

УДК 621.371.25

О ТРАЕКТОРИЯХ ЛУЧЕЙ В ИОНОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ С УЧЕТОМ СЛАБОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В. Н. Миролубов

Методом усреднения рассматривается влияние неоднородностей на лучевые траектории как в регулярном, так и в нерегулярном ионосферном волноводе с параболическим профилем диэлектрической проницаемости. Строится усредненная (в статистическом смысле) траектория луча и определяются поправки к углам прихода невозмущенного луча в данной точке

При изучении распространения радиоволн в ионосферных волноводных каналах нередко возникает необходимость определения лучевых траекторий. Известно, что численные траекторные расчеты не всегда дают достаточно полную качественную картину волноводного распространения, кроме того, при больших длинах лучей такие расчеты требуют много машинного времени, поэтому большую важность приобретают аналитические методы исследования.

По-видимому, наиболее популярным методом изучения лучевых траекторий в средах с малым возмущением диэлектрической проницаемости является теория возмущений [1-4]. Однако из-за появления в решениях секулярных членов [5] возможность ее применения на больших расстояниях от источника часто трудно обосновать. Этот вопрос исключается в методе усреднения (или методе разделения движений) который разработан в нелинейной механике [5-7]. В последнее время с его помощью исследованы некоторые особенности волноводного пространства [8], найдено, в частности, уравнение луча для нерегулярного ионосферного волновода с параболическим профилем диэлектрической проницаемости. Большой интерес вызывает определение лучевых траекторий в случае, когда «на фоне» параболического профиля имеется слабое возмущение, т. е. когда диэлектрическая проницаемость представляется в виде $\epsilon = \epsilon_0 + \nu \epsilon_1$, где $0 < \nu \ll 1$. Нахождение и изучение таких траекторий методом усреднения является целью настоящего исследования.

1. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ТРАЕКТОРИИ ЛУЧЕЙ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ИОНОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Уравнение луча в двумерном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2\epsilon} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{dz}{dx} \right). \quad (1)$$

Будем решать задачу Коши: $z(0) = z_0$, $(dz/dx)_{x=0} = \text{tg } \chi_0$. Известно, что в ионосфере горизонтальные градиенты ϵ , как правило, много мень-

ше вертикальных. Учтем это, введя «медленную» переменную $\tau = \nu_1 x$, где $0 < \nu_1 \ll 1$, и представим ε в форме

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\tau, z) + \nu \varepsilon_1(\tau, z), \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_0(\tau, z) = \varepsilon_m(\tau) - \left[\frac{z - z_m(\tau)}{a(\tau)} \right]^2, \quad (2a)$$

а $\nu \varepsilon_1$ описывает произвольное слабое возмущение. Таким образом, мы имеем два малых численных параметра, которые связаны с различными физическими процессами. В общем случае они, конечно, различны, однако для упрощения дальнейших выкладок положим $\nu_1 = \nu$.

Преобразуем исходное уравнение к виду, удобному для применения метода усреднения. Для этого введем новые переменные α и ψ [8]:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{1 + (dz/dx)^2}, \quad \psi = \frac{1}{T} \int_{z_0}^z \frac{\sqrt{\alpha} dz}{\sqrt{\varepsilon_0 - \alpha}} + \psi_0, \quad (3)$$

где

$$T = 2 \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \frac{\sqrt{\alpha} dz}{\sqrt{\varepsilon_0 - \alpha}} = 2\pi a \sqrt{\alpha}, \quad (3a)$$

\underline{z} , \bar{z} — решения уравнения $\varepsilon_0 = \alpha$. Интегралы в (3), (3a) берутся при фиксированных значениях α и τ . Выберем ψ_0 так, чтобы она скомпенсировала значение первообразной на нижнем пределе интеграла. Тогда

$$z = z_m + a \sqrt{\varepsilon_m - \alpha} \sin 2\pi\psi. \quad (4)$$

Дифференцируя (3) и учитывая (1), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= \nu(\varepsilon'_0 + A_1) + \nu^2 A_2 + O(\nu^3), \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{1}{T} + \nu S + O(\nu^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\sqrt{\alpha(\varepsilon_0 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial z} \gamma, \quad A_2 = -\gamma A_1 + (\varepsilon_0 - \alpha) \gamma', \\ S &= \psi' + (\varepsilon'_0 + A_1) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (5a)$$

а штрих обозначает дифференцирование по τ . Уравнения (5) представляют систему «с быстро вращающейся фазой», для интегрирования которой можно использовать метод усреднения. Мы применим схему, изложенную в [7].

