ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1979

УДК 535 36

ПРОВОДЯЩИЙ ЭЛЛИПСОИД В НИЗКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. Л. Левин, Р. З. Муратов

Методом разложения полей по степеням волнового числа построено приближенное решение задачи о проводящем эллипсоиде в низкочастотном поле Для наводимых в теле электрического и магнитного моментов получены аналитические выражения первого и второго приближений, из которых следует, что для электрического момента параметром разложения является отношение частоты к проводимости, а для магнитного момента — квадрат отношения размера тела к толщине скин-слоя. В качестве примера рассмотрена пондеромоторная сила, действующая на эллипсоид в поле плоской волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитый Стивенсоном [1, 2] приближенный метод решения задач низкочастотной дифракции опирается на разложение полей в ряды по степеням волнового числа $k=\omega/c$ и приводит в случае диэлектрических тел к появлению малого параметра теории L/λ, где L — характерный размер тела, λ — длина волны. Для поля снаружи тела этот параметр сохраняется и при формальном предельном переходе $\mu=0$, $\varepsilon=\infty$, которому в согласии с общей теорией [3] соответствует идеальный проводник. По-видимому, с этим связано убеждение в безоговорочной эффективности метода Стивенсона и в случае проводящих тел (см., например, [4–7]), у которых комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'-i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{1}$$

велика по модулю по сравнению с единицей.

На самом деле в последнем случае теория содержит два параметра разложения: ω/σ и L^2/δ^2, где δ — классическая толщина скин-слоя. Поэтому метод Стивенсона эффективен лишь при $L\ll\delta$ и отказывает при $L\gtrsim\delta$. Только когда $\delta\ll L$, мы снова можем получить надежный результат, беря в качестве нулевого приближения решение для идеально проводящего тела и находя к нему поправку стандартным методом возмущений (приближение сильного скин-эффекта).

В работах [4–7] метод Стивенсона применялся к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме. Для рассматриваемой здесь задачи о проводящем эллипсоиде удобнее исходить из интегральных уравнений макроскопической электродинамики (см. [8] и [9]), записав их в форме, получающейся при одновременном использовании и вектор-потенциала, и скалярного потенциала. Пусть в первичное поле в вакууме $\boldsymbol{E}^e$, $\boldsymbol{H}^e$ (зависимость от времени $e^{i\omega t}$) внесено однородное проводящее тело с $\varepsilon(\omega)$ и $\mu=1$. Если $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ — полное поле внутри тела, то комплексной поляризации $\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\boldsymbol{E}$ соответствуют поверхностный заряд (свободный и связанный) с плотностью P_n и объемный ток (проводимости и поляризационный) с плотностью $i\omega \boldsymbol{P}$. Поэтому вторичное поле, создаваемое поляризацией $\boldsymbol{P}$, описывается потенциалами

$$\boldsymbol{A}_p = ik \int G\boldsymbol{P}dV, \qquad \Phi_p = \oint G\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{S}.$$

Здесь $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе тела, а $G = e^{-ikR}/R$ — функция Грина свободного пространства. Подставляя теперь выражения для полей

$$\boldsymbol{E}_p = -\nabla \Phi_p - ik\boldsymbol{A}_p, \qquad \boldsymbol{H}_p = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_p$$

в очевидные соотношения $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^e + \boldsymbol{E}_p$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^e + \boldsymbol{H}_p$ и заменяя в них $\boldsymbol{P}$ на $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E}$, мы и получаем интегральные уравнения электродинамики

$$\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right)\left(\operatorname{grad} \oint G\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{S} - k^2 \int G\boldsymbol{E}dV\right) = -ik\frac{4\pi}{\varkappa}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^e); \tag{2}$$

$$\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right)\operatorname{rot}\int G\boldsymbol{E}dV = \frac{4\pi}{\varkappa}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^e), \tag{3}$$

где введены обозначения

$$\frac{4\pi\sigma}{c} = \varkappa, \qquad \varepsilon' - 1 = \tau, \tag{4}$$

так что для $\varepsilon(\omega)$, даваемой формулой (1),

$$\varepsilon - 1 = -i\frac{\varkappa}{k}\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right). \tag{5}$$

Применяя оператор rot к уравнению (2), получаем

$$\operatorname{rot}\left\{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^e + i\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right)\frac{k\varkappa}{4\pi}\int G\boldsymbol{E}dV\right\} = 0. \tag{6}$$

Так как $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -ik\boldsymbol{H}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}^e = -ik\boldsymbol{H}^e$, то (6) эквивалентно уравнению (3), которое, таким образом, есть следствие (2) и дифференциальных уравнений Максвелла.

2. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Разложим все величины в ряды по степеням $(-ik)$:

$$F = F_0 + (-ik)F_1 + (-ik)^2F_2 + \ldots$$

В частности, для функции Грина свободного пространства

$$G_0 = \frac{1}{R}, \qquad G_1 = 1, \ \ldots \tag{7}$$

Так как тело однородно, то во всех приближениях $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_m = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{E}_m^e = 0$. Кроме того, в нулевом приближении первичное поле потенциально: $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0^e = 0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_0^e = 0$, и за исключением особых случаев типа интерференционных узлов

$$\boldsymbol{E}_0^e = \boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{H}_0^e = \boldsymbol{h}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$ — постоянные векторы.

Из уравнений (2), (3) сразу следует очевидный результат: в нулевом приближении (статика!) внутри проводящего тела

$$E_0 = 0, \qquad H_0 = H_0^e. \tag{9}$$

С учетом (9) уравнение (2) для поля первого приближения принимает вид

$$\nabla \oint G_0 E_1 \, dS = -\frac{4\pi}{\varkappa} E_0^e. \tag{10}$$

Представляя E_1 в виде суммы потенциального и чисто соленоидального полей:

$$E_1 = E_1' + E_1'', \qquad \operatorname{div} E_1' = \operatorname{div} E_1'' = 0,$$

$$E_1' = -\nabla\Phi_1, \qquad E_1''\cdot n = 0 \quad \text{на} \quad S,$$

будем иметь

$$\nabla \oint \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \frac{dS}{R} = \frac{4\pi}{\varkappa} E_0^e = -\frac{4\pi}{\varkappa} \nabla\Phi_0^e,$$

где Φ_0^e — потенциал нулевого приближения первичного поля. Таким образом, с точностью до константы

$$\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \frac{dS}{R} = -\frac{1}{\varkappa} \Phi_0^e. \tag{11}$$

Это уравнение определяет потенциальную часть поля. Для соленоидальной части уравнение (6) дает

$$E_1'' = E_1^e - \nabla f_1, \qquad \operatorname{div} E_1'' = 0, \qquad E_1''\cdot n = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{12}$$

т. е. приводит к краевой задаче

$$\Delta f_1 = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial n} = E_1^e \cdot n \quad \text{на} \quad S.$$

Если поле $E_1 = E_1' + E_1''$ найдено, то согласно (3)

$$H_1 = H_1^e + \frac{\varkappa}{4\pi} \operatorname{rot} \int E_1 \frac{dV}{R}. \tag{13}$$

Приравнивая в уравнении (2) члены порядка k^2, получаем

$$\nabla \oint \left(G_0 E_2 + G_1 E_1 - \frac{\tau}{\varkappa} G_0 E_1 \right) dS = -\frac{4\pi}{\varkappa} (E_1^e - E_1).$$

Так как G_1 не зависит от координат точки наблюдения, то с учетом (10) это уравнение принимает вид

$$\nabla \oint G_0 E_2 \, dS = -\frac{4\pi}{\varkappa} \left(E_1^e - E_1 + \frac{\tau}{\varkappa} E_0^e \right). \tag{14}$$

Разбивая опять E_2 на потенциальное $E_2' = -\nabla\Phi_2$ и чисто соленоидальное E_2'' поля, мы получаем из (14) с точностью до постоянной

$$\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \frac{dS}{R} = \frac{1}{\varkappa} \left(\Phi_1 + f_1 - \frac{\tau}{\varkappa} \Phi_0^e \right). \tag{15}$$

Для соленоидального же поля E_2'' имеем из (6)

$$E_2'' = E_2^e + \frac{\varkappa}{4\pi}\int E_1 \frac{dV}{R} - \nabla f_2,$$
$$\operatorname{div} E_2'' = 0, \qquad E_2''\cdot n = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{16}$$

Если E_2 найдено, то согласно (3) и (13)

$$H_2 = H_2^e + \frac{\varkappa}{4\pi}\operatorname{rot}\int E_2 \frac{dV}{R} + \frac{\tau}{\varkappa}(H_1^e - H_1). \tag{17}$$

3. ПРОВОДЯЩИЙ ЭЛЛИПСОИД

Для тел эллипсоидальной формы решение уравнений вида (11) или (15) дано в работе [10]. Пусть декартова система координат ориентирована по осям эллипсоида, центр которого совпадает с началом координат. Если a, b, c — полуоси эллипсоида, то при $\Phi_0^e = -(er)$ решение уравнения (11) имеет вид $\Phi_1 = -(E_1' r)$.

