F_1 и φ_1 , а функцию χ_2 можно представить выражениями [3]

$$\chi_2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \chi_2^{(l)}(F_2) J_l(lX) e^{-il\varphi}, \quad (5)$$

$$X = 2\mu_{dp} F_1 \left| \int_0^{\mu_1} f_1(\zeta_1) \exp(i\Delta_1 \zeta_1) d\zeta_1 \right|,$$

X — параметр группировки электронов. Коэффициенты $\chi_2^{(l)}$ в (5), определяемые в результате решения укороченных уравнений движения электронов, зависят только от F_2 , μ_2 , Δ_2 .

Условия самовозбуждения двухрезонаторного МЦР-генератора определяются корнями характеристического уравнения системы (1), линеаризованной в окрестности нулевого состояния равновесия ($F_s=0$). Характеристическое уравнение имеет две пары комплексно сопряженных корней ($p_{1,2}=p_{3,4}^*$). Из равенства нулю их действительных частей,

$$1 - I_2 \chi_2^{(0)''} + \frac{1}{q} (1 - I_1 \chi_1'') \mp \operatorname{Re} \left\{ \left[1 + i\tilde{\gamma} + iI_2 \chi_2^{(0)} - \right. \right. \quad (6)$$

$$-\frac{1}{q} (1 - I_1 \chi''_1) \Big]^2 + i 4 I_2 \sigma \frac{\beta}{q} \exp \left[i \left(\varphi_{\text{св}} - \frac{\theta_2}{2} \right) \right] \Big\}^{1/2} = 0,$$

находятся два стартовых значения тока, соответствующих двум колебаниям с различными частотами и с разным отношением амплитуд полей в первом и втором резонаторах. В соотношении (6)

$$\sigma = 2 \mu_{\text{pp}} \left| \int_0^{\mu_1} f_1(\zeta_1) \exp(i \Delta_1 \zeta_1) d\zeta_1 \int_0^{\mu_2} f_2(\zeta_2) \exp(-i \Delta_2 \zeta_2) d\zeta_2 \right|.$$

Если $\beta = 0$, то уравнение (6) определяет стартовые значения параметров I_s изолированных резонаторов

$$I_{1 \text{ st}} = (\chi''_1)^{-1}, \quad I_{2 \text{ st}} = (\chi''_2)^{-1}.$$

С ростом коэффициента обратной связи β одно значение стартового тока убывает, другое возрастает. При сделанных выше предположениях об отсутствии самовозбуждения изолированного первого резонатора ($1 - I_1 \chi''_1 > 0$) и соответствующей оптимизации фазы сигнала обратной связи, колебания с меньшим стартовым током имеют больший КПД. Из расчетов также следует, что в области параметров, представляющих наибольший интерес, рабочий ток пучка оказывается меньше стартового значения тока для колебаний второго типа.

В стационарном режиме генерации амплитуды и фазы колебаний в резонаторах определяются системой уравнений (3) при $\frac{dF_s}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$. Стационарные колебания устойчивы, если выполняются условия

$$T_{1, 2, 3} > 0,$$

$$T_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$T_2 = T_1 (a_{11} a_{22} + a_{22} a_{33} + a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31} - a_{12} a_{21} - a_{23} a_{32}) - T_3, \quad (7)$$

$$T_3 = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{31} a_{22} - a_{23} a_{32} a_{11}.$$

Здесь a_{ij} — частные производные левых частей уравнений (3) ($i = 1, 2, 3$) при $\frac{dF_s}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ по F_1, F_2, φ ($j = 1, 2, 3$).

Ниже приводятся результаты численного исследования стационарных режимов МЦР.

ЗАВИСИМОСТЬ КПД ОТ ПАРАМЕТРОВ

Поперечный электронный КПД МЦР равен [3, 4] $\eta_{\perp} = F_2^2 \chi''_2$. В выражении (5) для χ_2 функции $\chi_2^{(l)}$ быстро убывают с ростом индекса $|l|$. Поэтому при расчетах КПД с точностью 1% достаточно учитывать составляющие (5) с индексами $|l| \leqslant 6$.

Максимальный КПД достигается при параметре группировки электронов $X \approx 1,84$ и значениях $I_2, \Delta_2, \varphi, \gamma, \beta, \varphi_{\text{св}}$, удовлетворяющих системе (3) и уравнениям

$$\frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial F_2} = \frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial \Delta_2} = \frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\tilde{\gamma} = -I_2 \chi'_2, \quad (8)$$

$$\beta = (1,84 \Phi / \mu_{dp} F_2), \quad \varphi_{cs} = \pi - \varphi,$$

$$\Phi = (1 - I_1 \chi'_1) \left| 2 \int_0^{\mu_1} f_1(\zeta_1) \exp(i \Delta_1 \zeta_1) d\zeta_1 \right|^{-1}.$$

Для МЦР с гауссовым продольным распределением высокочастотного поля в выходном резонаторе зависимости оптимальных значений I_2 , Δ_2 , φ_{cs} , $\tilde{\gamma}$, F_2 и максимальной величины η_1 от μ_2 приведены на рис. 1.

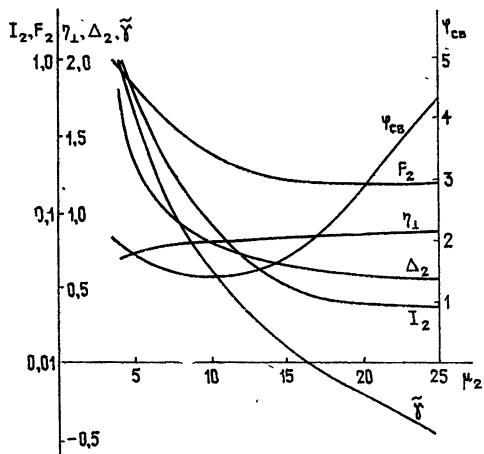


Рис. 1.

Рис. 1. Максимальный поперечный КПД и оптимальные параметры двухрезонаторного МЦР-генератора.

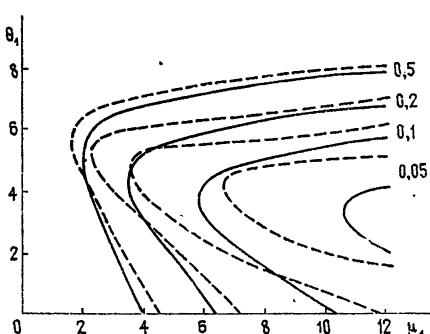


Рис. 2.

Рис. 2. Линии равных значений Φ на плоскости μ_1 , θ_1 при $I_1/I_{1st}^{\min} = 0,5$ (сплошные кривые) и $I_1/I_{1st}^{\min} = 0,75$ (пунктирные кривые).

Оптимальная величина коэффициента обратной связи β является функцией параметров первого резонатора и трубы дрейфа. Критерием выбора параметров первого резонатора может служить, например, условие минимума β и условие $I_1 < I_{1st}^{\min}$, исключающее возможность самовозбуждения колебаний в первом резонаторе (I_{1st}^{\min} — минимальное по параметру Δ_1 значение I_1 ($\beta = 0$)). В этом случае можно воспользоваться рис. 2, на котором изображена плоскость параметров μ_1 , $\theta_1 = \Delta_1 \mu_1$ с линиями равных значений функции $\Phi(\mu_1, \theta_1)$, когда $I_1 = 0,5 I_{1st}^{\min}$ (сплошные кривые) и $I_1 = 0,75 I_{1st}^{\min}$ (пунктирные кривые). Если статическое магнитное поле однородно по всей длине электродинамической системы ($\Delta_1 = \Delta_{2opt}$), то оптимальные значения μ_1 и θ_1 соответствуют точке минимума функции $\Phi(\mu_1, \theta_1)$ на прямой $\theta_1 = \mu_1 \Delta_{2opt}$.

