

СОДЕРЖАНИЕ

Грач С. М. Тепловая параметрическая неустойчивость в ионосферной плазме на частотах, близких к $\omega_{He}$ и $2\omega_{He}$ . . . . .	521
Файнгольд М. И. Электромагнитный «Тахион» . . . . .	531
Мельник Л. П., Филоненко Н. Н. О КПД генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах с продольной неоднородностью показателя преломления	542
Драпей В. А., Дергаус В. И. Статистическая оценка мультипликативных искажений в ветвящихся усилителях мощности . . . . .	555
Вировлянский А. Л., Малахов А. Н. Приближенное вычисление плотности вероятности переходов одномерных марковских процессов . . . . .	560
Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А. Многократное рассеяние волн в одномерной случайно-неоднородной среде . . . . .	566
Малахов А. Н., Саичев А. И. Промежуточные уравнения теории диффузионных процессов с двухточечными граничными условиями . . . . .	577
Кляцкин В. И. Флуктуации интенсивности волны внутри одномерного случайно-неоднородного слоя среды. II . . . . .	591
Кан В. Четырехточечная функция когерентности частотно-разнесенных волн в турбулентной среде . . . . .	598
Аксенов В. П., Миронов В. Л. Метод спектральных разложений в задачах распространения оптических волн в турбулентной среде . . . . .	604
Газазян Э. Д., Лазиев Э. М., Тер-Погосян А. Д. Энергия электромагнитной волны в волноводе, заполненном движущейся диспергирующей средой . . . . .	615
Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции электромагнитных волн на незамкнутой круговой цилиндрической поверхности . . . . .	620
Нарбут В. П. О поляризационных характеристиках двухзеркальных антенн . . . . .	628

Краткие сообщения и письма в редакцию

Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А., <u>Лупанов Г. А.</u> Об одной особенности отражения электромагнитных импульсов неоднородно движущейся проводящей средой . . . . .	639
Белов Ю. И., Зуйкова Э. М., Пигулевский Е. Д., Рыжков А. Ф. Измерение диаграммы направленности антенн по голограммам ближнего поля с помощью обработки в некогерентном свете . . . . .	641

Хроника

XII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн . . . . .	644
---	-----

Аннотации депонированных статей

Брюховецкий А. С. Дифракция электромагнитных волн на плазменном эллиптическом цилиндре . . . . .	590
--	-----

УДК 621.371.25

## ТЕПЛОВАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ НА ЧАСТОТАХ, БЛИЗКИХ

К  $\omega_{He}$  И  $2\omega_{He}$

С. М. Грач

Показано, что порог тепловой параметрической неустойчивости (ТПН) повышается при приближении частоты волны накачки  $\omega$  к гирочастоте электронов  $\omega_{He}$ . При приближении  $\omega$  к  $2\omega_{He}$  порог ТПН в однородной плазме также повышается. В неоднородной плазме, когда градиенты концентрации и магнитного поля антипараллельны, возможно существенное снижение порога ТПН при  $\omega \rightarrow 2\omega_{He}$ .

Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования воздействия мощного радиоизлучения на ионосферную плазму, проведенные в последнее время [1-11], показали, в частности, что вблизи точки отражения мощной «обыкновенной» радиоволны в плазме образуются мелкомасштабные неоднородности, сильно вытянутые вдоль геомагнитного поля  $H$  ( $l_{\parallel} \gg l_{\perp}$ ,  $l_{\perp} \leq \lambda_0$  — длины радиоволны в вакууме). Механизм их образования связан с тепловыми параметрическими эффектами, в частности, с тепловой параметрической неустойчивостью (ТПН), рассмотренной в работах [5, 6], или резонансной неустойчивостью [7, 8]. Эксперименты показали также, что приближение частоты возмущающей радиоволны (волны накачки)  $\omega$  к гирочастоте электронов  $\omega_{He}$  приводит к ослаблению роста мелкомасштабных неоднородностей [9, 10], а приближение  $\omega$  к удвоенной гирочастоте  $2\omega_{He}$  приводит к обратному явлению — усилению их роста [11]. Резонансная неустойчивость в области частот  $\omega \sim 2\omega_{He}$  исследована в работе [8]. В данной работе на основе результатов [5, 6] мы исследуем линейную стадию ТПН как в однородной, так и неоднородной плазме в области частот  $\omega \sim \omega_{He}$  ( $u \leq 1$ ,  $u = \omega_{He}^2/\omega^2$ ) и  $\omega \sim 2\omega_{He}$  ( $u \sim 1/4$ ). Напомним, что при тепловой параметрической неустойчивости возбуждаются плазменные волны с частотой  $\omega_p \sim \omega$  и волновыми векторами  $k$ , почти перпендикулярными магнитному полю  $H$ , и неоднородности электронной концентрации  $n$  с волновыми векторами  $x$ , причем  $k \pm x = k_t$  ( $k_t$  — волновой вектор волны накачки). В дальнейшем всюду будем полагать  $|k| \approx |x| \gg |k_t|$ . Для эффективного возбуждения ТПН необходимо «квазипродольное» распространение волны накачки. При больших углах  $\alpha$  ( $\alpha$  — угол между  $k_t$  и  $H$ ) ТПН не возбуждается [5].

1. Рассмотрим сначала случай однородной плазмы. Согласно [5], порог ТПН дается выражением

$$\frac{E_{th}^2}{4\pi NT} = -\frac{3\nu_e}{4\pi \cdot \omega} \tilde{\gamma} (\delta + x_{\parallel}^2 l_e^2 + x_{\perp}^2 \rho_e^2) \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon(\omega_p))}{\omega \partial \omega} \frac{1}{(\alpha_p \hat{\sigma} \alpha) (\alpha_p \hat{\varepsilon} \alpha)}. \quad (1)$$

Здесь  $E$  — напряженность электрического поля волны накачки,  $N$  и  $T$  — концентрация и температура плазмы,  $\nu_e$  — частота столкновений элект-

ронов,  $\tilde{\gamma}$  — декремент затухания плазменных волн,  $\delta$  — доля энергии, теряемая электроном при одном соударении с тяжелой частицей, индексы  $\parallel$  и  $\perp$  относятся к проекциям волнового вектора неоднородности  $\mathbf{x}$  на направления, параллельное и перпендикулярное магнитному полю  $\mathbf{H}$ ,  $l_e$  и  $\rho_e$  — длина свободного пробега и гирорадиус электронов,  $l_e = \left(\frac{T}{m v_e^2}\right)^{1/2}$ ,  $\rho_e = \left(\frac{T}{m \omega_{He}^2}\right)^{1/2}$ ,  $l_e \gg \rho_e$  в типичных условиях ионосферы,  $\epsilon$  — скалярная диэлектрическая проницаемость плазмы,  $\hat{\sigma}$  и  $\hat{\epsilon}^e$  — вклад электронов в эрмитову часть тензоров проводимости и диэлектрической проницаемости на частоте  $\omega$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}_p$  — векторы поляризации электромагнитной и плазменной волн. Множитель  $(\mathbf{a}_p \hat{\epsilon}^e \mathbf{a})$  связан с рассеянием электромагнитной волны в плазменные неоднородности концентрации  $n$ , а величина  $(\mathbf{a}_p \hat{\sigma} \mathbf{a})$  — с нагревом плазмы в поле электромагнитной и рассеянной плазменной волн.

При малых углах  $\alpha$  в области «квазипродольности» волны накачки

$$(\mathbf{a}_p \hat{\sigma} \mathbf{a}) (\mathbf{a}_p \hat{\epsilon}^e \mathbf{a}) \approx - \frac{\nu_e}{4\pi} \frac{v^2}{2(1 + \sqrt{u})^3}, \quad (2)$$

где  $v = \omega_{pe}^2 / \omega^2$ ,  $\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$  — плазменная частота электронов. Отметим, что порог ТПН (1) ниже порога стрикционной параметрической неустойчивости при  $x_{\perp}^2 \rho_e^2 \ll 1$ ,  $x_{\parallel}^2 l_e^2 \ll 1$ . Этот случай мы в дальнейшем и будем иметь в виду. В силу условий синхронизма величина  $k_{\perp}^2 \rho_e^2$  также мала по сравнению с единицей.

Вдали от резонансов  $\omega = s \omega_{He}$  ( $s = 2, 3, \dots$ ) частота плазменных волн находится из выражения

$$v = \frac{1 - u \cos^2 \theta}{1 - u \cos^2 \theta}, \quad \theta — \text{угол между } \mathbf{k} \text{ и } \mathbf{H}, \quad \cos^2 \theta = \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \quad (3)$$

и при ТПН  $\cos^2 \theta \ll 1$  [5]. Таким образом,  $v \approx 1 - u$  и частота плазменных волн  $\omega_p \approx \omega_{v.r} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}$  — верхней гибридной частоте. Величина

$$\frac{\partial(\omega^2 \epsilon(\omega_p))}{\omega \partial \omega} = \frac{2(2 - u - v)}{1 - u} \approx \frac{2}{1 - u}. \quad (4)$$

Учитывая (2), (3) и (4), получаем, что  $\left(\frac{E^2}{4\pi}\right)_{\text{th}} \propto \frac{(1 + \sqrt{u})^3}{v(1 - u)} \approx \frac{1 + \sqrt{u}}{(1 - \sqrt{u})^2}$  и порог неустойчивости растет при  $u \rightarrow 1^*$ . При  $\omega \rightarrow 2\omega_{He}$  ( $u \rightarrow 1/4$ ) следует рассмотреть два случая.

1)  $(v - 3u)^2 \gg 12uvk_{\perp}^2 \rho_e^2$ . Частота плазменных волн при этом (см. Приложение) далека от верхней гибридной частоты. Величина

$$\frac{\partial(\omega^2 \epsilon(\omega_p))}{\omega \partial \omega} \approx \frac{3u - v}{1 - 4u} \gg 20 \quad (5)$$

\* Возбуждение ТПН при  $\omega \rightarrow \omega_{He}$  ( $u \rightarrow 1$ ) возможно, в силу условий частотного синхронизма  $\omega \approx \omega_p$ , только при  $\omega_{pe} \ll \omega_{He}$ . При  $\omega_{pe} \sim \omega_{He} \sim \omega$  возбуждение плазменных волн с частотой  $\omega_p \sim \omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$  невозможно [5, 9]; невозможно, следовательно, и возбуждение ТПН.

и порог ТПН существенно повышается по сравнению с далеким от резонанса  $\omega \sim 2\omega_{He}$  случаем.

2)  $(v - 3u)^2 \ll 12uvk_{\perp}^2 \rho_e^2$ . При этом верхняя гибридная частота совпадает с удвоенной гирочастотой электронов. Величина

$$\frac{\partial(\omega^2 \varepsilon(\omega_p))}{\omega \partial \omega} = \frac{2v}{(1-u)^2} \left[ 1 + \frac{2-5u}{v} \right] \approx \frac{16}{3} \quad (6)$$

и порог ТПН несколько выше, чем в нерезонансном случае.

2. Перейдем теперь к рассмотрению неоднородной плазмы. Согласно [6], порог ТПН в этом случае равен

$$\frac{E_{th}^2}{4\pi NT} = \beta \left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|_{\omega=\omega_p} \left( 1 + \frac{\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2}{\delta} \right)^{1/2} \exp \left\{ 2 \left| \int_{z_c}^{z_1} \frac{\tilde{\gamma}}{V_z} dz \right| \right\}, \quad (7)$$

где свойства плазмы меняются вдоль оси  $z$ ,  $V_z$  — проекция групповой скорости плазменных волн на ось  $z$ ,  $\beta = \frac{3}{\pi} \frac{(1 + \sqrt{u})^3}{v^2} l_e \delta^{1/2}$ . Значения всех величин берутся в «точке синхронизма»  $z_c$ , где  $k_t = k_z \pm \kappa_z$ ; считается, что  $k_t \parallel z$ ,  $\kappa \perp H$ . Величина  $\exp \left\{ 2 \int_{z_c}^{z_1} \frac{\tilde{\gamma}}{V_z} dz \right\} = \exp \{ \Gamma \}$  харак-

теризует затухание плазменных волн при их распространении от точки взаимодействия  $z_c$  до точки поворота  $z_1$ . Вдали от резонансов  $\omega \approx s\omega_{He}$  ( $s = 2, 3, \dots$ ) величина

$$\frac{d\varepsilon}{dz} \Big|_{\omega=\omega_p} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dz}. \quad (8)$$

Будем считать, что плотность плазмы меняется по линейному закону

$$v = v_0(1 - z/L). \quad (9)$$

В этом случае порог неустойчивости с учетом (3)

$$\frac{E_{th}^2}{4\pi} \propto \frac{(1 + \sqrt{u})^3}{v^2} \approx \frac{1 + \sqrt{u}}{(1 - \sqrt{u})^2}$$

и растет при  $u \rightarrow 1$  так же быстро, как и в однородной плазме.

Для исследования ТПН при  $\omega \sim 2\omega_{He}$  ( $u \sim 1/4$ ) нам необходимо несколько подробнее остановиться на дисперсионных свойствах плазменных волн. Дело в том, что, во-первых, при  $u \rightarrow 1/4$  принципиально необходим учет пространственной дисперсии. Во-вторых, ТПН в неоднородной плазме возбуждается только при наличии у взаимодействующих волн точек поворота [6], и необходимо знать, есть ли они у плазменных волн. Кроме того, при  $\omega \sim 2\omega_{He}$  на распространение последних существенно влияет неоднородность магнитного поля. В ионосфере, например, ниже максимума  $F$ -слоя градиенты концентрации  $\nabla N$  и магнитного поля  $\nabla H$  направлены в противоположные стороны, что приводит к немонотонной зависимости показателя преломления от координаты  $z$  и существенному снижению порога ТПН.

Дисперсионное уравнение плазменных волн при  $\omega \sim 2\omega_{He}$  имеет вид

$$k_{\parallel}^2 = \frac{1-u-v}{(1-u)(1-v)} k_{\perp}^2 \left( \frac{3uvk_{\perp}^2 \rho_e^2}{(1-4u)(1-u-v)} - 1 \right). \quad (10)$$



Зависимость  $k^2(z)$  при  $k_{\parallel} = 0$  приведена на рис. 1а, б, причем, в случае а)

$$u|_{v=3u} > \frac{1}{4} \quad (\omega < 2\omega_{He}, \quad u|_{v=3u} = 0,252), \quad (11)$$

в случае б)

$$u|_{v=3u} < \frac{1}{4} \quad (\omega > 2\omega_{He}, \quad u|_{v=3u} = 0,248). \quad (12)$$

Магнитное поле  $H$  и концентрация  $N$  считались линейно зависящими от  $z$ :

$$u = u_0 \left( 1 + \frac{\mu z}{L} \right), \quad v = v_0 \left( 1 - \frac{z}{L} \right), \quad \mu \ll 1, \quad \mu = 0,07.$$

За начало координат взят уровень  $v_0 = 3u_0$ , где верхняя гибридная частота  $\omega_{в.г}$  совпадает с удвоенной гирочастотой  $2\omega_{He}$ . Видно, что при  $v < 1$  (ниже уровня отражения волны накачки) плазменные волны с  $\omega < 2\omega_{He}$  (11) существуют при  $z < z^*$ , т. е. при  $1 - u - v < 0$  (точка  $z^*$  на рис. 1 соответствует уровню верхнего гибридного резонанса  $1 - u - v = 0$ ), а плазменные волны с  $\omega > 2\omega_{He}$  (12) — при  $z > z^*$  ( $1 - u - v > 0$ ). На этих же рисунках изображены зависимости  $k_{\parallel}$  ( $k_{\perp}^2$ ) при различных  $z$ . Видно, что эти зависимости носят существенно разный характер: в случае (12)  $|k_{\parallel}|$  растет с ростом  $k_{\perp}^2$ , в случае (11) наблюдается обратная картина.

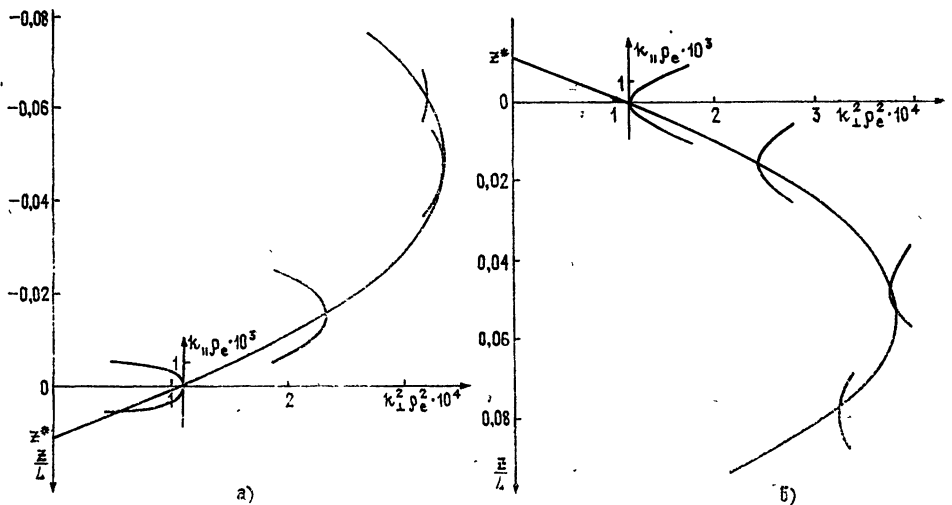


Рис. 1.

Декремент затухания плазменных волн

$$\tilde{\gamma} = \frac{\nu_e}{2} \frac{1 + u + 3uk^2 \rho_e^2 (3 - 5u - 4u^2) (1 - 4u)^{-2}}{1 + 3uk^2 \rho_e^2 (2 - 5u) (1 - 4u)^{-2}} \approx \nu_e. \quad (13)$$

Здесь мы не учли бесстолкновительное циклотронное затухание плазменных волн. Оно несущественно при  $\Delta^2 = (\omega - 2\omega_{He})^2 \gg k_{\parallel}^2 V_{Te}^2$ ,  $V_{Te}$  — тепловая скорость электронов;  $|k_{\perp}| \gg |k_{\parallel}|$ . Кроме того, предполага-

лось, что  $\Delta \gg \nu_e$ . Оценки, проведенные для возбуждения ТПН в условиях ионосферы ( $k_{\perp} \sim k_t$ ), показали, что бесстолкновительным затуханием можно пренебречь при  $\Delta/\omega = 1 - 2\sqrt{u} \gtrsim 5 \cdot 10^{-4}$ . Более подробно свойство плазменных волн при  $\omega \approx 2\omega_{He}$  рассмотрены в Приложении.

При учете неоднородности магнитного поля величина  $\left. \frac{d\varepsilon}{dz} \right|_{\omega = \omega_p}$  дается выражением

$$\left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|_{\omega = \omega_p} = \frac{v_0}{vL} \left| 1 - \frac{v^2}{(1-u)^2} \frac{\mu}{3} \left( \frac{3\mu k^2 \rho_e^2 (5-8u)}{(1-4u)^2} + 1 \right) \right|. \quad (14)$$

Здесь мы учли, что  $\sin^2 \theta \approx 1$ . Видно, что несмотря на малость  $\mu$  ( $\mu \sim 0,05 \div 0,1$  в типичных ионосферных условиях) при  $u \rightarrow 1/4$  величина  $\left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|$  существенно уменьшается по сравнению с (8). Более низким становится, малым образом, и порог ТПН (7). В точке  $z = z_M$  величина  $\frac{d\varepsilon}{dz} = 0$ . Если точка синхронизма  $z_c$  приближается к  $z_M$ , то метод стационарной фазы, примененный в [6] для вычисления порога неустойчивости, приходится несколько видоизменить, так как точка  $z_M$  является точкой стационарной фазы второго порядка. Порог ТПН при  $z_c \approx z_M$  дается выражением

$$\frac{E_{th}^2}{4\pi NT} = 0,6\beta \left( 1 + \frac{x_{\perp}^2 \rho_e^2}{\delta} \right)^{1/2} \left| \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} \right|^{2/3} \left| \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_z} \right|^{1/3} \exp\{\Gamma\}. \quad (15)$$

Отметим, что в случае (12) минимальный порог неустойчивости не достигается, так как при этом пропадают точки поворота плазменных волн — необходимое условие возбуждения ТПН. В случае (11), если существует волновод для плазменных волн (см. Приложение), последние могут многократно участвовать во взаимодействии с электромагнитной волной, что, в свою очередь, должно приводить к дальнейшему снижению порога ТПН по сравнению с (15). Зависимость порога неустойчивости от  $z$  (и, следовательно, от масштаба неоднородности  $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{k_{\perp}}$  см. рис. 1) без учета затухания плазменных волн (множитель  $\exp\{\Gamma\}$  в выражениях (7) и (15)) приведена на рис. 2. Рис. 2а соответствует (11), рис. 2б — (12). Пунктирной линией на рисунке изображена зависимость порога неустойчивости от  $z$ , вычисленная без учета неоднородности магнитного поля. На рис. 2б заштрихована область, где неустойчивость не возбуждается из-за отсутствия точек поворота у плазменных волн. Видно, что минимальный порог при этом несколько ниже, чем в нерезонансном случае\*, и особенно заметно снижение порога ТПН для одинаковых масштабов  $x^{-1}$ . В случае (11), рис. 2а неустойчивость возбуждается во всей области существования плазменных волн, и минимальный порог ТПН (при масштабе неоднородности  $x^{-1} \approx k_{\perp}^{-1}(z_M)$ ) в несколько раз ниже минимального порога в нерезонансном случае ( $x \rightarrow 0$ ) и приблизительно на порядок ниже порога неустойчивости для неоднородностей (и плазменных волн) с тем же масштабом. Отметим,

\* В нерезонансном случае  $\omega \neq s\omega_{He}$  минимальный порог ТПН имеет место при  $x \rightarrow 0$  и равен

$$\beta^{-1} L \frac{E_{th}^2}{4\pi NT} = 1.$$

что неоднородности с  $\kappa \sim k_{\perp} > k_{\perp}(z_M)$  возбуждаться не будут, так как не существует плазменных волн с такими волновыми числами (рис. 1). Минимальный порог ТПН на рис. 2 а вычислен для типичных параметров  $F$ -слоя ионосферы:  $L = 75$  км,  $\rho_e = 2$  см,  $\delta = 10^{-4}$ .

При увеличении относительной расстройки  $\Delta/\omega$  ( $z = 0$ ) увеличивается интервал высот, занятый плазменными волнами. Возрастают также величины  $|z_M|$ ,  $k_{\perp}^2 \rho_e^2(z_M)$ . При достаточно больших  $\Delta/\omega$  (например, при  $u(0) = 0,26$  для  $\mu = 0,07$ ) точка  $z_M$  попадает в область «квазиперечного» распространения волны накачки. Условия возбуждения ТПН при этом существенно ухудшаются [5, 6]. Если же  $z_M$  остается в области «квазипродольности» волны накачки, то минимальный порог неустойчивости уменьшается с ростом  $\Delta/\omega$ , несмотря на увеличение  $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2(z_M)$ . Так, при  $\Delta/\omega = 0,67 \cdot 10^{-2}$  минимальное значение порога  $\beta^{-1} E_{th}^2 / 4\pi NT = 0,07$  ( $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $z_M/L \approx -0,157$ ), тогда как при  $\Delta/\omega = 0,2 \cdot 10^{-2}$

$\left( L \beta^{-1} \frac{E_{th}^2}{4\pi NT} \right)_{\min} = 0,19$  ( $\kappa_{\perp}^2 \rho_e^2 = 3,3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\frac{z_M}{L} = -0,05$ ). При  $z_c \sim z_M$

условие (П.8) (см. Приложение) оказывается выполненным, однако при удалении точки синхронизма от точки  $z_M$  с ростом  $\Delta/\omega$ ,  $z_c \rightarrow z_1$ , условие (П.8) нарушается, и выражение (7) для порога ТПН становится неприменимым. Например, при  $\Delta/\omega = 0,67 \cdot 10^{-2}$  и  $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$

$\left( \frac{z_c}{L} = 0,062 \right)$  величина  $k_t |z_c - z_1| \sim 0,6$ .

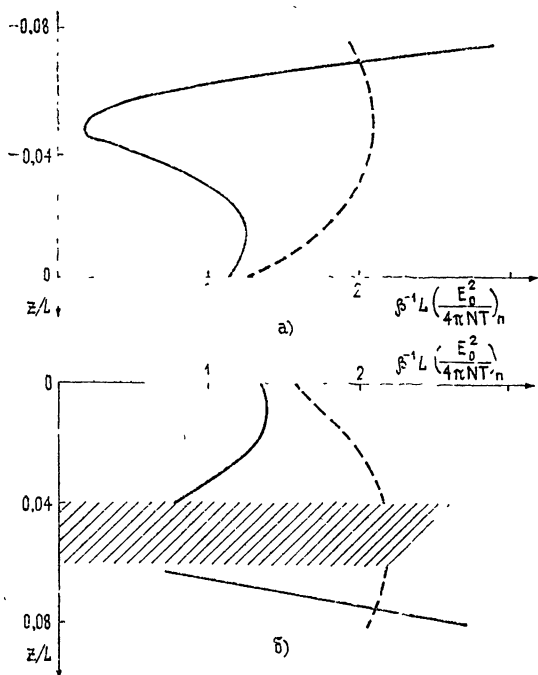


Рис. 2.

Рис. 2 построен для случая слабого затухания плазменных волн,  $\Gamma \ll 1$ . Выбрав для оценок следующие значения:  $\omega_{He}/2\pi \approx 1,4$  МГц,  $\nu_e \approx 0,5 \cdot 10^2$  (типичное значение для ночного  $F$ -слоя ионосферы),  $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \approx 3 \cdot 10^{-4}$ , мы получим, что при  $k_t |z_c - z_1| \sim 2\pi \Gamma \sim 0,1 \div 0,15$ ,

т. е. затухание плазменных волн для больших  $k_t |z_c - z_1|$  может существенно увеличивать порог ТПН.

Приведем в заключение основные результаты работы.

1) Порог тепловой параметрической неустойчивости при  $u \rightarrow 1$  ( $u < 1$ ) становится более высоким как в однородной, так и в неоднородной плазме. Более существенными в этом случае должны быть стрикционные эффекты.

2) При  $\omega \sim 2\omega_{He}$  порог ТПН в однородной плазме также повышается по сравнению с нерезонансным ( $\omega \neq s\omega_{He}$ ) случаем. Однако при «двойном» резонансе ( $2\omega_{He} \sim \omega_{в.р}$ ) порог ТПН возрастает существенно слабее.

3) В неоднородной плазме, когда градиенты концентрации и магнитного поля антипараллельны (например, ниже максимума  $F$ -слоя в ионосфере), порог ТПН в силу особенностей распространения плазменных волн при  $\omega \sim 2\omega_{He}$  снижается по сравнению с нерезонансным случаем. Такое явление наблюдалось, по-видимому, на эксперименте [11]. Отметим две особенности возбуждения ТПН при  $\omega \sim 2\omega_{He}$ .

1) Эффекты, связанные с ТПН, например, аномальное ослабление электромагнитной волны, ракурсное рассеяние [1-4, 9-11], должны более ярко проявляться при  $u > 1/4$  (по крайней мере, на линейной стадии неустойчивости), чем при  $u < 1/4$ .

2) Существует минимальная длина волны плазменных волн  $\lambda = 2\pi/k_{\perp}(z_m)$  и, соответственно, минимальный масштаб неоднородностей\* концентрации  $n$ . Порог ТПН растет с увеличением длины волны плазменных волн—ситуация, противоположная нерезонансному случаю.

Отметим, что учет неоднородности магнитного поля может несколько изменить выводы работы [8] относительно оптимальных масштабов возбуждения резонансной неустойчивости.

Нужно сказать, что эффекты, связанные с ТПН при  $\omega \approx 2\omega_{He}$ , могут существенно изменить свой характер, а то и вовсе исчезнуть при изменении частоты накачки на 1,5—2%. При  $\omega \sim s\omega_{He}$  ( $s > 2$ ) при одинаковых значениях расстройки  $\frac{\Delta}{\omega} = \frac{\omega - n\omega_{He}}{\omega}$  ( $z = 0$ ) кривая зависимости

показателя преломления от  $z$  с ростом  $s$  вытягивается в область больших значений  $k_{\perp}^2 \rho_e^2$  (малых длин волн), и в силу множителя  $(1 + \kappa^2 \rho_e^2 / \delta)^{1/2}$  в (7) и (15) порог ТПН сильно возрастает в области  $z \sim z_m$ . Однако при уменьшении относительной расстройки  $\Delta/\omega$  снижение порога ТПН возможно и при  $s > 2$ . Следует отметить также, что при  $s > 2$  распространение плазменных волн (мод Бернштейна) носит существенно более сложный характер [12].

Автор благодарит Н. А. Митякова, В. О. Рапопорта и В. Ю. Трахтенгерца за постоянное внимание к работе и полезные советы, а также А. Н. Караштина и В. Л. Фролова за обсуждения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В Приложении мы рассмотрим основные свойства плазменных волн при  $\omega \sim 2\omega_{He}$ , а также приведем условия применимости выражений (7) и (15) для порога ТПН. Дисперсионное уравнение плазменных волн имеет вид ( $k_{\perp}^2 \rho_e^2 \ll 1$ )

$$\varepsilon = 1 - v \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} - \frac{v}{1-u} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} - \frac{3uvk_{\perp}^4 \rho_e^2}{k^2(1-u)(1-4u)} = 0. \quad (\text{П.1})$$

\* Последнее справедливо, если нет нелинейной перекачки неоднородностей по спектру.

Решение этого уравнения при  $k_{\parallel}^2 \ll k_{\perp}^2$  имеет вид

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{в.г}^2 + 4\omega_{He}^2 \pm \sqrt{(\omega_{в.г}^2 - 4\omega_{He}^2) + 12\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 k^2 \rho_e^2} \right\}. \quad (\text{П.2})$$

При  $(\omega_{в.г}^2 - 4\omega_{He}^2)^2 = (\omega_{pe}^2 - 3\omega_{He}^2) \gg 12\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 k^2 \rho_e^2$  корни  $\omega_1, \omega_2$  уравнения (П.2) существенно отличаются друг от друга: один из них соответствует плазменным волнам на верхнем гибридном резонансе  $\omega_1 \approx \omega_{в.г}$ , другой — плазменным волнам на двойном гирорезонансе:

$$\omega_2 \approx 2\omega_{He} + \Delta, \quad \Delta = \frac{3}{8} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{He} k^2 \rho_e^2}{3\omega_{He}^2 - \omega_p^2}. \quad (\text{П.3})$$

При  $(\omega_{в.г}^2 - 4\omega_{He}^2) \ll 12\omega_{pe}^2 \omega_{He}^2 k^2 \rho_e^2$  верхняя гибридная частота близка к удвоенной циклотронной частоте электронов, и корни уравнения (П.2) близки:

$$\omega_{1,2} = \left( \frac{\omega_{в.г}^2 + 4\omega_{He}^2}{2} \right)^{1/2} \pm \Delta \approx 2\omega_{He} \pm \Delta, \quad \Delta = \frac{\sqrt{3}}{4} \omega_{pe} |k \rho_e|. \quad (\text{П.4})$$

Выражения для величины  $\frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\omega \partial \omega}$  (5) и (6) приведены с учетом (П.3) и (П.4).

Компоненты групповой скорости плазменных волн  $V$ , параллельная и перпендикулярная магнитному полю  $H$ , даются выражениями

$$V_{\parallel} = - \frac{\omega u k_{\parallel} (1-u) [1 + 3k_{\perp}^2 \rho_e^2 (1-4u)^{-1}]}{k^4 [1 + 3uk_{\perp}^2 \rho_e^2 (2-5u) (1-4u)^{-2}]}, \quad (\text{П.5})$$

$$V_{\perp} = \frac{\omega u k_{\perp} (1-u) [k_{\parallel}^2 + 3k_{\perp}^2 \rho_e^2 (1-4u)^{-1} (k_{\perp}^2 + 2k_{\parallel}^2)]}{k^4 [1 + 3uk_{\perp}^2 \rho_e^2 (2-5u) (1-4u)^{-2}]}.$$

В (П.5) не учтены поправки порядка  $k_0^2/k^2$ ,  $k_0 = \omega/c$ .

Из (П.5) видно, что  $V_{\parallel} > 0$  при  $k_{\parallel} < 0$ , т. е. проекции фазовой и групповой скоростей на направление магнитного поля направлены в противоположные стороны, и  $V_{\parallel} = 0$  при  $k_{\parallel} = 0$ , т. е. у плазменных волн есть точка поворота. Если ось  $z$  не совпадает с направлением магнитного поля ( $\alpha \neq 0$ ), то проекция групповой скорости на ось  $z$  обращается в нуль (точка поворота) при

$$k_{\perp}^2 \rho_e^2 = \frac{(1-4u)(1-u-v)}{3uv} \left( 1 + \frac{1-u-v}{4(1-u)(1-v)} \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \varphi \right), \quad (\text{П.6})$$

$$k_{\parallel} \rho_e = \frac{[(1-u-v)(1-4u)]^{1/2} (1-u-v)}{6(1-u)(1-v)uv} \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  — по-прежнему угол между магнитным полем  $H$  и градиентом концентрации  $\nabla N \parallel z \parallel k_z$ ,  $\varphi$  — азимутальный угол в плоскости, перпендикулярной магнитному полю,  $\varphi$  отсчитывается от оси  $x$ ,  $x \perp \nabla N$ ,  $x \perp H$ . Соотношения (П.6) получены с учетом того, что групповая скорость направлена по нормали к кривой  $k_{\parallel}(k_{\perp})$  (см. (10)) и в точке поворота  $V_{\perp} \perp z$ . В дальнейшем мы для простоты будем полагать  $\varphi = 0$ . В этом случае плазменные волны имеют, как и при  $\alpha = 0$ , точку поворота при  $k_{\parallel} = 0$ . Проекция волнового вектора плазменной волны на ось  $z$  равна при этом  $k_z = k \cos \alpha$ . Координату  $z$  точки поворота при  $\nabla N \uparrow \downarrow \nabla H$

легко найти с помощью рис. 1. Для этого с кривой  $k_{\parallel}(k_{\perp}^2)$  надо опустить перпендикуляр на ось  $z$ . Продольная компонента волнового вектора  $k_{\parallel}$  и, следовательно, компонента групповой скорости  $V_z$  обращаются в нуль (точка поворота) в точке пересечения этого перпендикуляра с кривой  $k_{\perp}^2(z)$ . Например, в случае (11) (рис. 1а) при возбуждении ТПН плазменные волны будут вести себя следующим образом. Волна с  $k_z < 0$ , возникающая в точке синхронизма  $z_c$  из-за рассеяния падающей электромагнитной волны\* на неоднородности  $n_x$  «ниже» максимума  $k_{\perp}^2(z)_m$  ( $z_c > z_m$ ), будет распространяться «вниз» вдоль оси  $z$  ( $V_z > 0$ ), отразится от уровня  $k_{\parallel} = 0$  ( $z_1$ ), пойдет «вверх», снова пройдет точку синхронизма  $z_c$ , где, провзаимодействовав с отраженной электромагнитной волной, усилит неоднородность  $n_x$  и далее поглотится из-за роста  $k =$  и, следовательно, циклотронного затухания  $\gamma_c \sim \exp(-\Delta^2/k_{\parallel}^2 V_{Te}^2)$  (см. также [6]). При  $z_c < z_m$  точка поворота  $z_2$  лежит «выше» точки синхронизма  $z_c$  ( $z_2 < z_c$ ) и плазменная волна, ответственная за возбуждение неоднородности  $n_x$ , взаимодействует сначала с отраженной, а затем, пройдя точку поворота, — с падающей электромагнитной волной. Если же плазменная волна возникает вблизи максимума показателя преломления ( $z_c \approx z_m$ ), то, как можно видеть из рис. 1а, у нее есть две точки поворота — «вверху» и «внизу». Таким образом, становится возможным появление волновода для плазменных волн. Вблизи точки  $z_m$  величина  $|k_{\parallel}|$  имеет максимум, и при распространении от точки  $z_m$  как «вверх», так и «вниз»  $|k_{\parallel}|$  уменьшается. Циклотронное затухание, следовательно, в игру не вступает. В случае (12) возникает обратная ситуация: точки поворота исчезают вблизи максимума показателя преломления (см. рис. 1б). Величина  $|k_{\parallel}|$  имеет минимум при  $z \approx z_m$  и в нуль не обращается.

Выражения (7) и (15) для порога ТПН справедливы при выполнении двух условий:

1) длина затухания плазменных волн должна существенно превышать длину взаимодействия  $l_c$  (условие применимости метода стационарной фазы):

$$\frac{V_z}{\gamma} \gg l_c, \quad l_c \sim \begin{cases} (\partial k_z / \partial z)^{-1/2} & (z_c \neq z_m) \\ (\partial^2 k_z / \partial z^2)^{-1/3} & (z_c \approx z_m) \end{cases}; \quad (\text{П.7})$$

2) точка синхронизма  $z_c$  должна быть достаточно удалена от точки поворота:

$$k_t |z_c - z_{1,2}| \gg 1. \quad (\text{П.8})$$

В противном случае нарушается приближение геометрической оптики, которое использовалось для изучения дисперсионных характеристик плазменных волн и вычисления порога неустойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. У. Ютло, Р. Коэн, 109, 871 (1973); W. F. Uflaut, Proc. IEEE, 63, № 7, 1022 (1975).
2. Radio Sci., 9, № 11 (1974).
3. Г. Г. Гетманцев и др., Письма в ЖЭТФ, 18, 621 (1973); В. В. Беликович и др., Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 4, 512 (1975).
4. Г. Г. Гетманцев и др., Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 12, 1909 (1976); А. Ф. Беленов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1804 (1977).

\* Проекция волнового вектора падающей электромагнитной волны на ось  $z$   $k_{t \text{ пад}} < 0$ , отраженной —  $k_{t \text{ отр}} > 0$ .

5. С. М. Грач, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1288 (1975).
6. С. М. Грач, А. Н. Караштин, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1827 (1977); Физика плазмы, 4, № 6, 1321 (1978).
7. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, Препринт ФИАН, № 95, М., 1975; ЖЭТФ, 69, 176 (1975).
8. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 73, 923 (1977).
9. С. М. Грач, Ю. С. Коробков, К. И. Юрин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 1064 (1975).
10. В. В. Вязников, В. В. Васьков и др., Геомагнетизм и аэрономия, 18, № 1, 45 (1978).
11. P. A. Fialer, Radio Sci., 9, № 11, 923 (1974).
12. А. Е. Крупина, Диссертация, Горький, 1977.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
22 мая 1978 г.

### THERMAL PARAMETRIC INSTABILITY IN THE IONOSPHERIC PLASMA AT FREQUENCIES CLOSE TO $\omega_{He}$ AND $2\omega_{He}$

S. M. Grach

It is shown that the threshold of the thermal parametric instability (TPI) increases when the wave pump frequency  $\omega$  approaches to the electron gyrofrequency  $\omega_{He}$ . When  $\omega$  approaches to  $2\omega_{He}$  the threshold of TPI in a homogeneous plasma also increases. An essential decrease of TPI threshold at  $\omega \rightarrow 2\omega_{He}$  is possible when the gradients of the concentration and the magnetic field are antiparallel in an inhomogeneous plasma

---

УДК 539.12

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ «ТАХИОН»

М. И. Файнгольд

Предложен способ «изготовления» «объемного» сверхсветового «зайчика» в вакууме и рассмотрены его свойства. Показано, что для такого зайчика справедлива кинематика тахиона.

1. Вопрос о существовании тахиона — гипотетической частицы с мнимой массой покоя  $\tilde{m} = im$  — вызвал значительный поток работ (см. обзоры [1, 2]), однако отрицательные результаты попыток обнаружения тахионов [3, 4], несмотря на их неоднозначную интерпретацию, усилили сомнения в реальности таких частиц.

В данной работе описан объект, который нетрудно «изготовить» в лаборатории и который при движении в вакууме подчиняется кинематике тахиона. Этот объект представляет собой «объемную» модификацию сверхсветовых «зайчиков», бегущих по границе раздела двух сред (такие зайчики связаны с возбуждением токов в веществе под действием излучения, наклонно падающего на граничную поверхность [5-8]).

Объемная модификация зайчика, рассматриваемая в настоящей работе, представляет собой импульс излучения с коническим фронтом, поверхность которого играет роль «границы раздела» двух сред, а в вер-

шине конуса возникает фокус, движущийся со скоростью  $\tilde{v} > c$  [9]. Благодаря наличию фокуса плотность энергии поля в объемном зайчике (ОЗ) на много порядков выше, чем в «плоском», что позволяет существенно расширить круг наблюдаемых явлений, связанных с быстрым перемещением области сильного поля [10, 11]. Второе отличие ОЗ от плоского зайчика состоит в том, что ОЗ «создает сам себя» в процессе «самопересечения» движущегося конического фронта и тем самым не зависит от наличия границ в среде. Благодаря этому он может существовать не только в однородной среде, но и в вакууме. В последнем случае в области движения ОЗ уже нет реальных зарядов и токов и возникает объект с целиком электромагнитной массой, обладающий, как показано ниже, рядом характерных признаков тахиона (электромагнитный «тахион»).

Разумеется, такой «тахион» отличается от «истинного»\*. Тем не менее, его поведение может представить значительный интерес, обусловленный не только его своеобразной кинематикой, но и различными возможностями использования «тахиона» в прикладных областях (нелинейная оптика, физика плазмы, ускорение заряженных частиц и т. д.).

2. Электромагнитный «тахион» может возникать при отражении плоского, достаточно узкого (в направлении движения Оз) волнового пакета от внутренней поверхности конического зеркала, другая возможность — пропускание пакета через коническую линзу с малой дисперси-

\* Отличие обсуждается в заключительной части статьи.



ей, как показано на рис. 1а, 1б. Источником пакета с требуемой «узостью»  $\Delta z$  может быть пикосекундный лазер (при длительности лазерного импульса  $\Delta\tau \sim 10^{-12}$  с имеем  $\Delta z \sim 3 \cdot 10^{-2}$  см). После отражения от зеркала пакет принимает форму конической поверхности с углом  $\theta$  между волновым вектором  $\vec{k}$  и  $Oz$ ,  $\theta = \pi - \alpha$  (см. рис. 1а).

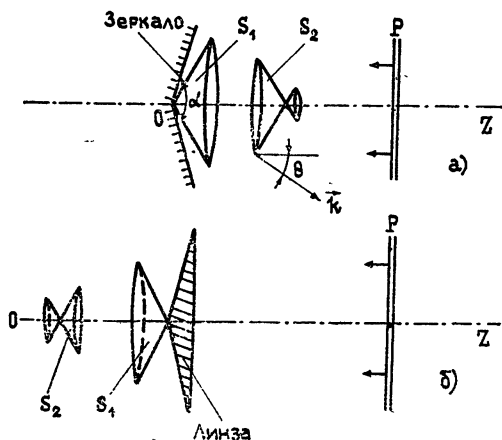


Рис. 1. Схема эксперимента по созданию электромагнитного «тахiona»:  $P$  — падающий пакет,  $S_1, S_2$  — последовательные положения возникающего конического фронта.

Пусть движение происходит в вакууме,  $E$  и  $E/c$  — соответственно полные электромагнитная энергия и импульс исходного пакета. Величина  $E$  и, следовательно,  $|\vec{k}|$  при отражении не меняются. Однако изменение направления  $\vec{k}$  при сохранении осевой симметрии приведет, как видно из рис. 1а, к уменьшению полного импульса поля\* до значения

$$P = P_z = \frac{E}{c} \cos \theta. \quad (1)$$

Следовательно, конус излучения, возникший в результате отражения, имеет отличную от нуля массу покоя

$$m = \frac{1}{c^2} (E^2 - P^2 c^2)^{1/2} = \frac{E}{c^2} \sin \theta, \quad (2)$$

непосредственно измеряемую в системе отсчета, где конус вырождается в цилиндрическую волну [9]. Скорость этой системы относительно зеркала совпадает со скоростью движения «центра масс» конуса

$$v = \frac{dE}{dP} = \frac{d}{dP} (m^2 c^4 + P^2 c^2)^{1/2} = \frac{P}{E} c^2 \quad (3)$$

и согласно (1) равна проекции скорости конического фронта на ось  $Oz$ :

$$v = c \cos \theta. \quad (4)$$

Соотношения (1)—(4) описывают «досветовой» объект с массой покоя  $m \neq 0$ . Однако этот же объект, как показано ниже, имеет основные признаки тахиона.

Действительно, нетрудно убедиться, что вершина конуса обгоняет его центр масс [9], двигаясь вдоль  $Oz$  со скоростью

\* Остальная часть исходного импульса передается зеркалу.

$$\tilde{v} = \frac{c}{\cos \theta} . \quad (5)$$

В то же время вершина является фокусом сходящейся волны, и, следовательно, с ней связан движущийся максимум распределения энергии поля («сгусток»). Если формально отождествить этот сгусток с частицей, то, как видно из (5), скорость такой частицы, во-первых, больше  $c$ , а, во-вторых, связана с направлением излучения точно так же, как и в эффекте Вавилова — Черенкова. В этом смысле «сгусток» и конический фронт моделируют тахион и его черенковское излучение.

Далее, из весьма общих принципов следует, что тахион должен быть существенно «нелокальной» частицей с собственным диаметром  $\tilde{\delta}_0 = i \delta_0$ , причем перпендикулярный к скорости  $\tilde{v}$  размер  $\delta_0$  постоянен, а продольная длина сокращается при  $\tilde{v} \rightarrow c$  [12, 13]:

$$\delta = \frac{i \delta_0}{\gamma(\tilde{v})} = \delta_0 \left( \frac{\tilde{v}^2}{c^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad \gamma(\tilde{v}) \equiv \left( 1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (6)$$

Точно такими же свойствами обладает сверхсветовой сгусток. Действительно, для рассматриваемого случая квазимонохроматического излучения толщина падающего пакета  $\Delta z$  пропорциональна числу  $N$  укладываемых в нем длин волн:  $\Delta z = N\lambda = 2\pi N/k$ . Возникающая после отражения область сильного поля ограничена поверхностью, получаемой вращением ромба  $ABCD$  вокруг  $Oz$  (рис. 2). Поперечный диаметр этой области равен  $\delta_0 = \frac{\Delta z}{\sin \theta} =$

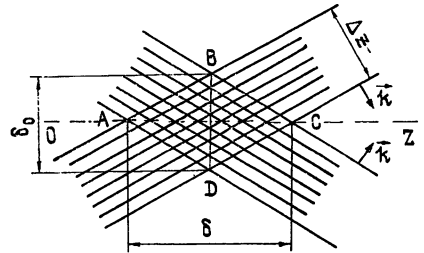


Рис. 2.

$$= \frac{2\pi Nc}{\omega \sin \theta}, \text{ или, с учетом (2),}$$

$$\delta_0 = 2\pi NN_f \frac{\hbar c}{E \sin \theta} = 2\pi NN_f \frac{\hbar}{mc} = inv,$$

где  $N_f$  — число фотонов в падающем пакете. Таким образом, инвариант  $\delta_0 = 2\pi NN_f \hbar / mc$  имеет смысл собственного диаметра электромагнитного «тахиона»\*. Для продольной длины получаем с учетом (5)

$$\delta = \frac{\Delta z}{\cos \theta} = \delta_0 \operatorname{tg} \theta = \delta_0 \left( \frac{\tilde{v}^2}{c^2} - 1 \right)^{1/2},$$

т. е. соотношение, совпадающее с (6). Следовательно, и «геометрокинематические» свойства сгустка оказываются точно такими же, как у тахиона.

3. Перейдем к вопросу о распределении энергии в ОЗ. Распределение по поверхности конуса найдем в лучевом приближении, применим для излучения с длиной волны  $\lambda \ll a$ , где  $a$  — диаметр зеркала. Пусть пакет дойдет до вершины зеркала  $z = 0$  в момент  $t = 0$  (момент «рождения» фокуса). К моменту  $t > 0$  фокус переместится в точку  $z = \tilde{v}t$ ,

\* Этот инвариант можно получить и более формальным образом, рассматривая отраженное поле как суперпозицию сходящихся плоских волн (см. Приложение).

а луч с прицельным параметром  $y$  пройдет на расстоянии  $l$  от этой точки. Как видно из рис. 3,

$$y = z \sin \theta \pm l, \quad (7)$$

где знак «—» относится к точкам конической полости, возникающей после фокуса (для этих точек  $l \leq z \sin \theta$ ). В результате отражения кольцевая площадка  $2\pi y dy$  к моменту  $t$  превращается в боковую поверхность усеченного конуса с площадью  $2\pi l |\cos \theta| dl$ . Если поверхностная плотность энергии в падающем пакете равна  $W_0$ , то для соответствующей плотности после отражения получим

$$W = \frac{y}{l |\cos \theta|} W_0 = \left( \frac{z |\operatorname{tg} \theta|}{l} \pm \frac{1}{|\cos \theta|} \right) W_0, \quad z = \tilde{v}t. \quad (8)$$

При  $t = 0$  имеется лишь одна коническая полость «раструбом вперед». В этот момент

$$W = W_0 |\cos \theta| = \text{const.} \quad (8a)$$

При  $t \gg l/\tilde{v} \sin \theta$ , как следует из (8),

$$W \approx z |\operatorname{tg} \theta| / l, \quad (8b)$$

т. е.  $W$  убывает вдоль образующих «конуса Маха». Точно такое же убывание  $W \sim l^{-1}$ , как нетрудно убедиться с помощью геометрического рассмотрения, имеет место в черенковском излучении от реального источника.

