

СОДЕРЖАНИЕ

Ганов С. П., Топтыгин И. Н. К вопросу о переносе альфвеновских и магнито- звуковых волн солнечным ветром	389
Веряев А. А., Цытович В. Н. Нижнегибридные солитоны	398
Кайдановский М. Н., Стоцкий А. А. Экспериментальные характеристики флуку- таций радиоизлучения облачной атмосферы на сантиметровых волнах	407
Кинбер Б. Е., Комиссарова Н. Н., Кравцов Ю. А. Лучевая теория распростране- ния волн в неоднородных рефракционных волноводах: трансформация мод и раскачка ширины волновых каналов	414
Ларионцев Е. Г., Серкин В. Н. Оптимизация процесса формирования ультрако- ротких импульсов света	425
Выслоух В. А., Егоров К. Д., Кандидов В. П. Численный эксперимент по фазо- вой компенсации теплового самовоздействия световых пучков	434
Боробьев В. В., Шеметов В. В. О тепловой самофокусировке лазерных пучков в движущихся средах	441
Менсов С. Н. Уплотненная запись информации голографическим методом	449
Ефремов Г. Ф., Казаков В. А. Уравнение с флюктуирующими параметрами для открытой динамической системы	458
Заворотный В. У. Четырехточечная функция когерентности поля за фазовым экраном в области сильных флюктуаций интенсивности волны	462
Гинзбург Н. С. Нелинейная теория усиления и генерации электромагнитных волн на аномальном эффекте Доплера	470
Долгов В. М., Лихолетова Л. Г. О применении термооптических эффектов в жидких кристаллах для визуализации электромагнитных полей	480
Сенченко В. В., Фиалковский А. Т. Симметричные электрические колебания ци- линдрического П-образного резонатора с частичным заполнением емкостно- го зазора диэлектриком	488
Эфендиев К. И., Бежанова А. И., Садых-заде Г. М. Об автоколебательных свой- ствах разряда в магнитном поле	497

Краткие сообщения и письма в редакцию

Лемента Ю. А., Фукс И. М. Распределение флюктуаций интенсивности УКВ сиг- налов, отраженных от поверхности моря	503
Зуб С. И., Клейман А. С. Двухфотонный резонанс в разнесенных когерентных полях	505
Саичев А. И. О возможности использования аппарата уравнений Колмогорова— Феллера для статистического анализа систем, находящихся под действием пуассоновских процессов с симметричными импульсами	506
Заворотный В. У. Сильные флюктуации интенсивности волны за случайно-неод- нородным слоем	508
Письмо в редакцию «Радиофизики» (Д. В. Корольков)	511
Письмо в редакцию «Радиофизики» (ответ на письмо Д. В. Королькова) (А. Г. Кисляков)	513

УДК 533.951 : 523.7

К ВОПРОСУ О ПЕРЕНОСЕ АЛЬФЕНОВСКИХ И МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН СОЛНЕЧНЫМ ВЕТРОМ

С. П. Ганов, И. Н. Топтыгин

В ВКБ приближении выведены уравнения, описывающие эволюцию волновых векторов, поляризаций и амплитуд магнитозвуковых и альфеновских волн в неоднородной движущейся среде. Результаты общей теории применены к задаче о распространении магнитогидродинамических волн в плазме солнечного ветра. Результаты произведенного рассмотрения находятся в качественном согласии с наблюдаемыми данными по анизотропии спектра альфеновских волн в солнечном ветре.

Исследование закономерностей переноса малых и конечных возмущений в солнечном ветре представляет интерес прежде всего для динамики самого потока солнечной плазмы, так как теплопроводности за счет кулоновских столкновений недостаточно для объяснения наблюдавшихся свойств солнечного ветра у орбиты Земли [1] и необходимо привлечь механизмы нагрева плазмы диссирирующими в ней волнами [2, 3]. Исследование магнитных возмущений, их эволюции с расстоянием, важно также для проблемы распространения галактических и солнечных космических лучей.

Оценки затухания альфеновских волн (A -волны) показывают [4], что достаточно длинные волны ($\lambda > 10^5$ км) могут распространяться на большие расстояния. A -волны неоднократно регистрировались в межпланетной плазме [5, 6]. Магнитозвуковые волны (M -волны) в нагретом солнечном ветре (при $T_i \approx 1,5 \cdot 10^5$ К) затухают на длине, меньшей 1 а. е. ≈ 150 млн. км, но в спокойном ветре (при $T_i \approx 4 \cdot 10^4$ К) расстояние, на которое они распространяются, возрастает на порядок. Здесь T_i — ионная температура в плазме. При достаточно большой амплитуде M -волны могут превращаться в ударные. Процесс укрупнения M -волн был зарегистрирован в межпланетном пространстве [7]. Многократно регистрировались ударные волны [8].

Ввиду вышеизложенного теоретическое рассмотрение переноса магнитогидродинамических волн (MGD волны) в солнечном ветре является весьма актуальным. Оно производилось, кроме уже упомянутой работы [4], в ряде работ [9–12]. Но некоторые результаты этих работ вызывают возражения и заставляют снова вернуться к указанной задаче. В работах [9–11] не учитывалось изменение направления поляризаций A -волн при их распространении в неоднородной среде. Между тем, для получения правильной зависимости амплитуды волны от координат и объяснения эффекта анизотропии волн в межпланетной среде необходимо учитывать изменение их поляризаций в процессе распространения. В работе [12] не учтено расширение межпланетной плазмы из-за ее радиального разлета и связанное с этим дополнительное уменьшение амплитуды A -волн. Кроме того, в указанных работах не рассматривались M -волны.

В настоящей работе в приближении ВКБ получены уравнения, позволяющие находить эволюцию волнового вектора, поляризации и амплитуды MGD волны малой амплитуды в неоднородной движущейся

среде с «вмороженным» в нее внешним магнитным полем. Результаты общей теории применены к рассмотрению переноса МГД волн солнечным ветром. Найдена пространственная зависимость амплитуды А- и М-волн. Выводы теории о наличии заметной анизотропии в распределении амплитуд волн, вызванной их распространением в неоднородной среде, находятся в качественном согласии с данными наблюдений.

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В случае малых возмущений, распространяющихся в неоднородной движущейся среде, ищем решение системы исходных магнитогидродинамических уравнений без диссилиативных членов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (2)$$

Значения плотности ρ_0 , скорости \mathbf{v}_0 , напряженности магнитного поля \mathbf{B}_0 , давления p_0 невозмущенной среды (фона) считаются заданными функциями координат, не зависящими от времени. Соответствующие малые волновые добавки ρ' , \mathbf{v}' , \mathbf{B}' , в свою очередь, представляются в виде разложений по масштабному фактору

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}, t) e^{i[\Phi(\mathbf{r}) - \omega t]}, \\ a(\mathbf{r}, t) &= a_1(\mathbf{r}, t) + a_2(\mathbf{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

и т. д. Здесь $a(\mathbf{r}, t)$ — амплитуда малого возмущения, являющаяся медленно меняющейся функцией своих аргументов по сравнению с $e^{i[\Phi(\mathbf{r}) - \omega t]}$, $\omega = \text{const}$ — заданная частота колебаний, $\Phi(\mathbf{r})$ — действительная функция координат, a_1 , a_2 и т. д. — различаются по порядку малости масштабного фактора $\lambda/L \ll 1$, где $\lambda = 2\pi\Phi/|\nabla\Phi|$ — длина волны, L — масштаб изменения фоновых величин. Заметим, что зависимость амплитуды от времени возникает при рассмотрении квазимонохроматического возмущения, т. е. пакета волн (см., например, [13, 14]). При этом частота каждой отдельной гармоники, входящей в пакет, остается постоянной в рассматриваемой стационарно неоднородной среде.

Линеаризуя систему (1) по волновым добавкам ρ' , \mathbf{v}' , \mathbf{B}' и удерживая в линеаризованной системе только члены нулевого порядка по масштабному фактору, придем к уравнениям, формально совпадающим с уравнениями для однородной среды:

$$\begin{aligned} \omega' \rho_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \rho_0 &= 0, \quad \mathbf{k} \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0] + \omega' \mathbf{B}_1 = 0, \\ -\frac{c_s^2}{\rho_0} \mathbf{k} \rho_1 + \omega' \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{B}_0}{4\pi\rho_0} \times [\mathbf{B}_1 \times \mathbf{k}] &= 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad \omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0, \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right), \quad (5)$$

причем \mathbf{k} — волновой вектор, c_s — скорость звука, s — энтропия.

Приравнивая нулю определитель системы и выражая из полученного алгебраического уравнения частоту ω , найдем связь между частотой и волновым вектором для трех волн, существующих в плазме с магнитным полем: альфеновской и двух магнитозвуковых. Но, в отличие от случая однородной среды, указанные зависимости будут представлять собой дифференциальные уравнения в частных производных относительно эйконала $\Phi(r)$, являющиеся аналогами уравнений Гамильтона — Якоби классической механики. Например, для А-волн это уравнение имеет вид

$$\omega = \frac{|\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r})|}{\sqrt{4\pi\rho_0}} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

для быстрой магнитозвуковой волны при $c_s \ll u_A$ —

$$\omega = u_A |\nabla \Phi(\mathbf{r})| + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (7)$$

и т. д. Здесь $u_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$ — альфеновская скорость.

Каждое из такого рода уравнений можно заменить системой канонических уравнений Гамильтона, введя время t как параметр и рассматривая правую часть выражений (6) и (7) как гамильтониан, зависящий от \mathbf{k} и \mathbf{r} :

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (8)$$

Из уравнений (8) и граничных условий $\mathbf{k}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{k}^0$ определяется зависимость $\mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{k}^0)$.

Затем из системы уравнений (4) можно найти связи между амплитудами волны $\rho_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{B}_1$. Для А-волны

$$\rho_1 = 0, \quad \mathbf{v}_1 = \mp \frac{\mathbf{B}_1}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{b}_0}{k_\perp} B_1, \quad (9)$$

где $\mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0 / B_0$, k_\perp — составляющая волнового вектора, перпендикулярная \mathbf{b}_0 , а знаки \mp относятся к случаям $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 \geq 0$. Для быстрой М-волны при $c_s \ll u_A$ получаем

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{k_\perp B_1}{kB_0}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{k}_\perp B_1}{k_\perp \sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{k} \times [\mathbf{b}_0 \times \mathbf{k}]}{kk_\perp} B_1. \quad (10)$$

Таким образом, направления поляризаций волн изменяются от точки к точке из-за изменения \mathbf{k} и \mathbf{b}_0 и полностью определяются уравнениями нулевого приближения по масштабному фактору.

Для определения амплитуд волновых добавок в 1-м порядке по масштабному фактору можно рассмотреть систему уравнений соответствующего порядка малости, которая получается из уравнений (1) при подстановке в них (2) и (3). Эту систему с помощью соотношений (9), (10) можно привести к одному уравнению, например, относительно напряженности \mathbf{B}_1 , которое и будет определять зависимость амплитуды от координат в ВКБ приближении. Однако в рассматриваемой задаче такая процедура весьма громоздка по сравнению, например, с задачей о поперечной электромагнитной волне в плазме, рассмотренной в работе [15], ввиду того, что число уравнений и число переменных возросло — в отличие от [15] мы рассматриваем трехмерный случай.

Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии, вытекающим из точной системы (1),

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}' = 0, \quad (11)$$

где плотность энергии U и плотность потока энергии \mathbf{I}' задаются формулами

$$U = \rho \epsilon + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi}; \quad (12)$$

$$\mathbf{I}' = \rho \mathbf{v} \left(\epsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (13)$$

Здесь ϵ — внутренняя энергия на единицу массы. Это позволяет с помощью уравнений нулевого порядка типа (9) — (10) сразу получить единое уравнение для искомой величины. Заметим, что использование энергетических соотношений для получения амплитуд в случае нелинейных волн хорошо известно (см., например, [16]).

При подстановке в (12) и (13) возмущенных значений величин $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + \mathbf{v}'' + \dots$ и т. д. нужно учесть, что соответствующие выражения квадратичны. Поэтому в них наряду с членами типа v'^2 войдут слагаемые вида $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}''$, где \mathbf{v}'' — добавка к скорости, квадратичная по амплитуде колебаний источника, создающего волновое возмущение. Но все такого рода члены можно исключить, воспользовавшись точными уравнениями (1) и тем фактом, что невозмущенные величины ρ_0 , \mathbf{v}_0 , \mathbf{B}_0 также удовлетворяют этим уравнениям. В результате уравнение (11) приводится к виду

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}' = Q', \quad (14)$$

где

$$U' = \frac{\rho_0 v'^2}{2} + \frac{c_s^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho' (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}') + \frac{B'^2}{8\pi}; \quad (15)$$

$$\mathbf{I}' = (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) \left(\frac{c_s^2 \rho'}{\rho_0} + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}' \right) + \frac{1}{4\pi} [[\mathbf{B}' \times \mathbf{v}_0] \times \mathbf{B}' + \mathbf{B}' \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0] + \mathbf{B}_0 \times [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}']]; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q' = & -\rho' \mathbf{v}' \cdot [\mathbf{v}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{v}_0] - \rho_0 \mathbf{v}_0 [\mathbf{v}' \times \operatorname{rot} \mathbf{v}'] - \frac{1}{4\pi} \mathbf{v}_0 \cdot [\operatorname{rot} \mathbf{B}' \times \mathbf{B}'] - \\ & - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \operatorname{rot} [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'] + \frac{\rho'^2}{4\pi \rho_0^3} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 - \\ & - \frac{\rho'}{4\pi \rho_0} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}' - \frac{\rho'}{4\pi \rho_0} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}' - \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Подчеркнем, что величины U' и \mathbf{I}' не являются плотностями энергии и ее потока для волнового возмущения; последние даются выражениями $U = U_0$ и $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0$ и удовлетворяют уравнению неразрывности, т. е. закону сохранения энергии.

Далее подставим в полученные соотношения (14) — (17) разложения (3) по масштабному фактору. Поскольку соотношения (15) — (17) билинейны по возмущенным величинам, нужно записать (3) в действительной форме, т. е. $\rho' = \rho_1 \cos \varphi + \rho_2 \sin \varphi$ и т. д., где $\varphi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) - \omega t$. При этом учтено, что между величинами первого и второго порядков существует сдвиг фаз на $\pi/2$, как это следует из системы (1). Пос-

ле подстановки удержим члены до первого порядка включительно по масштабному фактору; после этого уравнение (14) примет вид

$$\left\{ 2\omega U - 2k \cdot j - \rho_0 v_0 \cdot [v_1 \times [v_1 \times k]] - \frac{1}{2\pi} B_0 \cdot [k \times [v_1 \times B_1]] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} v_0 \cdot [[k \times B_1] \times B_1] - \frac{\rho_1}{4\pi\rho_0} [k \times B_1] \cdot [v_0 \times B_0] \right\} \sin \varphi \cos \varphi + \quad (18) \\ + \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} j - q \right) \cos^2 \varphi + (X_{\rho\rho_2} + X_v \cdot v_2 + X_b \cdot B_2) \cos 2\varphi = 0.$$

Здесь U , j , q отличаются от U' , I' , Q' заменой в последних ρ' , v' , B' на ρ_1 , v_1 и B_1 , соответственно; выражений для X_ρ , X_v , X_b мы не приводим. Первая группа членов, содержащая множитель $\sin \varphi \cos \varphi$, обращается в нуль в силу уравнений (4). Оставшиеся слагаемые усредним по периоду поля $T = 2\pi/\omega$, имея в виду, что зависимость амплитуд ρ_1 , ρ_2 и т. д. от времени слабая или вообще отсутствует. Тогда приходим к уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} j = q, \quad (19)$$

которое является следствием закона сохранения энергии и описывает эволюцию амплитуды малого возмущения в неоднородной движущейся среде. Заметим, что последняя группа членов в (19) также обращается в нуль, но она не представляет интереса, если не интересоваться вычислением поправок второго порядка по масштабному фактору.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МЕЖПЛАНЕТНОЙ СРЕДЕ

В межпланетном пространстве существует квазистационарный поток плазмы — солнечный ветер, скорость которого v_0 радиальна и на достаточно больших расстояниях от Солнца ($r \geq 0,1$ а. е.) постоянна по абсолютной величине, а плотность ρ_0 падает с расстоянием по закону r^{-2} [¹⁷]. Крупномасштабное магнитное поле B_0 вследствие вращения Солнца имеет силовые линии спиральной формы. Оно удовлетворительно описывается моделью Паркера [¹⁸]. В гелиоцентрической системе координат (r, θ, α) в плоскости гелиоэкватора компоненты поля даются формулами

$$B_{0r} = B^0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad B_{0\theta} = 0, \quad B_{0\alpha} = B^0 \frac{\Omega r_0^2}{v_0 r}, \quad (20)$$

где $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-6}$ рад $\cdot c^{-1}$ — угловая скорость вращения Солнца, B^0 — значение радиальной компоненты крупномасштабного поля на некотором расстоянии r_0 от Солнца. Величина B^0 — функция углов θ и α , но в пределах одного магнитного сектора мы будем считать ее постоянной.

В такой среде, согласно [⁴], волновой вектор А-волн изменяется с расстоянием следующим образом:

$$k_r = - \frac{\omega \pm u_{A\alpha} k_\alpha}{v_0 \pm u_{Ar}}, \quad k_\theta = k_\theta^0 \frac{r_0}{r}, \quad k_\alpha = k_\alpha^0 \frac{r_0}{r}, \quad (21)$$

где k_θ^0 и k_α^0 — значения соответствующих компонент волнового вектора при $r = r_0$, а знаки \pm относятся к случаям $k \cdot B_0 \geq 0$. Рассматривая стационарные волны ($\partial U / \partial t = 0$), из уравнений баланса (19) получим

$$\operatorname{div} B_1^2 [v_0 \pm u_A] = - \frac{B_1^2}{2} \left[1 - \frac{k_\theta^2}{k_\perp^2} \sin^2 \beta \right] \operatorname{div} v_0, \quad (22)$$

где β — угол между \mathbf{B}_0 и \mathbf{k} и согласно (20) $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Omega r}{v_0}$. Так как \mathbf{v}_0 направлена радиально и $u_{A\alpha}$ не зависит от угла α , то уравнение (22) легко интегрируется:

$$B_1(r) = B_1(r_0) \sqrt{\frac{(v_0 \pm u_{Ar})r_0}{v_0 \pm u_{Ar}}} \left(\frac{r_0}{r} \right) \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \frac{\operatorname{div} \mathbf{v}_0}{4(v_0 \pm u_{Ar})} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{k_\theta^2}{k_\perp^2} \sin^2 \beta \right] dr \right\}. \quad (23)$$

Если $v_0 = \text{const}$ и $u_{Ar} \ll v_0$, как это имеет место у земной орбиты и на более далеких расстояниях от Солнца, то $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 / 4(v_0 \pm u_{Ar}) \approx 1/2r$. При $k_\theta = 0$ и произвольных k_α и k_r получаем

$$B_1(r) = B_1(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2}, \quad (24)$$

а при $k_\alpha = 0$ и произвольных k_r и k_θ имеем

$$B_1(r) = B_1(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\omega/\Omega k_\theta^0 r_0)^2 - 1}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{arctg} \frac{(2\omega r^2/k_\theta^0 r^2 v_0) + 1}{\sqrt{(2\omega/\Omega k_\theta^0 r_0)^2 - 1}} \right\}. \quad (25)$$

Последняя формула верна только при $(2\omega/\Omega k_\theta^0 r_0) > 1$. Видно, что отличие (25) от (24) невелико при всех r .

Если $v_0 = \text{const}$, но альфвеновская скорость не мала по сравнению со скоростью ветра, как это, по-видимому, происходит при $r \gtrsim 0,1$ а. е., то при $k_\theta = 0$ и произвольных k_α и k_r получим

$$B_1(r) = B_1(r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \frac{(v_0 \pm u_{Ar})r_0}{v_0 \pm u_{Ar}}. \quad (26)$$

Соответствие формул (24) и (26) друг другу очевидно.

Рассмотрим теперь распространение М-волны в межпланетной среде. В общем случае формулы получаются весьма громоздкими, поэтому примем условие $c_s \ll u_A$, выполняющееся в спокойном солнечном ветре. Тогда решение уравнений Гамильтона (8) с использованием закона дисперсии (7) приводит к зависимости k_α и k_θ от r , совпадающей с (21). Компонента k_r определяется из уравнения

$$k_r v_0 + u_A \sqrt{k_r^2 + k_\alpha^2 + k_\theta^2} = \omega = \text{const}. \quad (27)$$

Если первоначально $k_\alpha^0 = k_\theta^0 = 0$, то волновой вектор и в последующие моменты времени направлен вдоль r . Рассматривая дальше только этот случай, найдем, что

$$\mathbf{j} = \frac{B_1^2}{4\pi} \left\{ \left(2v_0 + 2u_A + \frac{v_0^2}{u_A} \sin^2 \beta \right) \frac{r}{r} - (u_A + v_0) \cos \beta \mathbf{b}_0 \right\}, \quad (28)$$

$$q = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} [r^2 B_1^2 u_A \sin^2 \beta] - \frac{v_0 \cos^4 \beta}{4\pi r} B_1^2.$$

Из уравнения баланса энергии $\operatorname{div} \mathbf{j} = q$ для стационарной волны ($\partial U / \partial t = 0$) получим

$$B_1(r) = B_1(r_0) \frac{r_0}{r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos^2 \beta [v_0(1 + \sin^2 \beta) + 3(v_0^2/u_A) \sin^2 \beta - u_A]}{v_0(1 + \sin^2 \beta) + (v_0^2/u_A) \sin^2 \beta + u_A} \right\}. \quad (29)$$

Описываемая формулами (21) и (27) эволюция волновых векторов А- и М-волн такова, что с ростом r компоненты k_a и k_θ неограниченно уменьшаются, а k_r стремится к конечному значению. Другими словами, в процессе распространения возмущения от Солнца к периферии волновой вектор, уменьшаясь по абсолютной величине, вытягивается вдоль r . Учитывая при этом поляризации (9) и (10) магнитного поля, связанного с возмущением, видим, что с ростом r в А-волне вектор \mathbf{B}_1 стремится стать перпендикулярным к плоскости гелиоэкватора, а в М-волне при $c_s \ll u_A$ — параллельным этой плоскости. Указанная анизотропия проявляется тем отчетливее, чем больший путь прошла волна от источника до наблюдателя, и может быть использована при идентификации мод наблюданного волнового движения в солнечном ветре.

На рис. 1 представлена зависимость амплитуды B_1 от расстояния от Солнца r при распространении волн вдоль радиуса. За начальное r_0 принимается расстояние, на котором достигается равенство скоростей $u_{Ar}(r_0) = v_0$. Здесь $r_0 = 0,1$ а. е., $v_0 = 300$ км/с. Сплошная кривая соответствует А-волне, формула (26), штриховая — М-волне, формула (29). Изменение параметров фона в наблюдаемых пределах [17] незначительно сдвигает начальную точку и почти не меняет крутизну кривых.

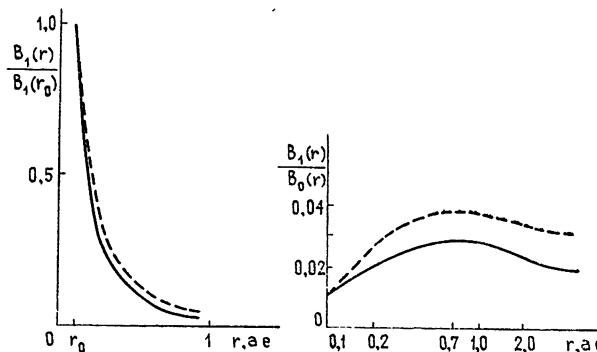


Рис. 1.

Рис. 2.

На рис. 2 изображена зависимость от расстояния отношения амплитуд этих же волн B_1 к невозмущенному магнитному полю B_0 . Мы положили для определенности, что в начальной точке $r_0 = 0,1$ а. е. $B_1/B_0 = 0,01$. Немонотонность кривых связана со специальным видом невозмущенного поля (20). Положение максимума определяется условием равенства компонент поля $B_{0r} = B_{0\theta}$, т. е. зависит от величины скорости ветра: здесь при $v_0 = 300$ км/с $r_{\max} \approx 0,74$ а. е., при усилении ветра максимум сдвигается от Солнца. Для А-волны величина B_1/B_0 вблизи Солнца возрастает как $r^{1/2}$, за пределами земной орбиты убывает как $r^{-1/2}$.

Необходимо заметить, что при распространении волн в неоднород-

ной среде может происходить линейная конверсия одних мод в другие при условии совпадения их фазовых скоростей. В случае А-волн и М-волн их фазовые скорости совпадают при распространении вдоль B_0 . Но ввиду того, что поляризация волн перекрываетяется слабо, ибо недиагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют малый множитель $\omega/\omega_B \ll 1$, где ω_B — ионная циклотронная частота, эффект взаимодействия мод мал.

В заключение проведем качественное сравнение полученных формул с данными по регистрации МГД волн в солнечном ветре [5, 6].

a. А-волны регистрируются надежно и проявляются как мелкомасштабные флуктуации среды с длиной волны $\lambda \approx 10^3 \div 10^6$ км. В межпланетной плазме масштаб неоднородности $L \sim 10^8$ км, так что условие ВКБ приближения хорошо выполняется. М-волны регистрируются сравнительно реже: в работе [5] их доля в общем энергетическом балансе оценивается как 10%. Однако вклад М-волн зависит от ионной температуры и может существенно возрастать в спокойные периоды деятельности Солнца [4]. Вместе с тем, при заданных фоновых параметрах соотношение между амплитудами А- и М-волн сохраняется при распространении возмущений; меньшая доля М-волн объясняется их более быстрым затуханием.

b. Наблюдаемая анизотропия флуктуаций магнитного поля в системе координат

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_0 \times \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_0 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}_0 \quad (30)$$

в среднем равна 5:4:1 и в ряде случаев имеет тенденцию к увеличению до 6:3:1 [5]. Как было показано выше, эволюция векторов \mathbf{k} и \mathbf{B}_1 приводит к вытягиванию вектора \mathbf{B}_1 перпендикулярно плоскости гелиоэкватора в А-волне и параллельно этой плоскости в М-волне при распространении возмущений от Солнца, что и согласуется с характером наблюдаемой анизотропии. Тенденция анизотропии к обострению может объясняться либо конверсией М-волн в А-волны, либо предложенной нами эволюцией волн, которая стремится, как мы видели, эту анизотропию увеличить. При этом первый механизм действует слабее. Наше сравнение выводов теории и данных наблюдений носит качественный характер и основано на предположении о том, что волны генерируются вблизи Солнца или выносятся из короны, а их амплитуды достаточно малы. Для построения более точной количественной теории переноса волн в солнечном ветре необходимо учесть возможность их генерации на разных расстояниях от Солнца в результате нестационарных процессов, а также их нелинейное взаимодействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Cuperman and A. Harten, *Astrophys. J.*, **162**, № 1, 315 (1970).
2. J. R. Jokipii and L. Davis, *Astrophys. J.*, **156**, № 3, 1101 (1969).
3. E. Parker, «Solar Wind», NASAP-308, ed. by C. P. Sonnett, P. I. Coleman and I. M. Wilcox, p. 161, 1972.
4. И. Н. Топтыгин, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 7, 971 (1973).
5. I. W. Belcher and L. Davis, *J. Geophys. Res.*, **76**, № 16, 3534 (1971).
6. S. C. Chang and A. Nishida, *Astrophys. Space Sci.*, **23**, № 2, 301 (1973).
7. J. K. Chao, *J. Geophys. Res.*, **78**, № 25, 5411 (1973).
8. М. Дгуэл, *Space Sci. Rev.*, **15**, № 4, 403 (1974).
9. Y. C. Wang, *J. Geophys. Res.*, **78**, № 31, 7221 (1973).
10. J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.*, **80**, № 7, 908 (1975).
11. H. J. Völk et. al, *Astrophys. Space Sci.*, **26**, № 2, 403 (1974).
12. I. Lerche, *Astrophys. Space Sci.*, **34**, № 2, 309 (1975).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лишин, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

14. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, стр. 3, Госатомиздат, М., 1963.
15. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
16. Л. А. Островский, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 5—6, 661 (1976).
17. Дж. Брандт, Солнечный ветер, изд. Мир, М., 1973.
18. Е. Паркер, Динамические процессы в межпланетной среде, изд. Мир, М., 1965.

Ленинградский политехнический
институт

Поступила в редакцию
21 сентября 1977 г.,
после переработки
21 сентября 1978 г.