При разработке МЦР и интерпретации их характеристик часто возникает необходимость в теоретическом исследовании работы МЦР-генераторов в режимах, отличных от оптимальных. Поэтому ниже приведены результаты такого исследования.

На рис. 3 изображена плоскость основных параметров I_2 , μ_2 с линиями равных значений поперечного электронного КПД, максимизированного по всем другим параметрам, и линией $I_2 = I_{2st}$, где I_{2st} — стар-

товое значение параметра I_2 (кривая 1). Зависимость $I_{2\text{st}}$ от μ_2 является границей областей качественно различного поведения двухрезонаторного МЦР-генератора: ниже кривой 1 находится область мягкого самовозбуждения колебаний, выше — жесткого. Положение границы на плоскости $I_2 \mu_2$ при оптимальных других параметрах слабо зависит от величины $q(1 - I_1 \chi_1)^{-1}$ — отношения полос «холодного» второго и нагруженного электронным пучком первого резонаторов. На рис. 3 граница 1 приведена для случая $q = 1 - I_1 \chi_1''$.

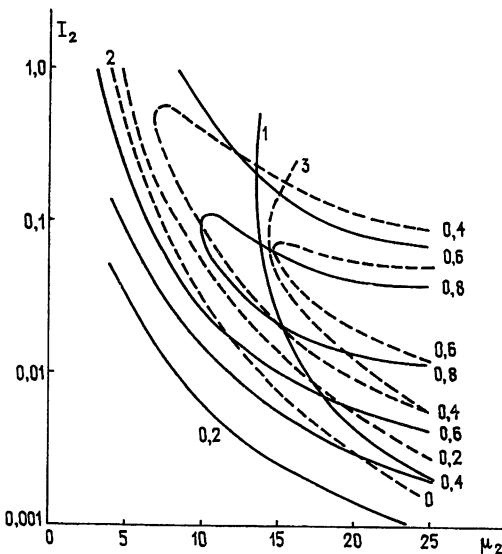


Рис. 3. Линии равных значений максимального поперечного КПД двухрезонаторного МЦР-генератора (сплошные кривые), МЦР-монотрона (пунктирные кривые) и границы областей качественно различных характеристик (кривые 1—3) на плоскости $I_2 \mu_2$.

При равенстве нулю коэффициента обратной связи выходной резонатор ведет себя как автономный МЦР-монотрон. Границы областей качественно различного поведения МЦР-монотрона и линии равных значений максимального по параметру Δ_2 поперечного электронного КПД представлены на рис. 3 пунктиными кривыми. Границами служат зависимости $I_2 = I_{2\text{st}}(\mu_2)$ при $\Delta_2 = \Delta_{2\text{opt}}$ (кривая 3) и минимального по Δ_2 стартового значения $I_2 = I_{2\text{st}}^{\min}(\mu_2)$ (кривая 2). В области $I_2 < I_{2\text{st}}^{\min}$ автономный МЦР-монотрон не возбуждается. В области между границами 2 и 3 МЦР-монотрон имеет характеристики генератора с мягким возбуждением, выше границы 3 — с жестким возбуждением.

Из рис. 3 видно, что КПД двухрезонаторного МЦР-генератора с внешней обратной связью больше КПД МЦР-монотрона. При параметре $\mu_2 = 26$ и $I_2 = I_{2\text{opt}}$ поперечный электронный КПД двухрезонаторного МЦР-генератора равен $\eta_\perp = 0,87$, а МЦР-монотрона — 0,7. С уменьшением μ_2 поперечный КПД двухрезонаторного МЦР уменьшается медленнее, чем КПД МЦР-монотрона, а оптимальный режим смещается в область больших токов электронного пучка (при фиксированной добротности выходного резонатора и постоянной скорости электронов ток пучка пропорционален величине $I_2 \mu_2$, возрастающей с уменьшением μ_2). Например, поперечный КПД двухрезонаторного МЦР-генератора равен максимальному КПД МЦР-монотрона ($\eta_\perp =$

$= 0,7$) при $\mu_2 = 4$ и оптимальном токе больше оптимального тока МЦР-монотрона в 4 раза. Кроме того, уменьшение параметра μ_2 , пропорционального длине резонатора L_2 , дает возможность увеличить ток пучка и выходную мощность за счет снижения добротности резонатора, ограниченной снизу величиной $Q_{\min} \approx 4\pi(L_2/\lambda)^2$.

Максимальный КПД МЦР-генераторов достигается в той области параметров, где самовозбуждение колебаний является жестким (рис. 3). Однако в области мягкого самовозбуждения колебаний КПД двухрезонаторного МЦР-генератора ($\gamma_1 = 0,82$, $\mu_2 = 14$) мало отличается от максимального ($\gamma_1 = 0,87$, $\mu_2 = 26$).

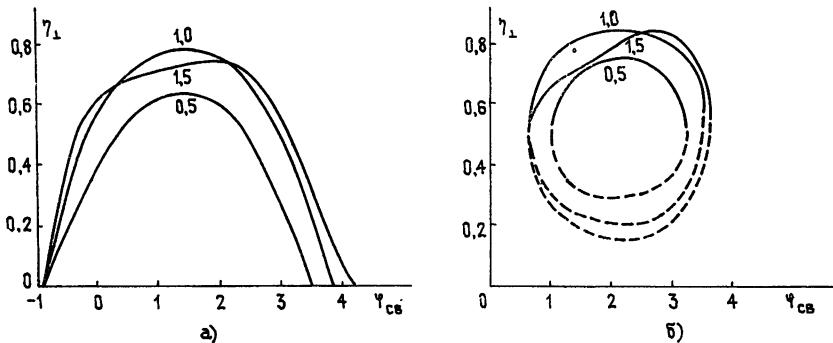


Рис. 4. Зависимость поперечного КПД от $\varphi_{\text{св}}$ при $\beta/\beta_{\text{опт}}=(0,5; 1; 1,5)$:
а) $\mu_2 = 7$, б) $\mu_2 = 17$.