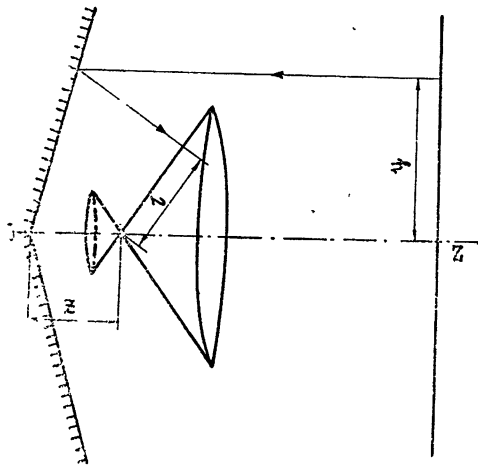


Рис. 3.

Вблизи фокуса (в области  $l < \lambda/\sin \theta$ ) необходим учет дифракции, устраняющей расходимость  $W$  при  $l \rightarrow 0$ . В случае неполяризованного излучения для расчета интенсивности в фокусе используем скалярную формулировку принципа Гюйгенса [14]:

$$U = \frac{k}{2\pi i} \int_S U_S \frac{e^{ikr}}{r} dS_n. \quad (9)$$

Здесь  $U$  — амплитуда волны в фокусе, т. е. в точке  $z = \tilde{v}t$ ,  $U_S$  — амплитуда на поверхности интегрирования  $S$ , в качестве которой возьмем ко-

нический фронт в момент  $t = 0$ , и  $dS_n$  — проекция кольцевидного элемента  $dS$  на луч  $r$ :

$$dS_n = 2\pi r_0 \left[ \pm \cos \theta + \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-1/2} \sin \theta \right] dr,$$

$r_0 = z |\cos \theta|$  — расстояние от фокуса до  $S$  и знаки «+», «-» относятся к областям интегрирования  $r_0 < r < \infty$  и  $r_0 < r < z$  соответственно. Подставляя это в (9), учитывая, что при  $t = 0$  амплитуда  $U_S = \text{const}$  и что главный вклад в соответствующий интеграл дают значения  $r \approx r_0$ , можем написать

$$U \approx -ikr_0 \left\{ \cos \theta \int_x^\infty \frac{e^{ikr}}{r} dr + \sqrt{\frac{r_0}{2}} \sin \theta \times \right. \\ \left. \times \left[ 2 \int_{r_0}^\infty \frac{e^{ikr}}{r \sqrt{r-r_0}} dr - \int_z^\infty \frac{e^{ikr}}{r \sqrt{r-r_0}} dr \right] \right\} U_S.$$

Интегрирование дает

$$U \approx ikr_0 \{ \text{Ei}(ikz) \cos \theta - \sqrt{2}\pi [1 - \Phi(\sqrt{-ikr_0})] \sin \theta \} U_S, \quad (10)$$

где  $\text{Ei}(\xi)$  — интегральная показательная функция,  $\Phi(\xi)$  — интеграл вероятности [15]. Используя асимптотику этих функций при  $|\xi| \gg 1$  (т. е.  $z \gg \lambda$ ) и учитывая, что, согласно (8а),  $|U_S|^2 = W_0 / |\cos \theta|$ , получим из (10)

$$W = UU^* = \left\{ |\cos^3 \theta| - 4\pi \left( \frac{z}{\lambda} \right)^{1/2} \sin \theta \cos^{3/2} \theta \times \right. \\ \left. \times \cos 4\pi \left( \frac{z}{\lambda} \cos \theta + \frac{1}{16} \right) + 4\pi^2 \frac{z}{\lambda} \sin^2 \theta \right\} W_0.$$

При усреднении по спектру в диапазоне  $(\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$  быстро осциллирующий второй член исчезает, поэтому окончательно

$$W \approx \left( |\cos^3 \theta| + 4\pi^2 \frac{z}{\lambda} \sin^2 \theta \right) W_0. \quad (11)$$

Согласно (11) плотность энергии сгустка при постоянных его размерах линейно растет со временем и может достигать очень больших значений. Так, при  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см,  $\theta = 45^\circ$  и  $z = 10$  см имеем  $W \approx 4 \cdot 10^6 W_0$ . Это обстоятельство и позволяет сопоставлять сгусток частице.

4. Покажем, что введенная «частица» и связанный с нею конус излучения подчиняются кинематике тахиона. Запишем 4-импульс тахиона в виде

$$\tilde{P}_0 = imc \gamma(\tilde{v}), \quad \tilde{P}_\alpha = im\tilde{v}_\alpha \gamma(\tilde{v}), \quad (12)$$

где  $im$  — масса покоя тахиона,  $\tilde{v}_\alpha$  — компоненты его скорости, а индекс  $\alpha = 1, 2, 3$  соответствуют осям  $x, y, z$ . В нашем случае роль величины  $m$  играет масса покоя ОЗ, определяемая (2), а роль  $\tilde{v}$  — скорость фокуса. Подставив эти величины в (12), мы определим компоненты  $\tilde{P}_j$  4-импульса «тахиона», отождествляемого с ОЗ.

Для нахождения связи  $\tilde{P}_j$  с обычным 4-импульсом ОЗ  $P_0 = mc \gamma(v)$ ,  $P_\alpha = mv_\alpha \gamma(v)$  используем вытекающее из (4) и (5) соотношение

$$\tilde{v}\tilde{v} = c^2. \quad (13)$$

Применяя к  $v$  и  $\tilde{v}$  теорему сложения скоростей, легко убедиться, что (13) справедливо в подгруппе всех инерциальных систем  $L$ , выделенных условием осевой симметрии ОЗ, т. е. движущихся относительно зеркала вдоль Oz. Полагая в (12)  $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = 0$ ,  $\tilde{v}_3 = \tilde{v}$  и используя (13), получаем постулированные в [9] формулы связи  $\tilde{P}_0 = P$ ,  $\tilde{P} = P_0$  или, в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 = 0, \quad P_1 = P_2 = 0. \quad (14)$$

Согласно (14) в подгруппе  $L$  энергия и импульс ОЗ (с точностью до «с») играют роль соответственно импульса и энергии «тахiona», реализуемого этим ОЗ.

Рассмотрим теперь систему  $L'$ , движущуюся со скоростью  $V$  вдоль общего направления осей  $x, x'$ , перпендикулярных к Oz. Записав для  $\tilde{P}_j$  и  $P_j$  преобразование Лоренца к новой системе, используя (14) и опуская штрихи у преобразованных компонентов, получаем общие формулы связи между  $\tilde{P}_j$  и  $P_i$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_3 \end{pmatrix} = \gamma(V) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{V}{c} \\ 1 & \frac{V}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \tilde{P}_2 = 0. \quad (15)$$

Случай произвольного  $V = (V_1, V_2, V_3)$  сводится к (15) с помощью поворота в плоскости  $x, y$  и преобразования  $L(v) \rightarrow L(v + V_3)$  внутри подгруппы  $L$ .

Для абсолютных величин векторов получаем

$$\tilde{P}_0 = P \left(1 - \frac{P_V^2}{P^2}\right)^{1/2}, \quad \tilde{P} = P_0 \left(1 - \frac{P_V^2}{P_0^2}\right)^{1/2}, \quad P_V \equiv mV \gamma(V). \quad (16)$$

На основании (12) и (14) имеем

$$P_0^2 - P^2 = \tilde{P}^2 - \tilde{P}_0^2 = m^2 c^2, \quad P_0 \tilde{P}_0 - P \tilde{P} = 0, \quad (17)$$

т. е. 4-векторы  $\tilde{P}_j$  и  $P_i$  равны по абсолютной величине и взаимно перпендикулярны, а их пространственные части в подгруппе  $L$  параллельны.

Для определения  $\tilde{P}_j$  по  $P_i$  (в произвольной системе  $L'$ ) соотношений (17) недостаточно, и необходимо, в соответствии с (15), задать в пространстве скоростей еще расстояние  $V$  до ближайшей системы из подгруппы  $L$ . Это полностью соответствует полученному в (16) результату, согласно которому между энергией самого тахиона и энергией излучаемого им поля нет однозначной (т. е. содержащей лишь заряд и массу тахиона) связи, справедливой для всех систем отсчета. Указан-

ное обстоятельство обусловлено нарушением симметрии как ОЗ, так и тахиона при переходе  $L \rightarrow L'$  (см. ниже).

Введенный согласно (12), (15) 4-вектор  $\tilde{P}_j$  автоматически дает для скорости «тахиона»  $\tilde{v}_a = d\tilde{E}/d\tilde{P}_a$  значения, совпадающие со скоростью сгустка. Так, в произвольной системе  $L'$ , используя (15) и учитывая, что  $v'_1 = -V$ ,  $v'_3 = \gamma^{-1}(V)v$ , имеем

$$\tilde{v}'_1 = c d\tilde{P}'_0/d\tilde{P}'_1 = c\tilde{P}'_1/\tilde{P}'_0 = -V; \quad (18)$$

$$\tilde{v}'_3 = c d\tilde{P}'_0/d\tilde{P}'_3 = c\tilde{P}'_3/\tilde{P}'_0 = c \frac{P'_0 + \frac{V}{c} P'_1}{P'_3} = \gamma^{-1}(V)\tilde{v}; \quad (19)$$

$$\tilde{v}'^2 = \tilde{v}^2 - \frac{V\tilde{v}}{c^2} + V^2 \quad (20)$$

в соответствии с обычным результатом преобразования скоростей. Таким образом, возможность рассматривать величины  $\tilde{P}_j$  как 4-импульс ассоциированного с ОЗ тахиона, показанная в [9] для подгруппы  $L$ , оказывается справедливой во всех системах отсчета.

Далее, во всех системах отсчета сохраняется соотношение (5) для угла  $\theta$  между направлениями  $k$  и  $\tilde{v}$ . Действительно, из инвариантности

скалярного произведения  $\tilde{P}_j k_j = im \gamma(\tilde{v})\omega \left(1 - \frac{\tilde{v}}{c} \cos \theta\right)$  следует

$$\omega\gamma(\tilde{v}) \left(1 - \frac{\tilde{v}}{c} \cos \theta\right) = \omega'\gamma(\tilde{v}') \left(1 - \frac{\tilde{v}'}{c} \cos \theta'\right),$$

а отсюда в силу (5) имеем  $\tilde{v} \cos \theta = \tilde{v}' \cos \theta' = c$ . Следовательно, картина сверхсветового сгустка в вершине связанного с ним кругового конуса лоренц-инвариантна (аналогично тахиону).

В то же время в системах  $L'$  нарушается осевая симметрия ОЗ.

Действительно, при переходе  $L \rightarrow L'$  векторы  $v$  и  $\tilde{v}$  поворачиваются согласно (18), (19) на разные углы  $\chi$  и  $\tilde{\chi}$ , для которых  $\sin \chi = V/v'$   $\sin \tilde{\chi} = V/\tilde{v}'$ , причем

$$\sin \tilde{\chi}/\cos \theta' = \frac{V}{c}, \quad \sin \theta'/\cos \tilde{\chi} = \sin \theta. \quad (21)$$

Для угла  $\varepsilon$  между этими векторами в силу (17) имеем  $\cos \varepsilon = P'_0 \tilde{P}'_0/P' \tilde{P}' = c^2/v'\tilde{v}'$ . Рассогласование направлений  $v'$  и  $\tilde{v}'$  при переходе  $L \rightarrow L'$  объясняется эффектом Доплера, приводящим к асимметрии спектра: при сохранении круговой формы конуса излучения во круг направления  $\tilde{v}'$  жесткость и интенсивность излучения начинают зависеть от азимутального угла  $\varphi'$  (разные «образующие» конуса приобретают разный «вес»), что и приводит к разным траекториям вершины конуса и его центра масс (рис. 4).

С помощью преобразований Лоренца можно показать [17], что при  $V \perp Oz$  угловая зависимость спектра в  $L'$  связана с аналогичной величиной в  $L$  соотношением

$$\frac{dE'(\omega', \varphi')}{dt'} = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + (V/c) \cos \psi} \frac{dE(\omega, \varphi)}{dt}, \quad (22)$$

где  $\psi$  — угол между  $V$  и данным направлением излучения  $n' = \frac{k'}{k'}$ .

Величины  $\omega', \varphi'$  ( $\varphi'$  — азимутальный угол с полярной осью вдоль  $\tilde{v}'$ ) в системе  $L'$  связаны с соответствующими величинами  $\omega, \varphi$  в  $L$ :

$$\omega = \omega' \frac{1 + \operatorname{tg} \tilde{\chi} \operatorname{tg} \theta' \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \tilde{\chi} \operatorname{tg}^2 \theta'}}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega'}{\omega} \cos \tilde{\chi} \sin \varphi'. \quad (23)$$

Выражая  $\cos \psi$  через  $\theta', \tilde{\chi}$  и  $\varphi'$  и используя (21), получаем (22) в виде

$$\frac{dE'(\omega', \varphi')}{dt'} = Q(\tilde{\chi}, \theta', \varphi') \frac{dE(\omega, \varphi)}{dt}, \quad (24)$$

$$Q(\tilde{\chi}, \theta', \varphi') = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \tilde{\chi} \operatorname{tg}^2 \theta'}{1 + \operatorname{tg} \tilde{\chi} \operatorname{tg} \theta' \cos \varphi'}.$$

Поскольку  $\frac{dE(\omega, \varphi)}{dt}$  в  $L$  не зависит от  $\varphi$ , множитель  $Q(\tilde{\chi}, \theta', \varphi')$  свидетельствует об асимметрии ОЗ в  $L'$ . Это обстоятельство могло бы показаться аргументом против аналогии ОЗ с тахионом. Однако на самом деле оно является дополнительным аргументом в пользу аналогии, ибо такая же асимметрия, как показано ниже, наблюдалась бы и в излучении «истинного» тахиона.

Действительно, пусть  $\rho(\mathbf{k})$  — фурье-компонента распределения заряда тахиона

$\rho(\mathbf{r} - \tilde{v}t)$  (которое, в частности, могло бы заполнять область, образованную вращением ромба  $ABCD$  вокруг  $Oz$  (на рис. 2)). Согласно результатам работы [13], спектральную мощность излучения тахиона в  $L$  можно записать в виде

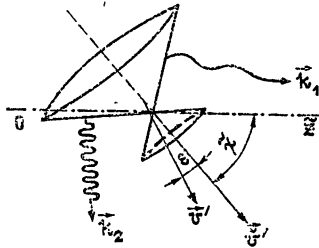


Рис. 4. Картина движения ОЗ с точки зрения наблюдателя в  $L'$ . Жесткость излучения зависит от направления  $n = k/k$ .

$$\frac{dE(\omega, \varphi)}{dt} = \frac{1}{2\pi c^2} \tilde{v} \sin^2 \theta \left| \rho \left( \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right) \right|^2 \omega d\omega d\varphi. \quad (25)$$

Запишем это соотношение через величины, наблюдаемые в  $L'$ . Из определения  $\rho(\mathbf{k})$ ,

$$\rho(\mathbf{k}) = \int \rho(\mathbf{r} - \tilde{v}t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = e^{i(\omega + \mathbf{k}\tilde{v})t} \int \rho(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r},$$

в силу инвариантности фазы  $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$  и элемента заряда  $de = \rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$  вытекает инвариантность модуля  $|\rho(\mathbf{k})| = |\rho'(\mathbf{k}')|$ . В силу этого с учетом (20), (21), (23) после ряда преобразований находим

$$\frac{dE(\omega, \varphi)}{dt} = \frac{1}{2\pi c^2} Q^{-1}(\tilde{\chi}, \theta', \varphi') \tilde{v}' \sin^2 \theta' \left| \rho' \left( \frac{\omega'}{c} \mathbf{n}' \right) \right|^2 \omega' d\omega' d\varphi'.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{dE'(\omega', \varphi')}{dt'} &= \frac{1}{2\pi c^2} \tilde{v}' \sin^2 \theta' \left| \rho' \left( \frac{\omega'}{c} n' \right) \right|^2 \omega' d\omega' d\varphi' = \\ &= Q(\tilde{\chi}, \theta', \varphi') \frac{dE(\omega, \varphi)}{dt}, \end{aligned}$$

т. е. соотношение, совпадающее с (24).

Полученный результат есть следствие независимости соотношений (24) от происхождения поля. В силу этого любое распределение заряда тахиона автоматически обеспечивает как раз такую асимметрию его излучения, которая вытекает из трансформационных свойств 4-вектора  $\left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\}^*$ .

Таким образом, все рассмотренные кинематические соотношения допускают «тахионную интерпретацию» ОЗ. Это позволяет говорить о своеобразном дуализме свойств и описания ОЗ: выбирая в качестве характеризующей ОЗ величины скорость  $\tilde{v}$  его центра масс или скорость  $\tilde{v}$  его фокуса, мы можем соответственно описать его либо как обычную досветовую частицу с 4-вектором  $P_i$ , либо как «тахион» с 4-вектором  $\tilde{P}_j$ .

5. В заключение отметим основные различия между ОЗ и «истинным» тахионом, которые сводятся к следующему.

Во-первых, ОЗ, вообще говоря, не имеет реальных источников поля. С этим связано различие в спектре и поляризации излучения: например, электрическое поле  $\vec{E}$  «истинного» тахиона обусловлено форм-фактором  $\rho(\mathbf{k})$  и направлено вдоль образующих конуса Маха, в то время как поле в ОЗ определяется спектром и поляризацией исходного пакета.

Недавно в работе [11] была рассмотрена экспериментальная ситуация, при которой в ОЗ возникает такая же поляризация поля, как от реального сверхсветового источника в фокусе (где  $\vec{E} \uparrow \tilde{v}$ ). При этом, однако, фокус движется в среде с минимальной скоростью  $c/n$ , а не  $c$ , как должно быть для тахиона.

Далее, ОЗ невозможно использовать для передачи сигнала со скоростью  $\tilde{v} > c$  [9], что опять-таки связано с отсутствием независимой массы в его фокусе\*\*.

Наконец, у ОЗ, в отличие от тахиона, имеется еще опережающий конус Маха, обеспечивающий подвод энергии к сгустку, что соответствует наличию и расходящихся, и сходящихся волн [9]. Для «истинного» тахиона это означало бы нарушение принципа излучения Лоренца [21], требующего наличия на бесконечности только уходящих волн.

Таким образом, рассмотренная аналогия ОЗ с тахионом ограничивается кинематикой. Однако и определение самого тахиона как объекта с пространственно-подобным 4-импульсом является достаточно четким только в рамках кинематики, в то время как рассмотрение взаимодействий с участием тахионов приводит к целому ряду затруднений.

\* Нарушение осевой симметрии излучения тахиона в пустоте означает, что тахион принципиально не может быть скалярной частицей [18].

\*\* Заметим, что возможность передачи сигнала со скоростью  $\tilde{v} > c$  посредством «истинного» тахиона также ставится под сомнение [2, 19, 20].



## ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим коническую волну в виде аксиально-симметричной системы плоских волн, сходящихся под углом  $\theta$  к оси  $Oz$ , выбранной в качестве полярной оси сферической системы координат  $R, \theta_R, \varphi_R$ . Считая исходный импульс неполяризованным, будем описывать поле скалярной функцией  $\Phi$  [14] в виде

$$\Phi(r, z) = g(k) \int_0^{2\pi} \exp(ikR - i\omega t) d\varphi, \quad (\text{П.1})$$

где  $k = R \sin \theta_R$ ,  $z = R \cos \theta_R$  и  $g(k)$  — амплитуда колебаний с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ . Проводя плоскость  $xz$  через радиус-вектор  $R$  точки наблюдения (т. е. полагая  $\varphi_R = 0$ ) и выражая экспоненту через полярные углы,

$$kR = kR (\cos \theta \cos \theta_R - \sin \theta \sin \theta_R \cos \varphi), \quad (\text{П.2})$$

получим для  $\Phi$  соотношение

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= g(k) \exp[ik(z \cos \theta - ct)] \int_0^{2\pi} \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -2\pi g(k) J_0(kr \sin \theta) \exp \left[ ik \cos \theta \left( z - \frac{c}{\cos \theta} t \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где  $J_0(\xi)$  — функция Бесселя нулевого порядка [15]. Аргумент этой функции можно представить в виде (см. стр. 532—534).

$$\xi = 2\pi \frac{r}{r_0}, \quad r_0 \equiv \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{1}{N} \delta_0. \quad (\text{П.4})$$

При  $r > r_0$  (т. е.  $\xi \gg 1$ ), используя асимптотический вид функции Бесселя, получим из (П.3)

$$\Phi \approx 2g(k) \sqrt{\frac{r_0}{r}} \cos \left\{ 2\pi \left[ \frac{r + \text{ctg} \theta (z - \tilde{v} t)}{r_0} - \frac{1}{8} \right] \right\}. \quad (\text{П.5})$$

Выражение (П.5) описывает волну с фазовой поверхностью

$$r^2 = \text{ctg}^2 \theta (z - \tilde{v} t)^2, \quad \tilde{v} = \frac{c}{\cos \theta}, \quad (\text{П.6})$$

т. е. поверхностью конуса, вершина которого скользит вдоль  $Oz$  со скоростью  $\tilde{v} > c$ . Из (П.5) нетрудно получить линейное убывание интенсивности поля вдоль образующей конуса.

При  $r < r_0/2\pi$  мы попадаем в область вблизи вершины, которая является фокусом волны, т. е. представляет собой сверхсветовой «сгусток». Таким образом, параметр  $r_0 \sim \delta_0$ , определяющий границу между волновой зоной и областью сильного поля, имеет смысл поперечного размера «сгустка».

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Барашенков, УФН, 114, 133 (1974).
2. Д. А. Киржниц, В. Н. Сазонов, Эйнштейновский сборник, изд. Наука, М., 1974, стр. 84.
3. J. S. Danburg and G. R. Kalbfleisch, Phys. Rev., D5, 1575 (1972).
4. M. B. Davis, M. N. Kreisler and T. Alvager, Phys. Rev., 183, 1132 (1972).

5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **62**, 173 (1972).
6. Б. М. Болотовский, Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, № 7, 34 (1972).
7. В. Я. Эйдман, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 4, 634 (1972).
8. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, **106**, 577 (1972).
9. М. И. Файнгольд, Эйнштейновский сборник, изд. Наука, М., 1976, стр. 276.
10. М. И. Файнгольд, Письма в ЖТФ, **3**, 318 (1977).
11. М. И. Файнгольд, ЖТФ, **48**, 1533 (1978).
12. G. Feinberg, Phys. Rev., **159**, 1089 (1967).
13. F. C. Jones, Phys. Rev., **D6**, 2727 (1972).
14. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1973, стр. 341.
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Физ. мат. лит-ры, М., 1971, стр. 329, 974.
16. Н. К. Wimmel, Nature (Phys. Sci.), **236**, 79 (1972).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1973, стр. 228.
18. М. И. Файнгольд, Теоретическая и математическая физика (в печати).
19. G. Esker, Ann. Phys., **58**, 303 (1970).
20. R. Fox, C. G. Kuper and S. G. Lipson, Proc. Roy. Soc., London, **A316**, 515 (1970).
21. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН, **114**, 569 (1974).

Институт физики АН УССР

Поступила в редакцию  
3 января 1978 г.

#### ELECTROMAGNETIC «TACHION»

*M. I. Faingol'd*

A method is suggested of «volume» superlight «sunbeam» «manufacturing» in vacuum and its properties are considered. It is shown that for such a sunbeam the tachion kinematics is valid.

---

УДК 539.293

## О КПД ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ КРИСТАЛЛАХ С ПРОДОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

*Л. П. Мельник, Н. Н. Филоненко*

Аналитически и численно исследуется влияние продольной неоднородности нелинейных кристаллов на КПД генерации второй гармоники без приближения заданного поля накачки. Показано, что эффективность преобразования частоты определяется безразмерным параметром  $\kappa'$ , зависящим от градиента неоднородности кристалла  $\frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z}$ , характерной длины нелинейного взаимодействия  $l_{нл}$  и длины волны основного излучения  $\lambda$ . Найдена оптимальная длина нелинейного кристалла, при которой КПД генерации будет максимальным при данном  $\kappa'$ . Получена зависимость предельно возможных КПД при удвоении частоты  $l_{max}$  от параметра  $\kappa'$  в приближении однородных по сечению пучков.

Целый ряд явлений в нелинейных средах, таких, как дифракция, тепловое самовоздействие, апертурные эффекты, приводят к рассогласованию фазового синхронизма волн и, как результат, снижению эффективности нелинейных преобразований частоты [1-4]. В работах [2, 3] на основе численных экспериментов было показано, что дифракция пучка приводит к сбою фаз взаимодействующих волн, в результате чего становится невозможным достижение 100% КПД генерации второй гармоники (ВГ). Существенное влияние на эффективность нелинейных взаимодействий волн оказывает неоднородность нелинейных сред. Так, в [5] авторами было показано, что в случайно-неоднородных средах принципиально невозможно полное преобразование энергии излучения во ВГ. Достаточно подробно влияние как регулярной, так и случайной неоднородности среды на процесс генерации ВГ изучалось в приближении заданного поля (ЗП) [6, 7] и заданной интенсивности (ЗИ) [8, 9]. При больших эффективностях преобразования энергии приближения ЗП и ЗИ непригодны, поскольку нельзя полагать интенсивность ВГ малой и пренебрегать ее влиянием на волну основного излучения. В данной работе аналитически и численно исследуется процесс генерации ВГ в неоднородных средах на основе подхода, развиваемого ранее авторами [5, 10, 11], что позволяет получить аналитические решения без использования приближений ЗП и ЗИ. Одновременно ставится и решается задача об оптимизации длины нелинейного кристалла и расстройки фазового синхронизма на входе в оптический удвоитель с целью выяснения предельно возможных КПД генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах с продольной неоднородностью показателя преломления.

1. Укороченные уравнения для комплексных амплитуд плоских волн  $A_{1,2}(z)$  в стационарном одномерном случае (все величины изменяются вдоль координаты  $z$ , совпадающей с нормалью к границе нелинейной среды) в среде без затухания имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i\beta_1 A_1 A_1^* \exp \left[ i \int_0^z dz_1 \Delta k(z_1) \right], \\ \frac{dA_2}{dz} &= i\beta_2 A_1^2 \exp \left[ -i \int_0^z dz_1 \Delta k(z_1) \right],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\beta_{1,2}$  — коэффициенты нелинейного взаимодействия,  $\Delta k(z) = k_2(z) - 2k_1(z)$  — расстройка фазового синхронизма волн, следующим образом связанная с неоднородностью показателя преломления  $n_m$ :

$$k_m(z) = n_m(\omega_m, z) \frac{\omega_m}{c} \quad (m = 1, 2).$$

Перейдем к действительным амплитудам и фазам первой и второй гармоник:

$$A_m(z) = \rho_m(z) \exp [i\varphi_m(z)] \quad (m = 1, 2),$$

тогда для  $\rho_m(z)$  и относительной разности фаз волн  $\theta(z) = \varphi_2(z) - 2\varphi_1(z)$   $\int_0^z dz_1 \Delta k(z_1)$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_1}{dz} &= -\beta_1 \rho_1 \rho_2 \sin \theta, \\ \frac{d\rho_2}{dz} &= \beta_2 \rho_1^2 \sin \theta,\end{aligned}\quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \Delta k(z) - \left[ 2\beta_1 \rho_2 - \beta_2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \right] \cos \theta.$$

Для случая генерации ВГ в анизотропных кристаллах с квадратичной нелинейностью коэффициенты нелинейного взаимодействия имеют вид [12]

$$\beta_1 = \frac{4\pi\omega_1}{n_1 c} d_{эфф}, \quad \beta_2 = \frac{2\pi\omega_2}{n_2 c} d_{эфф}, \quad (3)$$

где  $d_{эфф}$  — эффективный нелинейный коэффициент, связанный с тензором нелинейной восприимчивости. Из первых двух уравнений с учетом (3) получается соотношение Мэнли — Роу, которое для случая двух волн эквивалентно условию сохранения плотности потока энергии  $W$  в диэлектрике без потерь:

$$W = \frac{c}{8\pi} [n_1 \rho_1^2(z) + n_2 \rho_2^2(z)]. \quad (4)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}I_1 &\equiv \frac{\omega_1 d_{эфф} \rho_1^2}{2W \beta_1} = \frac{cn_1 \rho_1^2}{8\pi W}, \\ I &\equiv \frac{\omega_1 d_{эфф} \rho_2^2}{2W \beta_2} = \frac{cn_2 \rho_2^2}{8\pi W}, \quad x = \frac{z}{l_{нл}}, \\ I_{нл}^{-1} &= \beta_1 \left( \frac{2\beta_2 W}{\omega_1 d_{эфф}} \right)^{1/2} = \left( \frac{8\pi W}{cn_2} \right)^{1/2} \frac{4\pi \omega_1 d_{эфф}}{n_1 c},\end{aligned}\quad (5)$$

$l_{\text{нл}}$  — характерная длина нелинейного взаимодействия,  $I_1(x)$ ,  $I(x)$  — нормированные интенсивности первой и второй гармоник, связанные законом сохранения (4):

$$I_1(x) + I(x) = 1. \quad (4')$$

Величина  $I(x)$  представляет КПД генерации ВГ по плотности мощности, а для случая однородных по сечению пучков накачки  $I(x)$  представляет и КПД генерации ВГ полной мощности. В дальнейшем для простоты будем рассматривать следующее граничное условие для относительной разности фаз волн  $\theta(0) = \pi/2$ . Тогда, как было показано [5], система (2) с учетом интеграла (4') приводится к одному интегро-дифференциальному уравнению для нормированной интенсивности ВГ  $I(x)$ :

$$\frac{dI}{dx} = 2\sqrt{I}(1-I) \cos[\alpha\{I(x)\}], \quad (6)$$

$$\alpha\{I(x)\} = \int_0^x dx_1 \kappa(x_1) + \int_0^x dx_1 \left[ \frac{1}{1-I(x_1)} - \frac{1}{2I(x)} \right] \int_0^{x_1} dx_2 \kappa(x_2) \frac{dI}{dx_2}, \quad (7)$$

$$\kappa(x) = l_{\text{нл}} \Delta k(l_{\text{нл}} x).$$

Величина  $\alpha\{I(x)\}$  имеет смысл набега относительной разности фаз  $\theta(x) - \pi/2$  из-за расстройек фазового синхронизма  $\kappa(x)$ , вызванных неоднородностью среды.

Рассмотрим сначала случай больших расстройек фазового синхронизма  $\kappa \gg 1$ , но достаточно медленно изменяющихся в пространстве,

$$\frac{\kappa'}{\kappa^2} \ll 1. \quad (8)$$

При этом эффективность преобразования энергии невелика, интенсивность ВГ мала,  $I \ll 1$ , так что нетрудно вычислить набег разности фаз  $\alpha(x)$  в (6), (7) с точностью до членов порядка  $\kappa^{-1} \ll 1$  и  $\left| \frac{d(\kappa^{-1})}{dx} \right| \ll 1$ :

$$\alpha(x) \approx \frac{1}{2} \int_0^x dx_1 \kappa(x_1).$$

Оценив таким образом величину  $\alpha(x)$  в явном виде, нетрудно теперь проинтегрировать уравнение (6). Приближенное решение в этом случае для граничного условия  $I(0) = 0$ ,  $I_1(0) = 1$  имеет вид

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left[ \int_0^x dx_1 \cos \left( \frac{1}{2} \int_0^{x_1} dx_2 \kappa(x_2) \right) \right]; \quad (9)$$

$$\left| \frac{d(\kappa^{-1})}{dx} \right| \ll 1, \quad \kappa^{-1} \ll 1. \quad (10)$$

Интеграл под знаком гиперболического тангенса при выполнении условий (10) можно оценить методом стационарной фазы [12], считая, что в рассматриваемом интервале отсутствуют точки стационарной фазы,  $\kappa(x) \neq 0$ :

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left[ \frac{2 \sin \left( \frac{1}{2} \int_0^x dx_1 \kappa(x_1) \right)}{\kappa(x)} \right]. \quad (9')$$

Поскольку аргумент гиперболического тангенса мал, то, разлагая тангенс, получаем решение в виде

$$I(x) \approx \frac{4 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \int_0^x dx_1 \kappa(x_1) \right)}{\kappa^2(x)}. \quad (9'')$$

Подставляя решение (9'), (9'') в выражение (7) для  $\alpha\{I(x)\}$ , нетрудно убедиться, что отброшенные члены малы по сравнению с удержанными; эти члены будут приводить к более медленному по сравнению с основным изменению фазы  $\alpha(x)$ , которое может быть вычислено по теории возмущений, однако не изменит существенно характера решения (9'), (9''). При постоянных расстройках фазового синхронизма  $\kappa = \text{const}$  решение (9'') переходит в известное точное решение [14, 9].

Следует сделать замечание, что решение в виде (9''), по существу, может быть получено применением метода ВКБ ( $\kappa'/\kappa^2 \ll 1$ ) к уравнениям (1) в приближении ЗИ [8, 9]:

$$\frac{d^2 A_2}{dx^2} + i\kappa(x) \frac{dA_2}{dx} + 2A_2 = 0. \quad (11)$$

Однако решение в виде (9), (9') обладает тем преимуществом, что позволяет с хорошей степенью точности, как показывает сравнение с численным счетом, делать оценки даже при высоких КПД преобразования энергий, когда приближение ЗИ уже не работает.

2. Рассмотрим теперь решение уравнения (6), (7) в области вблизи точки фазового синхронизма  $\kappa(x_c) = 0$  и будем пока рассматривать случай равных нулю расстройок фазового синхронизма на входе в нелинейный кристалл  $\kappa(0) = 0$ . Рассмотрим сначала случай линейной неоднородности  $\kappa(x) = \kappa'x$ . Уравнения (6), (7) удобно переписать в виде следующего интегрального уравнения при условиях  $I(0) = 0$ ,  $\kappa(x) = \kappa'x$ :

$$I(x) = \text{th}^2 \left[ \int_0^x dx_1 \cos [\alpha\{I(x_1)\}] \right]; \quad (6')$$

$$\alpha\{I(x)\} = \kappa' \left[ \int_0^x x_1 dx_1 + \int_0^x dx_1 \left[ \frac{1}{1 - I(x_1)} - \frac{1}{2I(x_1)} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{x_1} dx_2 x_2 \frac{dI}{dx_2} \right]. \quad (7')$$

В случае  $\kappa' \gg 1$  (большой градиент неоднородности в области фазового синхронизма) интеграл в (6') под знаком гиперболического тангенса можно оценить по методу стационарной фазы. Точкой стационарной фазы является точка, удовлетворяющая уравнению  $d(\alpha(x_c))/dx = 0$ , откуда следует  $x_c = 0$ . Таким образом, точка стационарной фазы, область вблизи которой дает основной вклад в интеграл в (6'), совпадает,

что вполне естественно, с точкой фазового синхронизма  $x_c=0$  ( $x(x_c)=0$ ). Для вычисления интеграла  $\int_0^x dx_1 \cos(\alpha\{I(x_1)\})$  с точностью до членов порядка  $|\kappa'|^{-1/2} \ll 1$  методом стационарной фазы не требуется полной информации о функции  $\alpha\{I(x)\}$ , достаточно знать лишь вторую производную этой функции в точке стационарной фазы  $\alpha''(x_c)$ . Эту величину нетрудно вычислить, разлагая выражение (7') по малым  $x \ll 1$  вблизи  $x_c=0$ , при этом поведение  $I(x) \approx x^2$  при малых  $x$  известно. Таким образом, окончательно получаем следующее решение для интенсивности  $I(x)$  ВГ в области вблизи точки фазового синхронизма с точностью до членов порядка  $|\kappa'|^{-1/2} \ll 1$ :

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left[ \int_0^x dx_1 \cos \left( \frac{\kappa' x_1^2}{3} \right) \right]. \quad (12)$$

Решение (12) удобно записать также, используя косинус — интеграл Френеля [15]:

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dt \cos t^2,$$

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left\{ \left( \frac{3\pi}{2|\kappa'|} \right)^{1/2} C \left[ x \left( \frac{\kappa'}{3} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (12')$$

Максимальная эффективность генерации ВГ в линейно-неоднородной среде  $\kappa(x) = \kappa'x$  достигается на расстоянии  $x_m$  от входа в нелинейную среду, определяемом из уравнения

$$\frac{dI}{dx}(x = x_m) = 0. \quad (13)$$

На расстояниях, больших  $x_m$ , происходит обратная перекачка энергии в основную волну, и интенсивность второй гармоники падает. Решая (13), с учетом (12') нетрудно вычислить длину кристалла  $x_m$ , при которой достигается максимальный КПД  $I_m$  генерации ВГ:

$$x_m \approx \left( \frac{3\pi}{2|\kappa'|} \right)^{1/2}; \quad (14)$$

$$I_m(x_m) \approx \text{th}^2 \left[ \left( \frac{3\pi}{2|\kappa'|} \right)^{1/2} C \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (15)$$

На рис. 1, 2 проводится сравнение зависимостей  $I_m(\kappa')$  и  $x_m(\kappa')$  от градиента неоднородности среды  $\kappa'$ , полученных из аналитических выражений (14), (15) с использованием таблиц [16] (пунктирные линии 1), с этими же зависимостями, полученными решением системы уравнений (2) на ЭВМ (сплошные линии 2). Видно, что максимальный КПД преобразования энергии во вторую гармонику в линейно-неоднородной среде  $I_m(x_m)$  для случая, когда точка фазового синхронизма находится в начале кристалла ( $x(0) = 0$ ), хорошо описывается аналитическим выражением (15) во всем интервале коэффициентов преобразования энергии, т. е. и в той области, где приближения ЗП и ЗИ не работают. Рис. 2, 3 демонстрируют хорошее совпадение приближенных аналитических решений (12'), (15) с точными вплоть до высоких КПД преобразования энергии порядка 70—80%. Следует заметить, что решение (12),

(12') может хорошо работать лишь в ограниченной области ( $|x| \sim x_m$ ) вблизи точки фазового синхронизма, поскольку используется разложение функции  $\alpha(x)$  вблизи точки стационарной фазы; при дальнейшем увеличении  $x$  происходит существенное увеличение расстройки фазового синхронизма  $\kappa(x)$  и колебания интенсивностей первой и второй гармоник носят затухающий характер. Эти колебания приближенно описываются формулой (ср. (9), (9'), (9''))

$$I \approx \frac{I_m}{2} + \text{th}^2 \left[ \frac{2 \sin \left( \frac{1}{2} \int_0^x dx_1 \kappa(x_1) + \theta_0 \right)}{\kappa(x)} \right], \quad (16)$$

где  $\theta_0$  — некоторая постоянная добавка к фазе, определяемая начальными условиями.

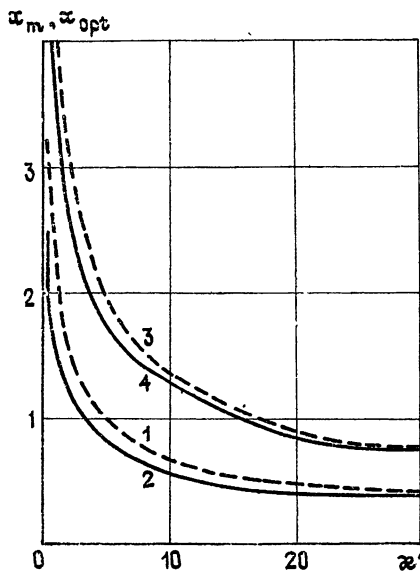


Рис. 1. Зависимость  $x_m$ ,  $x_{opt}$  от параметра  $x'$ ; Пунктирные кривые, рассчитанные по формуле (14), 3 — по формуле (27); сплошные кривые, рассчитанные на ЭВМ при: 2 —  $\Delta = 0$ , 4 —  $\Delta = \Delta_{opt}$ .

Нетрудно получить аналогичным образом решения для любой неоднородности  $\kappa(x)$  при условии, что точка фазового синхронизма находится в начале кристалла  $\kappa(0) = 0$ . Задача сводится в этом случае к вычислению второй производной  $\alpha''(0)$  функции  $\alpha\{I(x)\}$  в точке стационарной фазы. Для неоднородностей степенного вида  $\kappa(x) = x'x^p$  КПД генерации второй гармоники вблизи точки фазового синхронизма описывается следующим выражением:

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left[ \int_0^x dx_1 \cos \left( \frac{x'x_1^{p+1}}{p+2} \right) \right],$$

$$\kappa(x) = x'x^p. \quad (17)$$

Максимальный КПД  $I_m(x_m)$  в кристаллах с неоднородностью вида  $\kappa(x) = x'x^p$  достигается при длинах кристалла  $x_m$ , равных



$$x_m = \left[ \frac{\pi(p+2)}{2x'} \right]^{\frac{1}{p+1}}, \quad (18)$$

$$I_m(x_m) \approx \text{th}^2 \left[ \int_0^{x_m} dx_1 \cos \left( \frac{x' x_1^{p+1}}{p+2} \right) \right]. \quad (19)$$

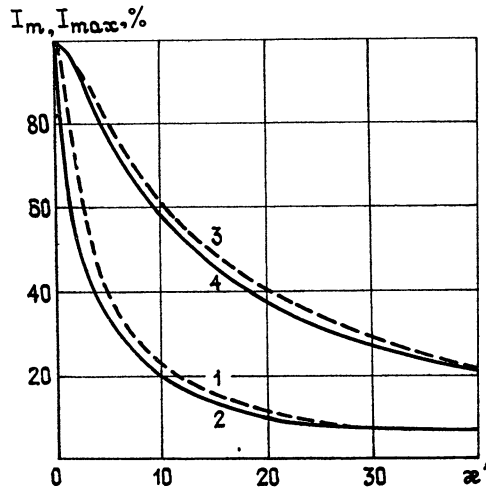


Рис. 2. Зависимость нормированной интенсивности  $I_m, I_{\max}$  ВГ от  $x'$ . Пунктирные кривые, рассчитанные: 1 — по формуле (15), 3 — по формуле (29); сплошные кривые, рассчитанные на ЭВМ при 2 —  $\Delta = 0$ , 4 —  $\Delta = \Delta_{\text{опт}}$ .

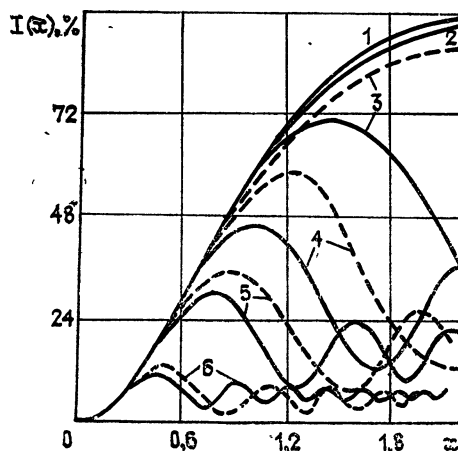


Рис. 3. Зависимость КПД ВГ  $I(x)$  от приведенной длины нелинейного кристалла при  $\Delta = 0$  и различных значениях параметра  $x'$ . Пунктирные кривые, рассчитанные по формуле (12'), сплошные — расчет на ЭВМ: 1 —  $x' = 0$ , 2 —  $x' = 0,6$ , 3 —  $x' = 1$ , 4 —  $x' = 3$ , 5 —  $x' = 6$ , 6 —  $x' = 20$ .

Сделаем несколько замечаний о характере приближений, использованных при получении аналитических решений (12), (17). С формальной стороны замена неизвестной функции  $\alpha \{I(x)\}$  простыми степенны-

ми выражениями, использовавшимися в (12), (17), требует выполнения условий

$$|\kappa'|^{-1/2} \ll 1, \quad \left| \frac{d}{dx} (|\kappa'|^{-1/2}) \right| \ll 1. \quad (20)$$

В этом случае КПД генерации ВГ, как легко видеть из (12'), (15), малы, что соответствует приближению ЗИ. Разложив гиперболический тангенс по малому аргументу в соответствии с условиями (20), получим решения, соответствующие приближению ЗИ. В линейно-неоднородных средах решение уравнения (11) (приближение ЗИ) выражается через вырожденные гипергеометрические функции [8]. Нетрудно убедиться, что разложение выражения (12) при выполнении условий  $\kappa' x^2/3 \ll 1$  приводит к асимптотическому разложению (формула (7) в [8]) точного решения в гипергеометрических функциях линеаризованной задачи. Полученные нами решения в виде (12), (17) хорошо работают, как уже отмечалось, в широком диапазоне коэффициентов преобразования энергии вплоть до  $I \sim 1$ . Это, по-видимому, соответствует тому, что выражения (12), (17) суммируют главные члены рядов при разложении точных решений по параметрам  $|\kappa'|^{-1/2} \ll 1$ ,  $|d_{\kappa'}|\kappa'|^{-1/2}/dx| \ll 1$ . Поскольку решение линеаризованной задачи даже в линейно-неоднородной среде выражается через гипергеометрические функции и труднообозримо, естественно применить метод ВКБ для исследования задач о нелинейном взаимодействии волн в неоднородных средах в приближении ЗИ [17-19].

Полученные нами решения (12), (17) в области вблизи точки фазового синхронизма показывают, что методом ВКБ в этой области следует пользоваться с осторожностью. Применение метода ВКБ в области  $\kappa(x) \approx 0$  возможно лишь при выполнении условия  $|\kappa'| \ll 1$ , при этом коэффициенты преобразования энергии, как видно из (12), (17), велики и приближение ЗИ, требующее выполнения условия  $|\kappa'|^{-1/2} \ll 1$ , несправедливо.

Таким образом, при рассмотрении нелинейного взаимодействия волн на достаточно больших длинах ( $z \sim l_{\text{нл}}$ ) в области вблизи точки фазового синхронизма нельзя линеаризовать уравнения при условии применимости метода ВКБ. Вместе с тем, в областях вдали от точек фазового синхронизма условия применимости метода ВКБ  $|\kappa'/\kappa^2| \ll 1$  и приближения ЗИ могут быть использованы одновременно.

В слабонеоднородных ( $|\kappa'| \ll 1$ ) нелинейных средах могут быть достигнуты высокие ( $\sim 100\%$ ) КПД генерации ВГ. Решение системы (2) в этом случае мало отличается от соответствующего решения в однородной среде, так что набег фазы  $\alpha\{I(x)\}$  в (7) можно вычислять, подставляя вместо  $I(x)$  невозмущенное решение  $I_0(x) = \text{th}^2(x)$ . Тогда для линейно-неоднородной среды  $\kappa(x) = \Delta + \kappa'x$  получим следующее приближенное решение в квадратурах при малых  $\kappa(x) \ll 1$  (здесь  $\Delta$  — безразмерная расстройка фазового синхронизма на входе в нелинейную среду):

$$I(x) \approx \text{th}^2 \left[ \int_0^x dx_1 \cos \left( \frac{\Delta}{4} \text{sh} 2x_1 + \frac{\kappa'}{2} \text{ch}^2 x_1 - \frac{\kappa'}{2} x_1 \text{cth} x_1 \right) \right]. \quad (21)$$

Если неоднородность среды настолько слаба, что набег фазы  $\alpha(x) \ll 1$  для  $x \sim 1$ , то можно разложить косинус в выражении (21) по малому аргументу и получить решение в явном виде:

$$I(x) \approx \text{th}^2(x) \left[ 1 - \frac{1}{2 \text{sh } 2x} \left( \frac{\Delta^2 + x'^2}{32} \text{sh } 4x + \frac{\Delta x'}{16} \text{ch } 4x + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x'^2 - x' \Delta x}{2} \text{sh } 2x + \frac{x' \Delta - x'^2 x}{2} \text{ch } 2x - \frac{x' \Delta}{2} x^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x'^2}{3} x^3 + \frac{3x'^2 - \Delta^2}{8} x - \frac{9}{16} x' \Delta - x'^2 x^2 \text{cth } x \right) \right]. \quad (22)$$

Сравнение точных решений с приближенными (21), (22) показывает, что приближенные решения хорошо применимы при  $x' < 1$  до значений  $x' \sim 0,7$ , при этом КПД генерации ВГ может достигать 90—100% (рис. 3).

3. Для повышения КПД оптического удвоителя чрезвычайно важным является оптимальный подбор параметров. В условиях малости дифракционных и апертурных эффектов КПД генерации второй гармоники  $I(x, x', \Delta)$  в неоднородном кристалле для однородного по сечению пучка определяется тремя параметрами: безразмерной величиной  $x'$ , характеризующей степень неоднородности кристалла, расстройкой фазового синхронизма на входе  $\Delta$  и безразмерной длиной кристалла  $x$ . Безразмерный параметр  $x'$ , характеризующий степень неоднородности кристалла, зависит не только от градиента показателя преломления  $\partial(n_2 - n_1)/\partial z$ , но и от характерной длины нелинейного взаимодействия, а следовательно, и от плотности мощности накачки:

$$x' = \frac{4\pi}{\lambda_1} \frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z} l_{\text{нл}}^2, \quad (23) \\ l_{\text{нл}}^{-1} = \left( \frac{8\pi W}{cn_2} \right)^{1/2} \frac{4\pi\omega_1 d_{\text{эфф}}}{n_1 c},$$

где  $\lambda_1$  — длина волны основного излучения. КПД генерации ВГ увеличивается с уменьшением параметра  $x'$ , однако величина  $x'$  ограничена снизу, как видно из (23), условиями эксперимента: качеством кристалла, его нелинейными характеристиками, длиной волны основного излучения и, наконец, плотностью мощности накачки.

