УДК 538.56 : 519.25

О ФОРМЕ СПЕКТРА КОЛЕБАНИЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МАНИПУЛЯЦИЕЙ НЕСУЩЕЙ

А. А. Дубков, А. А. Мальцев

В [1] изучались спектры колебаний со случайной фазовой манипуляцией (ФМ). В настоящей заметке проводится спектральный анализ другого важного класса информативных сообщений — частотно-манипулированных (ЧМ) сигналов.

1. Рассмотрим колебание вида

$$x(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \int\limits_0^t \xi(u)\, du + \varphi\right),$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с $\langle\xi\rangle = 0$, а φ — не зависящая от $\xi(t)$ случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$. Согласно [1], корреляционная функция такого сигнала равна

$$K_x[\tau] \equiv \langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle = \frac{A_0^2}{2} \operatorname{Re}\left\{ e^{j\omega_0\tau} \left\langle \exp\left(j \int\limits_0^\tau \xi(u)\, du\right)\right\rangle\right\} \quad (\tau \geqslant 0). \tag{1}$$

С помощью (1) легко определить и спектральную плотность мощности исходного ЧМ колебания*:

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{ \int\limits_0^\infty e^{-j\Omega\tau} \left\langle \exp\left(j\int\limits_0^\tau \xi(u)\, du\right)\right\rangle d\tau\right\}. \tag{2}$$

В соответствии с (1), (2), задача отыскания спектрально-корреляционных характеристик ЧМ сигнала сводится к вычислению функционального среднего:

$$I(\tau) = \left\langle \exp\left(j\int\limits_0^\tau \xi(u)\, du\right)\right\rangle. \tag{3}$$

В литературе [2, 3] достаточно полно изучен вопрос о поведении спектральной плотности мощности ЧМ колебания лишь в случае гауссовых флуктуаций $\xi(t)$. В настоящей работе анализируется вид спектра сигнала, у которого модуляция частоты осуществляется случайным телеграфным процессом (частотная манипуляция).

2. Предположим, что $\xi(t)$ представляет собой процесс, скачком меняющий в случайные моменты времени свои значения ξ_l (так называемый обобщенный телеграфный процесс). При этом считаем все ξ_l статистически независимыми и одинаково распределенными с плотностью вероятности $W(\xi_l)$, а статистику перескоков — пуассоновской:

$$P_n(\tau) = \frac{(\nu\tau)^n}{n!} e^{-\nu\tau},$$

где $P_n(\tau)$ — вероятность того, что в интервале длительностью τ произойдет n скачков, ν — средняя частота перескоков (среднее число перескоков в единицу времени $\nu = \langle n\rangle/\tau$).

Подобным образом определенный телеграфный сигнал является, как известно [1, 4], марковским, и для отыскания среднего (3) удобно воспользоваться производящей функцией моментов интеграла от $\xi(t)$, найденной в [5]. В результате несложных вычислений для функции

$$\tilde{I}(p) = \int\limits_0^\infty I(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau$$

получаем следующее выражение**:

---

* Здесь, как обычно [2], рассматривается физическая (определенная только для положительных частот) спектральная плотность мощности с отсчетом от несущей частоты ω_0.

** Заметим, что формулу (4) можно получить и другим способом. Для этого нужно решить с помощью преобразования Лапласа приведенное в [4] интегральное уравнение для среднего (3).

$$\tilde{I}(p) = \frac{k(p)}{1 - \nu k(p)}, \tag{4}$$

где

$$k(p) = \left\langle \frac{1}{p + \nu - j\xi} \right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(\xi)\, d\xi}{p + \nu - j\xi}.$$

Подставляя (4) в (2) и положив при этом $p = j\Omega$, находим спектральную плотность мощности $G_x(\Omega)$ исходного ЧМ колебания:

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \operatorname{Re}\left\{ \left\langle \frac{1}{\nu + j(\Omega - \xi)} \right\rangle^{-1} - \nu \right\}^{-1}. \tag{5}$$

Формула (5) при известном распределении $W(\xi)$ и является точным решением поставленной задачи.