На рис. 4 и 5 представлены зависимости поперечных КПД двухрезонаторных МЦР-генераторов с мягким ($\mu_2 = 7$, рис. 4а и 5а) и жестким ($\mu_2 = 17$, рис. 4б и 5б) самовозбуждением колебаний от фазы коэффициента обратной связи $\varphi_{\text{св}}$ при различных β и от параметра γ , характеризующего расстройку собственных частот резонаторов при различных I_2 и оптимальных (см. рис. 1) значениях других параметров в случае $q = 1 - I_1 \chi_1''$. Сплошные участки кривых соответствуют устойчивым колебаниям, пунктирные — неустойчивым. Из рис. 4 видно, что

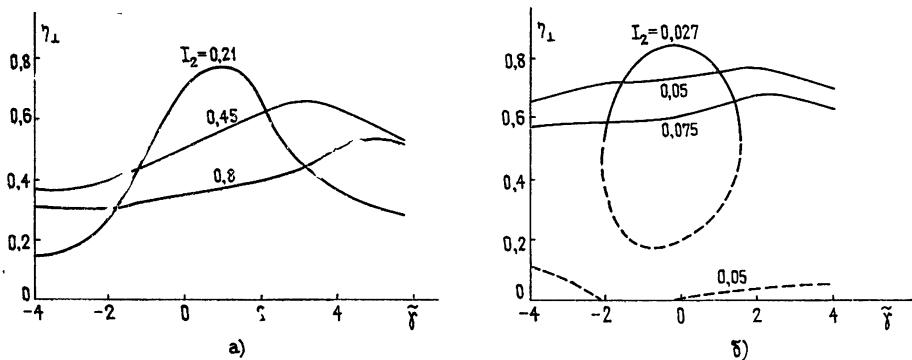


Рис. 5. Зависимость поперечного КПД от $\tilde{\gamma}$ при $\beta = \beta_{\text{опт}}$ и различных I_2 :
а) $\mu_2 = 7$, б) $\mu_2 = 17$.

стационарные колебания возможны только в определенном интервале значений фазы обратной связи $\Delta\varphi_{\text{св}} \approx \pi$, который с ростом β несколько расширяется. При оптимальном токе пучка ($I_2 = 0,21$, рис. 5а) зависи-

мость КПД двухрезонаторного МЦР с мягким самовозбуждением колебаний от расстройки собственных частот резонаторов имеет вид резонансной кривой с плавно спадающими крыльями. В МЦР-генераторе с жестким самовозбуждением при $I_2 = I_{2\text{ opt}} = 0,027$ колебания возможны (рис. 5б) только в достаточно узком интервале расстроек собственных частот, не превышающем удвоенной полосы холодного выходного резонатора ($\Delta \gamma \leq 4$). С увеличением тока пучка величины $\Delta \gamma$ и $\Delta \Phi_{\text{св}}$ возрастают. При токах пучка, равных оптимальным токам МЦР-монотронов ($I_2 = 0,45$, $\mu_2 = 7$ и $I_2 = 0,05$, $\mu_2 = 17$) и превышающих эти значения, КПД двухрезонаторных МЦР-генераторов слабо зависит от γ . Зависимость КПД от тока электронного пучка можно иллюстрировать рис. 6, на котором представлены значения поперечного КПД МЦР-монотрона $\beta = 0$ и двухрезонаторного МЦР-генератора с параметрами, обеспечивающими в оптимальном режиме различные превышения стартового тока первого резонатора над рабочим током ($I_{1\text{ opt}}/I_{1\text{ st}} = 0; 0,5; 0,75$). Из рис. 6 видно, что увеличение $I_{1\text{ opt}}/I_{1\text{ st}}$ приводит к уменьшению интервала значений I_2 , соответствующих устойчивым колебаниям с высоким КПД. Оптимальная величина коэффициента обратной связи β с ростом $I_{1\text{ opt}}/I_{1\text{ st}}$ стремится к нулю. Поэтому реализация режима с $I_1 \approx I_{1\text{ st}}$ и $\beta \approx 0$ требует высокой стабильности источников питания двухрезонаторного МЦР-генератора. В случае недостаточной стабильности источников необходимо иметь $I_1 \leq 0,5 I_{1\text{ st}}$. При $I_1 < 0,5 I_{1\text{ st}}$ интервалы изменения тока пучка, в которых КПД двухрезонаторного МЦР-генератора и МЦР-монотрона близки к максимальным, примерно равны. Вместе с тем можно отметить, что резкая зависимость КПД от тока пучка в определенных условиях может быть использована для селекции колебаний в генераторе с мягким возбуждением, когда рабочей модой является мода с наименьшим стартовым током. Например, если стартовый ток конкурирующей моды больше стартового тока рабочей моды на 25%, то ее самовозбуждение в оптимальном режиме исключается, когда $I_{1\text{ opt}} = 0,75 I_{1\text{ st}}$.

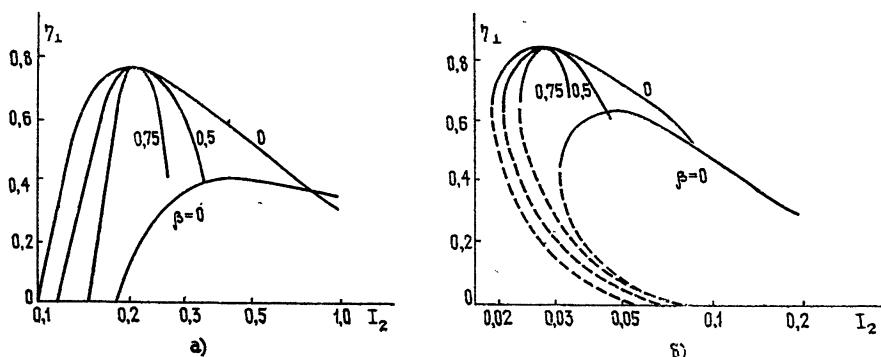


Рис. 6. Зависимость поперечного КПД двухрезонаторного МЦР-генератора при $\beta = \beta_{\text{opt}}$, $I_{1\text{ opt}} \chi_1 = (0; 0,5; 0,75)$ и МЦР-монотрона (кривые $\beta = 0$) от I_2 :
а) $\mu_2 = 7$, б) $\mu_2 = 17$.

ВЫВОДЫ

КПД двухрезонаторного МЦР-генератора выше КПД МЦР-монотрона. Максимальное значение поперечного электронного КПД двухрезонаторного МЦР равно 0,87 в режиме с жестким самовозбуждением колебаний и 0,82 в режиме с мягким самовозбуждением.

В двухрезонаторном МЦР-генераторе можно использовать более короткие резонаторы с меньшей добротностью и, следовательно, работать в режиме с большим током и большим уровнем выходной мощности без существенного снижения КПД.

Регулируемая обратная связь дает возможность варьировать параметры МЦР в широких пределах и достигать, например, лучшей селекции колебаний или больших КПД.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 2, 280 (1975).
2. Н. И. Зайцев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, 19, № 5, 1056 (1974).
3. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 1, 120 (1975).
4. М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, в сб. Лекции по электронике СВЧ, книга 4, изд. Саратовского университета, 1974, стр. 95.
5. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, В. И. Хижняк, Радиотехника и электроника, 23, № 12, 2591 (1978).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
3 мая 1978 г.

TWO-RESONANT CRM-OSCILLATOR WITH EXTERNAL BACK-COUPLING

V. S. Ergakov, M. A. Moiseev, R. E. Erm

Optimal value of the parameters of a two-resonant resonant CRM-oscillator based on the fundamental cyclotron resonance are defined. On the plane of parameters proportional to the electron beam current and to the length of the output resonator, the regions of qualitatively different characteristics have been found. It is shown that in the optimal regime a two-resonant CRM-oscillator has a higher efficiency in comparison with the autonomous CRM-monotron. In the regime different from the optimal one, with the efficiency equal approximately to the maximal CRM-monotron efficiency, the two-resonant CRM-oscillator permits to reach a larger level of the output power and better selection of oscillations.