Введем новые переменные ξ , η по формулам

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi + \nu u_1(\xi, \tau, \eta) + \nu^2 u_2(\xi, \tau, \eta) + \dots, \\ \psi &= \eta + \nu v_1(\xi, \tau, \eta) + \nu^2 v_2(\xi, \tau, \eta) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

и будем считать u_i и v_i ограниченными функциями при любом η (в частности, и при $\eta \rightarrow \infty$). Потребуем, чтобы ξ и η удовлетворяли уравнениям

$$\frac{d\xi}{dx} = \nu F_1(\xi, \tau) + \nu^2 F_2(\xi, \tau) + \dots, \quad (7)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{T(\xi, \tau)} + \nu \Phi_1(\xi, \tau) + \dots$$

Заметим, что система (7) значительно проще исходной, так как в ней «медленная» переменная ξ полностью отделена от «быстрой» η . Вычислив ξ из первого уравнения, мы сможем найти η квадратурой.

Для определения неизвестных функций u_i , v_i , F_i и Φ_i подставим (6) в (5), учтем (7) и приравняем члены с одинаковыми степенями ν . В результате получим соотношения

$$\frac{1}{T} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \varepsilon'_0 + A_1 - F_1; \quad (8)$$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = S - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} u_1 - \Phi_1; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = & u_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon'_0 + A_1) + v_1 \frac{\partial}{\partial \eta} (\varepsilon'_0 + A_1) + A_2 - \\ & - F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \Phi_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - u'_1 - F_2 \end{aligned} \quad (10)$$

и т. д. Можно показать, что для ограниченности u_1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$F_1 = \overline{\varepsilon'_0 + A_1} = \int_0^1 (\varepsilon'_0 + A_1) d\eta, \quad (11)$$

т. е. F_1 должно равняться среднему за период от $\varepsilon'_0 + A_1$. Зная F_1 , мы можем определить u_1 . Φ_1 находится аналогично и выражается формулой $\Phi_1 = S - T^{-2} u_1 (\partial T / \partial \xi)$. Затем вычисляется v_1 и т. д. Таким образом, операция усреднения гарантирует равномерность разложений (6) по η и позволяет определять функции, стоящие в правых частях уравнений (7). Систему (7) иногда называют усредненной системой, а ее решение — усредненным движением.

Следовательно, можно сказать, что физический смысл преобразования (6) заключается в разложении истинного движения, описываемого переменными α и ψ , на усредненное движение, которому соответствуют переменные ξ и η , и «дрожание», описываемое величинами $\nu^i u_i$ и $\nu^i v_i$.

Выпишем функции

$$F_1 = \varepsilon'_m + \frac{a'}{a} (\varepsilon_m - \xi), \quad \Phi_1 = \frac{1}{4T} \left(a_0 - \frac{a\xi}{\sqrt{\varepsilon_m - \xi}} d_1 - \frac{2\tilde{u}_1}{\xi} \right); \quad (12)$$

