ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1979

УДК 538.56 : 519.25

К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. КУМУЛЯНТНЫЙ ПОДХОД

С. Н. Молодцов

Методом кумулянтного анализа получено приближенное выражение для ковариационной функции интенсивности световой волны, хорошо описывающее поведение спектра интенсивности в области сильных мерцаний и переходящее в известные асимптотические результаты в области слабых флуктуаций интенсивности и в режиме насыщенных мерцаний.

1. Нахождению корреляционной функции и спектра интенсивности световых пучков в случайно-неоднородных средах посвящено множество работ (см., например, [1–5, 7, 8]). В большинстве из них численно решается уравнение для четвертого момента комплексной амплитуды поля. Все же до сих пор известные аналитические результаты для корреляционной функции интенсивности ограничены либо областью слабых флуктуаций интенсивности, либо областью, близкой к режиму насыщения. Так, в работе [1] получено приближенное выражение для корреляционной функции интенсивности, близкое к решению уравнения переноса в приближении однократного рассеяния и, следовательно, справедливое лишь в области слабых флуктуаций интенсивности. В работах [2, 3] получены асимптотические формулы для ковариационной функции интенсивности волны в области насыщенных мерцаний.

В данной работе на основе кумулянтного анализа найдено приближенное выражение для ковариационной функции интенсивности световой волны, хорошо описывающее поведение спектра интенсивности в области сильных мерцаний и переходящее в известные асимптотические результаты в области слабых флуктуаций интенсивности (МПВ) и в режиме насыщенных мерцаний [2, 3].

2. Пусть на полупространство $x > 0$, заполненное средой с крупномасштабными случайными неоднородностями, падает плоская световая волна единичной амплитуды. Поведение комплексной амплитуды волны в такой среде описывается параболическим уравнением квазиоптики:

$$2ik\frac{\partial E}{\partial x} + \Delta_{\perp} E + k^2 \varepsilon(x, \rho) E = 0, \qquad E(0, \rho) = 1. \tag{1}$$

Будем, как обычно, считать флуктуации диэлектрической проницаемости среды гауссовыми с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1)\, \varepsilon(x_1 + x, \rho_1 + \rho) \rangle = A[\rho]\, \delta(x).$$

Используя методику получения уравнений для кумулянтных функций случайного поля, заданного стохастическим дифференциальным уравнением [6], для кумулянтной функции $E(x, \rho)$: $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) \equiv \left\langle E\left(x, \rho+\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right) E^*\left(x, \rho-\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right) E^*\left(x, \rho+\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right) E\left(x, \rho+\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right)\right\rangle - \left\langle E\left(x, \rho+\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right) E^*\left(x, \rho-\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right)\right\rangle \left\langle E^*\left(x, \rho+\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right) E\left(x, \rho+\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{u}}{2}\right)\right\rangle \equiv$ $\equiv \Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) - \Gamma_2^2(x, \boldsymbol{u})$ из (1) получаем уравнение, аналогичное уравнению для четвертого момента поля $E(x, \rho)$ [5]. Переходя далее к уравнению для фурье-преобразования по поперечной координате $\boldsymbol{r}$ от $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$:

$$S(x, \varkappa, \boldsymbol{u}) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})\, e^{-i\varkappa \boldsymbol{r}}\, d^2\boldsymbol{r},$$

решая его методом характеристик и положив $\boldsymbol{u}=0$, получим следующее интегральное уравнение для спектральной плотности мощности флуктуаций интенсивности световой волны [1, 2]:

$$S_I(x, \varkappa) = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\omega \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\boldsymbol{r} \left\{ S_\varepsilon(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega\varkappa}{2k}\xi\right) \times \right. \tag{2}$$

$$\left. \times \exp\left[-i(\varkappa-\omega)\boldsymbol{r} - \frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right] d\eta\right] \Gamma_4\left(x-\xi, \boldsymbol{r}, -\frac{\varkappa}{k}\xi\right)\right\},$$