Однородное поле E_1' в нашем случае равно

$$E_{1x}' = -\frac{e_x}{\varkappa M_a}, \tag{18}$$

где M_a, M_b, M_c — факторы деполяризации эллипсоида. Здесь и дальше мы всякий раз, когда нам встретятся три выражения, получающиеся друг из друга циклической заменой, будем выписывать только одно из них. Так как $\operatorname{rot} E_1^e = h$, то решение краевой задачи (12) (см., например, [11]) есть

$$E_{1x}'' = a^2\left(\frac{z}{c^2+a^2}h_y - \frac{y}{a^2+b^2}h_z\right). \tag{19}$$

Заметим, что полю первого приближения $-ikE_1$ соответствуют джоулевы потери

$$Q = \frac{1}{2}k^2\sigma V\left(\frac{1}{\varkappa^2}\left\langle\frac{e_x^2}{M_a^2}\right\rangle + \frac{1}{5}\left\langle\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}h_x^2\right\rangle\right), \tag{20}$$

где V — объем эллипсоида, а ломаные скобки обозначают сумму трех членов циклической перестановки.

Электрический и магнитный моменты тела

$$p = \int P\,dV, \qquad m = \frac{ik}{2}\int [rP]\,dV,$$

вычисленные по полю первого приближения, описываются формулами

$$p_z = \frac{V}{4\pi}\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right)\frac{e_z}{M_c},$$
$$m_z = -i\frac{V}{20\pi}k\varkappa\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 + i\tau\frac{k}{\varkappa}\right)h_z, \tag{21}$$

причем, очевидно, p обусловлен полем E_1', а m — полем E_1''.

В уравнении 2-го приближения (15) Φ_1 и Φ_0^e — линейные формы координат, а f_1 — квадратичная. Поэтому решение (15) есть сумма линейной и квадратичной форм $\Phi_2 = \Phi^{\mathrm{I}} + \Phi^{\mathrm{II}}$, где

$$\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial \Phi^{\mathrm{I}}}{\partial n}\,\frac{dS}{R} = \frac{1}{\varkappa}\left(\Phi_1 - \frac{\tau}{\varkappa}\,\Phi_0^e\right), \qquad \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial \Phi^{\mathrm{II}}}{\partial n}\,\frac{dS}{R} = \frac{1}{\varkappa} f_1 .$$

Из первого уравнения сразу имеем

$$\Phi^{\mathrm{I}} = -(\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{r}), \qquad E_x^{\mathrm{I}} = -\frac{e_x}{\varkappa^2 M_a}\left(\frac{1}{M_a} + \tau\right), \tag{22}$$

а второе уравнение при

$$f_1 = \frac{1}{2}\langle A_a x^2 \rangle + \langle B_c xy \rangle \tag{23}$$

дает (см. [10])

$$\Phi^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\langle \alpha_a x^2 \rangle + \langle \beta_c xy \rangle\right), \tag{24}$$

где

$$\beta_c = \frac{B_c}{(a^2 + b^2) M_{110}}, \tag{25}$$

а α_a, α_b, α_c удовлетворяют системе уравнений

$$a^2 M_{200}\,\alpha_a + b^2 M_{110}\,\alpha_b + c^2 M_{101}\,\alpha_c = A_a . \tag{26}$$

Здесь M_{lmn} — потенциальные факторы эллипсоида (см. [12]), являющиеся линейными комбинациями обычных факторов деполяризации.