УДК 537.212

ПРОБОЙ ВАКУУМА ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ В ДИАПАЗОНЕ $(5 \div 7) \cdot 10^6$ В/см

П. Н. Чистяков, Н. П. Дубинин

Проведено осциллографическое исследование электрического пробоя вакуумного промежутка, электроды которого подвергались электронной обработке в вакууме и, далее, ионной обработке в сильноточном тлеющем разряде с полым катодом в инертном газе (аргоне). Пробой промежутка величиной около 0,1 мм происходил при очень высоком электрическом поле в диапазоне $(5 \div 7) \cdot 10^6$ В/см. В большинстве случаев при первом пробое, следовавшем непосредственно за ионной обработкой, не возникала устойчивая вакуумная дуга, а появлялся короткий импульс сильного тока длительностью $1 \div 5,5$ мкс, который следует приписать взрыву микроскопического выступа на катоде, сопровождающемуся эмиссией электронов из возникшей плазмы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] было показано, что при использовании одновременной обработки и очистки обоих электродов промежутка сильноточным тлеющим разрядом в инертном газе и контроля состояния этих электродов по экзоэлектронной (послеразрядной) эмиссии можно получить долговременную электрическую прочность вакуума $7 \cdot 10^5$ В/см, при промежутке в 1 мм, и в $(1 \div 2) \cdot 10^6$ В/см для промежутка в 0,1—0,2 мм. Критерием нарушения электрической прочности являлось возникновение тока автоэлектронной эмиссии величиной в 0,01—1 мкА. В этих исследованиях осталось невыясненным — при каком электрическом поле происходит первый полный пробой вакуума и каков при этом характер изменения тока в вакуумном промежутке, — что может дать некоторые сведения и о механизме пробоя. В настоящей работе рассматриваются эти вопросы.

2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Конструкция экспериментального прибора и методика очистки электродов электронной бомбардировкой в вакууме и сильноточным тлеющим разрядом в инертном газе были, в основном, такими же, как и в работах [1, 2]. Прибор, показанный на рис. 1, содержит два идентичных молибденовых электрода диаметром 15 мм, выполненных в форме электродов Роговского. В приборе имеется сильфонное устройство, которое позволяет изменять расстояние между электродами до 10 мм и установить его с точностью до 0,01 мм.

Для прогрева электродов электронной бомбардировкой в прибор введен дополнительный электрод — вольфрамовая спираль. Эта же спираль является анодом в случае обработки электродов тлеющим разрядом. При обоих видах обработок основные электроды промежутка электрически объединяются и очищаются одновременно и в равной степени. Для того, чтобы при обработке сконцентрировать аномальный тлеющий разряд на основных электродах и ближайших к ним участках поддер-

живающих стоек, на последних были расположены стеклянные трубочки (рис. 1), которые препятствовали распространению тлеющего разряда на отдаленные участки стоек и на металлическую поверхность сильфона.

Статические вольт-амперные характеристики промежутков измерялись при помощи высоковольтного выпрямителя с напряжением до 40 кВ и пульсациями при токе 30 мА не более 0,3%. При измерениях ток в вакуумном промежутке ограничивался балластным сопротивлением в 1100 мОм. Импульсные характеристики измерялись при помощи двухлучевого осциллографа ОК-17М и генератора, дающего одиночные импульсы напряжения с амплитудой до 50 кВ. Форма импульса напряжения показана на рис. 2. Общая электрическая схема регистрации импульсов напряжения и тока приведена на рис. 3. Осциллограммы фотографировались на пленку чувствительностью 250 ед. ГОСТа.

Эксперименты по пробою вакуума проводились с электродами, прошедшиими интенсивную электронную и ионную очистку, критерием достаточной очистки как и в предыдущих работах [1, 2] считалось исчезновение экзозелектронной (послеразрядной) эмиссии электронов из поверхности электродов.

Откачка экспериментального прибора производилась на безмасляной вакуумной установке. Вначале прибор прогревался печью до 450°C в течение 10 часов, далее электроды прокаливались электронной бомбардировкой до 950°C в течение 8 часов. При этих операциях давление остаточных газов в системе не поднималось выше $5 \cdot 10^{-6}$ Tor. В конце процесса электронной бомбардировки при температуре электродов 950°C давление составляло 10^{-6} Tor и после охлаждения электродов до комнатной температуры — 10^{-7} Tor.

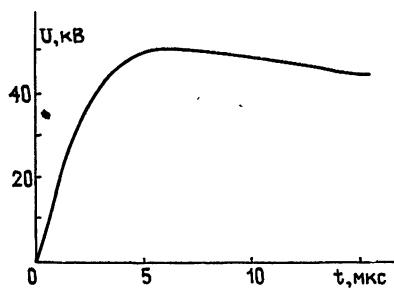


Рис. 2.

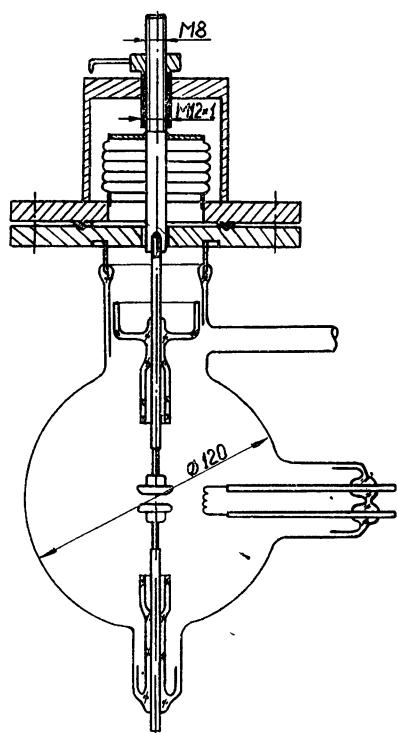


Рис. 1.

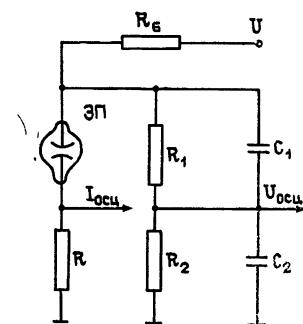


Рис. 3.

Далее в прибор был впущен аргон при давлении 3 Tor и произведена обработка электродов сильноточным тлеющим разрядом в пульси-

рующим режиме со средним значением тока на оба электрода 100 мА. При этом расстояние между электродами составляло 3 мм и при температуре электродов близкой к 900°C в промежутке устанавливался тлеющий разряд с полым катодом. После одного часа обработки произошло значительное распыление и очистка электродов, а на внутренней стенке колбы, окружающей основной промежуток, образовался полу-прозрачный слой молибдена. Образование этого слоя не нарушило электрическую прочность оболочки прибора во всем диапазоне напряжений, использованных в работе. В ходе обработки удалось добиться равномерного и полного покрытия поверхности электродов свечением тлеющего разряда. Несколько раз обработка прекращалась, и в той же газовой среде производилось определение величины экзоэлектронной эмиссии, возбуждаемой электрическим разрядом в газах (послеразрядная эмиссия). К концу обработки экзоэлектронная эмиссия практически исчезла, ток не превосходил 10^{-18} А, что свидетельствует об устранении с металлических поверхностей электродов остаточных загрязнений — тонких пленок полупроводников и диэлектриков и их локальных включений.

Определение тока послеразрядной эмиссии производилось путем измерения среднего статистического времени запаздывания пробоя газа по соотношению

$$I = e/\bar{t}_c, \quad (1)$$

где \bar{t}_c — среднее статистическое время запаздывания пробоя газа. Этот метод неоднократно использовался в работах нашей лаборатории, например, в [3, 4].

