ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1979

УДК 538.56 · 519.25

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ, КОРРЕЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В. И. Кляцкин

Обсуждается вопрос о выводе уравнений для характеристического функционала марковского процесса Получены интегральные и дифференциальные соотношения для корреляций функционалов марковских процессов, которые используются для анализа стохастических уравнений. Показано, что статистические характеристики динамических систем с флуктуирующими параметрами в виде суммы конечного числа N независимых телеграфных процессов описываются замкнутой системой уравнений Предельный переход $N \to \infty$ отвечает случаю гауссовых марковских флуктуаций параметров Обсуждаются стохастические уравнения с флуктуациями параметров в виде функций гауссова марковского процесса, марковского процесса с конечным числом состояний и обобщенного телеграфного процесса

1. Нахождение средних значений различных функционалов случайного процесса тесно связано со знанием его характеристического функционала [1], который описывает все статистические характеристики процесса. Однако в ряде случаев мы не можем вычислить непосредственно характеристический функционал, а знаем все статистические характеристики процесса из других соображений. Такова, например, ситуация в случае марковского процесса $z(t)$, все статистические характеристики которого описываются двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t|z_1, t_1)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P_t(z)$, которые, в свою очередь, описываются линейными, вообще говоря, интегродифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \hat{L}_z(t)p, \quad \frac{\partial}{\partial t}P_t(z) = \hat{L}_z(t)P_t(z), \tag{1}$$

где $\hat{L}_z(t)$ — интегродифференциальный оператор по z. Подобными процессами мы и ограничимся в дальнейшем.

Простейшими примерами таких процессов являются процессы с экспоненциальной корреляционной функцией:

а) гауссов процесс —

$$\hat{L}_z f(z) = \alpha\frac{\partial}{\partial z} z f(z) + \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z);$$

б) пуассоновский процесс (см., например, [1]) —

$$\hat{L}_z f(z) = \alpha\frac{\partial}{\partial z} z f(z) + \nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\{f(z-\xi) - f(z)\};$$

в) телеграфный процесс (см. [2]) —

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu\{f(z) - f(-z)\};$$

г) обобщенный телеграфный процесс (см. [2]) —

$$\hat{L}_z f(z) = -\nu \{f(z) - p_a(z) \int_{-\infty}^{\infty} dz' f(z')\}. \tag{2}$$

Для первых двух процессов имеется аналитическая запись их характеристического функционала, в то время как для последних двух имеются лишь определяющие их уравнения, полученные в [3, 4] (см. также [2]),

$$\frac{d\Phi_t[v(\tau)]}{dt} = -a^2 v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp[-2\nu(t-t_1)]\, \Phi_{t_1}[v(\tau)] \tag{3}$$

(телеграфный процесс),

$$\begin{gathered}\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left(ia \int_0^t d\tau\, v(\tau)\right)\right\rangle e^{-\nu t} + \\ + \nu \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t-t_1)] \left\langle \exp\left(ia \int_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right)\right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)]\end{gathered} \tag{4}$$

(обобщенный телеграфный процесс). Здесь $\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)\right\}\right\rangle$ — характеристический функционал.

Уравнение (3) эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\Phi_t}{dt^2} + \left[2\nu - \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\right] \frac{d\Phi_t}{dt} + a^2 v^2(t)\, \Phi_t = 0 \qquad \left(\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\right), \\ \Phi_0 = 1, \qquad \left.\frac{d\Phi_t}{dt}\right|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что если случайный процесс $z(t)$ в начальный момент времени принимает детерминированное значение a, то второе начальное условие в (5) заменяется на условие $d\Phi_t/dt|_{t=0} = iv(0)a$.

2. В общем случае произвольного марковского процесса $z(t)$ получить уравнение для характеристического функционала не представляется возможным. Можно, однако, найти интегральное уравнение для функционала

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = \left\langle \delta(z(t) - z) \exp\left\{i \int_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle, \tag{6}$$

описывающего статистические корреляции процесса $z(t)$ с его предысторией (см., например, [5]), которое имеет вид

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = P_t(z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 p(z, t|z_1, t_1)\, z_1 \Psi_{t_1}[z_1, v(\tau)]. \tag{7}$$

Характеристический функционал $\Phi_t[v(\tau)]$ определяется по функционалу Ψ_t с помощью формул

$$\Phi_t[v(\tau)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, \Psi_t[z, v(\tau)],$$
$$\frac{1}{iv(t)}\,\frac{d\Phi_t[v(\tau)]}{dt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, z\Psi_t[z, v(\tau)]. \tag{8}$$