Однородному полю $\boldsymbol{E}^{\mathrm{I}}$ соответствует (мы удерживаем лишь член порядка k) добавок к дипольному электрическому моменту

$$p_z^{\mathrm{I}} = -i\,\frac{k}{\varkappa}\,\frac{V}{4\pi}\left(\frac{1}{M_c} + \tau\right)\frac{e_z}{M_c} .$$

Прибавляя это выражение к (21), будем иметь

$$p_z = \frac{V}{4\pi}\left(1 - i\frac{k}{\varkappa}\,\frac{1}{M_c}\right)\frac{e_z}{M_c}, \tag{27}$$

так что в «двучленном» приближении $\boldsymbol{p}$ не зависит от значения величины $\tau = \varepsilon' - 1$. Заметим, что в работе [4] поле внутри тела описывается квазистационарным уравнением $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \boldsymbol{E}$. Поэтому в приведенных в [4] решениях для шара и полого цилиндра удержание поправочных членов порядка $k/\varkappa$ является превышением точности.

Поле $\boldsymbol{E}^{\mathrm{II}} = -\nabla\Phi^{\mathrm{II}}$ есть линейная функция координат. Оно не вносит вклад в электрический дипольный момент, но дает добавок к магнитному моменту

$$m_z^{\mathrm{II}} = k^2 \beta_c \frac{V}{40\pi}(a^2 - b^2), \tag{28}$$

исчезающий при вырождении эллипсоида в шар. Кроме того, это поле приводит к появлению квадрупольного электрического момента

$$D_{ij} = \int [3(P_i x_j + P_j x_i) - 2(\boldsymbol{P}\boldsymbol{r})\,\delta_{ij}]\,dV$$

с компонентами

$$D_{zz} = -ik\frac{V}{10\pi}(2c^2\alpha_c - a^2\alpha_a - b^2\alpha_b),$$
$$D_{xy} = -ik\frac{3V}{20\pi}(a^2 + b^2)\beta_c. \tag{29}$$

Здесь, как и при вычислении p^{I}, удержаны лишь члены порядка k.

Соленоидальное поле E_2'' удовлетворяет уравнениям (16), которые можно переписать в виде

$$j_2'' = \sigma(\vec{\mathscr{E}}_2 - \nabla f_2). \qquad \operatorname{div} j_2'' = 0, \qquad j_{2n}'' = 0,$$
$$\vec{\mathscr{E}}_2 = E_2^e + \frac{\varkappa}{4\pi}E_1'\int\frac{dV}{R} + \frac{\varkappa}{4\pi}\int E_1''\frac{dV}{R}, \tag{30}$$

где мы пренебрегли поляризационным током, имеющим в этом приближении порядок k^3. Уравнения (30) есть обычные уравнения для стационарных токов в массивном проводнике, возбуждаемых заданным сторонним полем $\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_2$. Здесь мы не будем выписывать довольно громоздкое решение этой краевой задачи, а ограничимся вычислением создаваемого токами j_2'' магнитного дипольного момента. Его можно найти и не зная распределения токов j_2'', если воспользоваться теоремой взаимности для стационарных токов

$$\int \vec{\mathscr{E}} j_2'' dV = \int \vec{\mathscr{E}}_2 j\, dV, \tag{31}$$

где j — плотность тока, возбуждаемого в том же теле некоторым сторонним полем $\vec{\mathscr{E}}$.

В качестве этого другого стороннего поля возьмем $\vec{\mathscr{E}}$ с компонентами

$$\mathscr{E}_x = -y, \qquad \mathscr{E}_y = x, \qquad \mathscr{E}_z = 0.$$

Тогда левая часть (31) перейдет в $\int (x j_{2y}'' - y j_{2x}'')\,dV$, т. е. в выражение, определяющее m_{2z}''. Заметим теперь, что распределение стационарного тока в массивном проводнике зависит, очевидно, не от самого стороннего поля $\vec{\mathscr{E}}$, а от $\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}}$. В нашем случае $\operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}} = 2z_0$ и, следовательно, $j = \sigma E$, где поле E описывается формулами (19), если в них положить $h_x = h_y = 0$, $h_z = 2$. Таким образом,

$$j_x = -2\sigma\frac{a^2}{a^2+b^2}y, \qquad j_y = 2\sigma\frac{b^2}{a^2+b^2}x, \qquad j_z = 0$$

и

$$m_{2z}'' = \frac{\varkappa}{4\pi(a^2+b^2)}\int (b^2 x\mathscr{E}_{2y} - a^2 y\mathscr{E}_{2x})\,dV. \tag{32}$$