THE PROBLEM OF ALFVEN AND MAGNETOSONIC WAVES
TRANSFER BY THE SOLAR WIND

S. P. Ganov, I. N. Toptygin

In the WKB approximation equations are derived describing the evolution of wave vectors, polarizations and amplitudes of magnetosonic and Alfvén waves in an inhomogeneous moving medium. Results of the general theory are applied to the problem of magnetohydrodynamic wave propagation in the solar wind plasma. These results are in the qualitative agreement with the observed data on the Alfvén wave spectrum anisotropy in the solar wind.

УДК 533.9.01 : 538 574.44 : 530 18

НИЖНЕГИБРИДНЫЕ СОЛИТОНЫ

A. A. Веряев, B. N. Цытович

В рамках гидродинамических уравнений с учетом кубической нелинейности описаны огибающие нижнегибридных волн, распространяющихся строго перпендикулярно магнитному полю. Оценен вклад в нелинейность продольных и поперечных низкочастотных полей. Учтены нелинейные процессы, идущие на удвоенной нижней гибридной частоте. Найдены солитонные решения полученных уравнений.

1. Известно, что если энергия, заключенная в ленгмюровских колебаниях, превосходит некоторый уровень

$$\frac{W}{nT} > (k_* r_d)^2$$

(где k_* — характерное волновое число в спектре колебаний), то однородной плазме становится энергетически выгоднее перейти в неоднородное состояние с образованием ямок плотности, заполненных колебаниями ленгмюровского поля (солитонов) [1, 2]. Подобные солитонные образования найдены уже и для других ветвей колебаний (см. [3] и ссылки там, а также [4, 5]). Легкость ввода энергии в плазму на частоте, близкой к нижней гибридной, явилась причиной пристального внимания к проблеме нагрева плазмы на этой частоте в замкнутых ловушках со стороны экспериментаторов. Нижнегибридные колебания скапливаются в области углов $\Theta \approx \pi/2$ (Θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и внешним магнитным полем \mathbf{B}_0) за счет рассеяния на электронах (см., например, [6]). Иначе говоря, возникают проблемы нелинейных волн [7] и конденсата на нижней гибридной частоте, аналогичные проблеме ленгмюровского конденсата. Одним из подходов к решению этой проблемы является модель газа слабовзаимодействующих солитонов. В настоящей работе рассматриваются нижнегибридные волны, распространяющиеся строго перпендикулярно к магнитному полю. Следуя методу, изложенному в [8, 9], получены нелинейные уравнения, описывающие огибающие нижнегибридного поля. Найдены солитонные решения уравнений.

2. Ограничиваем себя кубическими по полю E нелинейностями. Согласно [8], общее уравнение для амплитуды высокочастотной части поля при учете процессов, идущих через виртуальные низкочастотные поля, можно записать в виде

$$ik\epsilon_k E_k^+ = 8\pi \int \tilde{\sum}_{k, k_1, k_2, k_3} E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^- \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (1)$$

где

$$\tilde{\sum}_{k, k_1, k_2, k_3} = \sum_{k, k_1, k_2, k_3} + \frac{S_{k, k_1, -k_1} 8\pi S_{k-k_1, k_2, k_3}}{i |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \epsilon_{k-k_1}}. \quad (2)$$

Здесь E_k^+ и E_k^- — фурье-компоненты положительно и отрицательно час-

тотных частей полного поля E ; S и Σ — матричные элементы в выражениях для нелинейного заряда, $k = \{\mathbf{k}, \omega\}$. $\tilde{\Sigma}$ имеет вид (2), если низкочастотные поля продольны. Если теперь ввести огибающую высокочастотного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mathbf{k}}{k} E_k^+ \exp(i\omega_{LH} t - i\omega t + ik\mathbf{r}) dk d\omega \quad (3)$$

и перейти в (1) к пространственному представлению, то получится уравнение для огибающих нелинейных волн. Задача, следовательно, заключается в отыскании величины $\tilde{\Sigma}_{k, k_1, k_2, k_3}$ и дальнейшем анализе уравнения (1).

3. Для нахождения $\tilde{\Sigma}_{k, k_1, k_2, k_3}$ используем гидродинамические уравнения движения для каждой из компонент плазмы и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}^\alpha \nabla) \mathbf{v}^\alpha = \frac{e_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\mathbf{v}^\alpha \mathbf{B}]; \quad (4)$$

$$\operatorname{div} (n^\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \frac{\partial n^\alpha}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

В (4) $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{ext}}$. Выберем ось z вдоль \mathbf{B} , ось x , не нарушая общности, можно направить вдоль \mathbf{k} . Индекс α , указывающий на сорт частицы ($\alpha = e, i$), будем опускать. Из (4) и (5) получим

$$S'_{ilm} = -\frac{e^3 n_0}{m^2} \left(\frac{\omega_{ij} \omega_{1sl} \omega_{2jm} \tilde{k}_{2s}}{\tilde{\omega}_1^2 \tilde{\omega}_2^2 \tilde{\omega}_2^2} + \frac{\omega_{1sl} \omega_{2lm} \tilde{k}_{1s}}{\omega_1 \tilde{\omega}_1^2 \tilde{\omega}_2^2} \right); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum'_{iglm} &= -\frac{ie^4 n_0}{m^3 \tilde{\omega}_1^2 \tilde{\omega}_2^2 \tilde{\omega}_3^2} \left\{ \frac{\omega_{ij} \omega_{1pg} \omega_{2sl} \omega_{3rm} (\omega - \omega_1)_{jr} (k - k_1)_p \tilde{k}_{3s}}{\tilde{\omega}^2 [(\omega - \omega_1)^2 - \omega_H^2]} + \right. \\ &+ \frac{\omega_{ij} \omega_{1g} \omega_{2sl} \omega_{3pm} (\omega - \omega_1)_{rp} k_{1r} \tilde{k}_{3s}}{\tilde{\omega}^2 [(\omega - \omega_1)^2 - \omega_H^2]} + \frac{\omega_{1pg} \omega_{2sl} \omega_{3jm} (\omega - \omega_1)_{lj} k_{1p} \tilde{k}_{3s}}{\omega_1 [(\omega - \omega_1)^2 - \omega_H^2]} + \\ &\left. + \frac{\omega_{1lg} \omega_{2rl} \omega_{3sm} (k - k_1)_r \tilde{k}_{3s}}{(\omega - \omega_1) \omega_3} + \frac{\omega_{1ig} \omega_{2sl} \omega_{3jm} (\omega - \omega_1)_{rj} (k - k_1)_r \tilde{k}_{3s}}{(\omega - \omega_1) [(\omega - \omega_1)^2 - \omega_H^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_{ij} = \omega \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \omega_H$, $(\omega - \omega_1)_{ij} = (\omega - \omega_1) \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \omega_H$, $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \omega_H^2$, ω_H — циклотронная частота, n_0 — невозмущенная плотность плазмы, ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга; все индексы, за исключением i , пробегают значения 1, 2, $i=1$. Штрих у S'_{ilm} и \sum'_{iglm} указывает, что эти величины стоят в выражениях для нелинейных токов, однако, используя закон сохранения заряда $\rho_k = j_k \mathbf{k}/\omega$, легко перейти от (6) и (7) к S и Σ . S'_{ilm} и \sum'_{iglm} несимметризованы по последним двум индексам 1, 2 и 2, 3; в дальнейшем будем приводить уже симметризованные выражения.

При получении S' и Σ' в уравнениях (4), (5) n^α и \mathbf{v}^α раскладывались по степеням напряженности электрического поля E , т. е. предполагается в дальнейшем, что выполнено условие $\frac{v_\sim^2}{v_\Phi^2} = \frac{W}{nT} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{He}^2 \omega_{H\ell}^2} \ll 1$,

Здесь v_Φ — фазовая скорость волн, v_\sim — скорость, приобретаемая частицами в поле волны. Приближение же холодной плазмы $v_{Ta}/v_\Phi \ll 1$ будет согласовано с остальными предположениями. Следовательно, разложение (4) и (5) оказывается правомерным при описании модуляционной неустойчивости.

Просуммируем и упростим (6) и (7), приведя к нужному виду, исходя из того, что $\omega_{Hl} \ll \omega_{LH} \ll \omega_{He}$ (предел $\omega_{LH} \rightarrow \omega_{Hl}$ не рассматривается) и что высокочастотные поля продольны: $E_{kl} = E_k(k_i/k)$.

Квадратичные электронные матричные элементы малы в сравнении с ионными, поэтому их не приводим. Для $\Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^e$ получаем

$$\Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^e \approx -\frac{in_0 e^4 (kk_1)(k_2 k_3)}{2 m_e^3 \omega_{He}^6 k_1 k_2 k_3} \omega_2 \omega_3 \left[\frac{(k, k_2)}{\omega_2} + \frac{(k_1, k_3)}{\omega_3} \right]. \quad (8)$$

Для ионов получаются из (6), (7) различные значения матричных элементов в трех предельных случаях:

1) $|\omega - \omega_1| \gg \omega_{Hl}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^{(I)} &\approx \Sigma_0^{(I)} + \Delta \Sigma^{(I)} = -\frac{in_0 e_i^4 (kk_1)(k_2 k_3)(k - k_1)^2}{2 m_i^3 \omega \omega_1 \omega_2 \omega_3 (\omega - \omega_1)^2 k_1 k_2 k_3} - \\ &- \frac{in_0 e_i^4 (kk_1)(k_2 k_3)}{2 m_i^3 \omega \omega_1 \omega_2 \omega_3 (\omega - \omega_1) k_1 k_2 k_3} \left[\frac{(k - k_1, k)}{\omega} + \frac{(k - k_1, k_1)}{\omega_1} + \right. \\ &\left. + \frac{(k - k_1, k_2)}{\omega_2} + \frac{(k - k_1, k_3)}{\omega_3} \right]; \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} S_{k-k_1, k_2, k_3}^{(I)} &\approx -\frac{e_i^3 n_0 (k - k_1)^2 (k_2 k_3)}{2 m_i^2 (\omega - \omega_1)^2 \omega_2 \omega_3 k_2 k_3}, \\ S_{k, k_1, k-k_1}^{(I)} &\approx -\frac{e_i^3 n_0 (kk_1)(k - k_1)^2}{2 m_i^2 (\omega - \omega_1)^2 \omega \omega_1 k_1 |k - k_1|}; \end{aligned} \quad (9b)$$

2) $\omega_{Hl} \frac{\omega_{Hl}}{\omega_{LH}} \ll |\omega - \omega_1| \ll \omega_{Hl}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^{(I)} &\approx \Sigma_0^{(I)} + \Delta \Sigma^{(I)} = -\frac{in_0 e_i^4 (kk_1)(k_2 k_3)(k - k_1)^2}{2 m_i^3 \omega \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_{Hl}^2 k_1 k_2 k_3} - \\ &- \frac{in_0 e_i^4 (kk_1)(k_2 k_3)}{2 m_i^3 (\omega - \omega_1) \omega \omega_1 \omega_2 \omega_3 k_1 k_2 k_3} \left[\frac{(k - k_1, k_2)}{\omega_2} + \frac{(k - k_1, k_3)}{\omega_3} \right]; \end{aligned} \quad (10a)$$

$$S_{k-k_1, k_2, k_3}^{(I)} \approx \frac{e_i^3 n_0 (k - k_1)^2 (k_2 k_3)}{2 m_i^2 \omega_{Hl}^2 \omega_2 \omega_3 k_2 k_3}, \quad (10b)$$

$$S_{k, k_1, k-k_1}^{(I)} \approx \frac{e_i^3 n_0 (kk_1)(k - k_1)^2}{2 m_i^2 \omega \omega_1 \omega_{Hl}^2 k_1 |k - k_1|};$$

3) $|\omega - \omega_1| \ll \omega_{Hl} \frac{\omega_{Hl}}{\omega_{LH}}$

$$\Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^{(I)} \approx \Sigma_0^{(I)} + \Delta \Sigma^{(I)} = \frac{ie_i^4 n_0 (kk_1)(k_2 k_3)(k - k_1)^2}{2 m_i^3 \omega \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_{Hl}^2 k_1 k_2 k_3} +$$

$$+ \frac{i n_0 e_i^4 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3)}{2 m_i^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 k_1 k_2 k_3} \left[\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{\omega^2} + \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{\omega_1 \omega_2} + \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3)}{\omega_1 \omega_3} + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_2)}{\omega \omega_2} + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_3)}{\omega \omega_3} \right]. \quad (11)$$

Квадратичные матричные элементы в этом третьем случае те же, что и во втором.

Заметим, что $\Delta \Sigma^{(i)} \ll \Sigma_0^{(i)}$, однако они приведены потому, что при вычислении $\tilde{\Sigma}$ величины $\Sigma_0^{(i)}$ компенсируются вторым слагаемым в (2), уменьшаясь в $\varepsilon_{k-k_1}^e / \varepsilon_{k-k_1}$ раз, и оказывается, что в первом и втором случаях в качестве $\tilde{\Sigma}$ нужно использовать $\Delta \Sigma^{(i)}$. В третьем случае в нелинейность уравнения (1) вносят такой же по величине вклад и процессы, идущие на удвоенной нижней гибридной частоте. Этую нелинейность можно учесть дополнительным слагаемым $4\pi \int \sum_{k, k_1, k_2, k_3}^{++} \times \times E_{k_1}^- E_{k_2}^+ E_{k_3}^+ \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3$ справа в (1). Σ^{++} имеет вид (2), но при этом ω_1 и ω_3 имеют другие знаки, что нужно иметь в виду при упрощении (6), (7) и переходе в (1) к уравнению для огибающей. Для электронов в $\tilde{\Sigma}^{(e)++}$ преобладает $\Sigma^{(e)++}$, совпадающая с (8), для ионов квадратичные матричные элементы $S_{k-k_1, k_2, k_3}^{(l)++}$ и $S_{k, k_1, k-k_1}^{(l)++}$ совпадают с (9 б), а кубические $\Sigma_{k, k_1, k_2, k_3}^{(l)++}$ — с (9 а). Сравнивая нелинейности, получим, что в плотной плазме $(\omega_{pe} \gg \omega_{He}, \omega_{LH} = \sqrt{\omega_{Hl} \omega_{He}}) \tilde{\Sigma}^{eff} = \Sigma_0^{(l)} \frac{\varepsilon_{k-k_1}^l}{\varepsilon_{k-k_1}} + \Delta \Sigma^{(l)} + \Sigma^{(e)++} + \Sigma^{(l)++} + \Delta \Sigma^{(l)++} + \Sigma_0^{(l)++} + \frac{8\pi S^{++} S^{++}}{i |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \varepsilon_{k-k_1}}$ и в менее плотной $(\omega_{He}^2 \gg \omega_{pe}^2 \gg \omega_{He} \omega_{Hl}, \omega_{LH} = \omega_{pl}) \tilde{\Sigma}^{eff} = \Delta \Sigma^{(l)} + \Delta \Sigma^{(l)++} + \Sigma_0^{(l)++} + \frac{S^{++} 8\pi S^{++}}{i |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \varepsilon_{k-k_1}}$.

4. Следуя изложенному вначале, переходим в (1) к пространственному представлению с соответствующими значениями величин $\tilde{\Sigma}^{eff}$. В одномерном случае получим следующие уравнения:

$$\hat{L}E(x, t) \equiv \frac{2i \omega_{pl}^2}{\omega_{LH}^3} \frac{\partial E}{\partial t} + \gamma \frac{v_{Ti}^2 \omega_{si}^2}{\omega_{LH}^4} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\omega_{pl}^4}{\pi n_0 m_i \omega_{LH}^5} \frac{i |E|^2}{v} \frac{\partial E}{\partial x}; \quad (12)$$

$$\hat{L}E(x, t) = \frac{\omega_{pl}^4}{4\pi n_0 m_i \omega_{LH}^5} \frac{iE}{v} \left[E^* \frac{\partial E}{\partial x} - E \frac{\partial E^*}{\partial x} \right]; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}E(x, t) &= \frac{\omega_{pl}^4}{4\pi n_0 m_i \omega_{Hl}^3 \omega_{He}^2} \left[4E \left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|^2 + E^2 \frac{\partial^2 E^*}{\partial x^2} + \frac{5}{3} |E|^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{3} E^* \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\omega_{LH}^2 = \omega_{He} \omega_{Hl}); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{L}E(x, t) = \frac{1}{4\pi n_0 m_i \omega_{pl}^2} \left[\frac{2}{3} |E|^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{2}{3} E^* \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\omega_{LH} = \omega_{pl}). \quad (15)$$

Здесь и далее $\gamma = 3$, если $\omega_{LH} = \omega_{pl}$, и $\gamma = 15/4$, если $\omega_{LH}^2 = \omega_{He} \omega_{Hl}$ ($T_e = T_i = T$; обобщение на случай неизотермической плазмы очевидно). При получении (12) — (15) мы считали, что уравнения описывают нелинейные стационарные возмущения, движущиеся в плазме со ско-

ростью $(\omega - \omega_1)/(k - k_1) \approx v$, положили $\omega \approx |\omega_1| \approx \omega_2 \approx |\omega_3| \approx \omega_{LH}$ и использовали соотношение $E_{-k}^- = (E_k^+)^*$. Следует отметить, что, вычисляя приближенные величины S и Σ в знаменателях выражений (6) и (7), мы пренебрегали малыми слагаемыми в $\tilde{\omega}^2$ и $(\omega - \omega_1)^2 - \omega_H^2$. Однако если учесть разложение $\Sigma_0^{(i)}$ и $S^{(i)}$ по малым параметрам $\left(\frac{\omega_{Hi}}{\omega - \omega_1}\right)^2$, $\left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_{Hi}}\right)^2$, $\left(\frac{\omega_{Hi}}{\omega_{LH}}\right)^2$, то получим, что (12) и (13) можно использовать практически при тех же условиях, что и раньше $|\omega - \omega_1| \gg \gg (\omega_{Hi}^2 \omega_{LH})^{1/3}$, $\frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{LH}} \ll |\omega - \omega_1| \ll \left(\frac{\omega_{Hi}^4}{\omega_{LH}}\right)^{1/3} \leq \omega_{Hi} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/6}$, а в третьем случае члены от разложения $S^{(i)}$ и $\Sigma_0^{(i)}$ по параметру $\frac{\omega_{Hi}^2}{\omega_{LH}^2} \sim \frac{m_e}{m_i}$ того же порядка, что и $\Delta S^{(i)}$, но они компенсируются, а поэтому уравнения (14), (15) остаются справедливыми. Переходя от (1) к (12) — (15) в качестве ϵ_k использовано было значение диэлектрической проницаемости, получающееся при условии $k v_{Ti} / \omega_{Ha} \ll 1$ (см., например, [10, 11]), впрочем, при $k v_{Ti} / \omega_{Hi} \gg 1$ дисперсия ионов такая же [11]. Нелинейности в (12) и (13) расходятся при $v \rightarrow 0$, однако условия, при которых справедливы эти уравнения, дают ограничения на v снизу.

Уравнения (12) — (15) легко обезразмерить и привести к такому виду:

$$\hat{L} E \equiv i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = \frac{i |E|^2}{u} \frac{\partial E}{\partial \xi}; \quad (16)$$

$$\hat{L} E = \frac{i E}{u} \left(E^* \frac{\partial E}{\partial \xi} - E \frac{\partial E^*}{\partial \xi} \right); \quad (17)$$

$$\hat{L} E = \frac{5}{3} |E|^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} - \frac{1}{3} E^* \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)^2 + 4 E \left| \frac{\partial E}{\partial \xi} \right|^2 + E^2 \frac{\partial^2 E^*}{\partial \xi^2}; \quad (18)$$

$$\hat{L} E = |E|^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + E^* \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right)^2. \quad (19)$$

В (16) — (19) безразмерные время $\tau = \frac{t \omega_{LH}^3}{2 \omega_{pl}^2}$, координата $\xi = \frac{x \omega_{LH}^2}{\sqrt{\gamma} v_{Ti} \omega_{pl}}$, скорость $u = \frac{v}{v_0}$, $v_0 = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} v_{Ti} \frac{\omega_{LH}}{\omega_{pl}}$, поле $|E|^2 = \frac{2 \mu |E|^2}{\pi n_0 T} \left(\frac{\omega_{pl}}{\omega_{LH}} \right)^\nu$, $\nu = 4$ в определении поля, входящего в (16), (17) и $\nu = 2$ — в (18), (19), μ для этих уравнений есть соответственно $1/\gamma$, $1/4\gamma$, $1/15$, $1/36$. При частоте $\omega_{LH} = \sqrt{\omega_{Hi} \omega_{He}}$ возможно $|E|^2 \gg 1$.

5. Будем искать решения уравнений (16) — (19) в виде

$$E = \epsilon(\zeta) e^{i\psi}, \quad \psi = -\Omega\tau + \int_0^\zeta \psi' [\epsilon(\zeta')] d\zeta, \quad \zeta = \xi - u\tau. \quad (20)$$

Кроме того, после интегрирования уравнения для фазы будем полагать константу интегрирования такой, чтобы не было расходимости ψ' при $\zeta \rightarrow 0$. Из (16) легко получить после разделения действительной

и мнимой частей уравнения для $\psi'(\epsilon)$ и $\epsilon(\zeta)$, интегрирование которых дает

$$\epsilon(\zeta) \approx \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{\epsilon_0^2}{4u} \zeta}}, \quad \psi' = \frac{\epsilon^2(\zeta)}{4u} + \frac{u}{2}, \quad (21)$$

$$\Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\epsilon_0^4}{32u^2}, \quad \frac{\epsilon_0^2}{8u^2} \gg 1;$$

$$\epsilon(\zeta) = \frac{\epsilon_0}{\operatorname{ch} \frac{\epsilon_0}{2} \zeta}, \quad \psi' = \frac{\epsilon^2(\zeta)}{4u} + \frac{u}{2}, \quad \Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\epsilon_0^2}{4}, \quad \frac{\epsilon_0^2}{8u^2} \ll 1. \quad (22)$$

Решением уравнения (17) являются

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\operatorname{ch} \frac{\epsilon_0}{2} \zeta}, \quad \psi' \approx \frac{u}{2}, \quad \Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\epsilon_0^2}{2}. \quad (23)$$

В нелинейности уравнения (18) решающее значение на поведение огибающей оказывают первое и последнее слагаемые, а они приводят к касковым (остроконечным) солитонам, аналогичным тем, которые получены в [5]:

$$\begin{aligned} \psi' &= -\frac{3u}{2\epsilon^2} \left[\left(-\frac{2}{3}\epsilon^2 + 1 \right)^{1/2} - 1 \right], \quad \text{при } \epsilon \ll 1, \quad \psi' \approx \frac{u}{2}, \\ 1 - \frac{8}{3}\epsilon^2 &\approx \operatorname{th}^2 \left[\sqrt{1 - \frac{8}{3}\epsilon^2} + \sqrt{-\Omega - \frac{u^2}{4}} |\zeta| \right], \quad (24) \\ \epsilon_0 &= \epsilon_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Характерная полуширина ξ_* такого солитона ($\epsilon(\xi_*) = \epsilon_0/2$) есть

$\xi_* = \frac{\operatorname{arth} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{-\Omega - \frac{u^2}{4}}}.$ Нелинейный сдвиг частоты Ω остается неопределенным. Он только ограничен неравенствами $\Omega < -\frac{u^2}{4}$ и $\frac{u^2}{4} \frac{\omega_{LH}^3}{2\omega_{pl}^2} \ll \omega_{LH}$.

Особенность решения (24) мнимая, так как само уравнение (18) — для огибающей с высокочастотным наполнением, а $\lambda \gg r_{He} = v_{Te}/\omega_{He}$. Уравнение (19) не имеет решений в виде уединенных волн — солитонов.

Для согласованности найденных решений уравнений с предположениями, сделанными при получении самих уравнений, необходимо потребовать, чтобы нелинейный сдвиг частоты $|\Omega|$ оказался много меньше самой частоты

$$|\Omega| \tau = |\omega^N| t \ll \omega_{LH} t \quad (25)$$

и характерный размер солитона L_*

$$L_* \gg \lambda \gg \max\{r_{He}, r_{di}\}. \quad (26)$$

6. Будем считать низкочастотные электрические поля E_{k-k_1} попечерными. Причем, при адиабатически медленных изменениях магнитного поля δB и плотности δn можем сразу написать в одномерном случае следующие уравнения для огибающей:

$$\left(2i\omega_{pl}\frac{\partial}{\partial t} + 3v_{Tl}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E = \frac{\delta n}{n_0}\omega_{pl}^2 E = \frac{\delta B}{B_0}\omega_{pl}^2 E \quad (\omega_{LH} = \omega_{pl}); \quad (27)$$

$$\left(2i\omega_{LH}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{15}{4}v_{Tl}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E = 2\frac{\delta B}{B_0}\omega_{LH}^2 E \quad (\omega_{LH}^2 = \omega_{He}\omega_{Hi}). \quad (28)$$

Второе из равенств в (27) записано при использовании условия вмопрежности магнитного поля. Другое уравнение для δB получим, исключив поле E из уравнений Максвелла, в одном из которых можно пренебречь током смещения, но нужно учесть нелинейный ток ($j_{k-k_1}^N$)_y = = $2 \int S'_{ymn} \frac{k_2 k_3 n}{k_2 k_3} E_{k_2}^+ E_{k_3}^- \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_2 dk_3$. Здесь S' определяется в общем случае выражением (6), по повторяющимся индексам m и n производится суммирование. Для частоты $\omega_{LH}^2 = \omega_{He}\omega_{Hi}$ получим

$$\left(\frac{\omega_{pl}^2}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\delta B}{B_0} = \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2 B_0^2} \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2} \quad (|\omega - \omega_1| \gg \omega_{Hi}); \quad (29)$$

$$\left(\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\delta B}{B_0} = \frac{4\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2 B_0^2} \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2} \quad (|\omega - \omega_1| \ll \omega_{Hi}). \quad (30)$$

Здесь $v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_0 m_i}$ — альфвеновская скорость, c — скорость света. Для другого значения нижней гибридной частоты $\omega_{LH} = \omega_{pl}$ легко получить

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\omega_{pl}^2}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\delta B}{B_0} = 2\omega_{Hi}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{|E|^2}{B_0^2} \quad \left(\omega_{Hi} \ll |\omega - \omega_1| \ll \omega_{Hi} \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}\right); \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\delta B}{B_0} = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{|E|^2}{B_0^2} \quad (|\omega - \omega_1| \ll \omega_{Hi}). \quad (32)$$

В пределе, когда $|\omega - \omega_1| \gg \omega_{Hi} \frac{\omega_{He}}{\omega_{pe}}$, уравнение в данном случае совпадает с (29). Приведем решения только тех систем уравнений, которые дают значения Ω и L_* , удовлетворяющие неравенствам (25), (26). Система уравнений (28), (30) разрешает существование солитонов, движущихся с доальфвеновской скоростью $v < v_A$. Полагая $\frac{\delta B}{B_0} = \frac{\delta B(x-vt)}{B_0}$,

легко проинтегрировать (30) и прийти к

$$i\frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = -\frac{|E|^2 E}{1-M^2}. \quad (33)$$

Здесь $\tau = \frac{t\omega_{LH}}{2}$, $\xi = \frac{2x\omega_{LH}}{\sqrt{15}v_{Tl}}$, $|E|^2 = \frac{8\omega_{pe}^2 |E|^2}{\omega_{He}^2 B_0^2}$, $M = \frac{v}{v_A} = \frac{u}{c_A}$,

$c_A = \frac{v_A}{v_0}$, $v_0^2 = \frac{15}{16}v_{Tl}^2$, $u = \frac{v}{v_0}$. Решением (33) являются

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\operatorname{ch} \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2(1-M^2)}} (\xi - u \tau)}, \quad (34)$$

$$\psi' = -\Omega \tau + \frac{u}{2} (\xi - u \tau), \quad \Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\varepsilon_0^2}{2(1-M^2)}.$$

Для другого значения частоты $\omega_{LH} = \omega_{pl}$ система уравнений (27), (32) дает решение полностью аналогичное (34) при других определениях безразмерных величин.

7. В общем случае, рассматривая сильнонелинейные низкегибридные волны, нужно одновременно учитывать вклад, вносимый в нелинейность продольными и поперечными низкочастотными полями. Сравнивая, однако, отдельные нелинейности, учитывая приближения, при которых они получены, и эффективные размеры солитонов L_* , нетрудно прийти к условиям реализации тех или иных решений и к условиям применимости рассматриваемых приближений. Например, из (14) и (30) при учете неравенства $\omega - \omega_1 \ll \omega_{H1}^2/\omega_{LH}$ (см. (11), $\omega - \omega_1$ определяется дисперсией) следует, что в плазме могут реализоваться решения (24), если $v_A^2 \gg v_{Te}^2 (\omega_{LH}/\omega_{pl})$, т. е. при выполнении этого неравенства можно пренебречь вихревыми усредненными возмущениями низкочастотного поля.