Интегральное уравнение (7) с учетом (1) эквивалентно операторному уравнению первого порядка по t:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_z\right)\Psi_t[z, v(\tau)] = izv(t)\,\Psi_t[z, v(\tau)],$$
$$\Psi_0[z, v(\tau)] = P_0(z). \tag{9}$$

Аналогичным образом можно получить интегральное уравнение для функционала

$$\widetilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)] = \left\langle \delta(z(t') - z)\exp\left\{i\int\limits_0^t d\tau\, z(\tau)\, v(\tau)\right\}\right\rangle \tag{10}$$

$$(t' \geqslant t),$$

эквивалентное операторному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{L}_z\right)\widetilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)] = 0, \qquad \widetilde{\Psi}_t[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)]. \tag{11}$$

Уравнение (9) с равенствами (8) и является исходным уравнением для определения характеристического функционала марковского процесса.

3. Проиллюстрируем это на конкретных примерах. Случаи гауссова (а) и пуассоновского (б) процессов в этой связи интереса не представляют, так как для них известен непосредственно сам характеристический функционал. В случае же телеграфного процесса (в) функционал $\Psi_t[z, v(\tau)]$ удовлетворяет уравнению второго порядка по t:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\nu\frac{\partial}{\partial t} + v^2(t)\,a^2 - iz\dot{v}(t)\right]\Psi_t[z, v(\tau)] = 0, \tag{12}$$

с начальными условиями

$$\Psi_0[z, v(\tau)] = P_0(z), \qquad \left.\frac{d\Psi_t}{dt}\right|_{t=0} = iv(0)\,zP_0(z) - \nu\,[P_0(z) - P_0(-z)]. \tag{13}$$

Интегрируя (12) по z, с учетом (8) приходим к уравнению (5).

Отметим, что в этом случае уравнение для функционала $\widetilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)]$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\nu\frac{\partial}{\partial t'}\right)\widetilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)] = 0, \tag{14}$$

с начальными условиями

$$\widetilde{\Psi}_t[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)], \qquad \left.\frac{\partial\widetilde{\Psi}_{t'}}{\partial t'}\right|_{t'=t} = -\nu\,\{\Psi_t[z] - \Psi_t[-z]\} \tag{15}$$

легко интегрируется и решение дается формулой

$$\tilde{\Psi}_{t'} = \frac{1}{2}\Psi_t[z, v(\tau)]\,[1 + \exp\{-2\nu(t'-t)\}] + \\ + \frac{1}{2}\Psi_t[-z, v(\tau)]\,[1 - \exp\{-2\nu(t'-t)\}] \qquad (t' \geqslant t), \tag{16}$$

где Ψ_t описывается уравнением (12).

В случае обобщенного телеграфного процесса уравнение (9) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t[z, v(\tau)] = \{izv(t) - \nu\}\Psi_t[z, v(\tau)] + \nu p_a(z)\,\Phi_t[v(\tau)], \\ \Psi_0[z, v(\tau)] = p_a(z). \tag{17}$$

Решая последнее относительно Ψ_t, получаем связь его с характеристическим функционалом Φ_t вида

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = p_a(z)\exp\left\{-\nu t + iz\int\limits_0^t d\tau\, v(\tau)\right\} + \\ + \nu p_a(z)\int\limits_0^t dt_1 \Phi_{t_1}[v(\tau)]\exp\left\{-\nu(t - t_1) + iz\int\limits_{t_1}^t d\tau\, v(\tau)\right\}. \tag{18}$$

Интегрируя (18) по всем z, получаем замкнутое интегральное уравнение для $\Phi_t[v(\tau)]$, совпадающее с уравнением (4).

Функционал же $\tilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)]$ будет, очевидно, связан с функционалом $\Psi_t[z, v(\tau)]$ по формуле

$$\tilde{\Psi}_{t'}[z, v(\tau)] = \Psi_t[z, v(\tau)]\exp\{-\nu(t'-t)\} + \\ + p_a(z)\,\Phi_t[v(\tau)]\,[1 - \exp\{-\nu(t'-t)\}] \qquad (t' \geqslant t). \tag{19}$$

4. В общем случае марковского процесса, исходя из интегрального уравнения (7) и действуя по методике, описанной в [1,2], можно получить уравнение для функционала $\langle \delta(z(t) - z) R_t[t, z(\tau)]\rangle$ $(\tau \leqslant t)$ вида

$$\langle \delta(z(t) - z) R_t[t, z(\tau)]\rangle = P_t(z) R_t[t, 0] + \\ + \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_1\, z_1\, p(z, t|z_1, t_1)\left\langle \delta(z(t_1) - z_1)\frac{\delta}{\delta z(t_1 - 0)} R_t[t, z(\tau)\,\theta(t_1 - \tau)]\right\rangle, \tag{20}$$