3. Рассмотрим некоторые предельные случаи. Так, при $\nu \to 0$ входящее в (5) среднее вычисляется по формуле Сохоцкого

$$\lim_{\nu \to 0} \left\langle \frac{1}{\nu + j(\Omega - \xi)} \right\rangle = j \lim_{\nu \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(\xi)\, d\xi}{\xi - \Omega + j\nu} =$$

$$= \pi W(\Omega) + j \left(\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(\xi)\, d\xi}{\xi - \Omega} \right)$$

(v. p. означает, что интеграл берется в смысле главного значения), и мы приходим к известной [2] формуле для спектральной плотности колебания со сколь угодно медленными флуктуациями частоты:

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2} W(\Omega). \tag{6}$$

В случае $\langle \xi^2 \rangle \ll \nu^2 + \Omega^2$, когда справедливо приближенное представление

$$\left\langle \frac{1}{\nu + j(\Omega - \xi)} \right\rangle \approx \frac{1}{\nu + j\Omega} \left[1 - \frac{\langle \xi^2 \rangle}{(\nu + j\Omega)^2} \right],$$

имеем

$$G_x(\Omega) \approx \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{\nu \langle \xi^2 \rangle (\nu^2 + \Omega^2)}{[\nu^2 \langle \xi^2 \rangle^2 + \nu^2 \Omega^2 (\nu^2 - 4 \langle \xi^2 \rangle) + 2\nu^2 \Omega^4 + \Omega^6]}. \tag{7}$$

Для перехода к δ-коррелированным (предельно быстрым) флуктуациям $\xi(t)$ следует устремить в (7) ν и $\langle \xi^2 \rangle$ к ∞, сохраняя постоянным отношение $D = 2\langle \xi^2 \rangle / \nu$. В результате этой процедуры получаем известную лоренцеву форму спектральной линии (сравни с [2, 3]):

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{D/2}{(D/2)^2 + \Omega^2}. \tag{8}$$

В то же время из (7) можно извлечь информацию и о поведении спектра ЧМ колебания при $\Omega \to \infty$:

$$G_x(\Omega) \approx \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{\nu \langle \xi^2 \rangle}{\Omega^4}. \tag{9}$$

Следовательно, при любом вероятностном распределении $W(\xi)$ с $\langle \xi^2 \rangle \neq \infty$ и конечном $\nu (\nu \neq 0)$ «крылья» спектральной плотности частотно-манипулированного сигнала спадают как Ω^{-4}.

Как известно [1, 4], спектральная плотность мощности частотных флуктуаций $\xi(t)$ в данном случае равна

$$S_\xi(\Omega) = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\pi} \frac{\nu}{\nu^2 + \Omega^2}. \tag{10}$$

Сопоставление (9) и (10) показывает, что, как и следовало ожидать [2, 3],

$$G_x(\Omega) \approx \frac{A_0^2}{2} \frac{S_\xi(\Omega)}{\Omega^2} \qquad \text{при} \qquad \Omega \to \infty.$$

4. Проанализируем подробнее тот практически важный частный случай, когда модуляция частоты осуществляется марковским двоичным сигналом, принимающим с равной вероятностью значения $\pm\Omega_0$. Положив в (5)

$$W(\xi) = \frac{1}{2}\left[\delta(\xi - \Omega_0) + \delta(\xi + \Omega_0)\right],$$

найдем

$$G_x(\Omega) = \frac{A_0^2}{2\pi} \frac{\nu\Omega_0^2}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \nu^2\Omega^2}. \tag{11}$$

Соотношение (11), как и (5), является точным и справедливо при любых значениях частоты манипуляции