Наличие составляющей k_z может существенно повлиять на нелинейности и привести к иным уравнениям для огибающих [6]. Настоящее же рассмотрение, как показывает подробный анализ, справедливо в конусе углов $\cos^2 \Theta \leq (m_e/m_i)$, где колебания носят либо чисто ионный, либо электронно-ионный характер. Именно для этой области углов, согласно [6], характерна слабая перекачка колебаний в спектре $\omega_k(\Theta, k)$ по углу Θ и сильная по модулю волнового вектора \mathbf{k} , приводящая к проблеме конденсата. В трехмерном случае при этих значениях угла Θ уравнения (12) — (15) будут содержать операцию div с обеих сторон равенств, которую можно снять в одномерном случае, и производные $\partial/\partial x$ и $\partial^2/\partial x^2$ заменятся на ∇ и Δ от величины (3). В гидродинамических уравнениях можно учесть тепловое движение частиц, введя члены $(T_a/n_a)\nabla n_a$. В выражениях для матричных элементов (6), (7) это приведет к замене $\omega_{ij} \rightarrow \omega \delta_{ij} - \frac{v_{Ta}^2}{\omega} k_i k_m \delta_{mj} + i \varepsilon_{ij3} \omega_{Ha}$, $\omega^3 \rightarrow \omega^3 - k^2 v_{Ta}^2 - \omega_{Ha}^2$ и к появлению дополнительных слагаемых, в (kv_{Ta}/ω_{Ha}) раз меньших основных. Исходя из выражений (6), (7), можно в пределе $B_0 \rightarrow 0$, $|\omega - \omega_1| \ll |k - k_1| v_{Te}$ прийти к уравнениям для ленгмюровских солитонов, а также получить соответствующие результаты работы [5] для верхнего гибридного резонанса. Укажем в заключение, что все полученные нелинейности сохраняют число квантов $N = \int |\varepsilon|^2 d\xi$ ((14) — лишь при условии, что ε и ψ' — четные функции ζ).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, 159, 767 (1964).
2. А. Гайлitis, Изв. АН Латв. ССР, серия физ. тех. наук, 4, 13 (1965).
3. А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман, Письма в ЖЭТФ, 24, 53 (1976).
4. A. N. Kaufman and L. Stenflo, Physica Scripta, 11, 269 (1975).
5. M. Porkolab and M. V. Goldman, Phys. Fluids, 19, 872 (1976).
6. Б. И. Стурман, ЖЭТФ, 71, 613 (1976).
7. H. H. Kuehl, Phys. Fluids., 19, 1972 (1976).

8. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 70, 1785 (1976).
9. В. Н. Цытович, Препринт № 181 ФИАН, 1976.
10. А. И. Ахиезер и др., Электродинамика плазмы, изд. Наука, М., 1974.
11. H. Wilhelmsson, Physica Scripta, 14, 60 (1976).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
26 декабря 1977 г.,
после доработки
23 октября 1978 г.

LOWER-HYBRID SOLITONS

A. A. Veryaev, V. N. Tsytovich

Lower-hybrid envelopes propagating strictly perpendicular to the magnetic field are described in the frames of hydrodynamic equations taking into account the cubic nonlinearity. The contribution of longitudinal and transverse low-frequency field to the nonlinearity is evaluated. Nonlinear processes occurred at the double low-hybrid frequency are regarded. Soliton solutions of equations obtained have been found.

УДК 551.501.8

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЛУКТУАЦИЙ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ НА САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

М. Н. Кайдановский, А. А. Стоцкий

Приведены результаты наблюдений флюктуаций собственного радиоизлучения облачной атмосферы Земли на волнах 1,35, 2,08; 3,9 и 6,52 см. Получены структурные функции флюктуаций и зависимость интенсивности флюктуаций от длины волн. Показана высокая степень корреляции флюктуаций на разных волнах.

Флюктуации собственного излучения облачной атмосферы являются одним из основных факторов, ограничивающих реальную чувствительность современных радиотелескопов сантиметровых волн. В связи с этим представляет интерес выяснение основных характеристик этих флюктуаций, в первую очередь таких, как структурная функция, зависимость интенсивности от длины волны (спектр) и степень корреляции флюктуаций на разных волнах. Имеющиеся экспериментальные данные в этой области пока весьма ограничены. Настоящая работа посвящена экспериментальному определению указанных характеристик флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы в сантиметровом диапазоне волн.

Методика наблюдений. Наблюдения проводились в июне месяце 1976 года на радиотелескопе РАТАН-600 с помощью комплекта штатных радиометров на волнах $\lambda = 2,08$; 3,9; 6,52 см [1] и радиометра на волне $\lambda = 1,35$ см, предназначенного специально для атмосферных наблюдений [2]. Флюктуационные чувствительности радиометров с антенной (среднеквадратичная величина $\sigma_{\text{ш}}$) при постоянной времени интегрирования 1 с приведены в табл. 1.

Записи радиоизлучения атмосферы проводились одновременно на всех волнах в виде сеансов продолжительностью около двух часов каждый. Отсчеты снимались через 12,5 с. Всего было получено и обработано 44 записи.

Облучатели радиометров располагались вблизи фокуса антенны, так что излучение на разных волнах принималось синхронно практически из одной и той же области атмосферы. Во время наблюдений радиотелескоп был направлен в зенит. В каналах сравнения штатного комплекта радиометров применялись небольшие рупорные антенны, направленные в небо. Квазинулевой метод приема осуществлялся изменением затухания в каналах сравнения с помощью переменных аттенюаторов. В радиометре на волне 1,35 см в канале сравнения была согласованная нагрузка. Квазинулевой метод реализовывался путем «подшумливания» канала антенны.

Таблица 1

$\lambda, \text{ см}$	$\sigma_{\text{ш}}, \text{ К}$
1,35	0,15
2,08	0,02
3,9	0,01
6,52	0,03

Измерения флюктуаций радиоизлучения атмосферы проводились в ясную погоду, при разрывной облачности без дождя и при сплошной облачности с моросящим дождем. Пример записи флюктуаций радиоизлучения атмосферы при разрывной облачности, полученный одновременно на разных волнах, приведен на рис. 1.

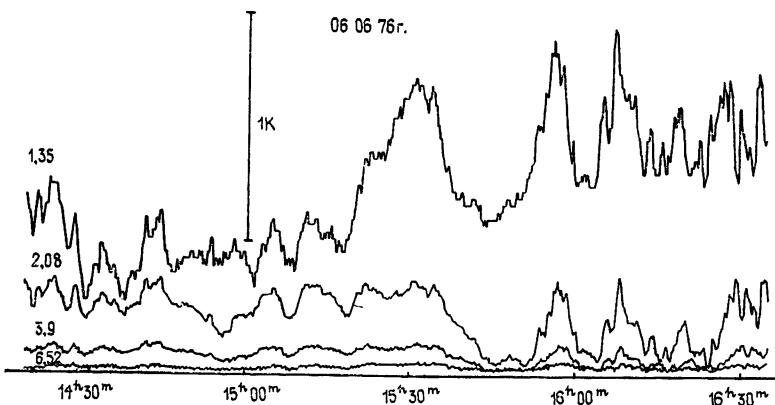


Рис. 1. Пример одновременной записи флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы на волнах 1,35; 2,08; 3,9 и 6,52 см.

Интенсивность и временные структурные функции флюктуаций. В ходе первичной обработки и анализа экспериментального материала выяснилось, что уверенно регистрировались флюктуации радиоизлучения атмосферы лишь при наличии облаков. Это позволяет сделать вывод, что для наших условий наблюдений среднеквадратичная величина флюктуаций радиоизлучения безоблачной атмосферы не превышает значений, указанных в табл. 1 (оценка относится к временным интервалам, не превышающим 400 с).

Структурные функции $D(\tau)$, рассчитанные по записям радиоизлучения разрывной облачности, а также по записям, полученным при сплошной облачности с моросящим дождем, приведены на рис. 2. На рис. 3 построены соответствующие средние структурные функции. По оси ординат на рис. 2 и 3 отложен также масштаб для среднеквадратич-

ных значений флюктуаций яркостной температуры $\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{D(\tau)}{2}}$.

Заметно, что скорость нарастания средних структурных функций несколько меньше, чем у степенных функций. В области временных масштабов $\tau > 400$ с структурные функции имеют тенденцию к насыщению. Это можно объяснить ограниченными пространственными масштабами неоднородностей в облаках, а также эффектом пространственного сглаживания крупномасштабных неоднородностей, одновременно излучающих как в антенну, так и в рупоры каналов сравнения радиометров на волнах 2,08; 3,9 и 6,52 см. По-видимому, имели место оба этих эффекта. С одной стороны, при сплошной облачности, со значительно большими максимальными размерами неоднородностей, стремление структурных функций к насыщению заметно меньше. С другой стороны, уменьшение насыщения наблюдается при укорочении длины волны, когда ослабляется эффект пространственного сглаживания. На волне 1,35 см, где применен радиометр с согласованной нагрузкой в канале сравнения, пространственное сглаживание вообще отсутствует и эффект насыщения минимален.

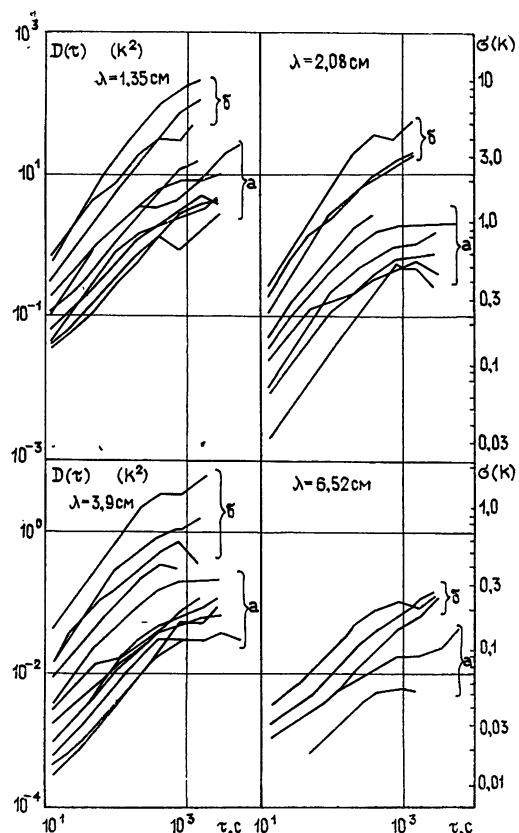


Рис. 2. Экспериментальные временные структурные функции флуктуаций радиоизлучения облачной атмосферы на разных волнах (λ): а) разрывная облачность без дождя; б) сплошная облачность, моросящий дождь.

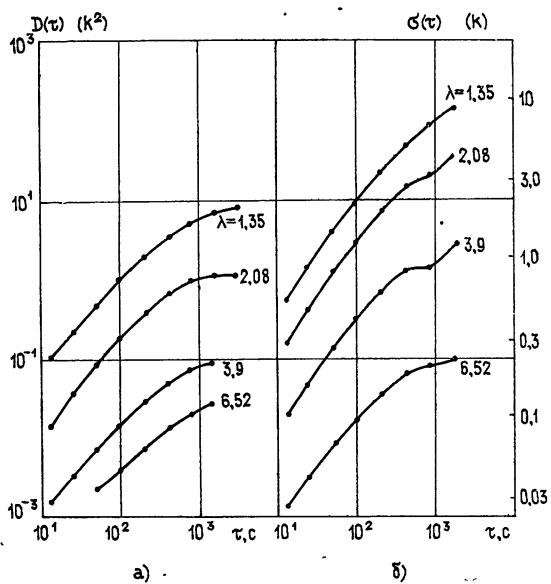


Рис. 3. Средние временные структурные функции флуктуаций радиоизлучения облачной атмосферы; а) разрывная облачность без дождя; б) сплошная облачность, моросящий дождь.

При аппроксимации средних структурных функций в области малых интервалов времени ($\tau < 100$ с) степенной функцией $D(\tau) = C^2 \tau^\nu$ для показателя степени ν были вычислены значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

$\lambda, \text{ см}$	ν	
	Разрывная облачность	Сплошная облачность, дождь
1,35	1,19	1,56
2,08	1,39	1,66
3,9	1,14	1,49
6,52	0,98	1,36

Значения ν , полученные для разрывной облачности, близки к величине $\nu = 1,33$, найденной в аналогичных условиях при наблюдениях флюктуаций радиоизлучения в миллиметровом диапазоне ($\lambda = 0,325$ см) [3].

Спектр флюктуаций. По средним структурным функциям $D(\tau)$, полученным на разных длинах волн λ , были рас-

считаны спектры $\sigma(\lambda)$ для восьми значений τ (рис. 4). Видно, что форма спектра практически не зависит от величины τ . При аппроксимации участков спектра степенной функцией $\sigma(\lambda) = A\lambda^{-\gamma}$ для спектрального индекса γ были получены значения, приведенные в табл. 3.

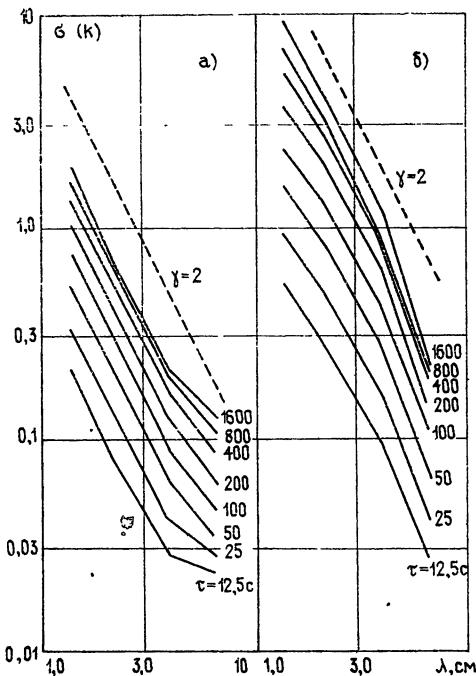


Рис. 4. Зависимость интенсивности флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы от длины волны; а) разрывная облачность без дожда; б) сплошная облачность, моросящий дождь.

Таблица 3

Участок спектра, см	γ	
	Разрывная облачность	Сплошная облачность, дождь
1,35—2,08	1,95	1,5
2,08—3,9	2,05	1,8
3,9—6,52	1,3	2,8

Значение $\gamma \approx 2$, соответствующее интервалу длин волн 1,35—3,9 см в условиях разрывной облачности, совпадает со значением спектрального индекса, рассчитанного для случая радиоизлучения водяных капель с размерами, много меньшими длины волны [4, 5].

Корреляция флюктуаций на разных волнах. Возрастающий характер структурных функций (рис. 2, 3) показывает, что основной вклад в энергию флюктуаций вносят низкочастотные составляющие. Поэтому обычный коэффициент корреляции, получаемый в результате перемножения реализаций, будет характеризовать главным образом взаимную корреляцию низкочастотных составляющих записей флюктуаций. Однако, как отмечалось выше, низкочастотные компоненты наиболее подвержены искажениям вследствие эффекта пространственного сглаживания. Следовательно, такая оценка взаимной корреляции флюктуаций на разных волнах будет некорректной. Более полные характеристики взаимной корреляции флюктуаций можно получить, вычисляя структурный коэффициент взаимной корреляции $M(\tau)$, который дает возможность раздельно оценить степень взаимной корреляции разных составляющих флюктуаций:

$$M(\tau) = \frac{[X(t + \tau) - X(t)][Y(t + \tau) - Y(t)]}{\sqrt{[X(t + \tau) - X(t)]^2 [Y(t + \tau) - Y(t)]^2}},$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — флюктуационные процессы, между которыми ищется корреляция.

Функции $M(\tau)$ вычислялись для каждой пары записей флюктуаций на волнах 2,08 и 3,9 см, имеющих наибольшее отношение сигнал/шум. Анализ этих функций показал, что влияние пространственного сглаживания становится существенным для компонент с характерными масштабами $\tau > 800$ с. В области $\tau < 100$ с также наблюдается уменьшение корреляции, что может быть объяснено уменьшением отношения сигнал/шум для высокочастотных составляющих флюктуаций. Существенного различия в виде функций $M(\tau)$ для записей, полученных при разрывной облачности и при сплошной облачности с дождем, не наблюдалось.

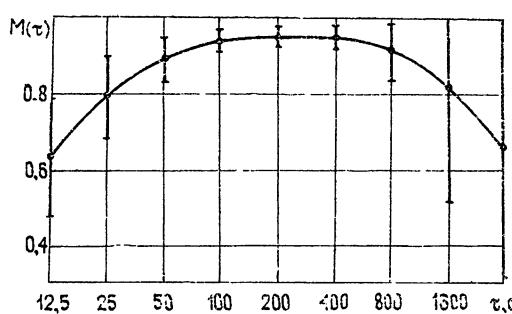


Рис. 5. Структурный коэффициент взаимной корреляции флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы на волнах 2,08 и 3,9 см.

На рис. 5 построена средняя функция $M(\tau)$. Вертикальные линии показывают среднеквадратичную величину разброса для разных реализаций. Для оценки корреляции флюктуаций излучения облачной атмосферы на двух рассматриваемых волнах, не искаженных аппаратурными эффектами, может служить репрезентативная часть функции $M(\tau)$, лежащая в интервале $100 \text{ с} < \tau < 800 \text{ с}$. Величина полученного таким образом коэффициента корреляции флюктуаций на волнах 2,08 и 3,9 см оказывается равной $0,95 \pm 0,03$.

Высокая степень корреляции флюктуаций на разных волнах иллюстрируется рис. 6, где изображена часть записи, приведенной на рис. 1. Для наглядности масштабы записей на разных волнах по оси ординат выбраны так, чтобы дисперсии флюктуаций были равны.

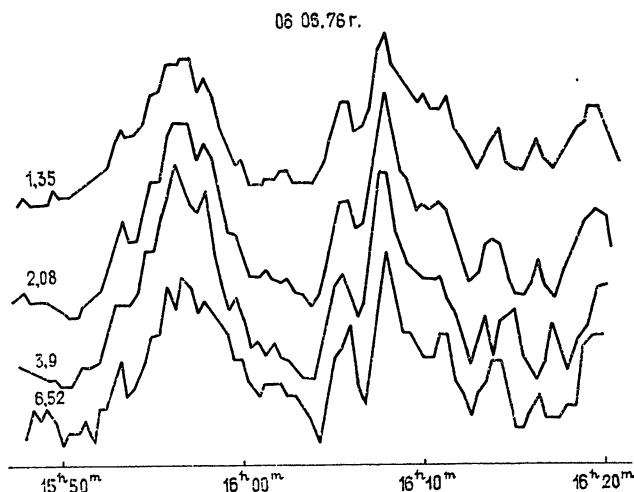


Рис. 6. Фрагмент одновременной записи флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы на волнах 1,35; 2,08; 3,9 и 6,52 см. Для удобства сравнения вертикальные масштабы на разных волнах выбраны разными, так чтобы дисперсии всех записей были равны.

Полученные экспериментальные данные позволяют оценить значения основных характеристик флюктуаций радиоизлучения облачной атмосферы на сантиметровых волнах в летнее время.

Сильная корреляция флюктуаций на разных волнах и близкая, в среднем, к квадратичной зависимость их интенсивности от частоты свидетельствуют о том, что радиоизлучение облачной атмосферы обусловлено, главным образом, излучением капель сконденсированной воды.

Возрастающий характер полученных структурных функций показывает, что помехи, создаваемые этими флюктуациями при радиоастрономических наблюдениях, будут тем существеннее, чем больше время наблюдения. В этом смысле неблагоприятным является режим сопровождения радиоисточника, а также режим прохождения при наблюдении протяженных источников.

Следует отметить, что высокая степень корреляции атмосферных флюктуаций на разных волнах и отличие их спектра от спектра большинства космических источников могут быть использованы для чистки радиоизображения от атмосферных помех при радиоастрономических наблюдениях в условиях облачной атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Парицкий и др., Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 11, 1581 (1976).
2. М. Н. Кайдановский, Ю. А. Немлихер, А. А. Стоцкий, И. А. Струков, Приборы и техника эксперимента, № 5, 145 (1977).
3. М. Н. Кайдановский, Т. А. Магамадова, А. А. Стоцкий, В. И. Чернышов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 11, 1644 (1976).

4. Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954.
5. К. С Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, М., 1951.

Ленинградский филиал Специальной
астрофизической обсерватории
АН СССР

Поступила в редакцию
30 мая 1978 г.

EXPERIMENTAL CHARACTERISTICS OF RADIO EMISSION FLUCTUATIONS OF CLOUDINESS ATMOSPHERE AT CENTIMETER WAVELENGTH

M. N. Kaidanovskij, A. A. Stotskij

Observational results of proper radiation fluctuations of the cloudiness Earth atmosphere at the wavelengths 1.35; 2.08; 3.9 and 6.52 cm are presented. Structural fluctuation functions and the fluctuation intensity dependence on the wavelength have been obtained. A high degree of the fluctuation correlation at different wavelengths is shown.

УДК 621.372.8.09

**ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В НЕОДНОРОДНЫХ РЕФРАКЦИОННЫХ ВОЛНОВОДАХ:
ТРАНСФОРМАЦИЯ МОД И РАСКАЧКА ШИРИНЫ
ВОЛНОВЫХ КАНАЛОВ**

Б. Е. Кинбер, Н. Н. Комиссарова, Ю. А. Кравцов

Предложен лучевой подход к описанию трансформации нормальных волн в неоднородных участках рефракционных волноводов. Введение дискретных параметров луча в волноводе (координаты нижних и верхних точек поворота луча) позволило выявить эффект раскачки ширины волнового канала. Получены аналитические оценки амплитуды колебаний ширины канала. Раскачка ширины симметричного канала с параболическим профилем проиллюстрирована численным примером.

Получена простая оценка числа нормальных волн, возбужденных после неоднородного участка. Указаны два эффекта, которые могут быть причиной дополнительных (к обычному поглощению) потерь энергии, захваченной в волновые каналы. Во-первых, это «высыпание» лучей из канала вследствие раскачки его ширины, если волновод ограничен сравнительно невысоким барьером, как это имеет место в случае межслойного *FE*-канала в ионосфере. Во-вторых, часть энергии первичной волны может трансформироваться в моды с большим поглощением, что может оказаться существенным для сверхдлинных радиоволн в волноводе Земля — ионосфера.

1. Лучевой подход к описанию трансформации нормальных волн. Вопрос о поведении волнового поля в плавно неоднородных рефракционных волноводах* рассматривался во многих работах (см., например, работы [1—7], большая часть которых посвящена адиабатическим модам, т. е. приближенным нормальным волнам, отвечающим сохранению адиабатического инварианта для лучей). До последнего времени, однако, не удавалось описать взаимодействие нормальных волн в неоднородных волновых каналах.

В данной работе взаимодействие нормальных волн в неоднородном участке волнового канала описывается на основе метода геометрической оптики. При таком методе, уже использованном в работах [8—11] для случая волновода с резкими границами, вычисление коэффициентов межмодовой трансформации сводится к разложению геометрооптического поля на выходе из нерегулярного участка по собственным волнам регулярного рефракционного волновода.

В работах [8—11] было показано, что трансформация мод в нерегулярном волноводе с резкими границами тесно связана с эффектом раскачки направлений лучей (сам эффект раскачки был обнаружен ранее в [12]). Оказывается, что раскачка направлений лучей происходит и в рефракционных волноводах (предварительное сообщение об этом содержится в [9] и [24]), при этом возникает также раскачка ширины волнового канала. Здесь мы излагаем результаты аналитических и численных

* Рефракционными мы называем волноводы, образующиеся вследствие рефракции волн, например ионосферные волновые каналы или подводные звуковые каналы.

расчетов амплитуды раскачки волнового канала, а также приводим оценки числа возбуждаемых мод*.

2. Эффект раскачки ширины волнового канала. Поведение лучей в двумерно-неоднородной среде с проницаемостью $\epsilon(x, z)$ описывается уравнениями

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon(x, z)}{\partial x}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon(x, z)}{\partial z}, \quad (1)$$

где τ — параметр вдоль луча, связанный с длиной дуги луча σ соотношением $d\tau = d\sigma/\sqrt{\epsilon}$.

В строго слоистой среде, когда $\epsilon = \epsilon(z)$ и $\partial \epsilon / \partial x = 0$, уравнения (1) допускают периодические решения $z(\tau)$, сосредоточенные в окрестности максимума проницаемости $\epsilon(z)$. Нормальным волнам в таком рефракционном волноводе соответствуют системы лучей, ограниченные сверху и снизу прямолинейными каустиками $z = \underline{z}$ и $z = \bar{z}$ (рис. 1). Можно было бы ожидать, что после прохождения волны через неоднородный участок верхние (\bar{z}) и нижние (\underline{z}) точки поворота лучей тоже будут иметь прямолинейные огибающие. В действительности, однако, уширение (или сужение) волнового канала происходит немонотонным образом и сопровождается, как будет показано ниже, появлением осцилляций, схематически показанных на рис. 2. Возникновение этих осцилляций мы и называем раскачкой ширины волнового канала. Это явление родственно эффекту раскачки направлений лучей в волноводе с резкими границами [8–12].

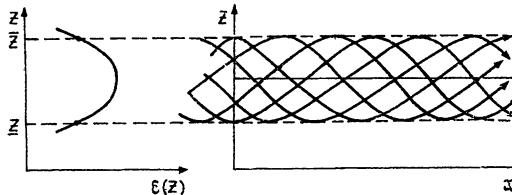


Рис. 1.

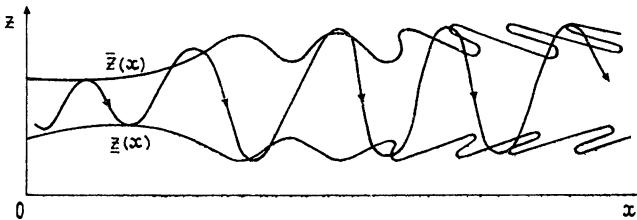


Рис. 2.

Для выявления эффекта раскачки целесообразно перейти от дифференциальных уравнений (1), описывающих непрерывные траектории лучей $x = x(\tau)$, $z = z(\tau)$, к системе конечно-разностных уравнений для каких-либо дискретных параметров, характеризующих осциллирующие траектории**. Переходя (в п. 3) к дискретным параметрам, дальней-

* Для описания межмодовой трансформации в нерегулярных рефракционных волноводах могут быть использованы и другие подходы: метод поперечных сечений [11, 13–16] и метод параболического уравнения [17]. Опубликованных материалов, однако, еще недостаточно для детального сопоставления результатов.

** Описание непрерывного осцилляторного процесса при помощи дискретного набора параметров является распространенным приемом. В теории колебаний этот прием лежит в основе метода точечных отображений [18, 19], а также в основе конечно-разностных форм асимптотических методов [20].

ший анализ задачи мы проведем по схеме, предложенной в работах [8–10].

3. Дискретные параметры лучей. Ниже мы будем интересоваться только координатами нижних ($\underline{x}_s, \underline{z}_s$) и верхних (\bar{x}_s, \bar{z}_s) точек поворота луча на s -м шаге. Координаты точек поворота луча на s -м и $s+1$ -м шагах связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &= \underline{x}_s + X_s, \quad \underline{x}_{s+1} = \bar{x}_s + \bar{X}_s, \\ \bar{z}_s &= \zeta_s(\underline{z}_s) + \delta_s, \quad \underline{z}_{s+1} = \zeta_s(\bar{z}_s) + \underline{\delta}_s, \end{aligned} \quad (2)$$

характеризующими точечное отображение $(\underline{x}_s, \underline{z}_s) \rightarrow (\bar{x}_s, \bar{z}_s) \rightarrow (\underline{x}_{s+1}, \underline{z}_{s+1})$. Здесь X_s — длина полушага восходящей ветви луча, а \bar{X}_s — длина полушага нисходящей ветви (рис. 3). Величина $\zeta_s(\underline{z}_s)$ представляет собой ординату верхней точки поворота луча в «горизонтально однородном» канале с «замороженной» проницаемостью $\epsilon = \epsilon(\underline{x}_s, z)$, отвечающей сечению $x = \underline{x}_s$, так что

$$\epsilon(\underline{x}_s, \zeta_s) = \epsilon(\underline{x}_s, \underline{z}_s). \quad (3)$$

Аналогично этому величина $\zeta_s(\bar{z}_s)$ определена равенством $\epsilon(\bar{x}_s, \bar{z}_s) = \epsilon(\bar{x}_s, \zeta_s)$. Наконец, величины δ_s и $\underline{\delta}_s$ описывают влияние горизонтальной неоднородности канала.