эквивалентное интегральному уравнению (7). Аналогичным образом можно получить и дифференциальное равенство, эквивалентное уравнению (9). Для этого продифференцируем (20) по t. При этом учтем, что $\frac{\delta}{\delta z(t_1)} R_t \sim \theta\,(t - t_1)$ и не надо дифференцировать интеграл по верхнему пределу (который можно положить равным ∞). Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta}{\delta z(t_1)} R_t[t, z(\tau)] \equiv \frac{\delta}{\delta z(t_1)}\frac{\partial}{\partial t} R_t[t, z(\tau)], \tag{21}$$

что легко проверяется путем разложения $R_t[t, z(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора. В результате с учетом (1) приходим к следующей формуле дифференцирования рассматриваемой корреляции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \delta(z(t)-z)R_t[t, z(\tau)]\rangle = \hat{L}_z \langle \delta(z(t)-z)R_t[t, z(\tau)]\rangle + \\ + \left\langle \delta(z(t)-z)\frac{\partial}{\partial t}R_t[t, z(\tau)]\right\rangle. \tag{22}$$

Умножая (22) на произвольную функцию $F(z)$ и интегрируя по всем z, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(z(t))R_t[t, z(\tau)]\rangle - \left\langle F(z(t))\frac{\partial}{\partial t}R_t[t, z(\tau)]\right\rangle = \\ = \langle (\hat{L}_z^+ F(z(t)))R_t[t, z(\tau)]\rangle, \tag{23}$$

где $\hat{L}_z^+$ — сопряженный оператор.

5. В качестве иллюстрации приведем формулы для правой части (23) для конкретных процессов, перечисленных в (2):

а) $-\ \alpha\langle z(t)F'_z(z(t))R_t\rangle + \sigma^2\langle F''_{zz}(z(t))R_t\rangle;$ (24)

б) $-\ \alpha\langle z(t)F'_z(z(t))R_t\rangle + \nu\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi)\langle \{F(z(t)+\xi)-F(z(t))\}R_t\rangle;$ (25)

в) $-\ 2\nu\langle z(t)R_t[t, z(\tau)]\rangle \qquad (F(z)=z);$ (26)

г) $-\ \nu\langle F(z(t))R_t\rangle + \nu\langle F(z(t))\rangle\langle R_t[t, z(\tau)]\rangle.$ (27)

Часть из этих формул была получена ранее в работах [6, 7].

Отметим, что соответствующая формула, обобщающая уравнение (11) на случай произвольного функционала $R_t[t, z(\tau)]$, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{L}_z\right)\langle \delta(z(t')-z)R_t[t, z(\tau)]\rangle = 0 \qquad (t'>t), \\ \langle \delta(z(t')-z)R_t[t, z(\tau)]\rangle|_{t'=t} = \langle \delta(z(t)-z)R_t[t, z(\tau)]\rangle. \tag{28}$$

Уравнение (28) легко решается для рассматриваемых процессов. Так, для телеграфного процесса следствием (28) является очевидное равенство

$$\langle z(t')R_t[t, z(\tau)]\rangle = e^{-2\nu(t'-t)}\langle z(t)R_t[t, z(\tau)]\rangle \qquad (t'\geqslant t). \tag{29}$$

В случае же обобщенного телеграфного процесса имеет место формула

$$\langle F(z(t'))R_t[t, z(\tau)]\rangle = \langle F(z(t))R_t[t, z(\tau)]\rangle e^{-\nu(t'-t)} + \\ + \langle F(a)\rangle\langle R_t[t; z(\tau)]\rangle(1-e^{-\nu(t'-t)}) \qquad (t'\geqslant t). \tag{30}$$

Дифференциальная формула (23) с правыми частями (24)—(27) для $F(z)=z$ $(\langle z(t)\rangle = 0)$ имеет один и тот же вид

$$-\ \alpha\langle z(t)R_t[t; z(\tau)]\rangle,$$

хотя она и описывает совершенно разные процессы. Этот факт говорит, скорее всего, о том, что особой пользы от их практического применения ожидать не приходится. Однако для телеграфного процесса, как показано в [6, 7], формула (23) существенно упрощает анализ стохастических уравнений (см. следующий раздел статьи).