$$u_1 = -2\sqrt{\xi} \left[\frac{a'(\varepsilon_m - \xi)}{4} \sin 4\pi\eta + z'_m \sqrt{\varepsilon_m - \xi} \cos 2\pi\eta \right] - \gamma\xi + \tilde{u}_1; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \int_0^1 (u_1 + \gamma\xi - \tilde{u}_1) \frac{\partial A_1}{\partial \xi} d\eta + \frac{(a\varepsilon_m)'}{2a} a_0 + \frac{1}{2} \xi F_1 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon_m + \xi}{4} a'_0 + \\ & + \frac{(2\xi - \varepsilon_m) z'_m}{2a \sqrt{\varepsilon_m - \xi}} b_1 + \frac{(\varepsilon_m - 3\xi) a'}{4a} a_2 + \frac{\varepsilon_m - \xi}{4} a'_2 + \frac{(\varepsilon_m - \xi) z'_m}{4} c_0 + \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \frac{(\varepsilon_m - \xi)^{3/2} a'}{16} d_1 + \frac{(\varepsilon_m - 3\xi) z'_m}{4} c_2 - \frac{(5\xi - \varepsilon_m) \sqrt{\varepsilon_m - \xi} a'}{16} d_3 - \frac{(a\tilde{u}_1)'}{a} - F_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi}.$$

Здесь $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(\xi, \tau)$ — произвольная функция, $\gamma = \gamma(\tau, z)$, где $z = z_m + a \sqrt{\varepsilon_m - \xi} \sin 2\pi\eta$; a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты Фурье в разложениях

$$\gamma = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi\eta + b_k \sin 2k\pi\eta); \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \gamma = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos 2k\pi\eta + d_k \sin 2k\pi\eta). \tag{16}$$

Если нумеровать приближения в соответствии с порядком погрешности, то интересующая нас система уравнений примет вид

$$\frac{d\xi_2}{dx} = v F_1 + v^2 F_2, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \frac{1}{T} + v\Phi_1. \tag{17}$$

Выберем \tilde{u}_1 так, чтобы F_2 обратилось в нуль. Для этого необходимо решить уравнение

$$F_1(\xi_2, \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = B(\xi_2, \tau), \tag{18}$$

где $v = a\tilde{u}_1$, а $B(\xi_2, \tau)$ определяется из вида F_2 . Отсюда получаем, что

$$\tilde{u}_1(\xi_2(\tau), \tau) = \frac{1}{a(\tau)} \left[\int B(\xi_2(\tau), \tau) d\tau + \tilde{c} \right], \tag{19}$$

где \tilde{c} — произвольная постоянная. Учитывая начальные данные и определение a , из (17) находим уравнение лучевой траектории

$$z(x) = z_m(x) + \sqrt{ca(x)} \sin \left[\int_0^x \frac{dx}{a(x) \sqrt{\xi_2(x)}} + 2\pi v \int_0^x \Phi_1(\xi_2(x), x) dx + \arcsin \frac{z_0 - z_m(0)}{\sqrt{ca(0)}} \right] + O(v), \tag{20}$$

где

$$\xi_2 = -\frac{c}{a} + \varepsilon_m, \quad c = a(0) [\varepsilon_m(0) - \varepsilon_0(0, z_0) \cos^2 \chi_0]. \tag{21}$$

\tilde{c} , входящее в Φ_1 , определяется из условия $u_1(x=0) = 0$.

Мы нашли в явном виде траекторию, которая описывает плавные, усредненные изменения действительной. Истинная траектория отличается от полученной величинами порядка $O(v)$, которые выражают «быстрые» возмущения с малыми амплитудами («дрожание»).

Рассмотрим в следующем разделе случай отсутствия горизонтальных градиентов у ε_0 .

2. ЛУЧЕВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть $\epsilon_m = 1$, $z_m = 0$, $a = \text{const}$. Уравнение траектории принимает вид

$$z(x) = a \sqrt{1 - \xi_2} \sin 2\pi \left[\frac{x}{T} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{z_0}{a \sqrt{1 - \xi_2}} + \nu \left(A(x) - \frac{hx}{2T\xi_2} \right) \right] + O(\nu), \quad (22)$$

где

$$\xi_2 = \left[1 - \left(\frac{z_0}{a} \right)^2 \right] \cos^2 \chi_0; \quad (23)$$

$$A(x) = -\frac{1 - \xi_2}{4T\xi_2} \int_0^x dt \int_0^1 \gamma(t, z) (1 + \cos 4\pi\eta) d\eta - \frac{a\xi_2}{2T\sqrt{1 - \xi_2}} \times \\ \times \int_0^x dt \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \gamma(t, z) \sin 2\pi\eta d\eta; \quad (24)$$

$$h = \epsilon_1(0, z_0) \cos^2 \chi_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma(0, z) [1 + \xi_2 + (1 - \xi_2) \cos 4\pi\eta] d\eta. \quad (25)$$

Отметим, что изменение амплитуды приводит к изменению периода осцилляций по x .