Увеличение КПД при фиксированной длине нелинейного кристалла может быть достигнуто путем оптимального выбора расстройки  $\Delta$  фазового синхронизма на входе. Из теории в приближении ЗП [7] ( $L/l_{\text{нл}} \ll 1$ ) известно, что расстройка должна быть выбрана таким образом, чтобы точка фазового синхронизма находилась в центре кристалла (что также понятно из интуитивных соображений):

$$\Delta = - \frac{x'}{2} \frac{L}{l_{\text{нл}}} = - \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z} l_{\text{нл}} L. \quad (24)$$

Таким образом, при малых (по сравнению с  $l_{\text{нл}}$ ) длинах кристалла оптимальная расстройка  $\Delta$  по абсолютной величине линейно нарастает с длиной кристалла.

В работе [20] оптимальная расстройка  $\Delta$  в нелинейном режиме подбиралась на основе численных расчетов в зависимости от нелинейной длины  $l_{\text{нл}}$  при фиксированной длине кристалла  $L$  и было показано, что с уменьшением  $l_{\text{нл}}$  (увеличением плотности накачки) точка фазового синхронизма для получения максимального при данной длине  $L$  КПД должна смещаться от центра кристалла. В условиях эксперимента опти-

мальная расстройка синхронизма на входе может быть подобрана поворотом кристалла, при этом максимальный достижимый таким способом КПД генерации ВГ будет изменяться с изменением длины кристалла  $L$ . Естественно поставить вопрос о предельных КПД генерации ВГ, достижимых с использованием в удвоителе тех или иных кристаллов, характеризующихся безразмерным параметром  $x'$ .

Для выяснения вопроса о предельных КПД удвоителей в отсутствие других, кроме продольной неоднородности показателя преломления, снижающих КПД факторов, необходимо оптимальным образом подобрать не только начальную расстройку фазового синхронизма, но и длину кристалла. С формальной стороны эта задача оптимизации выглядит следующим образом: предельный КПД генерации ВГ  $I_{\max}(x')$ , оптимальная расстройка  $\Delta_{\text{opt}}$  и длина кристалла  $x_{\text{opt}}$  определяются следующей системой уравнений (совместно с исходной системой (2)):

$$\left. \frac{\partial I}{\partial x}(x, \Delta, x') \right|_{x=x_{\text{opt}}, \Delta=\Delta_{\text{opt}}} = 0; \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \Delta}(x, \Delta, x') \right|_{x=x_{\text{opt}}, \Delta=\Delta_{\text{opt}}} = 0. \quad (26)$$

Для аналитического решения этой задачи оптимизации длины кристалла и расстройки  $\Delta$  необходимо получить решение при  $\Delta \neq 0$  с последующей процедурой нахождения  $x_{\text{opt}}$  и  $\Delta_{\text{opt}}$  из уравнений (25), (26). Если  $x'$  и  $\Delta$  достаточно велики, то решение  $I(x, \Delta, x')$  может быть получено несколько усложненным вариантом метода, изложенного в предыдущем параграфе. Опуская громоздкую процедуру получения таких решений с последующей оптимизацией (25), (26), приведем лишь окончательный результат для оптимальных длин  $x_{\text{opt}}(x')$ , расстроек  $\Delta_{\text{opt}}(x')$  в предельных КПД генерации ВГ  $I_{\max}(x')$  в зависимости от параметра  $x'$ :

$$x_{\text{opt}}(x') \approx 2 \left( \frac{3\pi}{2|x'|} \right)^{1/2}; \quad (27)$$

$$\Delta_{\text{opt}}(x') \approx \left( \frac{3\pi|x'|}{2} \right)^{1/2}; \quad (28)$$

$$I_{\max}(x') \approx \text{th}^2 \left\{ 2 \left( \frac{3\pi}{2|x'|} \right)^{1/2} C \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (29)$$

Поясним смысл этих формул. Эффективная генерация ВГ, как видно из (12'), происходит в области  $-\left( \frac{3\pi}{2|x'|} \right)^{1/2} \leq x - x_c \leq \left( \frac{3\pi}{2|x'|} \right)^{1/2}$  вблизи точки фазового синхронизма. Для повышения КПД генерации ВГ расстройка фазового синхронизма на входе и длина кристалла должны подбираться таким образом, чтобы вся эта область с размером  $2(3\pi/2|x'|)^{1/2}$  находилась целиком внутри кристалла. Отсюда ясно, что оптимальная длина кристалла не должна быть меньше величины области фазового синхронизма  $2(3\pi/2|x'|)^{1/2}$ , с другой стороны, увеличение длины кристалла по сравнению с оптимальной приведет к некоторой потере КПД (см. рис. 3). Из условий (27), (28) следует, что для однородных по сечению пучков накачки при оптимально подобранных длине кристалла  $x_{\text{opt}}$  и расстройке  $\Delta_{\text{opt}}$  точка фазового синхронизма лежит в центре кристалла  $x_c = x_{\text{opt}}/2$ , как и в случае малых длин кристалла.

На рис. 1, 2, 4 проводится сравнение аналитических выражений (27)–(29) (пунктирные линии 3) с графиками, полученными путем

подбора оптимальных параметров с помощью ЭВМ (сплошные линии 4). На рис. 4 показана зависимость модуля расстройки на входе  $|\Delta(x')|$  от  $x'$ , при этом пунктирная кривая, полученная по формуле (28), и сплошная, полученная на основе численных расчетов, практически совпали. Видно, что аналитические выражения, как и в случае расстройек  $\Delta$ , равных нулю, хорошо описывают решения практически во всем диапазоне КПД, хотя формально строгая процедура получения выражений (27)—(29) может быть проведена при  $|x'|^{-1/2} \ll 1$ . Интересно отметить, что «истинная» (не нормированная на  $l_{\text{нл}}$ ) оптимальная длина кристалла  $L_{\text{opt}}$  не зависит от  $l_{\text{нл}}$ , а следовательно, от плотности мощности накачки для однородных по сечению пучков накачки. Действительно, переписывая (27) с учетом (5), убеждаемся в этом:

$$L_{\text{opt}} \approx \left( \frac{6\pi}{|x'|} \right)^{1/2} l_{\text{нл}} = \left( \frac{3\lambda_1}{2 \frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z}} \right)^{1/2}. \quad (27')$$

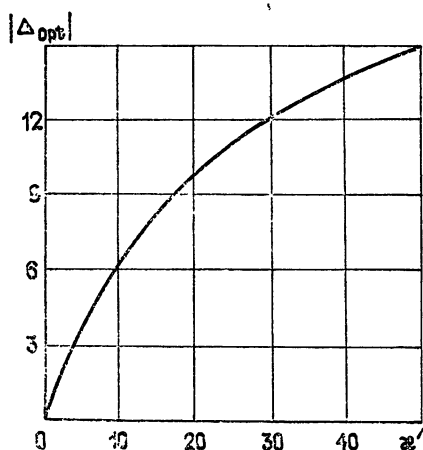


Рис 4. Зависимость модуля расстройки на входе  $|\Delta_{\text{opt}}|$  от параметра  $x'$ .

Следовательно, оптимальная длина кристалла зависит лишь от длины волны основного излучения и градиента неоднородности показателя преломления. Этот результат является приближенным (рис. 1), а для гауссовых по сечению пучков накачки, как показано в [21], появляется зависимость  $L_{\text{opt}}$  и от плотности мощности накачки.

Сделаем несколько замечаний в связи с результатами численных экспериментов в [20]. В [20] исследовалась зависимость оптимальной расстройки на входе от  $l_{\text{нл}}$  при фиксированной длине кристалла  $L$  при различных значениях параметра  $\mu_{\parallel}$ , введенного следующим образом:

$$\mu_{\parallel} = \frac{4}{\lambda_1} \frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z} L^2. \quad (30)$$

Были рассмотрены значения параметра  $\mu_{\parallel}$ , равные 5,35; 3,56; 1,78; 0,89. Было показано, что оптимальным образом подобранная точка фазового синхронизма смещается от центра кристалла, причем это смещение увеличивается с ростом безразмерной длины кристалла  $\tilde{l} = L/l_{\text{нл}}$  (т. е. с уменьшением  $l_{\text{нл}}$ ), причем величина этого смещения тем меньше, чем больше  $\mu_{\parallel}$ .

Следует заметить, что авторы [20] не исследовали случай оптимальных длин кристалла  $L = L_{\text{opt}}$ . Действительно, из (27'), (30) имеем для

$L = L_{\text{opt}} \mu_{\parallel}^{\text{opt}} = 6$ , при этом оптимально выбранная точка фазового синхронизма, как было показано выше, должна находиться в центре кристалла: наиболее близкое к  $\mu_{\parallel} = 6$  [20] значение  $\mu_{\parallel} = 5,35$  приводит к минимальному сдвигу точки фазового синхронизма от центра. Ясно, что дальнейшее исследование в области  $\mu_{\parallel} \approx 6$  привело бы к результату, совпадающему с полученным в данной работе.

Таблица 1

$W_1$ BT/см <sup>2</sup>	LiNbO <sub>3</sub>			КДР		
	$l_{\text{нл}}, \text{см}$	$\frac{\partial n}{\partial z} \sim$	$\frac{\partial n}{\partial z} \sim$	$l_{\text{нл}}, \text{см}$	$\frac{\partial n}{\partial z} \sim$	$\frac{\partial n}{\partial z} \sim$
		$\sim 10^{-5}, \text{см}^{-1}$	$\sim 10^{-4}, \text{см}^{-1}$		$\sim 10^{-5}, \text{см}^{-1}$	$\sim 10^{-4}, \text{см}^{-1}$
	$\chi'$	$\chi'$		$\chi'$	$\chi'$	
$1 \cdot 10^9$	0,14	0,02	0,2			
$5 \cdot 10^8$	0,18	0,04	0,4	1,88	4,18	41,8
$10^8$	0,42	0,21	2,1	4,2	22	220
$5 \cdot 10^7$	0,59	0,41	4,1	5,9	41,2	412

Представляет интерес сделать численные оценки параметра  $\chi$  и предельных КПД  $l_{\text{max}}$  для некоторых нелинейных кристаллов. Табл. 1 показывает возможные значения параметра  $\chi'$  для кристаллов LiNbO<sub>3</sub> и КДР при мощностях основного излучения  $W_1$ , близких к пробойным, причем длина волны основного излучения положена равной  $\lambda_1 = 1064 \text{ нм}$ . Из приведенной таблицы видно, что худший по качеству кристалл LiNbO<sub>3</sub> может характеризоваться меньшим значением параметра  $\chi'$ , а следовательно, большим предельным КПД генерации ВГ, чем кристалл КДР, из-за большей для последнего нелинейной длины  $l_{\text{нл}}$  при той же плотности мощности накачки.

На рис. 2 (кривая 4) показаны предельные КПД удвоителей в зависимости от параметра  $\chi'$ . Видно, что для кристалла КДР с градиентом показателя преломления  $\partial(n_2 - n_1)/\partial z \sim 10^{-5} \text{ см}^{-1}$  при плотностях мощности накачки, близких к пробойным, КПД не может быть более 85%, а при ухудшении качества кристалла до  $\partial(n_2 - n_1)/\partial z \sim 10^{-4} \text{ см}^{-1}$  получить КПД более 30% невозможно. В то же время при использовании кристалла LiNbO<sub>3</sub> даже с градиентом  $\partial(n_2 - n_1)/\partial z \sim 10^{-4} \text{ см}^{-1}$  возможно получение высоких — порядка 90% КПД в силу большой эффективной нелинейности последнего. Следует сделать замечание, что для получения представления о предельных КПД удвоения частоты в реальных условиях эксперимента необходим учет неоднородности плотности мощности по сечению пучка, что приведет, как ясно из качественных соображений, к еще большему снижению предельных КПД [21].

Авторы благодарны А. И. Холодных за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

- С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Квантовая электроника, 1, № 5, 1022 (1974).
- Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ, 20, № 11, 734 (1974).
- Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, ЖЭТФ, 68, 834 (1975).
- Ю. А. Горохов, Д. П. Криндач, Д. Н. Никогосян, А. П. Сухоруков, Квантовая электроника, 1, № 3, 679 (1974).
- Л. П. Мельник, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, 70, № 2, 458 (1976).
- В. И. Беспалов, Изв. вузов — Радиофизика, 9, 1117 (1966).
- О. Ф. Бутягин, сб. Квантовая электроника, под ред. Н. Г. Басова, вып. 7, изд. Сов. радио, М., 1972, стр. 26.
- З. А. Тагиев, А. С. Чиркин, Квантовая электроника, 7, 1503 (1977).
- З. А. Тагиев, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 73, № 4, 1271 (1977).

10. Н. Н. Филоненко, Л. П. Мельник, ЖЭТФ, **69**, № 10, 1183 (1975).
11. Л. П. Мельник, Н. Н. Филоненко, Труды VI Международного симпозиума по нелинейной акустике, изд. МГУ, ч. 1, 150 (1976).
12. Ф. Цернике, Дж. Мидвинтер, Прикладная нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1976.
13. Э. Копсон, Асимптотические разложения, изд. Мир, М., 1966.
14. И. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
16. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, М.—Л., 1949.
17. M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett., **29**, 565 (1972).
18. A. D. Pilia, Proc. 11-th Conf. on phenomena in ionized gases, Oxford, 1971, p. 320.
19. F. W. Perkins and J. Flick, Phys. Fluids, **14**, 2012 (1971).
20. О. Ф. Бутягин, В. М. Ваксман, А. А. Казаков, Е. М. Швом, Квантовая электроника, **1**, № 4, 812 (1974).
21. Л. П. Мельник, Н. Н. Филоненко, А. И. Холодных, Квантовая электроника, **6**, № 1, 25 (1979).

Институт физики СО АН СССР

Поступила в редакцию  
28 февраля 1977 г.,  
после переработки  
31 августа 1978 г.

## THE EFFICIENCY OF SECOND HARMONIC GENERATION IN NONLINEAR CRYSTALS WITH LONGITUDINAL INHOMOGENEITY OF THE REFRACTION INDEX

*L. P. Mel'nik, N. N. Filonenko*

The influence of the longitudinal inhomogeneity of the nonlinear crystals on the efficiency of the second harmonic without the approximation of the given pump field is analytically and numerically investigated. It is shown that the effectiveness of the frequency transformation is defined by the dimensionless parameter  $\kappa'$  depending on the inhomogeneity crystal gradient  $\frac{\partial(n_2 - n_1)}{\partial z}$  which is typical of the nonlinear interaction  $I_{NL}$  and the wavelength of the principal radiation  $\lambda_1$ . The optimal length of the nonlinear crystal is found when the efficiency of the generation is maximal for the given  $\kappa'$ . The dependence of the maximum possible efficiency on the parameter  $I_{max}$  is obtained when the frequency doubles in the approximation of homogeneous-in-section beams.

УДК 621.396.61 : 621.396.2

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ВЕТВЯЩИХСЯ УСИЛИТЕЛЯХ МОЩНОСТИ

В. А. Драний, В. И. Дергаус

Исследованы мультипликативные искажения сложных сигналов в различных реализациях ветвящихся импульсных усилителей на ЛБВ. Предложен статистический критерий искажений для оценки серийнопригодности усилителей, зависящий от разброса амплитудных и фазовых характеристик элементов. Рассмотрен числовой пример.

Оценка качества усилителей мощности радиотехнических систем, использующих сложные сигналы, оптимальное обнаружение и измерение их параметров при мультипликативных искажениях может быть произведена по относительным уровням неискаженной части  $\alpha_0$  и максимальной помеховой составляющей  $\alpha_k \max$  огибающей сигнала на выходе оптимального фильтра [1]. Определяющими параметрами являются также модули отклонений задержки  $\Delta\tau$  и длительности  $\Delta\theta$  огибающей от соответствующих значений при отсутствии искажений.

Серийнопригодность описанного многомерного усилителя при наличии искажений может быть определена вероятностью  $P_{\text{годн}}$  совместного нахождения определяющих параметров в допусковой области  $D$  при выходе из производства [2]. Для указанных параметров область  $D$  целесообразно записать в виде неравенств

$$\alpha_0 \geq \alpha_{0 \text{ доп}}, \quad \alpha_k \max \leq \alpha_{k \text{ доп}}, \quad \Delta\tau \leq \Delta\tau_{\text{доп}}, \quad \Delta\theta \leq \Delta\theta_{\text{доп}}, \quad (1)$$

где  $\alpha_{0 \text{ доп}}$  — минимально допустимое значение  $\alpha_0$ ;  $\alpha_{k \text{ доп}}$ ,  $\Delta\tau_{\text{доп}}$  и  $\Delta\theta_{\text{доп}}$  — максимально допустимые значения  $\alpha_k \max$ ,  $\Delta\tau$  и  $\Delta\theta$ . Область  $D$  при приведенных односторонних допусках является незамкнутой в отличие от областей при двусторонних допусках, представляющих собой  $N$ -мерные замкнутые объемы, ограниченные  $N$ -мерной гиперповерхностью [3].

При анализе серийнопригодности ветвящихся составных усилителей мощности (СУМ) для определения параметров огибающей может быть использована функция помеховой модуляции  $\bar{M}(t, \mathbf{b})$  [4], которая для необходимой статистической оценки искажений по реализациям СУМ задается как детерминированная функция времени, зависящая от вектора  $\mathbf{b}$  случайных параметров элементов.

$\bar{M}(t, \mathbf{b})$  определяется по функциям помеховой модуляции  $\bar{M}_{im}(t, \mathbf{b}_{im})$  отдельных усилительных каналов (элементов) с учетом структурной схемы СУМ. Для  $i$ -го элемента  $m$ -го ранга, следуя [1], получаем

$$\bar{M}_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) = 1 + \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} - \frac{1}{2} \left\{ \Delta \Psi_{im}^2(t, \mathbf{b}_{im}) - \left[ \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} \right]^2 \right\} + j \left[ \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) + \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) \right], \quad (2)$$



где  $\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})$  и  $\Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im})$  — паразитная модуляция амплитуды и фазы сигнала,  $K = 20 \lg e$ .

Искажения, вносимые  $n$ -канальным разветвлением  $m$ -го ранга, могут быть определены как искажения эквивалентного одноканального усилителя, у которого изменения мгновенных значений амплитуды и фазы имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_m(t, \mathbf{b}_m)}{K} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K}, \\ \Delta \Psi_m(t, \mathbf{b}_m) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}). \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2), (3) функция помеховой модуляции  $\bar{M}_m(t, \mathbf{b}_m)$  для  $n$ -канального разветвления  $m$ -го ранга имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{M}_m(t, \mathbf{b}_m) &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} - \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_{im}^2(t, \mathbf{b}_{im}) - \right. \\ &- \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} \right]^2 \left. \right\} + j \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для СУМ второго порядка при количестве элементов первого и второго ранга, равно соответственно  $N_1$  и  $N_2$ , пренебрегая членами третьего порядка малости и пользуясь (4), получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}(t, \mathbf{b}) &= \bar{M}_1(t, \mathbf{b}_1) \bar{M}_2(t, \mathbf{b}_2) = \left[ 1 + \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\Delta G_{i2}(t, \mathbf{b}_{i2})}{K} \right] \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\Delta G_{i1}(t, \mathbf{b}_{i1})}{K} \right] + \frac{1}{2N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \left[ \frac{\Delta G_{i1}(t, \mathbf{b}_{i1})}{K} \right]^2 + \frac{1}{2N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \times \\ &\times \left[ \frac{\Delta G_{i2}(t, \mathbf{b}_{i2})}{K} \right]^2 - \frac{1}{2N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \Delta \Psi_{i1}^2(t, \mathbf{b}_{i1}) - \frac{1}{2N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \Delta \Psi_{i2}^2(t, \mathbf{b}_{i2}) - \\ &- \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \Delta \Psi_{i1}(t, \mathbf{b}_{i1}) \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \Delta \Psi_{i2}(t, \mathbf{b}_{i2}) + j \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\Delta G_{i1}(t, \mathbf{b}_{i1})}{K} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\Delta G_{i2}(t, \mathbf{b}_{i2})}{K} \right] \left[ \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \Delta \Psi_{i1}(t, \mathbf{b}_{i1}) + \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \Delta \Psi_{i2}(t, \mathbf{b}_{i2}) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Величины  $\frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K}$  и  $\Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im})$  в (5) могут быть выражены через параметры ЛБВ и импульсных модуляторов следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{im}(t, \mathbf{b}_{im})}{K} &= M_{im} \left[ \frac{\Delta U_{1im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{1im}} - \frac{\Delta U_{2im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{2im}} \right], \\ \Delta \Psi_{im}(t, \mathbf{b}_{im}) &= L_{1im} \frac{\Delta U_{1im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{1im}} - L_{2im} \frac{\Delta U_{2im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{2im}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\frac{\Delta U_{1im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{1im}} = \frac{\delta U_{1im}}{U_{1im}} \cos(\Omega_{im} t + \varphi_{im}) - \frac{t}{\tau_{1im}},$$

$$\frac{\Delta U_{2im}(t, \mathbf{b}_{im})}{U_{2im}} = \frac{\delta U_{2im}}{U_{2im}} \cos(\Omega_{im} t + \varphi_{im}) - \frac{t}{\tau_{2im}},$$

$M_{im}$  — коэффициенты, характеризующие крутизну амплитудных характеристик ЛБВ,  $L_{1im}$  и  $L_{2im}$  — коэффициенты, характеризующие крутизну фазовых характеристик ЛБВ,  $\tau_{1im}$ ,  $\tau_{2im}$  — временные постоянные сколов модулирующих импульсов по сетке и спирали соответственно,  $\frac{\delta U_{1im}}{U_{1im}}$ ,  $\frac{\delta U_{2im}}{U_{2im}}$  — относительные величины амплитуд пульсаций вершины импульсов,  $\Omega_{im}$  и  $\varphi_{im}$  — угловые частоты и начальные фазы пульсаций.

Выходной сигнал СУМ определяется в виде

$$S_{\text{вых}}(t, \mathbf{b}) = \text{Re} [\bar{S}_{\text{вх}}(t) \bar{M}(t, \mathbf{b})]. \quad (7)$$

Пользуясь результатами, приведенными в [5], можно показать, что при прохождении сигнала (7) через согласованный с сигналом  $\bar{S}_{\text{вх}}(t)$  фильтр при весовой обработке по Хэммингу [6] получается сигнал

$$\begin{aligned} S(t, \mathbf{b}) = & 0,54 Y_c(t, \mathbf{b}) \cos \omega_0 t + 0,23 Y_c\left(t + \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right) \left[ \cos \omega_0 t \times \right. \\ & \times \cos\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) - \sin \omega_0 t \sin\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \left. \right] + 0,23 Y_c\left(t - \frac{2\pi}{\omega}, \mathbf{b}\right) \times \\ & \times \left[ \cos \omega_0 t \cos\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) + \sin \omega_0 t \sin\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \right] + 0,54 Y_s(t, \mathbf{b}) \times \\ & \times \sin \omega_0 t + 0,23 Y_s\left(t + \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right) \left[ \sin \omega_0 t \cos\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) + \cos \omega_0 t \times \right. \\ & \times \sin\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \left. \right] + 0,23 Y_s\left(t - \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right) \left[ \sin \omega_0 t \cos\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) - \right. \\ & \left. - \cos \omega_0 t \sin\left(\omega_0 \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

где  $Y_c(t, \mathbf{b})$ ,  $Y_s(t, \mathbf{b})$  — косинусная и синусная компоненты сигнала на выходе согласованного фильтра,  $\Delta\omega$  — полоса пропускания фильтра Хемминга.

При условии  $\left| \frac{\omega_0}{\Delta\omega} - E\left(\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right) \right| \ll 1$ , где  $E\left(\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right)$  — целая часть числа  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ , из (8) получим

$$S(t, \mathbf{b}) = S_c(t, \mathbf{b}) \cos \omega_0 t + S_s(t, \mathbf{b}) \sin \omega_0 t, \quad (9)$$

где

$$S_c(t, \mathbf{b}) = 0,54 Y_c(t, \mathbf{b}) + 0,23 Y_c\left(t + \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right) + 0,23 Y_c\left(t - \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right),$$

$$S_s(t, \mathbf{b}) = 0,54 Y_s(t, \mathbf{b}) + 0,23 Y_s\left(t + \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right) + 0,23 Y_s\left(t - \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \mathbf{b}\right).$$

В рассматриваемой функциональной модели СУМ осуществляется выделение огибающей сигнала (9) по формуле

$$|S(t, \mathbf{b})| = \sqrt{S_c^2(t, \mathbf{b}) + S_s^2(t, \mathbf{b})}. \quad (10)$$

Исследуем входной сигнал с линейной частотной модуляцией, который может быть представлен в комплексной форме как

$$\bar{S}_{вх}(t) = \text{rect}[t, T] \exp \left[ j \left( \omega_0 t + \frac{\gamma t^2}{2} + \varphi_0 \right) \right],$$

где

$$\text{rect}[t, T] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } 0 > t > T, \end{cases}$$

$T$  — длительность сигнала,  $\omega_0$  — несущая частота,  $\gamma$  — крутизна изменения частоты во времени,  $\varphi_0$  — начальная фаза.

Искажения огибающей сигнала (10) для различных реализаций СУМ в соответствии с (1) будем характеризовать следующими случайными параметрами:  $\alpha_0(\mathbf{b})$  — отношение амплитуды главного лепестка искаженного сигнала к амплитуде главного лепестка неискаженного сигнала,  $\alpha_{k \max}(\mathbf{b})$  — отношение амплитуды максимального бокового лепестка искаженного сигнала к амплитуде главного лепестка искаженного сигнала,  $\Delta\tau(\mathbf{b})$  — модуль ошибки задержки сигнала,  $\Delta\theta(\mathbf{b})$  — модуль ошибки длительности сигнала.

Для каждого из этих параметров задаются предельно допустимые значения  $\alpha_{0 \text{ доп}}$ ,  $\alpha_{k \max \text{ доп}}$ ,  $\Delta\tau_{\text{доп}}$ ,  $\Delta\theta_{\text{доп}}$ , которые определяют четырехмерную допусковую область  $D$ . Если значения указанных параметров удовлетворяют неравенствам (1), то такую реализацию СУМ будем считать годной. При этом серийнопригодность исследуемого варианта структурной схемы СУМ можно оценить относительным числом ее реализаций в процентах  $P_{\text{годн}}$ , для которых параметры искажений  $\alpha_0(\mathbf{b})$ ,  $\alpha_{k \max}(\mathbf{b})$ ,  $\Delta\tau(\mathbf{b})$ ,  $\Delta\theta(\mathbf{b})$  входят в заданную область  $D$ . Указанные параметры определялись по огибающей (10) с использованием метода статистических испытаний. Программа расчета величины  $P_{\text{годн}}$  реализована на ЭВМ БЭСМ-6.

В качестве числового примера рассмотрены СУМ, у которых  $T = 5 \cdot 10^{-3}$  условных единиц ( $y. e.$ );  $\omega_0 = 2\pi \cdot 30 \cdot 10^3$   $1/y. e.$ ,  $\gamma = 2\pi \cdot 10^6$   $1/(y. e.)^2$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 16$ , а равенства (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{11}(t, \mathbf{b}_{11})}{K} &= M \left[ \frac{t}{\tau_2} - \frac{t}{\tau_1} - \frac{\delta U_2}{U_2} \cos(\Omega t + \varphi) \right], \\ \Delta \Psi_{11}(t, \mathbf{b}_{11}) &= -L_1 \frac{t}{\tau_1} - L_2 \left[ \frac{\delta U_2}{U_2} \cos(\Omega t + \varphi) - \frac{t}{\tau_2} \right], \\ \frac{\Delta G_{12}(t, \mathbf{b}_{12})}{K} &= \frac{\Delta G_{11}(t, \mathbf{b}_{11})}{K} + \frac{\Delta G_{01}}{K}, \\ \Delta \Psi_{12}(t, \mathbf{b}_{12}) &= \Delta \Psi_{11}(t, \mathbf{b}_{11}) + \Delta \Psi_{01}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $M = 5$ ,  $L_1 = 5$ ,  $L_2 = 70$ ,  $\Omega = 2\pi \cdot 2,4$   $1/y. e.$

Координаты вектора  $\mathbf{b}_{12} \left( \frac{\Delta G_{01}}{K}, \Delta \Psi_{01}, \tau_1, \tau_2, \varphi, \frac{\delta U_2}{U_2} \right)$  в (11), кроме  $\frac{\delta U_2}{U_2}$ , распределены равномерно на интервалах  $[-0,1; 0,1]$ ,  $[-0,4; 0,4]$ ,  $[2 \cdot 10^{-3}; 5 \cdot 10^{-3}]$ ,  $[10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}]$ ,  $[0; 2\pi]$  соответственно. Координата  $\frac{\delta U_2}{U_2}$  распределена нормально с математическим ожиданием, равным  $10^{-3}$ , и среднеквадратичным отклонением  $2 \cdot 10^{-4}$ . Предполагается, что указанные координаты являются независимыми.

Исследовались четыре области параметров  $\alpha_0(b)$ ,  $\alpha_k \max(b)$ ,  $\Delta\tau(b)$ ,  $\Delta\theta(b)$ , которые определялись предельно допустимыми величинами  $\alpha_{0 \text{ доп}}(\partial B)$ ,  $\alpha_k \max \text{ доп}(\partial B)$ ,  $\Delta\tau_{\text{доп}}(10^{-3} \text{ y. e.})$ ,  $\Delta\theta_{\text{доп}}(10^{-3} \text{ y. e.})$  соответственно для каждой области  $[-0,4; -24; 0,2; 0,4]$ ,  $[-0,45; -25; 0,1; 0,2]$ ,  $[-0,5; -25,5; 0,1; 0,2]$ ,  $[-0,6; -26; 0,05; 0,1]$ .

Полученные значения  $P_{\text{годн}}$  равнялись соответственно 43%, 68%, 83%, 0. Для каждой области вычисления производились по 100 реализациям СУМ.

Таким образом, предложенный статистический критерий позволяет оценить серийнопригодность ветвящихся усилителей мощности на ЛБВ при заданных предельных параметрах искажений с учетом амплитудных и фазовых характеристик элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Драпий, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 19, № 7, 10 (1976).
2. Р. М. Туркельтауб, Методы исследования точности и надежности схем аппаратуры, изд. Энергия, М.—Л., 1966.
3. А. В. Михайлов, Эксплуатационные допуски и надежность в радиоэлектронной аппаратуре, изд. Сов. радио, М., 1970.
4. В. А. Драпий, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 19, № 12, 50 (1976).
5. Л. Френкс, Теория сигналов, пер. с англ. под ред. Д. Е. Вакмана, изд. Сов. радио, М., 1974.
6. Ч. Кук, М. Бернфельд, Радиолокационные сигналы, пер. с англ. под ред. В. С. Кельзона, изд. Сов. радио, М., 1971.

Поступила в редакцию  
18 января 1978 г.

#### STATISTICAL ESTIMATION OF MULTIPLICATIVE DISTORTIONS IN BRANCHING POWER AMPLIFIERS

V. A. Drapij, V. I. Dergaus

Multiplicative distortions of complex signals have been investigated in different realizations of branching pulse TWO amplifiers. A statistical criterion of distortions is suggested for the estimation of serial amplifier fitness depending on the spread of amplitude and phase characteristics of elements. A numerical example is considered.

УДК 538.56 : 519 25

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ ОДНОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ**

*А. Л. Вировлянский, А. Н. Малахов*

Рассматривается вопрос о представлении решения уравнения Фоккера — Планка с постоянным коэффициентом диффузии в виде континуального интеграла. Найден целый класс таких представлений. Обсуждается возможность применения формул приближенного вычисления континуальных интегралов по мере Винера для приближенного решения уравнения Фоккера — Планка.

В различных задачах статистической радиофизики довольно часто приходится иметь дело с марковскими процессами  $x(t)$ , задаваемыми стохастическими уравнениями вида [1, 2]

$$\dot{x} + a(x) = \xi(t),$$

где  $a(x)$  — нелинейная функция,  $\xi(t)$  — стационарный гауссов шум с нулевым средним и функцией корреляции

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = D \delta(t - t').$$

Случайный процесс  $x(t)$  (в силу его марковости) полностью описывается плотностью вероятности переходов  $W(x, t | x_0, t_0)$ , которая, как известно, подчиняется уравнению Фоккера — Планка, имеющему в данном случае вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [a(x) W] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W \tag{1}$$

с граничными условиями

$$W(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \tag{1a}$$

Уравнение (1) решается в элементарных функциях только для линейной  $a(x)$ . Поэтому приобретают большое значение различные приближенные методы его исследования.

В данной работе показано, как для этой цели можно применить метод континуального интегрирования (иногда употребляются термины: интегрирование по траекториям и функциональное интегрирование), который широко применяется в квантовой теории поля, физике фазовых переходов и т. д. [3, 4, 9], а в последнее время получил некоторое распространение в статистической радиофизике [5-7]. В разд. 1 показано, как точное решение (1) можно представить в виде континуального интеграла (КИ). О других способах получения аналогичного представления речь шла в [8, 10]. В [8] содержится целый класс эквивалентных КИ, выражающих точное решение (1). Однако все эти континуальные интегралы вычисляются в элементарных функциях лишь для линейной  $a(x)$ ,

т. е. тогда же, когда (1) легко решается. При исследовании (1) в случае нелинейной  $a(x)$  можно пойти двумя путями: 1) использовать приближенные методы решения (1), 2) использовать приближенные методы вычисления КИ, представляющего точное решение (1). Мы пойдем по второму пути.

В настоящее время разработано немало методов приближенного вычисления КИ по мере Винера. Многие из этих методов (а также ссылки на оригинальные работы) читатель найдет в монографии [11] и работе [12]. В разд. 2 по сути дела проводится подготовительная работа для использования в нашей задаче результатов [11, 12]. В этом разделе мы получаем более общий класс представлений решения (1) в виде эквивалентных КИ, чем в [8]. Один из представителей этого класса — континуальный интеграл по мере Винера — в точности такого вида, как рассматриваемые в [11, 12]. Для его приближенного вычисления можно непосредственно применять формулы из этих работ.

### 1. ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА В ВИДЕ КИ

Хорошо известно, что решение уравнения (1) с начальными условиями (1а) формально можно записать следующим образом:

$$W(x, T + t_0 | x_0, t_0) = e^{\hat{L}(x)} \delta(x - x_0),$$

где  $\hat{L}(x) \equiv a'(x) + a(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Для простоты ниже везде положим  $t_0 = 0$ . Перепишем эту формулу следующим образом:

$$W(x, T | x_0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_N) \prod_{n=1}^N [e^{\hat{L}(x_n)} \delta(x_n - x_{n-1})] dx_1 \dots dx_N, \quad (2)$$

где  $\varepsilon \equiv T/N$ . Каждый оператор  $e^{\hat{L}(x_n)}$  действует лишь на ту дельта-функцию, которая стоит рядом с ним в квадратных скобках. Справедливость (2) легко проверить непосредственным интегрированием по всем  $x_n$ . Используя известное разложение для дельта-функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx},$$

в пределе  $N \rightarrow \infty$  (или, что то же самое,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) из (2) получаем

$$W(x, T | x_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_N(x - x_N)} \prod_{n=1}^N \left\{ \exp \left[ \varepsilon a'(x_n) + ik_n a(x_n) \varepsilon - \frac{D}{2} k_n^2 \varepsilon + ik_n(x_n - x_{n-1}) \right] \frac{dx_n dk_n}{2\pi} \right\}. \quad (3)$$

При выводе (3) использован тот факт, что в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  в квадратных скобках (2) существенны лишь члены первого порядка по  $\varepsilon$ , т. е. в этом пределе операторы, из которых «состоит»  $\hat{L}(x_n)$ , можно считать коммутирующими. Выполнив в (3) интегрирование по всем  $k_n$ , окончательно получаем

$$W(x, T | x_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2D} \sum_{n=1}^N \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} + \right. \right.$$

$$+ a(x_n) \varepsilon + \sum_{n=1}^N a'(x_n) \varepsilon \left] \frac{dx_1 \dots dx_{N-1}}{(2\pi D)^{N/2}}, \quad (4)$$

где  $x_N \equiv x$ ,  $\varepsilon N = T$ .

Формула (4) и есть искомое представление решения (1) в виде континуального интеграла. Эту формулу можно получить и другими способами (см., например, [8, 10]). Легко понять, что при замене  $a'(x_n)$  на  $a'(x_{n-1})$  (как это делается в [8]) значение КИ (4) не меняется.

В заключение этого раздела отметим, что (4) можно символически записать в виде

$$W(x, T | x_0, 0) = \int_{x_0(0)=x_0}^{x(T)=x} \exp \left[ -\frac{1}{2D} \int_0^T (\dot{x} + a(x))^2 dt + \int_0^T a'(x(t)) dt \right] Dx(t). \quad (4a)$$

Это обычная форма записи КИ в физических приложениях [3, 4]. Суммирование ведется как бы по всем траекториям  $x(t)$  (таким, что  $x(0) = x_0$ ,  $x(T) = x$ ). Величины  $x_n$  трактуются как значения функции  $x(t)$  в моменты времени  $t_n = n(T/N)$ .

## 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КИ

Интуитивно ясно, что представление решения уравнения (1) в виде континуального интеграла (4) не единственно. Должно существовать бесконечное число подынтегральных выражений, приводящих при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к тому же пределу, что и (4). Задача о нахождении таких подынтегральных выражений или, другими словами, различных представлений решения (1) в виде КИ (частично она решена в [8]) имеет большое значение, так как для использования приближенных формул надо уметь преобразовывать КИ к определенному стандартному виду.

Обычно рассматриваются КИ по мере Винера от функционала, который представляет собой некую функцию (чаще всего — экспоненту) от какого-нибудь функционального многочлена от  $x(t)$  [3, 4, 10, 12]. Для приведения (4a) и (4) к такому виду нам надо «избавиться» от слагаемого

$\int_0^T a(x) \dot{x} dt$  в показателе экспоненты, так как  $\dot{x}$  должно входить лишь в член  $\int_0^T x^2 dt$ . На первый взгляд кажется, что упомянутое слагае-

мое можно заменить на  $\int_{x_0}^x a(x) dx$ . Неправедливость этого утверждения

легко установить (хотя и не строго) следующим образом. Из (4) видно, что  $|x_n - x_{n-1}| \sim \sqrt{\varepsilon}$ . Поэтому  $\sum_n a(x_n) (x_n - x_{n-1})$  не является интегральной суммой, так как в интегральной сумме  $|x_n - x_{n-1}| \sim \varepsilon$ . Другими словами можно сказать так: траектории, по которым идет суммирование в (4a), являются недифференцируемыми (хотя и непрерывными) функциями и  $(x_n - x_{n-1})/\varepsilon$  можно заменить на  $\dot{x}(t)$  только чисто формально для сокращения записи.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left[ - \sum_{n=1}^N F \left( x_n, \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right) \varepsilon \right] \right\rangle_N \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ - \sum_{n=1}^N F \left( x_n, \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} \right) \varepsilon - \sum_n \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2D\varepsilon} \right] \frac{dx_1 \dots dx_{N-1}}{(2\pi D\varepsilon)^{N/2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N\varepsilon = T$ . Докажем утверждение о том, что в показателе экспоненты в (5) достаточно удержать члены порядка  $\varepsilon$  поскольку члены с  $\varepsilon$  в более высоких степенях не дадут вклада в КИ при  $N \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим для примера

$$\left\langle \exp \left[ \sum_{n=1}^N (V(x_n) \varepsilon + U(x_n) \varepsilon^2) \right] \right\rangle_N.$$

Разложим экспоненту в ряд

$$\begin{aligned} & 1 + \sum_{n=1}^N \langle V(x_n) \rangle_N \varepsilon + \sum_{n=1}^N \langle U(x_n) \rangle_N \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \langle V(x_n) U(x_m) \rangle_N \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \langle V(x_n) U(x_m) \rangle_N \varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Все величины, стоящие в угловых скобках при  $N \rightarrow \infty$ , остаются конечными. Легко оценить выписанные слагаемые по порядку величины. Это

$$\langle V \rangle_N T, \langle U \rangle_N \frac{T}{N}, \langle V^2 \rangle_N T^2, \langle VU \rangle_N \frac{T^2}{N} \text{ и т. д. Очевидно, что члены,}$$

содержащие  $U$ , исчезнут при переходе к пределу. Аналогично можно доказать утверждение в общем случае.

Рассмотрим выражение

$$\left\langle \exp \left[ \sum_{n=1}^N V(x_n) (x_n - x_{n-1})^2 \right] \right\rangle_N. \quad (6)$$

Поскольку  $(x_n - x_{n-1})^2 \sim \varepsilon$ , показателем экспоненты пренебрегать нельзя. Можно показать, что при переходе к пределу  $N \rightarrow \infty$  (6) совпадает с

$$\left\langle \exp \left[ \sum_{n=1}^N V(x_n) D\varepsilon \right] \right\rangle_N.$$

Доказательство этого факта хотя и несложно, но довольно громоздко, и мы не будем приводить его здесь. Отметим только, что оно основано на равенстве  $\langle (x_n - x_{n-1})^2 \rangle_N = D\varepsilon + O(\varepsilon)$ , которое нетрудно проверить непосредственным вычислением, и очень похоже на доказательство предыдущего утверждения. Следует также обратить внимание на то, что (6) при  $N \rightarrow \infty$  представляет собой усреднение выписанной экспоненты по траекториям винеровского процесса. С этой точки зрения замена  $(x_n - x_{n-1})^2$  на  $D\varepsilon$  эквивалентна той замене, которая делается при переходе от стохастического интеграла Ито к стохастическому интегралу Стратоновича (см. [2], стр. 184).

Итак, мы получили два правила:

1) в показателе экспоненты в (5) можно не учитывать слагаемые  $\sim \varepsilon^\alpha$ , где  $\alpha > 1$  (при этом следует считать, что  $(x_n - x_{n-1}) \sim \varepsilon$ );



2) замена  $\sum_{n=1}^N V(x_n) (x_n - x_{n-1})^2$  на  $\sum_{n=1}^N V(x_n) D\varepsilon$  не меняет значения КИ.

Это основной результат данной статьи. С его помощью можно найти целый класс эквивалентных КИ, выражающих решение уравнения (1).

Для примера преобразуем показатель экспоненты в (4) с учетом сформулированных правил следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{1}{2D} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} + a(x_n) \right)^2 \varepsilon + a'(x_{n-1}) \varepsilon \right] = \\ & = \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{\varepsilon}{2D} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} + \alpha a(x_n) + \beta a(x_{n-1}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \beta a'(x_{n-1}) (x_n - x_{n-1}) \right)^2 + a'(x_{n-1}) \varepsilon \right] = \\ & = \sum_{n=1}^N \left[ -\frac{\varepsilon}{2D} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} + \alpha a(x_n) + \beta a(x_{n-1}) \right)^2 + \alpha a'(x_{n-1}) \varepsilon \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . При выводе мы разложили  $a(x_n)$  в ряд около точки  $x_{n-1}$  и в соответствии с правилом 1) отбросили все члены разложения, начиная с третьего, а затем учли правило 2). Если подставить преобразованную таким образом сумму в показатель экспоненты в (4), то получим результат Хакена [8].

Теперь избавимся от слагаемых типа  $\int_0^T a(x) \dot{x} dt$  в экспоненте (4).

Сначала заменим показатель экспоненты согласно (7) (с  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ) на

$$\sum_{n=1}^N \left[ -\frac{1}{2D} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\varepsilon} + a(x_{n-1}) \right)^2 \varepsilon \right].$$

Преобразуем часть этой суммы:

$$Q \equiv \frac{1}{D} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1}) a(x_{n-1}).$$

Введем функцию  $A(x) = \int a(x) dx$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} A(x) - A(x_0) &= \sum_{n=1}^N [A(x_n) - A(x_{n-1})] = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[ A'(x_{n-1}) (x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} A''(x_{n-1}) (x_n - x_{n-1})^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

С учетом правил 1) и 2), а также того факта, что  $A'(x) = a(x)$ , получаем

$$Q = \frac{A(x) - A(x_0)}{D} - \sum_{n=1}^N \frac{a'(x_{n-1})}{2} \varepsilon. \quad (8)$$

Из этого выражения хорошо видно, что  $Q$  нельзя рассматривать как обычную интегральную сумму, о чем уже говорилось вначале.

С учетом (8) получаем искомое представление решения (1) в виде

$$\begin{aligned}
 W(x, T | x_0, 0) = \exp \left[ - \frac{A(x) - A(x_0)}{D} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 \dots dx_{N-1}}{(2\pi D \epsilon)^{N/2}} \times \\
 \times \exp \left[ - \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\epsilon} - \sum_{n=1}^N \frac{a^2(x_{n-1})}{2D} \epsilon + \sum_{n=1}^N \frac{a'(x_{n-1})}{2} \epsilon \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Это уже винеровский КИ в «чистом» виде, и для его вычисления можно непосредственно применять формулы из [11, 12]. В следующей статье мы рассмотрим конкретные примеры.

Авторы благодарны В. И. Татарскому за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, изд. Наука, М., 1976.
2. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.
3. Р. Фейнман, А. Хиббс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд. Мир, М., 1968.
4. Р. Фейнман, Статистическая механика, изд. Мир, М., 1975.
5. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, № 2 (8), 481 (1977).
6. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
7. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 1, 134 (1974); 18, № 5, 707 (1975).
8. H. Haken, Z. Physik, B24, 321 (1974).
9. R. Dashen, B. Nussliacher and A. Neveu, Phys. Rev., D10, № 12, 4114 (1974).
10. М. А. Евграфов, ДАН СССР, 191, № 5, 979 (1970)
11. Л. А. Янович, Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, изд. Наука и техника, Минск, 1976.
12. В. И. Татарский, в сб. Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике, под ред. Г. И. Марчука, изд. Новосибирск, 1976.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 6 мая 1978 г.

APPROXIMATE CALCULATION OF TRANSITION PROBABILITY DENSITY OF ONE-DIMENSIONAL MARKOV PROCESSES

A. L. Virovlyanskij, A. A. Malakhov

A problem is considered on the solution presentation of Fokker—Plank equation with constant diffuse coefficients in the form of path integral. A whole class of such presentations has been found. A possibility of use is discussed of approximate calculation formulas of path integrals according to Vinet's measure for the approximate solution of Fokker—Plank equation.

УДК 538.574.4

## МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*Б. С. Абрамович, С. Н. Гурбатов, Ю. А. Рыжов*

Исследовано влияние многократного рассеяния на распространение плоской гармонической волны в случайно-неоднородной среде с одномерными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Выведены укороченные уравнения для медленно меняющихся на масштабе порядка длины волны энергетических и фазовых характеристик волны. Найдено распределение среднего квадрата поля внутри рассеивающего слоя, не имеющего регулярного отражения на границе. Изучены статистические свойства интенсивности волны, падающей на неоднородный слой с идеальным отражением на дальней границе. В последнем случае обращается внимание на возможность эффекта значительного усиления поля в отдельных реализациях. Все рассмотрение проводится в диффузионном приближении для локального коэффициента отражения волны.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема многократного рассеяния волн в одномерных неупорядоченных системах вызывает интерес прежде всего возможностью получения ряда точных результатов. На примере одномерной структуры можно разобраться в деталях влияния многократного рассеяния на процесс распространения волн в рассеивающем слое и получить информацию, которая оказывается полезной при анализе более сложных моделей рассеивающих сред. Случай одномерных неоднородностей представляет и самостоятельный интерес, поскольку реализуется во многих физических ситуациях. В частности, является актуальной проблема описания энергетического спектра квантовых систем с примесями, электронный спектр которых близок к одномерному, исследование кинетики квантовой частицы в одномерном случайном потенциале и т. п. [1-3].

Стохастическое волновое уравнение изучалось многими авторами. При этом нетривиальные результаты были получены при изучении статистических свойств коэффициента отражения от слоя [4-6] и распределения среднего поля и средней интенсивности поля внутри неоднородного слоя для двух моделей рассеивающей среды — дискретной [4] и непрерывной [6]. В первой модели среда предполагается состоящей из дискретных неоднородностей, каждая из которых может равновероятно принимать все положения на отрезке, длина которого кратна длине волны. Такая модель рассматривалась в [4], где показано, что при неограниченном «усилении» неоднородностей распределение среднего квадрата поля «стремится к удвоенной интенсивности падающей волны в половине слоя, обращенной к падающей волне, и к нулю в другой половине» — ступенчатое распределение. К аналогичному результату приходят и авторы работы [7], где рассмотрение проводится для модели непрерывной среды в диффузионном приближении.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению статистических свойств поля в одномерной сплошной случайно-неоднородной среде. Рассматриваются две постановки задачи; о прохождении плоской

гармонической волны через рассеивающий слой и о падении волны на неоднородный слой, ограниченный идеально отражающей поверхностью (зеркалом). Для решения поставленных задач выводятся укороченные стохастические уравнения для медленно меняющихся на интервале порядка длины волны энергетических и фазовых характеристик поля внутри слоя.

Показано, что в задаче о прохождении волны через слой энергетические характеристики волны, в частности, интенсивность, не являются марковским процессом, что не позволяет непосредственно применить аппарат уравнения ЭФПК [8, 9]. Однако, используя двухточечное вероятностное распределение локального коэффициента отражения, удается найти функцию распределения интенсивности, с помощью которой вычисляется распределение среднего квадрата поля в слое. Приводится асимптотическое разложение средней интенсивности в оптически толстой рассеивающей среде, откуда следует, что при увеличении оптической толщины слоя распределение среднего квадрата поля стремится не к ступенчатому, а к все более плавному.