По окончании обработки тлеющим разрядом и измерений послеразрядной эмиссии аргон откачивался, при этом в системе достигался вакуум 10^{-7} Torr, а в экспериментальном приборе вакуум был еще выше из-за наличия на внутренней поверхности колбы прибора напыленного слоя молибдена, который хорошо сорбирует остаточные неинертные газы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Типичные статические вольт-амперные характеристики предпробойных токов показаны на рис. 4. Возникший ток был достаточно стабилен, микроразряды отсутствовали, форма характеристик отвечает автоэлектронной эмиссии. Электрическая прочность промежутка $0,06 \div 0,12$ мм оказалась весьма высокой, так ток 10^{-6} А возникал при среднем поле в промежутке не меньшем $2 \cdot 10^6$ В/см.

Полный пробой промежутка после электронной и ионной обработки исследовался при импульсном напряжении с амплитудой, достигающей 50 кВ.

Первый пробой, произшедший после обработки электродов тлеющим разрядом, понижал уровень напряжения последующего возникновения автоэлектронного тока и полного пробоя, как это уже отмечалось и в работе [2], из-за чего после каждого первого пробоя производилась обработка электродов сильноточным тлеющим разрядом в аргоне, которая поднимала электрическую прочность промежутка до ее начального высокого значения. Таким образом, был проведен ряд «первых» пробоев промежутка непосредственно по-

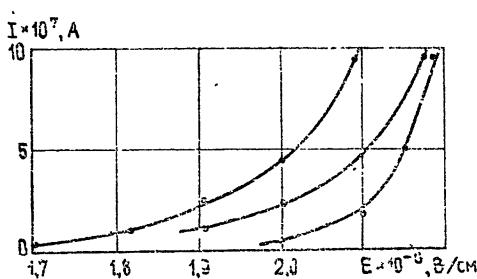


Рис. 4.

го первого пробоя производилась обработка электродов сильноточным тлеющим разрядом в аргоне, которая поднимала электрическую прочность промежутка до ее начального высокого значения. Таким образом, был проведен ряд «первых» пробоев промежутка непосредственно по-

ле обработки электродов тлеющим разрядом и последующей откачки инертного газа. Производилось осциллографирование напряжений и токов при этих пробоях, что позволяло определить электрические поля в промежутке непосредственно перед пробоем, а также характер изменения тока в промежутке при рассматриваемых условиях.

При пробоях промежутка были получены осциллограммы, показанные на рис. 5. Наиболее часто характер изменения тока соответствовал осциллограмме 5а. Промежутки $0,05\text{--}0,07\text{ мм}$ пробивались при электрическом поле в диапазоне $(5,5 \div 7) \cdot 10^6 \text{ В/см}$. Стадия постепенного нарастания тока перед пробоем не была обнаружена, далее ток возрастал очень резко. Длительность импульса тока составляла $1 \div 5,5 \text{ мкс}$, далее, несмотря на то, что напряжение на промежутке было еще достаточно велико, ток прекращался. На рис. 5б показан случай повторного пробоя при поле $7 \cdot 10^6 \text{ В/см}$, столь же высоком, как и при первом пробое, длительность импульса тока в обоих случаях около 1 мкс . При протекании сильного тока падение напряжения на промежутке составляет несколько кВ.

Второй случай показан на осциллограмме 5в. Полный пробой возникает при поле $5,5 \cdot 10^6 \text{ В/см}$ с запаздыванием относительно максимума напряжения в 6 мкс , и характер изменения тока здесь иной. Вначале, как и в предыдущем случае, ток резко увеличивается при определенном спаде напряжения на промежутке, эта часть процесса носит нестационарный характер. Далее ток на время $3\text{--}4 \text{ мкс}$ устанавливается на уровне $0,2 \text{ А}$, после чего за время около 1 мкс скачком возрастает до $0,4 \text{ А}$ и затем монотонно уменьшается в соответствии с изменением напряжения.

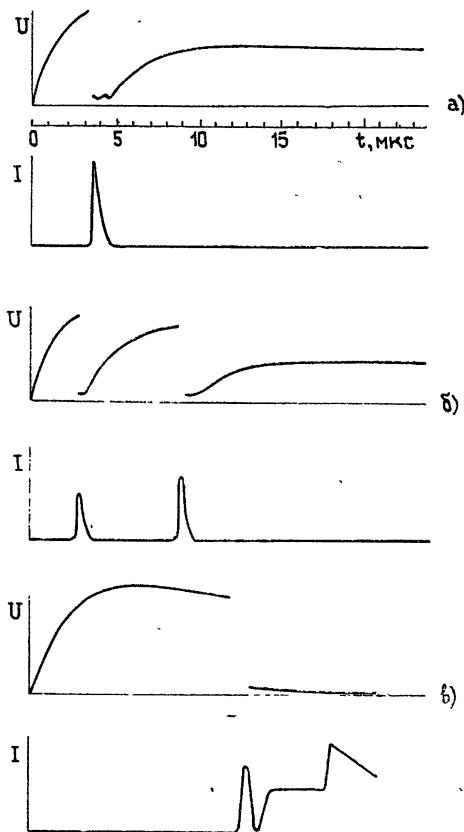


Рис. 5.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате полного цикла вакуумной обработки экспериментального прибора, включающего общий его прогрев до 450°C , электронную и ионную обработку электродов с одновременным контролем их поверхности по экзоэлектронной эмиссии, был получен вакуумный промежуток, имеющий очень высокую электрическую прочность, а именно, ток автоэлектронной эмиссии в 1 мкА для промежутка в $0,1 \text{ мм}$ возникал при электрическом поле в $(2 \div 3) \cdot 10^6 \text{ В/см}$, а полный электрический пробой промежутка происходил при очень высоком электрическом поле в $(5 \div 7) \cdot 10^6 \text{ В/см}$.

В то время как нагрев электронной бомбардировкой приводит в основном к обезгаживанию и очистке электродов, ионная обработка

сильноточным тлеющим разрядом в инертном газе (аргоне), как это уже отмечалось в работах [^{1,2}], дает еще более эффективную очистку поверхностей электродов от пленок неметаллического характера, удаляет микронеровности, возникающие при предшествующей механической обработке поверхностей, а также слой металла, который недостаточно сильно связан с кристаллической решеткой электрода. В работе [⁵] было отмечено также, что при одновременной обработке тлеющим разрядом электрически объединенные электроды представляют собой частичную полость, и при этих условиях возникает разряд с полым катодом.

В настоящих опытах при обработке электродов сильноточным тлеющим разрядом также возникал разряд с полым катодом. В самом деле, при начальном давлении аргона $p = 3 \text{ Тор}$ и расстоянии между электродами $d = 0,3 \text{ см}$, начальная величина pd составляет $0,9 \text{ см} \cdot \text{Тор}$, что уже отвечает условиям разряда с полым катодом. В дальнейшем при токе обработки в $0,1 \text{ А}$ температура электродов увеличивается до 900°C и плотность газа в промежутке понижается приблизительно в 4 раза; при этих условиях возникает типичный сильноточный тлеющий разряд с полым катодом. Как показали результаты работы [⁶], в этом случае электроды бомбардируются ионами, энергии которых близки к полной величине катодного падения U_k и составляют в нашем случае около 400 эВ . В работе [⁵] было высказано предположение, что интенсивная ионная обработка, сопровождающаяся внедрением ионов Ar в кристаллическую решетку металла, приводит к упрочнению поверхностного слоя электродов.