Пусть ϵ_1 — случайное поле со средним значением, равным нулю, и с функцией корреляции гауссова типа:

$$K = D \exp [-\alpha_1 (x' - x)^2 - \alpha_2 (z' - z)^2], \quad (26)$$

где D и α_i — постоянные.

Значительный интерес вызывает определение усредненной в статистическом смысле (т. е. по ансамблю лучей) траектории луча. Предположив, что $A(x) - hx/(2T\xi_2)$ распределено по нормальному закону, и усредняя, получаем

$$\overline{z(x)} = a \sqrt{1 - \xi_2} \exp [-\Omega(\xi_2, x)] \sin \left(\frac{2\pi x}{T} + \arcsin \frac{z_0}{a \sqrt{1 - \xi_2}} \right) + O(\nu). \quad (27)$$

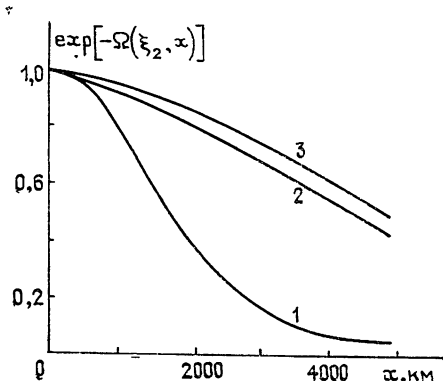


Рис. 1.

$\Omega(\xi_2, x)$ определяется несколькими интегралами весьма сложного вида, которые не поддаются аналитическим оценкам.

На рисунке приведены графики зависимости экспоненциального множителя от расстояния, которые могут служить примером использования полученных формул. Кривым 1, 2 и 3 соответствуют $\xi_2 = 0,1, 0,3$ и $0,5$.

Параметры выбирались следующим образом. В качестве ν

взято $\nu = |(\partial \epsilon / \partial x) / (\partial \epsilon / \partial z)| \ll 1$, а в качестве возмущающей среды рассмотрены крупномасштабные волнообразные неоднородности. Известно [9, 10], что неоднородности данного типа могут обладать ярко выраженной анизотропией, т. е. может быть $\lambda_2 / \lambda_1 \sim \nu$, где λ_1 — масштаб, определяющий периодичность неоднородностей в горизонтальном направлении, λ_2 — аналогичный масштаб в вертикальном направлении. Мы рассмотрели именно последний случай. Переходя к безразмерным координатам $\bar{x} = x / \lambda_2$, $\bar{z} = z / \lambda_2$, $\bar{\tau} = \tau / \lambda_2$, можно показать, что условием применимости метода усреднения является выполнение неравенства $T \ll \lambda_1$. Поэтому, выбрав $a = 20$ км, мы использовали следующие значения: $\lambda_1 = 1000$ км, $\lambda_2 = 50$ км, $\nu = \lambda_2 / \lambda_1 = 0,05$, $\alpha_i = \lambda^{-2}_i$ ($i = 1, 2$). Учитывая, что при данных размерах неоднородностей δN (N — электронная концентрация) $\sim 10^{-1}$ [11] и $\delta \epsilon = \nu \epsilon_1$, мы взяли для $D = \epsilon_1^2$ значение 0,03. Интегралы вычислялись на ЭВМ.

Итак, на расстояниях порядка $1/\nu$, т. е. нескольких длин волн неоднородностей в горизонтальном направлении, усредненная траектория отличается от невозмущенной только убыванием амплитуды. Отметим монотонную зависимость между скоростью убывания и ϵ_2 , что естественно, так как лучи, соответствующие меньшим значениям ξ_2 , подвержены большему влиянию ионизированной среды.