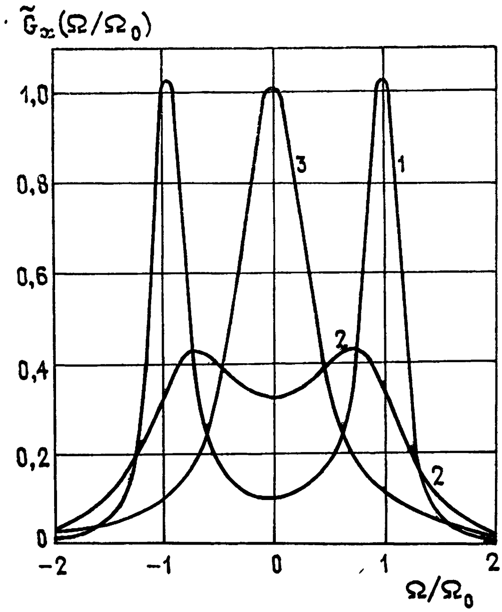

Рис 1

На рис. 1 представлена форма нормированного спектра ЧМ колебания $\tilde{G}_x(\Omega/\Omega_0) = 2\Omega_0 G_x(\Omega)/A_0^2$ при разных значениях индекса модуляции $m = \pi S_\xi(0)/\nu = \Omega_0^2/\nu^2$ [2] (кривой *1* соответствует $m = 10$, кривой *2* — $m = 1$, кривой *3* — $m = 0{,}1$). Как видно из рис. 1, при относительно редких перескоках $m \gg 1$ спектральная плотность мощности ЧМ сигнала представляет собой два узких пика (ширины $\sim 1/\sqrt{m}$), расположенных вблизи частот $\Omega/\Omega_0 = \pm 1$ (кривая *1*), т. е. повторяет вероятностное распределение флуктуаций $\xi(t)$ (см. (6)). По мере увеличения ν (уменьшения индекса модуляции m) два максимума сближаются (кривая *2*), а затем сливаются в один. Наконец, при $\nu \to \infty$ ($m \ll 1$, см. кривую *3*) спектр ЧМ колебания вырождается в узкий пик, имеющий форму лоренцевой кривой (8) с параметром $D = 2\Omega_0^2/\nu$, и широкий пьедестал (ширины $\sim 1/\sqrt{m}$).

Аналогичным образом, используя (5), можно было бы найти спектр сигнала с двойной частотной телеграфией и т. д. Не останавливаясь на этом подробно, заметим лишь, что, как следует из (5), спектральная плотность мощности частотно-манипулированных колебаний с дискретным распределением значений $W(\xi)$ всегда является дробно-рациональной функцией частоты Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.
2. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
3. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1. Случайные процессы, изд. 2-е, изд. Наука, М., 1976.
4. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
5. А. А. Дубков, А. А. Мальцев, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 1, 107 (1979).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 20 июля 1978 г

УДК 621 396 67

О ВОЗМОЖНОСТИ АБСОЛЮТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ РАССЕЯНИЯ И УСИЛЕНИЯ АНТЕННЫ ПО ИЗЛУЧЕНИЮ «ЧЕРНОГО» ДИСКА В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ БЕЗ ФОКУСИРОВКИ АНТЕННЫ

Ю. И. Белов, Н. В. Векслер, Л. Р. Семенова, А. Л. Фогель

Измерения коэффициента рассеяния β и усиления антенны G методом «черного» диска требуют либо размещения диска в дальней зоне антенны, либо возможности фокусировать антенну на диск, расположенный в ближней зоне (см., например, [1]). Подобные условия часто бывают невыполнимы или неудобны практически. В то же время фазометрический метод [2] позволяет определить эти характеристики путем использования совокупности результатов измерения по «черному» диску, расположенному в ближней зоне, но без фокусировки антенны, и измерения амплитудно-фазового распределения (АФР) поля монохроматического сигнала на поверхности, совпадающей с поверхностью диска. Как известно, β_{Ω_l} и G определяются соотношениями

$$1 - \beta_{\Omega_l} = \frac{\int\limits_{\Omega_1} F_\text{д}\, d\,\Omega}{\int\limits_{4\pi} F_\text{д} d\,\Omega}\,; \tag{1}$$

$$G = \eta D = \frac{4\pi\eta\, F_\text{д}(\theta,\, \varphi)}{\int\limits_{4\pi} F_\text{д}\, d\,\Omega}, \tag{2}$$

где D — КНД, η — КПД антенны, $F_\text{д}$ — диаграмма направленности по мощности. Наиболее затруднительным для определения β_{Ω_l} и G является вычисление нормировочного множителя $\int\limits_{4\pi} F_\text{д}\, d\,\Omega$. Суть предлагаемого ниже метода измерения интегральных характеристик состоит в следующем. Из теории фазометрического метода измерения диаграммы антенны по АФР ближнего поля следует связь полей ближней зоны $f_\text{б}$ и дальней зоны антенны $f_\text{д}$ в общем виде: $f_\text{д} = \int\limits_S \hat{\Gamma} f_\text{б}\, dS$, где $\hat{\Gamma}$ — тензор Грина для данной задачи. Следовательно, при соответствующих углах $\Omega_\text{д}$ и $\Omega_\text{б}$ в дальней и ближней зонах антенны можно всегда считать выполнимым равенство $\int\limits_{\Omega_\text{д}} F_\text{д}\, d\,\Omega = \int\limits_{\Omega_\text{б}} F_\text{б} d\,\Omega$ ($F_\text{б}$ — угловое распределение мощности в ближней зоне), и в определении (1) коэффициента рассеяния вне некоторого угла $\Omega_\text{д}$ нормировочный интеграл представляется как

$$\int\limits_{4\pi} F_\text{д}\, d\,\Omega = \frac{\int\limits_{\Omega_\text{д}} F_\text{д} d\,\Omega}{1 - \beta_{\Omega_\text{д}}} = \frac{\int\limits_{\Omega_\text{б}} F_\text{б}\, d\Omega}{(1 - \beta_{\Omega_\text{б}})_\text{изм}}, \tag{3}$$