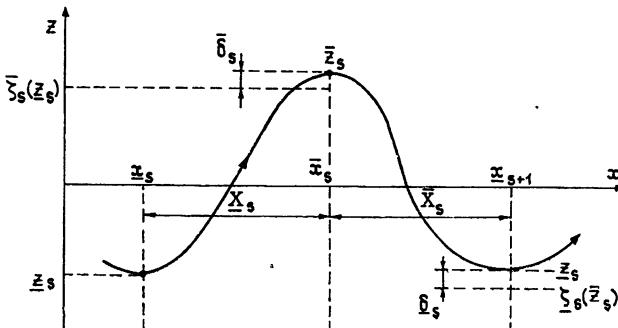


Рис. 3.

Все приращения X_s , \bar{X}_s , δ_s и $\underline{\delta}_s$ могут быть найдены только путем решения системы уравнений (1) на интервалах от одной точки поворота до другой, при этом значения этих приращений зависят от координат предшествующей точки поворота

$$\begin{aligned} X_s &= X_s(\underline{x}_s, \underline{z}_s), \quad \bar{X}_s = \bar{X}_s(\bar{x}_s, \bar{z}_s), \\ \delta_s &= \delta_s(\underline{x}_s, \underline{z}_s), \quad \underline{\delta}_s = \underline{\delta}_s(\bar{x}_s, \bar{z}_s). \end{aligned} \quad (4)$$

В общем случае записать явные выражения для приращений X_s , δ_s невозможно, но если продольный градиент проницаемости $\epsilon(x, z)$ достаточно мал,

$$\mu = \left| \frac{\partial \epsilon / \partial x}{\partial \epsilon / \partial z} \right| \sim \frac{L_z}{L_x} \ll 1, \quad (5)$$

где L_z и L_x — масштабы изменения проницаемости по осям z и x соответственно, то уравнения (1) можно решить методом возмущений, считая, что в нулевом приближении $\partial \epsilon / \partial x = 0$.

Стандартные приемы теории возмущений применительно к лучам [16] дают для старших членов разложений \underline{X}_s и $\underline{\delta}_s$ по степеням μ следующие значения:

$$\underline{X}_s \approx \underline{n}_s \int_{\underline{z}_s}^{\underline{\zeta}_s} [\varepsilon(\underline{x}_s, z) - \underline{n}_s^2]^{-1/2} dz; \quad (6)$$

$$\underline{\delta}_s \approx \frac{\underline{n}_s}{\underline{\gamma}_s} \int_{\underline{z}_s}^{\underline{\zeta}_s} \left[\frac{\partial \varepsilon(\underline{x}_s, z)}{\partial x} - \frac{\partial \underline{n}_s^2}{\partial x} \right] \frac{dz}{[\varepsilon(\underline{x}_s, z) - \underline{n}_s^2]^{1/2}}. \quad (7)$$

Здесь обозначено

$$\underline{n}_s = \sqrt{\varepsilon(\underline{x}_s, \underline{z}_s)}, \quad \underline{\gamma}_s = \partial \varepsilon(\underline{x}_s, \underline{z}_s) / \partial z.$$

Выражения для \bar{X}_s и $\bar{\delta}_s$ отличаются от (6) и (7) заменой \underline{x}_s , \underline{z}_s , \underline{n}_s , $\underline{\gamma}_s$, $\underline{\zeta}_s$ на \bar{x}_s , \bar{z}_s , \bar{n}_s , $\bar{\gamma}_s$, $\bar{\zeta}_s$.

Отметим, что согласно (7) ширина канала остается постоянной ($\underline{\delta}_s = \bar{\delta}_s = 0$) не только в отсутствие горизонтальной неоднородности, но и в горизонтально-неоднородной среде с проницаемостью специального вида $\varepsilon(x, z) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(z)$, поскольку в этом случае

$$\frac{\partial \varepsilon(\underline{x}_s, z)}{\partial x} = \frac{\partial \underline{n}^2}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_1(\underline{x}_s)}{\partial x}. \quad (8)$$

Это согласуется с результатами работы [1], в которой впервые было обращено внимание на указанную особенность волноводов в среде с проницаемостью вида $\varepsilon = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(z)$.

4. *Периодичность по непрерывному индексу.* Рассмотрим гладкий переход от одного полубесконечного однородного волновода к другому. Пусть из левого однородного волновода (т. е. из $x = -\infty$) к нерегулярному участку приближается m -я нормальная волна. Выберем опорный луч ($s = 0$) где-то далеко слева от перехода и перенумеруем соседние с опорным лучи, относящиеся к нулевому шагу, при помощи начального параметра ξ , меняющегося от нуля до единицы: $0 \leq \xi < 1$. После этого введем, как в [8–10], непрерывный индекс $\Theta = s + \xi$, целая часть которого характеризует число шагов луча, а дробная часть — номер луча.

С введением параметра Θ координаты точек поворота $\underline{x}_s(\xi)$, $\bar{x}_s(\xi)$, $\underline{z}_s(\xi)$, $\bar{z}_s(\xi)$ записываются как $\underline{x}(\Theta)$, $\bar{x}(\Theta)$, $\underline{z}(\Theta)$, $\bar{z}(\Theta)$, а уравнения (2) принимают вид

$$\underline{x}(\Theta) = \underline{x}(\Theta) + \underline{X}(\Theta), \quad \underline{x}(\Theta + 1) = \bar{x}(\Theta) + \bar{X}(\Theta); \quad (9)$$

$$\bar{z}(\Theta) = \zeta[\underline{z}(\Theta)] + \underline{\delta}(\Theta), \quad \underline{z}(\Theta + 1) = \zeta[\bar{z}(\Theta)] + \bar{\delta}(\Theta), \quad (10)$$

где в соответствии с (4)

$$\underline{X}(\Theta) = \underline{X}[\underline{x}(\Theta), \underline{z}(\Theta)], \quad \bar{X}(\Theta) = \bar{X}[\bar{x}(\Theta), \bar{z}(\Theta)] \quad \text{и т. д.}$$

Приближенные значения $X(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$ находятся (при $\mu \ll 1$) при помощи (7) и (8).

Исключив из (10) $\bar{z}(\Theta)$, получаем уравнение для $\underline{z}(\Theta)$:

$$\underline{z}(\Theta + 1) = \zeta \{ \zeta[\underline{z}(\Theta)] + \underline{\delta}(\Theta) \} + \bar{\delta}(\Theta).$$

Предположив малость $\bar{\delta}$ по сравнению с шириной канала $\bar{z} - \underline{z}$ и учитывая, что $\underline{\zeta}[\bar{\zeta}(z)] = z$, имеем

$$\underline{z}(\Theta + 1) - \underline{z}(\Theta) = \frac{d\underline{\zeta}}{d\zeta} \bar{\delta}(\Theta) + \underline{\delta}(\Theta) \equiv F(\Theta). \quad (11)$$

В однородном волноводе ($\bar{\delta} = \underline{\delta} = 0$) из (11) следует, что

$$\underline{z}(\Theta + 1) - \underline{z}(\Theta) = 0, \quad (12)$$

т. е. $\underline{z}(\Theta)$ является периодической функцией Θ с периодом единицы. Эта периодичность является аналитическим выражением раскачки ширины волнового канала после прохождения неоднородного участка. Дальнейшие выкладки являются естественным обобщением результатов работ [8–10].

Периодическую зависимость $\underline{z}(\Theta)$ мы представим в виде

$$\underline{z}(\Theta) = \underline{z}^0(-\infty) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} Z_q \exp(2\pi iq\Theta), \quad \Theta \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где $Z_{-q} = Z_q^*$, а $\underline{z}^0(-\infty)$ — положение нижней каустики при $x \rightarrow -\infty$, откуда падает m -я нормальная волна.

Коэффициенты Z_q выражаются через преобразование Фурье от правой части уравнения (11):

$$Z_q = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Theta) \exp(-2\pi iq\Theta) d\Theta. \quad (14)$$

В осесимметричном волноводе выполняется соотношение $\bar{x}(\Theta) = x(\Theta + 1/2)$, означающее, что лучи, вышедшие из начальных точек $x_0(\xi)$ и $x_0(\xi + 1/2)$, описывают траектории, симметричные относительно оси волновода. Кроме того, в симметричном случае $d\underline{\zeta}/d\zeta = 1$, в силу чего в уравнении (11)

$$F(\Theta) = \bar{\delta}(\Theta) + \underline{\delta}(\Theta) = \bar{\delta}(\Theta) + \bar{\delta}(\Theta + 1/2).$$

В результате амплитуды нечетных гармоник обращаются в нуль и в разложении (13) остаются только четные гармоники:

$$Z_{2p} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\delta}(\Theta) \exp(-4\pi ip\Theta) d\Theta, \quad Z_{2p+1} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, в симметричном волноводе

$$\underline{z}(\Theta) = \underline{z}^0(\infty) + 2|Z_2| \cos(4\pi\Theta + \arg Z_2) + \dots, \quad (16)$$

где $\underline{z}^0(\infty) = \underline{z}^0(-\infty) + Z_0$. Высшие гармоники в разложении (16) во многих случаях пренебрежимо малы (см. экспоненциальные оценки в Приложении).

Выписанные формулы для амплитуд Z_q остаются практически бесполезными до тех пор, пока из системы уравнений (9), (10) не найдены функции $\underline{z}(\Theta)$ и $x(\Theta)$, от которых зависит правая часть уравнения (11), а эта задача в общем случае аналитически не разрешима. В этих условиях для определения амплитуд раскачки Z_q имеются два пути.

Во-первых, как и в [8–10], для Z_q можно получить оценочные аналитические выражения, если заменить точные значения функций $x(\Theta)$, $z(\Theta)$ адиабатическим приближением $x_a(\Theta)$, $z_a(\Theta)$ (см. Приложение).

Для сравнительно коротких переходов, на длине которых луч совершает, скажем, 2—5 скачков, можно использовать еще более грубое линеаризованное адиабатическое приближение.

Во-вторых, параметры волнового канала можно найти путем численного решения исходной системы уравнений (1). Ниже мы рассмотрим один иллюстративный численный пример, на основе которого позднее (в пп. 7 и 8), получим оценки раскачки ширины волнового канала в случае ионосферы и океана.

5. Численный пример. Пусть волна распространяется в канале с параболическим профилем проницаемости

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_0 - \alpha^2 \varphi^2(x) \left(\frac{z}{a} \right)^2, \quad (17)$$

где $\varphi(x) = 1 + \beta \operatorname{th}(x/b)$, а b — длина перехода. Расчеты раскачки лучей проводились нами при $\epsilon_0 = 1$, $\alpha = 0,2$, $\beta = -0,3$ (расширяющийся канал). Исходная полуширина канала предполагалась равной $z(-\infty) = a/2$. На рис. 4 показаны результаты расчетов для перехода длиной $b = a$. Это весьма короткий переход, так как длина шага X , для параболической модели (17), равная $\pi n a / \alpha \varphi(x)$, при $\alpha = 0,2$, $n \approx 1$ и $\varphi \approx 1$ превышает длину нерегулярного участка $b = a$ в $\pi n / 0,2 \approx 16$ раз. Сплошной линией на рис. 4 показано геометрическое место верхних точек поворота, а пунктирной линией — адиабатическое значение z_a .

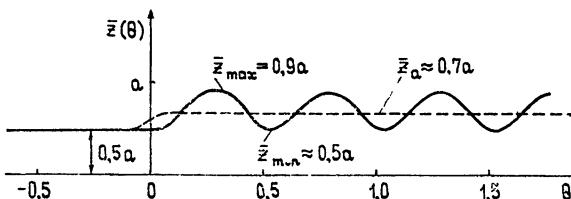


Рис. 4.

Из рис. 4 видно, что в коротком переходе возникает весьма значительная раскачка ширины волнового канала. При начальном значении $\bar{z}(-\infty) = a/2$ полуширина канала после прохождения нерегулярного участка меняется в пределах от $\bar{z}_{\min} \approx 0,5a$ до $\bar{z}_{\max} \approx 0,9a$, так что амплитуда $|Z_2|$ оказывается равной

$$|Z_2| = \frac{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}}{4} \approx 0,1a.$$

Расчеты для более плавного перехода, длина которого $b = 10a$ сравнима с длиной шага $X \approx 16a$, привели к значительно меньшим (примерно в 20 раз) значениям амплитуды раскачки канала;

$$|Z_2| \approx 0,0045a.$$

Отметим, что период осцилляций ширины канала на рис. 4 равен $1/2$, как это и должно быть в симметричном канале. Обращает на себя внимание хорошо выраженная синусоидальная форма кривой $\bar{z}(\Theta)$, что свидетельствует о малости амплитуд высших гармоник по сравнению с основной (второй) гармоникой. Если учесть, что функция $\bar{x}(\Theta)$, которую мы здесь не приводим, при $\Theta \rightarrow \infty$ ведет себя как $\Theta \Phi(\Theta)$, где $\Phi(\Theta)$ — периодическая функция Θ , то после исключения Θ из двух зависи-

симостей $\bar{x} = \bar{x}(\Theta)$ и $\bar{z} = \bar{z}(\Theta)$ мы получили бы многозначные функции $\bar{z}(x)$ (и $\bar{z} = \bar{z}(x)$) типа изображенных на рис. 2. Существенно, что области неоднозначности на этих кривых, соответствующие появлению каустик, образуются в рефракционном волноводе значительно дальше от нерегулярного участка, чем в волноводе с резкими границами, так как длина шага луча $X = \pi \bar{n}a/\alpha\varphi$ здесь весьма слабо зависит от угла наклона луча.

6. *Оценки коэффициентов трансформации и числа возбуждающих-ся мод.* Располагая точными или приближенными функциями $\bar{x}(\Theta)$ и $\bar{z}(\Theta)$, можно, в принципе, восстановить фазу и амплитуду поля в волновом канале. Однако заключительный шаг — разложение геометрооптического поля по нормальным волнам однородного канала и определение коэффициентов трансформации — сделать значительно труднее, чем в задаче о волноводе с резкими границами, в силу более сложного поведения волнового поля. Если помимо предположений, принятых в [8–10] для жесткого волновода, считать, что ширина канала для возбуждающихся мод мало отличается от ширины канала основной моды, то для коэффициента возбуждения $(m + 2\mu)$ -й моды получим выражение

$$|K_{m+m+2\mu}| = |J_\mu(Q)|,$$

где J_μ — функция Бесселя, а Q — амплитуда синусоидальной модуляции фазы в поперечном сечении волновода, равная

$$Q = |\bar{\gamma} Z_2| k \bar{X}(\infty) / 2\pi \bar{n}. \quad (18)$$

При $Q \ll 1$ возбуждаются только соседние с m моды (с номерами $m \pm 2$), а при $Q \gg 1$ с заметной амплитудой возбуждаются только моды, лежащие в интервале

$$m - 2Q \leq m' \leq m + 2Q. \quad (19)$$

Эту же оценку можно получить и из качественных соображений [12], разделив входящую в (16) амплитуду $2|Z_2|$ на интервал δz между соседними модами: $\Delta m = 2|Z_2|/\delta z$, при этом заметного возбуждения следует ожидать на модах с номерами из интервала $m - \Delta m \leq m' \leq m + \Delta m$. Величину δz можно приближенно выразить через разность адиабатических инвариантов $I_{m+1} - I_m$, которая равна π/k (см. Приложение),

$$\frac{\pi}{k} = I_{m+1} - I_m \approx \frac{\partial I_m}{\partial z} \delta z = \frac{\bar{X}|\bar{\gamma}|}{2\pi} \delta z.$$

Отсюда находим $\delta z = 2\pi \bar{n}/\bar{X}k|\bar{\gamma}|$, и в результате

$$\Delta m \approx |\bar{\gamma} Z_2| k \bar{X} / \pi \bar{n} = 2Q,$$

что согласуется с интервалом (19).

Для параболической модели (17) имеем $\bar{X} = \pi \bar{n}a/\alpha\varphi$, $|\bar{\gamma}| = 2\alpha^2\varphi^2 \frac{z}{a^2}$, так что $\Delta m = 2\alpha\varphi k|Z_2|(\bar{z}/a)$. Выразив k через адиабатический инвариант $I_m = \pi(m + 1/2)/k$, который для параболической модели равен $\pi\alpha\varphi\bar{z}^2/2a$, получаем (при $m \gg \Delta m$)

$$\frac{\Delta m}{m} \approx 2 \frac{|Z_2|}{z(-\infty)}. \quad (20)$$

7. Оценки для ионосферного волнового канала. Рассмотрим ионосферный волновой канал с профилем электронной концентрации $N(x, z) = N_0 \varphi^2(x) (z/a)^2$. Диэлектрическая проницаемость в таком канале при $f = 30 \text{ МГц}$ ($\lambda = 10 \text{ м}$) и при $N_0 = 1,12 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ отвечает модели (17) с параметрами $\alpha = 0,2$ и $\epsilon_0 = 0,96$ (различие между величиной $\epsilon_0 = 0,96$ и значением $\epsilon_0 = 1$, принятым при расчетах, несущественно — оно приводит лишь к изменению линейных масштабов в $\sqrt{\epsilon_0} = 0,98$ раз).

Используя результаты п. 5, рассмотрим параметры ионосферного волнового канала. При масштабе $a = 20 \text{ км}$ и $z(-\infty) = a/2 = 10 \text{ км}$ в канале распространяется первичная мода с номером $m = lk/\pi = k \alpha \varphi(-\infty) z^2(-\infty)/a \approx 400$. Резкий переход длиной $b = a = 20 \text{ км}$ приводит к модуляции полуширины канала z в пределах $(0,5 - 0,9)a = 10 \div 18 \text{ км}$ со средним значением $\bar{z}_a = 14 \text{ км}$. В этом случае из (20) получаем $\Delta m/m \approx 0,4$, т. е. $\Delta m = 160$. Таким образом, в резком переходе возбуждаются моды с номерами $m' = 400 \pm 160$. В более плавном переходе длиной $b = 10a = 200 \text{ км}$ имеем $\bar{z} = 14 \pm 0,1 \text{ км}$, $\Delta m/m \approx 0,2$, так что возбуждаемые моды лежат в интервале $m' = 400 \pm 8$. Для еще более плавных переходов, длина которых превышает 200 км , трансформацией мод и раскачкой ширины канала можно пренебречь. Это лишний раз подчеркивает ценность теории, развиваемой Гуревичем и его коллегами [22, 23] на основе предположения о сохранении адиабатического инварианта.

8. Оценки для подводного звукового канала. При $a = 1 \text{ км}$ и длине звуковой волны $\lambda = 10 \text{ м}$ ($f = 150 \text{ Гц}$) в параболическом канале с начальной полушириной $z = 0,5a = 0,5 \text{ км}$ распространяется волна с номером $m = 40$. При резком переходе длиной $b = a = 1 \text{ км}$ возбуждаются моды с номерами $m' = 40 \pm 16$, а полуширина канала z раскачивается до $\bar{z}_{\max} \approx 0,9 \text{ км}$. При плавном же переходе с длиной $b = 10a = 10 \text{ км}$ имеем $\Delta m \sim 0,8$, так что в нерегулярном участке возбуждаются всего лишь две соседние моды: $m' = 40 \pm 1$. Полуширина канала в этом случае отклоняется от среднего (адиабатического) значения $z_a \approx 0,7a = 700 \text{ м}$ не более чем на 20 м .

9. Высыпание лучей вследствие раскачки ширины волнового канала. Если волновод ограничен снизу (или сверху) сравнительно невысоким барьером, удерживающим лучи лишь в адиабатическом приближении, то в результате раскачки ширины канала часть лучей может «высыпаться» из волнового канала. Пусть $z_{\text{тр}}$ — высота гребня нижнего барьера. Очевидно, в волноводе удержатся лишь лучи, у которых $z > z_{\text{тр}}$, в то время как лучи с $z < z_{\text{тр}}$ высыпятся из канала (рис. 5). На языке нормальных волн последнее отвечает модам с такими номерами m' , у которых нижняя ветвь каустики $z_{m'}$ лежит ниже уровня $z_{\text{тр}}$.

Описанный эффект может иметь важное значение для передачи радиоволн по межслойному EF -каналу в ионосфере. Существенно, что через место высыпания лучей можно, по теореме взаимности, производить запитку ионосферного волнового канала радиоволнами с поверхности Земли [24].

10. Затухание волн из-за перекачки энергии в быстро затухающие моды. Кроме обычного затухания и потерь энергии из-за высыпания

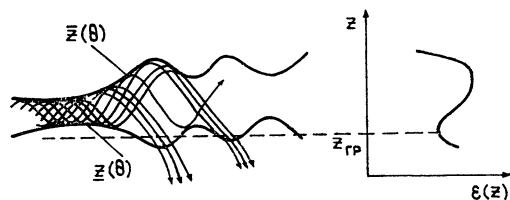


Рис. 5.

лучей, в неоднородных волноводах возможен еще один механизм, увеличивающий потери энергии и обусловленный тем, что часть энергии из первичной m -й моды может перекачаться в моды с большим поглощением, в результате чего до точки наблюдения дойдет меньшая энергия волны, чем предсказывает адиабатическое приближение. Этот эффект может оказаться существенным для волновода Земля — ионосфера в диапазоне сверхдлинных волн, где различные моды имеют заметно различающиеся коэффициенты поглощения [24].

В заключение авторы выражают признательность А. В. Гуревичу и Н. Д. Борисову за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Адиабатическое приближение

Для очень плавных переходов естественно заменить конечные разности $\Delta z = z(\Theta + 1) - z(\Theta)$ и $\Delta x = x(\Theta + 1) - x(\Theta)$ производными $dz/d\Theta$ и $dx/d\Theta$. Пренебрегая в уравнениях (9) и (11) небольшими различиями между X и \bar{X} , n и \bar{n} и используя для X и δ приближенные значения (6) и (7), мы приходим к адиабатическому приближению

$$\frac{d \underline{x}_a}{d \Theta} = 2 \underline{X}_a(\Theta), \quad \frac{d \underline{z}_a}{d \Theta} = 2 \underline{\delta}_a(\Theta), \quad (\text{П. I})$$

где $\underline{X}_a = \underline{X}(\underline{x}_a, \underline{z}_a)$, $\underline{\delta}_a = \delta(\underline{x}_a, \underline{z}_a)$. При помощи (6) и (7) можно убедиться, что уравнения (П. I) допускают существование интеграла

$$I = \int_{\underline{z}_a(\Theta)}^{\underline{z}_a(\Theta)} \{ \varepsilon [\underline{x}_a(\Theta), z] - \underline{n}^2 [\underline{x}_a(\Theta), \underline{z}_a(\Theta)] \}^{1/2} dz = \text{const}, \quad (\text{П. II})$$

который играет роль адиабатического инварианта для осциллирующих траекторий [17]. Если из $x = -\infty$ к неоднородному участку приближается m -я нормальная волна, то для нее

$$I = I_m \equiv \pi(m + 1/2)k. \quad (\text{П. III})$$

Из условия сохранения адиабатического инварианта можно, в принципе, выразить \underline{z}_a как функцию \underline{x}_a : $\underline{z}_a = \underline{z}_a(\underline{x}_a)$, что облегчает решение уравнений (1) и последующее нахождение амплитуд Z_q . Для очень грубой оценки коэффициентов Z_q в (14) и (15) можно использовать, как и в [10], «линеаризованное» адиабатическое приближение

$$\underline{x}_a \approx \underline{x}_a^0 + 2 \underline{X}_a^0(\Theta - \Theta^0), \quad \underline{z}_a = \underline{z}_a^0 + 2 \underline{\delta}_a^0(\Theta - \Theta^0),$$

где опорную точку Θ^0 целесообразно поместить там, где на оси канала горизонтальный градиент $|\partial \varepsilon / \partial x|$ максимальен.

Подобно тому, как это было сделано в [10], при помощи адиабатического приближения можно убедиться, что в случае гладкого переходного участка амплитуды раскачки Z_q удовлетворяют экспоненциальной оценке

$$Z_q \sim \exp \left(-\text{const} \frac{q}{\mu} \right), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (\text{П. IV})$$

где $1/\mu \sim L_x/L_z$ служит мерой числа шагов луча в неоднородном участке.

Вследствие экспоненциальной малости коэффициентов Z_q в разложении (13) можно ограничиться только постоянной составляющей $\underline{z^0}(-\infty) + Z_0 = \underline{z^0}(\infty)$ и наимизшей гармоникой, т. е. $q = 1$ в общем случае и $q = 2$ в симметричных волновых каналах, что подтверждается и результатами численных расчетов (см. п. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреходовских, В. А. Елисеевини, Акуст. ж., 6, № 3, 284 (1960).
2. Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 8, № 4, 659 (1965).
3. В. С. Булдырев, сб. Проблемы математической физики, 3, ЛГУ, 1968.
4. З. А. Янсон, Записки научных семинаров ЛОМИ, 17, изд. Наука, Л., 1970, стр. 218.
5. А. В. Попов, ДАН СССР, 230, № 6, 1922 (1976).
6. Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1275 (1976).
7. Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 5, 659 (1977).
8. В. Е. Кинбер and Yu A. Krautsov, Proc. URSI Symp. Electromagnetic Wave Theory, Standford, 1977.
9. Б. Е. Кинбер, Н. Н. Комиссарова, Ю. А. Кравцов, сб. Теория дифракции и распространения волн, Краткие тексты докладов VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (Ростов, 1977), т. 2, М., 1977, стр. 159.
10. Б. Е. Кинбер, Ю. А. Кравцов, Радиотехника и электроника, 22, № 12, 2470 (1977).
11. V. A. Borovikov, B. E. Kinber, Yu. A. Krautsov, A. V. Popov and P. Ya. Ufimtsev, Waves and rays in irregular waveguides, XIX General Assambly URSI, Helsinki, August, 1978, sessin B8; см. также В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, Ю. А. Кравцов, А. В. Попов, П. Я. Уфимцев, Препринт № 13 (212), ИЗМИРАН СССР, 1978.
12. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 21, № 6, 1314 (1976).
13. В. А. Боровиков, сб. Теория дифракции и распространения волн, Краткие тексты докладов VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (Ростов, 1977), т. 2, М., 1977, стр. 155.
14. В. А. Боровиков, Радиотехника и электроника, 23, № 7, 1365 (1978).
15. R. D. Graves, A. Nagle, H. Uberall, G. L. Dagig, JASA, 58, № 6, 1171 (1975); Acustica, 39, № 2, 173 (1978).
16. S. T. McDaniel, JASA, 62, № 2, 320 (1977).
17. Н. Д. Борисов, Геомагнетизм и аэрономия, 18, № 2, 267 (1978).
18. Ю. И. Неймарк, Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1972.
19. Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Введение в теорию нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1976.
20. Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев, Научные труды РТИ АН СССР, т. 2, № 2, 3 (1960).
21. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 1, 52 (1975).
22. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия, 11, № 6, 961 (1971).
23. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Сверхдальнее распространение коротких радиоволн, изд. Наука, М., 1979.
24. Б. Е. Кинбер, Н. Н. Комиссарова, Ю. А. Кравцов, Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (Томск, июнь 1978 г.), изд. Наука, М., 1978, ч. 1, стр. 199.

Московский государственный педагогический
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
19 апреля 1978 г.

RAY THEORY OF THE WAVE PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS REFRACTION
WAVEGUIDES: MODE CONVERSION AND SWAYING OF THE WAVE
CHANNELS WIDTH

B. E. Kinber, N. N. Komissarova, Yu. A. Krautsov

A ray approach is suggested to the description of mode conversion in inhomogeneous sections of the refraction waveguides. Introduction of the discrete ray parameters in the waveguide (coordinates of the top and bottom points of the ray

turning points) permits to find the effect of the wave channel width swaying. The analytic estimations of the channel width oscillation amplitude have been obtained. The swaying of the symmetric channel width with the parabolic profile is illustrated by a numerical example.

A simple estimation of the number of normal waves excited after the inhomogeneous section is obtained. Two effects are specified which may be the reason of additional (to the ordinary absorption) losses of the energy trapped in the wave channels. First, it is «spreadings» of rays out of the channels due to the swaying of its width if the waveguide is limited by a comparatively small barrier as it takes place in the case of the interlayer FE-channel in the ionosphere. Second, a part of the energy of the primary wave may be conversed into modes with a large absorption that may be essential for VLF radio waves in the Earth — ionosphere waveguide.

УДК 621.378.325

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ УЛЬТРАКОРотКИХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА

Е. Г. Ларионцев, В. Н. Серкин

Рассчитаны статистические характеристики процесса формирования УКИ в лазере с просветляющимся фильтром в условиях, когда нелинейные стадии просветления фильтра и насыщения усиления оказываются совмещенными во времени. Получены аналитические соотношения, определяющие оптимальные значения параметров лазера с просветляющимся фильтром, при которых достигается наибольшая величина контраста излучения и наиболее эффективное сжатие импульсов нелинейным поглотителем.