При рассмотрении задачи об отражении плоской волны от слоя с зеркалом на границе укороченные уравнения позволяют весьма детально исследовать статистические характеристики поля внутри слоя. Показано, что при идеальном отражении от задней границы слоя интенсивность  $I$ , усредненная по периоду высокочастотных осцилляций поля, является марковским процессом, имеющим логарифмически-нормальную плотность вероятности. При этом средняя интенсивность не меняется вдоль слоя и равна  $I_0$  — удвоенной интенсивности падающей волны, в то время как само вероятностное распределение по мере проникновения волны в слой локализуется в области малых интенсивностей  $I \ll I_0$ . Однако, несмотря на то, что вероятность появления больших интенсивностей мала, из-за медленного спада функции плотности вероятности при  $I \gg I_0$ , возможен эффект значительного усиления поля в нерегулярном слое. В частности, именно наличие отдельных реализаций с  $I \gg I_0$  приводит к постоянству среднего квадрата поля, к сильным флуктуациям интенсивности и полной энергии, сосредоточенной в рассеивающей среде. В то же время показано, что относительное число реализаций, в которых возможен эффект усиления поля, т. е. превышение случайной интенсивностью заданного уровня  $I^* > I_0$  даже в бесконечном слое равно  $I_0/I^* < 1$  и уменьшается с ростом порога  $I^*$ .

## 2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть плоская гармоническая волна единичной амплитуды  $E_0 = e^{ikz}$ ,  $k = \omega/c$  падает справа на слой  $(0, L)$  с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(z) = 1 - \Delta\epsilon(z)$ . Предположим, что случайная компонента диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon(z)$  является нормальным случайным процессом с нулевым средним значением и функцией корреляции  $\langle \Delta\epsilon(z)\Delta\epsilon(z') \rangle = \sigma_\epsilon^2 l \delta(z - z')$  ( $l$  — характерный размер неоднородностей,  $\delta(z)$  — дельта-функция), а диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна единице.

Внутри слоя для поля  $E_x = E$ -волны имеем стохастическое волновое уравнение

$$E_\xi' + [1 - \Delta\epsilon(\xi)]E = 0, \quad (1)$$

где введена безразмерная координата  $\xi = kz$ . Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$E = P(\xi) e^{i\xi} + Q(\xi) e^{-i\xi}. \quad (2)$$

Легко убедиться, что (2) является решением уравнения (1), если функции  $P(\xi)$  и  $Q(\xi)$  удовлетворяют системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} P'_\xi &= -\frac{i}{2} \Delta \varepsilon (P + Qe^{-2i\xi}), \\ Q'_\xi &= \frac{i}{2} \Delta \varepsilon (Q + Pe^{2i\xi}). \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия для функций  $P(\xi)$  и  $Q(\xi)$ , вытекающие из требования непрерывности поля и его производной на границах нерегулярного слоя, имеют вид

$$P(kL) = 1, \quad Q(0) = \lambda P(0), \quad (4)$$

где  $\lambda = 0$  в задаче о прохождении волны и  $\lambda = -1$ , если в плоскости  $z = 0$  находится идеально отражающая поверхность — зеркало.

Введем в рассмотрение новые переменные:

$$I = |P|^2 + |Q|^2, \quad S = 2|PQ|, \quad \varphi = \arg(QP^{-1}),$$

для которых из (3) получаем

$$I'_\xi = \Delta \varepsilon S \sin \psi; \quad (5)$$

$$S'_\xi = \Delta \varepsilon I \sin \psi; \quad (6)$$

$$\varphi'_\xi = \Delta \varepsilon (1 + IS^{-1} \cos \psi), \quad (7)$$

где  $\psi = \varphi - 2\xi$ . В этих переменных для квадрата модуля электрического поля в среде справедливо следующее выражение:

$$|E|^2 = I + S \cos \psi,$$

откуда виден физический смысл величин  $I(\xi)$  и  $S(\xi)$ :  $I$  есть суммарная интенсивность встречных волн, а член  $S \cos \psi$  описывает их интерференцию\*.

Очевидно, что уравнения (3) с условиями (4) и вытекающие из них уравнения (5)–(7) образуют краевую задачу, не обладающую причинностью, и поэтому для вероятностного анализа процессов  $P(\xi)$  и  $Q(\xi)$ , а вслед за ними и  $I(\xi)$ ,  $S(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ , на основе диффузионного уравнения необходимо сформулировать соответствующую уравнениям (3) и (5)–(7) одноточечную задачу. В силу линейности уравнений (3) и уравнений (5), (6) последнее тривиально и делается следующим образом: введем функции  $\tilde{P}(\xi) = P(\xi)/P(0)$ ,  $\tilde{Q}(\xi) = Q(\xi)/P(0)$  и, соответственно,  $\tilde{I}(\xi) = I(\xi)/|P(0)|^2$ ,  $\tilde{S}(\xi) = S(\xi)/|P(0)|^2$ . Легко видеть, что  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  удовлетворяют уравнениям (3), а  $\tilde{I}$  и  $\tilde{S}$  удовлетворяют уравнениям (5), (6), не меняя уравнения (7) для  $\varphi(\xi)$ . При этом граничные условия задаются в одной точке  $\xi = 0^{**}$ :

$$\tilde{P}(0) = 1, \quad \tilde{Q}(0) = \lambda \quad (8)$$

и

$$\tilde{I}(0) = 1 + \lambda^2, \quad \tilde{S}(0) = 2|\lambda|, \quad \varphi(0) = \arg \lambda. \quad (9)$$

\* Заметим, что интерпретация величин  $P$  и  $Q$  как комплексных амплитуд встречных волн в неоднородной среде носит весьма условный характер

\*\* В случае, когда среды в среднем «согласованы» ( $\lambda = 0$ )  $\varphi(0) = \arg \lambda = \pi/2$ , что следует из принципа предельного поглощения.

Последнее обеспечивает причинность при изменении величин  $\tilde{P}(\xi)$ ,  $\tilde{Q}(\xi)$ ,  $\tilde{I}(\xi)$ ,  $\tilde{S}(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ , что позволяет стандартными методами диффузионного приближения исследовать статистические свойства этих процессов.

Легко видеть, что при относительно небольших флуктуациях диэлектрической проницаемости  $\sigma_e \ll 1$  комплексные амплитуды  $P$ ,  $\tilde{P}$  и  $Q$ ,  $\tilde{Q}$ , а вслед за ними и функции  $I$ ,  $\tilde{I}$ ,  $S$ ,  $\tilde{S}$  и  $\varphi(\xi)$  медленно изменяются на интервале  $\Delta\xi \sim 1$  (т. е. при изменении координаты  $z$  на величину порядка длины волны). С другой стороны, функции  $\exp(\pm 2i\xi)$  и  $\Delta\varepsilon(\xi)$  являются быстропеременными. Поэтому естественно перейти от уравнений (5)–(7) к укороченным уравнениям, усредненным за период функций  $\exp(\pm 2i\xi)$  (см., например, [9]). Для получения укороченных уравнений нужно предварительно вычислить средние значения и корреляционные функции случайных процессов, входящих в правые части уравнений (5)–(7). Обозначим

$$\mu(\xi) = \Delta\varepsilon(\xi) \sin \psi(\xi).$$

Если бы в этом выражении фаза  $\varphi(\xi)$  была фиксированной величиной, то среднее значение  $\langle \mu \rangle$  и корреляционная функция  $B_\mu = \langle \mu(\xi) \mu(\xi') \rangle$  находились бы просто. Однако из уравнения (7) видно, что фаза  $\varphi(\xi)$  получается в результате интегрирования белого шума  $\Delta\varepsilon(\xi)$  и, следовательно, коррелирована с ним.

Рассмотрим достаточно малый интервал  $\eta > 0$ , на котором функции  $\tilde{I}(\xi)$ ,  $\tilde{S}(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$  не успевают заметно измениться. Ограничиваясь учетом первых членов разложения в ряд по  $\Delta\varphi(\eta) = \varphi(\xi) - \varphi(\xi - \eta)$  и учитывая статистическую независимость величин  $\tilde{I}(\xi - \eta)$ ,  $\tilde{S}(\xi - \eta)$  и  $\varphi(\xi - \eta)$  от значений  $\Delta\varepsilon(\xi)$ , получаем

$$\langle \mu(\xi) \rangle = \langle \Delta\varepsilon(\xi) \Delta\varphi(\eta) \rangle \cos \psi(\xi).$$

Для вычисления  $\langle \Delta\varepsilon(\xi) \Delta\varphi(\eta) \rangle$  воспользуемся уравнением (7), проинтегрировав его на интервале  $[\xi - \eta, \xi]$ . Используя  $\delta$ -коррелированность процесса  $\Delta\varepsilon(\xi)$  и отбрасывая в полученных выражениях осциллирующие члены, окончательно получаем

$$\langle \mu(\xi) \rangle = \frac{x}{k} \frac{\tilde{I}}{\tilde{S}} = \frac{x}{k} \frac{I}{S}. \quad (10)$$

Здесь  $x = \frac{1}{4} \sigma_e^2 k^2 l$  — коэффициент диффузии для слоя с мелкомасштабными неоднородностями,  $kl \ll 1^*$ . Введем центрированную случайную функцию:

$$\zeta(\tau_z) = x^{-1} [\mu(\tau_z) - \langle \mu(\tau_z) \rangle],$$

где  $\tau_z = xz$  — оптическая толщина. Очевидно, что  $\langle \zeta(\tau_z) \rangle = 0$ , а функция корреляции  $B_\zeta = 2\delta(\tau_z - \tau'_z)$ .

Подставляя полученные выражения в формулы (5) и (6), приходим

\* При произвольном соотношении между длиной волны  $k^{-1}$  и масштабом неоднородностей  $l$  коэффициент диффузии равен  $x = \frac{1}{4} k^2 \Phi_e(2k)$ , где  $\Phi_e$  — спектр пространственных неоднородностей  $\Delta\varepsilon(z)$ . Появление спектра на удвоенной пространственной гармонике физически связано с известным условием Брэгга для дифракции на пространственных структурах.

к следующей системе стохастических уравнений для медленно меняющихся функций  $\tilde{I}(\tau_z)$ ,  $\tilde{S}(\tau_z)$ , а, следовательно, и для  $I(\tau_z)$ ,  $S(\tau_z)$ :

$$I'_{\tau_z} = I + S\zeta(\tau_z); \quad (11)$$

$$S'_{\tau_z} = I[IS^{-1} + \zeta(\tau_z)]. \quad (12)$$

Аналогичным образом из (7) получаем

$$\varphi'_{\tau_z} = (2 + I^2 S^{-2})^{1/2} \tilde{\zeta}(\tau_z), \quad (13)$$

где  $\langle \tilde{\zeta}(\tau_z) \rangle = 0$ ,  $B_{\tilde{\zeta}} = 2\delta(\tau_z - \tau'_z)$ ,  $\langle \tilde{\zeta}(\tau_z)\zeta(\tau'_z) \rangle = 0$ .

Легко видеть, что уравнения (11), (12) имеют интеграл

$$I^2 - S^2 = \text{const}, \quad (14)$$

соответствующий сохранению потока мощности в диэлектрике без потерь.

Величина  $U = \frac{c}{8\pi} I$  представляет собой усредненную по высокочастотным осцилляциям плотность энергии волны в слое. Ниже исследуются статистические свойства процесса  $I(\tau_z)$  для задачи о прохождении волны через слой с неотражающей задней границей и о падении волны на слой с полным отражением на дальней границе.

### 3. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ

В задаче о прохождении волны через рассеивающий слой граничными условиями для  $I(\tau_z)$ ,  $S(\tau_z)$ , удовлетворяющими уравнениям (11), (12), являются, как следует из (4) и (14), следующие соотношения:

$$S(0) = 0, \quad I(\tau_L) = 1 + \frac{S^2(\tau_L)}{4}, \quad (15)$$

в то время как для  $\tilde{I}(\tau_z)$ ,  $\tilde{S}(\tau_z)$ , удовлетворяющих той же системе уравнений (11), (12), мы имеем одноточечную задачу (9). Таким образом, используя двухточечное вероятностное распределение двумерного марковского процесса  $(\tilde{I}, \tilde{S})$ , можно определить вероятностные характеристики  $I$  и  $S$ . Эквивалентным образом к одноточечной задаче можно перейти непосредственно от уравнений (11), (12) для  $I$  и  $S$  с двухточечными граничными условиями (15). Для этого введем еще процесс  $v(\tau_z)^*$ :

$$v = \text{Arcth}(IS^{-1}), \quad (16)$$

для которого из (11), (12) следует

$$v'_{\tau_z} = \text{cth } v + \zeta(\tau_z), \quad v(0) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является дифференциальным уравнением первого порядка с граничным условием при  $\tau_z = 0$  и, следовательно, статистические характеристики процесса  $v(\tau_z)$  могут быть описаны в приближении диффузионного случайного процесса [8].

Используя соотношения (14) — (16), находим, что энергетические характеристики волны в слое определяются следующими выражениями:

\* Заметим, что величина  $\rho = \text{th } v/2$  есть модуль локального коэффициента отражения в слое  $\rho = |Q||P|$  [10].

$$I = \frac{\operatorname{ch} v(\tau_z)}{\operatorname{ch}^2 v(\tau_L)/2}, \quad \dot{S} = \frac{\operatorname{sh} v(\tau_z)}{\operatorname{ch}^2 v(\tau_L)/2}. \quad (18)$$

Таким образом, функция плотности вероятности процесса  $I = I(\tau_z, \tau_L)$  и  $S = S(\tau_z, \tau_L)$  определяется двухточечной функцией распределения марковского процесса  $v(\tau_z)$ .

Так как процесс  $v(\tau_z)$  — марковский, то для нахождения функции плотности вероятности  $W_2(v_{\tau_z}, v_{\tau_L}; \tau_z, \tau_L)$  необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial v} \operatorname{cth} v W + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad (19)$$

$$W(v; \bar{v}, \tau = 0) = \delta(v - \bar{v}), \quad |W(v; \bar{v}, \tau)| < \infty.$$

Уравнение (19) является уравнением ЭФПК для плотности вероятности перехода марковского процесса  $v(\tau_z)$ . При этом

$$W_2 = W(v_{\tau_z}; 0, \tau_z) W(v_{\tau_L}; v_{\tau_z}, \tau_L - \tau_z). \quad (20)$$

Решение задачи Коши (19) представляется интегралом Мелера — Фока [13]:

$$W(v; \bar{v}, \tau) = \operatorname{sh} v \int_0^\infty dt t \operatorname{th} \pi t P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} v) P_{-1/2+it}(\operatorname{ch} \bar{v}) \times e^{-\tau(t^2+1/4)}, \quad (21)$$

где  $P_n(u)$  — функция Лежандра первого рода.

Подставляя (21) в (20) и производя усреднение в формуле (18), после соответствующих преобразований получаем выражение для распределения средней интенсивности в рассеивающем слое:

$$\langle I(\tau_z, \tau_L) \rangle_j = 2\pi e^{\tau_z - \tau_L/4} \int_0^\infty dt t \frac{\operatorname{sh} \pi t}{\operatorname{ch}^2 \pi t} \left( \cos 2\tau_z t + \frac{\sin 2\tau_z t}{2t} \right) e^{-\tau_L t^2}. \quad (22)$$

Этот результат иным способом был получен в работах [4, 7].

Проанализируем характер распределения средней интенсивности в оптически толстом слое.  $\tau_L \gg 1$ . Прежде всего заметим, что интеграл (22) не имеет равномерной асимптотики при  $\tau_L \rightarrow \infty$ . Однако вблизи середины слоя, когда удовлетворяется неравенство  $|1 - 2\tau_z/\tau_L| \ll 1$ , из (22) можно получить при  $\tau_L \gg 1$

$$\langle I(\tau_z, \tau_L) \rangle = 1 - \Phi(\Delta). \quad (23)$$

Здесь  $\Delta = \frac{1}{2} \tau_L^{1/2} (1 - 2\tau_z/\tau_L)$ ,  $\Phi(\Delta)$  — интеграл вероятности [13]. Из (23), в частности, следует

$$\frac{\partial^n \langle I \rangle}{\partial \tau_z^n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tau_L^{-n/2} e^{-\Delta^2} H_{n-1}(\Delta) \quad (n \geq 1),$$

где  $H_n(\Delta)$  — полиномы Эрмита. Следовательно, при увеличении размеров рассеивающей среды распределение средней интенсивности становится все более плавным (см. рис. 1а). В связи с этим следует отметить, что вывод авторов работ [4, 7] о том, что в оптически толстом слое ( $\tau_L \gg 1$ ) реализуется «ступенчатое» распределение средней интенсивности, справедлив лишь в безразмерных координатах  $\theta = \tau_z/\tau_L$ . Реаль-



но же характерная ширина переходной области  $\langle I(\tau_z, \tau_L) \rangle$  в середине слоя  $\delta = (\partial \langle I \rangle / \partial \tau_z)_{\Delta=0}^{-1}$  увеличивается пропорционально  $\tau_L^{1/2}$ .

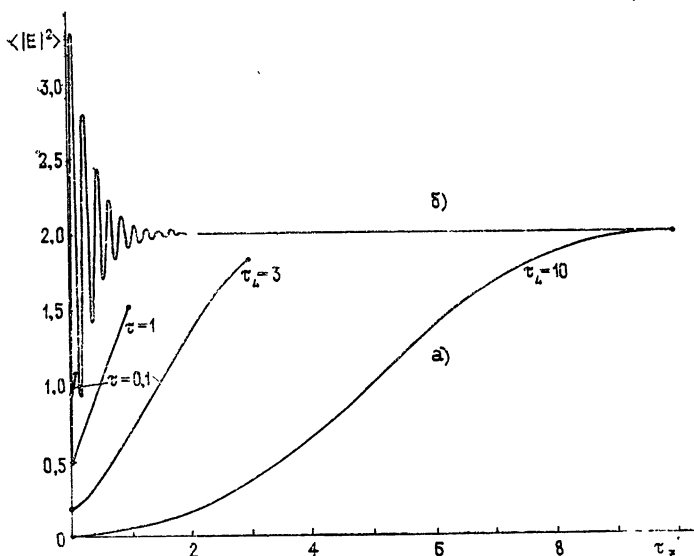


Рис. 1. Распределение среднего квадрата поля  $\langle |E|^2 \rangle$  внутри рассеивающего слоя при различных значениях оптической толщины слоя  $\tau_L$ : а) — слой без регулярного отражения от границы, б) — слой с зеркалом на конце ( $I_0 = 2$ ).

Наконец, обратим внимание на одно интересное обстоятельство. Интерференционный член  $S \cos \psi$  в формуле для  $|E|^2$  при усреднении по ансамблю реализаций выпадает, так что  $\langle |E|^2 \rangle = \langle I \rangle$ . Соотношение  $\langle S \cos \psi \rangle = 0$  связано с тем, что при отсутствии отражения на границах слоя ( $S(0) = 0$ ) процессы  $S$  и  $\psi$  статистически независимы, а фаза  $\varphi(\tau_z)$  имеет равномерное распределение. Последнее, в частности, приводит к качественному отличию рассеяния волны в среде без отражения на границе от рассмотренного в следующем разделе случая падения плоской волны на слой с полным отражением.

#### 4. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ЗЕРКАЛОМ

В случае, если в плоскости  $z = 0$  находится идеально отражающая поверхность, разность потоков падающей и отраженной волн равна нулю, следовательно,  $I = S$  и из (11), (12) получаем следующее уравнение для стохастической интенсивности:

$$I'_{\tau} = [-1 + \zeta(\tau)] I. \quad (24)$$

Здесь мы перешли к новой переменной  $\tau = \tau_L - \tau_z$ , соответствующей отсчету от «входа» в неоднородную среду. Уравнение (24) следует решать с граничным условием

$$I(0) = I_0, \quad (25)$$

где  $I_0$  — удвоенная интенсивность падающей волны.

Поскольку уравнение (24) является дифференциальным уравнением первого порядка по  $\tau$  с начальным условием (25) при  $\tau = 0$ , то процесс  $I(\tau)$  является марковским. Подчеркнем, что последнее утверждение справедливо лишь для медленной компоненты полной интенсивности

волны, распространяющейся в слое со случайными неоднородностями при идеальном отражении от задней границы. Следует при этом отметить, что статистика интенсивности  $I(\tau)$  не зависит от полной толщины слоя  $\tau_L$ , а определяется лишь расстоянием  $\tau$  от «входа» в случайно-неоднородную среду.

Учитывая статистические свойства процесса  $\zeta(\tau)$  из (24) и (25) легко получить, что  $I(\tau)$  имеет логарифмически-нормальное распределение:

$$W(I, \tau) = \frac{I^{-1}}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\left(\ln \frac{I}{I_0} + \tau\right)^2}{4\tau}\right\}. \quad (26)$$

Используя вероятностное распределение (26), легко найти среднюю интенсивность в слое  $\langle I(\tau) \rangle$  и величину относительных флуктуаций интенсивности  $\gamma_I(\tau) = [\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle]^{1/2} / \langle I \rangle$ :

$$\langle I(\tau) \rangle = I_0, \quad \gamma_I(\tau) = (e^{2\tau} - 1)^{1/2}. \quad (27)$$

Таким образом, средняя интенсивность волны в слое постоянна, а флуктуации интенсивности неограниченно возрастают по мере увеличения  $\tau$  — расстояния от входа в случайно-неоднородную среду. В то же время из (26) следует, что с увеличением  $\tau$  максимум распределения  $W(I, \tau)$  смещается в сторону меньших интенсивностей  $I_m = I_0 \exp(-3\tau)$ , причем при  $\tau \gg 1$  практически все распределение  $W(I, \tau)$  сосредоточено в области малых интенсивностей  $I \ll I_0$  (см. рис. 2).

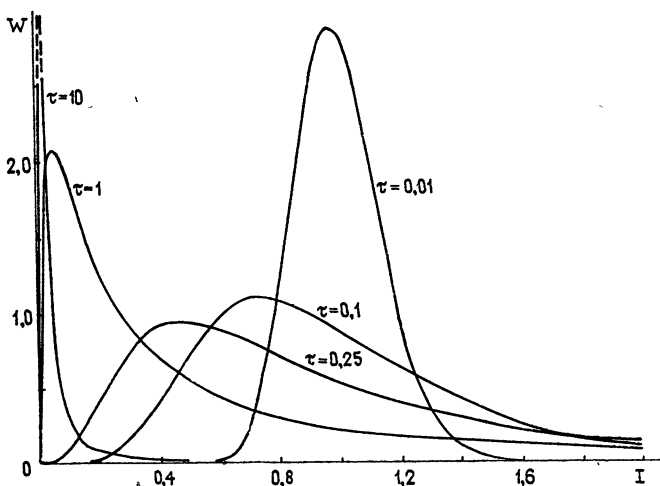


Рис. 2. Эволюция функции распределения интенсивности  $W(I, \tau)$  для слоя с зеркалом ( $I_0 = 2$ ).

Сохранение средней интенсивности в слое, несмотря на то, что при  $\tau \gg 1$  вероятностное распределение сосредоточено вблизи нулевой интенсивности, обусловлено достаточно медленным спаданием функции распределения  $W(I, \tau)$  при  $I \rightarrow \infty$ . Последнее соответствует тому, что в редких реализациях квадрат поля волны  $|E|^2$  может принимать большие значения, в том числе возможны реализации, в которых  $I(\tau) \gg I_0$ . Наличие подобных реализаций процесса приводит к сильным флуктуа-

циям плотности энергии волны  $\bar{I}^L = \tau_L^{-1} \int_0^{\tau_L} I(\tau) d\tau$  в оптически толстом слое:

$$\gamma_{\bar{I}^L} = 2^{-1/2} \tau_L^{-1} (e^{2\tau_L} - 1 - 2\tau_L - 2\tau_L^2)^{1/2}.$$

Таким образом, можно сделать следующий вывод: при распространении волны в случайно-неоднородном слое, ограниченном зеркалом, в отдельных, достаточно редких реализациях может сосредоточиваться значительная энергия, существенно превышающая величину  $I_0 L$  — энергию волны в регулярном слое.

Важной характеристикой флуктуаций интенсивности  $I(\tau)$  является вероятностное распределение  $w(\tau; I^*, I_0)$  оптического пути  $\tau$ , на котором интенсивность достигает заданного уровня  $I(\tau) = I^*$ . При этом более удобно рассматривать эквивалентную задачу о достижении логарифмом нормированной интенсивности  $q = \ln I/I_0$  соответствующего значения  $q^* = \ln I^*/I_0$ .

Поскольку марковский процесс  $q(\tau)$  описывается уравнением

$$q'_\tau = -1 + \zeta(\tau), \quad q(0) = q_0 = 0, \quad (28)$$

то плотность вероятности  $w(\tau, q^*)$  «времени»  $\tau$  первого достижения границы  $q = q^*$  удовлетворяет уравнению [9]

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial q_0} \left( \frac{\partial w}{\partial q_0} - w \right) \quad (29)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} w(\tau, q^*)_{q_0=q^*} &= \delta(\tau), & w(0, q^*) &= 0, \\ w(\tau, q^* < 0)_{q_0=-\infty} &= w(\tau, q^* > 0)_{q_0=-\infty} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее условиям (30) имеет вид

$$w(\tau, q^*) = \frac{|q^*|}{2\sqrt{\pi}} \tau^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{(q^* + \tau)^2}{4\tau} \right\}. \quad (31)$$

Вероятность достижения процессом  $I(\tau)$  уровня  $I = I^*$  в слое оптической толщины  $\tau$  определяется функцией  $\psi_\tau(q^*) = \int_0^\tau d\tau' w(\tau', q^*)$ , график которой приведен на рис. 3. При этом для бесконечного слоя из (31) получаем

$$\psi_\infty = \begin{cases} 1, & I^* < I_0 \\ I_0/I^*, & I^* > I_0 \end{cases}. \quad (32)$$

Из (32) следует, что в бесконечном слое все реализации интенсивности пересекают уровень  $I^* < I_0$ , в то время как уровня  $I^* > I_0$  достигает лишь часть реализаций, тем меньшая, чем больше отношение  $I_0/I^*$ .

Для среднего «времени»  $T = \psi_\infty^{-1} \int_0^\infty d\tau' \tau' w(\tau', q^*)$  достижения значения  $I(\tau) = I^*$  в бесконечном слое, используя (31), получаем

$$T = \left| \ln \frac{I_0}{I^*} \right|. \quad (33)$$

Заметим, что в случае  $I_0 < I^*$ , когда в силу (32)  $\psi_\infty < 1$ , формула (33) описывает условное среднее «время» достижения интенсивности  $I^*$  в классе реализаций, пересекающих данный уровень.

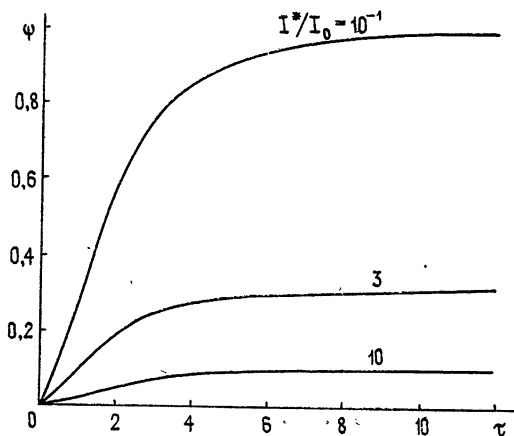


Рис. 3.

Полученные результаты несложно обобщить, учитывая интерференционный член в выражении для  $|E|^2$ :

$$|E|^2 = I(1 + \cos \psi). \quad (34)$$

В частности, из (34) следует (см. рис. 16)

$$\langle |E|^2 \rangle = I_0(1 - \cos 2kz e^{-3z}). \quad (35)$$

При получении (35) использовалась статистическая независимость марковских процессов  $I(\tau)$  и  $\psi(\tau_z)$ , а также вытекающее из уравнения (13) при  $I = S$  нормальное вероятностное распределение фазы  $\varphi(\tau_z)$ . Естественно, усредняя (35) по периоду высокочастотных осцилляций  $k^{-1}$ , мы получаем формулу (27). Заметим, что при  $\tau_z \gg 1$  усредненный на масштабе  $k^{-1}$  средний квадрат поля  $\langle |E|^2 \rangle \approx I_0$ . Последнее связано с тем, что многократное рассеяние встречных волн  $P(\tau_z)$  и  $Q(\tau_z)$  приводит к их фазовому рассогласованию и, следовательно, к отсутствию интерференции.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в диффузионном приближении исследовалось распространение плоской электромагнитной волны в диэлектрике с одномерными случайными неоднородностями. Рассмотрение проводилось на основе укороченных уравнений для усредненных по периоду высокочастотных осцилляций поля энергетических и фазовых характеристик волны. Однако те же результаты могут быть получены, если развить статистическое описание, исходя из точных (неусредненных на масштабе  $k^{-1}$ ) уравнений, и лишь в полученных выражениях, в частности, в уравнении ЭФПК проводить высокочастотное усреднение [10].

Рассмотрение двух постановок задачи о распространении волны в нерегулярном слое — отсутствие отражения на границе слоя и полное отражение волны на дальней границе (слой с зеркалом на конце) — связано с принципиальной разницей характера многократного рассеяния волны в этих случаях, так как при многократном рассеянии фазовые соотношения играют определяющую роль. Последнее проявляется в том,

что идеальное отражение на границе рассеивающей среды приводит к синхронизации фаз встречных волн вблизи отражающей поверхности и к отсутствию потока мощности в среде. Вследствие этого средняя интенсивность волны не меняется вдоль слоя, и вблизи отражающей границы возникает устойчивая в среднем интерференционная картина (35).

Отсутствие же регулярного отражения на границе слоя приводит к равномерному распределению локальной разности фаз встречных волн и к появлению потока мощности в среде. Это обстоятельство существенно сказывается на распределении средней интенсивности волны в рассеивающем слое (см. рис. 1) и приводит к отсутствию в среднем интерференции встречных волн, т. е.  $\langle |E^2| \rangle = \langle I \rangle$ .

Проведенное рассмотрение может быть обобщено учетом малой диссипации в слое. При этом добавляется еще одно укороченное уравнение, описывающее эволюцию потока мощности в неоднородном диэлектрике с потерями. Аналитические результаты, помимо стационарного распределения коэффициента отражения [11, 12], получить довольно трудно, поскольку решение соответствующей уравнению ЭФПК краевой задачи выражается через мало изученные сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции [10].

Авторы признательны Н. Г. Денисову за стимулирующие дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Бычков, ЖЭТФ, 65, 427 (1973).
2. В. Л. Березинский, ЖЭТФ, 65, 1251 (1973).
3. R. J. Elliott, J. A. Krumhansl and P. L. Leath, Rev. Mod Phys, 46, 465 (1974).
4. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, 1856 (1969).
5. G. Paranicolaou, SIAM J. Appl. Math., 21, 13 (1971).
6. Yu. A. Ryshov, Radio Sci, 11, 121 (1976).
7. R. H. Lang, J. Math Phys., 14, 1921 (1973).
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, 499 (1973).
9. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.
10. Б. С. Абрамович, Ю. А. Рыжов, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (Ростов-на-Дону), краткие тексты докладов, 1, 311 (1977).
11. Б. С. Абрамович, А. А. Дятлов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, 1122 (1975).
12. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, 1040 (1977).
13. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М — Л., 1963.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 мая 1978 г.

#### MULTIPLE WAVE SCATTERING IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

*B. S. Abramovitch, S. N. Gurbatov, Yu. A. Ryshov*

The effect of multiple scattering is investigated on the propagation of a plane harmonic wave in the randomly-inhomogeneous medium with one-dimensional inhomogeneities of the dielectric permittivity. Shortened equations are derived for the energetic and phase characteristics of a wave slowly varying in the scale of the order of the wavelength. The distribution of the mean field quadrate is found inside the scattering layer without the regular reflection at the boundary. Statistical properties of the wave intensity incident to an inhomogeneous layer with the ideal reflection on the far boundary is studied. In the latter case the attention is attracted to the possible effect of a considerable amplification of the field in separate realizations. All analysis are made in the diffuse approximation for the local reflection coefficient of a wave.

УДК 512 : 538.56 : 519.25

## ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ДВУХТОЧЕЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. Н. Малахов, А. И. Саичев

Выводятся интегральные, аналогичные уравнению Смолуховского и дифференциальные, аналогичные уравнениям Колмогорова, уравнения для вероятностных распределений диффузионных процессов, удовлетворяющих двухточечным граничным условиям. Подробно обсуждается случай, когда двухточечная граничная задача может иметь несколько решений. Рассмотрены конкретные физические примеры.

1. Многие задачи статистической физики и, в частности, теории случайных волн приводят к необходимости статистического анализа диффузионных случайных процессов с двухточечными граничными условиями. В данной работе выводятся интегральные уравнения для плотностей вероятности таких процессов, аналогичные уравнению Смолуховского для переходных плотностей вероятности диффузионных процессов, удовлетворяющих односточечным граничным условиям (условиям Коши). Выводятся также соответствующие дифференциальные уравнения, аналогичные прямому и обратному уравнениям Колмогорова.

Дифференциальные уравнения с двухточечными граничными условиями часто имеют несколько решений, в то время как соответствующая задача Коши имеет единственное решение. Причем многозначность решений двухточечной граничной задачи обычно не является следствием некорректности поставленной задачи, а имеет ясный физический смысл. В связи с этим в работе обсуждаются возможности статистического описания многозначных решений стохастических дифференциальных уравнений, удовлетворяющих двухточечным граничным условиям.

В конце работы рассмотрены конкретные физические примеры.

Отметим, что другие методы сведения двухточечных граничных задач к задачам Коши рассмотрены также в работах [1, 2].

2. Рассмотрим, для определенности, систему двух стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = a_i(\xi) + b_i(\xi)\eta_i(t), \quad (1)$$

где  $a$ ,  $b$  — детерминированные функции  $\xi$ ,  $\eta_i(t)$  — взаимно независимые гауссовы случайные процессы с корреляционными функциями

$$\langle \eta_i(t)\eta_j(t+\tau) \rangle = \delta(\tau), \quad \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \equiv 0.$$

Уравнения (1) понимаются в симметризованном смысле Стратоновича [3].

Будем интересоваться решениями уравнений (1) с граничными условиями

$$\xi_1(s) = x_1, \quad \xi_2(T) = y_2, \quad (2)$$

которые обозначим  $\xi(s, x_1, T, y_2)$ , а также решениями  $\xi(s, x_2, T, y_1)$ , удовлетворяющими сопряженным граничным условиям

$$\xi_2(s) = x_2, \quad \xi_1(T) = y_1. \quad (3)$$

Рассмотрим, кроме того, решения уравнений (1)  $\xi(s, \mathbf{x}, T)$  с условиями Коши:

$$\xi(s) = \mathbf{x}. \quad (4)$$

Будем в дальнейшем, пока не обговорится противное, считать, что граничные задачи (1), (2); (1), (3) имеют в каждой реализации единственное ограниченное решение при любых  $s$  и  $T$ , удовлетворяющих неравенству  $s_0 \leq s \leq T \leq T_0$ . При произвольных значениях граничных условий (2), (3) для этого необходимо и достаточно, чтобы в данной области  $\xi_1(s, \mathbf{x}, T)$ ,  $\xi_2(s, \mathbf{x}, T)$  были непрерывными, монотонно возрастающими функциями соответственно  $x_1, x_2$ . Введем функции

$$u^1(s, \mathbf{x}, T) = \frac{\partial \xi(s, \mathbf{x}, T)}{\partial x_1}, \quad u^2(s, \mathbf{x}, T) = \frac{d \xi(s, \mathbf{x}, T)}{dx_2},$$

удовлетворяющие, как следует из (1), системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i^k}{dT} = C_{ij}(s, \mathbf{x}, T)u_j^k \quad (5)$$

с граничными условиями

$$u_i^k(s, \mathbf{x}, s) = \delta_{ik}. \quad (6)$$

В (5) обозначено:

$$C_{ij}(s, \mathbf{x}, T) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} [a_i(\xi) + b_i(\xi)\eta_i(T)] \Big|_{\xi=\xi(s, \mathbf{x}, T)}$$

Очевидно, граничные задачи (1), (2) и (1), (3) имеют единственное решение, если  $u_1^1(s, \mathbf{x}, T)$ ,  $u_2^2(s, \mathbf{x}, T)$  — неотрицательные функции  $\mathbf{x}$ , равные нулю при фиксированных  $s$  и  $T$  ( $s_0 \leq s \leq T \leq T_0$ ) в не более чем счетном множестве значений  $\mathbf{x}$ .

Доказательство существования или отсутствия единственного решения задач (1), (2) и (1), (3) — в общем случае сложная задача. Укажем здесь лишь одно достаточное условие единственности решения двухточечных граничных задач. Для того, чтобы решения уравнений (5) вместе с (6) были неотрицательными и, следовательно, граничные задачи (1), (2), (1), (3) имели единственное решение в области  $s_0 \leq s \leq T \leq T_0$ , достаточно, чтобы в этой области при любых  $\mathbf{x}$  выполнялись неравенства [4]:

$$C_{12}(s, \mathbf{x}, T) \geq 0, \quad C_{21}(s, \mathbf{x}, T) \geq 0.$$

3. Введем плотности вероятности граничных задач (1), (2) и (1), (3):

$$W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle \delta[x_2 - \xi_2(s, x_1, T, y_2)] \delta[y_1 - \xi_1(s, x_1, T, y_2)] \rangle,$$

$$V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle \delta[x_1 - \xi_1(s, x_2, T, y_1)] \delta[y_2 - \xi_2(s, x_2, T, y_1)] \rangle.$$

Очевидно, их можно записать еще и так:

$$W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle u_2^2(s, \mathbf{x}, T) \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] \rangle,$$

$$V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle u_1^1(s, \mathbf{x}, T) \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] \rangle. \quad (7)$$

Пусть  $s \leq t \leq T$ . Тогда последние равенства можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u_k^2(s, \mathbf{x}, t) u_k^k(t, \mathbf{z}, T) \delta[\mathbf{z} - \xi(s, \mathbf{x}, t)] \times \\
 &\quad \times \delta[\mathbf{y} - \xi(t, \mathbf{z}, T)] \rangle d\mathbf{z}, \\
 V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u_k^1(s, \mathbf{x}, t) u_k^k(t, \mathbf{z}, T) \times \\
 &\quad \times \delta[\mathbf{z} - \xi(s, \mathbf{x}, t)] \delta[\mathbf{y} - \xi(t, \mathbf{z}, T)] \rangle d\mathbf{z} \\
 &\quad (k = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Воспользовавшись тем, что совокупность  $\xi(s, \mathbf{x}, T)$ ,  $u^{1,2}(s, \mathbf{x}, T)$  образует шестимерный марковский процесс, учтя (7) и введя вспомогательные функции

$$\varphi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle u_1^2(s, \mathbf{x}, T) \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] \rangle,$$

$$\psi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = -\langle u_2^1(s, \mathbf{x}, T) \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] \rangle,$$

перепишем (8) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] W[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z} - \\
 &\quad - \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \psi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] V[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z} - \\
 &\quad - \iint_{-\infty}^{\infty} \psi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \varphi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z}.
 \end{aligned}$$

Аналогично легко вывести уравнения для  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \varphi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z} + \\
 &\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}] V[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z}, \\
 \psi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} \psi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] W[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z} + \\
 &\quad + \iint_{-\infty}^{\infty} V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \psi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] d\mathbf{z}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Система интегральных уравнений (9), (10) представляет собой аналог уравнения Смолуховского (Колмогорова — Чэпмена) для двухточечных граничных задач (1), (2); (1), (3). В простейшем случае, когда  $a_i$  и  $b_i$  зависят только от  $\xi_i$ ,  $\varphi \equiv \psi \equiv 0$  и уравнения (9) имеют форму уравнений Смолуховского. Однако и в этом случае их смысл отличен от смысла уравнений Смолуховского, так как входящие в них функции



$W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]$ ,  $V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]$  — двухточечные плотности вероятностей, в то время как обычное уравнение Смолуховского связывает одноточечные переходные плотности вероятности.

Между функциями  $W$ ,  $V$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  существуют и дифференциальные связи. Действительно, усреднив очевидные равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] + u_i^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] + u_i^1 \frac{\partial}{\partial y_i} \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] &= 0 \end{aligned}$$

и учтя (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_2} + \frac{\partial W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial y_2} + \frac{\partial \varphi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial P[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_1} + \frac{\partial V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial y_1} - \frac{\partial \psi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$P[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}] = \langle \delta[\mathbf{y} - \xi(s, \mathbf{x}, T)] \rangle$$

— переходная плотность вероятности решений задачи Коши (1), (4). Аналогично находятся другие полезные дифференциальные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q[T, \mathbf{y}, s, \mathbf{x}]}{\partial y_1} + \frac{\partial W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial Q[T, \mathbf{y}, s, \mathbf{x}]}{\partial y_2} + \frac{\partial V[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$Q[T, \mathbf{y}, s, \mathbf{x}] = \langle \delta[\mathbf{x} - \xi(T, \mathbf{y}, s)] \rangle$$

— переходная плотность вероятности решений уравнений (1) с условиями Коши:

$$\xi(T) = \mathbf{y}. \quad (12)$$

Часто необходимо определить статистику решений двухточечной граничной задачи в промежуточный момент  $t$  ( $s \leq t \leq T$ ). Очевидно, совместное распределение решений граничных задач (1), (2) и (1), (3) в моменты  $s, t, T$ ,  $W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}]$ ,  $V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}]$ , даются подынтегральными выражениями правых частей равенств (9):

$$\begin{aligned} W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] &= W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}]W[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] - \\ &\quad - \varphi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}]\psi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}], \\ V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] &= V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}]V[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] - \\ &\quad - \psi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}]\varphi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Отсюда одноточечные вероятностные распределения решений граничных задач (1), (2) и (1), (3) в момент  $t$  равны соответственно

$$W[s, x_1, t, \mathbf{z}, T, y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] W[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}_1] dx_2 dy_1 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \psi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] dx_2 dy_1, \\
 V[s, x_2, t, \mathbf{z}, T, y_1] & = \iint_{-\infty}^{\infty} V[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] V[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] dx_1 dy_2 - \\
 & - \iint_{-\infty}^{\infty} \psi[s, \mathbf{x}, t, \mathbf{z}] \varphi[t, \mathbf{z}, T, \mathbf{y}] dx_1 dy_2.
 \end{aligned}$$

4. Следствием интегральных уравнений (9), (10), как и обычного уравнения Смолуховского, являются дифференциальные уравнения для  $W, V, \varphi, \psi$ , аналогичные прямому и обратному уравнениям Колмогорова. Эти уравнения можно получить и другим способом из уравнений Колмогорова для переходной плотности вероятности марковской совокупности  $\xi(s, \mathbf{x}, T), u^1(s, \mathbf{x}, T), u^2(s, \mathbf{x}, T)$ . Выведем здесь лишь дифференциальные уравнения для  $W, \varphi, \psi$  — статистических характеристик граничной задачи (1), (2). Рассмотрим четырехмерный марковский процесс  $\xi(s, \mathbf{x}, T), u^2(s, \mathbf{x}, T)$ . Его переходная плотность вероятности  $f[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}, \mathbf{u}]$  удовлетворяет следующему прямому уравнению Колмогорова:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial T} & = - \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i f] - \frac{\partial a_i}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial u_i} [u_j f] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ b_i \frac{\partial}{\partial y_i} [b_i f] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial b_i}{\partial y_i} \frac{\partial b_i}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ u_j \frac{\partial}{\partial u_i} [u_k f] \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ b_i \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial u_i} [u_j f] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ b_i \frac{\partial}{\partial u_i} [u_j f] \right\}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Домножив его на  $u_2$  и проинтегрировав по  $\mathbf{u}$  в бесконечных пределах, получим уравнение для  $W[s, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial T} & = - \frac{\partial}{\partial y_1} [a_1 W] - a_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} + \frac{\partial a_2}{\partial y_1} \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} [b_1 W] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} [b_2 W] - \frac{1}{2} \frac{\partial b_2}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} [b_2 \varphi] - \frac{1}{2} b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ \frac{\partial b_2}{\partial y_1} \varphi \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение для  $\varphi$  получим, домножив уравнение (13) на  $u_1$  и проинтегрировав почленно по  $\mathbf{u}$  в бесконечных пределах:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial T} & = - a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} [a_2 \varphi] + \frac{\partial a_1}{\partial y_2} W + \frac{1}{2} b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} [b_2 \varphi] \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_1}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} [b_1 W] - \frac{1}{2} b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ \frac{\partial b_1}{\partial y_2} W \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь, как и в (14),  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{y}), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{y})$ .

Систему уравнений с производными по  $s$ , определяющих  $W$ , можно найти аналогично как следствие прямого уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности решений задачи Коши (1), (12)  $\xi(T, \mathbf{y}, s)$  и функций

$$\vartheta(T, \mathbf{y}, s) = \frac{\partial \xi(T, \mathbf{y}, s)}{\partial y_1}.$$

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial s} &= a_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} [a_2 W] - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \psi + \frac{1}{2} b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ b_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ b_2 \frac{\partial}{\partial x_2} [b_2 W] \right\} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} [b_1 \psi] - \frac{1}{2} b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \psi \right], \\ -\frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x_1} [a_1 \psi] - a_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} W + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} [b_1 \psi] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} b_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ b_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial b_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} [b_2 W] - \frac{1}{2} b_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} W \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ . Граничные условия уравнений (14)–(16) таковы:

$$W[s, x, s, y] = W[T, x, T, y] = \delta(x - y),$$

$$\varphi[s, x, s, y] = \psi[T, x, T, y] = 0.$$

Уравнения (14)–(16) не противоречат условию нормировки. Покажем это на примере уравнения (14). С учетом первого равенства (11) уравнение (14) можно переписать в дивергентной форме по переменным плотности вероятности  $y_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} &= -\frac{\partial}{\partial y_1} [a_1 W] + \frac{\partial}{\partial y_1} [a_2 \varphi] + a_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} [b_1 W] \right\} - \\ &- \frac{1}{2} b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ b_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} [b_2 \varphi] \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по  $x_2, y_1$  в бесконечных пределах и полагая, как обычно, что  $W, \varphi, P$  вместе со своими производными стремятся при  $|x_2|, |y_1| \rightarrow \infty$  к нулю, получим с учетом граничного условия для  $W$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W[s, x, T, y] dx_2 dy_1 \equiv 1.$$

По аналогии с первым обратным и вторым прямым уравнениями Колмогорова, системы уравнений (14), (15) и (16) естественно называть второй и первой системами промежуточных уравнений. Заметим, что во многих двухточечных задачах статистической физики роль  $t$  играют пространственные координаты, для которых оба направления более или менее равноправны. В этих случаях системы (14), (15) и (16) удобнее называть взаимно сопряженными промежуточными уравнениями. Отметим еще, что в отличие от обычных уравнений Колмогорова, от уравнений (14)–(16) можно перейти к замкнутым уравнениям для плотности вероятности только  $\xi_2(s, x_1, T, y_2)$  или  $\xi_1(s, x_1, T, y_2)$ . Действительно, проинтегрировав (14) по  $x_2$  в бесконечных пределах и учтя (11) и следующее из него равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi[s, x, T, y] dx_2 = - \int_{-\infty}^{y_1} dy_1' \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{-\infty}^{\infty} W[s, x, T, y_1', y_2] dx_2, \quad (17)$$

получим замкнутое интегродифференциальное уравнение для  $w(s, x_1, T, y)$  — плотности вероятности  $\xi_1(s, x_1, T, y_2)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial y_1} [a_1 w] - \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ a_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{-\infty}^{y_1} w[s, x_1, T, y'_1, y_2] dy'_1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} [b_1 w] \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{-\infty}^{y_1} w[s, x_1, T, y'_1, y_2] dy'_1 \right] \right\}.$$

5. До сих пор предполагалось, что граничные задачи (1), (2) и (1), (3) имеют для каждой реализации  $\eta(t)$  единственное решение. Однако даже в том случае, когда задачи Коши (1), (4); (1), (12) имеют единственное решение, двухточечная граничная задача может вообще не иметь решения или обладать несколькими решениями. Причем от реализации к реализации число решений может меняться. В большинстве прикладных задач подобная многозначность отражает некоторые характерные особенности рассматриваемой системы. В качестве примеров естественного возникновения многозначности отметим многопоточковые движения пучков частиц и наложения лучей в окрестностях каустик (см., например, [5, 6]). Обсудим некоторые аспекты статистического описания двухточечных граничных задач, имеющих, в общем случае, многозначные решения. Пусть, для определенности, в каждой реализации уравнений (1) граничная задача (1), (2) имеет конечное число  $N$  ограниченных решений, которые мы обозначим

$$\xi^1(s, x_1, T, y_2), \dots, \xi^N(s, x_1, T, y_2).$$

( $N$  меняется от реализации к реализации уравнений (1).) Очевидно, они связаны с решением задачи Коши (1), (4) равенством

$$|u_2^2(s, x, T)| \delta[y - \xi(s, x, T)] =$$

$$= \sum_{n=1}^N \delta[y_1 - \xi_1^n(s, x_1, T, y_2)] \delta[x_2 - \xi_2^n(s, x_1, T, y_2)]. \quad (18)$$

Усреднив его и воспользовавшись формулой полной вероятности, можно записать:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |u_2| f[s, x, T, y, u] du =$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, x_1, T, y_2) \sum_{n=1}^N W_n[s, x, T, y; N]. \quad (19)$$

Здесь  $P(N; s, x_1, T, y_2)$  — вероятность того, что данная двухточечная граничная задача имеет  $N$  решений, а  $W_n[s, x, T, y; N]$  — вероятностное распределение  $n$ -го решения граничной задачи (1), (2) при условии, что всего решений  $N$ . Из (19) следует полезное равенство;

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |u_2| f[s, x, T, y, u] du dx_2 dy_1 =$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, x_1, T, y_2) N = \langle N(s, x_1, T, y_2) \rangle$$

— среднее число решений граничной задачи (1), (2).