В заключение этой части работы отметим, что если мы имеем стохастическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ z(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

где $z(t)$ — марковский процесс, и в качестве функционала $R_t[t, z(\tau)]$ возьмем функцию $R_t(x) = \delta(x(t) - x)$, удовлетворяющую стохастическому уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial R_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(t,\ x,\ z(t))\, R_t(x),$$

то уравнение (22) принимает вид хорошо известного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(x,\ z) = \hat{L}_z P_t(x,\ z) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,\ x,\ z)\, P_t(x,\ z),$$

где $P_t(x,\ z) = \langle \delta(x(t) - x)\, \delta(z(t) - z) \rangle$ — совместная плотность вероятностей для расширенного марковского процесса $\{z(t),\ x(t)\}$.

6. Остановимся теперь на некоторых обобщениях формул, полученных выше. Прежде всего отметим, что если мы имеем векторный марковский процесс $\boldsymbol{z}(t) = \{z_1(t), \ldots, z_N(t)\}$, описываемый оператором $\hat{L}_{\boldsymbol{z}}$, то функционал

$$\Psi_t[\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{v}(\tau)] = \left\langle \delta(\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}) \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, \boldsymbol{z}(\tau)\, \boldsymbol{v}(\tau) \right\} \right\rangle, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{v}(t) = \{v_1(t), \ldots, v_N(t)\}$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Psi_t}{\partial t}[\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{v}(\tau)] = \{\hat{L}_{\boldsymbol{z}} + i\boldsymbol{z}\boldsymbol{v}(t)\}\, \Psi_t[\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{v}(\tau)], \\ \Psi_0[\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{v}(\tau)] = P_0(\boldsymbol{z}). \end{gathered} \tag{32}$$

Теперь не представляет труда выписать формулу для корреляции $\langle F(\boldsymbol{z}(t))\, R_t[t,\ \boldsymbol{z}(\tau)] \rangle$, обобщающую формулу (20), а также формулу для дифференцирования этой корреляции по времени. В важном частном случае, когда все компоненты вектора $\boldsymbol{z}(t)$ являются статистически независимыми марковскими процессами, описываемыми одним и тем же оператором $\hat{L}_z$, эта формула упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\boldsymbol{z}(t))\, R_t[t,\ \boldsymbol{z}(\tau)] \rangle = \left\langle F(\boldsymbol{z}(t)) \frac{\partial}{\partial t} R_t[t,\ \boldsymbol{z}(\tau)] \right\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N} \langle [\hat{L}^{+}_{z_k} F(\boldsymbol{z}(t))]\, R_t[t,\ \boldsymbol{z}(\tau)] \rangle. \end{gathered} \tag{33}$$

Так, например, для всех перечисленных выше процессов с корреляционной функцией $\langle z(t) z(t+\tau) \rangle = \langle z^2 \rangle \exp\{-\alpha|\tau|\}$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k\right) \langle z_1(t) \ldots z_k(t)\, R_t[t,\ z(\tau)] \rangle = \tag{34}$$

$$= \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial}{\partial t} R_t[t, z(\tau)] \right\rangle .$$

Формула (34) позволяет получить замкнутое статистическое описание динамических систем, у которых флуктуирующими параметрами являются независимые телеграфные процессы $z_1(t), \dots, z_N(t)$, аналогично тому, как использовались формулы (23), (26) в работах [6, 7]. Особенно просто это сделать, если процессы $z_i(t)$ входят в виде симметричной комбинации $\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t)$.

Рассмотрим в качестве примера векторное уравнение

$$\dot{x} = Ax + z(t) Bx, \qquad x(0) = x_0, \tag{35}$$

где A и B — некоторые заданные матрицы, зависящие, вообще говоря, от времени, а $z(t) = \xi_N(t)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\psi_k(t) = \langle z_2(t) \dots z_k(t) x(t) \rangle \qquad (k=0, 1, \dots, N). \tag{36}$$

Дифференцируя (36) по времени, учитывая равенство (34) и уравнение (35), получаем рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \alpha k\right) \psi_k &= A\psi_k + \langle z_1(t) \dots z_k(t) [z_1(t) + \dots + z_N(t)] Bx \rangle = \\ &= A\psi_k + k \langle z^2 \rangle B\psi_{k-1} + (N-k) B\psi_{k+1} \qquad (k=0, 1, \dots, N). \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, среднее значение решения системы уравнений (35) удовлетворяет замкнутой системе $(N+1)$ уравнений. Если матрицы A и B не зависят от времени, то система (37) может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа и очевидно, что ее решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби. Если теперь принять значение $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу $N \to \infty$, то, как показано в Приложении, случайный процесс $\xi_N(t) = \sum_{k=1}^{N} z_k(t)$ переходит в гауссов марковский процесс и решение системы (37) запишется в виде бесконечной цепной дроби в согласии с результатами предыдущих работ [8–10].