Первые два члена в выражении (30) для $\vec{\mathscr{E}}_2$ являются квадратичными функциями координат. Поэтому они не внесут вклада в m_{2z}'', и при вычислении (32) вместо $\vec{\mathscr{E}}_2$ можно писать один третий член:

$$\vec{\mathscr{E}}_2'' = \frac{\varkappa}{4\pi}\int E_1''\frac{dV}{R}.$$

Подставляя сюда выражения (19) и пользуясь формулами [12]

$$\int x \frac{dV}{R} = 2\pi a^2 x \left(M_{100} - \frac{1}{3} M_{200} x^2 - M_{110} y^2 - M_{101} z^2 \right),$$

будем иметь

$$m''_{2z} = \frac{\varkappa^2}{4\pi} \frac{a^4 b^4}{(a^2+b^2)^2} \frac{V}{70} h_z [7(M_{100} + M_{010}) -$$
$$- (a^2 M_{200} + b^2 M_{110} + c^2 M_{101}) - (a^2 M_{110} + b^2 M_{020} + c^2 M_{011})].$$

Из рекуррентных формул [12] для потенциальных факторов следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $4(1 - M_c)$, так что окончательно

$$m''_{2z} = \frac{\varkappa^2}{70\pi} \frac{a^4 b^4}{(a^2+b^2)^2} (1 - M_c) V h_z. \tag{33}$$

Итак, собирая вместе полученные результаты, имеем

$$p = p_0 - ik p_1, \qquad m = -ik m_1 - k^2 m_2, \tag{34}$$

где

$$p_{0z} = \frac{V}{4\pi} \frac{e_z}{M_c}, \qquad p_{1z} = \frac{V}{4\pi\varkappa} \frac{e_z}{M_c^2}, \tag{35}$$

и

$$m_{1z} = \frac{\varkappa V}{20\pi} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} h_z, \qquad m_{2z} = m''_{2z} + m^{\tau}_{2z} + m'_{2z},$$
$$m^{\tau}_{2z} = -\frac{V\tau}{20\pi} \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} h_z, \qquad m'_{2z} = -\frac{V}{40\pi M_{110}} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} B_c. \tag{36}$$

Здесь m''_{2z} обусловлен соленоидальными токами второго приближения (формула (33)), m^{τ}_{2z} — поляризационными токами (второй член в (21)), а m'_{2z} — потенциальным полем E^{II}. Приведенное выражение для m'_{2z} есть следствие (28) и (25). Наконец, компоненты тензора квадрупольного момента (29) $\hat{D} = -ik\hat{D}_1$ можно после решения системы (26) представить в виде

$$D_{1xy} = \frac{3V}{20\pi M_{110}} B_c,$$

$$D_{1zz} = \frac{V}{10\pi\Delta} [3c^2 A_c - \langle c^2 A_c \rangle - \langle a^2 b^2 \rangle (3M_{110} A_c - \langle M_{110} A_c \rangle)], \tag{37}$$

$$\Delta = 1 - \langle (a^2 + b^2) M_{110} \rangle + \langle a^2 b^2 \rangle \langle M_{011} M_{101} \rangle.$$

Из формул (35) сразу видно, что параметром разложения электрического дипольного момента является отношение $\frac{k}{\varkappa} = \frac{\omega}{4\pi\sigma}$. Так как $k\varkappa = \frac{2}{\delta^2}$ (δ — толщина скин-слоя), то, согласно (33)—(36),

$$\frac{m}{p} \sim \frac{L^2}{\delta^2}, \qquad \frac{k m''_2}{m_1} \sim \frac{L^2}{\delta^2}$$

и такой же порядок имеет отношение соленоидальных полей (вихревых токов) второго и первого приближений. С другой стороны, из (18) и (19) следует, что уже в первом приближении $E_1''/E_1' \sim \varkappa L$, а согласно (33) и (36) отношение первого члена m_2'' к двум последующим m_2^τ и m_2' по порядку величины равно $(\varkappa L)^2$. Для металлов $\varkappa \sim 10^8$ *см*$^{-1}$, для человеческого тела [6] $\varkappa \approx 2$ *см*$^{-1}$. Поэтому обычно $\varkappa L \gg 1$ и внутри проводящего тела доминирующую роль играют вихревые поля, для которых параметр малости теории есть L^2/δ^2.