Исследуем, как влияет возмущение на углы прихода луча в заданной точке ($x = l$, $z = z_1$). Пусть ξ_l удовлетворяет уравнению

$$z(l) = a \sqrt{1 - \xi_l} \sin 2\pi \left(\frac{l}{T} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{z_0}{a \sqrt{1 - \xi_l}} \right) = z_1. \quad (28)$$

Положим в формуле (22) $\xi_2 = \xi_l$, $hl/2T \xi_l = A(l)$ и потребуем, чтобы $O(\nu) |_{x=l} = 0$. Тогда возмущенный луч попадает в указанную точку. Далее, воспользовавшись определением α , получаем

$$\text{tg } \psi_l = \left[1 - \nu \frac{u_1 \epsilon_0}{2 \xi_l (\epsilon_0 - \xi_l)} \right]_{x=l, z=z_1} \text{tg } \psi_l^{(0)} + O(\nu^2), \quad (29)$$

где ψ_l и $\psi_l^{(0)}$ — углы прихода возмущенного и невозмущенного луча.

Полезно сравнить полученные результаты с решением задачи с помощью обычного метода возмущений. Если искать решение уравнения луча в виде $z = z^{(0)} + \nu z^{(1)} + \dots$, то, используя теорему Пуанкаре [7], можно заметить, что уже в выражении $\nu z^{(1)}$ появляются секулярные члены. Поэтому на больших расстояниях от источника решение в такой форме может оказаться некорректным. С другой стороны, нетрудно обнаружить, что при малых значениях x решения, полученные двумя методами, близки между собой и с решением невозмущенного уравнения.

Итак, применив метод усреднения, мы нашли траекторию луча в первом приближении и определили поправки к углам прихода невозмущенного луча в фиксированной точке. Эффективность метода проявилась здесь в том, что приближение является равномерным, т. е. пригодным и на больших расстояниях от источника. Подчеркнем также, что, статистически усреднив лучевую траекторию, мы получили кривую, отличную от невозмущенной, в то время как в работе [2] усредненная лучевая траектория в первом приближении теории возмущений совпадает с невозмущенной.

Мы исследовали только «кинематическую» часть проблемы, тогда как «динамика», т. е. поведение поля, остается еще неизученной. Эта вторая часть представляется важным продолжением настоящей работы.

В частности, интересно выяснить, существует ли связь между картиной поля и поведением усредненного (в статистическом смысле) луча. Отметим также, что если решать нашу задачу численными методами, то их следует применять к усредненной системе (7), поскольку она значительно проще исходной [7]. Аналогичное замечание справедливо и для других задач, решение которых можно искать методом усреднения.

Автор выражает глубокую благодарность М. В. Тинину за постановку задачи и плодотворное обсуждение работы, а также К. В. Сви-стуну за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Д. Гусев, Н. А. Махмутов, А. Хури, Радиотехника и электроника, 19, № 9, 1809 (1974).
3. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
4. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 1, 52 (1975).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.
6. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, изд. МГУ, 1971.
7. Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969.
8. М. В. Тинин, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 39, изд. Наука, М., 1976.
9. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 1, 5 (1968).
10. Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
11. Г. Г. Гетманцев, К. И. Грингауз, Л. М. Ерухимов, Ю. А. Кравцов, Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Рудаков, С. М. Рытов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 5, 649 (1968).

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
6 февраля 1978 г.,
после переработки
2 ноября 1978 г.

RAY TRAJECTORIES IN THE IONOSPHERE WAVEGUIDE REGARDING THE WEAK DISTURBANCE OF THE DIELECTRIC PERMITTIVITY

V. N. Mirolyubov

On the basis of the averaging method the influence of inhomogeneities is considered on the ray trajectories both in regular and unregular waveguides with a parabolic profile of the dielectric permittivity. The average (in the statistical sense) trajectory of a ray is built and corrections to arrival angles of an undisturbed ray in the given point are defined.