Из рассмотренного примера ясно, что аппроксимация гауссова марковского процесса конечным отрезком ряда для $\xi(t)$ может быть полезна для расчета конкретных динамических систем, в том числе и при флуктуациях параметров вида $f(\xi(t))$*. Так, например, в случае $f(\xi) = \xi^2(t) - \langle \xi^2(t) \rangle$ конечномерная аппроксимация имеет вид $f(\xi_N) = \sum_{i \neq k}^{N} z_i z_k$. И в этом случае среднее значение решения системы (35), где $z(t) = f(\xi_N)$, будет, очевидно, входить в замкнутую систему $[N/2]+1$ векторных уравнений для функций $\psi_n(t) = \langle z_1(t) \dots z_{2n}(t) x(t) \rangle$ вида

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{d}{dt} + 2\alpha n\right) E - 4n(N-2n) \langle z^2 \rangle B - A\right] \psi_n(t) = \\ &= 2n(2n-1) \langle z^2 \rangle^2 B\psi_{n-1}(t) + (N-2n)(N-2n-1) B\psi_{n+1}(t) \\ &\qquad (n=0, \dots, [N/2]). \end{aligned} \tag{38}$$

Решение системы (38) при постоянных матрицах A и B также записывается конечным отрезком цепной дроби. Простейшие аппроксимации

---

* Автор признателен О. В. Музычуку, обратившему внимание на то обстоятельство, что при $f(\xi) = \xi^2(t)$ решение ряда задач можно записать в виде бесконечной цепной дроби аналогично случаю $f(\xi(t)) = \xi(t)$.

$N=2$ и $N=3$ приводят к замкнутой системе двух векторных уравнений. Отметим, что при одном и том же «порядке точности» — заданном значении N — порядок системы (38) примерно вдвое ниже порядка системы (37). Поэтому, если мы зададим порядок системы, то (38) будет ближе к предельному решению, чем система (37).

Аналогичная ситуация имеет место и в случае $f(\xi) = \xi_N^k$. Для нечетных значений k получаем замкнутую систему $(N+1)$ векторных уравнений, а при четных k — систему $[N/2]+1$ уравнений. Однако при $k \geqslant 3$ эти системы не приводят решение задачи к цепным дробям, так как они являются рекуррентными равенствами более высокого порядка, чем (37), (38).

Процесс $\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t)$, где $z_i(t)$ — независимые телеграфные процессы, является частным случаем марковского процесса $z(t)$ с конечным числом состояний. Пусть в общем случае возможные значения процесса $z(t)$ — $z_1, \ldots, z_N$. Тогда, очевидно, все реализации удовлетворяют условию

$$[z(t) - z_1][z(t) - z_2]\ldots[z(t) - z_N] = 0, \tag{39}$$

или (раскроем скобки) условию

$$z^N(t) = (z_1 + \ldots + z_N) z^{N-1}(t) + \ldots + (-1)^{N-1} z_1 \ldots z_N, \tag{40}$$

а оператор $\hat{L}_z$ в формулах (1) и (23) будет просто матрицей N-го порядка L_{ij}, описывающей плотность вероятностей перехода из состояния z_i в состояние z_j. Следовательно, и в этом случае среднее решение системы (35) будет определяться замкнутой системой уравнений.

Рассмотрим в качестве примера простейшее уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = iv(t)\, z(t)\, \varphi(t), \qquad \varphi(0) = 1, \tag{41}$$

где $z(t)$ — марковский процесс с двумя состояниями z_1, z_2 и соответствующими вероятностями перехода ν и μ. Среднее значение функции $\varphi(t)$ — характеристический функционал такого процесса. Данный процесс переходит в телеграфный, рассмотренный выше, при выполнении условий $z_1 = -z_2 = a$, $\nu = \mu$.