Теория генерации ультракоротких импульсов света (УКИ) в лазерах с просветляющимся фильтром, развитая в работах Летохова [1] и Кузнецовой [2], основывалась на предположении о разделении во времени стадий просветления фильтра и насыщения усиления среды, т. е. предполагалось, что в процессе просветления фильтра активная среда является линейной [1, 2]. Экспериментальные и теоретические исследования, проведенные в работах [3–9], показали, что насыщение усиления на стадии просветления фильтра благоприятствует выделению основного импульса среди импульсов фона и приводит к увеличению контраста излучения и более эффективному сжатию УКИ. Недостатком теоретических работ [5–8], посвященных исследованию генерации УКИ при совмещении стадий просветления фильтра и насыщения среды, является: 1) неисследованность ряда статистических характеристик процесса формирования УКИ и 2) отсутствие аналитических соотношений, определяющих условия оптимальности генерации УКИ. Настоящая работа направлена на устранение этих недостатков.

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ УКИ

В данном параграфе приводятся результаты численного эксперимента по исследованию динамики генерации УКИ из первоначально флуктуационной структуры излучения, образованной при интерференции большого числа мод со случайными фазами. Основной целью проведенных нами расчетов являлось исследование статистических характеристик излучения ОКГ при условиях, когда нелинейные стадии просветления фильтра и насыщения усиления оказываются совмещенными во времени.

Процесс формирования УКИ при совмещении во времени стадий просветления фильтра и насыщения усиления в активной среде определяется интегроразностным уравнением

$$I(k+1, \tau) = I(k, \tau) \left\{ 1 + \alpha_0 \exp \left[-\frac{\sigma_a T}{\sigma_\Phi T_{1\Phi}} \int_0^{k+\tau} I(k', \tau') d\tau' \right] - \right. \\ \left. - \frac{x_0}{1 + I(k, \tau)} - \gamma \right\}. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в безразмерных переменных. Здесь k — номер прохода излучения по резонатору; $0 \leq \tau \leq 1$ — текущая координата на периоде резонатора; $I(k, \tau)$ — интенсивность излучения на периоде резонатора, выраженная в единицах интенсивности просветления безынерционного фильтра; σ_a, σ_ϕ — сечения перехода частиц активной среды и фильтра; T — время обхода светом резонатора; $T_{1\Phi}$ — время релаксации фильтра; x_0 — начальное пропускание фильтра; γ — линейные потери на зеркалах резонатора; α_0 — коэффициент усиления в конце линейного этапа развития генерации.

В уравнении (1) пренебрегается действием накачки и релаксацией инверсной населенности в процессе развития гигантского импульса.

Для того, чтобы исследовать влияние на динамику генерации УКИ относительного перекрытия нелинейных стадий просветления фильтра и насыщения усиления при расчетах, варьировалось отношение сечений перехода σ_a/σ_ϕ . Начальное значение коэффициента усиления α_0 рассчитывалось по известным формулам [1, 2]: $\alpha_0 = \alpha(t_1)$ (t_1 — длительность линейного этапа развития генерации). Характерное время накачки полагалось равным $t_n = 10^{-3}$ с, остальные параметры: $T = 10^{-8}$ с, $T_{1\Phi} = 8 \cdot 10^{-12}$ с, $x_0 = 0.3$, $\gamma = 0.1$.

Начальная флуктуационная структура излучения на периоде резонатора $I(0, \tau)$ задавалась в виде суммы 100 мод со случайно распределенными фазами на интервале $(0, 2\pi)$ с помощью стандартной программы генерации случайных чисел на БЭСМ-6.

Основной характеристикой лазера с просветляющимся фильтром является степень самосинхронизации мод. Для ее определения необходимо сравнить соотношения между наиболее интенсивными импульсами на периоде резонатора в начальной и окончательной структуре излучения. Нами была проведена статистическая обработка большого числа реализаций случайного процесса ($N = 50$), которая позволила исследовать вероятностные характеристики процесса генерации УКИ.

Для каждой реализации случайного процесса в максимуме огибающей гигантского импульса была рассчитана величина контраста излучения M (отношение интенсивности максимального импульса на периоде резонатора к интенсивности следующего за ним по величине импульса) и определялась функция распределения контраста $f(M)$, характеризуемая относительной частотой реализации в окончательной структуре излучения величины контраста, заключенной в определенном интервале значений ($M, 10M$).

На рис. 1 представлен вид функций распределения контраста излучения в зависимости от отношения сечений перехода σ_a/σ_ϕ . Как следует из приведенных зависимостей, с увеличением отношения σ_a/σ_ϕ наиболее вероятное значение контраста возрастает и достигает максимального значения $M \approx 10^6$ при параметре σ_a/σ_ϕ , равном $\sigma_a/\sigma_\phi = 7 \cdot 10^{-5}$.

В области значений $\sigma_a/\sigma_\phi = 9 \cdot 10^{-5}$ функция распределения контраста имеет два максимума (больший при $M = 1 \div 10$ и меньший при $M = 10^6$). Возникновение двух максимумов связано с тем, что в определенном числе реализаций случайного процесса происходит генерация гигантского импульса с высоким контрастом излучения, в остальной же части реализаций вместо гигантского импульса генерируется пичок свободной генерации с невысоким контрастом. При дальнейшем увеличении отношения σ_a/σ_ϕ генерация гигантского импульса практически исчезает ($\sigma_a/\sigma_\phi = 11 \cdot 10^{-5}$), рис. 1.

Используя приведенные функции распределения контраста, можно определить вероятность $W(M)$ того, что в окончательной структуре излучения максимальный импульс превосходит все остальные в M раз и более (степень самосинхронизации мод).

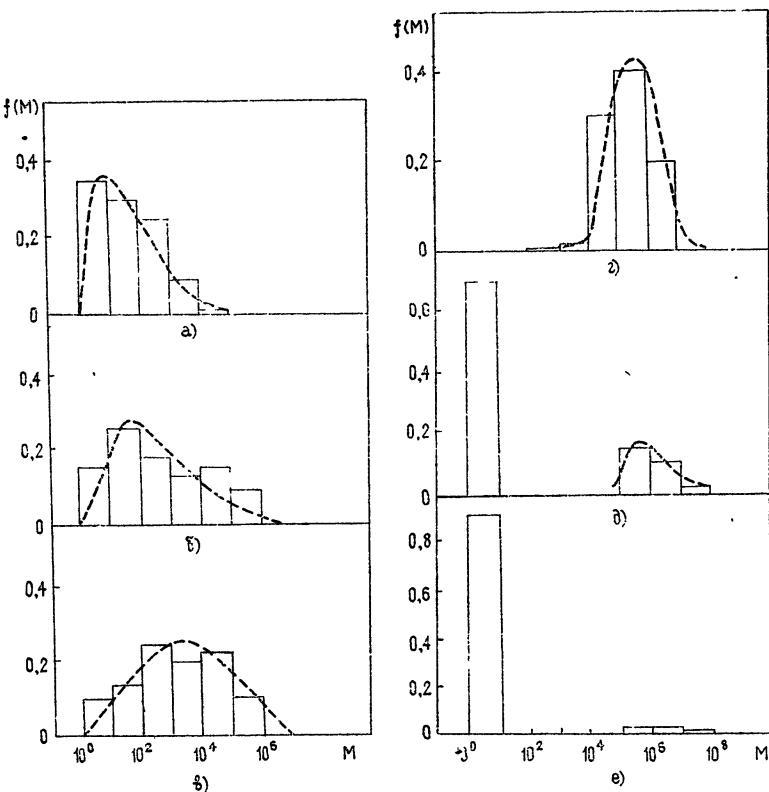


Рис. 1. Вид функций распределения контраста излучения $f(M)$ при $\sigma_a/\sigma_\phi = 10^{-5}$ (а), $3 \cdot 10^{-5}$ (б), $5 \cdot 10^{-5}$ (в), $7 \cdot 10^{-5}$ (г), $9 \cdot 10^{-5}$ (д), $11 \cdot 10^{-5}$ (е).

На рис. 2 приведены зависимости вероятности $W(M)$ от отношения сечений перехода σ_a/σ_ϕ . Как видно из рис. 2, нелинейность усиливающей среды в процессе формирования УКИ приводит к значительному увеличению вероятности выделения одиночного импульса из шумовой структуры излучения. Существует оптимальное значение отношения сечений перехода $(\sigma_a/\sigma_\phi)_{opt} = 7 \cdot 10^{-5}$, при котором вероятность самосинхронизации мод достигает максимума.

Рассчитанные в области оптимальных параметров лазера $(\sigma_a/\sigma_\phi)_{opt}$ вероятности самосинхронизации мод $W(M)$ существенно превосходят оценки, полученные в [2] в предположении линейности усиливающей среды в процессе просветления фильтра. При оптимальных параметрах лазерной системы вероятность выделения одиночного импульса из шума спонтанного из-

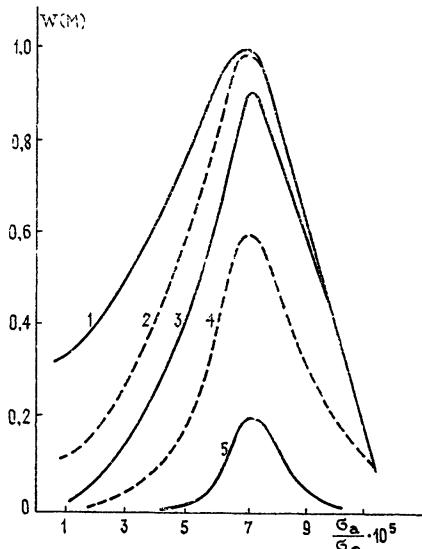


Рис. 2. Зависимость вероятности выделения одиночного ультракороткого импульса из флуктуационной структуры излучения $W(M)$ с контрастом не менее M от отношения сечений перехода σ_a/σ_ϕ при $M = 10^2$ (1), 10^3 (2), 10^4 (3), 10^5 (4), 10^6 (5).

лучения с высоким значением контраста ($M \geq 10^3 - 10^6$) возрастает в $10^1 - 10^2$ раз по сравнению с тем случаем, когда усиливающая среда является линейной в процессе просветления фильтра.

Результаты проведенного «машинного эксперимента» позволяют сделать важный вывод о том, что оптимальные параметры $(\sigma_a/\sigma_\phi)_{opt}$, при которых вероятность выделения одиночного УКИ из шума спонтанного излучения достигает максимума, не зависят от вида исходного статистического распределения поля на периоде резонатора, а определяются основными параметрами лазерной системы.

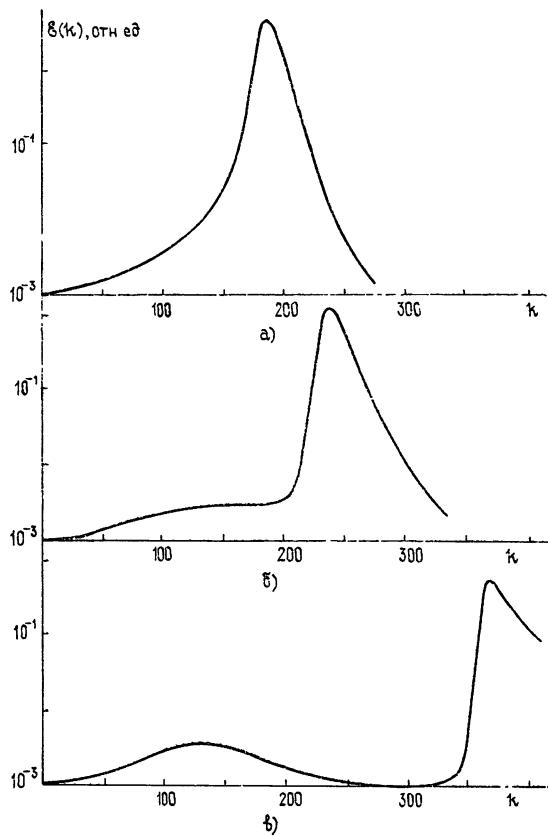


Рис. 3. Форма гигантского импульса при $\sigma_a/\sigma_\phi = 3 \cdot 10^{-5}$ (а), $5 \cdot 10^{-5}$ (б), $7 \cdot 10^{-5}$ (в).

Нами было исследовано изменение формы гигантского импульса при совмещении стадий просветления фильтра и насыщения усиления. На рис. 3 изображена форма гигантского импульса при различных значениях отношения σ_a/σ_ϕ . Эта картина получена при усреднении временной структуры излучения за период резонатора (по оси ординат отложена величина полной энергии излучения на периоде резонатора

$$\mathcal{E}(k) = \int_k^{k+1} I(k, \tau) d\tau. \quad \text{Как видно из рис. 3, при увеличении степени}$$

насыщения усиления в процессе генерации УКИ происходит искажение огибающей гигантского импульса: на переднем фронте огибающей возникает характерный перегиб — «предвестник» гигантского импульса, причем амплитуда «предвестника» на 2—3 порядка меньше амплитуды

в максимуме гигантского импульса. Такую картину образования УКИ можно видеть на экране осциллографа при условии, что его время разрешения больше периода резонатора, т. е. осциллограф усредняет излучение за период резонатора.

Физической причиной образования «предвестников» в оптимальном режиме генерации УКИ является разделение во времени максимумов огибающей импульсов фона и основного выброса на периоде резонатора, показанное на рис. 4 (эта картина образования УКИ видна на экране осциллографа с полным времененным разрешением).

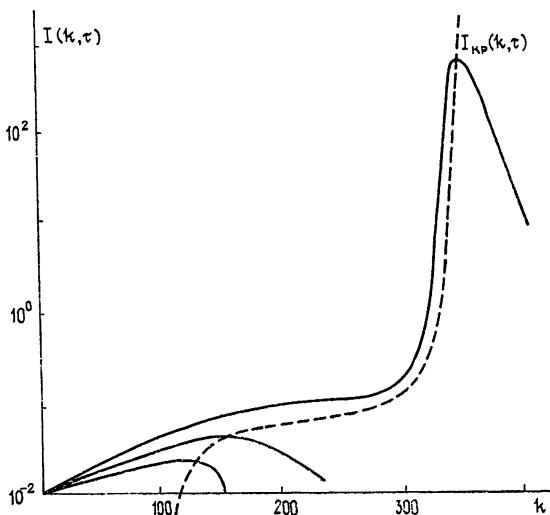


Рис. 4. Развитие наиболее интенсивных флюктуационных выбросов излучения в области оптимальных параметров лазерной системы.

Следует отметить, что в оптимальном режиме генерации УКИ претерпевает существенные качественные изменения сама картина самосинхронизации мод в лазере с просветляющимся фильтром по сравнению с моделями, рассмотренными в работах [1, 2].

В модели Кузнецовой [2] к моменту времени, когда начинается лавинообразное просветление фильтра, излучение представляет собой квазипериодическую флюктуационную структуру, образованную при интерференции большого числа мод со случайными фазами. В рассматриваемой же нами области оптимальных параметров лазерной системы статистика излучения еще до начала лавинообразного просветления фильтра изменяется кардинальным образом. По окончании «предвестника» флюктуационные импульсы фона успевают настолько затухнуть (см. рис. 4), что лавинообразное просветление фильтра начинается при высоком значении контраста ($M \approx 10^2$).

2. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ УКИ

Как показывают проведенные нами исследования, для достижения максимальной эффективности генерации УКИ в твердотельных лазерах с просветляющимся фильтром следует выбирать оптимальные значения параметров лазерной системы, таких как, например, отношение сечений σ_a/σ_Φ или длину резонатора L . Экспериментально подбор оптимальных параметров для конкретных лазерных установок представляет собой весьма трудоемкую задачу. В этой связи существенный интерес приобретает задача аналитического определения условий, при которых проис-

ходит разделение во времени максимумов огибающих основного импульса излучения и фона в процессе генерации гигантского импульса.

Рассмотрим более подробно процесс формирования УКИ при совмещении во времени нелинейных стадий просветления фильтра и насыщения усиления в активной среде.

Процесс развития генерации в этом случае характеризуется следующими основными чертами.

Усиление активной среды вследствие эффекта насыщения постепенно уменьшается,

$$\alpha(k, \tau) = \alpha_0 \exp \left(-\frac{\sigma_a T}{\sigma_\Phi T_{1\Phi}} \int_0^{k+\tau} I(k', \tau') d\tau' \right), \quad (2)$$

и формирование гигантского импульса происходит только за счет более быстрого уменьшения потерь в фильтре для максимального выброса излучения, так что, несмотря на уменьшение усиления в активной среде, результатирующий коэффициент усиления в лазере

$$\alpha_{\text{эфф}} = \alpha(k, \tau) - \frac{x_0}{1 + I} - \gamma \quad (3)$$

оказывается $\alpha_{\text{эфф}} > 0$ для максимального выброса и $\alpha_{\text{эфф}} < 0$ для всех остальных импульсов на периоде резонатора. Физически это объясняется тем, что насыщение усиления активной среды определяется полной энергией излучения лазера, а насыщение безынерционной поглощающей среды — мгновенной мощностью излучения. При этом могут реализоваться условия, когда максимальный выброс будет продолжать развиваться, просветляя для себя самого фильтр, в то время как все остальные импульсы будут затухать. Критическое значение интенсивности $I_{\text{кр}}(k, \tau)$, начиная с которого возможно подобное разделение во времени максимумов импульсов фона и доминирующего выброса на периоде резонатора, можно определить из условия [7]

$$\alpha_{\text{эфф}} |_{I=I_{\text{кр}}} = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$I_{\text{кр}}(k, \tau) = \frac{x_0}{\alpha(k, \tau) - \gamma} - 1. \quad (5)$$

Для точек профиля поля $I(k, \tau) > I_{\text{кр}}$ $\alpha_{\text{эфф}} > 0$, и они усиливаются, и наоборот, для точек $I(k, \tau) < I_{\text{кр}}$ $\alpha_{\text{эфф}} < 0$, и они затухают.

Наглядно этот процесс иллюстрируется рис. 4. На рис. 4 показано развитие нескольких флуктуационных выбросов в начальной структуре излучения в том случае, когда оказывается существенным насыщение усиления в процессе просветления фильтра. Пунктирной кривой на этом рисунке изображена критическая интенсивность $I_{\text{кр}}(k, \tau)$. Она разделяет области с усилением $\alpha_{\text{эфф}} > 0$ и $\alpha_{\text{эфф}} < 0$. Как следует из рис. 4, величина $I_{\text{кр}}(k, \tau)$ имеет простой физический смысл. Это есть огибающая максимумов отдельных выбросов на периоде резонатора (на кривой $I_{\text{кр}}(k, \tau)$ последовательно достигают максимума и затем затухают отдельные УКИ на периоде резонатора). Отметим, что в модели лазера с просветляющимся фильтром с линейной усиливающей средой в процессе просветления фильтра $\alpha_0 = \text{const}$, как нетрудно видеть из (5), $I_{\text{кр}}$ в любой момент времени оказывается отрицательной величиной. При $\alpha_0 = \text{const}$ в процессе просветления фильтра все импульсы, содер-

жащиеся во временной картине излучения на периоде резонатора, нарастают.

Как следует из (5), значения $I_{kp}(k, \tau)$ отрицательны только в начальный период развития генерации. По мере нарастания энергии излучения начинается постепенное включение насыщения усиления в активной среде и в некоторый момент времени $I_{kp}(k, \tau)$ оказывается положительным. Значение I_{kp} положительно, если выполнено следующее условие:

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_{kp}. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{E} = \int_0^{k+\tau} I(k', \tau') d\tau'$ — энергия излучения лазера. Величина

$$\mathcal{E}_{kp} = \frac{\sigma_a T_{1\Phi}}{\sigma_\phi T} \ln \frac{x_0}{x_0 + \gamma} \quad (7)$$

в принятых обозначениях соответствует энергии пичка свободной генерации при непросветленном фильтре ($x = x_0$).

Следует отметить, что при излучении лазером энергии \mathcal{E}_{kp} усиление активной среды оказывается равным точно пороговому значению

$$\alpha(k, \tau) = x_0 \exp \left(-\frac{\sigma_a T}{\sigma_\phi T_{1\Phi}} \mathcal{E}_{kp} \right) \equiv x_0 + \gamma.$$

Поскольку величина \mathcal{E}_{kp} много меньше энергии излучения в гигантском импульсе, то момент времени $t = t_{kp}$, соответствующий излучению лазером энергии \mathcal{E}_{kp} (см. рис. 4), находится в начале переднего фронта гигантского импульса. В случае, когда в окрестности точки $t = t_{kp}$ огибающая импульсов излучения имеет выпуклость вверх, т. е. выполнено условие

$$\frac{d^2 I(k, \tau)}{dk^2} \Big|_{\tau=\tau_{kp}} < 0, \quad (8)$$

перед гигантским импульсом образуется характерный «предвестник», возникающий вследствие разделения во времени максимумов огибающих основного импульса и фона (рис. 4). Условие (8), учитывая (1), можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{x_0 I}{1 + I} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{1 + I} \right) < \frac{\sigma_a T}{\sigma_\phi T_{1\Phi}} (x_0 + \gamma) I. \quad (9)$$

Неравенство (9) заведомо удовлетворяется независимо от интенсивности излучения $I(k, \tau)$ в точке $t = t_{kp}$ при условии

$$\frac{\sigma_a T}{\sigma_\phi T_{1\Phi}} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{x_0^2}{x_0 + \gamma}. \quad (10)$$

Полученный критерий (10) определяет область значений параметров лазерной системы, при которых вследствие насыщения усиления активной среды в процессе просветления фильтра происходит разделение во времени огибающих импульсов фона и основного импульса на периоде резонатора и, соответственно, резкое возрастание контраста излучения в максимуме гигантского импульса (см. рис. 3, 4). Значения параметров, при которых начинает выполняться условие (10), близки к оптимальным.

Критерий (10) достаточно хорошо согласуется с численными расчетами, проведенными в разд. 1. Так при параметрах $x_0 = 0,3$, $\gamma = 0,1$,

$T = 10^{-8}$ с, $T_{1\Phi} = 8 \cdot 10^{-12}$ с в соответствии с условием (10) получим $\sigma_a/\sigma_\Phi \geqslant 6,8 \cdot 10^{-5}$. Оптимальное значение $(\sigma_a/\sigma_\Phi)_{opt} = 7 \cdot 10^{-5}$.

Полученное условие (10) согласуется также с результатами экспериментальных исследований [3, 4, 9]. Это условие было выполнено в работах [3, 4, 9] при наблюдении разделения во времени огибающих фона и основного импульса на периоде резонатора и «предвестника» на переднем фронте гигантского импульса.

Полученные нами условия оптимизации процесса формирования УКИ позволяют давать рекомендации, касающиеся выбора оптимальных параметров при разработке и конструировании генераторов ультракоротких импульсов света.

В заключение отметим, что достижение оптимальных параметров лазерной системы, при которых стадии просветления фильтра и насыщения усиления активной среды совмещаются во времени, позволяет не только получить высокий контраст излучения, но также открывает перспективы достижения предельных длительностей УКИ в твердотельных лазерах. В работах [10–13] рассматривались некоторые возможности сокращения длительности пикосекундных импульсов в лазере на неодимовом стекле: уменьшение времени релаксации просветленного состояния фильтра, уменьшение влияния самофокусировки за счет снижения мощности излучения и использования активных элементов с малыми n_2 , замедление процесса регенеративного сужения спектра излучения за счет дисперсии линии усиления с помощью селекторов мод и т. д. Эти методы позволили достичь рекордных длительностей УКИ в лазере на неодимовом стекле 1,5–5 ps [11–13]. На наш взгляд, является целесообразным проведение аналогичных экспериментов (или повторение экспериментов [11–13]) по сокращению длительности ультракоротких импульсов при оптимальных параметрах лазера. Действительно, как показывают проведенные нами исследования (см., например, работы [5, 6]), в области оптимальных параметров за счет совместного действия нелинейности усиливающей среды и фильтра достигается максимальная степень сжатия УКИ.

Авторы выражают глубокую благодарность Т. И. Кузнецовой за обсуждение работы, И. В. Хоментовской за постоянную помощь при расчетах на БЭСМ-6 и Ю. П. Яценко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Летохов, ЖЭТФ, 55, 1077 (1968); Р. Г. Кгуйков and V. S. Letokhov, IEEE Quant. Electr., QE-8, 766 (1972).
2. Т. И. Кузнецова, ЖЭТФ, 57, 1673 (1969); Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, УФН, 106, 47 (1972); Т. И. Кузнецова, Труды ФИАН, 84, 62 (1975).
3. С. Д. Захаров, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, С. В. Чекалин, С. А. Чурилова, О. Б. Шатберашили, Квантовая электроника под ред. Н. Г. Басова, № 5 (17), 52 (1973).
4. А. Н. Жерихин, В. А. Коваленко, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, С. В. Чекалин, О. Б. Шатберашили, Квантовая электроника, 1, 377 (1974).
5. Е. Г. Ларионцев, В. Н. Серкин, Изв. вузов — Радиофизика, 17, 679 (1974).
6. Е. Г. Ларионцев, В. Н. Серкин, Квантовая электроника, 1, 2166 (1974).
7. W. H. Glenn, QE-11, 8 (1975).
8. А. В. Малинкевич, В. А. Савва, А. М. Самсон, Письма в ЖТФ, 1, 810 (1975).
9. Н. В. Кравцов, Ю. П. Яценко, ЖТФ, 11, 2433 (1977).
10. N. G. Basov, R. G. Kguykov, V. S. Letokhov and Yu. V. Senatskii, QE-4, 606 (1968).
11. D. Von der Linde, Opt. Comm., 8, 91 (1973).

12. Е. М. Гордеев, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, Б. М. Степанов, С. Д. Фанченко, С. В. Чекалин, А. В. Шарков, Квантовая электроника, 2, 205 (1975).
13. В. А. Бабенко, М. А. Кудинова, В. И. Малышев, А. М. Прохоров, А. А. Сычев, А. И. Толмачев, М. Я. Щелев, Письма в ЖЭТФ, 25, 366 (1977).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию
22 мая 1978 г.

OPTIMIZATION OF THE PROCESS OF THE LIGHT ULTRASHORT PULSE FORMATION

E. G. Lariontsev, V. N. Serkin

Statistical characteristics of the process of USP formation in a laser with the clarified filter are calculated under the condition when the nonlinear stages of the filter clarification and the amplification saturation are proved to be shifted in time. Analytic relations have been obtained which define the optimal parameter values of the laser with the clarified filter when the largest value of the radiation contrast and the largest effective pulse compression by the nonlinear absorber are achieved.

УДК 535.34

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ФАЗОВОЙ КОМПЕНСАЦИИ ТЕПЛОВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

B. A. Выслоух, K. D. Егоров, B. P. Кандидов

Численно исследуются возможности априорной фазовой компенсации тепловой дефокусировки световых пучков, распространяющихся в неподвижной или движущейся среде со слабым поглощением. Предлагается способ компенсации с помощью соответствующего задания начального фазового фронта, который вычисляется по полю температур для пучка, имеющего лишь дифракционную расходимость. При компенсации в точке наблюдения интенсивность на первоначальной оси пучка близка к значению в линейной среде, эффективная ширина и смещение пучка существенно уменьшаются.

1. При распространении световых пучков в нелинейных средах тепловое самовоздействие [1] приводит к расплыванию пучка и его отклонению от первоначального направления. Для подавления этих эффектов разрабатываются системы когерентной адаптивной оптики, в которых сигнал обратной связи поступает из точки наблюдения [2]. Представляет интерес уменьшение теплового самовоздействия путем рационального выбора начального профиля пучка. При этом тепловую рефракцию удобно представить как результат прохождения пучка через индуцированную им «тепловую линзу» конечной толщины z_k . Набег фазы $\Delta\Phi_T$ в «линзе» определяется выражением

$$\Delta\Phi_T(x, y, z_k) = -\frac{R}{2} \int_0^{z_k} T(x, y, z) dz, \quad (1)$$

где T — отклонение температуры от равновесной, R — параметр, определяющий оптическую силу тепловой линзы.

Для выбора начального профиля представляются следующие возможности. Во-первых, амплитудная компенсация, т. е. такой выбор начального распределения интенсивности, при котором в некоторой области поперечного сечения тепловая линза является фокусирующей. Во-вторых, фазовая коррекция, т. е. задание начального фазового фронта, компенсирующего тепловой набег $\Delta\Phi_T$. Это равносильно компенсации действия толстой тепловой линзы с помощью тонкой, помещенной на входе в среду. Сдвиг фазы в тонкой линзе можно взять равным — $\Delta\Phi_T$. Для возможности априорного определения $\Delta\Phi_T$ необходимо применение численных методов. Так, в работе [3] фазовый набег вычислялся по полю температуры $T(x, y, z)$, который создает пучок с неизменным профилем, тождественным начальному. Результаты такой коррекции для коллимированного гауссова пучка анализировались методом конечных разностей [3] и экспериментально [4].