Прямые опыты, проведенные нами при аналогичных условиях обработки электродов тлеющим разрядом в аргоне, подтвердили это предположение*. Таким образом, воздействие сильноточного тлеющего разряда в аргоне сводится не только к очистке и сглаживанию поверхностей, но также и к их упрочнению. Все эти три фактора приводят к увеличению электрической прочности вакуумного промежутка.

Полный пробой вакуумного промежутка происходит при весьма высоком среднем электрическом поле в $(5 \div 7) \cdot 10^6 \text{ В/см}$. Характер изменения тока, показанный на осциллограмме рис. 5а, свидетельствует о том, что этот кратковременный пробой в малом промежутке вызван, вернее всего, взрывом одиночного выступа. При этом происходит вся совокупность процессов, характерных для взрывной эмиссии [^{7,8}]. После того, как на электродах собрались все возникшие электроны и ионы, ток прекратился и на промежутке восстановилось высокое напряжение. Падение напряжения при протекании тока, как это отмечено выше, составляло $3\text{--}4 \text{ кВ}$, и, таким образом, возникший сильноточный разряд следует отнести к импульсному высоковольтному разряду. В случае, показанном на рис. 5б, взрыв произошел также и со вторым выступом. В обоих случаях длительность импульса тока составляет около 1 мкс .

Для случая, показанного на осциллограмме 5в, при значительном запаздывании после кратковременного импульса тока, вызванного также вернее всего взрывом выступа, возник почти стационарный разряд, сопровождающийся одним дополнительным скачком тока. Разряд подобного типа мог быть связан с образованием микроскопической полости в катоде, получившейся после первого взрыва выступа. Устойчивость подобного разряда с полым катодом достаточно высока даже в условиях глубокого вакуума. Скачок тока связан с формированием микродуги в этой полости. В дальнейшем, как показано на рис. 5в, по мере понижения напряжения импульса снижается и ток возникшей дуги.

* Результаты будут опубликованы в отдельной статье.

ИТОГИ

1) После электронной и ионной обработки электродов, сопровождающейся контролем их поверхности по экзоэлектронной (послеразрядной) эмиссии получаются промежутки, обладающие очень высокой электрической прочностью. Так, полный пробой промежутка величиной около 0,1 мм возникает при электрическом поле в $(5 \div 7) \cdot 10^6$ В/см.

2) Осциллограммы тока и напряжения показывают, что возникший пробой в большинстве случаев является весьма кратковременным, при этом не возникает устойчивая дуга, и, вернее всего, это явление вызывается взрывом микроскопического выступа в результате его нагрева током при предшествующей пробою стадии протекания термоавтоэлектронной эмиссии. При взрыве возникает импульс тока электронов из образовавшейся при этом микроскопической плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Н. Чистяков, Н. В. Татаринова, ЖТФ, 35, 1333 (1965); Физическая электроника, сб. МИФИ, 3, 51 (1966).
2. П. Н. Чистяков, А. Л. Радионовский, Н. В. Татаринова, Н. Е. Новиков, Д. С. Трещикова, ЖТФ, 39, 1075 (1969), 42, 821 (1972).
3. Н. В. Татаринова, П. Н. Чистяков, Изв. АН СССР, серия физическая, 24, № 6, 635 (1960).
4. П. Н. Чистяков, Н. В. Татаринова, Радиотехника и электроника, 8, № 7, 1246 (1963).
5. П. Н. Чистяков, Н. П. Дубинин, Труды VII Международного симпозиума по разрядам и электрической изоляции в вакууме, Новосибирск, 1976, стр. 463.
6. Ю. Н. Настич, Л. Ю. Абрамович, ЖТФ, 42, 1024 (1972).
7. С. П. Бугаев, Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, УФН, 115, № 1, 101 (1975).
8. Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, Е. Б. Янкелевич, Труды VII Международного симпозиума по разрядам и электрической изоляции в вакууме, Новосибирск, 1976, стр. 55.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
10 ноября 1978 г.

BREAKDOWN OF VACUUM IN THE ELECTRIC FIELD IN THE RANGE $(5 \div 7) \cdot 10^6$ V/cm

P. N. Chistyakov, N. P. Dubinin

An oscillographic investigation is carried out of an electric breakdown of a vacuum space the electrodes of which are affected by electronic processing in vacuum and further, by ion processing in a strong-current glow discharge with the hollow cathode in inert gas (argon). The breakdown of the space of 0.1 mm occurs in a very high electric field in the range $(5 \div 7) \cdot 10^6$ V/cm. In most cases no stable vacuum arc did occur at the first breakdown followed directly the ion processing. A short impulse of a strong current of 1÷55 mks duration occurs which should be attributed to the burst of microscopic protrusion on the cathode accompanied by electron emission from the plasma developed.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

B. Я. Давыдовский

У заряженной частицы в поле плоской циркулярно-поляризованной волны, описываемой векторным потенциалом A ,

$$A = A(\psi), \quad \psi = \omega(t - nz), \quad A_z = 0, \quad |A| = \text{const}, \quad (1)$$

сохраняются обобщенный поперечный импульс

$$\mathbf{p}_\perp + \mathbf{A} = \mathbf{C} = \text{const} \quad (2)$$

и величина Y [1-3]:

$$Y = n\gamma - p_z. \quad (3)$$

(Здесь и ниже длины и скорости разделены на скорость света в вакууме c , полная релятивистская энергия частицы γ — на mc^2 , импульс \mathbf{p} — на mc , потенциал A — на $\bar{m}c^2/e$, m и e — масса покоя и заряд электрона.)

Точные интегралы движения (2) и (3) полностью описывают движение электрона в поле (1) [4]. Это обстоятельство позволяет вычислить среднюю по ансамблю скорость электронов $\langle u \rangle$, входящую в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \omega_0^2 \langle u \rangle, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad (4)$$

если среда бесстолкновительна и известна функция распределения электронов $F(C, Y)$ по интегралам движения. В (4) учтено, что $N = \text{const}$, поскольку циркулярно-поляризованная волна не возмущает концентрацию электронов. Изотропное по C распределение электронов

$$F(C, Y) = F(C^2, Y) \quad (5)$$

является достаточным условием отсутствия составляющей тока вдоль электрического поля волны

$$\langle u \rangle_E = \int C_E F(C^2, Y) dC dY / \gamma = 0, \quad (6)$$

поскольку энергия γ четна по C_E :

$$\gamma = [nY + \text{sign}(nu_z - 1) \sqrt{Y^2 - (C^2 + A^2 - 2CA A + 1)(n^2 - 1)}]/(n^2 - 1), \quad (7)$$

а интегрирование по C_E выполняется в (6) в симметричных относительно $C_E = 0$ пределах. Полагая $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2$, получим дисперсионное соотношение, связывающее показатель преломления n с амплитудой A [5]:

$$n^2 \equiv \frac{k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 A} \int \frac{C_A - A}{\gamma} F(C^2, Y) dC dY. \quad (8)$$

Для холодной плазмы, когда

$$C = 0, \quad Y = n, \quad (9)$$

из (8) следует известный результат, полученный Ахиезером и Половиным в 1956 г. [6].