где

$$D[\boldsymbol{u}] \equiv A - A[\boldsymbol{u}], \qquad A \equiv A[0],$$

$$S_\varepsilon(\varkappa) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A[\boldsymbol{r}]\, e^{-i\varkappa \boldsymbol{r}}\, d^2\boldsymbol{r}.$$

Входящая в (2) функция $\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ является функционалом от $S(x, \varkappa, \boldsymbol{u})$:

$$\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) = B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) + \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[\boldsymbol{u}]\, x\right) =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x, \varkappa, \boldsymbol{u})\, e^{i\varkappa \boldsymbol{r}}\, d^2\varkappa + \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[\boldsymbol{u}]\, x\right).$$

Положив в (2) $\Gamma_4(x-\xi, \boldsymbol{r}, -(\varkappa/k)\xi) = \Gamma_4|_{x=0} = 1$, имеем приближенное выражение для спектра мерцаний, полученное в работе [1]. Очевидно, что найденная таким образом формула для $S_I(x, \varkappa)$ справедлива лишь в области слабых флуктуаций интенсивности. Если же для $\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ в (2) воспользоваться равенством [2, 8]

$$\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) = \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[\boldsymbol{r}]\, x\right) + \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[\boldsymbol{u}]\, x\right),$$

то формула (2) даст нам правильную асимптотику $S_I(x, \varkappa)$ в области, близкой к режиму насыщения [2].

3. Найдем, используя методику кумулянтного анализа, развитую в работах Малахова [6], приближенное выражение для ковариационной функции интенсивности световой волны.

Рассмотрим сначала гауссово приближение по совместным связям комплексного поля $E(x, \rho)$ с гауссовым полем диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(x, \rho)$ [6]. Это приближение эквивалентно прямому размыканию для функции $\Gamma_4(x, r, u)$, стоящей в правой части (2):

$$\Gamma_4(x, r, u) = \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[u]\, x\right). \tag{3}$$

Подобное приближение, которое в литературе иногда называется «среднеинтенсивным», часто используется при статистическом анализе случайных смещений и флуктуаций размеров световых пучков в турбулентной атмосфере (см., например, [11, 12]). Интерес к рассмотрению этого приближения при исследовании статистики флуктуаций интенсивности связан, в частности, с тем, что применение подобной процедуры для нахождения функции когерентности второго порядка поля приводит к точному значению для средней интенсивности $\langle I(x, \rho)\rangle = 1$. Подставляя (3) в (2) и совершая обратное фурье-преобразование, в гауссовом приближении по совместным связям полей $E(x, \rho)$ и $\varepsilon(x, \rho)$ получаем следующее выражение для ковариационной функции интенсивности:

$$B_I(x, \rho) = k^2 \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2\varkappa \left\{ S_\varepsilon(\varkappa) \sin^2\left(\frac{\varkappa^2}{2k}\xi\right) \exp\left(i\varkappa\rho - \frac{k^2}{2} D\left[\frac{\varkappa}{k}\xi\right](x-\xi) - \frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right] d\eta\right)\right\}. \tag{4}$$

Заметим, что несмотря на приближенность этой формулы она правильно описывает некоторые известные статистические закономерности распространения световых волн. В частности, из (4) следует известный точный инвариант:

$$S_I(x, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} B_I(x, \rho)\, d^2\rho = 0.$$

Для модели среды в виде случайных клиньев [7] со структурной функцией $D[\rho]$ вида

$$D[\rho] = D\rho^2 \qquad \left(D \equiv -\frac{1}{4}\Delta_\perp A[\rho]\Big|_{\rho=0}\right)$$

из (4) получаем закономерный для световой волны результат $B_I(x, \rho) = 0$, который объясняется отсутствием эффектов случайной фокусировки и расфокусировки волны в рассматриваемой модели среды.

Обсудим вопрос о корректности приближения, основанного на гипотезе гауссовости совместных связей полей $E(x, \rho)$ и $\varepsilon(x, \rho)$.