В настоящей работе фазовый набег определяется по полю температур пучка, имеющего дифракционную расходимость. Рассматривается

компенсация самовоздействия пучков различного профиля в неподвижной, движущейся среде и при сканировании пучка. Для численного исследования эффективности фазовой коррекции применяется метод конечных элементов.

2. Комплексная амплитуда электрического поля $E(x, y, z)$ для стационарного пучка в задаче теплового самовоздействия определяется следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial E}{\partial z} &= \Delta_{\perp} E + k^2 \frac{2}{n} \frac{\partial n}{\partial T} TE, \\ V \frac{\partial T}{\partial x} - \chi \Delta_{\perp} T &= \frac{\alpha}{c_p \rho} I. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь k — волновое число в среде, $I = \frac{cn}{8\pi} EE^*$ — интенсивность поля,

$\alpha, c_p, \rho, \chi, v, n$ — параметры среды: коэффициент поглощения, удельная теплоемкость, плотность, температуропроводность, скорость движения по оси $0X$, показатель преломления. Поле E в ограниченном пучке удовлетворяет условию $\lim_{x, y \rightarrow \pm\infty} E = 0$, температура T — $\lim_{x, y \rightarrow \pm\infty} T = 0$.

Для численного исследования системы (2) перейдем к безразмерным переменным $x' = x/a$, $y' = y'/a$, $z' = z/d$, $T' = T/T_0$, $E' = E \sqrt{\frac{cn}{8\pi}} I_0$, где I_0 , a — интенсивность и поперечный размер, характеризующие пучок, $L_d = ka^2$ — дифракционная длина, $T_0 = n \left(2 \frac{\partial n}{\partial T} k^2 a^2 \right)$ — масштаб температуры. Тогда, опуская штрихи у безразмерных переменных, можно записать:

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial E}{\partial z} &= \Delta_{\perp} E + TE, \\ \frac{1}{R_v} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{R_\chi} \Delta_{\perp} T &= EE^*. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены:

$$R_v = - \left(\frac{L_d}{L_v} \right)^2, \quad R_\chi = - \left(\frac{L_d}{L_\chi} \right)^2$$

— параметры, определяющие влияние тепловой рефракции,

$$L_v = \left(\frac{V a c_p \rho n}{2 \alpha I_0 \left| \frac{\partial n}{\partial T} \right|} \right)^{1/2}$$

— нелинейная длина тепловой рефракции, определяемой массопереносом,

$$L_\chi = \left(\frac{\chi c_p \rho n}{2 \alpha I_0 \left| \frac{\partial n}{\partial T} \right|} \right)^{1/2}$$

— характерная длина теплопроводности,

Нетрудно видеть, что введенные параметры связаны с числом Пекле γ и временами установления температуры $t_v = \frac{a}{\chi}$, $t_x = \frac{a^2}{4\chi}$ в поперечнике пучка следующими равенствами:

$$\left(\frac{L_v}{R_x}\right)^2 = \frac{R_x}{R_v} = 4 \frac{t_x}{t_v} = 4\gamma. \quad (4)$$

Характер теплового самовоздействия зависит от соотношения между параметрами R_v и R_x .

3. В случае неподвижной среды $R_v \rightarrow \infty$ тепловое самовоздействие приводит к дополнительному уширению пучка, без потери им осевой симметрии. Для численного исследования здесь использовалась модель из кольцевых конечных элементов с кубической аппроксимацией по r с последующей редукцией части переменных [6]. Схема имеет погрешность $O(h^3)$, где h — шаг сетки.

Численный эксперимент по фазовой компенсации осуществлялся следующим образом. На первом этапе для исходных начальных условий $E_0(r, 0)$ решается линейная задача дифракции ($R_x = 0$) и находится распределение интенсивности $I_0(r, z)$. Затем из второго уравнения системы (3) определяется поле температур $T(r, z)$ и вычисляется фазовый набег $\Delta\Phi_T$ в точке наблюдения z_k согласно выражению (1). Распределение поля $E_1(r, 0)$ после прохождения тонкой линзы компенсации берется в виде

$$E_1(r, 0) = E_0(r, 0) \exp(-i\Delta\Phi_T(r, z_k)). \quad (5)$$

С выбранными таким образом начальными условиями $E_1(r, 0)$ решается самосогласованная задача (3) до $z = z_k$.

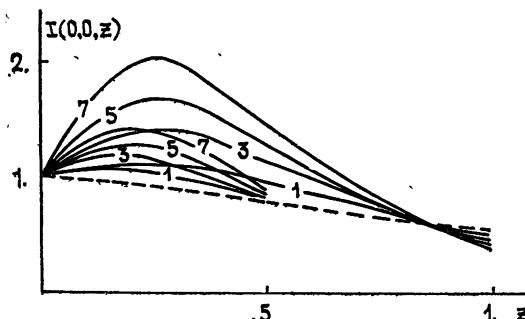


Рис. 1.

Для пучка с исходным профилем $E_0(r, 0) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$ некоторые из полученных результатов приведены на рис. 1. Здесь изображена зависимость от z интенсивности на оси $I(0, z)/I(0, 0)$. Две группы кривых соответствуют точкам наблюдения $z_k = L_d/2$ и $z_k = L_d$. Значения параметра R_x указаны у кривых. Сплошные линии соответствуют скорректированному пучку, штриховые — линейной дифракции. Вначале, благодаря предварительной фокусировке, интенсивность на оси растет (пучок сужается), затем начинает уменьшаться. В точке наблюдения тепловое уширение подавляется наиболее эффективно при небольших значениях z_k и R_x . При больших значениях z_k наблюдается перекомпенсация, т. е. расплывание корректируется в точке, предшествующей z_k . При $R_x = 9$ и $z_k = L_d$ интенсивность на оси скорректированного пучка в полтора раза больше, чем исходная.

4. В среде, движущейся со скоростью $V > 4 \chi/a$ ($\gamma > 1$), влиянием теплопроводности на распределение температуры можно пренебречь, $R_\chi > R_v$. Решение задачи (3) определяется параметром R_v . Профиль пучка в движущейся среде становится асимметричным и искажается. В этом случае применялась модель из прямоугольных конечных элементов, на которых поля E, T аппроксимировались полиномами Лагранжа [7]. Погрешность модели $O(h^4)$, для интегрирования использовалась явная схема, устойчивая при $\Delta z \leq h^2/16$.

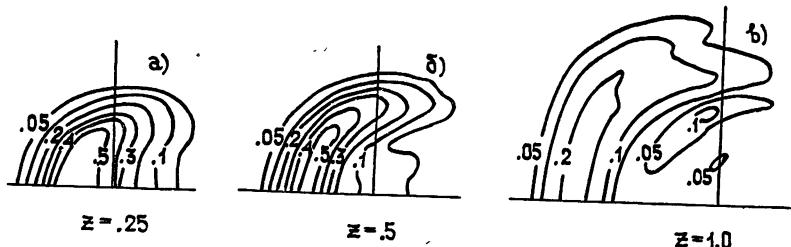


Рис. 2.

Характер искажений светового пучка в движущейся среде иллюстрирует рис. 2, где изображены изофоты пучка с исходным профилем

$$E_0(x, y, 0) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right). \quad (6)$$

Здесь параметр нелинейности $R_v = -27$. Тепловая линза вызывает дефокусировку пучка по оси $0Y$, отрицательное отклонение его по оси $0X$ и появление aberrации, которая развивается по мере распространения. Как следствие этого, уменьшается интенсивность на первоначальной оси пучка $I(0, 0, z)$, которая приведена штрихпунктирными кривыми на рис. 3, при $R_v = -8, -13, -27$.

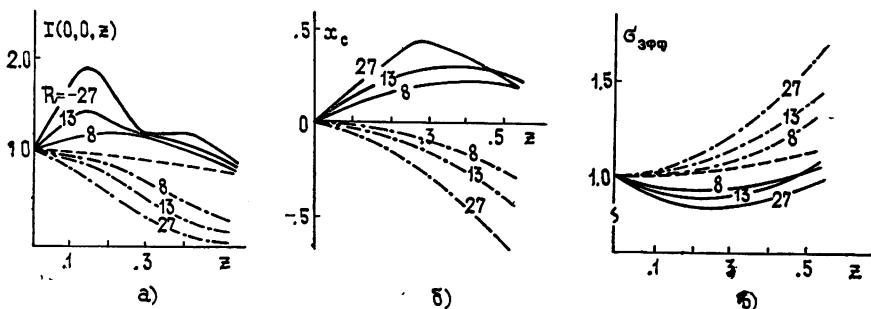


Рис. 3.

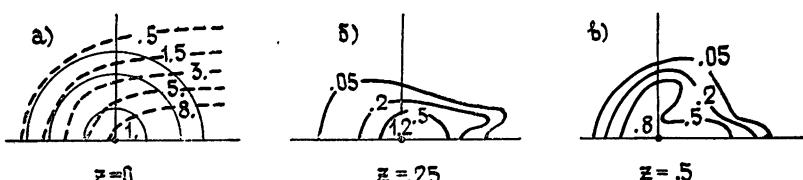


Рис. 4.

Для оценки теплового самовоздействия при сильной аберрации удобно ввести интегральные параметры. Например, смещение энергетического центра пучка x_c , определяемое выражением

$$x_c(z) = \frac{\int \int x I(x, y, z) dx dy}{\int \int I(x, y, z) dx dy},$$

эффективная ширина профиля интенсивности —

$$\sigma_{\text{эфф}}(z) = \frac{\int \int [(x - x_c)^2 + y^2] I(x, y, z) dx dy}{\int \int I(x, y, z) dx dy}.$$

Зависимость x_c и $\sigma_{\text{эфф}}$ от толщины среды z для пучка с профилем (6) при $z = 0$ представлена штрихпунктирными кривыми на рис. 3б, 3в.

Расчет начального профиля $E_1(x, y, 0)$ для подавления эффектов теплового самовоздействия осуществлялся так же, как и в случае неподвижной среды. Линии равного сдвига фаз в линзе компенсации ($-\Delta\Phi_T(x, y, z_k)$) изображены штрихами на рис. 4 а. Они получены для точки наблюдения $z_k = 0,5L_d$ в случае коллимированного гауссова пучка на входе. На этом же рисунке нанесены изофоты (линии равной интенсивности) исходного профиля. После прохождения компенсирующей линзы пучок предварительно отклоняется по оси OX и сужается по оси OY (изофоты на рис. 4б, 4в). Вследствие этого смещение энергетического центра пучка $x_c(z)$ становится положительным, в начале распространения оно увеличивается, а потом под действием «тепловой линзы» сокращается (сплошные кривые на рис. 3б).

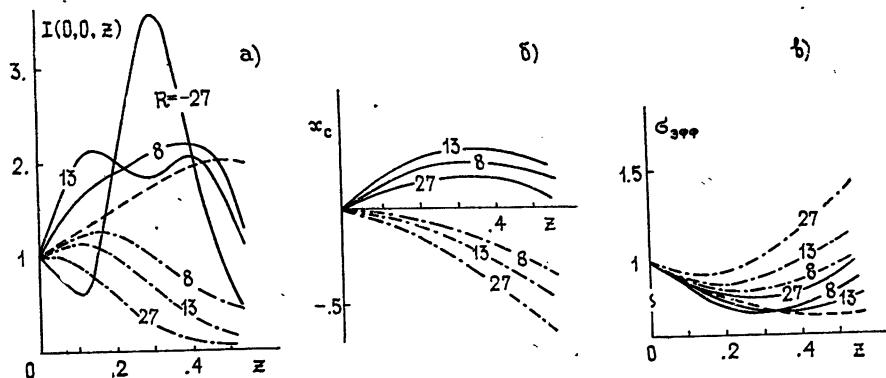


Рис. 5.

Интенсивность на оси $I(0, 0, z)$ нарастает благодаря предварительной фокусировке по оси OY и падает, когда смещение пучка по оси OX приближается к максимальному ($z \approx 0,3L_d$ — сплошные кривые на рис. 3а). Затем падение $I(0, 0, z)$ замедляется в силу уменьшения x_c и обусловливается в основном тепловой дефокусировкой. В точке коррекции $z_k = 0,5L_d$ величина $I(0, 0, z_k)$ практически совпадает с интенсивностью на оси пучка, распространяющегося в линейной среде (штриховая кривая на рис. 3а).

Фокусирующее действие линзы компенсации подтверждается видом функций $\sigma_{\text{эфф}}(z)$, которые имеют минимум (сплошные кривые, рис. 3в). При $z \rightarrow z_k$ эффективная ширина $\sigma_{\text{эфф}}(z)$ приближается снизу к ширине пучка в линейной среде $\sigma^0(z_k)$.

5. Действие фазовой коррекции на сходящийся пучок можно оценить по результатам, приведенным на рис. 5. Здесь пучок имеет исходный профиль в виде

$$E_0(x, y, 0) = \mathcal{E}_0 \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2} + ik \frac{x^2 + y^2}{2L_d} \right).$$

В этом случае точка наблюдения z_k совпадает с перетяжкой в линейной среде $z_k = 0,5L_d$. Для сходящегося пучка кривые $I^0(0, 0, z)$ и $\sigma_{\text{эфф}}^0(z)$ не являются сепаратрисами для этих функций в нелинейной среде с фазовой компенсацией и в ее отсутствие, как это имеет место для коллимированного пучка. Интенсивность $I(0, 0, z)$ имеет острые максимумы. Она резко падает с приближением z к z_k и вследствие этого оказывается меньше, чем $I^0(0, 0, z_k)$. В точке коррекции z_k эффективная ширина $\sigma_{\text{эфф}}(z_k)$ превышает ширину $\sigma^0(z_k)$ в линейной среде. Снижение действия фазовой компенсации объясняется тем, что по мере распространения пучка возрастает тепловая рефракция из-за увеличения интенсивности в сходящемся пучке, тогда как в коллимированном пучке самовоздействие уменьшается с ростом z из-за расходимости пучка, и эффективная толщина тепловой линзы сокращается.

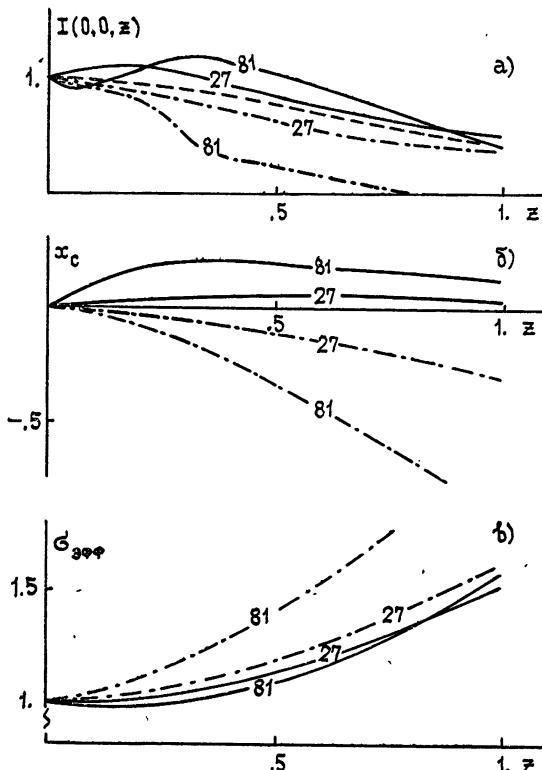


Рис. 6.

6. В случае сканирующего пучка параметр $R_v \sim V^{-1}$ убывает с ростом z , и действие тепловой линзы проявляется в основном на малых расстояниях. Из анализа изофот, полученных численно, видно, что вначале пучок поворачивается в плоскости XOZ и приобретает начальную расходимость, а затем распространяется практически, как в линейной среде. Это подтверждается линейной зависимостью $x_c(z)$ при $z \geq 0,5$ (штрихпунктирные кривые, рис. 6). Здесь параметр R_v на расстоянии $z = L_d$ убывает в 100 раз. Вследствие убывания R_v оптическая сила распределенной «тепловой линзы» оказывается меньше, чем в случае постоянной скорости потока. Поэтому оказывается, что тонкая компенсирующая линза на входе действует эффективно на больших расстояниях, чем при $V = \text{const}$. И действительно в случае $z_k = L_d$ в точке коррекции $I(0, 0, z_k)$, $x_c(z_k) \approx_{\text{эфф}} (z_k)$ близки к соответствующим величинам при линейной дифракции (сплошные кривые на рис. 6а, б, в).

7. Из проведенных исследований следует, что путем априорного задания начального фазового фронта пучка возможно значительное подавление эффектов теплового самовоздействия в точке наблюдения z_k . В результате фазовой компенсации интенсивность на оси пучка $I(0, 0, z_k)$ практически совпадает с ее значением в линейной среде, а другие характеристики пучка смещения $x_c(z_k)$ и ширина $\sigma_{\text{эфф}}(z_k)$ существенно улучшаются. Эффективность фазовой компенсации растет с уменьшением длины теплового самовоздействия, т. е. в случае распространения коллимированных, расходящихся, сканируемых пучков, и с уменьшением толщины среды z_k .

Изложенный прием определения начального фазового сдвига можно рассматривать как способ получения первого приближения начального фазового фронта при оптимизации процесса компенсации теплового самовоздействия пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Алешкевич, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ, 12, 112 (1970).
2. J. Pearson, Appl. Opt., 15, № 3, 622 (1976).
3. L. C. Bradley, Appl. Opt., 13, № 2, 331 (1974).
4. C. Primmerman, Appl. Opt., 15, № 4, 999 (1976).
5. О. С. Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, изд. Мир, М., 1975.
6. В. А. Выслух, В. П. Кандидов, Теория дифракции и распространения волн. VII Всесоюзный симпозиум, Ростов-на-Дону, М., 1977, стр. 274.
7. К. Д. Егоров, В. П. Кандидов, Теория дифракции и распространения волн. VII Всесоюзный симпозиум, Ростов-на-Дону, М., 1977, стр. 270.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
27 марта 1978 г.

NUMERICAL EXPERIMENT ON PHASE COMPENSATION OF THERMAL SELF-ACTION OF LIGHT BEAMS

V. A. Vysloukh, K. D. Egorov, V. P. Kandidov

The possibilities of apriori phase compensation of thermal self-defocusing of light beams propagating in stationary or moving medium with weak absorption is investigated numerically. A method of compensation is suggested using the corresponding value of the initial phase front which is calculated over the temperature field for the beam having only the diffraction divergence. For compensation at the observation point the intensity at the primary beam axis is chose to that in the linear medium, the effective width and the beam displacement decreasing essentially.

УДК 538.56 : 530.145

О ТЕПЛОВОЙ САМОФОКУСИРОВКЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

B. B. Воробьев, B. B. Шеметов

С помощью метода локального потенциала задача о тепловой самофокусировке сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров пучка. Для оценки применимости метода проведено численное интегрирование исходного параболического уравнения.

Известно, что при распространении лазерного излучения в поглощающих средах с $dn/dT > 0$ нагрев излучением может приводить к самофокусировке пучков [1-3]. В экспериментах со стеклами и кристаллами, в которых этот эффект наблюдался, обычно нет необходимости учитывать движение среды относительно пучка. Самофокусировка, однако, может происходить (на это впервые указано в работе [4]) и в средах с $dn/dT < 0$, если они охлаждаются излучением, как, например, при распространении излучения с $\lambda = 10,6 \text{ мк}$ в атмосфере. Для атмосферных же задач движение среды является в большинстве случаев определяющим в процессах теплового самовоздействия.

Приведенные в [4] результаты численных расчетов показали характерные особенности тепловой самофокусировки в движущихся средах: при этом самофокусировка происходит в основном вдоль оси, перпендикулярной направлению движения среды, и максимум интенсивности смещается по ветру. Эти расчеты были выполнены в приближении геометрической оптики, которое применимо на расстояниях z в среде, меньших характерной длины теплового самовоздействия L_t . В работе [5] в безаберрационном приближении было рассмотрено влияние дифракции на самофокусировку при кинетическом охлаждении. Применимость безаберрационного приближения ограничена, однако, условием малости нелинейных эффектов; кроме условия $z < L_t$ необходимо еще выполнение условия $L_d \ll L_t$ ($L_d = kR^2$ — характерная дифракционная длина).

В настоящей работе предлагается метод усредненного описания тепловой самофокусировки пучков в движущихся средах, который приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений того же типа, что и в безаберрационном приближении, но применимых для описания распространения пучков с мощностями вплоть до критической (определенной из условия $L_t = L_d$). Проведены численные расчеты самофокусировки, которые позволили определить область применимости приближенного метода и выяснить вопрос о влиянии дифракции на самофокусировку при мощностях пучка, превышающих критическую.

Стационарное тепловое самовоздействие светового пучка в среде, движущейся в направлении оси x перпендикулярно направлению распространения пучка z , будем описывать параболическим уравнением, которое в безразмерных переменных

$$x = \tilde{x}/R, \quad y = \tilde{y}/R, \quad z = \tilde{z}/L_t, \quad E = (\tilde{E}/A_0) \exp(\alpha L_t z/2)$$

имеет вид

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} + \epsilon \Delta_{\perp} E + \frac{2}{\epsilon} TE = 0, \quad T = \int_{-\infty}^x |E|^2 \exp(-\alpha L_T z) dx. \quad (1)$$

Здесь R — характерный размер пучка, $A_0 = \sqrt{8P/(cn_0 R^2)}$, P — мощность в пучке, c — скорость света, n_0 — показатель преломления среды, α — коэффициент поглощения, $\epsilon = L_T/L_d$, k — волновое число, L_T — характерная длина теплового самовоздействия, которая равна

$$L_T = \left(\frac{dn}{dT} \frac{\alpha P}{\pi n_0 \rho c_p V R^3} \right)^{-1/2} \quad (2a)$$

в среде с $dn/dT > 0$ и

$$L_T = \left(- \frac{dn}{dT} \frac{(2,44\alpha_{CO_2} - \alpha) P}{\pi n_0 \rho c_p V R^3} \right)^{-1/2} \quad (2b)$$

при распространении излучения 10,6 мк в атмосфере, когда время релаксации поглощенной энергии в тепловую намного превышает время $t = R/V$. В формулах (2) ρ , c_p , V — плотность, теплоемкость и скорость движения среды соответственно, α_{CO_2} — часть поглощения α , обусловленная наличием углекислого газа.

Одним из приближений, которое часто используется для расчета самовоздействия гауссовых пучков в нелинейных средах, является безабберационное приближение [2, 3, 5]. При распределении поля на входе среды в виде $E = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 + i/F)\right)$ решение уравнения (1) при $z \neq 0$ также имеет вид гауссова пучка с параметрами, зависящими от координаты z . Учитывая, что при наличии ветра из-за отсутствия радиальной симметрии нелинейной части показателя преломления уширение пучка по осям x и y различно, а также то, что возникает отклонение пучка вдоль оси x , поле в гауссовом пучке можно в общем случае записать в виде

$$E(x, y, z) = \frac{A}{\sqrt{ab}} \exp \left\{ -\frac{(x - r)^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2} - \frac{iS_1}{2}(x - r)^2 - \frac{iS_2}{2} y^2 - i\Psi(x - r) - i\varphi \right\}. \quad (3)$$

Здесь параметры A , a , b , S_1 , S_2 , Ψ , r , φ , характеризующие соответственно амплитуду, ширины пучков по осям x и y , кривизны фазового фронта, его наклон, смещение центра пучка и набег фазы на его оси, являются функциями координаты z . Раскладывая функцию T при $x \ll a$, $y \ll b$ в ряд по степеням x и y и ограничиваясь квадратичными членами разложения, из (1) можно получить следующую систему уравнений для этих параметров:

$$A' = 0, \quad \Psi = -r'/\epsilon, \quad S_1 = -\frac{1}{\epsilon} \frac{a'}{a}, \quad S_2 = -\frac{1}{\epsilon} \frac{b'}{b},$$

$$a'' = \frac{\epsilon^2}{a^3}, \quad b'' = \frac{\epsilon^2}{b^3} - \frac{\sqrt{\pi}}{b^2} \exp(-\alpha L_T z), \quad r'' = \frac{1}{ab} \exp(-\alpha L_T z), \quad (4)$$

$$2\varphi' = \epsilon \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{\epsilon} \left(r'^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{b} \exp(-\alpha L_T z) \right).$$

Безаберационное приближение, как известно из расчетов самофокусировок пучков при нелинейности вида $T = |E|^2$, применимо лишь для описания приосевой части пучка на расстояниях в среде, много меньших расстояния до точки схлопывания. Область применимости его можно, однако, расширить, если параметры уравнений (4) выбирать из условия стационарности функционала действия [7]. Можно ожидать, что применение вариационного метода окажется эффективным и для нахождения усредненных характеристик пучка и при тепловой самофокусировке. Для уравнения (1), в отличие от уравнения с $T = |E|^2$, не удается, правда, найти функционал действия, который бы имел экстремум на функциях E и E^* , являющихся решениями уравнений (1) для E и аналогичных для E^* . Для нахождения приближенных решений в этом случае можно воспользоваться методом локального потенциала [9]. При этом находится решение самосогласованной задачи

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} + \epsilon \Delta_{\perp} E + \frac{2}{\epsilon} T_0 E = 0, \quad (5)$$

где

$$T_0 = \int_{-\infty}^x E_0 E_0^* dx,$$

причем предполагается, что функция T_0 равна функции T , определяемой решением системы (1), при условии, что T_0 является неварьируемой переменной в функционале действия для уравнения (5), который имеет вид

$$L(E, E^*, T_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_0^z dz \left[i \left(E \frac{\partial E^*}{\partial z} - E^* \frac{\partial E}{\partial z} \right) + \epsilon \nabla_{\perp} E \nabla_{\perp} E^* - \frac{2}{\epsilon} T_0 E E^* \right]. \quad (6)$$

Можно предложить поэтому следующую схему нахождения уравнений для функций A, a, b, \dots , от которых зависит приближенное решение: при выбранной зависимости $E(A, a, \dots)$ нужно найти функцию $T_0(x, y, z)$, выполнить интегрирование по поперечным координатам x и y в выражении для L и затем вычислить вариационные производные этого функционала по функциям $A(z), a(z), \dots$ в предположении, что функции, входящие в выражение для T_0 , не зависят от тех функций, по которым варируется функционал L . Приравнивая выражение для производных нулю, получим искомое уравнение для параметров, при которых функционал L имеет экстремум. Отметим, что в применении к случаю с $T = |E|^2$ предложенная схема и метод с использованием функционала действия нелинейного уравнения, который отличается от (6) наличием члена $\frac{1}{\epsilon} |E|^4$ вместо $\frac{2}{\epsilon} T |E|^2$, дают одинаковые уравнения для параметров.

При зависимости поля E от параметров A, a, b, \dots в виде (2) для L получим выражение $L = -(L_1 + L_2 + L_H)$, где

$$L_1 = \pi \int_0^z A^2 (S'_1 a^2/2 + S'_2 b^2/2 - 2\Psi r' + 2\varphi') dz,$$

$$L_2 = -\epsilon \pi \int_0^z A^2 [\Psi^2 + 1/(2a^2) + 1/(2b^2) + S_1^2 a^2/2 + S_2^2 b^2/2] dz, \quad (7)$$

$$L_H = \frac{2}{\epsilon} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_0^z dz \frac{A^2}{ab} \exp \left(-\frac{(x-r)^2}{2a^2} - \right. \\ \left. - \frac{y^2}{2b^2} \right) \int_{-\infty}^x d\zeta \frac{\bar{A}^2}{\bar{a} \bar{b}} \exp \left(-\frac{(\zeta-r)^2}{\bar{a}^2} - \frac{y^2}{\bar{b}^2} \right).$$

В последнем выражении черточками отмечены функции, по которым не нужно варьировать L_H . Здесь также не проведено интегрирование по координатам x и y , так как удобнее сначала проварировать по необходимым функциям и только затем, положив $\bar{A} = A$, $\bar{a} = a$ и т. д., вычислять интегралы по x и y .

В результате вычислений получим систему из восьми уравнений для параметров гауссова пучка, пять из которых совпадают с соответствующими уравнениями системы (4), а последние три —

$$b'' = \frac{\epsilon^2}{b^3} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{b^2} \exp(-\alpha L_T z), \quad r'' = \frac{1}{2ab} \exp(-\alpha T_T z), \\ 2\varphi' = \epsilon \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{\epsilon} \left(r'^2 + \frac{1}{b} \exp(-\alpha L_T z) \right) \quad (8)$$

— отличаются от уравнений безабберационного приближения коэффициентами при членах, обусловленных наличием нелинейности среды.