Отметим, что вид  $W_n$  в правой части (19) зависит от способа нумерации решений, в то время как левая часть равенства (19) от способа

нумерации не зависит. Укажем одну естественную нумерацию решений задачи (1), (2). Будем нумеровать их в каждой реализации в порядке возрастания  $x_2$ . Заметим, что решениям задачи (1), (2) соответствуют точки пересечения кривой  $y = \xi_2(s, \mathbf{x}, T)$  и прямой  $y = y_2$  на плоскости  $\{y, x_2\}$  при заданном  $x_1$ . Полагая, что точки касания отсутствуют (поскольку при  $u_2^2(s, \mathbf{x}, T) = 0$  обязательно  $\frac{du_2^2}{dT} \neq 0$ , то точки касания

в каждой данной реализации можно исключить бесконечно малой вариацией  $T$  или  $s$ ), нетрудно из геометрических соображений установить, что всегда существует нечетное число решений задачи (1), (2). Будем считать еще, что правые части уравнений (1) ограничены:

$$|a|; |b| \leq M < \infty.$$

Тогда в любой конечный момент времени все решения задачи (1), (2) при ограниченных значениях условий (2) также ограничены и знак  $u_2^2(s, \mathbf{x}, T)$  меняется с номером решения  $n$  как  $(-1)^n$ . С учетом вышесказанного можно записать следующее равенство, аналогичное (18):

$$\begin{aligned} & u_2^2(s, \mathbf{x}, T) \delta[y - \xi(s, \mathbf{x}, T)] = \\ & = - \sum_{n=1}^N (-1)^n \delta[y_1 - \xi_1^n(s, x_1, T, y_2)] \delta[x_2 - \xi_2^n(s, x_1, T, y_2)]. \end{aligned}$$

Усреднив его, получим

$$W[s, \mathbf{x}, T, y] = - \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, x_1, T, y_2) \times \sum_{n=1}^N (-1)^n W_n[s, \mathbf{x}, T, y; N]. \quad (20)$$

Таким образом, в случае многозначных решений граничной задачи решение уравнения (14) теряет смысл плотности вероятности. В общем случае это знакопеременная функция, равная взвешенной знакопеременной сумме плотностей вероятности разных решений граничной задачи. Тем не менее, как видно из (20)  $W$  удовлетворяет условию нормировки. Действительно, интегрируя (20) по  $x_2, y_1$  в бесконечных пределах и учтя, что  $P \neq 0$  только при нечетных  $N$ , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W[s, \mathbf{x}, T, y] dx_2 dy_1 = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, x_1, T, y_2) \equiv 1.$$

6. Как показано выше, решения промежуточных уравнений и более общего уравнения Колмогорова (13) позволяют определить в случае многозначных решений двухточечных граничных задач только взвешенные суммы плотностей вероятности разных решений. Для более детального анализа статистики двухточечных граничных задач может понадобиться знание, например,  $P(N; s, x_1, T, y_2)$ . Наметим путь определения этих функций. Рассмотрим равенство, аналогичное (18):

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^2 \delta[y^k - \xi(s, \mathbf{x}^k, T)] \left| \frac{\partial \xi_2(s, \mathbf{x}^k, T)}{\partial x_2^k} \right| = \\ & = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \delta[y_1^1 - \xi_1^n(s, x_1, T, y_2)] \delta[y_1^2 - \xi_1^m(s, x_1, T, y_2)] \times \\ & \quad \times \delta[x_2^1 - \xi_2^n(s, x_1, T, y_2)] \delta[x_2^2 - \xi_2^m(s, x_1, T, y_2)], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}^k = \{x_1, x_2^k\}$ ,  $\mathbf{y}^k = \{y_1^k, y_2\}$ . Усреднив это равенство, получим

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{k=1}^2 \delta[\mathbf{y}^k - \xi(s, \mathbf{x}^k, T)] \left| \frac{\partial \xi_2(s, \mathbf{x}^k, T)}{\partial x_2^k} \right| \right\rangle = \\ & = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, \mathbf{x}_1, T, \mathbf{y}_2) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N W_{nm}[s, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, T, \mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2; N]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, аналогично тому, как и в (19),  $W_{nm}$  — совместные вероятностные распределения  $n$ -го и  $m$ -го решений двухточечной граничной задачи, а левая часть равенства — среднее от функции диффузионных случайных процессов, удовлетворяющих условиям Коши, и может быть определено из решения соответствующего восьмимерного уравнения Колмогорова. Интегрируя (21) по  $x_2^1, x_2^2, y_1^1, y_1^2$ , получим

$$\begin{aligned} & \iiint_{-\infty}^{\infty} \left\langle \prod_{k=1}^2 \sigma[\mathbf{y}^k - \xi(s, \mathbf{x}^k, T)] \left| \frac{\partial \xi_2(s, \mathbf{x}^k, T)}{\partial x_2^k} \right| \right\rangle dx_2^k dy_1^k = \\ & = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; s, \mathbf{x}_1, T, \mathbf{y}_2) N^2 = \langle N^2(s, \mathbf{x}_1, T, \mathbf{y}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Точно так же можно, в принципе, определить и любые другие моменты случайного числа решений двухточечной граничной задачи, а по ним, вместе с условием нормировки, восстановить вероятности  $P(N; s, \mathbf{x}_1, T, \mathbf{y}_2)$ .

7. До сих пор мы рассматривали двухточечные граничные задачи с граничными условиями специального вида (2), (3). Однако в приложениях встречаются самые разнообразные граничные условия. Причем вид граничных условий в двухточечных граничных задачах играет гораздо большую роль, чем в задачах Коши. Малое изменение двухточечных граничных условий может привести к новым эффектам: многозначности решений, отсутствию решений, бесконечному множеству решений и т. д. Поэтому использование вышеизложенных методов при отыскании статистики двухточечных граничных задач требует почти в каждом новом случае дополнительного детального анализа. Тем не менее, можно сформулировать некоторые рецепты сведения более общих двухточечных граничных условий к условиям типа (2), (3). Пусть, например, граничные условия уравнений (1) имеют вид

$$K_1(\xi(s)) = 0, \quad K_2(\xi(T)) = 0. \quad (22)$$

В этом случае удобно перейти к новым переменным  $\gamma$ , связанным с  $\xi$  равенствами

$$K_1(\xi, \gamma) = \gamma_1, \quad K_2(\xi, \gamma) = \gamma_2, \quad (23)$$

где  $K_i(\xi, \gamma)$  удовлетворяют условию  $K_i(\xi, 0) = K_i(\xi)$  и выбираются такими, чтобы равенства (23) давали взаимно однозначное соответствие между фазовыми плоскостями  $\xi$  и  $\gamma$ . При этом граничные условия (22) принимают вид (2), (3):

$$\gamma_1(s) = 0, \quad \gamma_2(T) = 0.$$

Дальнейший статистический анализ  $\gamma$  аналогичен приведенному выше.

8. Проиллюстрируем вышеизложенные методы анализа статистики двухточечных граничных задач на нескольких конкретных примерах. Рассмотрим вначале взаимодействие двух встречных плоских волн, распространяющихся в слое с нелинейным случайно-неоднородным в пространстве поглощением. Считая, что неоднородности поглощения достаточно плавны, так что отражение от неоднородностей отсутствует, запи-

шем следующие уравнения для интенсивностей волны, бегущей вправо  $\xi_1(t)$  и бегущей влево  $\xi_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -\beta(\xi_1^2 + \xi_1\xi_2) + \eta(t)\xi_1, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \beta(\xi_2^2 + \xi_1\xi_2) - \eta(t)\xi_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $t$  — пространственная координата, вдоль которой распространяются волны,  $\beta$  — коэффициент, характеризующий величину поглощения в слое,  $\eta(t)$  — случайные гауссовы неоднородности поглощения с корреляционной функцией

$$\langle \eta(t)\eta(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau).$$

Пусть границами поглощающего слоя являются плоскости  $t=0$ ,  $t=T$ . Тогда граничными условиями уравнений (24) будут условия (2), где  $x_1$ ,  $y_2$  — заданные интенсивности падающих на слой волн. Нетрудно показать, что уравнения (24) вместе с (2) всегда имеют единственное решение\*, так что в данном случае  $W[0, \mathbf{x}, T, \mathbf{y}]$  является плотностью вероятности  $\xi_1(T)$ ,  $\xi_2(0)$  — интенсивностей волн на выходе из слоя. Заметим, что сопряженная граничная задача (24), (3) в общем случае может не иметь решений, но это, очевидно, не нарушает справедливости промежуточных уравнений для  $W$ ,  $\varphi$ .

Промежуточные уравнения для  $W$  и  $\varphi$  имеют в данном случае вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} &= \beta \frac{\partial}{\partial y_1} [(y_1^2 + y_1 y_2)W] - \beta(y_2^2 + y_1 y_2) \frac{\partial W}{\partial y_2} + \beta y_2 \varphi + \\ &+ \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} [y_1 W] \right\} + \frac{D}{2} y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} \right] - D y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} [y_1 W], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial T} &= \beta(y_1^2 + y_1 y_2) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \beta \frac{\partial}{\partial y_2} [(y_2^2 + y_1 y_2)\varphi] - \beta y_1 W + \\ &+ \frac{D}{2} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} [y_2 \varphi] \right\} - D y_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} [y_2 \varphi]. \end{aligned} \quad (25)$$

Граничные условия этих уравнений

$$W[0, \mathbf{x}, 0, \mathbf{y}] = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \varphi[0, \mathbf{x}, 0, \mathbf{y}] = 0. \quad (26)$$

Если интересоваться только статистикой интенсивности волны, бегущей вправо, то от уравнения (25) и равенства (17) можно перейти к одному интегродифференциальному уравнению для одномерной плотности вероятности бегущей вправо волны  $\omega[0, x_1, T, \mathbf{y}]$ . Интегрируя уравнение (25) и воспользовавшись (11), (17), получим

\* Для доказательства единственности решения двухточечной граничной задачи (24), (2) достаточно, согласно п. 2 статьи, показать, что  $u_2^2(0, \mathbf{x}, T) > 0$ . Чтобы показать это, заметим, что уравнения (24) с условиями Коши (4) обладают инвариантом  $\xi_1(0, \mathbf{x}, T) \xi_2(0, \mathbf{x}, T) = x_1 x_2$ , воспользовавшись которым, уравнение для  $u_2^2(0, \mathbf{x}, T)$  можно записать в виде

$$\frac{du_2^2}{dT} = (2\beta\xi_2 - \eta)u_2^2 + \beta x_1, \quad u_2^2(0, \mathbf{x}, 0) = 1.$$

Так как, по физическому смыслу,  $\beta x_1 > 0$ , то решение последнего уравнения  $u_2^2 > 0$  и граничная задача (24), (2) имеет единственное решение.

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \beta \frac{\partial}{\partial y_1} [(y_1^2 + y_1 y_2) w] - \beta y_2^2 \frac{\partial w}{\partial y_2} - \beta \frac{\partial}{\partial y_1} \left[ y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int_{-\infty}^{y_1} w dy_1 \right] +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} [y_1 w] \right\} + \frac{D}{2} y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left[ y_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} \right] - D y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} [y_1 w].$$

Граничное условие этого уравнения, следующее из (26),

$$w[0, x_1, 0, y] = \delta(x_1 - y).$$

Нетрудно показать, что уравнение для  $w$  не противоречит условию нормировки.

9. В качестве следующего примера рассмотрим некоторые статистические свойства лучей, распространяющихся в двумерной случайно-неоднородной среде. В малоугловом приближении геометрической оптики координата  $\rho(z)$  и угол отклонения  $\alpha(z)$  данного луча от оси  $z$  удовлетворяют уравнениям (см., например, [3])

$$\frac{d\rho(z)}{dz} = \alpha(z), \quad \frac{d\alpha(z)}{dz} = \frac{1}{2} \varepsilon(z, \rho). \quad (27)$$

Здесь  $\varepsilon(z, \rho)$  — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости среды, которую мы будем считать гауссовой, с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(z, \rho) \varepsilon(z + \tau, \rho + s) \rangle = A[s] \delta(\tau).$$

Пусть на плоскость  $z = 0$  падает плоская волна, и нас интересует статистика лучей, попавших в точку с координатами  $(z = L, \rho = 0)$ . Тогда граничные условия уравнений (27) примут вид

$$\alpha(0) = 0, \quad \rho(L) = 0. \quad (28)$$

Граничная задача (27), (28) может иметь несколько решений при данной реализации  $\varepsilon(z, \rho)$ , так как в данную точку может прийти несколько лучей, вышедших из разных точек плоскости  $z = 0$ . Таким образом, в данном случае решения промежуточных уравнений теряют смысл плотности вероятности, и целесообразно рассмотреть более общее уравнение, аналогичное (13). Для этого рассмотрим вспомогательные решения уравнений (27)  $\alpha(a, z)$ ,  $\rho(a, z)$ , удовлетворяющих условиям Коши:

$$\alpha(0) = 0, \quad \rho(0) = a, \quad (29)$$

и запишем уравнения для функций

$$u(a, z) = \frac{\partial \alpha(a, z)}{\partial a}, \quad J(a, z) = \frac{\partial \rho(a, z)}{\partial a},$$

аналогичных введенным выше функциям  $u$ :

$$\frac{dJ}{dz} = u, \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{2} J \frac{\partial \varepsilon(z, \rho)}{\partial \rho}. \quad (30)$$

Граничные условия этих уравнений

$$u(a, 0) = 0, \quad J(a, 0) = 1. \quad (31)$$

Решения уравнений (27), (30) с граничными условиями Коши (29),



(31) образуют непрерывный марковский процесс, переходная плотность вероятности которого  $f[a, L, \alpha, \rho, u, J]$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial L} + \alpha \frac{\partial f}{\partial \rho} + u \frac{\partial f}{\partial J} = \frac{A}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{D}{2} J^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad (32)$$

где  $A = A[0]$ ,  $D = \left. \frac{\partial^2 A[s]}{\partial s^2} \right|_{s=0}$ . Его граничное условие

$$f[a, 0, \alpha, \rho, u, J] = \delta(\rho - a)\delta(\alpha)\delta(u)\delta(J - 1). \quad (33)$$

Решение уравнения (32) вместе с (33) распадается на произведение двух функций

$$f = W[a, L, \alpha, \rho] V[L, u, J],$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial W}{\partial L} + \alpha \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{A}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}, \quad W[a, 0, \alpha, \rho] = \delta(\alpha)\delta(\rho - a), \quad (34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} + u \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{D}{2} J^2 \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}, \quad V[0, u, J] = \delta(u)\delta(J - 1).$$

Второе уравнение (34) описывает степень многозначности граничной задачи (27), (28), так как

$$\begin{aligned} \langle N(L) \rangle &= \int \int \int \int f[a, L, \alpha, \rho, u, J] |J| dJ du da d\alpha = \\ &= \int \int V[L, u, J] |J| du dJ. \end{aligned}$$

Перейдем от (32) к промежуточным уравнениям для  $W[a, L, \alpha, \rho] = \int \int J f du dJ$ ;  $\varphi[a, L, \alpha, \rho] = \int \int u f du dJ$ :

$$\frac{\partial W}{\partial L} + \alpha \frac{\partial W}{\partial \rho} - \varphi = \frac{A}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial L} + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{A}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2},$$

$$W[a, 0, \alpha, \rho] = \delta(\alpha)\delta(\rho - a), \quad \varphi[a, 0, \alpha, \rho] = 0.$$

Решение последнего из них, очевидно,  $\varphi \equiv 0$ , и уравнение для  $W$  совпадает с первым уравнением (34). Его решение при  $\rho = 0$ ,

$$W[a, L, \alpha, 0] = \frac{\sqrt{3}}{\pi AL^2} \exp \left\{ -\frac{2}{AL^3} [3a^3 + 3a\alpha L + \alpha^2 L^2] \right\},$$

в пренебрежении возможностью прихода в точку  $(L, 0)$  сразу нескольких лучей есть совместная плотность вероятности начальных координат  $a$  луча, попавшего в точку  $(z=L, \rho=0)$ , и углов его прихода  $\alpha = \alpha(L)$  в эту точку.

10. До сих пор в работе рассматривались граничные задачи, каждое из граничных условий которых задавалось только в одной точке. Однако аналогичные приведенным в работе рассуждения позволяют свести к решениям уравнений типа уравнений Колмогорова и статистический

анализ более общих граничных задач, когда граничные условия связывают значения рассматриваемых функций в разных точках. Покажем это на конкретном примере стационарного распределения амплитуды волны в нелинейном случайно-неоднородном кольцевом резонаторе. Пусть амплитуда  $\xi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = -a(\xi) + \eta(t). \quad (35)$$

и циклическим граничным условиям

$$\xi(0) = R\xi(T). \quad (36)$$

Здесь  $T$  — длина резонатора,  $R$  — коэффициент поглощения излучения на зеркале резонатора. Очевидно, для каждой данной реализации  $\eta(t)$  значение решения уравнения (35) вместе с (36) на зеркале  $\xi_T(0) = x$  является корнем уравнения

$$x - R\xi(0, x, T) = 0. \quad (37)$$

Здесь  $\xi(0, x, T)$  — решение уравнения (35) с граничным условием Коши:

$$\xi(0) = x. \quad (38)$$

Рассмотрим для простоты случай, когда в каждой реализации стохастического уравнения (35) существует одно и только одно решение, удовлетворяющее условию (36). Последнее справедливо, если

$$\frac{da(\xi)}{d\xi} \geq 0, \quad 0 \leq R \leq 1,$$

что мы и будем считать выполненным. При этом плотность вероятности  $\xi_T(0)$  существует и с учетом (37) равна

$$W[x, T, R] = \langle \delta[x - \xi_T(0)] \rangle = \left\langle \left( 1 - R \frac{\partial \xi(0, x, T)}{\partial x} \right) \delta[x - R\xi(0, x, T)] \right\rangle$$

Последнее среднее легко выражается через  $P(0, x, T, y) = \langle \delta[y - \xi(0, x, T)] \rangle$  — переходную плотность вероятности решения уравнения (35) вместе с (38) и  $Q(T, y, 0, x) = \langle \delta[x - \xi(T, y, 0)] \rangle$  — переходную плотность вероятности решения уравнения (35) с условием Коши  $\xi(T) = y$ . Нетрудно показать, что

$$W[x, T, R] = \frac{1}{R} P\left(0, x, T, \frac{x}{R}\right) - Q\left(T, \frac{x}{R}, 0, x\right).$$

Авторы благодарны Ю. Н. Барабаненкову за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1165 (1977).
2. А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 996 (1978).
3. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы, изд. МГУ, 1966
4. Р. Беллман, Введение в теорию матриц, изд. Наука, М, 1969.
5. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 3, 940 (1974)
6. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).

INTERMEDIATE EQUATIONS OF DIFFUSE PROCESS THEORY  
WITH TWO-POINT BOUNDARY CONDITIONS

A. N. Malakhov, A. I. Saichev

Integral equations similar to Smolukhov's ones and differential equations similar to Kolmogorov's ones are derived for the probability distributions of diffuse processes satisfying two-point boundary conditions. A case when two-point boundary problem may have several solutions is discussed in detail. Concrete physical examples are considered.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.371.165 · 533 9 082.7

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛАЗМЕННОМ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

А. С. Брюховецкий

В задаче дифракции плоской электромагнитной волны на эллиптическом цилиндре с произвольным, в общем случае комплексным значением диэлектрической проницаемости предлагается использовать разложение поля по волновым функциям кругового цилиндра с последующим переходом в них к эллиптическим координатам. Такая процедура в конечном итоге приводит к решению бесконечной системы уравнений для коэффициентов разложения, удобной для численного анализа. Матричными элементами системы являются парные произведения цилиндрических функций вещественного либо комплексного переменных. В приближении «холодной плазмы» получены аналитические выражения для электромагнитного поля в случае тонкого однородного плазменного цилиндра, учитывающие влияние радиационного затухания на параметры дипольного резонанса.

Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 201-79. Деп от 16 января 1979 г.

УДК 538.56 : 519.25

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ ВНУТРИ ОДНОМЕРНОГО СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ СРЕДЫ. II

В. И. Кляцкин

Получено стохастическое выражение для интенсивности волны внутри слоя случайно-неоднородной среды при наличии отражающей границы, обусловленной как более плотной средой, так и вакуумом (для акустических волн). Показано, что моменты интенсивности волны экспоненциально растут с толщиной слоя, аналогично случаю отсутствия отражения.

1. В предыдущей работе [1] мы рассматривали вопрос о флуктуациях интенсивности волны внутри слоя одномерной случайно-неоднородной среды. В этой работе было получено стохастическое выражение для интенсивности волны внутри слоя и было показано, что моментные функции интенсивности волны внутри слоя среды экспоненциально растут с ростом толщины слоя, что соответствует явлению стохастического волнового параметрического резонанса. Конкретные расчеты в работе [1] ограничивались случаем, когда невозмущенная диэлектрическая проницаемость в слое среды совпадает с диэлектрической проницаемостью вне слоя. Случай разных значений диэлектрической проницаемости дает возможность проследить за влиянием краевых условий на статистические характеристики интенсивности волны, в частности, таких, как наличие отражательной границы (либо от более плотной среды, либо от вакуума (для акустических волн)). Ниже мы подробно рассмотрим эти предельные случаи.

2. Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(x)$  равна

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 - \text{const} & (-\infty < x < 0) \\ \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(x) & (0 < x < L) \\ \varepsilon_L - \text{const} & (L < x < \infty) \end{cases} \quad (1)$$

(все значения вещественные, так как мы рассматриваем среду без поглощения), где  $\bar{\varepsilon}$  — среднее значение диэлектрической проницаемости слоя флуктуирующей среды, занимающей часть плоскости  $0 < x < L$ , а  $\tilde{\varepsilon}(x)$  — ее флуктуирующая часть. Волновое поле описывается уравнением

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x)U = 0. \quad (2)$$

Пусть далее, как и в [1], нормально к слою распространяется волна из области  $x > L$  —  $\exp[ik_L(L-x)]$ , где  $k_L = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_L}$ . С учетом отраженной волны полное поле в области  $x > L$  будет иметь вид

$$U(x) = \exp[ik_L(L-x)] + R_L \exp[-ik_L(L-x)]. \quad (3)$$

В области  $x < 0$  волновое поле имеет вид

$$U(x) = T \exp(-ik_0 x) \quad \left( k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0} \right). \quad (4)$$

Внутри слоя среды волновое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 \left[ 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon} \right] U = 0 \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \right) \quad (5)$$

с условием непрерывности поля и производной на границах слоя, т. е. при  $x = 0$ ,  $x = L$ .

Исходя из закона сохранения потока энергии в среде

$$\frac{d}{dx} \left( U^* \frac{dU}{dx} - U \frac{dU^*}{dx} \right) = 0, \quad (6)$$

в работе [1] было получено стохастическое выражение для интенсивности волны внутри слоя

$$I(x) = (1 + R_L)(1 + R_L^*) \frac{1 - |R(L)|^2}{1 - |R(x)|^2} \frac{[1 + R(x)][1 + R^*(x)]}{[1 + R(L)][1 + R^*(L)]}, \quad (7)$$

где функция  $R(x)$ , связанная с волновым полем равенством

$$R(x) = \frac{\kappa U(x) - iU'(x)}{kU(x) + iU'(x)} \quad \left( U' = \frac{dU}{dx} \right), \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению первого порядка по  $x$ :

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2ikR + i \frac{k}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\varepsilon} (1 + R)^2, \quad R(0) = \frac{k - k_0}{k + k_0}. \quad (9)$$

Коэффициент отражения волны от слоя среды  $R_L$  связан с решением уравнения (9) по формуле

$$R_L = \frac{(k_L + k)R(L) + (k_L - k)}{(k_L + k) + (k_L - k)R(L)}. \quad (10)$$

В случае  $k_L = k$ , который и будет рассматриваться ниже,  $R_L = R(L)$ , и выражение для интенсивности волны (7) принимает вид

$$I(x) = \frac{1 - |R(L)|^2}{1 - |R(x)|^2} [1 + |R(x)|^2 + R(x) + R^*(x)]. \quad (11)$$

Представим функцию  $R(x)$  в виде

$$R(x) = \rho(x) \exp[i\varphi(x)]. \quad (12)$$

Тогда  $\rho(x) = |R(x)|$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{k}{2\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) \sin \varphi (1 - \rho^2), \quad \rho(0) = \left| \frac{k - k_0}{k + k_0} \right|, \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2k + \frac{k}{2\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) \left[ 2 + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi \right], \quad \varphi(0) = \begin{cases} 0 & (k_0 < k) \\ \pi & (k_0 > k) \end{cases},$$

а интенсивность волны (11) запишется в виде

$$I(x) = \frac{1 - \rho^2(L)}{1 - \rho^2(x)} [1 + \rho^2(x) + 2\rho \cos \varphi]. \quad (11')$$

Будем считать  $\tilde{\varepsilon}(x)$  гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией по  $x$ , т. е.

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x) \tilde{\varepsilon}(x') \rangle = 2\sigma^2 l \delta(x - x'). \quad (14)$$

В этом случае решение системы уравнений (13)  $\{\rho(x), \varphi(x)\}$  будет марковским процессом. Функция  $\varphi(x)$  при этом имеет структуру

$$\varphi(x) = \varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad (15)$$

а функции  $\rho(x)$  и  $\tilde{\varphi}(x)$  — медленно меняющиеся функции на масштабах порядка длины волны.

В данной задаче, помимо различных статистических параметров, имеется дополнительный параметр  $k_0/k$ , который характеризует влияние краевого условия при  $x = 0$  на динамику волны. Случай  $k_0 \sim k$  соответствует при этом задаче о прохождении и отражении волны от слоя среды, в то время как значение параметра  $k_0 \rightarrow \infty$  соответствует наличию зеркальной поверхности при  $x = 0$ . Этот предельный случай соответствует краевому условию  $U(0) = 0$  для уравнения (5). Другой предельный случай  $k_0 \rightarrow 0$  соответствует отражению волны от вакуума (для акустической волны), и соответствующее краевое условие для уравнения (5) имеет вид  $U'(0) = 0$ . В работе [1] подробно рассматривался случай  $k_0 = k$ . При  $k_0 \sim k$  очевидно, что кроме естественного усложнения формул, полученных в [1], никаких новых эффектов не появится. Рассмотрим теперь предельные случаи  $k_0 \rightarrow \infty$  и  $k_0 \rightarrow 0$ .

3. Как при  $k_0 \rightarrow \infty$ , так и при  $k_0 \rightarrow 0$   $\rho(0) \rightarrow 1$  и, следовательно, из уравнения (13) получаем равенство\*

$$\rho(x) = 1 \quad (k_0 \rightarrow \infty, k_0 \rightarrow 0). \quad (16)$$

Таким образом, в выражении (11') для интенсивности волны содержится неопределенность при  $k_0 \rightarrow \infty$ ,  $k_0 \rightarrow 0$ . Чтобы ее раскрыть, нам надо знать характер стремления величины  $\rho^2(x)$  к единице. Это можно получить следующим образом. Уравнение (13) можно решить относительно функции  $\rho(x)$ . В результате получаем равенство

$$\rho(x) = \frac{[1 + \rho(0)] e^{q(x)} - [1 - \rho(0)]}{[1 + \rho(0)] e^{q(x)} + [1 - \rho(0)]}, \quad (17)$$

$$\rho(0) = \left| \frac{k - k_0}{k + k_0} \right|,$$

где

$$q(x) = \frac{k}{\varepsilon} \int_0^x d\xi \tilde{\varepsilon}(\xi) \sin \varphi(\xi). \quad (18)$$

\* В работе [1] вместо  $\rho(x)$  рассматривалась функция  $u(x)$ , определяемая по формуле  $\rho(x) = \sqrt{[u(x) - 1]/[u(x) + 1]}$ . Однако в силу того, что значению  $\rho(x) = 1$  соответствует значение  $u(x) = \infty$ , использовать ее в данной работе было бы неудобно.

Следовательно,

$$1 - \rho^2(x) = \frac{4 [1 - \rho^2(0)] e^{q(x)}}{([1 + \rho(0)] e^{q(x)} + [1 - \rho(0)])^2}. \quad (19)$$

Таким образом, имеем асимптотики

$$1 - \rho^2(x) \rightarrow \begin{cases} 4 \frac{k}{k_0} e^{-q(x)} & (k_0 \rightarrow \infty) \\ 4 \frac{k_0}{k} e^{-q(x)} & (k_0 \rightarrow 0) \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, в обоих предельных случаях формула (11') принимает простой вид:

$$I(x) = 2e^{-q(L)+q(x)} [1 + \cos \varphi(x)], \quad (21)$$

где функции  $q(x)$  и  $\varphi(x)$  описываются уравнениями

$$\frac{dq}{dx} = \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) \sin \varphi(x), \quad q(0) = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2k + \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) [1 + \cos \varphi], \quad \varphi(0) = \begin{cases} \pi & (k_0 \rightarrow \infty) \\ 0 & (k_0 \rightarrow 0) \end{cases} \quad (22)$$

Или, с учетом равенства (15),

$$I(x) = 2e^{-q(L)+q(x)} [1 + \cos \{\varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}(x)\}]; \quad (21')$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) \sin \{\varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}(x)\}, \quad q(0) = 0, \quad (22')$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dx} = \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}(x) [1 + \cos \{\varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}(x)\}], \quad \tilde{\varphi}(0) = 0.$$

Так как функции  $q(x)$  и  $\tilde{\varphi}(x)$  являются медленно меняющимися функциями на масштабах порядка длины волны, то при изучении их различных статистических характеристик целесообразно произвести усреднение по быстро меняющимся на длине волны функциям. Учитывая, что решение задачи (22') ( $q(x)$ ,  $\tilde{\varphi}(x)$ ) является марковским процессом, такое усреднение достаточно провести в уравнениях для плотности вероятностей перехода и одноточечной плотности вероятностей.

Введем функцию

$$\Phi_x(q, \tilde{\varphi}) = \delta(\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}) \delta(q(x) - q), \quad (23)$$

которая удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = - \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial q} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} (1 + \cos \theta) \right] \tilde{\varepsilon}(x) \Phi_x, \quad (24)$$

где  $\theta = \varphi(0) + 2kx + \tilde{\varphi}$ . Усредняя уравнение (24) по ансамблю реализаций  $\tilde{\varepsilon}(x)$ , стандартным путем (см., например, [2]) получаем уравнение Эйнштейна — Фоккера для одноточечной плотности вероятностей

$$P_x(q, \tilde{\varphi}) = \langle \Phi_x(q, \tilde{\varphi}) \rangle:$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = D \left[ \frac{\partial}{\partial q} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} (1 + \cos \theta) \right]^2 P_x(q, \tilde{\varphi}) \quad \left( D = \frac{k^2 \sigma^2 l}{\varepsilon^2} \right), \quad (25)$$

которое можно переписать в виде, более удобном для усреднения по быстроменяющимся функциям,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial x} = D \left[ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2}{\partial q \partial \tilde{\varphi}} \sin \theta (1 + \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial q} \cos \theta (1 + \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} (1 + \cos \theta)^2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \sin \theta (1 + \cos \theta) \right] P_x(q, \tilde{\varphi}). \end{aligned} \quad (26)$$

Усредняя теперь уравнение (26) по быстроменяющимся функциям, получаем уравнение

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = -\frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial q} P_x + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} P_x + \frac{3}{2} D \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} P_x \quad (27)$$

с начальным условием

$$P_0(q, \tilde{\varphi}) = \delta(q) \delta(\tilde{\varphi}). \quad (28)$$

Очевидно, что и уравнение для усредненной плотности вероятностей перехода марковского процесса  $(q(x), \tilde{\varphi}(x))$  также имеет вид уравнения (27). Отсюда следует, что случайные процессы  $q(x)$  и  $\tilde{\varphi}(x)$ , входящие в формулу (21'), являются гауссовыми независимыми процессами со средними значениями

$$\langle \tilde{\varphi}(x) \rangle = 0, \quad \langle q(x) \rangle = \frac{D}{2} x \quad (29)$$

и корреляционными функциями

$$\langle \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x') \rangle = 3D \min(x, x'), \quad \langle \tilde{q}(x) \tilde{q}(x') \rangle = D \min(x, x'), \quad (30)$$

где  $\tilde{q}(x) = q(x) - \langle q(x) \rangle$ . Такое усреднение уравнения (26) можно, очевидно, провести, если выполнено условие  $D \ll k$  ( $D\lambda \ll 1$ ).

Таким образом, мы можем переписать выражение для интенсивности волны (21') в виде

$$I(x) = 2e^{-\frac{D}{2}(L-x)-\tilde{q}(L)+\tilde{q}(x)} [1 - \cos(2kx + \tilde{\varphi})] \quad (k_0 \rightarrow \infty); \quad (31)$$

$$I(x) = 2e^{-\frac{D}{2}(L-x)-\tilde{q}(L)+\tilde{q}(x)} [1 + \cos(2kx + \tilde{\varphi})] \quad (k_0 \rightarrow 0). \quad (32)$$

Формулы (31), (32) позволяют легко вычислять любые моменты интенсивности волны (как одноточечные, так и многоточечные). Так, для распределения средней интенсивности волны в слое среды получаем выражения

$$\langle I(x) \rangle = 2(1 \mp e^{-\frac{3}{2}Dx} \cos 2kx), \quad (33)$$



где верхний знак относится к случаю  $k_0 \rightarrow \infty$ , а нижний — к случаю  $k_0 \rightarrow 0$ . Отметим, что при  $Dx \gg 1$  распределение вероятностей для  $\varphi(x)$  стремится к равномерному распределению на отрезке  $[0, 2\pi]$ , и в этом случае получаем, что при  $Dx \gg 1$   $\langle I(x) \rangle = 2$  независимо от краевых условий при  $x = 0$ . Аналогичным образом находим, что при  $Dx \gg 1$

$$\langle I^2(x) \rangle = 6 \exp[D(L-x)] \text{ и т. д.} \quad (34)$$

Максимальное значение дисперсии интенсивности, как и других моментов, достигается внутри слоя среды вблизи границы  $x = 0$ , т. е. моменты интенсивности также экспоненциально растут внутри слоя среды при увеличении его толщины, как это имеет место и в случае отсутствия отражения от граничной плоскости. Распределение вероятностей интенсивности волны, описываемой формулами (31), (32), не является логарифмически-нормальным распределением.

Таким образом, можно нарисовать следующую картину поведения моментов интенсивности внутри слоя среды в зависимости от краевых условий (параметра  $k_0$ ) при достаточно большой величине  $L$ -толщины слоя. Для малых  $k_0$  имеется резкий максимум вблизи границы  $x = 0$  и экспоненциальный выход на постоянную величину при  $x = L$ . При увеличении  $k_0$  максимум смещается внутрь слоя (до максимального смещения  $\sim L/2$  при  $k_0 = k$ ), но экспоненциальный выход на значение вблизи  $x = L$  не изменяется. При дальнейшем увеличении  $k_0$  максимум опять смещается к границе  $x = 0$ , а экспоненциальный выход на граничное значение при  $x = L$  не изменяется. Таким образом, само явление экспоненциального роста интенсивности волны внутри слоя среды оказывается очень чувствительным к краевому условию при  $x = 0$ . Однако экспоненциальный характер выхода на значение при  $x = L$  оказывается универсальным. Ширина этой области зависит от краевых условий, как отмечалось выше.

Отметим, что в работе [3] изучался вопрос о флуктуациях интенсивности волны внутри слоя среды с зеркальной отражающей поверхностью при  $x = 0$ . При этом за основу брались «укороченные» уравнения, справедливые для задачи Коши, типа рассмотренных в монографии [4]. Существенное различие подходов к задаче состоит в том, что рассмотренная выше задача является краевой, в то время как в работе [3] для нахождения статистических характеристик «укороченных» уравнений использовалось условие динамической причинности, которой на самом деле нет. Результаты расчетов флуктуаций интенсивности, полученные выше, совпадают, однако, с результатами, полученными ранее в работе [3]. Это означает, по-видимому, что метод «укороченных» уравнений, развитый в [3] для данной задачи, может быть корректно обоснован.

Использованный выше метод изучения флуктуаций интенсивности волны, так же как и в работе [1], является по своей сути применением теории инвариантного погружения для линейных краевых задач, использование которой для статистических задач было развито в работе [5].

Я признателен Б. С. Абрамовичу и Ю. А. Рыжову, обратившим мое внимание на данную проблему, а также В. И. Татарскому за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В И Кляцкин, Изв вузов — Радиофизика, 22, № 2, 180 (1979).
- 2 В И Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд Наука, М, 1975
- 3 Б. С. Абрамович, С Н Гурбатов, Ю. А Рыжов, Изв вузов — Радиофизика (в печати)

4. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, изд Наукова Думка, Киев, 1971.
5. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1165 (1977).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
6 мая 1978 г.

WAVE INTENSITY FLUCTUATIONS INSIDE ONE-DIMENSIONAL  
RANDOMLY INHOMOGENEOUS LAYER OF THE MEDIUM. II

*V. I. Klyatskin*

A stochastic expression has been obtained for the wave intensity inside the layer of a randomly inhomogeneous medium in the presence of the reflecting boundary due to both more dense medium and the vacuum (for acoustic waves). It is shown that moments of the wave intensity exponentially increase with the layer depth which is similar to the case of the reflection absence.

---

УДК 621.378.325

## ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ЧАСТОТНО-РАЗНЕСЕННЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

В. Кан

Проведены измерения четырехточечной функции когерентности  $\Gamma_4$  от двух независимых источников света с длинами волн  $\lambda_1 = 0,63$  мк и  $\lambda_2 = 0,44$  мк. Совмещенные пучки двух лазеров распространялись в слое жидкости с развитой конвективной турбулентностью. Измерения проводились в области случайных фокусировок интенсивности излучений для значений продольного параметра  $\rho_0$ , равных 1,2; 1,9 и 2,7. Построены сечения и изолинии рельефа  $|\Gamma_4|$ . Проводится сравнение с результатами аналогичных измерений для одной волны, а также с расчетами, выполненными по формулам метода плавных возмущений.

1. Для четырехточечной функции когерентности от двух независимых источников света с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , излучения которых распространяются в локально-изотропной турбулентной среде, можно реализовать, в общем случае, четыре варианта приема излучения в точках расположения в вершинах параллелограмма. Однако простой анализ показывает, что наиболее интересным является случай, когда приемные точки для поля  $E_{\lambda_1}$  расположены на одной стороне параллелограмма, а для поля  $E_{\lambda_2}$  — на противоположной, т. е.

$$\Gamma_{4,\lambda}(x, |\rho_1|, |\rho_2|, \varphi) = \langle E_{\lambda_1}(x, \rho) E_{\lambda_1}^*(x, \rho + \rho_1) \times \\ \times E_{\lambda_2}^*(x, \rho + \rho_2) E_{\lambda_2}(x, \rho + \rho_1 + \rho_2) \rangle,$$

где  $x$  — длина трассы,  $\rho_1, \rho_2$  — стороны приемного параллелограмма,  $\varphi$  — угол между  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Здесь и далее нижними индексами  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  обозначены величины, зависящие соответственно от двух длин волн и от каждой длины волны  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$ . Для остальных вариантов приема излучения от двух источников четырехточечная функция когерентности быстро затухает, или вообще не имеет смысла в локально-изотропной турбулентной среде со степенным спектром неоднородностей.

Отметим, что при таком определении функция  $\Gamma_{4,\lambda}$  уже инвариантна относительно перестановки  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В частности, для случаев  $\rho_1 \rightarrow \infty$  и  $\rho_2 \rightarrow \infty$  функция  $\Gamma_{4,\lambda}$  имеет различные асимптотики:

$$\Gamma_{4,\lambda}(x, \rho_1 \rightarrow \infty, \rho_2, \varphi) \rightarrow 0,$$

$$\Gamma_{4,\lambda}(x, \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty, \varphi) \rightarrow \Gamma_{2,\lambda_1}(\rho_1) \Gamma_{2,\lambda_2}(\rho_2), \quad (1)$$

где

$$\Gamma_2(\rho_1) = \langle E(x, \rho) E^*(x, \rho + \rho_1) \rangle.$$

Частотные и частотно-пространственные корреляции амплитуд полей исследовались в ряде работ [1–5] методом плавных возмущений (МПВ). В работах [6] для фазового экрана и в [7–9] для произвольного слоя случайной одномасштабной неоднородной среды рассматривались частотные корреляции интенсивностей в режиме насыщенных мерцаний

в предположении о нормальном распределении поля. В [10] представлены результаты измерений одноточечной корреляции флуктуаций интенсивностей двух плоских волн, т. е. величины

$$\beta_{\lambda}^2 = \frac{\Gamma_{4, \lambda}(x, 0, 0)}{\langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle} - 1,$$

где  $I_{\lambda 1}$ ,  $I_{\lambda 2}$  — интенсивности распространяющихся излучений. В [10] показано, что расчет, выполненный в предположении о нормальном распределении поля, дает существенно заниженные по сравнению с экспериментом значения для  $\beta_{\lambda}^2$ .

Широкий круг вопросов, связанных с распространением импульсных, модулированных сигналов в случайно-неоднородной среде, в среде с дисперсией, требуют знания зависимости  $\Gamma_{4, \lambda}$  от соотношения частот, от параметров среды и т. д. (см., например, [1, 11]).

В данной работе представлены результаты измерений модуля  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  в турбулентной среде при фиксированной частотной расстройке  $\Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1}$  ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — частоты распространяющихся волн) в зависимости от характеристик турбулентной среды и пространственных разнесений приемных точек по методике, изложенной в [12, 13].

2. В качестве источников света использовались He-Ne и He-Cd лазеры с длинами волн в воздухе  $\lambda_1 = 0,63 \text{ мк}$  и  $\lambda_2 = 0,44 \text{ мк}$  ( $\Omega = 0,174$ ). Описание эксперимента приведено в [10, 12]. Здесь отметим только, что турбулентность создавалась в жидкостной кювете длиной  $x = L = 35 \text{ см}$ . Значения структурной характеристики  $C_{\epsilon}^2$  находились из пространственных спектров  $\Gamma_2(\rho)$ . Спектр турбулентных пульсаций диэлектрической проницаемости  $\Phi_{\epsilon}(x)$  задавался в виде

$$\Phi_{\epsilon}(x) = 0,033 C_{\epsilon}^2 x^{-11/3} \exp\left(-\frac{x^2}{x_m^2}\right),$$

где  $x$  — пространственное волновое число,  $x_m = 5,92/l_0$ ,  $l_0$  — внутренний масштаб температурных пульсаций. В качестве продольного параметра в случае распространения только одной волны используются значения  $\beta_0^2 = 4\sigma_{\chi}^2 = 4\langle \chi^2 \rangle$ , вычисляемые в первом приближении МПВ (см., например, [14]), где  $\chi = \ln(A/A_0)$ ,  $A$  — флуктуирующая, а  $A_0$  — невозмущенная амплитуды поля,  $\sigma_{\chi}^2$  — дисперсия логарифма амплитуды. В данной задаче, по аналогии, в качестве продольного параметра были использованы значения  $\beta_{0, \lambda}^2 = 4\langle \chi_{\lambda 1} \chi_{\lambda 2} \rangle$ , вычисленные в первом приближении МПВ [10]:

$$\beta_{0, \lambda}^2 = \frac{0,033 \pi^2 C_{\epsilon}^2 k^2 L x_m^{-5/3}}{1 - \Omega^2} \Gamma\left(-\frac{11}{6}\right) \left[ \frac{(1 + D^2)^{11/12}}{D} \sin\left(\frac{11}{6} \arctg D\right) - \frac{(1 + \Omega^2 D^2)^{11/12}}{\Omega D} \sin\left(\frac{11}{6} \arctg \Omega D\right) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $k = n \frac{\omega}{c}$ ,  $n$  — показатель преломления воды,  $\omega = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$  — средняя частота,  $D = \frac{x_m^2 L}{k}$  — волновой параметр. Полагая в (2)  $\Omega = 0$ , можно получить выражения для  $\beta_{0, \lambda 1}^2$  и  $\beta_{0, \lambda 2}^2$ . Измерения проводились

в области случайных фокусировок интенсивностей для трех турбулентных режимов. В табл. 1 приведены значения параметров для всех трех режимов.

Таблица 1

№	$C_e^2 \cdot 10^8, \text{ см}^{-2/3}$	$\beta_{0, \lambda}$	$\beta_\lambda$	$\beta_{\lambda 1}$	$\beta_{\lambda 2}$	$D$	$l_0, \text{ мм}$
1	2,30	1,2	1,2	1,28	1,34	2,0	0,63
2	4,34	1,9	1,53	1,65	1,70	2,7	0,54
3	7,67	2,7	1,46	1,77	1,78	3,7	0,46

Для измерений были выбраны следующие конфигурации приемных точек (трафареты): а) приемные точки совмещены попарно, т. е. трафареты  $\rho_1 = 0$  и  $\rho_2 = 0$ ; б) трафареты  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 0$  (эти измерения показали, что значения  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  для  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 0$  различаются незначительно и дальнейшие измерения проводились для трафаретов с  $\varphi = \pi/2$ ); в) трафареты  $\rho_1 : \rho_2 = 1:3$  и  $\rho_1 : \rho_2 = 3:1$ ,  $\varphi = \pi/2$ .

Если зафиксировать угол  $\varphi$ , то функция  $|\Gamma_{4, \lambda}(x, \rho_1, \rho_2, \varphi)|$  образует некоторый рельеф над координатной плоскостью  $\rho_1 \rho_2$ . Выше уже отмечалось, что функция  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  инвариантна к перестановке  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , поэтому интересно рассмотреть поведение  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  вдоль осей  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Функция  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  вдоль оси  $\rho_2$  характеризует корреляцию флуктуаций интенсивностей.

На рис. 1а, б, в точками представлены экспериментальные значения коэффициентов корреляции флуктуаций интенсивностей излучений на двух длинах волн в разнесенных на расстояние  $\rho_2 \equiv \rho$  точках:

$$b_{I, \lambda} = \frac{\Gamma_{4, \lambda}(x, 0, \rho, \varphi) \cdot \langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle}{\beta_{\lambda 1} \beta_{\lambda 2} \langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle}.$$

По оси абсцисс отложены значения  $\rho$ , нормированные на соответствующие значения  $\rho_0$ , полученные с использованием (1) из условия

$$\Gamma_{2, \lambda 1}(\rho_0) \Gamma_{2, \lambda 2}(\rho_0) = e^{-2}.$$

При  $\Omega = 0$  значения  $\rho_0$ , определяемые условием (3), совпадают с соответствующими радиусами когерентности.

Штрихпунктирными линиями показаны зависимости  $b_{I, \lambda}$  при  $C_e^2 \rightarrow 0$ , вычисленные по формулам МПВ для условий, которые были реализова-

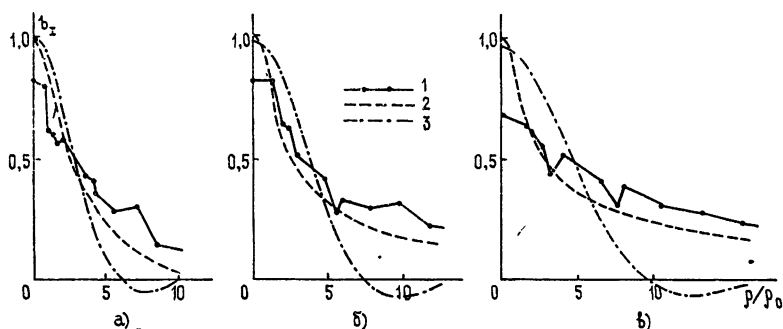


Рис. 1. Коэффициенты корреляции интенсивностей: а)  $\beta_{0, \lambda} = 1,2$ , б)  $\beta_{0, \lambda} = 1,9$ , в)  $\beta_{0, \lambda} = 2,7$ ; 1—эксперимент на двух длинах волн, 2—эксперимент на одной длине волны [13], 3—расчет для слабых флуктуаций.

ны в эксперименте. Штриховыми линиями показаны для сравнения экспериментальные коэффициенты корреляции интенсивностей на одной длине волны  $0,63 \text{ мк}$   $b_{I, \lambda 1}$  (измерения проводились для значений  $\beta_{0, \lambda 1}$ , равных 1,2; 1,8; 2,5 [13]). Из рисунка видно, что значения  $b_{I, \lambda}$  при  $\rho = 0$  меньше единицы и возрастание  $\beta_{0, \lambda}$  приводит к их уменьшению, более быстрому, чем предсказывает МПВ. Коэффициенты корреляции  $b_{I, \lambda}(\rho/\rho_0)$  и  $b_{I, \lambda 1}(\rho/\rho_0)$ , за исключением области вблизи  $\rho/\rho_0 = 0$ , имеют близкие значения. Сравнение эксперимента с расчетом, справедливым в области слабых флуктуаций интенсивностей, показывает, что экспериментальные зависимости имеют меньшие значения при небольших  $\rho/\rho_0$  и большие значения при больших  $\rho/\rho_0$ , причем с ростом  $\beta_{0, \lambda}$  это различие увеличивается.