В линейном по A приближении уравнение (8) принимает вид

$$n^2 - 1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left[\int \frac{C_A^2 F dC dY}{\gamma^3 (1 - nu_z)} - \int \frac{F dC dY}{\gamma} \right] = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} f(n), \quad (10)$$

где для стационарной волны первый интеграл в квадратных скобках следует вычислять в смысле главного значения. Если в плазме присутствует продольный электронный пучок, то в зависимости от его скорости и плотности могут представаться различные ситуации, схематически изображенные на рис. 1.

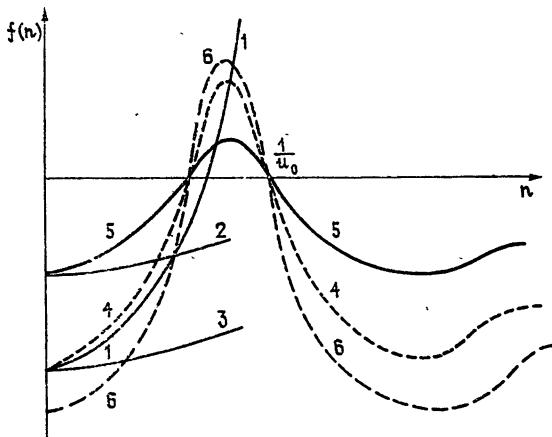


Рис. 1.

Если пучок отсутствует, то функция $f(n)$ остается отрицательной (кривая 3). При $\omega > \omega_0$ уравнение (10) имеет одно решение при $n < 1$, которое соответствует обычным волнам и на графике изображается точкой пересечения функции $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} f(n)$ (кривая 2) с кривой $n^2 - 1$ (кривая 1). При наличии пучка $f(n)$ терпит разрыв в точке $n = 1/u_0$, где u_0 — продольная скорость пучка, но если учесть разброс электронов пучка по скоростям, функция вновь становится непрерывной. Если плотность электронов в пучке достаточно велика, то в некоторой области $f(n) > 0$ (кривая 4), а $f(n)\omega_0^2/\omega^2$ может пересекать кривую $n^2 - 1$ при $n > 1$ (кривая 5), что соответствует замедленным поперечным волнам.

Более того, при наличии пучка возможны поперечные волны с $\omega < \omega_0$ (кривая 6). В этом случае могут существовать две ветви волн (две точки пересечения кривых 6 и 1) и фазовая скорость на них может быть меньше c .

В принципе, учитывая своеобразный ход функции $f(n)$ при наличии пучка (два экстремума), возможно существование трех ветвей решения уравнения (10).

Автор благодарен В. Г. Сапогину за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. А. Гилинский, ДАН СССР, 143, 1055 (1960).
- 2 А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, 1252 (1962).
- 3 В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, 886 (1962).
- 4 В. Я. Давыдовский, Е. М. Якушев, ЖЭТФ, 52, 1068 (1967).
- 5 В. Я. Давыдовский, Физика плазмы, 4, 184 (1978)..
- 6 А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ, 30, 915 (1956).

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
20 сентября 1977 г.,
после переработки
27 марта 1979 г.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ПОЛОСКОВОГО РЕЗОНАТОРА

B. B. Никольский, T. B. Пугачева

Полосковые резонаторы, выполняемые в виде плоских металлических элементов, которые наносят на диэлектрическую подложку (с обратной стороны экранированную), представляют интерес при построении «интегральных схем» СВЧ. Удобным методом анализа полосковых резонаторов является численное исследование, базирующееся на интегральных уравнениях импедансного или адmittансного типа [1]. Ниже рассматривается построение и обсуждаются результаты реализации проекционного алгоритма для импедансного интегрального уравнения, моделирующего экранированный полосковый резонатор (рис 1):

$$\int_{S_M} G^{p_0}(r, r') \eta(r') ds' = 0, \quad (1)$$

где

$$G^{p_0}(r, r') = \sum_{p=1}^{p_0} \left(\frac{1}{Z_{p(1)}} + \frac{1}{Z_{p(2)}} \right)^{-1} e_p(r) \circ e_p^*(r'). \quad (2)$$

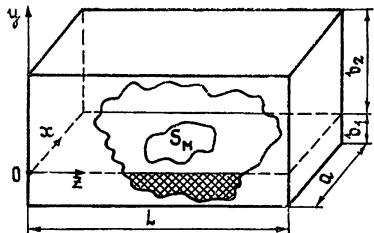


Рис. 1.

Здесь η — неизвестная плотность тока на плоском проводнике S_M . В представлении ядра (2) e_p — векторные «мембранные» функции прямоугольной области $0 < z < L$, $0 < x < a$ (рис 1), совпадающей с границей сред, кружок \circ — символ диадного произведения, $Z_{p(1,2)}$ — парциальные импедансы нижней (подложка) и верхней (воздух) объемных областей, соответствующие стоячим волнам в них, которые имеют поперечные распределения электрического поля вида e_p .

Функции e_p являются потенциальными ($p = p_E$, поперечные поля E -волн) или соленоидальными ($p = p_H$, поперечные поля H -волн), таким образом, в (2) $p_0 = p_0^E + p_0^H$, где име-

ется в виду сумма, дающая количество функций обоих классов. Последние нормированы.

при $p = p_H$

$$e_p = \frac{2}{\sqrt{La}} \frac{1}{\chi_p} \operatorname{grad} \sin \frac{m\pi z}{L} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (m, n = 1, 2, \dots), \quad (3a)$$

при $p = p_E$

$$e_p = \frac{2}{\sqrt{La(1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{n0})}} \frac{1}{\chi_p} \operatorname{rot} y_0 \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad (m, n = (0), 1, 2, \dots), \quad (3b)$$

нуль в скобках означает, что в сочетаниях mn он может фигурировать только вместе с другим числом, отличным от нуля. Номер p понимается как пара чисел (m, n) . В (3)

$$\chi_p = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \quad (4)$$

Импедансы выражаются следующим образом:

$$Z_{p(1,2)} = Z_{p(1,2)}^{E, H} = iW_{p(1,2)}^{E, H} \operatorname{tg} \beta_{p(1,2)} b_{1,2}. \quad (5)$$

Здесь

$$W_{p(1,2)}^E = \frac{\beta_{p(1,2)}}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{1,2}} \quad \text{и} \quad W^H = \frac{\omega \mu_0 \mu_{1,2}}{\beta_{p(1,2)}} \quad (6)$$

— волновые сопротивления соответствующих типов волн и

$$\beta_{p(1,2)} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \chi_p^2} \quad (7)$$

(ω — неизвестная собственная круговая частота резонатора, а c — скорость света).

Проекционный алгоритм для однородного интегрального уравнения использует представление плотности тока в виде

$$\eta^{q_0} = \sum_{q=1}^{q_0} c_q \vartheta_q. \quad (8)$$

Область S_M берется в виде прямоугольника, стороны которого параллельны осям z и x ; они равны l и d соответственно. В этом случае

$$\vartheta_q = [y_0, e_q^\vee], \quad (9)$$

где e_q — функции, определяемые так же, как и e_p (3) с заменой $L \rightarrow l$, $a \rightarrow d$ и $z \rightarrow z - z_0$, $x \rightarrow x - x_0$, где z_0 , x_0 — координаты какой-либо вершины угла прямоугольника S_M .