В области слабых мерцаний, ограничиваясь в (4) первым членом разложения в ряд экспоненты, получаем для $B_I(x, \rho)$ формулу метода плавных возмущений [4]:

$$B_1(x, \rho) = k^2 \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 \varkappa \left\{ S_\varepsilon(\varkappa) \sin^2\left(\frac{\varkappa^2}{2k}\xi\right) e^{i\varkappa\rho} \right\}. \qquad (5)$$

Как показывает сравнение (4) с соответствующим результатом работы [2], формула (4) неправильно описывает поведение ковариационной функции интенсивности в области, близкой к режиму насыщения. Это связано, очевидно, с негауссовым характером статистической связи полей $\varepsilon(x, \rho)$ и $E(x, \rho)$ в области сильных флуктуаций интенсивности волны.

4. Чтобы учесть влияние негауссовости совместных связей $\varepsilon(x, \rho)$ и $E(x, \rho)$ на ковариационную функцию интенсивности, рассмотрим следующее кумулянтное приближение по совместным связям ε и E, асимметричное [6]. В этом приближении, пренебрегая кумулянтными функциями комплексного поля четвертого и третьего порядков по сравнению с ковариационными связями $E(x, \rho)$, для $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ получаем

$$B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u}) \approx \exp\left(-\frac{k^2}{2} D[\boldsymbol{r}]\, x\right) - \exp\left(-\frac{k^2}{2} A\, x\right). \qquad (6)$$

Заметим, что представление $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ в форме (6) характерно для области сильных флуктуаций интенсивности волны. Действительно, в области сильных мерцаний кумулянтами поля $E(x, \rho)$ вида $\varkappa_{1,1}^{E,E} \equiv \langle (E(x, \rho) - \langle E(x, \rho)\rangle)^2 \rangle$ и $\varkappa_{1,1}^{E^*,E^*} \equiv \langle (E^*(x, \rho) - \langle E^*(x, \rho)\rangle)^2 \rangle$ можно пренебречь по сравнению с $\varkappa_{1,1}^{E,E^*} \equiv \langle (E(x, \rho) - \langle E(x, \rho)\rangle) \times (E^*(x, \rho) - \langle E^*(x, \rho)\rangle)\rangle$, поскольку за счет сильных фазовых флуктуаций $\varkappa_{1,1}^{E,E}$ и $\varkappa_{1,1}^{E^*,E^*}$ спадают с ростом x значительно быстрее, чем $\varkappa_{1,1}^{E,E^*}$ [2, 4]. По той же причине можно пренебречь кумулянтами третьего порядка поля $E(x, \rho)$ $\varkappa_{2,1}^{E,E^*}$ и $\varkappa_{1,2}^{E,E^*}$ в области сильных флуктуаций амплитуды волны [2, 4], так что коэффициент асимметрии [6] в этой области $\gamma_3 \equiv \varkappa_3^{E,E^*} (\varkappa_{1,1}^{E,E^*})^{-3/2} \ll 1$. Покажем малость коэффициента эксцесса [6] $\gamma_4 \equiv \varkappa_{2,2}^{E,E^*} (\varkappa_{1,1}^{E,E^*})^{-2}$ в области сильных флуктуаций интенсивности. Используя связь моментов и кумулянтов распределения (см., например, [6]), в силу малости коэффициентов γ_3, $\varkappa_{1,1}^{E,E} (\varkappa_{1,1}^{E,E^*})^{-1}$ и $\varkappa_{1,1}^{E^*,E^*} (\varkappa_{1,1}^{E,E^*})^{-1}$ в области сильных мерцаний для четвертого кумулянта комплексной амплитуды $\varkappa_{2,2}^{E,E^*}$ находим

$$\varkappa_{2,2}^{E,E^*} \approx \sigma_I^2(x) - 1.$$

Как известно (см., например, [5]), дисперсия интенсивности σ_I^2 световой волны в области сильных флуктуаций амплитуды насыщается на уровне единицы, и, следовательно, коэффициент эксцесса поля мал в области, близкой к режиму насыщения:

$$\gamma_4 \equiv \varkappa_{2,2}^{E,E^*} (\varkappa_{1,1}^{E,E^*})^{-2} \ll 1.$$