Для рассматриваемого процесса равенство (40) принимает вид

$$z^2(t) = (z_1 + z_2) z(t) - z_1 z_2. \tag{40'}$$

Усредним уравнение (41):

$$\frac{d\,\Phi_t}{dt} = iv(t) \langle z(t)\, \varphi(t) \rangle, \qquad \Phi_t = \langle \varphi(t) \rangle.$$

Для функции $\langle z(t)\, \varphi(t) \rangle$, согласно (23), имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle z(t)\, \varphi(t) \rangle &= \left\langle z(t) \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle + \langle \varphi(t) \hat{L}^+ z(t) \rangle = \\ &= iv(t) \langle z^2(t)\, \varphi \rangle + \langle \varphi\, [(\nu z_2 + \mu z_1) - (\nu + \mu) z] \rangle = \\ &= \{iv(t)(z_1 + z_2) - (\nu + \mu)\} \langle z\varphi \rangle + \{\nu z_2 + \mu z_1 - iv(t) z_1 z_2\}\, \Phi_t . \end{aligned} \tag{42}$$

Следовательно, для Φ_t получаем уравнение второго порядка по t:

$$\frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial t^2} + \left[\nu + \mu - iv(t)(z_1 + z_2) - \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\right] \frac{\partial \Phi_t}{\partial t} = \tag{43}$$

$$= [v^2(t) z_1 z_2 + iv(t)(\nu z_2 + \mu z_1)]\, \Phi_t ,$$

обобщающее уравнение (5).

Выше мы рассматривали векторную систему уравнений (35), определяемую матрицами A и B. Если же интересоваться средним значением только одной компоненты, то для нее можно получить уравнение вида

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) x + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x = f(t), \tag{44}$$

где оператор $L\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$, n — порядок матриц A и B в (35). Начальные условия для x включены в функцию $f(t)$. При этом $f(t)$ может зависеть и от значений производных $z(t)$ при $t=0$, т. е. $f(t)$ — тоже случайная функция, статистически связанная с процессом $z(t)$.

Уравнение вида (44) для марковских процессов $z(t)$ рассматривалось в работе [10], где было получено при постоянных a_i и b_{ij} выражение для преобразования Лапласа величины $\langle x \rangle_p$ в виде цепной дроби (конечной или бесконечной) для различных марковских процессов. В этой работе использовалась операторная запись случайных процессов. Покажем, что формализм, развитый выше, позволяет получить решение задачи (44) непосредственно, путем усреднения уравнения (44).

Для марковских независимых процессов $z_k(t)$ с экспоненциальной корреляционной функцией в силу (34) имеет место тождество

$$\begin{aligned}\left\langle z_1(t) \ldots z_l(t) \frac{d^k}{dt^k} R_t[t; \boldsymbol{z}(\tau)] \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \alpha l\right)^k \times \\ &\times \langle z_1(t) \ldots z_l(t) R_t[t, \boldsymbol{z}(\tau)] \rangle ,\end{aligned} \tag{45}$$

где $R_t[t, \boldsymbol{z}(\tau)]$ — произвольный функционал процессов $z_1(t), \ldots, z_N(t)$.

Пусть $z(t) = \xi_N(t)$. Рассмотрим функции

$$\psi_l(t) = \langle z_1(t) \ldots z_l(t) x(t) \rangle , \qquad l=0, 1, \ldots, N. \tag{46}$$

Согласно (44) и (45), для этих функций получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt} + \alpha l\right) \psi_l(t) &= F_l(t) - l \langle z^2 \rangle M\left[\frac{d}{dt} + \alpha l, \frac{d}{dt} + \right. \\ &\left. + \alpha(l-1)\right] \psi_{l-1}(t) - (N-l) M\left[\frac{d}{dt} + \alpha l, \frac{d}{dt} + \alpha(l+1)\right] \times \\ &\times \psi_{l+1}(t), \quad l=0, 1, \ldots, N,\end{aligned} \tag{47}$$

где приняты обозначения работы [10]:

$$M[p, q] = \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) p^i q^j, \text{ а } F_l(t) = \langle z_1(t) \ldots z_l(t) f(t) \rangle .$$

Если операторы L и b_{ij} не зависят от времени, то система (47) с помощью преобразования Лапласа сводится к алгебраической системе:

$$\begin{aligned} L(p+\alpha l)\psi_l(p) &= F_l(p) - l \langle z^2 \rangle M[p+\alpha l, p + \alpha(l-1)] \times \\ &\times \psi_{l-1}(p) - (N-l) M[p + \alpha l, p + \alpha(l+1)]\, \psi_{l+1}(p) .\end{aligned} \tag{48}$$

Система (48) легко решается и в частном случае, когда $f(t)$ не зависит от $z_k(t)$ $(F_l(p) = f(p)\, \delta_{l,0})$, имеет вид конечного отрезка цепной дроби

$$\langle x\rangle_p=\psi_0(p)=f(p)K_0(p),\quad K_l(p)=[A_l(p)-B_l(p)K_{l+1}(p)]^{-1},\tag{49}$$