Будем рассматривать далее случай отсутствия фокусировки $F \rightarrow \infty$, $a'(0) = 0$, $b'(0) = 0$ и малого ослабления интенсивности пучка из-за поглощения, $\alpha L_T z \ll 1$. Решениями уравнений для a и b в этом случае будут

$$a^2 = 1 + \epsilon^2 z^2,$$

или

$$a^2 = 1 + \bar{z}^2 / (k^2 R^4); \quad (9)$$

$$(2\beta - \epsilon^2)z = \frac{\beta}{\sqrt{2\beta^2 - \epsilon^2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[1 - \frac{2\beta^2 - \epsilon^2}{\beta - \epsilon^2} (1 - b) \right] \right\} + \\ + \sqrt{2\beta(b - b^2) + \epsilon^2(b^2 - 1)} \operatorname{sign}(\beta - \epsilon^2), \quad (10)$$

где $\beta = \sqrt{\pi/8}$.

Из формулы (9) (здесь \bar{z} — размерная переменная) видно, что нелинейность не оказывается на уширении пучка по оси x , оно происходит так же, как в линейной среде. Функция же $b(z)$, являющаяся решением уравнения (10), — периодическая с периодом $z_0 = 2\pi\beta(2\beta - \epsilon^2)^{-3/2}$ и в точке $z_0/2$ равна $\epsilon^2(2\beta - \epsilon^2)$. При $\epsilon = \sqrt{\beta} = 0,792$ уширение пучка по оси y компенсируется фокусировкой и $b(z) = 1$. При $\sqrt{\beta} < \epsilon < \sqrt{2\beta}$ вначале (при $z < z_0/2$) происходит уширение пучка из-за дифракции, затем пучок фокусируется до значения $b(z_0) = 1$. При $\epsilon > \sqrt{2\beta}$ фокусировка не может компенсировать дифракцию и ширина пучка по оси y монотонно увеличивается. При $\epsilon < \sqrt{\beta}$ функция $b(z)$ сразу начинает уменьшаться, однако в отличие от самофокусировки из-за эффекта Керра или электрострикции, когда при мощностях в пучке, больших критической, происходит склонование пучка, при тепловой самофокусировке

в движущейся среде этого не происходит, минимальный размер пучка по оси y оказывается по порядку величины равным размеру гауссова пучка в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием L_T .

СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В случае нелинейности вида $T = |E|^2$ квадраты величин a и b , определяемых уравнениями типа (8), совпадают с центробежными моментами, для которых известны точные аналитические выражения [8]. Можно предположить, что и в рассматриваемом случае тепловой самофокусировки в движущейся среде величины a^2 и b^2 будут близки к центробежным моментам, определяемым формулами

$$a_{\text{эфф}}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 x^2 dx dy - r_{\text{эфф}}^2, \quad b_{\text{эфф}}^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 y^2 dx dy, \quad (11)$$

где $r_{\text{эфф}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 x dx dy$ — смещение центра тяжести пучка.

Для проверки этого предположения было проведено численное решение уравнения (1). В расчетах была использована разностная схема переменных направлений, заключающаяся в следующем. Если известны значения поля на двух слоях E^n и E^{n-1} , то значение E^{n+1} ($E_{ij}^n = E(n\Delta z, i\Delta x, j\Delta y)$) получается по следующей схеме:

$$\begin{aligned} (E^{n-1/2} - E^{n-1}) &= \frac{i \Delta z}{2} A_1 \left(\frac{E^{n-1/2} + E^{n-1}}{2} \right), \\ (E^n - E^{n-1/2}) &= \frac{i \Delta z}{2} A_2(E^n) \left(\frac{E^n + E^{n-1/2}}{2} \right), \\ (E^{n+1/2} - E^n) &= \frac{i \Delta z}{2} A_2(E^n) \left(\frac{E^{n+1/2} + E^n}{2} \right), \\ (E^{n+1} - E^{n+1/2}) &= \frac{i \Delta z}{2} A_1 \left(\frac{E^{n+1} + E^{n+1/2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь A_1 — разностный аналог оператора $\epsilon \partial^2 / \partial y^2$,

$$A_1(f) = \frac{\epsilon}{h^2} (f_{i,j-1} + f_{i,j+1} - 2f_{i,j}),$$

A_2 — разностный аналог оператора $\epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{\epsilon} T$. При этом нелинейная часть A_2 вычисляется на среднем слое E^n по явной трехслойной схеме, использующей значения E^{n-1} и E^{n-2} . Описанная схема является устойчивой и обеспечивает решение задачи с точностью $O(\Delta z^2 + h^2)$. Она является экономичной, т. е. количество операций для расчета каждого слоя порядка h^{-2} .

Результаты расчетов представлены на рис. 1—5. На рис. 1—3 плошными линиями изображены зависимости функций a , b и r , являющиеся решениями уравнений (8), точками — функции, рассчитанные по формуле (11), после численного интегрирования уравнения (1). Наиболее хорошее согласие между приближенными и точными решениями наблюдается для величины смещения центра тяжести пучка r . Для ве-

личин же a и b результаты хорошо согласуются в случаях либо малых нелинейных эффектов $z \leq 1$, либо при больших значениях параметра ϵ ($\epsilon \geq 1$), когда велика дифракция.

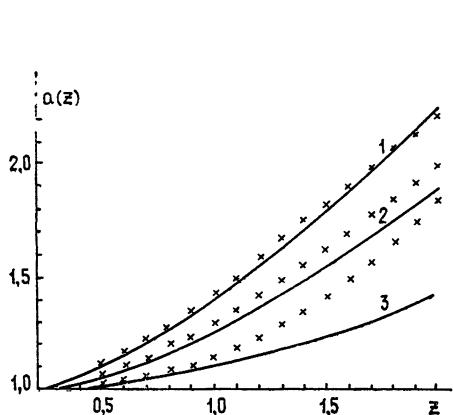


Рис. 1.

Рис. 1. Изменение ширины пучка по оси x , направленной вдоль направления движения среды; сплошные линии — приближенное решение, точки — результаты численных расчетов, для значений параметра $\epsilon = L_T/L_d$ равных: 1 — кривая 1; 0,8 — кривая 2; 0,5 — кривая 3.

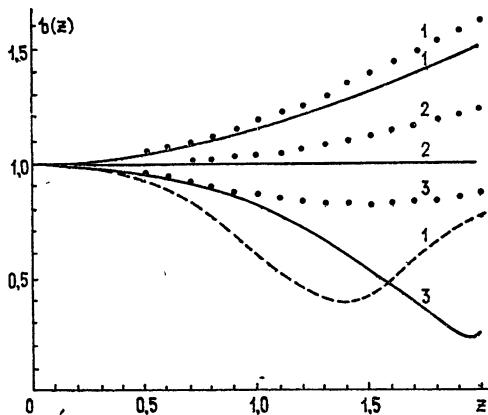
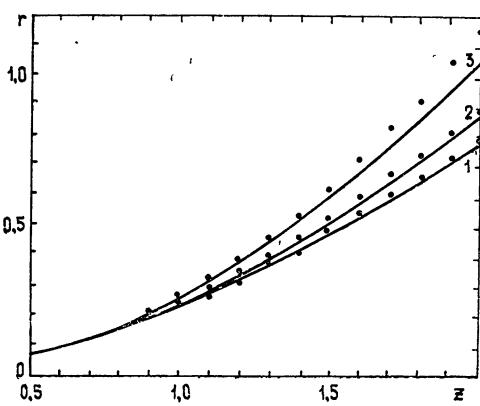


Рис. 2.

Рис. 2. Изменение ширины пучка по оси, перпендикулярной направлению движения среды. Обозначения как на рис. 1. Штриховая линия — решение уравнения для b в без aberrационном приближении для случая $\epsilon = 1$.

Рис. 3. Смещение центра тяжести пучка.
Обозначения те же, что и на рис. 1.

приближенного решения нужно выбирать функции более сложного вида, чем гауссова. Перспективным, по нашему мнению, является использование разложений по функциям Эрмита — Гаусса, которые являются собственными функциями уравнения (1) в отсутствие нелинейности.

Выражаем благодарность В. И. Татарскому, предложившему идею использования вариационных методов к решению задач самовоздействия пучков,

При малых же значениях ϵ и $z > 1$ различие между точными и приближенными решениями оказывается большим, так как распределение интенсивности при этом, как видно из рис. 4, 5, сильно отличается от гауссова. В подветренной части пучка, справа от максимума, интенсивность спадает к краю быстрее, чем в гауссовом пучке, в наветренном же — медленнее. При значении $\epsilon = 0,4$ изменение интенсивности в наветренной части пучка немонотонно, образуется двугорбое распределение.

Для корректного описания распространения пучка при малых значениях ϵ в качестве

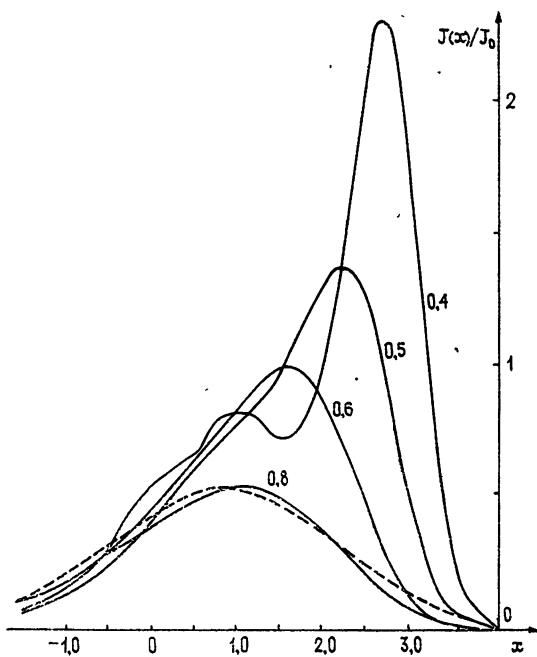


Рис. 4. Результаты численных расчетов распределения интенсивности по оси x в сечении $z = 2$, цифры у кривых — значения параметра ϵ . Штриховая линия — гауссова кривая (2), где a, b, r определяются решением уравнений (8) при $\epsilon = 0,8$, $z = 2$.

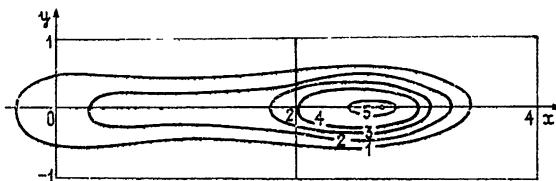


Рис. 5. Линии уровней интенсивности: $J/J_{\max} = 7/8; 4/8; 3/8; 2/8; 1/8; J_{\max} = 2,5 J_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Литвак, Письма в ЖЭТФ, 4, 341 (1966).
2. С. А. Ахманов, Д. П. Криндач, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Письма в ЖЭТФ, 6, 509 (1967).
3. С. А. Ахманов, Ю. А. Горохов, Д. П. Криндач, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 57, 16 (1969).
4. J. Wallace and M. Samaas, J. Opt. Soc. Am., 60, 1587 (1970).
5. Э. И. Шумилов, Диссертация, МГУ, М., 1975.
6. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
7. В. В. Воробьев, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 12, 1905 (1970).
8. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 9, 1353 (1971).
9. П. Гленздорф, И. Пригожин, Термодинамическая теория структуры устойчивости и флюктуаций, изд. Мир, М., 1973.

THE THERMAL SELF-FOCUSING OF LASER BEAMS IN MOVING MEDIA

V. V. Vorob'ev, V. V. Shemetov

By the method of the local potential the problem on the thermal self-focusing is reduced to the solution of a system of ordinary differential equations for the beam parameters. The numerical integration of the initial parabolic equation is made to evaluate the method applicability.

УДК 535.42 : 535.39

УПЛОТНЕННАЯ ЗАПИСЬ ИНФОРМАЦИИ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

C. H. Менсов

Теоретически и экспериментально рассмотрен вопрос о нахождении места записи голограмм минимального размера в линзовых голографических схемах. Даны рекомендации по определению параметров «минимальных» голограмм.

Уплотненная запись информации в оптическом виде необходима в задачах микрофильмирования для создания компактных библиотек печатных текстов [1], в задачах радиовидения [2], где ограничена площадь регистрирующих устройств. Наиболее перспективным в этой области в настоящее время считается метод фурье-голографии [1]. Уплотнение информации этим методом (рис. 1 а) достигается за счет фокусировки положительной линзой $L_F(x)$ предметной волны, дифрагированной на голографируемом транспаранте $T(x)$. При этом на голограмме, записанной в плоскости $z_1 = F$, фиксируется фурье-образ входной структуры. Размер записанной таким образом голограммы определяется из условия [1]

$$2\Delta y = \frac{\lambda F}{a}, \quad (1)$$

где F — фокусное расстояние объектива $L_F(x)$, $2a$ — линейный размер предельно разрешимого на объекте пространственного периода, который необходимо восстановить в голографическом изображении, λ — длина волн света.

Однако ранее не рассматривался вопрос о минимальности размера традиционной фурье-голограммы по сравнению с голограммами, записанными по такой же схеме, но в других плоскостях $z_1 \neq F$ при условии равного разрешения в восстановленном изображении.

Исследование этого вопроса, а также определение места записи и размера «минимальной» голограммы в схеме со сходящимся предметным пучком является целью данной работы.

ЗАПИСЬ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГОЛОГРАММ, РЕГИСТРИРУЕМЫХ ВО ВНЕФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим особенности схем записи (рис. 1 а) и восстановления (рис. 1 б) голограмм со сходящимся предметным пучком в плоскости $z_1 \neq F$ для голографирования плоских объектов, представленных в виде одномерных транспарантов с коэффициентом амплитудного пропускания $T(x)$. Будем считать, что в обеих схемах используются идеальные объективы, комплексный коэффициент пропускания которых

$$L_F(x) = \exp \left(-\frac{\pi i}{\lambda F} x^2 \right), \quad (2)$$

Тогда при дифракции на входном распределении $T(x)$ плоской световой волны (рис. 1 а) одномерное распределение поля в приближении Френеля [3] в произвольном сечении (z_1, y) будет описываться выражением

$$E_1(y) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \exp \left[\frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) x^2 - \frac{2\pi i}{\lambda z_1} xy + \frac{\pi i}{\lambda z_1} y^2 \right] dx, \quad (3)$$

где E_0 — амплитуда поля перед линзой $L_F(x)$.

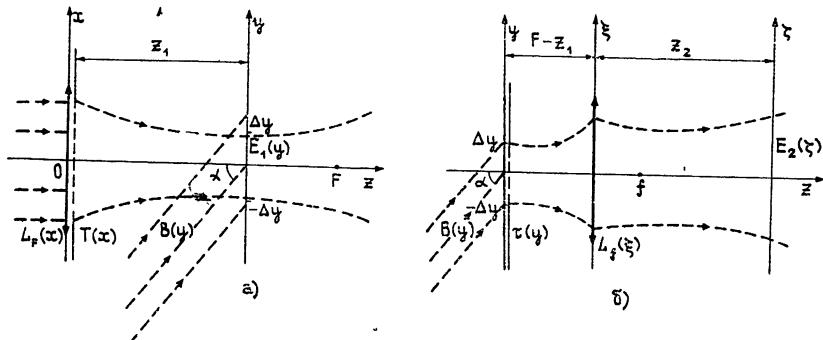


Рис. 1.

Пусть используемая при голограммировании опорная волна идентична восстанавливающей. Тогда при восстановлении голограммы, записанной в сечении (z_1, y) (см. рис. 1 а) по схеме, приведенной на рис. 1 б, информационная часть восстановленного с голограммы поля в плоскости наблюдения (z_1, ζ) , соответствующей условию

$$\frac{1}{F} + \frac{1}{z_1} = \frac{1}{f}, \quad (4)$$

будет иметь вид

$$E_2(\zeta) = E_0 \exp \left[-\frac{\pi i (F-f)(F+z_1-f)}{\lambda z_1 f^2} \zeta^2 \right] \iint_{-\infty}^{\infty} T(x) \Pi \left(\frac{y}{\Delta y} \right) \times \\ \times \exp \left[\frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) x^2 \right] \exp \left[-\frac{2\pi i y}{\lambda z_1} \left(x + \zeta \frac{F-f}{f} \right) \right] dx dy, \quad (5)$$

где

$$\Pi \left(\frac{y}{\Delta y} \right) = \begin{cases} 1, & \frac{y}{\Delta y} \in [-1; 1] \\ 0, & \frac{y}{\Delta y} \notin [-1; 1] \end{cases}, \quad (6)$$

$2\Delta y$ — линейный размер голограммы, f — фокусное расстояние используемой в схеме восстановления линзы $L_f(\xi)$.

Одним из условий неискаженного восстановления изображения предмета является полная регистрация на голограмме дифрагированного на объекте излучения. Действительно, если ширина функции $E_1(y)$ (3) меньше ширины $\Pi(y/\Delta y)$ (6), т. е. весь эффективный энергетический спектр Френеля исходного распределения $T(x)$ заключен в интервале $[-\Delta y; \Delta y]$, то влияние члена (6) в выражении (5) можно не учитывать [4]. В этом случае (5) преобразуется в

$$E_2(\zeta) = E_0 \exp \left[-\frac{\pi i (F-f)(2F-f)}{\lambda f^2 F} \zeta^2 \right] T \left(-\zeta \frac{F-f}{f} \right), \quad (5a)$$

что, в свою очередь, указывает на полное неискаженное восстановление изображения предмета $T(x)$. Однако определить ширину спектра Френеля реального предмета обычно очень сложно. Поэтому больший интерес представляют условия полного восстановления изображения с ограниченной голограммы, накладывающие ограничения на параметры самого объекта, а не на его спектр Френеля. При этом будем считать, что изображение восстанавливается полностью, если на нем разрешается заданный минимальный пространственный период и поле зрения его эквивалентно максимальному размеру голографируемого предмета.

Выражение (5) можно представить в виде

$$E_2(\zeta) = E_0 \exp \left(\frac{\pi i}{\lambda R} \zeta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \exp \left(\frac{\pi i}{2} \frac{\Omega}{D} x^2 \right) \operatorname{sinc} [\Omega(x+k\zeta)] dx, \quad (7)$$

где

$$\Omega = \frac{2\Delta y}{\lambda z_1}, \quad D = \frac{\Delta y F}{F-z_1}, \quad k = \frac{F-f}{f}, \quad R = \frac{z_1 f^2}{(F-f)(F+z_1-f)}.$$

Ядро интегрального преобразования (7) не инвариантно к сдвигу. Поэтому при анализе такой системы нельзя воспользоваться методом линейных переходных характеристик [4], который справедлив для фурье-голограмм [1] и накладывает ограничения только на разрешение минимальных элементов в восстановленном с ограниченной голограммы изображении.

Оценим разрешение и поле зрения для изображения, восстановленного с ограниченной голограммы, записанной в плоскости y . Для определения разрешения поместим на вход голографической системы транспарант

$$T(x) = \delta(x+x_1) + \delta(x+x_2).$$

В этом случае (7) примет вид

$$E_2(\zeta) = E_0 \exp \left(\frac{\pi i}{\lambda R} \zeta^2 \right) \left[\exp \left(\frac{\pi i}{2} \frac{\Omega}{D} x_1^2 \right) \operatorname{sinc} \Omega(\zeta k + x_1) + \exp \left(\frac{\pi i}{2} \frac{\Omega}{D} x_2^2 \right) \operatorname{sinc} \Omega(\zeta k + x_2) \right].$$

Так как

$$|E_2(\zeta)|^2 \leq \{ [\operatorname{sinc} \Omega(\zeta k + x_1)]^2 + [\operatorname{sinc} \Omega(\zeta k + x_2)]^2 \} |E_0|^2,$$

то при оценке разрешения по критерию Рэлея [5] можно считать, что полуширина предельного разрешимого в изображении пространственного периода будет не больше чем

$$\Delta \zeta_p = \frac{x_2 - x_1}{2k} = \frac{f}{F-f} \frac{\lambda z_1}{2\Delta y}. \quad (8)$$

Для определения поля зрения системы положим $T(x) = 1$. В этом случае

$$E_2(\zeta) = E_0 \exp \left[\frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) \zeta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \Omega x \times \\ \times \exp \left(\frac{\pi i}{2} \frac{\Omega}{D} x^2 + \pi i \frac{\Omega}{D} kx\zeta \right) dx. \quad (9)$$

Можно считать, что функция $\text{sinc } \Omega x$ ограничена в интервале $\Delta x = 2/\Omega$. Тогда при условии $(\Omega/2D)\Delta x^2 \ll 1$, которое эквивалентно

$$\frac{2}{\Omega} \ll D, \quad (10)$$

выражение (9) переходит в

$$\begin{aligned} E_2(\zeta) &= E_0 \exp \left[\frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) \zeta^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc } \Omega x \exp \left(\pi i \frac{\Omega}{D} kx \zeta \right) dx = \\ &= E_0 \exp \left[\frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) \zeta^2 \right] \Pi \left(\zeta \frac{k}{D} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что поле зрения в плоскости изображения будет ограничено интервалом

$$2\Delta\zeta_n = 2 \frac{D}{k} = 2 \frac{f}{F-f} \frac{\Delta y F}{F-z_1}. \quad (11)$$

Следовательно, если нам нужно получить полное изображение объекта, который имеет максимальный размер $2c$, и разрешить на нем минимальный пространственный период $2a$, то размер голограммы должен одновременно удовлетворять условиям

$$\Delta y \geq \gamma_p = \frac{\lambda z_1}{2a}; \quad (8a)$$

$$\Delta y \geq \gamma_n = c \frac{F-z_1}{F}, \quad (11a)$$

которые справедливы в случае

$$a \ll c. \quad (10a)$$

Когда неравенство (10a) невыполнимо, получить ограничения на размер голограммы, аналогичные (8a) и (11a), затруднительно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТА ЗАПИСИ И РАЗМЕРОВ МИНИМАЛЬНОЙ ГОЛОГРАММЫ

При фокусировке плоской волны диафрагмированной фокусирующей системой самый узкий отклик наблюдается в общем случае не в фокальной плоскости [6]. Его положение на оптической оси определяется размером апертуры линзы.

Большинство реальных объектов можно представить в «мозаичном» виде набором отверстий различной прозрачности [7]:

$$T(x) = \sum_n A_n b_n(x), \quad (12)$$

$$b_n(x) = \Pi \left[\frac{2(x-x_n)}{a} \right];$$

$$A_n = \frac{1}{a} \int_{x_n - \frac{a}{2}}^{x_n + \frac{a}{2}} T(x) dx \quad (13)$$

при условии

$$|x_n| < c - \frac{a}{2}, \quad (14)$$

где a — ширина минимальной структуры на объекте, $2c$ — размер объекта.

Как было показано выше, минимальный размер голограммы, записанной в произвольном сечении по оси z , равен ширине функции $E_1(y)$ (см. (3)) в этом сечении. Тогда, воспользовавшись принципом суперпозиции, можно утверждать, что минимальный дифракционный отклик, а следовательно, и минимальная голограмма, от транспаранта произвольной формы будет в общем случае в плоскости $z_1 \neq F$. Однако вследствие того, что дифракционная картина от отверстия прямоугольной формы имеет сложный вид [6], более целесообразно голографируемый транспарант $T(x)$ представить в виде набора функций Гаусса

$$b_n'(x) = \exp\left(-\frac{4(x-x_n)^2}{a^2}\right). \quad (13a)$$

В этом случае дифракционная картина в произвольном сечении по оси z (рис. 1а) от объекта, представленного в виде (12), (13), будет

$$\begin{aligned} E_1(y) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n A_n \exp \left[-\frac{4(x-x_n)^2}{a^2} + \frac{\pi i}{\lambda} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{F} \right) x^2 - \frac{2\pi i}{\lambda z_1} xy + \right. \\ \left. + \frac{\pi i}{\lambda z_1} y^2 \right] dx = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{4i\lambda z_1}{\pi a^2} + \left(1 - \frac{z_1}{F}\right)}} \exp\left(\frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{\lambda z_1} y^2\right) \times \\ \times \sum_n A_n \exp \left[-\frac{4}{a^2} \frac{\left(y - x_n \frac{F - z_1}{F}\right)^2}{\left(\frac{4\lambda z_1}{\pi a^2}\right)^2 + \left(\frac{F - z_1}{F}\right)^2} \right] \times \\ \times \exp \left\{ -i \frac{y^2 - \frac{32z_1^2\lambda^2}{\pi^2 a^4} x_n^2 + 2yx_n \frac{16\lambda^2 z_1^2}{\pi^2 a^4} \frac{F}{F - z_1}}{\left[\left(\frac{F - z_1}{F}\right)^2 + \left(\frac{4\lambda z_1}{\pi a^2}\right)^2\right] \frac{z_1 \lambda F}{F - z_1}} \right\}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что дифракционный отклик, аналогично объекту, имеет вид суммы функций Гаусса

$$\Theta_n(y) = \exp \left\{ -\frac{4}{a^2} \frac{[y - x_n(1-q)]^2}{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + (1-q)^2} \right\},$$

где $p = \pi a^2 / 4\lambda F$, $q = z_1/F$. Тогда зависимость положения максимального значения границы элементарного отклика $\Theta_n(y)$ на уровне e^{-1} от расстояния z_1 (рис. 1б) будет

$$\Delta y_n(q) = x_n(1-q) + \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + (1-q)^2}.$$

Так как в области $0 \leq q \leq 1$ при $x_n > x_m$

$$\Delta y_n(q) - \Delta y_m(q) = (x_n - x_m)(1-q) \geq 0,$$

то ширину функции $E_1(y)$ для «гауссова» представления можно определить по формуле

$$\Delta y_T(q) = c(1-q) + \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{p}\right)^2 + (1-q)^2}. \quad (15)$$

Для определения положения на оптической оси минимального значения дифракционного отклика $E_1(y)$ достаточно исследовать на экстремум функцию (15). В этом случае зависимость положения этого сечения по оси z от параметров объекта примет вид

$$q^T = \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4c^2}(1+p)^2 - p^2}} \right), \quad (16)$$

что справедливо при условии

$$4c^2 - a^2 \leq \frac{\lambda^2 F^2}{\pi^2 c^2}, \quad (17)$$

которое следует из условия допустимых значений для уравнения

$$(\Delta y_T(q))'_q = 0.$$

Тогда ширина минимальной голограммы в сечении q^T будет

$$\Delta y^T = \frac{c}{1 + p^2} + \sqrt{\frac{a^2}{1 + p^2} - \frac{c^2}{(1 + p)\left(1 + \frac{1}{p}\right)}}. \quad (18)$$

Условие (17) накладывает ограничения на параметры объекта, положение и размер «минимальной» голограммы, от которого определяются данным методом: максимальный размер объекта должен быть сравним по порядку величины с размером минимального элемента.

Экспериментальная проверка формул (16) и (18) при голографировании в миллиметровом диапазоне показала, что минимальное сечение определяется довольно-таки точно по формуле (16). В то же время ширина минимальной голограммы хорошо описывается (18) только для крупноструктурных объектов ($a \sim c$).