Однако γ_4 можно считать малым всюду в области сильных флуктуаций интенсивности, поскольку, как следует из экспериментальных данных [9, 10], для плоской волны зависимость $\sigma_I^2(x)$ имеет слабо выраженный максимум в области сильных мерцаний: $\sigma_{I\max}^2 \approx 1{,}2$ и, следовательно, $\gamma_{4\max} \approx 0{,}2$. Таким образом, представление (6) для $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ правомерно в области сильных мерцаний. С другой стороны, функция $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$, записанная в форме (6), остается малой по сравнению с $\exp\left(-\frac{k^2}{2}D[u]\,x\right)$ в области слабых флуктуаций интенсивности. Поэтому очевидно, что в этой области учет негауссовых связей совокупности полей $E(x, \rho)$ и $\varepsilon(x, \rho)$ для нахождения ковариационной функции интенсивности несуществен и асимметричное по совместным связям ε и E приближение совпадает с гауссовым приближением.

Чтобы учесть отклонение совместного вероятностного распределения полей ε и E от нормального в области сильных флуктуаций интенсивности, подставим (6) в (2), учтя при этом связь $B(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$ с $\Gamma_4(x, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{u})$. Таким образом, в асимметричном приближении по совместным связям ε и E получаем следующее выражение для спектра мерцаний:

$$\begin{gathered}
S_I(x, \varkappa) = k^2 S_\varepsilon(\varkappa)\int_0^x d\xi\,\sin^2\left(\frac{\varkappa^2}{2k}\xi\right)\exp\left(-\frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right]d\eta\right)\times \\
\times\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}D\left[\frac{\varkappa}{k}\xi\right](x-\xi)\right)-\exp\left(-\frac{k^2}{2}A(x-\xi)\right)\right]+ \\
+\frac{k^2}{4\pi^2}\int_0^x d\xi\iint_{-\infty}^{+\infty}d^2\omega\iint_{-\infty}^{+\infty}d^2\boldsymbol{r}\left\{S_\varepsilon(\omega)\sin^2\left(\frac{\omega\varkappa}{2k}\xi\right)\exp\left(-i(\varkappa-\omega)\boldsymbol{r}-\right.\right. \\
\left.\left.-\frac{k^2}{2}D[\boldsymbol{r}](x-\xi)-\frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right]d\eta\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Следующее из (7) выражение для ковариационной функции интенсивности таково:

$$\begin{gathered}
B_I(x, \rho) = k^2\int_0^x d\xi\iint_{-\infty}^{+\infty}d^2\varkappa\left\{S_\varepsilon(\varkappa)\sin^2\left(\frac{\varkappa^2}{2k}\xi\right)\exp\left(i\varkappa\rho-\right.\right. \\
\left.-\frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right]d\eta\right)\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}D\left[\frac{\varkappa}{k}\xi\right](x-\xi)\right)-\right. \\
\left.\left.-\exp\left(-\frac{k^2}{2}A(x-\xi)\right)\right]\right\}+\frac{k^2}{16\pi^2}\int_0^x d\xi\iint_{-\infty}^{+\infty}d^2\varkappa\iint_{-\infty}^{+\infty}d^2\boldsymbol{r}\left\{\left(D\left[\boldsymbol{r}+\frac{\varkappa}{k}\xi\right]+\right.\right. \\
\left.+D\left[\boldsymbol{r}-\frac{\varkappa}{k}\xi\right]-2D[\boldsymbol{r}]\right)\exp\left(i\varkappa(\rho-\boldsymbol{r})-\right. \\
\left.\left.-\frac{k^2}{2}D[\boldsymbol{r}](x-\xi)-\frac{k^2}{2}\int_0^\xi D\left[\frac{\varkappa}{k}\eta\right]d\eta\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Обсудим асимптотику (8) в области слабых флуктуаций интенсивности волны и в режиме насыщенных мерцаний.