где

$$\begin{gathered}A_l(p)=L(p+\alpha l),\\ B_l(p)=\langle z^2\rangle(l+1)(N-l)M[p+\alpha l,\ p+\alpha(l+1)]\,M[p+\alpha(l+1),\ p+\alpha l].\end{gathered}\tag{50}$$

Если положить $\langle z^2\rangle=\sigma^2/N$ и устремить N к ∞, получаем решение $\langle x\rangle_p$ для гауссова марковского процесса в виде бесконечной цепной дроби (49) с параметрами

$$\begin{gathered}A_l(p)=L(p+\alpha l),\\ B_l(p)=\sigma^2(l+1)M[p+\alpha l,\ p+\alpha(l+1)]\,M[p+\alpha(l+1),\ p+\alpha l].\end{gathered}\tag{50$'$}$$

Это выражение было получено ранее в работе [10].

Аналогичным путем получаем выражение для $\langle x\rangle_p$ в виде конечного отрезка цепной дроби (49) и в случае $z(t)=\xi_N^2(t)-\langle\xi_N^2(t)\rangle$ с параметрами

$$\begin{gathered}A_l(p)=L(p+2\alpha l)+4l(N-2l)\langle z^2\rangle M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha l],\\ B_l(p)=2\langle z^2\rangle^2(N-2l)(N-2l-1)(l+1)(2l+1)\times\\ \times M[p+2\alpha(l+1),\ p+2\alpha l]\,M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha(l+1)]\\ (l=0,\dots,[N/2]).\end{gathered}\tag{51}$$

Полагая $\langle z^2\rangle=\sigma^2/N$ и переходя к пределу $N\to\infty$, получаем решение задачи в виде бесконечной цепной дроби (49) с параметрами

$$\begin{gathered}A_l(p)=L(p+2\alpha l)+4\sigma^2 l\,M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha l],\\ B_l(p)=2\sigma^4(l+1)(2l+1)M[p+2\alpha(l+1),\ p+2\alpha l]\,M[p+2\alpha l,\ p+2\alpha(l+1)].\end{gathered}\tag{51$'$}$$

7. Формулы дифференцирования, полученные в пятом разделе, полезны и при анализе уравнений с флуктуациями параметров в виде обобщенного телеграфного процесса. Проиллюстрируем это на примере уравнения (44) с постоянными коэффициентами a_i и b_{ij} и функцией $f(t)$, не зависящей от процесса $z(t)$.

Для обобщенного телеграфного процесса в силу (27) имеют место равенства

$$\begin{gathered}\left\langle z(t)\frac{d^k}{dt^k}R_t[t;\ z(\tau)]\right\rangle=\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)^k\langle z(t)R_t[t;\ z(\tau)]\rangle,\\ \left\langle F(z(t))\frac{d^k}{dt^k}R_t[t,\ z(\tau)]\right\rangle=\left(\frac{d}{dt}+\nu\right)^k\langle F(z(t))R_t[t;\ z(\tau)]\rangle,\end{gathered}\tag{52}$$

где $R_t[t,\ z(\tau)]$ — произвольный функционал от $z(\tau)$ $(\tau\leqslant t)$, а $F(z(t))$ — произвольная функция от $z(t)$, такая, что $\langle F(z(t))\rangle=\langle z\rangle=0$.

Усредним уравнение (44). Учитывая (52) и выполняя преобразование Лапласа по времени, получаем алгебраическое равенство

$$L(p)\langle x\rangle_p+M[p,\ p+\nu]\langle z(t)\,x_\varepsilon(t)\rangle_p=f(p).\tag{53}$$

Введем функцию $F_\lambda(t)=F(z(t))$ вида

$$F_\lambda(t)=[1+\lambda z(t)]^{-1}-C_0(\lambda)\qquad(\langle F_\lambda(t)\rangle=0),\tag{54}$$

где λ — произвольный параметр, а $C_k(\lambda)=\langle a^k(1+\lambda a)^{-1}\rangle$. Учитывая тождество

$$z(t) F_\lambda(t) = -\frac{1}{\lambda} F_\lambda(t) + C_1(\lambda) - z(t) C_0(\lambda),$$

для функции $\langle F_\lambda(t) x(t) \rangle$ получаем уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt} + \nu\right) \langle F_\lambda(t) x(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} M\left[\frac{d}{dt} + \nu,\ \frac{d}{dt} + \nu\right] \langle F_\lambda(t) x(t) \rangle - $$
$$- C_1(\lambda) M\left[\frac{d}{dt} + \nu,\ \frac{d}{dt}\right] \langle x(t) \rangle + C_0(\lambda) M\left[\frac{d}{dt} + \nu,\ \frac{d}{dt} + \nu\right] \langle z(t) x(t) \rangle. \tag{55}$$