В работах [6, 7] исследовалось поглощение мощного электромагнитного излучения в биологических объектах, которые при теоретическом анализе моделировались эллипсоидом. Расчет поглощения проводился по формулам первого приближения, являющимся частными случаями (20). Для крупных объектов приведенные в [6, 7] теоретические данные, по-видимому, не имеют смысла, так как, скажем, для человека на частоте 25 *МГц* глубина скин-слоя $\delta \approx 15$ *см* и, следовательно, второе приближение отнюдь не мало по сравнению с первым.

4. ЭЛЛИПСОИД В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Пусть теперь внешнее поле есть плоская волна

$$\boldsymbol{E}^e = \boldsymbol{e}\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{H}^e = \boldsymbol{h}\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{r}},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор и $\boldsymbol{e} = -[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{h}]$, $\boldsymbol{h} = [\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{e}]$. Для этого поля $\boldsymbol{E}_1^e = (\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}$ и из (12) и (19) следует, что коэффициенты квадратичной формы (23) имеют вид

$$A_a = \nu_x e_x, \qquad B_c = \frac{a^2 \nu_x e_y + b^2 \nu_y e_x}{a^2 + b^2}. \tag{38}$$

В поле плоской волны на тело действует усредненная пондеромоторная сила

$$\boldsymbol{F} = w(S_{\text{расс}} + S_{\text{погл}})\,\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Pi}. \tag{39}$$

Здесь $w = h^2/8\pi$ — плотность энергии волны, $S_{\text{расс}}$ и $S_{\text{погл}}$ — эффективные поперечники рассеяния и поглощения, $\boldsymbol{\Pi}$ — поток импульса, уносимый рассеянным полем. В случае малого тела (см. [13] и [14])

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{k^4}{3}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{p}\boldsymbol{m}^*] + \frac{k^5}{30}\,\mathrm{Im}\,(\hat{D}\boldsymbol{p}^*) + \ldots \tag{40}$$

Для проводящего эллипсоида при $\delta \gg L$ из (20) следует

$$S_{\text{погл}} = \frac{k^2 \varkappa V}{h^2}\left(\frac{1}{\varkappa^2}\left\langle \frac{e_x^2}{M_a^2} \right\rangle + \frac{1}{5}\left\langle \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}\, h_x^2 \right\rangle\right). \tag{41}$$

Так как главный член рассеянного поля есть излучение диполя $\boldsymbol{p}_0$, то, согласно (35),

$$S_{\text{расс}} = \frac{k^4 V^2}{6\pi h^2}\left\langle \frac{e_x^2}{M_a^2} \right\rangle \tag{42}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{\text{расс}}}{S_{\text{погл}}} < \frac{1}{6\pi} k^2 \varkappa V = \frac{2}{3}\,\frac{V}{\lambda\,\delta^2} \ll 1.$$

Подстановка (34) и (37) в (40) дает

$$-\boldsymbol{\Pi} = \frac{k^6}{3}\left\{[\boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{m}_2] - [\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{m}_1] + \frac{1}{10}\,\hat{D}_1 \boldsymbol{p}_0\right\}. \tag{43}$$

Если $\varkappa L \leqslant 1$, то в этом выражении надо учитывать все члены, при $\varkappa L \gg 1$ можно оставить только главный член

$$-\mathbf{\Pi} \approx \frac{k^6}{3}\,[\boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{m}_2''] . \tag{44}$$

В нашем случае величина П мала по сравнению с первым слагаемым в формуле (39): их отношение имеет порядок $k^3 V \frac{L^2}{\delta^2}$. Однако именно $\mathbf{\Pi}$ приводит к появлению боковой силы, перпендикулярной направлению распространения волны. Эта боковая сила $\boldsymbol{F}_{\text{бок}}$ исчезает лишь при совпадении направления $\boldsymbol{\nu}$ с одной из осей эллипсоида.