Применение проекционной схемы типа метода Бубнова — Галеркина с базисом $\{\vartheta_q\}$ приводит от интегрального уравнения (1) к следующей однородной системе алгебраических уравнений:

$$P \tilde{Z} \tilde{P} c = 0, \quad (10)$$

где c — вектор, составленный из коэффициентов представления (8), и далее

$$P_{kn} = \int_{S_M} \vartheta_k^* e_n ds, \quad (11)$$

$$\tilde{P}_{kn} = P_{nk}^*, \quad Z_{kn} = \delta_{kn} \left(\frac{1}{Z_{n(1)}} + \frac{1}{Z_{n(2)}} \right)^{-1}$$

— элементы матриц, входящих в (10).

Для определения собственных частот полоскового резонатора решается характеристическое уравнение относительно ω , получаемое при обращении в нуль определителя системы (10).

При реализации алгоритма использовались базисы $\{\vartheta_q\}$ из одной (A), трех (B), восьми (C) и пятнадцати функций (D) следующего состава:

- A) $H_{10};$
- B) $H_{10}, H_{12}, E_{12};$
- C) $H_{10}, H_{12}, E_{12}, H_{30}, H_{32}, E_{32}, H_{14}, E_{14};$
- D) $H_{10}, H_{12}, E_{12}, H_{30}, H_{32}, E_{32}, H_{14}, E_{14}, H_{50}, H_{52}, E_{52}, H_{34}, E_{34}, H_{16}, E_{16}$

Соответственно этим базисам в ядре интегрального уравнения сохранялось m_0 гармоник по оси z и n_0 — по оси x согласно следующей таблице.

В последней графе указано полное число членов в разложении (2); в дальнейшем при реализации алгоритма лишние члены в (2) (ортогональные решения) не отбрасывались

На рис. 2 показано, как изменяется относительная резонансная длина полоски (пропорциональная низшей собственной частоте) в зависимости от диэлектрической проницаемости подложки. Вычисления производились с базисами A и B . Как видно, уже в первом порядке (базис A) результаты практически удовлетворительны. Это подтверждает следующая таблица внутренней сходимости, где для двух точек ($\epsilon = 2,5$ и $\epsilon = 9$) приведены данные, полученные также с высшими базисами.

Как видно, сходимость немонотонна, при этом расхождение результатов, полученных в первом порядке (A) и пятнадцатом (D), составляет 0,7%.

На рис. 3 приведены результаты, иллюстрирующие влияние степени аппроксимации ядра при заданном базисе. Взят базис B , в котором числа гармоник по осям z и x

Вариант	m_0	n_0	p_0
A	3	14	101
B	6	14	188
C	12	28	712
D	20	40	1660

составляют $m_M = 1$ и $n_M = 2$ (максимальные значения индексов), а общее число базисных функций есть $q_0 = 3$. Как видно, более критичен выбор числа гармоник вдоль оси z . При $m_0/m_M = 2$ выполняется приближенное равенство с соответствующим отношением размеров $L/l = 4/1,9$, тем не менее, ошибка резко возрастает, но уже при $m_0/m_M = 4$ можно говорить о насыщении. Что касается числа гармоник вдоль оси x , то оно должно быть относительно большим, так как большее отношение соответствующих размеров $a/d = 3,5$. Однако отклонение от требования $n_0/n_M > a/d$ ($n_0/n_M \gg a/d$)

приводит к меньшим ошибкам. Описанные закономерности понятны. В главном они повторяют особенности алгоритмов этого рода, отмеченные в [1]. Надо также учесть, что анализируемый тип колебаний резонатора формируется при «полуволновом» распределении тока вдоль полоски (ось z) и перезонансном — в поперечном направлении (ось x). Этим и объясняется различие в критичности условия правильной относительной аппроксимации ядра.

Вариант	при $\epsilon = 2,5$	при $\epsilon = 9$
A	0,287181	0,162573
B	0,284499	0,161169
C	0,284920	0,161876
D		0,161499

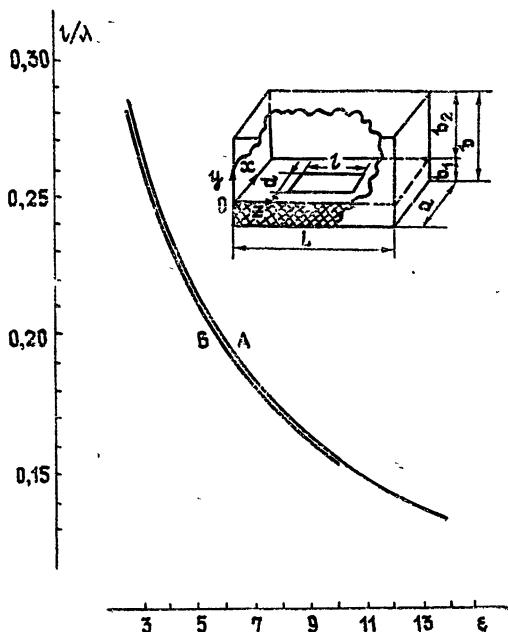


Рис. 2.

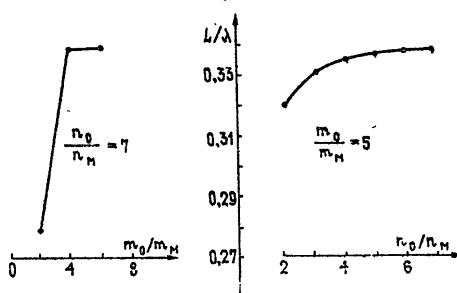


Рис. 3.

На рис. 4 приведены результаты, показывающие влияние продольного размера экрана на резонансную длину полоски (т. е. влияние удаления концов полоски от экрана).

на) Все размеры экрана кроме длины L , ширина полоски и толщина подложки в этом примере те же, что и ранее (рис. 2). Вычисления были произведены при $\epsilon = 2,5$ и $\epsilon = 9$. Использовался базис B .

Из рис. 4 видно, что значительное влияние оказывается экраном, когда он находится от конца полоски на расстоянии менее 10% ее длины. С удалением экрана наступает насыщение, более полное при большей диэлектрической проницаемости подложки.

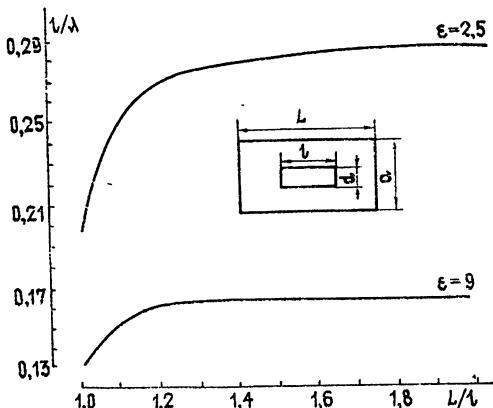


Рис. 4.

В заключение отметим, что полученные результаты показывают работоспособность построенного алгоритма и, в частности, быструю внутреннюю сходимость. Полученные результаты демонстрируют укорочение резонансной длины открытой полоски по сравнению с полуволновым отрезком регулярной линии (для рассмотренного случая при $\epsilon = 9$ это укорочение составляет около 15%).¹ Показано быстрое уменьшение влияния экрана при его расширении. Таким образом, алгоритм может быть использован для моделирования как открытых, так и экранированных полосковых резонаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 22, вып. 4, 657 (1977).
2. Е. И. Нефедов, А. Т. Фиалковский, Радиотехника и электроника, 24, вып. 3, 547 (1979).

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
15 сентября 1978 г.

¹ Отметим, однако, что на более высоких частотах, когда реакция края имеет не емкостный, как обычно, а индуктивный характер, возможно не укорочение, а удлинение резонатора [2].