В области слабых флуктуаций интенсивности, ограничившись первыми членами в разложениях экспонент, стоящих в подынтегральных функциях (8), получаем для ковариационной функции $B_I(x, \rho)$ выражение метода плавных возмущений (5).

В области, близкой к режиму насыщения, $\exp[-(k^2/2)A(x-\xi)]$ в (8) можно пренебречь; полученное таким образом асимптотическое выражение для $B_I(x, \rho)$ совпадает с соответствующим результатом работы [2].

Таким образом, приближенное выражение (8) не только качественно, но и количественно правильно описывает поведение ковариационной функции интенсивности как в области слабых флуктуаций амплитуды волны, так и в области, близкой к режиму насыщения. В промежуточной же области сильных мерцаний интеграл (8) является достаточно хорошим приближением для $B_I(x, \rho)$, поскольку, как показано выше, коэффициенты асимметрии и эксцесса светового поля малы в области сильных флуктуаций интенсивности первоначально плоской волны. В этой области, как следует из приведенных выше оценок, погрешность рассмотренного в п. 4 кумулянтного метода не превышает 10%.

Заметим, что, используя подобную кумулянтную методику для нахождения ковариации интенсивности ограниченных пучков, можно получить приближенное выражение для спектра мерцаний, правильно описывающее поведение спектра как в области слабых, так и в области насыщенных флуктуаций интенсивности. Однако в случае узких световых пучков в области вблизи максимума $\sigma_I^2(x)$ коэффициент эксцесса поля достигает больших значений ($\gamma_{4\max} \gg 1$), и, следовательно, в этой области рассмотренное кумулянтное приближение имеет большую погрешность. Для исследования сильных флуктуаций интенсивности узких лазерных пучков в настоящее время успешно применяется фазовое приближение метода Гюйгенса — Кирхгофа [13, 14], которое, согласно утверждению авторов работ [13, 14], обеспечивает хорошее согласие с экспериментальными результатами.

Автор признателен А. Н. Малахову и А. И. Саичеву за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, Препринт, М., 1970.
2. R. Fante, Radio Sci, **10**, № 1, 77 (1975).
3. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, **66**, № 4, 1237 (1974).
4. А. М. Прохоров, Ф В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, **114**, вып 3, 415 (1974).
5. Р. Фэнте, ТИИЭР, **63**, № 12, 43 (1975).
6. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978.
7. K. Furutsu, J Opt, Soc. Am., **62**, № 2, 240 (1972).
8. В И. Шишов, ЖЭТФ, **61**, вып 4 (10), 1399 (1971).
9. Н. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях интенсивности лазерного излучения. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР, Препринт, М., 1973.
10. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. вузов — Физика, № 6, 130 (1973).
11. В. И. Кляцкин, А И. Кон, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 9, 1381 (1972).
12. В. В. Носов, Флуктуации размера светового пучка в турбулентной атмосфере, IV Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1977, стр. 56.
13. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. вузов — Радиофизика, **17**, № 2, 252 (1974).
14. В. А. Банах, А Ф. Жуков, В. Л. Миронов, Р. Ш Цвык, Изв. вузов — Физика, № 2, 33 (1975).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 19 июня 1978 г.

THE CALCULATION OF THE COVARIANCE FUNCTION OF THE LIGHT WAVE INTENSITY IN A MEDIUM WITH LARGE-SCALE RANDOM INHOMOGENEITIES. CUMULATIVE APPROACH

S. N. Molodtsov

By the method of cumulative analysis an approximate expression has been obtained for the covariance function of the light wave intensity It describes properly the behaviour of the intensity spectrum in the region of strong scintillations. It transforms as well into the known asymptotic results in the region of weak fluctuations of the intensity and in the regime of saturated scintillations.