Для сравнения рассмотрим идеально проводящий эллипсоид с теми же геометрическими характеристиками. В первом приближении падающая волна наводит в нем тот же электрический момент $\boldsymbol{p}_0$ и магнитный момент $\boldsymbol{m}_0$:

$$m_{0z} = -\frac{V}{4\pi}\,\frac{h_z}{1-M_c} .$$

В этом случае

$$S_{\text{погл}} = 0,$$

$$S_{\text{расс}} = \frac{k^4 V^2}{6\pi h^2}\left(\left\langle \frac{e_x^2}{M_a^2} \right\rangle + \left\langle \frac{h_x^2}{(1-M_a)^2} \right\rangle\right),$$

а

$$\mathbf{\Pi} = \frac{k^4}{3}\,[\boldsymbol{p}_0 \boldsymbol{m}_0] ,$$

так что оба члена в (39) имеют одинаковый порядок, и $\mathbf{\Pi}$ вносит существенный вклад и в лобовую силу. Отмечая относящиеся к идеально проводящему эллипсоиду величины значком $\sim$, будем, очевидно, иметь

$$F_{\text{лоб}} \gg \widetilde{F}_{\text{лоб}} \sim \widetilde{F}_{\text{бок}} \gg F_{\text{бок}} .$$

В заключение сделаем одно замечание общего характера. В теории рассеяния на малых телах последние обычно описываются комплексными тензорами электрической и магнитной поляризуемости, определяемыми из решения квазистационарных задач о теле в однородном внешнем поле. При $\delta \gg L$ для проводящего эллипсоида эти тензоры, согласно (33)—(36), имеют вид

$$\alpha_z^{\text{э}} = \frac{V}{4\pi M_c}\left(1 - \frac{i}{M_c}\,\frac{k}{\varkappa}\right),$$

$$\alpha_z^{\text{м}} = -\frac{V}{10\pi}\,\frac{a^2 b^2}{\delta^2 (a^2+b^2)}\left[\frac{4a^2b^2}{7\,\delta^2 (a^2+b^2)}\,(1-M_c) - \tau\,\frac{k}{\varkappa} + i\right].$$

Однако при таком описании вещественная часть $\alpha^{\text{м}}$ не включает магнитного момента $\boldsymbol{m}_2'$. Так как $\boldsymbol{e} = [\boldsymbol{h}\boldsymbol{\nu}]$, то выражение (38) можно переписать в форме

$$B_c = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \nu_y^2\right) h_z + \nu_y \nu_z h_y ,$$

и, следовательно, $\boldsymbol{m}_2'$ зависит не только от вектора $\boldsymbol{h}$, но и от направления распространения волны, то есть имеет место эффект пространственной дисперсии, которым можно пренебречь при $\varkappa L \gg 1$. Как уже отмечалось, для шара всегда $m_2' = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Stevenson, J. Appl. Phys., **24**, 1134 (1953).
2. A. F. Stevenson, J. Appl. Phys, **24**, 1143 (1953).
3. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, изд. АН СССР, М—Л, 1948.
4. J. G Van Bladel, IRE Trans., **AP-10**, 625 (1962).
5. J. G Van Bladel, Electromagnetic fields, McGraw-Hill, N Y, 1964.
6. H Massoudi, C. H. Durney and C. C Johnson, IEEE Trans., **MTT-25**, 41 (1977).
7. H. Massoudi, C. H. Durney and C. C. Johnson, IEEE Trans., **MTT-25**, 47 (1977).
8. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд Наука, М, 1970
9. Н. А. Хижняк, ЖТФ, **28**, 1592 (1958).
10. М. Л. Левин, Р. З. Муратов, ЖТФ, **47**, 2464 (1977).
11. М Л Левин, Р З Муратов, ЖТФ, **38**, 1623 (1968)
12. Р З. Муратов, Потенциалы эллипсоида, Атомиздат, М., 1976
13. В. И. Векслер и др, в сб. Труды международной конференции по ускорителям (Дубна, 1963), Атомиздат, М., 1964, стр. 1017.
14. М. Л. Левин, Р. З Муратов, ЖТФ, **39**, 1712 (1969)

Поступила в редакцию
16 мая 1978 г.

A CONDUCTING ELLIPSOID IN THE LOW-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC FIELD

M. L. Levin, R. Z. Muratov

An approximate solution of the problem on a conducting ellipsoid in the low-frequency field is built by the method of the field expansion into the wave number powers. Analytic expressions of the first and the second approximations have been obtained for the electric and magnetic moments induced in the body. It follows from them that for the electric moment the expansion parameter is the ratio of the frequency to the conductivity and for the magnetic moment — the second power of the ratio of the body dimension to the depth of the skin-layer As an example the ponderomotive power acting on the ellipsoid in a plane wave field is considered.