Отметим, что коэффициент корреляции  $b_{I, \lambda}(\rho)$  имеет непосредственное практическое приложение к вопросам, связанным с распространением излучений с существенно отличающимися длинами волн.

На рис. 2а, б, в сплошными линиями, построенными по экспериментальным точкам, показаны сечения рельефа

$$|\gamma_{4, \lambda}(x, |\rho_1|, |\rho_2|, \varphi)| = \frac{|\Gamma_{4, \lambda}(x, |\rho_1|, |\rho_2|, \varphi)|}{\langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle [(1 + \beta_{\lambda 1}^2)(1 + \beta_{\lambda 2}^2)]^{1/2}}$$

плоскостью  $\rho_2 = 0$ , т. е. значения  $|\gamma_{4, \lambda}|$  вдоль оси  $\rho_1$ . В данном случае нормировка функции  $|\Gamma_{4, \lambda}|$  выбрана таким образом, чтобы для распространения излучения только на одной длине волны ( $\Omega = 0$ ) максимальное значение  $|\gamma_{4, \lambda}|$ , достигаемое в точке  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , равнялось единице. По оси абсцисс отложены значения  $\rho_1 \equiv \rho$ , нормированные на соответствующие величины  $\rho_0$ . Штрихпунктирными линиями показаны рассчитанные в предположении о логарифмически-нормальном распределении полей и приближении МПВ зависимости

$$\gamma_{4, \lambda} \left( x, \frac{\rho}{\rho_0}, 0 \right)_{\text{МПВ}} = \frac{\Gamma_{4, \lambda} \left( x, \frac{\rho}{\rho_0}, 0, \varphi \right)_{\text{МПВ}}}{\langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle \exp(2\sigma_{x, \lambda 1}^2 + 2\sigma_{x, \lambda 2}^2)}$$

(при логарифмически-нормальном распределении полей справедливо соотношение  $\exp(2\sigma_{x, \lambda 1}^2 + 2\sigma_{x, \lambda 2}^2) = [(1 + \beta_{\lambda 1}^2)(1 + \beta_{\lambda 2}^2)]^{1/2}$ ). Из рисунка видно, что значения  $|\gamma_{4, \lambda}| / \langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle$  вдоль оси  $\rho_1$  спадают не к единице, как это происходит с  $|\gamma_{4, \lambda}| / \langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle$  вдоль оси  $\rho_2$ , а к нулю.

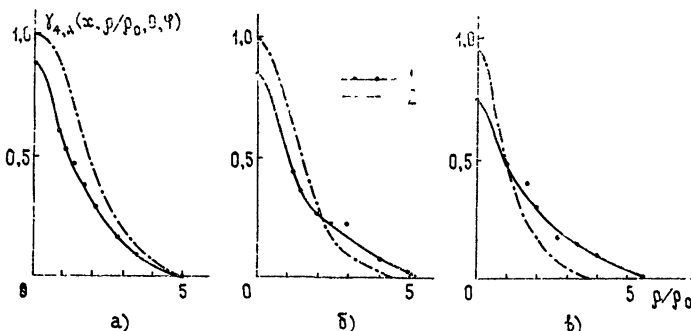


Рис. 2. Сечение рельефа  $|\gamma_{4, \lambda}|$  плоскостью  $\rho_2 = 0$ :

а)  $\beta_{0, \lambda} = 1,2$ , б)  $\beta_{0, \lambda} = 1,9$ , в)  $\beta_{0, \lambda} = 2,7$ ;

1 — эксперимент, 2 — расчет в приближении МПВ.

Отметим, что спадание к нулю по оси  $\rho_1$  происходит быстрее, чем спадание к единице по оси  $\rho_2$ , и это различие увеличивается с ростом  $\beta_{0,\lambda}$ . Рассчитанные в приближении МПВ зависимости характеризуются большей крутизной спадания, и, кроме того, увеличение  $\beta_{0,\lambda}$  приводит к быстрому уменьшению расчетных значений (кроме, разумеется, значений вблизи  $\rho_1 = 0$  [10]).

Кроме представленных на рис. 1, 2 сечений интересно рассмотреть также сечения рельефа  $|\gamma_{4,\lambda}|$  плоскостями, параллельными плоскости  $\rho_1, \rho_2$ , в результате которых получают изолинии рельефа  $|\gamma_{4,\lambda}|$ . На рис. 3а, б, в сплошными линиями, построенными по результатам эксперимента, представлены изолинии уровней 0,1 (внешняя изолиния), 0,2 и 0,4 рельефа  $|\gamma_{4,\lambda}(x, \rho_1/\rho_0, \rho_2/\rho_0, \varphi)|$  (выше уже отмечалось, что зависимость  $|\gamma_{4,\lambda}|$  от угла  $\varphi$  незначительна). По осям отложены безразмерные значения  $\rho_1/\rho_0$ ,  $\rho_2/\rho_0$ .

Штриховыми линиями показаны соответствующие изолинии, полученные на одной длине волны  $\lambda_1 = 0,63 \text{ мк}$  [13].

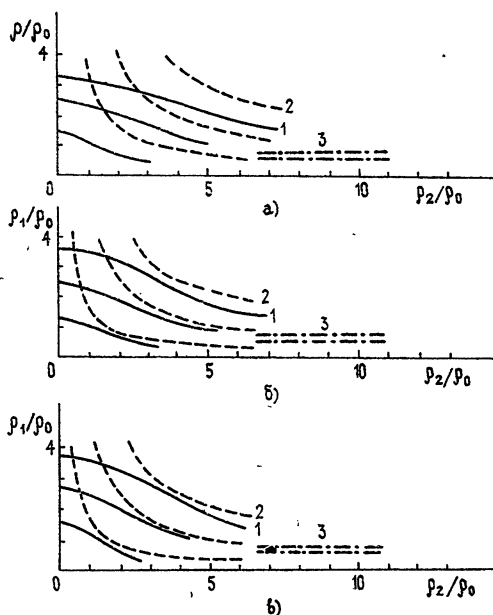


Рис. 3. Изолинии уровней 0,1; 0,2; 0,4 рельефа  $|\gamma_{4,\lambda}|$ :

а)  $\beta_{0,\lambda} = 1,2$ , б)  $\beta_{0,\lambda} = 1,9$ , в)  $\beta_{0,\lambda} = 2,7$ ;

1—эксперимент на двух длинах волн, 2—эксперимент на одной длине волны [13], 3—асимптотика изолиний 0,1 и 0,2 при  $\rho_2 \rightarrow \infty$ .

Штрихпунктирными линиями показаны асимптотики изолиний уровней 0,1 и 0,2 при  $\rho_2 \rightarrow \infty$ , т. е.  $\rho_1/\rho_0 = \text{const}$  из условия

$$\frac{\Gamma_{2,\lambda 1} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \Gamma_{2,\lambda 2} \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)}{\langle I_{\lambda 1} \rangle \langle I_{\lambda 2} \rangle [(1 + \beta_{\lambda 1}^2) (1 + \beta_{\lambda 2}^2)]^{1/2}} = 0,1 \text{ (или } 0,2 \text{)}.$$

Изменение параметра  $\beta_{0,\lambda}$  в пределах, реализованных в эксперименте, слабо влияет на крутизну ската рельефа  $|\gamma_{4,\lambda}|$  в области  $\rho_1 \approx \rho_2$ . Сравнение рельефов, полученных на двух длинах волн и только на одной длине волны, показывает, что рельеф  $|\gamma_{4,\lambda}|$  обладает большей крутизной ската. С увеличением  $\beta_{0,\lambda}$  наблюдается некоторое сближение сплошных и штриховых изолиний в области  $\rho_2 > \rho_1$ , в то время как в области  $\rho_1 > \rho_2$  сплошные и штриховые изолинии существенно расходятся для любых  $\beta_{0,\lambda}$ .

В заключение автор выражает благодарность А. С. Гурвичу за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, Докл. АН СССР, 124, № 3, 567 (1959).
2. В. А. Зверев, Изв. вузов — Радиофизика, 3, № 4, 723 (1960).
3. Ю. А. Рыжов, Э. П. Лаптева, Изв. вузов — Радиофизика, 3, № 6, 977 (1960).
4. С. М. Рытов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 645 (1971).
5. И. М. Фукс, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1665 (1974).
6. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 5, 620 (1967).
7. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).
8. В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 3, 423 (1973).
9. R. L. Fante, Radio Sci., 12, № 2, 223 (1977).
10. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
11. В. И. Шишов, Астрон. ж., 50, 941 (1973).
12. А. С. Гурвич, В. Кан, Б. П. Потапов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 393 (1976).
13. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 398 (1978).
14. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Ф. Э. Мартвель, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1020 (1977).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
7 августа 1978 г.

FOUR-POINT COHERENCE FUNCTION OF FREQUENCY SPACED  
WAVES IN A TURBULENT MEDIUM

V. Kan

Measurements of four-point coherence function  $\Gamma_4$  have been carried out from two independent light sources with wavelengths  $\lambda_1 = 0.63 \mu$  and  $\lambda_2 = 0.44 \mu$ . Joint beams of two lasers propagate in a fluid layer with the developed convective turbulence. Measurements were made in the region of random focusings of the radiation intensity for the values of the longitudinal parameters  $\beta_0$  equal to 1.2, 1.9 and 2.7. Profiles and the relief isolines  $|\Gamma_4|$  are built. Comparison is given with the results of the similar measurements for one wave and with calculations made by formulas of smooth disturbance method.



УДК 538.56 : 519 25

## МЕТОД СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

*В. П. Аксенов, В. Л. Миронов*

Предлагается в качестве приближенного решения стохастического волнового уравнения, которое описывает распространение оптических волн в турбулентной среде, использовать смешанное спектральное разложение по элементарным сферическим и плоским волнам, при этом комплексная амплитуда плоской волны находится как решение укороченного уравнения, учитывающего только флуктуации фазы этой волны. Показывается, что предлагаемое в качестве эталонной функции приближенное решение равномерно аппроксимирует статистические моменты поля (до четвертого порядка включительно) при произвольных условиях распространения волн в турбулентной среде и дифракции на передающей апертуре.

Как было показано в [1], фазовое приближение метода Гюйгенса — Кирхгофа (ФПМГК), применяемое для расчета флуктуаций интенсивности оптических волн в случайно-неоднородной среде [2], равномерно близко к решению стохастического параксиального волнового уравнения во френелевой зоне коллимированного оптического пучка при слабых и сильных флуктуациях интенсивности. В случае сферической волны ошибка ФПМГК при расчете относительной дисперсии флуктуаций интенсивности неограниченно возрастает.

В настоящей работе предлагается использовать в качестве приближенного решения стохастического волнового уравнения интеграл Гюйгенса — Кирхгофа с последующим разложением элементарных сферических волн по плоским волнам. При этом комплексная амплитуда плоской волны в нулевом приближении находится как решение укороченного волнового уравнения, учитывающего только флуктуации фазы плоских волн.

Для случайных и средних статистических значений комплексной амплитуды поля и ее моментов произвольного порядка получены интегральные уравнения, в которых в качестве свободного члена выделено фазовое приближение метода спектрального разложения (ФПМСР). Показано, что среднее поле и функция взаимной когерентности второго порядка являются строгими решениями приближенных дифференциальных уравнений для этих величин [2-6]. Уравнение для функции когерентности четвертого порядка решается методом итераций, и находится поправка к ФПМСР. Показывается, что ФПМСР для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности оптического пучка дает результаты, равномерно близкие к решению уравнения для функции когерентности четвертого порядка как в области слабых, так и сильных флуктуаций интенсивности при произвольных условиях дифракции на передающей апертуре оптического пучка, включая режим сферической волны.

Распространение оптической волны в случайно-неоднородной среде будем описывать [2-6] в параксиальном приближении волнового уравнения

$$2ik \frac{\partial u(x', \rho')}{\partial x'} + \Delta' u(x', \rho') + k^2 \varepsilon_1(x', \rho') u(x', \rho') = 0, \quad (1)$$

где  $u(x', \rho')$  — комплексная амплитуда волны  $\psi(x', \rho') = u(x', \rho') \times \times e^{ikx'}$ , распространяющейся вдоль оси  $0x'$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\rho' = \{y', z'\}$  — вектор в плоскости, перпендикулярной направлению распространения,  $\Delta' = \partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2$  — поперечный лапласиан,  $\varepsilon_1(x', \rho')$  — поле флуктуаций диэлектрической проницаемости. В плоскости  $x' = x_0$  функция  $u(x', \rho')$  удовлетворяет граничному условию на передающей апертуре  $u(x_0, \rho) = u_0(\rho)$ .

Введем в рассмотрение систему плоских волн  $v(x, x'; \mathbf{x}, \rho')$ , каждая из которых удовлетворяет сопряженному к (1) уравнению

$$-2ik \frac{\partial v(x, x'; \mathbf{x}, \rho')}{\partial x'} + \Delta' v + k^2 \varepsilon_1 v = 0 \quad (2)$$

и граничному условию на правом конце ( $x > x'$ )

$$v(x, x; \mathbf{x}, \rho') = (2\pi)^{-2} \exp(-i\mathbf{x}\rho'). \quad (3)$$

Умножив уравнения (1) и (2) соответственно на функции  $v(x, x'; \mathbf{x}, \rho')$  и  $u(x', \rho')$ , вычитая результаты умножения и интегрируя по объему, заключенному между плоскостями  $x' = x_0$  и  $x' = x$ , получим

$$u(x, \rho) = \int d^2 \rho' u_0(\rho') G(x, x_0; \rho, \rho'). \quad (4)$$

В интегральном представлении (4) функция

$$G(x, x_0; \rho, \rho') = \int d^2 x \exp(i\mathbf{x}\rho) v(x, x_0; \mathbf{x}, \rho') \quad (5)$$

является сферической волной, распространяющейся из точки  $(x, \rho)$  в точку  $(x_0, \rho')$  и удовлетворяющей в соответствии с (5), (3), (2) уравнению (2) и граничному условию

$$G(x, x; \rho, \rho') = \delta(\rho - \rho'). \quad (6)$$

Таким образом, выражение (5) совпадает с интегралом Гюйгенса — Кирхгофа [1], в котором каждая элементарная сферическая волна разложена по системе плоских волн.

Будем искать решение для плоских волн в виде  $v(x, x'; \mathbf{x}, \rho') = v_0(x, x'; \mathbf{x}, \rho) v_1(x, x'; \mathbf{x}, \rho')$ , где

$$v_0(x, x'; \mathbf{x}, \rho) = (2\pi)^{-2} \exp \left[ -i\mathbf{x}\rho - i \frac{(x - x')}{2k} x^2 \right] \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (2) в однородной среде ( $\varepsilon_1(x', \rho') \equiv 0$ ) и граничному условию (3), а  $v_1$  удовлетворяет соответственно уравнению

$$-2ik \frac{\partial v_1(x, x'; \mathbf{x}, \rho')}{\partial x'} + 2 \nabla' \ln v_0 \nabla' v_1 + k^2 \varepsilon_1 v_1 = -\Delta' v_1 \quad (8)$$

и граничному условию  $v_1(x, x; \mathbf{x}, \rho') = 1$ . В качестве нулевого приближения к решению уравнения (1) выберем представление (4), в котором положим  $v = v^0 = v_0 v_1^0$ , где  $v_1^0$  удовлетворяет решению укороченного уравнения (8) с правой частью, равной нулю. Приближение

$$v_1^0(x, x'; \mathbf{x}, \rho') = \exp \left[ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x d\zeta \varepsilon_1 \left( \zeta, \frac{\zeta - x'}{k} \mathbf{x} + \rho' \right) \right] \quad (9)$$

соответствует учету фазовых флуктуаций для каждой элементарной плоской волны, рассчитанных в первом приближении геометрической оптики [7].

Разность между строгим и приближенным решениями  $\tilde{v} = v - v^0$  удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\begin{aligned} -2ik \frac{\partial \tilde{v}(x, x'; \kappa, \rho')}{\partial x'} + \Delta' \tilde{v} + k^2 \epsilon_1 \tilde{v} = \\ = -v_0(x, x'; \kappa, \rho') \Delta' v_1^0(x, x'; \kappa, \rho') \end{aligned} \quad (10)$$

и нулевому граничному условию  $\tilde{v}(x, x; \kappa, \rho') = 0$ . Введем функцию Грина  $G_1(x_0, x'; \rho, \rho')$ , которая удовлетворяет сопряженному к (10) уравнению

$$2ik \frac{\partial G_1(x_0, x'; \rho, \rho')}{\partial x'} + \Delta' G_1 + k^2 \epsilon_1 G_1 = 0 \quad (11)$$

и граничному условию  $G_1(x_0, x_0; \rho, \rho') = \delta(\rho - \rho')$  на левом конце ( $x_0 \leq x'$ ). Умножая уравнения (10) и (11) соответственно на  $G_1(x_0, x'; \rho, \rho')$  и  $\tilde{v}(x, x'; \kappa, \rho')$  и интегрируя по объему, заключенному между плоскостями  $x' = x_0$  и  $x' = x$ , получим

$$\begin{aligned} v(x, x_0; \kappa, \rho) = v^0(x, x_0; \kappa, \rho) + \frac{i}{2k} \int_{x_0}^x dx' \times \\ \times \int d^2 \rho' G_1(x_0, x'; \rho, \rho') v_0(x, x'; \kappa, \rho') \Delta' v_1^0(x, x'; \kappa, \rho'). \end{aligned} \quad (12)$$

Функции Грина  $G_1(x_0, x'; \rho, \rho')$  и  $G(x', x_0; \rho', \rho)$  удовлетворяют теореме взаимности

$$G_1(x_0, x'; \rho, \rho') = G(x', x_0; \rho', \rho). \quad (13)$$

Подставляя последовательно выражения (12), (5) в представление (4) и используя соотношение (13), получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} u(x, \rho) = u^0(x, \rho) + \frac{i}{2k} \int_{x_0}^x dx' \int d^2 \rho' u(x', \rho') \times \\ \times \int d^2 \kappa \exp(i \kappa \rho) v_0(x, x'; \kappa, \rho') \Delta' v_1^0(x, x'; \kappa, \rho'), \end{aligned} \quad (14)$$

в котором в качестве свободного члена выделено ФПМСР:

$$u^0(x, \rho) = \int d^2 \rho' u_0(\rho') \int d^2 \kappa \exp(i \kappa \rho) v^0(x, x_0; \kappa, \rho'). \quad (15)$$

Подобный метод построения интегрального уравнения для функции когерентности четвертого порядка в статистически однородной среде применялся в [8].

Так как исходное уравнение (1) является параболическим, поле  $u(x', \rho')$  под знаком интеграла в (14) зависит от неоднородностей, расположенных на отрезке  $x_0 \leq x'' \leq x'$ , в то время как функция  $v_1(x, x'; \kappa, \rho')$ , согласно (9), определяется неоднородностями, расположенными на отрезке  $x' \leq x'' \leq x$ . Полагая далее радиус корреляции неоднородностей поля  $\epsilon_1(x, \rho)$  много меньшим, чем длина трассы [3, 6], для среднего поля получим уравнение

$$\begin{aligned} \langle u(x, \rho) \rangle &= \langle u^0(x, \rho) \rangle + \frac{i}{2k} \int_{x_0}^x dx' \int d^2 \rho' \langle u(x', \rho') \rangle \times \\ &\times \int d^2 x \exp(i \mathbf{x} \rho) v_0(x, x'; \mathbf{x}, \rho') \Delta' \langle v_1^0(x, x'; \mathbf{x}, \rho') \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Будем считать интеграл вдоль трассы от поля  $\varepsilon_1(x, \rho)$  нормальной случайной величиной, а само поле  $\varepsilon_1(x, \rho)$  статистически локально-однородным, изотропным и удовлетворяющим условию дельта-коррелированности вдоль направления распространения волны [3, 6]:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(x', \rho') \varepsilon_1(x'', \rho'') \rangle &= 2\pi \delta(x' - x'') \times \\ &\times \int d^2 x \Phi_\varepsilon(x', \mathbf{x}) \exp(i \mathbf{x}(\rho' - \rho'')), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Phi_\varepsilon(x', \mathbf{x})$  — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости с изменяющейся вдоль трассы амплитудой. Тогда, используя выражения (9), (17), находим

$$\langle v_1^0(x, x'; \mathbf{x}, \rho') \rangle = \exp \left[ -\frac{\pi k^2}{4} \int_{x'}^x d\zeta \int d^2 q \Phi_\varepsilon(\zeta, q) \right]. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получаем, что среднее поле совпадает с фазовым приближением для этой величины:

$$\langle u(x, \rho) \rangle = \langle u^0(x, \rho) \rangle,$$

при этом функция  $\langle u^0(x, \rho) \rangle$  строго удовлетворяет приближенному дифференциальному уравнению для среднего поля, полученному в приближении локального метода малых возмущений или марковского случайного процесса [2-6].

Рассмотрим теперь фазовое приближение метода спектральных разложений для четных моментов поля произвольного порядка:

$$U_{2n}(x, \{\rho\}) = u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \dots u(x, \rho_{2n-1}) u^*(x, \rho_{2n}). \quad (19)$$

Используя (1), (19), приходим к уравнению

$$2ik \frac{\partial U_{2n}(x, \{\rho\})}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \Delta_j U_{2n} + k^2 \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \varepsilon_1(x, \rho_j) U_{2n} = 0 \quad (20)$$

и граничному условию

$$U_{2n}(x_0, \{\rho\}) = u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2) \dots u_0(\rho_{2n-1}) u_0^*(\rho_{2n}). \quad (21)$$

Действуя таким же способом, что и в случае комплексной амплитуды поля  $u(x, \rho)$ , для момента поля порядка  $2n$  будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} U_{2n}(x, \{\rho\}) &= U_{2n}^0(x, \{\rho\}) + \frac{i}{2k} \int_{x_0}^x dx' \int \prod_{j=1}^{2n} d^2 \rho'_j \times \\ &\times U_{2n}(x', \{\rho'\}) \int \prod_{j=1}^{2n} d^2 x_j \exp \left[ \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} i \mathbf{x}_j \rho_j \right] \times \\ &\times V_{2n,0}(x, x'; \{\mathbf{x}\}, \{\rho'\}) \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \Delta'_j V_{2n,1}^0(x, x'; \{\mathbf{x}\}, \{\rho'\}), \end{aligned} \quad (22)$$

$$U_{2n}^0(x, \{\rho\}) = \int \prod_{j=1}^{2n} d^2 \rho'_j U_{2n}(x_0, \{\rho'\}) \int \prod_{j=1}^{2n} d^2 x_j \times \quad (23)$$

$$\times \exp \left( \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} i x_j \rho_j \right) v_{2n,0}(x, x_0; \{x\}, \{\rho'\}) v_{2n,1}(x, x_0; \{x\}, \{\rho'\})$$

является ФПМСР для момента поля порядка  $2n$ , а функции  $V_{2n,0}(x, x'; \{x\}, \{\rho'\})$  и  $V_{2n,1}^0(x, x'; \{x\}, \{\rho'\})$  определяются соответственно выражениями (19), (7) и (19), (9). Уравнение для функции когерентности

$$\Gamma_{2n}(x, \{\rho\}) = \langle U_{2n}(x, \{\rho\}) \rangle$$

совпадает с уравнением (22), в котором величины  $U_{2n}$ ,  $U_{2n}^0$ ,  $V_{2n,1}^0$  следует заменить их статистическими средними значениями.

Используя те же предположения относительно свойств случайного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1(x, \rho)$ , для функции  $\langle V_{2n,1} \rangle$  будем иметь

$$\langle V_{2n,1}(x, x'; \{x\}, \{\rho\}) \rangle = \quad (24)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2n-1} \sum_{\nu=2}^{2n} (-1)^{\nu+\mu} D_S(x, x'; x_\mu - x_\nu, \rho_\mu - \rho_\nu) \right\},$$

где

$$D_S(x, x'; x, \rho) = \pi k^2 \int_{x'}^x d\zeta \int d^2 q \Phi_\epsilon(\zeta, q) \left\{ 1 - \exp \left[ iq \left( \frac{\zeta - x'}{k} x + \rho \right) \right] \right\} \quad (25)$$

является структурной функцией флуктуаций фазы двух плоских волн, поперечные волновые векторы которых различаются на  $x$ , при этом точки наблюдения разнесены на вектор  $\rho$ .

Подставляя выражение (24) в уравнение (22), находим, что функция когерентности второго порядка совпадает с ФПМСР:

$$\Gamma_2(x, \{\rho\}) = \langle U_2^0(x, \{\rho\}) \rangle,$$

при этом функция  $\langle U_2^0(x, \{\rho\}) \rangle$  строго удовлетворяет уравнению, полученному в приближении локального метода малых возмущений или марковского случайного процесса [2-6].

Обратимся теперь к уравнению для функции когерентности четвертого порядка, которая описывает флуктуации интенсивности поля. В отличие от интегральных уравнений для среднего поля и функции когерентности второго порядка уравнение вида (22) для функции когерентности четвертого порядка

$$\Gamma_4(x, \{\rho\}) = \langle U_4(x, \{\rho\}) \rangle$$

даже в случае локально-однородного и изотропного поля  $\epsilon_1(x, \rho)$  имеет не равное нулю ядро. Поправки в ФПМСР можно найти, построив ряд Феймана

$$\Gamma_4 = \Gamma_4^0 + \sum_{j=1} \Gamma_{4,j}, \quad (26)$$

где

$$\Gamma_{4,j}(x, \{\rho\}) = \frac{i}{2k} \int_{x_0}^x dx' \int \prod_{j=1}^4 d^2 \rho'_j \Gamma_{4,j-1}(x, \{\rho'\}) F_4(x, x'; \{\rho\}, \{\rho'\}); \quad (27)$$

$$F_4(x, x'; \{\rho\}, \{\rho'\}) = \int \prod_{j=1}^4 d^2 x_j \exp \left\{ \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} i x_j \rho_j \right\} \times \quad (28)$$

$$\times v_{4,0}(x, x'; \{x\}, \{\rho'\}) \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \Delta'_j \langle v_{4,1}^0(x, x'; \{x\}, \{\rho'\}) \rangle,$$

$$\Gamma_{4,0}(x, \{\rho\}) = \Gamma_4^0(x, \{\rho\}).$$

Мы проведем оценку первых двух членов ряда (26) для совмещенных точек наблюдения, что дает возможность получить величину относительной дисперсии

$$\sigma_j^2 = \Gamma_4(x, 0) / \Gamma_2^2(x, 0) - 1. \quad (29)$$

Распределение поля в исходной плоскости  $x' = x_0$  зададим в виде одно-модового гауссова пучка

$$u_0(\rho) = \exp \left( -\frac{1}{2a^2} \rho^2 - \frac{ik}{2F} \rho^2 \right), \quad (30)$$

где  $2a$  — эффективный диаметр передающей апертуры,  $F$  — радиус кривизны фазового фронта в центре передающей апертуры. Подставляя выражения (30), (21), (24), (7) в равенство (23) и проводя некоторые вычисления, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_4^0(x, \{\rho'\}) &= (2\pi)^{-8} \int \prod_{j=1}^4 d^2 x_j \int \prod_{j=1}^4 d^2 \rho_j \times \\ &\times \exp \left\{ \sum_{j=1}^4 \left[ -\frac{\rho_j^2}{2a^2} + (-1)^j \left[ \frac{ik}{2F} \rho_j^2 + i \frac{x - x_0}{2k} x_j^2 - i x_j (\rho'_j - \rho_j) \right] \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=2}^4 (-1)^{\nu+\mu} D_S(x, x_0; x_\mu - x_\nu; \rho_\mu - \rho_\nu) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Дальнейшие вычисления проведем для спектра Колмогорова—Обухова:

$$\Phi_\varepsilon(x) = 0,033 C_\varepsilon^2 x^{-11/3}, \quad (32)$$

где  $C_\varepsilon^2$  — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, и будем считать, что плоскость излучающей апертуры проходит через начало координат ( $x_0 = 0$ ).

Из выражений (25), (31), (32) следует, что первая экспонента в формуле (31) вносит существенный вклад в значение интеграла в области  $|x_j| \leq \sqrt{\frac{k}{x}}$ ,  $|\rho_j| \leq \min \left( a, \sqrt{\frac{x}{k}} \right)$ , в то время как вторая экспонента отлична от нуля, когда выполняются неравенства

$$|\rho_1 - \rho_2|, |\rho_3 - \rho_4| \ll \rho_0, \quad |x_1 - x_2|, |x_3 - x_4| \ll \frac{k}{x} \rho_0 \quad (33)$$

или

$$|\rho_1 - \rho_4|, |\rho_2 - \rho_3| \ll \rho_0, \quad |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3| \ll \frac{k}{x} \rho_0, \quad (34)$$

а также когда (33), (34) выполняются одновременно. Здесь  $\sqrt{x/k}$  — размер первой зоны Френеля,  $\rho_0 = (0,36 C_\varepsilon^2 k^2 x)^{-3/5}$  — радиус когерент-

ности плоской волны [2-4]. Тогда при условии  $\rho_0/\sqrt{x/k} \gg 1$ , раскладывая вторую экспоненту в (31) в степенной ряд и вычисляя возникающие интегралы, будем иметь

$$\Gamma_4^0(x, 0) = \frac{\Omega^4}{g^4} \left\{ 1 - \left[ \frac{4^{5/6} \Gamma(11/6)}{\pi} \left( \frac{\Omega}{g^2} \right)^{5/6} + 0,145 \pi^2 \Gamma(1/6) \times \right. \right. \\ \times \int_0^1 d\zeta \left[ \mu^{5/6} - [\mu^2 + \psi^2]^{5/12} \cos \left( \frac{5}{6} \arctg \left( \frac{\psi}{\mu} \right) \right) \right] \left. \right] D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) + \quad (35) \\ \left. + O \left( D_S^2 \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \right) \right\}, \quad D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \ll 1,$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ \Omega^{-1} \left( 1 + \Omega^2 \zeta^{-2} \left( 1 - \zeta \frac{x}{F} \right)^2 \right) \zeta^2 + \Omega g^{-2} (1 - \zeta)^2 - \right. \\ \left. - \Omega^{-1} g^{-2} \left( \Omega^2 \left( 1 - \frac{x}{F} \right) \left( 1 - \zeta \frac{x}{F} \right) - 1 \right)^2 \right], \\ \psi = g^{-2} \left[ \zeta - (1 - \zeta) \left( \Omega^2 \left( 1 - \frac{x}{F} \right) \left( -\zeta \frac{x}{F} \right) - 1 \right) \right],$$

$\Omega = \frac{ka^2}{x}$  — число Френеля апертуры излучателя,  $g^2 = 1 + \Omega^2 (1 - x/F)^2$ ,

$D_S(\sqrt{x/k}) = 0,76 \rho_0^{-3/5} (x/k)^{5/6}$  — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на размере первой зоны Френеля. При вычислении интеграла (31) в другом крайнем случае ( $\rho_0/\sqrt{x/k} \ll 1$ ) в соответствии с неравенствами (33), (34) представим вторую экспоненту в подынтегральной функции в виде

$$\exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=2}^4 \quad \mu < \nu \quad (-1)^{\nu+\mu} D_S(x, 0; \kappa_\mu - \kappa_\nu; \rho_\mu - \rho_\nu) \right] = \\ = \exp \left[ -\frac{1}{2} D_S(1, 2) - \frac{1}{2} D_S(3, 4) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n!} [D_S(1, 3) + D_S(2, 4) - \\ - D_S(2, 3) - D_S(1, 4)]^n + \exp \left[ -\frac{1}{2} D_S(1, 4) - \frac{1}{2} D_S(2, 3) \right] \times \quad (36) \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n!} [D_S(1, 3) + D_S(2, 4) - D_S(1, 2) - D_S(3, 4)]^n - \\ - \exp \left[ -\frac{1}{2} (D_S(1, 2) + D_S(3, 4) + D_S(1, 4) + D_S(2, 3)) \right] \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n!} [D_S(1, 3) + D_S(2, 4)]^n.$$

В выражении (36) введено обозначение

$$D_S(\mu, \nu) = D_S(x, 0; \kappa_\mu - \kappa_\nu; \rho_\mu - \rho_\nu).$$

Проводя вычисления интеграла (31) с использованием разложения (36), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Gamma_4^0(x, 0) = & \frac{1}{4} (2\pi)^{-2} \Omega^2 \left\{ \int d^2 t_1 d^2 t_2 \exp \left\{ -\frac{g^2}{4\Omega} (t_1^2 + t_2^2) - \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) (t_1^{5/3} + t_2^{5/3}) \left. \right\} + \frac{1}{2} \pi k^3 x \left( \frac{x}{k} \right) 0,033 C_S^2 \int_0^1 d\eta \int d^2 \kappa \kappa^{-11/3} \times \\
& \times \int d^2 t_1 d^2 t_2 \left[ \kappa \left( (1-\eta) t_2 + \sqrt{\frac{x}{k}} \eta^2 \kappa \right) \right]^2 \exp \left\{ -\frac{g^2}{4\Omega} (t_1^2 + t_2^2) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{x}{k} \Omega (1-\eta)^2 \kappa^2 - \frac{1}{2} \Omega \left( 1 - \frac{x}{F} \right) \sqrt{\frac{x}{k}} (t_1 + t_2) \kappa \left. \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{4}{3} D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \left\{ \int_0^1 d\zeta \left( \left| (1-\zeta) t_1 + \sqrt{\frac{x}{k}} \eta \zeta \kappa \right|^{5/3} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left| (1-\zeta) t_2 + \sqrt{\frac{x}{k}} \eta \zeta \kappa \right|^{5/3} \right) \right\} \right\} \exp \left\{ \frac{i}{2} \sqrt{\frac{x}{k}} (1-\eta) (t_1 - t_2) \kappa \right\} + \\
& + O \left\{ D_S^{-4/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) g^4 \left[ g^2 + \Omega D_S^{6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \right]^{-2} \right\}, \\
& D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \gg 1.
\end{aligned} \tag{37}$$

Этот метод оценки интеграла аналогичен использовавшемуся в [4] и применялся ранее в работе [1] для вычисления многократных интегралов вида (31). Подобные способы использовались также в работах [9, 10] для асимптотических оценок многократных и континуальных интегралов. Для оценки  $\Gamma_{4,1}(x, 0)$  — первого члена итерационного ряда (26) в рассмотренных выше крайних случаях — можно применить разложение, использовавшиеся при получении выражений (35), (37).

Подставляя в равенство (29) результаты вычисления  $\Gamma_4^0(x, 0)$  и  $\Gamma_{4,1}(x, 0)$  и величины  $\Gamma_2^0(x, 0)$ , получим выражение для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности, которое мы рассмотрим в двух предельных случаях слабых и сильных флуктуаций. Выражение для  $\Gamma_2^0(x, 0)$ , найденное с помощью соотношений (23), (24), (7), записывается в форме

$$\Gamma_2^0(x, 0) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-1} \Omega \int d^2 t \exp \left\{ -\frac{g^2}{4\Omega} t^2 - \frac{1}{2} D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) t^{5/3} \right\}. \tag{38}$$

Далее рассмотрим коллимированный ( $x/F = 0$ ) пучок.

Из формулы (38) следуют приближенные равенства:

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^0(x, 0) = 1, \quad \Omega \gg D_S^{6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right); \quad \Gamma_2^0(x, 0) = \Omega^2, \quad \Omega \ll D_S^{-6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right), \\
D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \gg 1;
\end{aligned}$$

$$\Gamma_2^0(x, 0) = 2^{6/5} \frac{3}{10} \Gamma(6/5) \Omega D_S^{-6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) + O \left( D_S^{-12/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \right),$$



$$D_S^{-6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \ll \Omega \ll D_S^{6/5} \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right), \quad D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right) \gg 1.$$

При слабых флуктуациях интенсивности в зависимости от размера передающей апертуры имеем

$$\sigma_{i,0}^2 = \beta_0^2 + O(\beta_0^4), \quad \sigma_{i,1}^2 = O(\beta_0^4), \quad \beta_0^2 \ll 1, \quad \Omega^{-1} = 0, \quad (39)$$

$$\beta_0^2 = 1,12 D_S \left( \sqrt{\frac{x}{k}} \right);$$

$$\sigma_{i,0}^2 = 0,7\beta_0^2 + O(\beta_0^4), \quad \sigma_{i,1}^2 = -0,3\beta_0^2 + O(\beta_0^4), \quad \beta_0^2 \ll 1, \quad \Omega = 0. \quad (40)$$

Здесь обозначения  $\sigma_{i,0}^2$  и  $\sigma_{i,1}^2$  соответствуют вкладу в дисперсию выражений  $\Gamma_4^0(x, 0)$  и  $\Gamma_{4,1}(x, 0)$ . Таким образом, как следует из (39), ФПМСР дает в случае слабых флуктуаций интенсивности плоской волны ( $\Omega^{-1} = 0$ ) точное выражение для относительной дисперсии в слагаемом порядка  $\beta_0^2$ , а для сферической волны дисперсия получается несколько завышенной. Величина дисперсии слабых флуктуаций интенсивности при произвольном размере передающей апертуры пучка в условиях фокусировки может быть найдена в результате численного интегрирования выражения (35).

При сильных флуктуациях интенсивности ( $\beta_0^2 \gg 1$ ), проводя соответствующие вычисления, будем иметь

$$\sigma_{i,0}^2 = 1 + 0,78\beta^{-4/5} + O(\beta_0^{-8/5}), \quad (41)$$

$$\sigma_{i,1}^2 = 0,08\beta^{-4/5} + O(\beta_0^{-8/5}), \quad \Omega \gg \beta_0^{12/5};$$

$$\sigma_{i,0}^2 = 1 + 0,5\beta_0^{-4/5} + O(\beta_0^{-8/5}), \quad (42)$$

$$\sigma_{i,1}^2 = 2,3\beta_0^{-4/5} + O(\beta_0^{-8/5}), \quad \Omega \ll \beta_0^{-12/5}.$$

Из выражений (39)–(42) следует, что ФПМСР дает равномерное приближение относительной дисперсии флуктуаций интенсивности коллимированного оптического пучка в области слабых и сильных флуктуаций интенсивности, в режимах плоской и сферической волн. Наименьшая количественная ошибка ФПМСР соответствует случаю плоской волны.

Когда выполняются условия

$$\beta_0^2 \gg 1, \quad \beta_0^{-12/5} \ll \Omega \ll \beta_0^{12/5}, \quad (43)$$

асимптотическое вычисление многократного интеграла в выражении (37) усложняется по сравнению с рассмотренными выше случаями плоской и сферической волн.

Будем вычислять интеграл (37) по переменным  $t_1$  и  $t_2$  методом Лапласа [11]. Вторая экспонента под знаком интеграла второго слагаемого в (37) имеет при условии (43) наименьший масштаб убывания по этим переменным. Точка максимума соответствует значениям  $t_1 = t_2 = -\alpha \sqrt{\frac{x}{k}} \eta x$ , где  $\alpha$  определяется из уравнения  $\alpha^{8/3} + (8\alpha^{5/3} - 3)/5 = 0$ , имеющего решение  $\alpha = 0,475$ . Гессиан показателя второй экспоненты в (37) обращается в бесконечность при  $x = 0$ ,  $\eta = 0$ , и, следовательно, применение метода Лапласа в окрестности этой точки невозможно. В этом случае интеграл (37) по переменным  $t_1$ ,  $t_2$  удастся приближен-

но вычислить, полагая в показателе экспоненты  $\kappa = 0$ . Последующее интегрирование по переменной  $\kappa$  будем проводить, используя представления, полученные разными способами соответственно при  $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$  и  $\kappa_0 \leq \kappa \leq \infty$ , и определяя точку  $\kappa_0$  из пересечения асимптотик, получаемых методом Лапласа и интегрированием при  $\kappa = 0$ .

В итоге будем иметь следующее выражение для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности:

$$\begin{aligned}\sigma_{I,0}^2 &= 1 + 4,8\beta_0^{-4/5} + O(\beta_0^{-8/5}), \\ \sigma_{I,1}^2 &= O(\beta_0^{-4/5}), \\ \beta_0^2 &\gg 1, \quad \beta_0^{-12/5} \ll \Omega \ll \beta_0^{12/5}.\end{aligned}\tag{44}$$

Заметим, что формулы (41), (42), (44) справедливы при взаимно исключающих условиях.

Выражение (44) дает в случае пространственно-ограниченного коллимированного пучка при фиксированном значении  $\beta_0^2$  большее значение дисперсии, чем в случае плоской (41) и сферической (42) волн даже при отбрасывании первой добавки к ФПМСР. Этот физический результат ранее отмечался в работе [12] и вполне согласуется с опытными данными [2]. Даваемое формулой (44) значение превышает величины, рассчитанные по формуле работы [12], и находится ближе к опытным данным. Поправку к ФПМСР для дисперсии пространственно-ограниченного коллимированного оптического пучка удастся оценить только по порядку величины.

Из формул (39), (40), (41)—(44) следует, что ФПМСР позволяет получить для относительной дисперсии флуктуаций коллимированного оптического пучка величину, близкую к решению уравнения для функции когерентности четвертого порядка при произвольных условиях распространения в турбулентной среде и дифракции на передающей апертуре.

Таким образом, полученные в настоящей работе результаты для среднего поля и функций когерентности второго и четвертого порядка показывают, что предлагаемое в качестве эталонной функции приближенное решение стохастического уравнения (ФПМСР) равномерно аппроксимирует статистические моменты поля (до четвертого порядка включительно) при произвольных условиях распространения волны в турбулентной среде. При этом точность аппроксимации, в отличие от [1], слабо зависит от условий дифракции на передающей апертуре.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Vanakh and V. L. Mironov, Opt. Lett., 1, № 5, 172 (1977).
2. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в турбулентной атмосфере, под ред. В. И. Татарского, изд. Наука, М., 1976.
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
4. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, № 3, 413 (1974).
5. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
6. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. И. Г. Якушкин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
9. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 23, вып. 2(8), 481 (1977).

10. И. Г. Я к у ш к и н, Сильные флуктуации интенсивности поля в турбулентной атмосфере, в книге «Теория дифракции и распространения волн», VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, т. 1, М., 1977, стр. 326.
11. М. Ф. Ф е д о р ю к, Метод перевала, изд. Наука, М., 1977.
12. И. Г. Я к у ш к и н, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 384 (1976).

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
4 мая 1978 г.

#### METHOD OF SPECTRAL EXPANSIONS IN PROBLEMS OF OPTICAL WAVE PROPAGATION IN A TURBULENT MEDIUM

*V. P. Aksenov, V. L. Mironov*

It is suggested to use a mixed spectral expansion of elementary spherical and plane waves as the approximate solution of a stochastic wave equation which describes the propagation of optical waves in a turbulent medium. Here the complex amplitude of a plane wave is found as a solution of the shortened equation taking into account the phase fluctuations of this wave. It is shown that the approximate solution suggested as a reference function uniformly approximates the statistical moments of the field (up to the fourth order inclusive) with the arbitrary conditions of the wave propagation in a turbulent medium and the diffraction of the transmitting aperture.

---

УДК 621.372.8.09

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ДВИЖУЩЕЙСЯ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян

Получены выражения для плотности энергии электромагнитных  $E$ - и  $H$ -волн, распространяющихся в волноводе, заполненном диспергирующей средой. Выведены соотношения между групповой скоростью, потоком вектора Пойнтинга и плотностью энергии волны. Рассмотрен частный случай движущейся в волноводе холодной плазмы.

Определение вектора Пойнтинга, соответствующего тензору энергии — импульсу Минковского, в инвариантной форме.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (1)$$

во многих случаях позволяет не вникать в подробности, связанные с определением плотности энергии в движущихся средах. Вместе с тем, иногда эту величину знать необходимо, например, при исследовании вопроса о совпадении направлений вектора Пойнтинга с групповой скоростью волны. Существует ряд работ [1-3], которые позволяют найти плотность энергии в общем виде — на основании вывода тензора энергии — импульса. Однако применение громоздкого аппарата релятивистских уравнений зачастую оказывается слишком сложным по сравнению с непосредственным определением этой величины исходя из ее физического смысла (см. по этому поводу в [4]). В известной нам литературе вообще не рассматривался вопрос определения плотности энергии электромагнитной волны в волноводах с движущимися средами, где это существенно связано с разделением волн на  $E$ - и  $H$ -типы. В настоящей работе делается попытка определить плотность энергии монохроматической электромагнитной волны в диспергирующей среде как термодинамическую величину, исходя из того физического факта, что наличие дисперсии всегда обусловлено существованием, пусть малой, диссипации энергии в среде [5].

Рассмотрим диспергирующую среду, обладающую в системе ее покоя  $K'$  диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon(\omega')$  и  $\mu(\omega')$ . В системе наблюдения  $K$ , относительно которой среда движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , плотность потока энергии определяется формулой (1). Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца позволяет записать уравнение, справедливое в любой инерциальной системе отсчета:

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) описывает изменение энергии, сосредоточенной в единице объема за единицу времени —  $\frac{\partial W}{\partial t}$ . Для вычисления

производных  $\frac{\partial D}{\partial t}$  и  $\frac{\partial B}{\partial t}$  перепишем материальные уравнения Минковского [5] в более удобном для нас виде:

$$D = (1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2)^{-1} \{ \hat{\epsilon} (1 - \beta^2) E - \hat{\epsilon} \hat{\mu} (\beta E) + (\hat{\epsilon} \hat{\mu} - 1) [\beta H] \}, \quad (3)$$

$$B = (1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2)^{-1} \{ \hat{\mu} (1 - \beta^2) H - \hat{\mu} \hat{\epsilon} (\beta H) + (\hat{\epsilon} \hat{\mu} - 1) [E \beta] \}.$$

Здесь  $\beta c = v$  — скорость движения системы покоя среды  $K'$  относительно системы наблюдения  $K$ ,  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  — операторы диэлектрической и магнитной проницаемостей. Собственные значения операторов  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  суть  $\epsilon(\omega')$  и  $\mu(\omega')$ , где  $\omega' = \frac{\omega - k v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ,  $\omega'$  — частота волны в системе покоя среды  $K'$ ,  $\omega$  и  $k$  — частота и волновой вектор в системе  $K$ .

Введем малое отклонение волны от строгой монохроматичности. Такое отклонение может быть обусловлено существованием малых мнимых частей у диэлектрической и магнитной проницаемостей. Допустим, что эти мнимые части настолько малы, что можно пренебречь поглощением в среде (область прозрачности среды), и запишем электрическое и магнитное поле волны в виде [5]

$$E(t) = E_0(t) e^{i\omega t}, \quad H(t) = H_0(t) e^{i\omega t}, \quad (4)$$

где  $E_0(t)$  и  $H_0(t)$  — медленно меняющиеся функции времени (по сравнению с  $e^{i\omega t}$ ). Из (3) видно, что вычисление производных  $\frac{\partial D}{\partial t}$  и  $\frac{\partial B}{\partial t}$  сводится к вычислению собственных значений операторов

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon})^k (\hat{\mu})^l (1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2)^{-1} \quad (k, l = 0, 1, 2), \quad (5)$$

действующих на векторы электрического и магнитного полей (4).

Для обратного оператора воспользуемся его символическим представлением в виде экспоненциального интеграла по «пятому» параметру, предложенным Фоком (см. [6]):

$$(1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2)^{-1} = -i \int_0^{\infty} d\nu \exp [i\nu (1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2) - \alpha\nu],$$

где  $\alpha$  — малый параметр, обеспечивающий сходимость интеграла. Можно показать, что действие операторов (5) на электрическое поле  $E$  сводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\hat{\epsilon})^k (\hat{\mu})^l \left[ -i \int_0^{\infty} d\nu \exp [i\nu (1 - \hat{\epsilon} \hat{\mu} \beta^2) - \alpha\nu] \right] \right\} E = \\ & = i\omega \frac{[\epsilon(\omega')]^k [\mu(\omega')]^l}{1 - \epsilon(\omega') \mu(\omega') \beta^2} E + \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega \frac{[\epsilon(\omega')]^k [\mu(\omega')]^l}{1 - \epsilon(\omega') \mu(\omega') \beta^2} \right] \frac{\partial E_0}{\partial t} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Аналогично действие этих операторов на магнитное поле  $H$ . Вычислив таким образом производные по времени  $\frac{\partial D}{\partial t}$  и  $\frac{\partial B}{\partial t}$ , подставим их в (2). После несложных преобразований получим

$$-\operatorname{div} \bar{S} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial t},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W} = \frac{1}{16\pi} \left\{ (1 - \beta^2) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega \frac{\epsilon}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right) EE^* + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega \frac{\mu}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right) HH^* \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega \frac{\epsilon(\epsilon\mu - 1)}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right] (\beta E)(\beta E^*) - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega \frac{\mu(\epsilon\mu - 1)}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right] \times \right. \\ \left. \times (\beta H)(\beta H^*) - 2\beta \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega \frac{\epsilon\mu - 1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right] [EH^*] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

$\bar{W}$  — усредненная по времени плотность энергии электромагнитной волны в среде, движущейся относительно наблюдателя со скоростью  $v = \beta c$ . При  $\beta = 0$  полученная формула совпадает с формулой для энергии в диспергирующей стационарной среде [5]. Заметим, что в случае среды, описываемой в системе покоя тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно  $\epsilon_{ik}(\omega') = \epsilon_{ki}^*(\omega')$  и  $\mu_{ik}(\omega') = \mu_{ki}^*(\omega')$ , вывод формулы (6) производится совершенно аналогично.