Выполним в (55) преобразование Лапласа:

$$\left\{L(p+\nu) - \frac{1}{\lambda} M[p+\nu,\ p+\nu]\right\} \langle F_\lambda(t) x(t) \rangle_p =$$
$$= - C_1(\lambda) M[p+\nu,\ p] \langle x \rangle_p + C_0(\lambda) M[p+\nu,\ p+\nu] \langle z(t) x(t) \rangle_p. \tag{56}$$

Равенство (56) справедливо для любой величины λ. Положим

$$\lambda = \lambda_p = M[p+\nu,\ p+\nu]/L(p+\nu). \tag{57}$$

В результате получаем алгебраическую связь между $\langle z(t) x(t) \rangle_p$ и $\langle x \rangle_p$ вида

$$\langle z(t) x(t) \rangle_p = \frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)} \frac{M[p+\nu,\ p]}{M[p+\nu,\ p+\nu]} \langle x \rangle_p. \tag{58}$$

Подставляя (58) в (53), получаем алгебраическое уравнение для $\langle x \rangle_p$, решение которого имеет вид

$$\langle x \rangle_p = f(p) \left[L(p) + \frac{M[p+\nu,\ p]\, M[p,\ p+\nu]}{M[p+\nu,\ p+\nu]} \frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)}\right]^{-1}. \tag{59}$$

Выражение (59) другим путем впервые было получено в работе [10].

В заключение благодарю Г. И. Бабкина за полезные обсуждения в ходе выполнения работы и Г. Н. Бочкова за полезные критические замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Гауссов марковский процесс как предел суммы независимых телеграфных процессов

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \ldots + z_N(t),$$

где все $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} \exp\{-\alpha |\tau|\}.$$

Характеристический функционал $z(t)$ удовлетворяет уравнению (3):

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^T[v(\tau)] = -\frac{\sigma^2}{N} v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\} \Phi_{t_1}^T[v(\tau)], \tag{П.1}$$

откуда следует, что

$$\Phi_t^T[v(\tau)] \to 1 \text{ при } N \to \infty. \tag{П.2}$$

Рассмотрим теперь характеристический функционал процесса $\xi_N(t)$:

$$\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^t d\tau\, \xi_N(\tau)\, v(\tau) \right\} \right\rangle = \{\Phi_t^T[v(\tau)]\}^N. \qquad (\text{П.3})$$

Дифференцируя (П.3) по t, получаем в силу (П.1) уравнение

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_t[v(\tau)] = -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1\, v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\} \frac{\Phi_{t_1}^T[v(\tau)]}{\Phi_t^T[v(\tau)]}.$$

Отсюда следует, что при $N \to \infty$ (в силу (П.2))

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_t[v(\tau)] = -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1\, v(t_1) \exp\{-\alpha(t-t_1)\}, \qquad (\text{П.4})$$

т. е. процесс $\xi(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \xi_N(t)$ является гауссовым процессом с корреляционной функцией

$$\langle \xi(t)\, \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \exp\{-\alpha |\tau|\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 562 (1977).
3. R. C. Bourret, U. Frisch and A. Pouquet, Physica, 65, 303 (1973).
4. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, 524 (1974).
5. Теория связи, сб. переводов, изд. Связь, М., 1972.
6. В. Е. Шапиро, В. М. Логинов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, № 8 (1977).
7. В. Е. Шапиро, В. М. Логинов, Препринт Института физики СО АН СССР — 55Ф, 1977.
8. О. В. Музычук, Теор. и мат. физ., 28, 371 (1976).
9. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 9, 1279 (1978).
10. Ю. Е. Кузовлев, Г. Н. Бочков, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 10, 1505 (1977).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1978 г.

MARKOV PROCESSES, FUNCTIONAL CORRELATIONS AND STOCHASTIC EQUATIONS

V. I. Klyatskin

A problem is considered on deriving equations for the characteristic functional of Markov process. Integral and differential relations have been obtained for the correlation of functionals of Markov processes which are used to analyse the stochastic equations. It is shown that stochastic characteristics of dynamic system with fluctuating parameters in the form of a sum of the finite number N of independent telegraph processes are described by a closed system of equations. The limiting transition $N \to \infty$ corresponds to the case of Gaussian Markov fluctuations of parameters. Stochastic equations with parameter fluctuations are discussed in the form of a functional of Gaussian Markov process, Markov process with finite number of states and the generalized telegraph process.