Направив скорость движения системы  $K'$  относительно  $K$  по оси  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{W} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial \omega} E_z E_z^* + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega} H_z H_z^* - 2\beta \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega \frac{\epsilon\mu - 1}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right) [EH^*]_z + \right. \\ \left. + (1 - \beta^2) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\epsilon\omega}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right) (E_x E_x^* + E_y E_y^*) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\mu\omega}{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right) (H_x H_x^* + H_y H_y^*) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) легко получить формулу для плотности энергии волноводных  $E$ - и  $H$ -волн.

Пусть в регулярном волноводе с образующими, параллельными оси  $z$ , распространяется  $E$ - или  $H$ -волна с продольными компонентами

$$E_{zn} = E_n \Psi_n(x, y) \exp[i(\omega t - \gamma_n z)]; \quad (8)$$

$$H_{zn} = H_n \hat{\Psi}_n(x, y) \exp[i(\omega t - \hat{\gamma}_n z)], \quad (9)$$

где  $\Psi_n(x, y)$ ,  $\hat{\Psi}_n(x, y)$  — собственные функции первой и второй краевых задач для поперечного сечения волновода с собственными значениями  $x_n$  и  $\hat{x}_n$ . Для вычисления энергии  $E$ -волны подставим в (7)  $H_z = 0$ , выразим поперечные компоненты полей через (8) [7] и проинтегрируем по объему волновода единичной длины:

$$\begin{aligned} \bar{W}_n^E = \frac{\epsilon\omega}{8\pi c^2 x_n^2 (1 - \beta^2)} \left\{ (1 - \beta^2)\omega + (\omega - \gamma_n v) \left[ \frac{\omega - \gamma_n v}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial \omega} + \epsilon\mu - 1 \right] \right\} |E_n|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\bar{W}_n^E$  — усредненная по времени энергия  $n$ -й моды  $E$ -волны, заключенная в объеме волновода единичной длины. Аргументом  $\epsilon$  и  $\mu$  в (10) является

$$\omega' = \frac{\omega - \gamma_n v}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11)$$

Проделав аналогичные вычисления для  $H$ -волны, получим

$$\overline{W}_n^H = \frac{\mu \omega}{8\pi c^2 \kappa_n^2 (1 - \beta^2)} \left\{ (1 - \beta^2)\omega + (\omega - \hat{\gamma}_n v) \left[ \frac{\omega - \hat{\gamma}_n v}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega} + \epsilon\mu - 1 \right] \right\} |H_n|^2. \quad (12)$$

Групповую скорость  $n$ -й моды  $E$ - или  $H$ -волны найдем из дисперсионного уравнения для движущейся в волноводе среды [7]:

$$v_{гр\ n} = \frac{\partial\omega}{\partial\gamma_n} = c \frac{(1 - \beta^2)c \hat{\gamma}_n + \beta(\epsilon\mu - 1)(\omega - \hat{\gamma}_n v)}{(1 - \beta^2)\omega + (\omega - \hat{\gamma}_n v) \left[ \frac{\omega - \hat{\gamma}_n v}{2} \frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega} + \epsilon\mu - 1 \right]}. \quad (13)$$

Усредненный по времени поток энергии  $n$ -й моды  $E$ - и  $H$ -волн через поперечное сечение волновода, определенный по формуле (1), имеет следующий вид:

$$\overline{S}_{zn}^E = \frac{\epsilon\omega}{8\pi c \kappa_n^2 (1 - \beta^2)} [(1 - \beta^2)c \hat{\gamma}_n + \beta(\epsilon\mu - 1)(\omega - \hat{\gamma}_n v)] |E_n|^2; \quad (14)$$

$$\overline{S}_{zn}^H = \frac{\mu\omega}{8\pi c \kappa_n^2 (1 - \beta^2)} [(1 - \beta^2)c \hat{\gamma}_n + \beta(\epsilon\mu - 1)(\omega - \hat{\gamma}_n v)] |H_n|^2. \quad (15)$$

Сравнивая формулы (10), (12) и (14), (15) с (13), приходим к заключению, что для любой моды обоих типов волн в волноводе выполняется соотношение

$$\overline{S}_{zn} = \overline{W}_n v_{гр\ n}.$$

В формулы (10), (12), (13) входит производная  $\frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega}$ . Поскольку закон изменения  $\epsilon(\omega')$  и  $\mu(\omega')$  задан в системе  $K'$ , целесообразно выразить эту производную через  $\frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega'}$ . С помощью (11), дисперсионного уравнения в движущейся среде, а также учитывая, что пространственная дисперсия в системе покоя среды отсутствует  $\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\gamma'} = 0, \frac{\partial\mu}{\partial\gamma'} = 0\right)$ , можно получить следующую связь:

$$\frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega} = \frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega'} \frac{c \left( \hat{\gamma}_n - \frac{\beta}{c} \omega \right)}{\sqrt{1 - \beta^2} c \hat{\gamma}_n + \beta \frac{\omega - \hat{\gamma}_n v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\omega - \hat{\gamma}_n v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial(\epsilon\mu)}{\partial\omega'} + \epsilon\mu - 1 \right]}. \quad (16)$$

В качестве примера диспергирующей среды рассмотрим движущуюся холодную плазму. В системе покоя  $K'$  плазмы  $\epsilon = 1 - (\omega_p^2/\omega'^2)$ , где  $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m$ ;  $N$  — концентрация электронов и ионов,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона ( $\mu = 1$ ). Для волны  $n$ -й моды (8), распространяющейся в движущейся плазме, поток энергии через поперечное сечение волновода найдем из (14):

$$\bar{S}_{zn}^E = \frac{\epsilon \omega}{8\pi x_n^2} \frac{\omega \left( \gamma_n - \frac{\beta}{c} \omega \right) + v x_n^2}{\omega - \gamma_n v} |E_n|^2,$$

где

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta^2)}{(\omega - \gamma_n v)^2}.$$

Определив  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}$  из (16):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega'} \frac{\gamma_n - \frac{\beta}{c} \omega}{\gamma_n}, \quad (17)$$

где

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega'} = 2\omega_p^2 \left( \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\omega - \gamma_n v} \right)^3,$$

и подставив (17) в формулу для энергии (10), получим

$$\bar{W}_n^E = \frac{\epsilon \omega^2}{8\pi c^2 x_n^2} \frac{\omega \left( \gamma_n - \frac{\beta}{c} \omega \right) + v x_n^2}{\gamma_n (\omega - \gamma_n v)} |E_n|^2.$$

Групповую скорость волны можно найти либо из формулы (13), либо непосредственно продифференцировав дисперсионное уравнение для движущейся плазмы:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_n^2 - x_n^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}.$$

Откуда

$$v_{grn} = c^2 \frac{\gamma_n}{\omega}.$$

Авторы признательны С. Н. Столярову за обсуждение этой работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Furutsu, Phys. Rev., 185, № 1, 257 (1969).
2. T. Musha and M. A gu, J. Phys. Soc. Japan, 26, № 2, 541 (1969).
3. В. Г. Гавриленко, Диссертация, ГГУ, Горький, 1973.
4. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Изв. вузов — Радиофизика, 5, № 1, 31 (1962).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, Москва, 1957.
6. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, Москва, 1957.
7. Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 10, 1517 (1978).

Поступила в редакцию  
20 февраля 1978 г.,  
после доработки  
16 октября 1978 г.

#### ELECTROMAGNETIC WAVE ENERGY IN THE WAVEGUIDE WITH THE MOVING DISPERSIVE MEDIUM

E. D. Gazazian, E. M. Laziev, A. D. Ter-Pogossian

The expressions for the energy density of the  $E$ - and  $H$ -electromagnetic waves in the waveguide with the moving dispersive medium are received. Some relationships between group velocity, Poynting vector power and energy density are proved. The particular case of the «cold» plasma is considered.



УДК 538.574 6

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА НЕЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов*

На основе численного решения интегральных уравнений проведен анализ диаграмм рассеяния идеально проводящей незамкнутой круговой цилиндрической поверхности, возбуждаемой  $E$ - или  $H$ -поляризованными волнами (двумерные задачи дифракции). Проведено сравнение результатов расчета с соответствующими зависимостями для кругового цилиндра и полосы.

В работе [1] был предложен метод решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих незамкнутых цилиндрических поверхностях произвольной формы. Метод основан на сведении задачи к строгим интегральным уравнениям Фредгольма первого рода для плотности токов, наведенных на рассматриваемой поверхности, и последующем численном решении полученных интегральных уравнений методом саморегуляризации [2].

В настоящей работе методом, развитым в [1], решена двумерная задача дифракции гармонических во времени (зависимость  $e^{i\omega t}$ ) электромагнитных волн на идеально проводящей незамкнутой круговой цилиндрической поверхности\*, поперечное сечение которой показано на рис. 1. Эта задача имеет большое практическое значение. Действительно, металлическая поверхность подобной конфигурации может быть использована в качестве рефлектора при линейном излучателе, в качестве экрана для защиты аппаратуры от внешних электромагнитных полей, в качестве устройства для уменьшения взаимного влияния слабонаправленных антенн и для других целей.

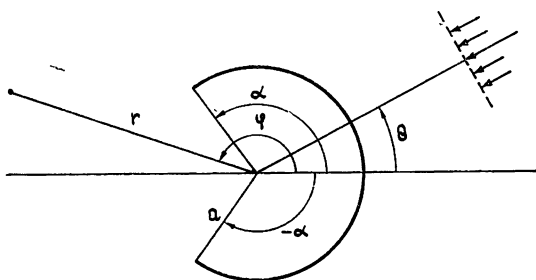


Рис. 1.

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , как показано на рис. 1. Будем считать, что первичное поле не зависит от переменной  $z$ , а среда, окружающая рассматриваемую поверхность, является однород-

\* Указанная задача рассматривалась также в работах [3-5].

ной изотропной средой без потерь, абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости которой равны  $\epsilon$  и  $\mu$  соответственно.

Общая задача дифракции двумерного электромагнитного поля на идеально проводящей незамкнутой круговой цилиндрической поверхности  $S$  ( $r = a$ ,  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $-\infty < z < \infty$ ) распадается на две более простые задачи, в одной из которых первичное поле имеет только составляющие  $E_z^0$ ,  $H_r^0$ ,  $H_\varphi^0$  ( $E$  — поляризованные поля), а во второй — только составляющие  $E_r^0$ ,  $E_\varphi^0$  и  $H_z^0$  ( $H$  — поляризованные поля). Каждую из поляризаций можно рассматривать независимо друг от друга.

В случае  $E$ -поляризованных полей на поверхности  $S$  наводятся электрические токи с плотностью  $\mathbf{j} = z_0 j_z(\varphi)$ , где  $z_0$  — координатный орт переменной  $z$ . При этом функция  $j_z(\varphi)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{\omega \mu a}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} j_z(\psi) H_0^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \right| \right) d\psi = E_z^0(a, \varphi),$$

$$-\alpha \leq \varphi \leq \alpha,$$
(1)

где  $\gamma = ka$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны. Уравнение (1) непосредственно следует из уравнения (3) работы [1], если в последнем положить  $\tau = \varphi$ ,  $t = \psi$ ,  $x(t) = a \cos \psi$  и  $y(t) = a \sin \psi$ .

В случае  $H$ -поляризованных полей на поверхности  $S$  наводятся поперечные электрические токи с плотностью  $\mathbf{j} = \varphi_0 j_\varphi(\varphi)$ , где  $\varphi_0$  — координатный орт переменной  $\varphi$ . Интегральное уравнение для этого случая было получено в [7]:

$$\frac{\omega \mu a}{4} \int_{-\alpha}^{\alpha} j_\varphi(\psi) K(\varphi, \psi) d\psi = F(\varphi) + C_1 \sin \gamma\varphi + C_2 \cos \gamma\varphi,$$

$$|\varphi| \leq \alpha,$$
(2)

где

$$K(\varphi, \psi) = H_0^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \right| \right) \cos(\varphi - \psi) + \int_{-\alpha}^{\varphi} G(\xi, \psi) \cos[\gamma(\xi - \varphi)] d\xi,$$

$$G(\xi, \psi) = \sin(\xi - \psi) \left\{ H_0^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right| \right) - \right.$$

$$\left. - \gamma H_1^{(2)} \left( 2\gamma \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right| \right) \right\} \left| \sin \frac{\xi - \psi}{2} \right|,$$

$$F(\varphi) = E_\varphi^0(a; \varphi) - \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{dE_\varphi^0(a, \xi)}{d\xi} \cos[\gamma(\varphi - \xi)] d\xi,$$

а  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые постоянные, которые должны быть определены в процессе решения уравнения (2) из условий

$$j_\varphi(-\alpha) = j_\varphi(\alpha) = 0,$$

эквивалентных условиям на ребре [6].

Интегральное уравнение (2) непосредственно следует также из уравнения (20) работы [1]. Для этого достаточно перейти от произвольных координат  $q$ ,  $\tau$ ,  $z$ , используемых в [1], к обычным цилиндрическим координатам  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Отметим, что выражение для функции  $F(\varphi)$  после интегрирования по частям может быть представлено в виде

$$F(\varphi) = E_{\varphi}^0(a, -a) \cos \gamma (\alpha + \varphi) + \gamma \int_{-\alpha}^{\alpha} E_{\varphi}^0(a, \xi) \sin \gamma (\varphi - \xi) d\xi.$$

Итак, для обеих поляризации электромагнитного поля рассматриваемая задача дифракции сведена к одномерному интегральному уравнению (1) или (2). Эти уравнения однотипны, так как их ядра имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов и непрерывны при остальных значениях аргументов. Они решаются численно методом саморегуляризации [2]. Конкретные алгоритмы численного решения интегральных уравнений типа (1) и (2) подробно описаны в [8] и [9].

Основная особенность алгоритмов численного решения интегральных уравнений типа (1) и (2) состоит в учете характера поведения искомых решений в окрестности конечных точек. Для  $E$ -волн в окрестности конечных точек искомая функция  $j(\varphi) \sim \rho^{-1/2}$ , где  $\rho$  — расстояние до конечной точки, а для  $H$ -волн  $j(\varphi) \sim \rho^{1/2}$ . Для удовлетворения условий на ребре искомую функцию в обоих случаях представляют в виде

$$j(\varphi) = \frac{u(\varphi)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2}}.$$

Методом саморегуляризации [2] уравнения (1) и (2) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $u(\varphi)$  в узлах дискретизации. При этом применялась кусочно-постоянная аппроксимация функции  $u(\varphi)$ , а число узлов ограничивалось сверху максимально возможным порядком системы алгебраических уравнений. Алгоритмы были реализованы в виде программ на языке «Алгол» с использованием ЭВМ БЭСМ-6. Максимальное число узлов дискретизации равно 160. Требуемое количество узлов определялось с помощью вычислительного эксперимента методом установления на основе постериорной оценки точности получаемого решения. Для этого вычислялась невязка интегральных уравнений по выполнению краевого условия на контуре  $\Gamma$ . В зависимости от варианта невязка изменяется от  $10^{-4}$  до  $10^{-8}$ . Время счета одного варианта составляет примерно 15 мин для  $E$ -волн и 30 мин для  $H$ -волн. При этом под вариантом понимается расчет соответствующих компонент электромагнитного поля в дальней и ближней зонах одновременно для нескольких (до пяти) углов падения первичной электромагнитной волны (либо для нескольких положений источника).

После того как в результате численного решения уравнений (1) и (2) найдены в узлах дискретизации значения искомой функции  $j_z(\varphi)$  или  $j_{\varphi}(\varphi)$ , можно путем численного интегрирования определить различные характеристики вторичного (а следовательно, и полного) электромагнитного поля, в частности рассчитать диаграммы рассеяния (направленности). Формулы, выражающие напряженность электрического поля по известным значениям плотности тока, общеизвестны и в данной работе не приводятся.

На основе численного решения интегральных уравнений (1) и (2) были проведены расчеты электромагнитного поля, возникающего при возбуждении поверхности  $S$  плоской волной и линейным электрическим током, параллельным образующим поверхности  $S$ . Ниже приводятся некоторые результаты анализа полученных результатов.

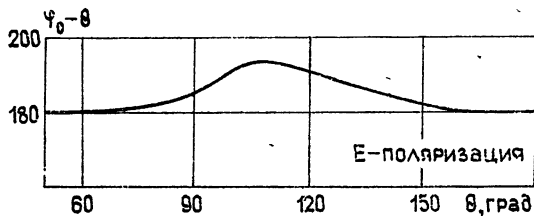
При облучении поверхности  $S$  плоской волной форма диаграммы рассеяния зависит от угла  $\alpha$  и радиуса  $a$ , определяющих цилиндриче-

скую поверхность, а также от угла падения  $\theta$  и поляризации плоской волны. При фиксированных значениях угла  $\alpha$  и радиуса  $a$  изменение угла падения волны  $\theta$  сопровождается поворотом максимума диаграммы рассеяния. Этот результат физически очевиден, но в рассматриваемом случае он имеет существенные особенности. В случае  $E$ -поляризации при симметричном ( $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$ ) и близком к симметричному возбуждении поверхности направление  $\varphi = \varphi_0$ , соответствующее максимуму диаграммы рассеяния, совпадает с направлением проходящих лучей ( $\Delta\varphi = |\varphi_0 - \theta| - 180^\circ = 0^\circ$ ). При приближении угла  $\theta$  к  $90^\circ$  (или к  $270^\circ$ ) происходит некоторое расширение главного лепестка диаграммы рассеяния и положительное ( $\Delta\varphi > 0$ ) смещение направления, соответствующего максимуму диаграммы рассеяния, относительно направления проходящих лучей.

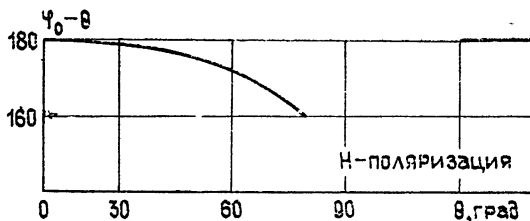
Для иллюстрации сказанного на рис. 2а показана зависимость величины  $\varphi_0 - \theta$  от угла падения  $\theta$  для случая  $\gamma = ka = 2\pi$  и  $\alpha = 60^\circ$ , а на рис. 3 приведены нормированные диаграммы рассеяния, соответствующие такой же поверхности ( $\gamma = 2\pi$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ) для  $\theta = 180^\circ$  (кривая 1) и  $\theta = 90^\circ$  (кривая 2). По оси ординат отложена величина

$$D(\varphi) = \frac{|E|}{|E|_{\max}}$$

( $E$  — напряженность вторичного электрического поля), а по оси абсцисс — угол  $\varphi$ . Сравнение кривых, приведенных на рис. 3, наглядно свидетельствует о расширении основного лепестка диаграммы рассеяния. Следует отметить, что при больших значениях угла  $\alpha$  описанные эффекты исчезают. Так, при  $\gamma = 2\pi$  ширина основного лепестка диаграммы рассеяния практически постоянна, а  $\Delta\varphi = 0$  уже при  $\alpha \geq 135^\circ$ .



а)



б)

Рис. 2.

Аналогичное явление имеет место и в случае  $H$ -поляризации. При значениях угла  $\theta$ , близких к нулю,  $\Delta\varphi = 0$ . При увеличении угла  $\theta$  наблюдается отрицательное ( $\Delta\varphi < 0$ ) смещение направления, соответствующего максимуму диаграммы рассеяния, относительно направления проходящих лучей, которое сопровождается некоторым (меньшим, чем в случае  $E$ -поляризации) расширением основного лепестка диаграммы

рассеяния и возрастанием уровня другого лепестка. В окрестности значения  $\theta = 90^\circ$  уровень этих лепестков оказывается практически одинаковым, и не имеет смысла говорить о каком-то одном направлении максимума диаграммы рассеяния. При дальнейшем увеличении угла  $\theta$  смещение  $\Delta\varphi$  снова оказывается равным нулю. Очевидно, что в области  $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  имеют место аналогичные изменения диаграммы рассеяния. Для иллюстрации сказанного на рис. 2б показана зависимость разности  $\varphi_0 - \theta$  от угла падения  $\theta$  для случая  $H$ -поляризации при  $\gamma = 2\pi$  и  $\alpha = 60^\circ$ , а на рис. 4 — нормированные диаграммы рассеяния для таких же значений  $\gamma$  и  $\alpha$  при  $\theta = 180^\circ$  (кривая 1) и  $\theta = 90^\circ$  (кривая 2). Разрыв кривой, приведенной на рис. 2б, соответствует области, в которой имеется два практически равных по уровню основных лепестка диаграммы рассеяния (см., например, диаграмму 2 на рис. 4). При достаточно больших значениях угла  $\alpha$  описанные эффекты отсутствуют.

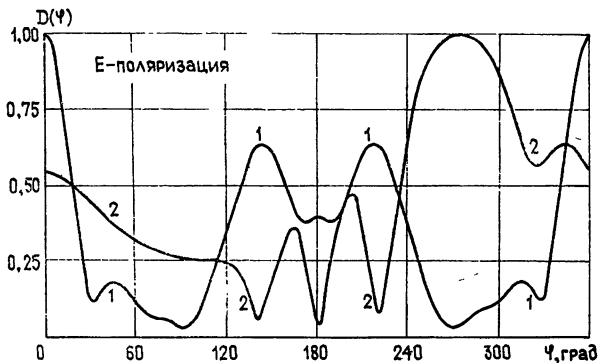


Рис. 3.

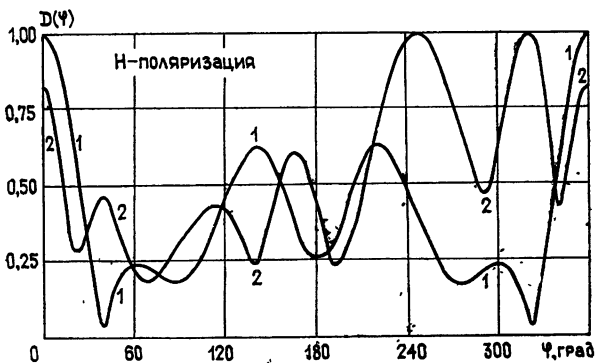


Рис. 4.

При одинаковых значениях параметров  $\gamma$  и  $\theta$  зависимость от угла  $\alpha$ , определяющего форму поверхности  $S$ , проявляется более заметно в случае  $H$ -поляризации. Для иллюстрации на рис. 5 приведены диаграммы рассеяния для случая  $\theta = 0^\circ$ ,  $\gamma = 2\pi$  при различных значениях угла  $\alpha$ :  $\alpha = 60^\circ$  — кривая 1,  $\alpha = 90^\circ$  — кривая 2 и  $\alpha = 135^\circ$  — кривая 3. Левая часть рисунка соответствует случаю  $E$ -поляризации, а правая —  $H$ -поляризации.

Представляет интерес сравнение диаграмм рассеяния для незамкнутой круговой цилиндрической поверхности при углах  $\alpha$ , близких к  $180^\circ$ , с диаграммами рассеяния для сплошного идеально проводящего цилиндра, а при малых значениях угла  $\alpha$  — с диаграммами рассеяния

для идеально проводящей бесконечно тонкой полосы. Результаты такого сравнения приведены на рис. 6 и 7.

На рис. 6 показаны диаграммы рассеяния при симметричном возбуждении *H*-поляризованной плоской волной незамкнутой круговой цилиндрической поверхности с углом  $\alpha = 179^\circ$  и  $\gamma = 5$ . Пунктирной линией изображена диаграмма рассеяния, соответствующая падению волны со стороны щели ( $\theta = 180^\circ$ ), а точками — диаграмма рассеяния для

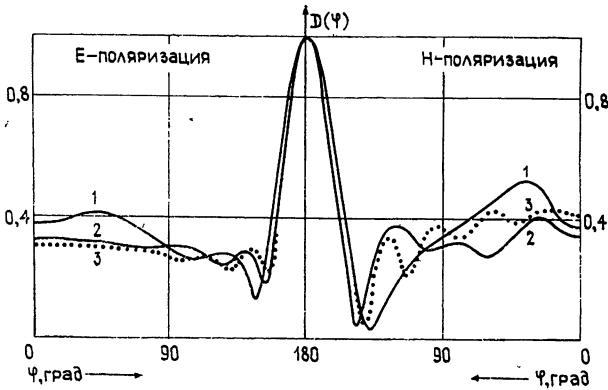


Рис. 5.

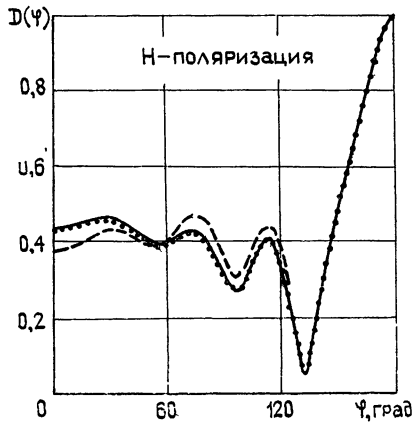


Рис. 6.

противоположного ( $\theta = 0^\circ$ ) падения волны. При этом для удобства сравнения при построении диаграммы рассеяния, соответствующей случаю  $\theta = 180^\circ$ , угол  $\varphi$  отсчитывался от направления  $\varphi = \theta = 180^\circ$ . Сплошной линией показана диаграмма рассеяния, соответствующая падению *H*-поляризованной волны на идеально проводящий цилиндр того же радиуса ( $\gamma = 5$ ), взятая из работы [10]. Как видно, диаграмма рассеяния для незамкнутой круговой поверхности с углом  $\alpha = 179^\circ$  при падении волны со стороны  $\theta = 0^\circ$  почти не отличается от диаграммы рассеяния для сплошного цилиндра. Диаграмма рассеяния, соответствующая падению волны со стороны щели ( $\theta = 180^\circ$ ) при той же угловой ширине щели ( $\alpha = 179^\circ$ ) имеет некоторые отличия от диаграммы рассеяния для сплошного цилиндра.

Аналогичные расчеты, проведенные для случая *E*-поляризации, показали, что в случае *E*-поляризованных волн диаграммы рассеяния для такой же поверхности ( $\gamma = 5$ ,  $\alpha = 179^\circ$ ) одинаковы при  $\theta = 0^\circ$  и при

$\theta = 180^\circ$  и совпадают с диаграммой рассеяния [10] для сплошного цилиндра.

На рис. 7 показаны нормированные диаграммы рассеяния, соответствующие падению под углом  $\theta = 150^\circ$   $H$ -поляризованной плоской волны на незамкнутую круговую цилиндрическую поверхность, форма которой мало отличается от полосы шириной  $1,5\lambda$ . Максимальное отклонение поверхности от полосы обозначено через  $d$ . Параметр  $d$  однозначно определяет ранее введенные параметры  $\gamma = ka$  и  $\alpha$ , характеризующие поперечный размер и форму поверхности. Кривая 1 соответствует случаям  $d=0$  (полоса) и  $d=0,003\lambda$  ( $\gamma = 552$ ,  $\alpha = 0^\circ,489$ ), кривая 2 — случаю  $d = 0,05\lambda$  ( $\gamma = 35,5$ ,  $\alpha = 7^\circ,628$ ), а кривая 3 соответствует значению  $d = 0,2\lambda$  ( $\gamma = 9,46$ ,  $\alpha = 29^\circ,86$ ). Как видно, форма диаграммы рассеяния в «переднем» ( $90^\circ < \varphi < 270^\circ$ ) полупространстве значительно сильнее зависит от формы поверхности (от параметра  $d$ ), чем в «заднем» полупространстве. Так, если для оценки поля в «заднем» полупространстве при  $d = 0,2\lambda$  цилиндрическую поверхность еще можно аппроксимировать полосой, то для оценки поля в «переднем» полупространстве такая аппроксимация при  $d = 0,2\lambda$  непригодна. Это объясняется тем, что в «заднем» полупространстве поле определяется в основном дифракцией на краях поверхности, а в «переднем» — кроме дифракционного поля имеется поле, обусловленное отражением от вогнутой части поверхности, которое существенно зависит от формы поверхности.

Как уже отмечалось, используемый в данной работе метод пригоден для решения задачи при любом двумерном первичном поле, а не только для случая плоской волны. Были проведены расчеты диаграмм направленности линейного электрического тока, расположенного вблизи незамкнутой круговой цилиндрической поверхности, для различных случаев положения источника и различных значений параметров  $\gamma$  и  $\alpha$ . На рис. 8 приведены нормированные диаграммы направленности линейного электрического тока, расположенного вдоль оси  $z$ , для двух значений параметра  $\gamma$  при ширине щели в круговой цилиндрической поверхности  $l = 2a \sin \alpha = 2\lambda$ . По оси ординат отложена величина  $D_1(\varphi) = |E_n|/|E_n|_{\max}$ , где  $E_n$  — напряженность полного электрического

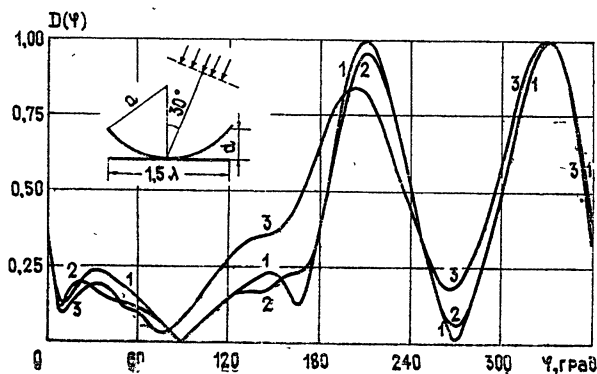


Рис. 7.

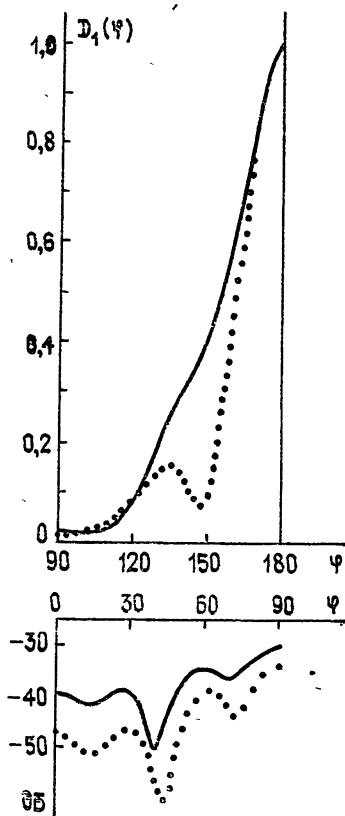


Рис. 8.

поля. Сплошной линией показана диаграмма направленности для случая  $\gamma = 10$ , а точками — для случая  $\gamma = 11,5$ . Как видно, даже такое небольшое увеличение радиуса поверхности существенно сказывается на уровне поля в «заднем» полупространстве (в области  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Радиотехника и электроника, 22, № 4, 678 (1977).
2. В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, в сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 1968, стр. 10.
3. R. Varakat and E. Levín, J. Opt. Soc. Am., 54, № 9, 1089 (1964).
4. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
5. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1785 (1973).
6. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
7. Ю. В. Пименов, Тр. МЭИС, вып. 1 (1970).
8. Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Г. М. Тихонов, в сб. Численные методы электродинамики, вып. 1, изд. МГУ, 1976, стр. 57.
9. Е. В. Захаров, Т. М. Мелешкина, Ю. В. Пименов, в сб. Численные методы электродинамики, вып. 1, изд. МГУ, 1976, стр. 69.
10. А. С. Горяинов, Радиотехника и электроника, 3, № 5, 603 (1958).

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 декабря 1977 г.,  
после переработки  
26 октября 1978 г.

NUMERICAL ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION  
ON THE UNEXCLUSIVE CIRCULAR CYLINDRIC SURFACE

*E. V. Zakharov; Yu. V. Pimenov*

On the basis of the numerical solution of integral equations an analysis is made of scattering diagrams of ideally conducting unexclusive circular cylindrical surface excited by  $E$ - or  $H$ -polarized waves (two-dimensional diffraction problems). The comparison is carried out of the calculation results with the corresponding dependences for the circular cylinder and the band.

---



УДК 621.396.677.861

## О ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

*В. П. Нарбут*

Исследуются поляризационные свойства двухзеркальных антенн Кассегрена и Грегори на основе данных о распределении тока на большом зеркале соответствующей антенны. Показано, что уровень кросс-поляризации двухзеркальных антенн при использовании облучателей типа электрического или магнитного диполей и элемента Гюйгенса ниже, чем у однозеркальной параболической антенны. Рассмотрены также некоторые проблемы уменьшения уровня кросс-поляризации с помощью оптимальных облучателей.

В радиоастрономии и системах космической и спутниковой связи широкое распространение нашли двухзеркальные антенны (ДЗА), в частности, выполненные по схемам Кассегрена или Грегори. Методика расчета геометрии и характеристик на основной поляризации (ОП) этих антенн подробно рассмотрена в [1, 2]. Однако имеется определенный пробел в исследовании поляризационных характеристик (ПХ) ДЗА. Недостатки уже проведенных исследований прежде всего связаны с неупорядоченностью имеющихся сведений, носящих, как правило, частный характер, а также с различной трактовкой одних и тех же явлений, рассматриваемых либо при различных исходных предположениях, либо с помощью различных методов анализа.

В последние годы за рубежом развернулась полезная полемика, целью которой является выяснение источников кросс-поляризации (КП) в ДЗА Кассегрена, а также, что особенно важно, сравнение осесимметричной ДЗА Кассегрена с осесимметричной параболической антенной (ОЗА) по величине кросс-поляризационного излучения. В [3], вызвавшей в дальнейшем критику в [4], с помощью анализа поля в фокальной плоскости ОЗА и ДЗА (т. е. путем исследования ПХ антенн в приемном режиме) было показано, что КП в антенне Кассегрена меньше, чем в ОЗА. Примененный в [3] метод анализа дает результаты, близкие к результатам токового метода расчета векторных диаграмм зеркальных антенн, когда облучатель по своим ПХ эквивалентен электрическому диполю (ЭД). Полученные в [3] данные, несмотря на ряд допущений и ограничений, вполне достоверны и, видимо, не могут вызвать сомнения для достаточно больших зеркал ( $D > 100\lambda$ ) с облучателями типа ЭД и МД (магнитный диполь).

В [4] рассматриваются ОЗА и ДЗА с облучателями типа элемента Гюйгенса (ЭГ), который является идеальным с точки зрения уровня КП для обоих типов антенн [5, 6]. Основной вывод в [4] состоит в том, что в случае облучателя типа ЭГ ОЗА лучше ДЗА по уровню КП. В дальнейшем полемика по сравнению преимуществ и недостатков ОЗА и ДЗА с точки зрения уровня КП свелась к обсуждению возможности создания облучателей типа ЭГ [7-11]. Хотя этот вопрос имеет важное значение, однако его решение вряд ли может свидетельствовать о том, что ОЗА в любых случаях лучше ДЗА.

Целью настоящей работы является рассмотрение поляризационных свойств ДЗА Кассегрена и Грегори и сравнение их с ОЗА с единой позиции с помощью общего для всех типов зеркальных антенн метода. При этом решаются также две вытекающие из приводимого рассмотрения задачи: 1) определение пределов, при которых целесообразно с точки зрения уровня КП применять ОЗА или ДЗА; 2) критический анализ и сопоставление приведенных в литературе сведений с результатами данной работы. В [12] доказано, что практически все выводы о поляризационных свойствах зеркальных антенн, которые получены в результате исследования выражений для вектора Герца, достаточно просто получить из анализа распределения тока на зеркале, т. е. распределение тока позволяет судить о поляризации излучения антенны. В [13] в приближении Кирхгофа получена формула, связывающая ПХ облучателя с формой осесимметричного зеркала, образующей которого является кривая конического сечения. Формула вытекает из решения уравнения  $j_y = 0$  ( $j_y$  —  $y$ -компонента тока на зеркале) и в первом приближении определяет оптимальный по ПХ облучатель, при котором в ОЗА существенно подавляется уровень КП.

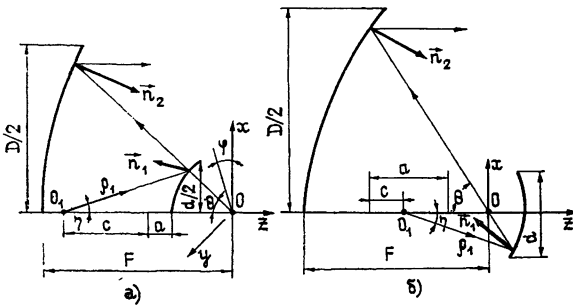


Рис. 1. Геометрия антенн Кассегрена и Грегори.

Рассмотрим в указанном приближении закономерности распределения тока на большом зеркале антенны Кассегрена. Облучатель, расположенный в фокусе  $O_1$  (рис. 1а), представим в виде совокупности ЭД и МД:  $p = -p e_x$ ,  $m = -v e_y$ . Большое зеркало — параболическое, с фокусным расстоянием  $F$ , малое — гиперболическое, с эксцентриситетом  $e$ . Магнитное поле облучателя равно

$$h_0^z = h_0^p + h_0^m [p_1 p] + [p_1 [m p_1]], \quad (1)$$

где  $p_1$  — единичный радиус-вектор. Формула (1) определяет единичный вектор магнитного поля облучателя. Учет множителей  $T(\eta, \xi) \frac{e^{-ik\rho_1(\eta)}}{\rho_1(\eta)}$ ,

где  $T(\eta, \xi)$  — диаграмма облучателя,  $\eta, \xi$  — угловые координаты сферической системы координат, а также  $Q_1$  и  $Q_2$ , где  $Q_1$  — множитель, характеризующий трансформацию лучевой трубки при отражении поля от малого зеркала,  $Q_2$  — множитель пространственного ослабления поля между малым и большим зеркалами, при расчете структуры тока на большом зеркале не обязателен, так как интерес представляет прежде всего относительная величина отдельных компонент тока. Поле, отраженное от малого зеркала, равно

$$h_1^z = h_0^z - 2n_1(n_1 h_0^z), \quad (2)$$

где  $n_1$  — орт нормали к малому зеркалу. Ток на большом зеркале равен

$$j^z = 2[n_2 h_1^z], \quad (3)$$

где  $n_2$  — орт нормали к большому зеркалу. Учитывая, что

$$n_1 = e_x \sin \frac{\eta - \eta^*}{2} \cos \xi + e_y \sin \frac{\eta - \eta^*}{2} \sin \xi - e_z \cos \frac{\eta - \eta^*}{2},$$

$$\rho_1 = e_x \sin \eta \cos \xi + e_y \sin \eta \sin \xi + e_z \cos \eta, \quad a = (1 + 2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2)^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \xi = \varphi, \quad \eta^* = \pi - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - \varepsilon \cos \eta}{\varepsilon \sin \eta} \right) - \eta,$$

можно записать

$$\rho_1 = \frac{(\varepsilon^2 - 1) \sin \theta \cos \varphi}{a^2} e_x + \frac{(\varepsilon^2 - 1) \sin \theta \sin \varphi}{a^2} e_y + \frac{\varepsilon^2 \cos \theta + 2\varepsilon + \cos \theta}{a^2} e_z; \quad (4)$$

$$n_1 = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{a} e_x + \frac{\sin \theta \sin \varphi}{a} e_y - \frac{\varepsilon + \cos \theta}{a} e_z; \quad (5)$$

$$n_2 = -\sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi e_x - \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi e_y + \cos \frac{\theta}{2} e_z. \quad (6)$$

Используя (4)–(6) и выполняя преобразования в соответствии с (1)–(3), окончательно получаем

$$j_x^2 = (\mu + \nu) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{(\varepsilon - 1)^2}{a^2} (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta; \quad (7)$$

$$j_y^2 = -(\mu - \nu) \frac{(\varepsilon - 1)^2}{a^2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi; \quad (8)$$

$$j_z^2 = \left( \mu \cos \theta + \nu + \frac{2\varepsilon\mu}{a^2} \sin^2 \theta \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi. \quad (9)$$

Для антенны Грегори (рис. 16) выражения для компонент тока полностью совпадают с (7)–(9). При их определении необходимо учесть, что отраженные от малого зеркала лучи пересекают ось симметрии антенны (т. е.  $\xi = \pi + \varphi$ ) и что

$$n_1 = -e_x \sin \frac{\eta - \eta^*}{2} \cos \xi - e_y \sin \frac{\eta - \eta^*}{2} \sin \xi - e_z \cos \frac{\eta - \eta^*}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

В формулах (7)–(9) отличия для антенн Кассегрена и Грегори заключаются только в численных значениях  $\varepsilon$ . Для антенны Кассегрена  $1 \leq \varepsilon \leq \infty$  (при  $\varepsilon = 1$  малое зеркало — параболическое, при  $\varepsilon = \infty$  — плоское), для антенны Грегори  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  (при  $\varepsilon = 0$  малое зеркало — сферическое, при  $\varepsilon = 1$  — параболическое). Общим для ДЗА является тот факт, что компоненты тока на большом зеркале зависят не только от ПХ облучателя, как у ОЗА, но и от формы образующей малого зеркала. Следовательно, в ДЗА появляется дополнительная степень свободы — форма малого зеркала, которая позволяет оказывать существенное влияние на ПХ антенны. Из (8) следует, что идеальным облучателем для антенн Кассегрена и Грегори является ЭГ. При  $\mu = \nu$   $y$ -компонента тока равна нулю. Формула (8) является доказательством ранее сделанных утверждений по этому вопросу в [4–6, 11]. Из (8) также видно, что в случае  $\varepsilon = 1$   $j_y^2 = 0$  независимо от типа облучателя. Этот

вывод, совпадающий с рекомендацией работы [3] для антенны Кассегрена, носит более общий характер, так как распространяется на антенну Грегори и на все типы облучателей. При  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0$  (7)–(9) совпадают с приведенными в [5] выражениями для компонент электрического поля в раскрыве ДЗА Кассегрена. При  $\varepsilon \rightarrow \infty$  (7)–(9) равны

$$\begin{aligned} j_x^\Sigma &= (\mu + \nu) \cos \frac{\theta}{2} - (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \\ j_y^\Sigma &= -(\mu - \nu) \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ j_z^\Sigma &= (\mu \cos \theta + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (10)$$

которые полностью совпадают с выражениями для компонент тока ОЗА. При  $\varepsilon = 1$  из (7)–(9) имеем

$$j_x^\Sigma = (\mu + \nu) \cos \frac{\theta}{2}, \quad j_y^\Sigma = 0, \quad j_z^\Sigma = (\mu + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi. \quad (11)$$

При  $\mu = \nu = 1$  (облучатель типа ЭГ) получаем выражения

$$\begin{aligned} j_x^\Sigma &= 2 \frac{(\varepsilon + 1)^2}{a^2} \cos^3 \frac{\theta}{2}, \quad j_y^\Sigma = 0, \\ j_z^\Sigma &= \frac{(\varepsilon + 1)^2}{a^2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

которые при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  или  $\varepsilon = 0$  переходят в следующие:

$$\begin{aligned} j_x^\Sigma &= 2 \cos^3 \frac{\theta}{2}, \quad j_y^\Sigma = 0, \\ j_z^\Sigma &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученные частные формулы (10)–(13) подтверждают сделанные выше выводы. То, что в случае параболического малого зеркала для любого типа облучателей на большом зеркале отсутствует  $y$ -компонента тока, можно установить, исходя из другой точки зрения на проблему подавления уровня КП в зеркальных антеннах, а именно, можно считать, что при  $\varepsilon \rightarrow 1$  ПХ всех типов облучателей приближаются к ПХ ЭГ (другими словами, уменьшается кросс-поляризация облучателя в соответствии с определением [15], так как  $\eta \rightarrow 0$ ). Это равноценно аналогичной трактовке влияния  $F/D$  на уровень КП в осесимметричной ПА [15]. На практике в ДЗА Кассегрена или Грегори с параболическим малым зеркалом в качестве облучателя используется рупорно-параболическая антенна, имеющая размеры раскрыва, равные диаметру малого зеркала, и ПХ, близкие к ПХ ЭГ.

Основными источниками КП в зеркальной антенне являются  $y$ - и  $z$ -компоненты тока на большом зеркале. Поэтому при сравнении уровня КП в ОЗА и ДЗА необходимо прежде всего исходить из соотношения этих компонент тока в различных типах зеркальных антенн. Конечно, при этом важно учитывать реальные амплитудно-фазовые распределения поля вблизи зеркала, которые для различных типов зеркальных антенн могут существенно отличаться как за счет различной геометрии

антенн, так и за счет несовпадения амплитудно-фазовых диаграмм и ПХ облучателей.

Рассмотрим соотношения токов на зеркале в более грубом приближении без учета амплитудно-фазовых диаграмм облучателя. Прежде всего, будем исследовать относительные величины компонент тока, нормированных на основную  $x$ -компоненту тока. Из (7), (8) и (10) получим

$$q_{\text{ОЗА}} = \frac{j_y^z}{j_x^z} = - \frac{(\mu - \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\varphi}{(\mu + \nu) - 2(\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) \sin^2 \frac{\theta}{2}}; \quad (14)$$

$$q_{\text{ДЗА}} = \frac{j_y^z}{j_x^z} = - \frac{(\mu - \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\varphi}{(\mu + \nu) \alpha^2 (\epsilon - 1)^{-2} - 2(\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi) \sin^2 \frac{\theta}{2}}; \quad (15)$$

$$q = \frac{q_{\text{ОЗА}}}{q_{\text{ДЗА}}} = 1 + \frac{4\epsilon}{(\epsilon - 1)} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{(\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi)}{(\mu + \nu)} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Формулы (15), (16) приведены для антенны Кассегрена. Для антенны Грегори они имеют такой же вид. Из (16) ясно, что  $q > 1$  и, следовательно,  $q_{\text{ОЗА}} > q_{\text{ДЗА}}$ , что подтверждает сделанные ранее выводы о преимуществах ДЗА, если мало экранирующее влияние малого зеркала и можно пренебречь дифракционными поправками к току.

Поскольку ток  $j_y^z$  максимален при  $\varphi = \pi/4$ , сделаем численную оценку  $q$  в этом сечении. Из (16) имеем

$$q \left( \varphi = \frac{\pi}{4} \right) = \frac{(\epsilon + 1)^2}{(\epsilon - 1)^2}. \quad (17)$$

Видно, что  $q$  не зависит от  $\theta$ . Формула (17) справедлива при любых  $\theta$ , а не только при малых значениях  $\theta$ , как указано в [5]. Ясно, что в реальных ДЗА имеются большие потенциальные возможности для подавления уровня КП. Анализ (16) указывает еще на одну интересную тенденцию, не замеченную ранее. Дело в том, что выражение (16) при  $\mu \rightarrow \nu$  стремится к (17). А это значит, что даже в случае облучателей, близких по своим ПХ к ЭГ, ДЗА имеет потенциальные преимущества по уровню КП по сравнению с ОЗА. Если положить, что  $\mu = \nu \pm \Delta$ , где  $\Delta$  — малая величина ( $\Delta \ll \nu$ ), то путем несложных преобразований (16) можно получить ( $\nu = 1$ )

$$q(\varphi, \theta) \approx \frac{(\epsilon + 1)^2}{(\epsilon - 1)^2} \pm \frac{2\epsilon\Delta}{(\epsilon - 1)^2} \cos 2\varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (18)$$

При  $\varphi = \pi/4$  (18) переходит в (17). Выражения (17) и (18) наиболее заметно отличаются вблизи  $\varphi = 0$  или  $\pi/2$ .

На рис. 2 показан график модуля относительного отклонения  $q(\varphi, \theta)$ , рассчитываемого по (18), от закона, определяемого (17). График построен в соответствии с формулой

$$S = \frac{q(\varphi, \theta) - q(\varphi = \pi/4)}{q(\varphi = \pi/4)} = \pm \frac{2\epsilon\Delta}{(1 + \epsilon)^2} \cos 2\varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (19)$$

Из (19) и рис. 2 видно, что относительное отклонение от значений, определяемых (17), тем меньше, чем больше  $\epsilon$  отличается от 1. Для продольной компоненты тока аналогичным образом получаем

$$P_{\text{ОЗА}} = \frac{j_z^{\Sigma}}{j_x^{\Sigma}} = \frac{(\mu \cos \theta + \nu) \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{(\mu + \nu) \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi)}; \quad (20)$$

$$P_{\text{ДЗА}} = \frac{j_z^{\Sigma}}{j_x^{\Sigma}} = \frac{(\mu \cos \theta + \nu + \frac{2\epsilon\mu}{a^2} \sin^2 \theta) \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{(\mu + \nu) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{(\epsilon-1)^2}{a^2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi)}; \quad (21)$$

$$P = \frac{P_{\text{ОЗА}}}{P_{\text{ДЗА}}} = \left[ 1 + \frac{2\epsilon\mu \sin^2 \theta}{a^2 (\mu \cos \theta + \nu)} \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{\frac{2\epsilon \sin^2 \theta (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi)}{a^2} \frac{\mu + \nu}{1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} (\mu \cos^2 \varphi + \nu \sin^2 \varphi)}}{\mu + \nu} \right]; \quad (22)$$

$$P \left( \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{(1 + \epsilon)^2}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon \frac{\mu}{\nu}}, \quad (23)$$

$$P \left( \varphi = \frac{\pi}{4} \right) = \frac{(1 + \epsilon)^2 (\mu \cos \theta + \nu)}{a^2 (\mu \cos \theta + \nu) + 2\epsilon\mu \sin^2 \theta}.$$

Как видно из (22) и (23),  $P(\varphi = \pi/4)$  зависит не только от  $\epsilon$  как  $q$ , но и от РХ облучателя ( $\mu/\nu$ ) и  $\theta$ . В случае ЭГ  $P(\varphi = \pi/4) = 1$  при любых  $\theta$  и  $\epsilon$ , т. е. при прочих равных условиях для идеализированного облучателя продольная компонента тока ДЗА не зависит от формы малого зеркала ( $\epsilon$ ) и равна продольной компоненте тока ОЗА. Следовательно, в случае ЭГ ДЗА уступает эквивалентной ОЗА по уровню КП, так как у нее имеются дополнительные источники КП (затенение, большее количество дифракционных эффектов и т. д.). На рис. 3 приведены зависимости  $P(\theta)$  в сечении  $\varphi = \pi/4$  для различных значений  $\epsilon$  и в двух типов облучателей: ЭД и МД.

$$\left| \frac{\Delta S_{\text{эс}} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\Delta S_{\text{вк}}^2 \frac{\theta}{2}} \right|$$

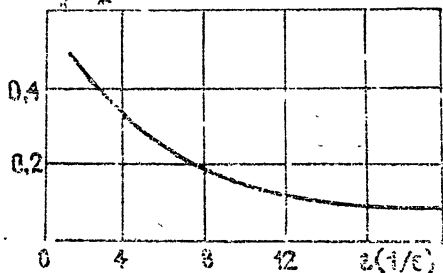


Рис. 2. Относительное отклонение  $q$  от закона, определяемого выражением (17).

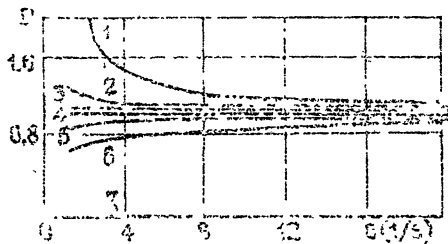


Рис. 3. Зависимость  $P(\varphi = \pi/4)$  от  $\theta$  и  $\epsilon$ . Кривая 1 —  $\theta' = \pi/2$ , 2 —  $\theta' = \pi/3$ , 3 —  $\theta' = \pi/6$  при  $\mu = 0, \nu = 1$ ; 4 —  $\theta' = \pi/2, \pi/3, \pi/6$  при  $\mu = 1, \nu = 1$ ; 5 —  $\theta' = \pi/6$ , 6 —  $\theta' = \pi/3$ , 7 —  $\theta' = \pi/2$  при  $\mu = 1, \nu = 0$ .

Из (8) ясно, что амплитудное распределение поля КП в раскрыве большого зеркала осесимметричной ДЗА по своей структуре аналогично распределению ОЗА: четко выделяются четыре области, в которых КП достигает максимума, а КП в главных плоскостях и в центре зеркала отсутствует. Это значит, что кросс-поляризационные диаграммы ДЗА имеют четырехлепестковую структуру. Из (7)—(9) следует, что для обычных облучателей (типа ЭД и МД) антенна Кассегрена (или Грегори) с точки зрения уровня КП имеет бесспорное преимущество по сравнению с ПА с равным фокусным расстоянием. Это объясняется изменением («улучшением») ПХ облучателя малым зеркалом. По мере уменьшения (или увеличения для антенны Грегори)  $\epsilon$  ПХ системы облучатель — малое зеркало — изменяется таким образом, что происходит постепенное спрямление линий токов на большом зеркале («гашение»  $y$ -компоненты тока). В пределе при  $\epsilon = 1$   $y$ -компонента тока в рассматриваемом приближении исчезает. Этот вывод подтвержден в [3, 5]. Уровень КП ОЗА равен уровню КП ДЗА Кассегрена, если фокусное расстояние ОЗА равно  $F_1 = F [(\epsilon + 1)/(\epsilon - 1)]$ . Это утверждение полностью справедливо, если не учитывается затенение в ДЗА. С учетом затенения  $F_1 < F [(\epsilon + 1)/(\epsilon - 1)]$ . Если учесть, что в силу ограниченности продольного размера антенны во многих практических случаях  $F_1 < F$ , то совершенно очевидно преимущество ДЗА Кассегрена по сравнению с ОЗА по уровню КП.

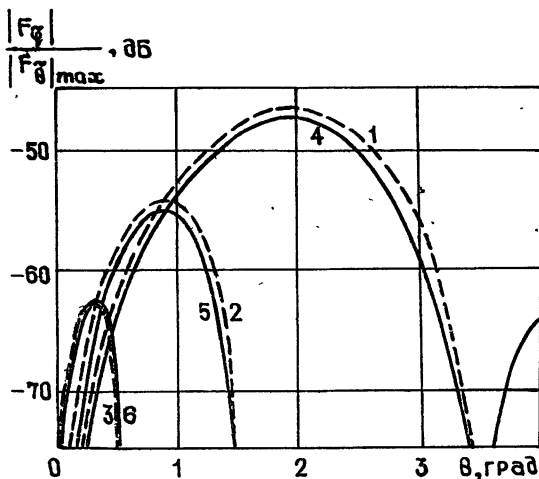


Рис. 4. Кросс-поляризационные диаграммы ОЗА с идеальным облучателем.

Кривые 1, 4 —  $D = 33 \lambda$ , 2, 5 —  $D = 74 \lambda$ , 3, 6 —  $D = 200 \lambda$ .

Для доказательства правильности вывода о преимуществе ДЗА Кассегрена по сравнению с ОЗА приведем некоторые результаты расчета кросс-поляризационных ДН. Для этого вначале покажем, что классический токовый метод (без учета дифракционных поправок к току) даже в случае применения в качестве облучателя ОЗА ЭГ обеспечивает достаточную точность расчета кросс-поляризационной ДН. На рис. 4 показаны ДН для ОЗА с различными  $D/\lambda$  при облучателе типа ЭГ. ДН с индексами 1, 2, 3 рассчитаны с помощью классического токового метода, а с индексами 4, 5, 6 заимствованы из [4], где расчет сделан с учетом дифракционных поправок к току на большом и малом зеркалах, а также поля облучателя, уходящего за малое зеркало. Поскольку в [4] не указаны форма амплитудного распределения в раскрыве ОЗА

и уровень поля на краю, то в нашем расчете форма амплитудного распределения на ОП взята параболической с нулем на краю зеркала ( $\Delta_{\text{ОЗА}} = 0$ ). Видно хорошее совпадение нашего расчета с результатами работы [4]. Таким образом, учет продольной компоненты тока позволяет получать достоверные результаты расчета КП даже в случае использования идеальных облучателей (типа ЭГ). Кроме того, токовый метод не имеет ограничений, возникающих при расчетах по методу работы [3]. Метод [3] применим для расчета ДН антенны Кассегрена, если: 1)  $D/d \gg 1$  ( $d$  — диаметр малого зеркала), 2)  $F/D \geq 0,4 \div 0,5$ , 3)  $D/\lambda \gg 10$  (приведенные числовые значения в неравенствах носят ориентировочный характер). Токовый метод существенно увеличивает пределы расчета, особенно в части второго и третьего неравенств: по  $F/D$  он не имеет ограничений, а по  $D/\lambda$  действует неравенство  $D \gg \lambda$ .

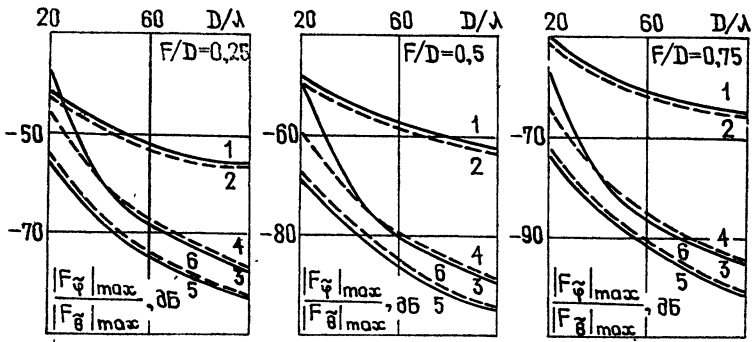


Рис. 5. Зависимость уровня КП от  $D/\lambda$  для ОЗА и ДЗА с идеальным облучателем. Кривые 1 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 1$ ,  $d/\lambda = 5,10$  ОЗА; 2 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 0$ ,  $d/\lambda = 5,10$ , ОЗА; 3 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 0$ ,  $d/\lambda = 10$ , ДЗА; 4 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 1$ ,  $d/\lambda = 10$ , ДЗА; 5 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 0$ ,  $d/\lambda = 5$ , ДЗА; 6 —  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 1$ ,  $d/\lambda = 5$ , ДЗА.

На рис. 5 показаны зависимости максимального уровня КП в плоскости  $\varphi = \pi/4$  от  $D/\lambda$  для различных  $F/D$  и  $d/\lambda$  для ОЗА и ДЗА Кассегрена с идеальным облучателем ( $\mu = \nu$ ). Уровень поля на краю большого зеркала ДЗА выбирался равным  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 1$  и 0 (параболическая форма распределения на ОП), а для ОЗА он пересчитывался с учетом геометрии эквивалентного параболоида:

$$\Delta_{\text{ОЗА}} = \Delta_{\text{ДЗА}} \frac{1 + M \cos \theta_{\text{кр}}}{1 + M}, \quad M = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{4 \frac{F}{D} + \frac{d}{D}}{4 \frac{F}{D} - \frac{d}{D}}.$$

Затенение малым зеркалом учитывалось приближенно с помощью формулы

$$20 \lg \left( \frac{|F_{\varphi}^{\sim}|_{\text{max}}}{|F_{\theta}^{\sim}|_{\text{max}}} \right)_{\text{ДЗА}} = 20 \lg \left( \frac{|F_{\varphi}^{\sim}|_{\text{max}}}{|F_{\theta}^{\sim}|_{\text{max}}} \right)_{\text{ДЗА}} - 10 \lg \left( 1 - 2K \frac{d^2}{D^2} \right), \quad \text{дБ},$$

(с затенением)

(без затенения)

где  $|F_{\theta}^{\sim}|_{\text{max}}$ ,  $|F_{\varphi}^{\sim}|_{\text{max}}$  — максимумы диаграмм на ОП и КП,  $K = 1$  при  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 1$  и  $K = 1,8$  при  $\Delta_{\text{ДЗА}} = 0$ . Из рисунка видно, что для



$D/\lambda \geq 30$  и  $D/d \geq 3$  при любых  $F/D$  антенна Кассегрена намного лучше по своим ПХ, чем ОЗА даже в случае использования идеального облучателя и нулевого уровня поля на краю большого зеркала (т. е. тогда, когда влияния затенения проявляется наиболее сильно). При обычных облучателях (типа ЭД или МД) преимущества ДЗА не вызывают сомнения [3-8].

Сравнение расчетов ОЗА с облучателем типа ЭГ, проведенных в [15] и в [4, 6], показывает, что учет только продольной компоненты тока дает достаточно точный результат, который совпадает с более точными расчетами не только качественно, но и близок количественно. Однако экспериментальные данные в этом специфическом случае намного хуже теоретических как для ОЗА, так и для ДЗА. Если речь идет о расчетных уровнях КП порядка — (40 ÷ 50) дБ, то реально измеренные уровни КП примерно на 10 дБ выше и не опускаются ниже — (30 ÷ 35) дБ (в [8] уровень КП равен —36 дБ). Это свидетельствует о трудностях практической реализации облучателей типа ЭГ [7].

В [3, 4] идеализированы ПХ облучателя как с точки зрения их реализации (особенно ЭГ), так и (что особенно важно) с точки зрения их изменения у реальных облучателей с ростом  $F/D$  или уменьшением  $e$  в ДЗА. Как известно, с увеличением раскрыва рупора, необходимого для сужения первичной диаграммы, изменяется его ПХ, что оказывает существенное влияние на кросс-поляризационную диаграмму ОЗА и ДЗА. Этим примером хотелось бы подчеркнуть сложность и зависимость от многих факторов происходящих в антенне процессов, которые проявляются при анализе кросс-поляризационной ДН антенны с малым уровнем КП (ниже —40 дБ). Вообще говоря, при создании антенн с большой поляризационной чистотой (с низкими уровнями КП) задача заключается в том, чтобы для каждого типа антенны (в том числе и зеркальной) подобрать оптимальный, с точки зрения уровня КП, облучатель. Для ОЗА и ДЗА — это облучатель одного типа (ЭГ), для фокусирующих диэлектрических линзовых антенн — другого типа (ЭД) и т. д.

При рассмотрении вопроса о подавлении КП в случае ОЗА используют две трактовки одного и того же физического процесса, который при этом происходит. Отсюда и возникают два способа подавления КП: 1) подбором ПХ облучателя добиться параллельности линий тока на зеркале (отсутствия  $y$ -компоненты тока), 2) создать такую кросс-поляризационную ДН облучателя, чтобы она компенсировала кросс-поляризационную ДН зеркала (т. е. кросс-поляризационные диаграммы антенны за счет ПХ облучателя и кривизны зеркала должны совпадать в пространстве, быть равными по амплитуде и противофазными). Поскольку ПХ антенны нужно рассматривать как проявление совместного действия зеркала и облучателя, то и в первом и во втором случаях реализуется параллельность проекций линий тока на раскрыв. Как уже отмечалось, в ДЗА появляется дополнительная степень свободы — форма малого зеркала, которая может быть использована, в частности, и для подавления КП всей антенны. Такая возможность обсуждалась, например, в [3] для ДЗА Кассегрена с облучателем типа ЭД. Ясно также, что при  $D > 100 \lambda$ , когда, с одной стороны, малое зеркало велико по сравнению с  $\lambda$  и можно пренебречь дифракционными поправками к току на нем, а, с другой стороны, на уровне КП слабо влияет затенение, антенна Кассегрена будет иметь преимущество перед ОЗА.

Это положение трактуется в [8] с другой точки зрения: при  $D < 100 \lambda$  основной вклад в КП дают зеркала ДЗА (в первую очередь за счет дифракционных эффектов и затенения) и он гораздо больше, чем в ОЗА, а КП облучателя мала; при  $D > 100 \lambda$  КП за счет зеркал уменьшается и основной вклад в кросс-поляризационную диаграмму

дает КП облучателя. Таким образом, и в [8] делается вывод о том, что при  $D > 100 \lambda$  антенна Кассегрена имеет преимущество по сравнению с ОЗА.

Необходимо особо остановиться на используемых трактовках КП облучателя и зеркала. Этот вопрос уже обсуждался в литературе [14] в такой постановке: зависит ли уровень КП в ОЗА от  $F/D$  или нет? Можно объяснить уменьшение уровня КП при росте  $F/D$  тем, что улучшается ПХ облучателя (например, типа ЭД), приближаясь к ПХ ЭГ [7, 8, 14]. Действительно, в ОЗА с ростом  $F/D$  уменьшается угол раскрытия  $\theta$ . Тем самым сужается угловая область на сфере линий электрического поля, их крутизна и форма приближаются к линиям электрического поля ЭГ. Такой подход вполне правомерный, когда речь идет об ОЗА. Он вытекает из сделанных в [14] определений КП и эталонной по ПХ антенны ЭГ. Однако его сфера действия ограничивается только ОЗА, так как во всех остальных случаях и для других типов антенн этот подход неприемлем. Например, откуда берется КП в гиперболической линзовой антенне, когда в качестве облучателя взят элемент Гюйгенса, который не имеет собственной КП?

Более общая трактовка следует из общепринятого определения КП, когда эталонной по ПХ антенной считается ЭД, а в сочетании с плоским зеркалом он не дает КП. Если исходить из этого, то при использовании в качестве облучателя ОЗА ЭГ его собственная КП компенсирует КП за счет кривизны зеркала (уменьшается  $y$ -компонента тока), а уменьшение КП с ростом  $F/D$  объясняется уменьшением кривизны зеркала. Следует особо отметить, что в ОЗА с облучателем типа ЭГ уровень КП также зависит от  $F/D$ , что еще больше подчеркивает ограниченность используемого в [14] объяснения связи уровня КП с  $F/D$ . Кажется бы, что в случае облучателя типа ЭГ с ростом  $F/D$  уровень КП в ОЗА не должен изменяться, так как не изменяется ПХ облучателя. Однако уровень КП уменьшается, что связано с изменением кривизны зеркала (уменьшается  $z$ -компонента тока). Таким образом, более правильно трактовать связь уровня КП с  $F/D$  как зависимость уровня КП от кривизны зеркала (хотя на самом деле уровень КП определяется совместным действием облучателя и зеркала), что позволяет дать однотипное объяснение такого рода зависимости практически для всего класса антенн оптического типа.

В ряде работ, в том числе в [8], в качестве доказательства преимуществ ОЗА перед ДЗА приводятся данные расчета кросс-поляризационных ДН ОЗА и антенны Кассегрена с облучателем в виде конического рупора с волной  $H_{11}$ . В [8] показан весьма низкий уровень КП в ОЗА, равный  $-48$  дБ, в то время как у антенны Кассегрена с тем же размером  $D = 500 \lambda$  уровень КП  $-22,6$  дБ. Такая огромная разница может быть объяснена тем, что облучатель ДЗА имеет совершенно другие ПХ, чем облучатель ОЗА (в ДЗА  $d_p = 5\lambda$ , в ОЗА  $d_p = 0,7\lambda$ , т. е. открытый конец круглого волновода,  $d_p$  — раскрыв рупора). У конических рупоров ПХ зависит от  $d_p$ . Чем меньше  $d_p$ , тем ПХ ближе к ПХ ЭГ. Поэтому совершенно неверно делать заключение о преимуществах ОЗА, применяя облучатели, оптимальные по ПХ для ОЗА и далекие от оптимальности (а в ряде случаев — просто плохие) для ДЗА.

В заключение сформулируем основные выводы. В случае облучателей, близких по своим ПХ к ЭД и МД, а также приближающихся к ЭГ, в ДЗА может быть получен уровень КП, существенно меньший, чем в ОЗА, если размеры большого зеркала превышают  $(30 \div 50) \lambda$ . Для того, чтобы ОЗА по уровню КП приблизилась к ДЗА, необходимо заметное увеличение ее  $F/D$  (примерно в  $(| \varepsilon + 1 |) / (| \varepsilon - 1 |)$  раз). Для получения в антеннах Кассегрена и Грегори минимального уровня КП

необходимо применять облучатели, близкие по своим характеристикам к ЭГ, а форма образующей малого зеркала должна стремиться к параболической.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 P. W. Hannan, IRE Trans. on Ant. and Propag., AP-9, № 2, 140 (1961).
- 2 P. D. Potter, IRE Trans. Space Electronics and Telemetry, 8, № 2, 154 (1962)
- 3 P. A. Watson and S. I. Ghobrial, IEEE Trans on Ant. and Propag., AP-20, № 6, 691 (1972).
- 4 P. J. Wood, Electr. Lett., 9, № 8/9, 181 (1973).
- 5 M. Safak and P. P. Delonge, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-24, № 4, 497 (1976).
- 6 T. B. Mаса, Electr. Lett., 12, № 9, 218 (1976).
- 7 P. A. Watson and S. I. Ghobrial, Electr. Lett., 9, № 14, 297 (1973)
- 8 P. J. Wood, Electr. Lett., 9, № 25, 597 (1973).
- 9 S. I. Ghobrial, Radio Electron. Eng., 45, № 7, 346 (1975).
- 10 J. H. Cowan, Electr. Lett., 9, № 25, 596 (1973)
- 11 M. M. A. El. Futuh and S. I. Ghobrial, Radio Electron. Eng., 44, № 5, 269 (1974).
- 12 В. П. Нарбут, в сб. Кибернетика и вычислительная техника, вып. 30, изд. Наукова думка, Киев, 1975, стр. 126.
- 13 J. Koffman, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-14, № 1, 37 (1966).
- 14 A. C. Ludwig, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-21, № 1, 116 (1973)
- 15 В. П. Нарбут, Н. С. Хмельницкая, Вопросы радиоэлектроники, серия общетехническая, вып. 21, 43 (1967).

Поступила в редакцию  
6 декабря 1977 г.

#### POLARIZATION CHARACTERISTICS OF TWO-IMAGE ANTENNAS

V. P. Narbut

Polarization properties of two-image Cassegrain and Gregory antennas are investigated on the basis of data about the current distribution on a large mirror of the corresponding antenna. It is shown that the level of cross polarization of two-image antennas when using radiators of the type of the electric or magnetic dipoles and Huygens element is lower than the one-image parabolic antenna has. Some problems of decrease of cross polarization level by the optimal radiators is considered

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.574.2

**ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ  
НЕОДНОРОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДОЙ**

*В. Г. Гавриленко, Л. А. Зелексон, [Г. А. Лупанов]*

В последнее время все большее внимание привлекают вопросы взаимодействия электромагнитных волн с неоднородными потоками вещества. Наиболее эффективным это взаимодействие будет в том случае, когда скорость среды сравнима с фазовой скоростью волны. При этом возникает ряд интересных эффектов, наиболее существенным из которых является возможность при определенных условиях усиления волн (проходящих и отраженных), а также существование различного типа собственных решений (см., например, [1-4]).

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности, возникающие при импульсном зондировании струи проводящей среды, а именно появление в спектре отраженного сигнала монохроматических линий, обусловленных возбуждением импульсом стационарных собственных волн потока.

Пусть среда с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \text{const} \gg 1$  (в локально сопровождающей системе отсчета) и проводимостью  $\sigma(x)$  движется со скоростью  $v(x) \ll c$  ( $c$  — скорость света) вдоль оси  $z$  декартовой системы координат. Считаем, что при  $|x| > l/2$  скорость и проводимость отсутствуют. В плоскости  $x = x_0$  неподвижной среды задано импульсное поле  $E(z, t) = E_1(z)E_2(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Как известно, для нахождения отраженного сигнала необходимо вычислить интеграл

$$E_R(x_0, z, t) = \frac{1}{4i\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha-l\infty}^{\alpha+l\infty} F(k, p) R(x_0, k, p) e^{p t - i k z} dk dp, \quad (1)$$

где  $F = F_1(k)F_2(p)$  — преобразование Фурье—Лапласа от  $E$ ,  $R$  — коэффициент отражения плоской гармонической волны (отношение напряженностей полей отраженной и падающей волн в плоскости  $x = x_0$ ), зависящий от ее поляризации. Интеграл (1) отличен от нуля при  $t > t_R \sim \sqrt{\epsilon} x_0/c$ . Время запаздывания  $t_R$  определяется конкретным профилем  $v(x)$  и  $\sigma(x)$ , т. е. видом функции  $R(x_0, k, p)$ .

При падении в плоскости  $xz$  волну можно представить в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-волн, уравнения для полей которых приведены в [4]. В коротковолновом (КВ) приближении, когда свойства среды мало меняются на расстоянии порядка длины волны, и при  $\sigma/\epsilon \ll \omega$  выражение для коэффициента отражения ТЕ-волны  $R_{TE}$  получено в [2]. Если выполнено условие

$$R_0^2 e^{-2i\varphi} = 1, \quad (2)$$

т. е.  $|R_{TE}| = \infty$ , то в системе возможно существование собственных решений. Здесь

$$R_0 = i \left( 1 + \frac{1}{2} e^{-2\delta} \right), \quad \varphi = \int_{C_1} k_x dx, \quad \delta = \int_{C_2} \sqrt{-\text{Re } k_x^2} dx, \quad k_x^2 = \frac{\epsilon}{c^2} (\omega - kv)^2 - i \frac{4\pi\sigma}{c^2} (\omega - kv) - \left( k - \frac{\omega v}{c^2} \right)^2, \quad C_1 — \text{область «прозрачности» внутри струи} \\ (\text{Re } k_x^2 > 0, \omega - kv < 0), \quad C_2 — \text{область «непрозрачности»} (\text{Re } k_x^2 < 0).$$

Что касается ТМ-волн, то, как показывает анализ, несмотря на наличие особой точки в исходном уравнении, в КВ приближении  $R_{TM} = R_{TE}$ .

Не представляет трудностей нахождение этих коэффициентов и в длинноволновом (ДВ) приближении, когда струю можно представить в виде однородно движущегося слоя шириной  $l$ . Обращение  $|R_{TE}|$  и  $|R_{TM}|$  в бесконечность возможно и в этом

случае, если справедливо соотношение (2), где  $R_0$  и  $\varphi$  определяются следующими выражениями:

$$R_{0TE} = \frac{k_{x2} + k_{x1}}{k_{x2} - k_{x1}}, \quad R_{0TM} = \frac{\frac{k_{x2}}{\tilde{\epsilon}} + \frac{k_{x1}}{\epsilon}}{\frac{k_{x2}}{\tilde{\epsilon}} - \frac{k_{x1}}{\epsilon}} \quad (\omega - kv < 0),$$

$\varphi = k_{x2} l$ ,  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i [4\pi\sigma/(\omega - kv)]$ , индекс 1 относится к неподвижной среде, индекс 2 — к движущейся.

Существование полюсов у  $R(x_0, k, p)$  позволяет представить выражение для отраженного поля в виде двух слагаемых, одно из которых равно

$$E_{R_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} F(k, p_n) \operatorname{res} R(x_0, k, p_n) e^{p_n t - i k z} dk. \quad (3)$$

Здесь  $p_n(k)$  —  $n$  решений дисперсионного уравнения (2). Пусть  $F_1(k)$  имеет острый максимум при  $k = k_0$ , тогда

$$E_{R_0} = \sum_n E_1(z - v_n t) F_2(\omega_n) \operatorname{res} R[x_0, k_0, \omega_n] \times \\ \times \exp \left[ i \omega_n \left( t - \frac{\sqrt{\epsilon}}{c} z \sin \theta_n \right) \right],$$

где  $v_n = \frac{\partial \omega_n(k_0)}{\partial k}$ ,  $\omega_n = -i p_n$ ,  $\theta_n = \arcsin(k_0 c / \omega_n \sqrt{\epsilon})$ . Таким образом, здесь поле  $E_{R_0}$  — суперпозиция плоских волн (в общем случае поверхностных), возбуждаемых импульсом. Если  $\operatorname{Im} \omega_n(k_0) = 0$ , то собственные волны излучаются потоком в неподвижную среду

Найдем решения (2) при  $\operatorname{Im} \omega_n = 0$ . Учитывая, что в КВ приближении в него входят интегральные величины  $\varphi$ ,  $\delta$ , можно зависимости  $v(x)$  и  $\sigma(x)$  выбрать линейными (профили скорости и проводимости имеют вид треугольника со сглаженной вершиной и краями). При этом получаем

$$\omega_n = \frac{4\pi^3 c^2}{\epsilon v_m l N} \left[ n^2 + \left( \frac{2v_m \sqrt{\epsilon} N}{\pi c} \right)^2 \right], \\ \theta_n = 2 \operatorname{arctg} \frac{v_m \sqrt{\epsilon} N}{2\pi^2 n c}, \quad v_n = v_m, \quad \operatorname{res} R = \frac{-i s \omega_n}{\pi n} e^{-2i x_0 \pi n l}, \quad (4)$$

где  $N = \ln \frac{1}{2s}$ ,  $s = \frac{2\pi\sigma_m l}{c\sqrt{\epsilon}} \ll 1$ ,  $n \gg 1$ ,  $v_m$  и  $\sigma_m$  — максимальные значения скорости и проводимости. Угловое расстояние между излучаемыми модами невелико:  $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n \ll 1$ .

В ДВ приближении уравнение (2) решим также приближенно, считая волны очень медленными ( $\omega \ll kv_m$ ), проводимость малой ( $\sigma_m/\epsilon \ll kv_m$ ) и  $\epsilon v_m^2/c^2 \gg 1 \gg v_m^2/c^2$ . При этом  $k_{x2} \approx -(v_m/c) \sqrt{\epsilon} k$ ,  $|k_{x2}| \gg |k_{x1}|$ . В результате находим

$$\omega_n = \frac{\pi n c^2}{\epsilon v_m l} \sqrt{1 + \left( \frac{\pi \sigma_m v_m l}{c^2} \right)^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{c^2}{\pi \sigma_m v_m l}, \\ \operatorname{res} R_{TE} = \operatorname{res} R_{TM} = \frac{2i\pi\sigma_m c}{\epsilon^{3/2} v_m} e^{-2i x_0 \pi n l}, \quad v_n = v_m \quad (5)$$

Отметим, что здесь  $\theta$  не зависит от  $n$  и одинаково для всех излучаемых мод.

В заключение выпишем неравенства, при которых справедливы выражения (5).

$$n \gg \frac{\sigma_m l}{c \sqrt{\epsilon}}, \frac{c}{\sqrt{\epsilon} v_m \theta}.$$

Численный анализ уравнения (2) на ЭВМ показал близость точного решения к (5) в выбранной области параметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Лупанов, Изв вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1711 (1975).
2. В. Г. Гавриленко, Л. А. Зелексон, в сб. XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, ч. 1, изд КГУ, Казань, 1975.
3. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, ЖТФ, 45, № 11, 2288 (1975).
4. Н. С. Степанов, В. Д. Пикулин, Л. А. Зелексон, в сб. VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, т. 1, М., 1977.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 июня 1978 г.

УДК 621.396.67

### ИЗМЕРЕНИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН ПО ГОЛОГРАММАМ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ОБРАБОТКИ В НЕКОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ

*Ю. И. Белов, Э. М. Зуйкова, Е. Д. Пигулевский, А. Ф. Рыжков*

Ранее сообщалось об использовании оптических корреляционных приборов некогерентного света для целей обработки — выполнения преобразования Френеля — радиоголографических измерений диаграмм направленности антенн [1, 2]. В частности, был предложен штриховой способ записи и, как следствие, появилась возможность увеличения частоты пространственной модуляции (искусственно вводимой в приемном тракте фазовой модуляции, необходимой для отделения полезного отклика — диаграммы направленности от постоянной составляющей голограммы).

В настоящем сообщении приведены результаты обработки фототранспарантов голограммы, записанной на плоскости для акустической двумерной антенной решетки, а также голограммы, записанной на сфере для однозеркальной параболической антенны СВЧ диаметром 7 м. Для обработки голограммы, записанной на плоскости, был применен аналоговый спектр-анализатор, использующий некогерентный свет. В результате обработки СВЧ голограмм в некогерентном свете была не только восстановлена диаграмма направленности, но и оказалось возможным экспериментально выявить величину погрешности, связанной непосредственно с записью голограммы и обработкой (при этом погрешности, определяемые сектором сканирования и дискретностью записи, погрешности измерения значений амплитуды и фазы промышленным приемником ФК2-14 предварительно оценивались по методикам, излагаемым в [3, 5], и полагались пренебрежимо малыми в заданном секторе углов диаграммы).

В обеих голограммах способ записи позволял вести построчное сканирование поля с автоматической непрерывной записью каждой строки транспаранта. При записи СВЧ голограммы для этой цели использовалась сельсинная следящая система, при записи акустической голограммы обеспечивалась жесткая синхронизация координаты перемещения сканера и соответствующей координаты на фототранспаранте, так как источник света (интенсивность света пропорциональна распределению поля в голограмме) располагался прямо на сканирующем зонде.

При обработке обеих голограмм динамический диапазон восстановления диаграмм направленности ограничивался довольно значительным уровнем постоянной составляющей голограммы, несмотря на попытки использовать максимальную частоту пространственной модуляции для отделения полезного отклика диаграммы. В акустической голограмме пространственная модуляция вводилась дискретно, поперек строк, и повышение частоты модуляции было ограничено наложением порядков изображения, т. е. пространственная частота модуляции не могла быть больше пространственной частоты выборок (см., например, [9]). Поэтому конечность размера одной строки (выборки) и общего размера голограммы ограничивает частоту модуляции. В СВЧ голограмме верхняя граница пространственной частоты определялась в основном неточностями изготовления механических узлов системы записи.

Интегрируя равномерно распределенный световой поток по апертуре френелевской зонной пластинки, одинаковой по размерам с апертурой голограммы, можно показать, что отклик на постоянную составляющую уменьшается пропорционально  $1/N$ , где  $N$  — число периодов пространственной модуляции на линейном размере транспаранта голограммы  $L_T$ . Но, с другой стороны, возможны плавные изменения частоты модуляции (например, из-за эксцентриситетов вращающихся узлов в системе записи) вида  $\Omega_{\text{мод}} = \Omega_0 (1 + m \cos f \xi)$ , где  $\xi$  — координата записи. При этом результат обработки (диаграмма направленности) искажается. Поскольку искажения можно рассматривать как паразитный фазовый набег  $\frac{\Omega_0 m}{f} \cos f \xi$ , то можно использовать и обычный «антенный» критерий: максимальное отклонение фазы на всем размере голограммы должно быть  $< \pi/8$ . Тогда, ввиду того, что  $f = 2\pi/L_T$  и  $\Omega_0 = 2\pi N/L_T$ , возможное значение  $N$  ограничено условием  $N < \frac{\pi}{8} \frac{1}{m}$ . Следовательно, конечная точность изготовления механических узлов системы записи уменьшает возможное значение числа периодов пространственной модуляции на размере голограммы. Для СВЧ голограммы нами была достигнута степень подавления постоянной составляющей порядка — 30 дБ (набег фазы  $< \frac{\pi}{4}$  при  $N = 60$ ); этого было достаточно для целей эксперимента, так как используемая амплифазометрическая система по оценкам, аналогичным [3], на уровне — 30 дБ уже вносила соизмеримую погрешность около 15%.

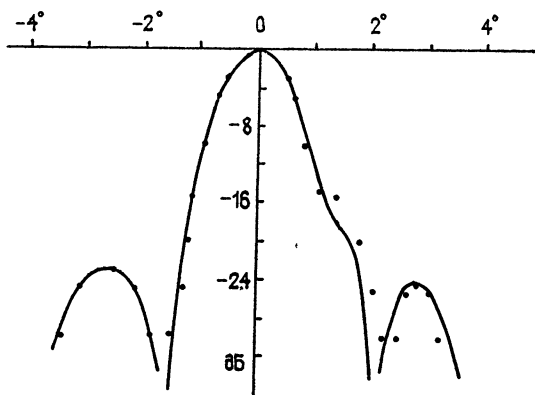


Рис. 1. Диаграмма направленности осесимметричной (диаметр 7 м) параболической антенны, полученная 1) методом перефокусировки на источник в ближней зоне (сплошная линия), 2) восстановленная по голограмме ближнего поля (кружочки).

В заключение приведем результаты (рис. 1, 2) сравнения восстановленной оптическим путем диаграммы осесимметричной параболической антенны диаметром 7 метров с диаграммой направленности, полученной методом перефокусировки на источник в ближней зоне, а также сравнение диаграмм, оптически восстановленных и измеренных в дальней зоне для плоской акустической решетки из  $18 \times 18$  элементов. Волновые размеры антенны  $26\lambda \times 26\lambda$ , размер записи голограммы  $48\lambda \times 62\lambda$ , решетка расположена на расстоянии  $40\lambda$  от приемной апертуры. Нестабильность скорости протяжки ленты самописца при измерениях диаграммы решетки в дальней зоне (см. рис. 3, где приведены разные реализации идентичных измерений в дальней зоне) приводит к некоторому несовпадению положений нулей и максимумов решетки. Применение треугольной весовой функции окна при обработке акустической голограммы значительно уменьшило (примерно на 10 дБ) постоянную составляющую в районе главного лепестка диаграммы.

Сравнение полученных экспериментальных результатов оптической обработки с существующими данными обработки антенных измерений на ЭВМ [4, 5] показывает, что создание высокоточных оптикомеханических аналоговых устройств с некогерентным светом (спектральных и корреляционных) [7] позволит успешно решить ряд задач обработки антенных измерений диаграмм направленности антенн по их ближнему полю.

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Турчину за полезные методические советы и Л. А. Пасмануку за помощь в проведении эксперимента

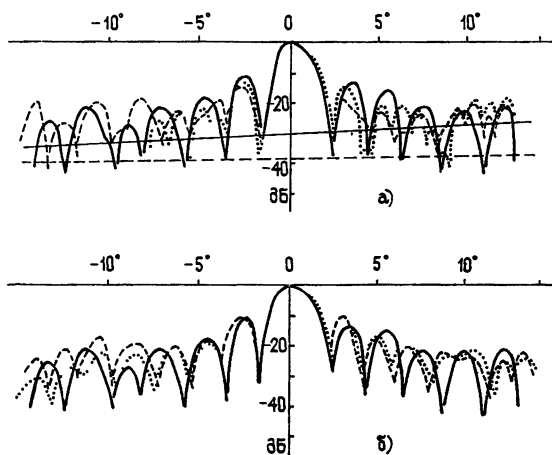


Рис 2. Диаграмма направленности акустической решетки: а) полученная 1) измерениями в дальней зоне (сплошная линия), 2) оптическим восстановлением по двум реализациям ближнего поля (штриховая и пунктирная линии); б) те же диаграммы, что и рис. 2а, но при использовании треугольной функции в оптической обработке.

Показан уровень фона (постоянная составляющая) до введения весовой функции (сплошная наклонная линия) и после введения веса (штриховая наклонная линия).

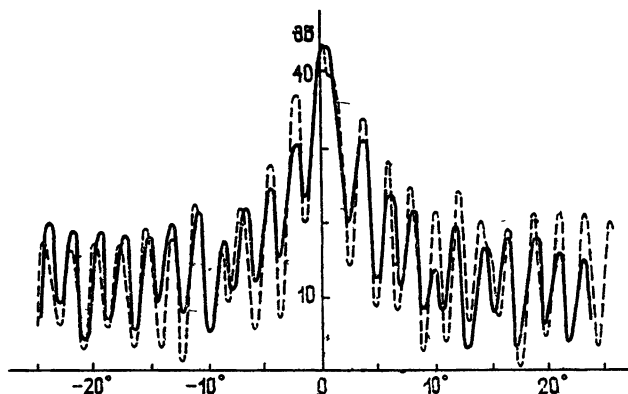


Рис 3. Различные реализации измерений диаграммы направленности акустической решетки в дальней зоне.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1615 (1973).
- 2 Ю. И. Белов, Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 2, 205 (1978)
- 3 В. И. Турчин, В. А. Фарфель, А. Л. Фогель, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 72 (1976).
- 4 В. И. Игнатьев, Ю. В. Сысоев, В. И. Турчин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1152 (1975).
- 5 В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, А. К. Чандаев, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 725 (1973).
- 6 В. М. Мещанкин, Радиотехника и электроника, 16, № 2, 375 (1971).
- 7 В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Оптические спектроанализаторы, изд. Сов. радио, М., 1972



## ХРОНИКА

### ХІІ ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ РАДИОВОЛН

Широкий круг вопросов, связанных с развитием комплексной проблемы распространения радиоволн, обсуждался на XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, проходившей в г. Томске в июне 1978 года. Конференция была организована Научным советом АН СССР по комплексной проблеме «Распространение радиоволн» совместно с Институтом оптики атмосферы СО АН СССР, Томским институтом автоматизированных систем управления и радиоэлектроники и Сибирским физико-техническим институтом Минвуза РСФСР.

Томск не случайно был выбран местом очередной всесоюзной встречи радиофизиков. Научные коллективы города, и прежде всего, коллективы — организаторы конференции на протяжении нескольких десятилетий успешно проводят крупные комплексные исследования в области распространения радиоволн широкого диапазона частот в различных средах: в земной атмосфере, ионосфере, космосе и др. На представительный научный форум съехалось свыше 600 специалистов из 157 научных организаций страны. На конференции одновременно работало 9 секций.

На заседаниях секции «Радиофизические исследования ионосферы» рассматривались перспективы новых радиофизических методов исследования ионосферы, особенности экваториальной ионосферы и ее влияние на трансэкваториальное распространение радиоволн, ионосферно-магнитосферные взаимодействия применительно к низким и экваториальным широтам. Большой интерес вызвали практические результаты измерений, проведенных на первом в СССР специальном комплексе по исследованию ионосферы методом некогерентного рассеяния.

Современному состоянию и задачам ионосферного моделирования посвящался пленарный доклад В. М. Полякова. На заседаниях секции обсуждалось дальнейшее развитие эффективных асимптотических и численных методов расчета распространения радиоволн; создание глобальных гибридных моделей ионосферы на основе совокупности теоретических исследований и обобщенных экспериментальных данных. Рекомендовано направить особые усилия исследователей на разработку моделей ионосферы низких и экваториальных широт, оказывающей большое влияние на дальнейшее трансэкваториальное распространение радиоволн.

Вопросы физики нелинейных явлений в ионосфере и разработки методов их исследования, а также возможности практического применения искусственных ионосферных возмущений в народном хозяйстве, обсуждались на заседаниях секции «Нелинейные эффекты, возникающие при воздействии на ионосферу мощным радиоизлучением». В последние годы возрастает интерес исследователей к явлениям, связанным с возникновением в ионосфере искусственных квазипериодических неоднородностей в поле стоячей волны под действием мощных радиоволн на частотах ниже критической.

Были рассмотрены результаты первых экспериментов, проводившихся в Горьком, по обратному рассеянию радиоволн на искусственной

регулярной ионосферной решетке. Обсуждались возможности использования ионосферной решетки для диагностики ионосферной плазмы.

В дальнейшем секция рекомендовала сосредоточить усилия на исследовании нелинейных процессов в ионосфере при наклонном падении мощного радиоизлучения на ионосферу, искусственной ионизации ионосферы при воздействии излучения мощных наземных радиосредств, разработке и создании современных средств диагностики нелинейных ионосферных явлений.

На заседаниях секции «Распространение декаметровых радиоволн» обсуждались экспериментальные исследования характеристик коротковолновых радиосигналов, исследования дальнего ионосферного распространения, включая спутниковые связи. Новым результатам исследования условий распространения декаметровых радиоволн на протяженных трассах был посвящен пленарный доклад В. В. Мигулина и др.

За последние годы получили дальнейшее развитие приближенные методы расчета параметров поля КВ сигналов, позволяющие получать численные оценки параметров поля КВ вдоль реальных трасс и выбирать рабочие частоты радиолиний, близкие к оптимальным. В части экспериментальных исследований изучено распространение КВ на трассах различной протяженности, в том числе кругосветных, увеличился объем исследований КВ трасс, проходящих через полярные области, проведены новые исследования воздействия мощного радиоизлучения на параметры ионосферы и вызванного им влияния на дальнейшее распространение КВ, изучено отражение КВ от метеоров.

Рекомендовалось в дальнейшем развивать комплексные экспериментальные и теоретические исследования КВ распространения с наиболее полным охватом реальных факторов с использованием ЭВМ и автоматизированной обработки экспериментальных данных, а также проводить работы по изучению воздействия мощного излучения на распространение КВ и исследованию распространения КВ через экваториальные и полярные области.

На заседаниях секции «Распространение километровых и более длинных радиоволн» рассматривались вопросы, связанные со структурой нижней ионосферы, распространением радиоволн НЧ и СНЧ диапазонов в волноводном канале Земля — ионосфера, распространением в поглощающих слоистых средах и др. Современному состоянию теории распространения СДВ был посвящен пленарный доклад Г. И. Макарова и В. В. Новикова. Особое значение приобретает решение одной из основных обратных задач теории распространения СДВ — определение эффективной модели нижней ионосферы по экспериментальным данным в СДВ (и ДВ) диапазоне и определение электрических свойств земной поверхности. Было отмечено, что к настоящему моменту на основе теоретических и экспериментальных исследований разработана методика построения прогнозов распространения сигналов СДВ диапазона в дневных условиях. Вопрос этот важен для прогнозирования СДВ полей.

Вопросы радиопросвечивания атмосфер планет, изучения отражения радиоволн поверхностями планет, распространения радиоволн через ионосферу при радиосвязи со спутниками и другие рассматривались на заседаниях секции «Распространение радиоволн в космосе». Обсуждались результаты теоретических и экспериментальных работ по распространению радиоволн в ионосферах и тропосферах Земли, Венеры, Марса и Юпитера. В пленарном докладе М. А. Колосова и О. И. Яковлева были приведены результаты исследования атмосферы и ионосферы Венеры, полученные методом радиопросвечивания с помощью аппаратов «Венера-9» и «Венера-10». Отмечалось, что в дальнейшем необходимо сосредоточить усилия исследователей на изучении поверхностей планет методами отражения радиоволн, на радиоинтерферометрии со

сверхдлинными базами и на исследованиях околосолнечной плазмы методом радиопросвечивания.

Современным проблемам распространения оптических волн в атмосфере был посвящен пленарный доклад В. Е. Зуева. На заседаниях секции «Распространение оптических волн» рассматривались проблемы молекулярного поглощения света, рассеяния света, распространения света в случайно-неоднородной среде и нелинейные эффекты, сопровождающие распространение мощного лазерного излучения. Создание теории молекулярного поглощения света крыльями линий и полос и использование новых теоретических и экспериментальных методов анализа тонкой структуры спектров поглощения атмосферных газов позволили объяснить обширный экспериментальный материал по поглощению и излучению света в атмосферных «окнах прозрачности» оптического диапазона.

За последние годы получены существенные экспериментальные данные по оптическим свойствам атмосферного аэрозоля. На данном этапе главной задачей является разработка на основе этих результатов модели оптических свойств атмосферного аэрозоля. Отмечалось, что большинство работ по тепловому воздействию лазерного излучения на атмосферный аэрозоль направлено на исследование физических процессов, сопровождающих взаимодействие лазерного излучения с аэрозолем. Возрос интерес к проблеме влияния турбулентной атмосферы на работу лазерных систем связи и оптической локации.

На заседаниях секции «Распространение в тропосфере радиоволн метрового — децимиллиметрового диапазонов» обсуждались результаты теоретического и экспериментального изучения особенностей дальнего тропосферного и дифракционного распространения, волноводного распространения радиоволн в тропосфере, молекулярного поглощения в парах воды, кислорода и примесных газах, ослабления в гидрометеорологических условиях, в том числе в толще атмосферы, облаках и осадках.

Исследование дальнего тропосферного распространения УКВ остается актуальной задачей в связи с развитием и совершенствованием тропосферных линий связи, а также в связи с решением проблемы электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств, которая в последнее время приобрела особую остроту. Этой проблеме был посвящен пленарный доклад А. И. Калинина и др. На заседаниях секции обсуждались вопросы, касающиеся связи гидрометеорологических и радиофизических явлений в открытых морских районах, возможности создания специальной аппаратуры для дистанционного изучения состояния морской поверхности, для дальней связи на ультракоротких волнах между судами и их береговыми базами. Экспериментально исследовано влияние неоднородностей тропосферы, дождя и мокрого снега на статистические характеристики сигналов в диапазонах 8 и 14 ГГц применительно к наземным радиорелейным линиям. Предложен ряд моделей тропосферы и получено значительное количество сведений об отдельных компонентах полного ослабления; такие сведения могут быть полезными при проектировании приемопередающих устройств в различных системах связи, локации, навигации и др.

Особое внимание в дальнейшем рекомендуется обратить на проблемы распространения сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн у земной поверхности с учетом влияния земных покровов и в толще тропосферы применительно к системам связи через ИСЗ.

На заседаниях секции «Распространение электромагнитных волн и собственные излучения земной поверхности» обсуждались результаты исследований земных покровов и атмосферы Земли радиофизическими методами, рассеяния радиоволн поверхностью Земли и моря, проблемы радиолокационного подповерхностного зондирования.

Заслушанные доклады и дискуссии в связи с ними позволяют констатировать резкое увеличение количества работ, посвященных определению характеристик подстилающей поверхности по рассеянным радиосигналам. Были отмечены успехи в изучении зависимости интенсивности и рассеяния СВЧ излучения от влажности грунтов, позволяющие использовать методы активного и пассивного зондирования для дистанционного определения влажности почв. Получены новые данные о рассеивающих свойствах поверхности акваторий в условиях волнения, пенных образований и загрязнений. Отмечалась необходимость в дальнейшей разработке моделей отражающих свойств поверхностей и определении характеристик отражающих поверхностей дистанционным радиозондированием. Отмечалось, что в дальнейшем необходимо составление программ комплексных экспериментов и проведение одновременных наблюдений состояния континентальных покровов и акваторий с помощью активных радиолокационных и пассивных радиометрических средств.

На заседании секции «Распространение радиоволн при наличии искусственных плазменных образований» обсуждались вопросы, связанные с распространением радиоволн через искусственные плазменные образования, рассеянием радиоволн регулярно-неоднородными плазменными образованиями и турбулентной плазмой, а также способы воздействия на плазменные образования и методы диагностики плазмы. Вопросы распространения радиоволн и импульсных сигналов в регулярно-неоднородных плазменных средах рассматривались в пленарном докладе Е. Н. Васильева и Ю. И. Орлова.

При исследовании полей в неоднородных средах широкое применение получили математические методы расчета стационарных полей в регулярно-неоднородных средах. На основе разработанных методов были исследованы физические закономерности распространения, рассеяния и излучения электромагнитных волн в плавно-неоднородной плазме и в ограниченных и сравнимых с длиной волны объемах плазмы. Большой интерес вызвали доклады, посвященные теории распространения и рассеяния радиоволн в ограниченной турбулентной среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, причем результаты этих работ уже могут быть использованы для анализа экспериментальных данных. Было отмечено увеличение, по сравнению с предыдущей конференцией, числа экспериментальных работ, особенно по проблеме воздействия на искусственные плазменные образования.

Конференция подвела итоги исследованиям по широкому кругу вопросов, связанных с распространением радиоволн, и отметила существенно возросший со времени проведения предыдущей конференции уровень экспериментальных исследований. Она наметила пути дальнейшего развития комплексных исследований для решения крупных народнохозяйственных задач.

С. А. Намазов, В. Д. Оппенгейм