При голографировании мелкоструктурных объектов ($a \ll c$), когда выполняется условие (10 а), для нахождения места записи и размера «минимальной» голограммы можно не определять ширину дифракционного отклика $E_1(y)$ (3). В этом случае достаточно воспользоваться условиями (8 а) и (11 а), которые определяют размер голограммы, записанной в произвольном сечении по оси z . Если учесть, что с увеличением расстояния от объекта до предполагаемого места записи голограммы z_1

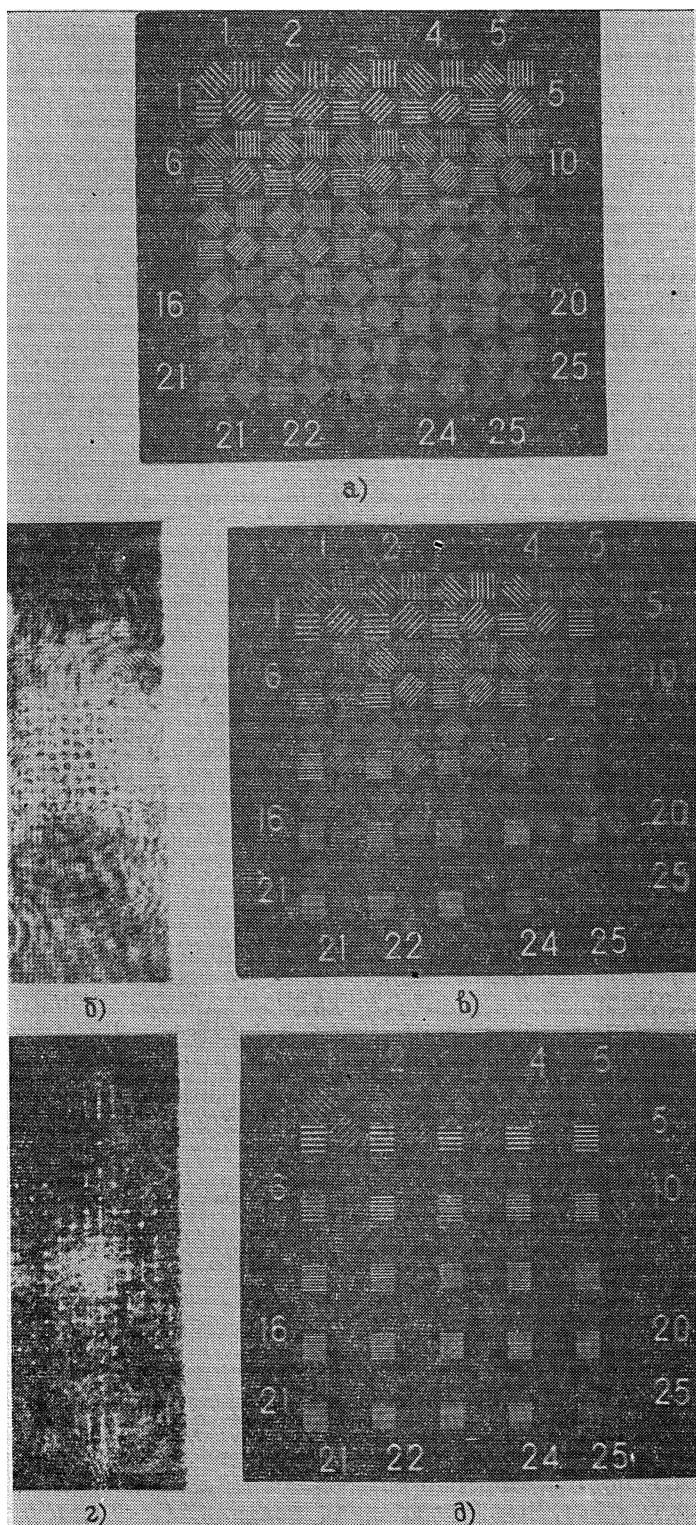


Рис. 2,

функция γ_p возрастает, а γ_n , наоборот, убывает, а также то, что для полного восстановления изображения объекта с заданными параметрами условия (8 а) и (11 а) должны выполняться одновременно, можно предположить, что голограмма будет минимальна в сечении

$$z_1^T = \frac{F}{1 + \frac{\lambda F}{2ac}}, \quad (19)$$

где $\gamma_n = \gamma_p$. Тогда минимальный размер голограммы будет

$$\Delta y^T = \frac{c}{1 + \frac{2ac}{\lambda F}}. \quad (20)$$

Полученные теоретические расчеты были проведены экспериментально. Для записи голограммы использовался объектив И-37 ($F = 300$ мм). Голографируемым объектом была штриховая мири (из комплекта к оптической скамье ОСК-2) с наибольшим поперечным размером $2c = 9$ мм. Внешний вид миры приведен на рис. 2 а.

Если в восстановленном с голограммы изображении объекта $T(x)$ (рис. 2 а) нужно получить разрешение, соответствующее 15-му участку миры, где $a = 0,018$ мм, то, как видно из формулы (19), минимальную голограмму следует записывать на расстоянии $z_1^T \approx 139$ мм от линзы. Тогда минимальный размер зафиксированной в этом сечении голограммы, необходимый для восстановления изображения с заданным разрешением и полем зрения, должен быть $2\Delta y^T = 4,8$ мм (20).

Внешний вид полученной таким образом голограммы, ограничение которой производилось по одной оси, приведен на рис. 2 б, а восстановленное с нее изображение — на рис. 2 в. При постановке этого эксперимента исследовалась правильность определения по формуле (19) положения сечения «минимальной» записи: снимались голограммы с таким же размером $2\Delta y = 4,8$ мм, но в других плоскостях (z_1, y), и восстановленное с них изображение сравнивалось с «минимальным». При этом все другие изображения имели либо меньшее поле зрения (если $z_1 < z_1^T$), либо худшее разрешение (если $z_1 > z_1^T$). Для сравнения на рис. 2 г приведена фурье-голограмма ($z_1 = F$) такого же размера, как «минимальная», а на рис. 2 д — восстановленное с нее изображение. При этом разрешение в методе фурье-голографии значительно хуже. Для восстановления изображения с таким же разрешением, как и от «минимальной» голограммы, фурье-голограмму можно записать размером $2\Delta y = 10,7$ мм (см. (1)). Кроме того, «минимальная» голограмма имеет меньший динамический диапазон, чем голограмма Фурье, что очень важно при постановке голографического эксперимента.

Эффект, связанный с внефокальным уплотнением информации, при голографировании по схеме со сходящимся предметным пучком наиболее существен в случае, когда параметр $2ac/\lambda F$ мал по величине. Такое соотношение параметров объекта (a и c) и характеристик голографической системы (λ, F) особенно часто встречается в задачах микрофильмирования ($a \ll c$), в задачах радиовидения ($a \sim c, a^2/\lambda F$ — мало). Только в случае $2ac/\lambda F \geq 99$ с точностью не хуже 1% можно утверждать, что размеры «минимальной» фурье-голограммы будут совпадать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Кольер, К. Беркхард, Л. Лин, Оптическая голограмма, изд. Мир, М., 1973.
2. Э. И. Гельфер, С. Н. Менсов, Радиотехника и электроника, № 5, 914 (1977).
3. Дж. Гудмен, Введение в фурье-оптику, изд. Мир, М., 1970.
4. В. А. Зверев, Радиооптика, изд. Сов. радио, М., 1975.
5. А. Папулис, Теория систем и преобразований в оптике, изд. Мир, М., 1971.
6. С. Н. Менсов, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 727 (1978).
7. Л. М. Сороко, Основы голограммии и когерентной оптики, изд. Мир, М., 1971.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
31 марта 1978 г.

COMPACT INFORMATION RECORD BY THE HOLOGRAPHIC METHOD

S. N. Mensov

The problem of finding the place of recording of minimal holograms in lens holographic schemes is theoretically and experimentally considered. Recommendations are given on definition the «minimal» hologram parameters.

УДК 538.56 : 519.25 : 530

УРАВНЕНИЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Г. Ф. Ефремов, В. А. Казаков

Получено стохастическое уравнение для динамической системы, находящейся в контакте с резервуаром, с учетом флуктуаций «коэффициента затухания». В качестве примера рассмотрено стохастическое уравнение для квантового гармонического осциллятора. Вычислена перенормировка среднего значения координаты и отклика осциллятора за счет параметрической связи флуктуаций.

Стochasticеское уравнение для динамической подсистемы, взаимодействующей с макроскопической подсистемой (термостатом), может быть получено из гейзенберговских уравнений движения для операторов полной системы при единственном предположении о малости изменения состояния макроскопической подсистемы под воздействием динамической подсистемы. При этом воздействие термостата на динамическую подсистему не предполагается малым. Характерной особенностью такого уравнения является то, что флуктуационные источники входят в него не только аддитивно, как это предполагается во многих работах [1, 2], но и параметрически.

Пусть динамическая подсистема с гамильтонианом H_0 взаимодействует с термостатом, имеющим гамильтониан F , и находится под воздействием внешней силы $f(t)$, так что гамильтониан всей системы имеет вид

$$H = H_0 + F - gXQ - Xf(t). \quad (1)$$

Здесь член $-gXQ$ описывает взаимодействие между динамической подсистемой и термостатом. X и Q — переменные соответственно динамической подсистемы и термостата.

Будем считать, что в некоторый момент времени (например, $t = 0$) состояние системы задано, а вся эволюция системы во времени содержится в операторах (гейзенберговское представление). В силу основного физического предположения мы должны учесть малость изменения операторов термостата за счет взаимодействия с динамической подсистемой. С этой целью представим гейзенберговский оператор (такие операторы будут снабжаться значком h) $\dot{Q}^h(t)$ в виде функционального ряда по степеням гейзенберговского оператора $X^h(t)$ с коэффициентами, зависящими только от невозмущенных операторов термостата. Выпишем уравнения для операторов Q^h и F^h :

$$\begin{aligned} iQ^h(t) &= [Q^h(t), F^h(t)], \\ \dot{F}^h(t) &= g\dot{Q}^h(t)X^h(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Мы положили $\hbar = 1$. Здесь и далее скобки [...] — обозначают коммутатор, а [...] + — антикоммутатор.

Из системы уравнений (2) находим

$$Q^h(t) = Q(t) + \frac{g}{i} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp[iF(t-t_1)] \times \\ \times [Q^h(t_1), \dot{Q}^h(t_2)X^h(t_2)]_- \exp[-iF(t-t_1)], \quad (3)$$

где $Q(t) = \exp(iFt)Q\exp(-iFt)$ — оператор в представлении взаимодействия. Его эволюция во времени определяется невозмущенным термостатом. Второе слагаемое в (3) определяет изменение оператора термостата за счет взаимодействия с динамической подсистемой.

Уравнение (3) использовалось в работе [2]. Однако далее коэффициент при $X^h(t)$ в последнем слагаемом в (3) заменялся с учетом известных приближений на среднее от него по ансамблю Гиббса. Мы учтем флуктуации этого коэффициента. Для этого получим из (3) линейный по $X^h(t)$ член искомого функционального ряда

$$Q^h(t) = Q(t) + \frac{1}{2} \int_0^\infty dt_1 [\hat{\varphi}(t, t_1), X^h(t_1)]_+, \quad (4)$$

где $\hat{\varphi}(t, t_1) = i[Q(t), Q(t_1)]_- \eta(t-t_1)$ — оператор в представлении взаимодействия. Его среднее представляет собой отклик термостата на внешнюю силу,

$$\eta(t-t_1) = \begin{cases} 1 & (t > t_1) \\ 0 & (t < t_1) \end{cases} \text{ — функция Хевисайда.}$$

Опущенное в (4) слагаемое $[i[Q(t), X^h(t_1)]_-, Q(t_1)]_+$ является членом более высокого порядка по X^h , что видно из коммутационного соотношения

$$[Q(t), X^h(t_1)]_- = \frac{g}{2} \int_0^{t_1} dt_2 [i[X^h(t_1), X^h(t_2)]_-, [Q(t), Q(t_2)]_-]_+,$$

которое следует из коммутативности $X^h(t_1)$ с операторами $Q^h(t_1), F^h(t_1)$.

Для определенности рассмотрим в качестве динамической подсистемы гармонический осциллятор с частотой ω_0 . Из (1) и (4) имеем

$$\ddot{X}^h(t) + \omega_0^2 X^h(t) - \frac{g^2}{2} \int_0^\infty dt_1 [\hat{\varphi}(t, t_1), X^h(t_1)]_+ = gQ(t) + f(t). \quad (5)$$

Учитывая основное физическое предположение, мы ограничились линейным членом в (4). Таким образом, мы получили замкнутое уравнение для оператора $X^h(t)$, в которое входят флуктуирующий «коэффициент затухания» $\hat{\varphi}(t, t_1)$ и флуктуирующая сила $Q(t)$. Их статистика полностью определяется термостатом.

Еще раз отметим, что константа взаимодействия g мала лишь с точки зрения влияния на переменную термостата $Q^h(t)$, но не на переменную \hat{X}^h , в которую g входит во всех порядках теории возмущений.

Уравнение (5) можно решить в весьма важном случае гауссовых флуктуаций оператора $Q(t)$. Действительно, решение стохастического уравнения (5) является функционалом случайных переменных $Q(t)$ и $i[Q(t), Q(t_1)]_-$. Теперь воспользуемся теоремой, согласно которой среднее от произведения гауссовых величин разбивается на сумму всевозможных попарных средних, причем порядок следования операторов в парах сохраняется. Легко заметить, что коммутатор $[Q(t), Q(t_1)]_-$ не спаривается при этом ни с какими другими $Q(t')$, а усредняется независимо. Поэтому при вычислении всевозможных средних (например,

функций корреляции X^h) коммутатор в уравнении (5) можно заранее заменить на его среднее. В результате получаем известное [1, 2] уравнение для осциллятора с затуханием и аддитивным флуктуационным источником

$$X^h(t) + \omega_0^2 X^h(t) - \int_0^t dt_1 \langle i[Q(t), Q(t_1)]_- \rangle X^h(t_1) = Q(t) + f(t), \quad (6)$$

которое обычно получают в приближении, свойственном всем кинетическим уравнениям: характерное время флуктуаций термостата намного меньше характерных времен динамической подсистемы. Запишем решение уравнения (6) для равновесного термостата $X^h(t) = \int dt_1 D^0(t-t_1) \{Q(t_1) + f(t_1)\}$:

$$D^0(t-t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \chi(\omega)} \exp \{-i\omega(t-t_1)\}, \quad (7)$$

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle i[Q(\tau), Q]_- \rangle \eta(\tau).$$

Из (7) нетрудно получить известные выражения для $\langle X^h(t) \rangle$ и функции корреляции $\left\langle \frac{1}{2}[X, X(\omega)]_+ \right\rangle$, полностью согласующиеся с ФДТ [3].

В общем случае негауссова термостата в уравнении (5) «коэффициент затухания» флуктуирует, и существует статистическая связь между ним со случайной силой. Посмотрим, к каким эффектам приведет эта связь в случае малых флуктуаций «коэффициента затухания». Запишем уравнение (5) в символическом виде:

$$X_1 = D_{12}^0(Q_2 + f_2) + \frac{1}{2} D_{12}^0[\tilde{\varphi}_{23}, X_3]_+, \quad (8)$$

где введены обозначения $X_1 = X(t_1)$, $f_1 = f(t_1)$, $Q(t_1) = Q_1$. $D_{12}^0 = D^0(t_1 - t_2)$ определяется соотношениями (7)

$$\tilde{\varphi}_{12} = \hat{\varphi}(t_1, t_2) - \langle \hat{\varphi}(t_1, t_2) \rangle.$$

В первом приближении по $\tilde{\varphi}_{12}$ получаем для $\langle X_1 \rangle$

$$\langle X_1 \rangle = D_{12}^0 \left\{ f_2 + D_{34}^0 \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_{23}, Q_4]_+ \right\rangle \right\} = D_{12}^0 \{f_2 + f_2^{\text{eff}}\}. \quad (9)$$

Таким образом, возникает эффективная сила

$$f_2^{\text{eff}} = \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_{23}, Q_4]_+ \right\rangle D_{34}^0. \quad (10)$$

Эта сила связана с параметрическим взаимодействием флуктуаций и асимметрией статистики Q (если есть симметрия относительно замены $Q \rightarrow -Q$, то $f_2^{\text{eff}} = 0$).

Для линейного отклика $D_{12} = \delta \langle X_1 \rangle / \delta f_2$ во втором порядке по $\tilde{\varphi}$ получаем

$$D_{12} = D_{12}^0 + D_{13}^0 D_{45}^0 D_{62}^0 \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_{34}, \tilde{\varphi}_{56}]_+ \right\rangle. \quad (11)$$

Таким образом, флуктуации «коэффициента затухания» приводят к перенормировке $\langle X \rangle$ и линейного отклика $D(t_1 - t_2)$.

Отметим, что изменение флуктуационной силы в неравновесном состоянии, согласно нелинейной ФДТ [4-7], может быть связано с нелинейной диссипацией, которая получается при учете нелинейных по X^h членов ряда (4).

Авторы выражают признательность В. Б. Цареградскому и Г. Н. Бочкову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Mori, Progr. Theor. Phys., 33, 423 (1965).
2. J. R. Senitzky, Phys. Rev., 119, 670 (1960).
3. H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev., 83, 34 (1951).
4. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, физ., астрон., № 4, 84 (1967); № 1, 40 (1969).
5. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 55, 2322 (1968).
6. Г. Ф. Ефремов, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1207 (1972).
7. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, ЖЭТФ, 72, 238 (1977).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 декабря 1977 г.

EQUATION WITH FLUCTUATING PARAMETERS FOR AN OPEN DYNAMIC SYSTEM

G. F. Efremov, V. A. Kazakov

A stochastic equation has been obtained for the dynamic system being in the contact with a reservoir taking into account fluctuations of the «damping coefficient». As an example a stochastic equation is considered for a quantum harmonic oscillator. Renormalization of the average coordinate value and the response of the oscillator due to the parametric relation of fluctuations are calculated.

УДК 538.56 : 519.25

**ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ
ЗА ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ В ОБЛАСТИ СИЛЬНЫХ
ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ**

B. У. Заворотный

Рассматривается поведение четырехточечной функции когерентности поля $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ плоской волны, прошедшей турбулентный фазовый экран. Получены асимптотические выражения для комплексной величины $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$, справедливые в области сильных флюктуаций интенсивности волны. Исследуется поведение действительной и мнимой части Γ_4 в зависимости от величины разноса точек наблюдения в различных режимах насыщения флюктуаций интенсивности.

При прохождении волны через слой среды со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости ϵ возникают флюктуации комплексной амплитуды поля волны. Поведение флюктуирующего поля может быть описано его многоточечными статистическими моментами. Первые два момента — среднее поле $\langle u \rangle$ и функция когерентности $\Gamma_2(x, p)$ — хорошо изучены в ряде работ, посвященных распространению волн в случайно-неоднородных средах. Последнее время усиленно изучается четвертый момент поля [1-3], который в случае плоской исходной волны можно записать в виде

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, 0)u^*(x, \rho_1)u^*(x, \rho_2)u(x, \rho_1 + \rho_2) \rangle. \quad (1)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по всем возможным реализациям флюктуаций ϵ , x — координата плоскости наблюдения. Точки наблюдения находятся в вершинах параллелограмма, образованного векторами ρ_1 и ρ_2 . Теоретически функция $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ исследовалась как в области слабых флюктуаций интенсивности, так и сильных флюктуаций, но обычно рассматривалась либо одноточечная функция $\Gamma_4(x, 0, 0)$, дающая средний квадрат интенсивности волны $\langle I^2 \rangle$, либо двухточечная функция $\Gamma_4(x, \rho, 0)$, описывающая корреляцию интенсивностей в двух точках — $\langle I(x, 0)I(x, \rho) \rangle$.

В настоящее время имеется ряд работ [4-6], в которых экспериментально исследовалась четырехточечная функция поля световой волны $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ как в области слабых флюктуаций интенсивности, так и в области сильных флюктуаций. Если для первой области теоретический результат получается довольно просто, например при использовании предположения о логнормальном распределении поля, то для второго случая требуется специальное рассмотрение.

В данной работе будет произведено такое рассмотрение для случая распространения волны в свободном пространстве за случайнм фазовым экраном, представляющим собой тонкий слой турбулизированной среды и вносящим лишь фазовые искажения. При этом в качестве исходной волны будет рассматриваться плоская монохроматическая волна. Кроме того, что решение этой задачи представляет самостоятельный интерес, оно может быть полезно при изучении прохождения такой волны

в протяженной турбулентной среде, поскольку, как показано в работе [?], исходные выражения для искомых величин в обеих задачах имеют одинаковую структуру.

Итак, если на случайный фазовый экран падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды, то четырехточечную функцию $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ можно представить в виде, вытекающем из представления Гюйгенса — Френеля для поля в волновой зоне:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2) = & \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^2 \iiint d^2 r_1 d^2 r_2 \times \\ & \times \exp \left[\frac{ik}{x} (\mathbf{r}_1 - \rho_1)(\mathbf{r}_2 - \rho_2) - \frac{k^2 \Delta x}{4} F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & 2D(\mathbf{r}_1) + 2D(\mathbf{r}_2) - D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - D(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \\ D(\mathbf{r}) = & 2\pi \iint \Phi_\epsilon(0, \mathbf{x})(1 - \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) d^2 \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\Phi_\epsilon(\mathbf{x}_x, \mathbf{x})$ — трехмерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ϵ , Δx — толщина случайно-неоднородного слоя. Для турбулентной среды, характеризующейся внутренним масштабом λ_0 и степенным законом поведения структурной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости $D_\epsilon(\mathbf{r})$ при $r \gg \lambda_0$, удобно пользоваться следующим модельным спектром:

$$\Phi_\epsilon(0, \mathbf{x}) = AC_\epsilon x^{-\mu} \exp(-x^2/x_m^2), \quad (4)$$

где C_ϵ — структурная характеристика флуктуаций ϵ . Для колмогоровской модели турбулентности $A = 0,033$, $\mu = 11/3$, $x_m = 5,92/\lambda_0$.

Подынтегральный множитель $f_1 = \exp[-k^2 \Delta x F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)/4]$ в (2) имеет характерный масштаб изменения по переменным, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус когерентности поля ρ_k , который будем определять из равенства

$$k^2 \Delta x D(\rho_k)/4 = 1. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет решение только в случае «сильного» фазового экрана, т. е. когда

$$k^2 \Delta x D(\sqrt{\lambda x})/4 \gg 1,$$

что и будет в дальнейшем приниматься во внимание. Другой подынтегральный множитель $f_2 = \exp \left[\frac{ik}{x} (\mathbf{r}_1 - \rho_1)(\mathbf{r}_2 - \rho_2) \right]$ имеет в качестве характерного поперечного масштаба размер первой зоны Френеля. Если для области слабых флуктуаций всегда выполняется неравенство $\sqrt{x/k} \ll \rho_k$, то в случае сильных флуктуаций интенсивности имеет место противоположное неравенство $-\sqrt{x/k} \gg \rho_k$. Таким образом, в области сильных флуктуаций возникает малый параметр $\delta = \frac{k \rho_k^2}{x}$. Однако сразу

разложить подынтегральное выражение в (2) по малому параметру δ затруднительно. Как показано в работе [?], используя симметрию выражения (2) по переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (что связано со статистической однородностью рассматриваемого фазового экрана), можно из (2) получить более удобное при дальнейших вычислениях, но приближенное выражение для $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$. Для этого в случае турбулентного слоя требуется выполнение ограничения на спектр $\Phi_\epsilon(0, \mathbf{x})$, определяемый формулой

(4). Необходимо, чтобы $3 < \mu < 4$ (что всегда выполняется для колмогоровской модели турбулентности). Если же у среды имеется внешний масштаб или среда одномасштабная, то это условие, естественно, отпадает.

Нетрудно видеть, что при выполнении этого условия функция $F(r_1, r_2)$ будет обладать следующим асимптотическим свойством [3]: $F(r_1, r_2) \rightarrow 2D(r_1)$ при $r_2 \rightarrow \infty$ и $F(r_1, r_2) \rightarrow 2D(r_2)$ при $r_1 \rightarrow \infty$. Используя симметрию по r_1 и r_2 , разобьем (2) на два интеграла: 1) по области $r_2 > r_1$ и 2) по области $r_1 > r_2$. В первой области представим f_1 как

$$f_1 = \exp [-k^2 \Delta x D(r_1)/4] \varphi(r_1, r_2),$$

а во второй —

$$f_1 = \exp [-k^2 \Delta x D(r_2)/4] \varphi(r_2, r_1).$$

В первой области разложим $\varphi(r_1, r_2)$ в ряд по малой величине $[F - 2D(r_1)] \frac{k^2 \Delta x}{4}$, а во второй — $\varphi(r_2, r_1)$ в ряд по малой величине $[F - 2D(r_2)] \frac{k^2 \Delta x}{4}$. Если теперь подставить полученные разложения

в (2) и распространить интегрирование для каждой из двух частей интеграла на всю плоскость r_1, r_2 , то получим следующую приближенную формулу:

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2) = \Gamma_2^2(\rho_1) + \Gamma_2^2(\rho_2) + \gamma(x, \rho_1, \rho_2) + \gamma(x, \rho_2, \rho_1) + \dots, \quad (6)$$

где $\Gamma_2(\rho) = \exp \left[-\frac{k^2 \Delta x}{4} D(\rho) \right]$ — функция когерентности поля,

$$\begin{aligned} \gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \pi k^2 \Delta x \int \int d^2 x \Phi_e(0, x) \left\{ 1 - \cos \left[\rho_1 x - \frac{x^2 x}{k} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i x \rho_2 - \frac{k^2 \Delta x}{2} D \left(\rho_1 - \frac{x x}{k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

При получении таким способом формулы (6) допускается ошибка, имеющая порядок δ^2 , что не позволяет в дальнейшем принимать во внимание члены более высокого порядка малости [3]. Следует отметить, что выражение (6) не представляет собой первые члены полного асимптотического разложения по малому параметру δ , поскольку эти члены содержат в себе функции от δ . Окончательное разложение выражения (6) по δ можно провести лишь в том случае, если задаться конкретным видом спектра. Поскольку нас интересуют флуктуации за турбулентным слоем, будем пользоваться формулой (4) для спектра $\Phi_e(0, x)$. Если подставить (4) в (3), то для $D(r)$ можно получить асимптотики при $r \ll \lambda_0$ и при $r \gg \lambda_0$:

$$D(r) = N C_e^2 r^\nu, \quad (8)$$

где

$$N = \begin{cases} M_1 & \text{и } \nu = \mu - 2 & \text{при } r \gg \lambda_0; \\ M_2 \lambda_0^{\mu-4} & \text{и } \nu = 2 & \text{при } r \ll \lambda_0, \end{cases} \quad (8a)$$

$$(8b)$$

M_1, M_2 — численные коэффициенты. При $\mu = 11/3$ $M_1 = 1,46$ и $M_2 = 1,64$.

Анализ выражения (7) показывает, что при $\delta \rightarrow 0$ основной вклад в интеграл определяется при $\rho_k \gg \lambda_0$ асимптотикой (8а) для функции $D(r)$, а при $\rho_k \ll \lambda_0$ — асимптотикой (8б). Используя запись (8) для функций $D(r)$, мы сможем одновременно рассмотреть обе ситуации,

Подставляя (8) в (5), получим следующее выражение для радиуса когерентности:

$$\rho_k = (k^2 \Delta x N C_e^2 / 4)^{-1/\nu}. \quad (9)$$

Отметим, что малый параметр $\delta = \frac{k\rho_k^2}{x}$ связан с большим параметром β_0^2 — дисперсией флюктуаций интенсивности, вычисленной в первом приближении метода возмущений для дальней волновой зоны. В частности, для случая $\mu = 11/3$ можно записать соотношения

$$\delta = 1.68\beta_0^{-12/5} \quad \text{при } \rho_k \gg \lambda_0,$$

$$\delta = 1.37\beta_0^{-2}G^{-1/6} \quad \text{при } \rho_k \ll \lambda_0,$$

где $\beta_0^2 = 0.56 C_e^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x$, $G = x/k\lambda_0^2$ — волновой параметр.

Если теперь ввести в (7) новые переменные η_1 , η_2 и q , связанные с прежними следующим образом:

$$\rho_{1,2} = \rho_k \eta_{1,2}, \quad x = \frac{\delta}{\rho_k} (q + \eta_1),$$

то для $\gamma(x, \rho_1, \rho_2)$ из (7) получим

$$\gamma(x, \eta_1, \eta_2) = 4\pi A N_0^{-1} \delta^{(2-\mu-\nu)/2} \iint d^2 q |q + \eta_1|^{-\mu} \times \quad (10)$$

$$\times \exp \left[-\frac{\delta^2 (q + \eta_1)^2}{\rho_k^2 x_m^2} \right] \exp (i\delta\eta_1\eta_2 + i\delta q\eta_2 - 2q^\nu) [1 - \cos(\delta q(\eta_1 + q))],$$

где

$$N_0 = \begin{cases} M_1 & (\rho_k \gg \lambda_0) \\ M_2 G^{(4-\mu)/2} & (\rho_k \ll \lambda_0) \end{cases}.$$

Интересующие нас значения η_1 и η_2 ограничим интервалом от 0 до δ^{-1} , что эквивалентно условию

$$0 \leq \rho_{1,2} \ll r_0 \equiv x/k\rho_k. \quad (11)$$

Принимая во внимание это условие, разложим в ряд выражения $\cos(\delta q(\eta_1 + q))$ и $\exp(i\delta q\eta_2)$ и ограничимся первыми неисчезающими членами разложения. Так как функция $\gamma(x, \eta_1, \eta_2)$ в общем виде является комплексной величиной, представим ее в виде действительной и мнимой части

$$\operatorname{Re} \gamma(x, \eta_1, \eta_2) = 2\pi A N_0^{-1} \delta^{(6-\mu-\nu)/2} Q \times \quad (12)$$

$$\times \iint d^2 q |q + \eta_1|^{-\mu} (q\eta_1 + q^2)^2 \exp \left[-\frac{(q + \eta_1)^2}{r_0^2 x_m^2} - 2q^\nu \right];$$

$$\operatorname{Im} \gamma(x, \eta_1, \eta_2) = 2\pi A N_0^{-1} \delta^{(8-\mu-\nu)/2} \eta_1 \eta_2 \iint d^2 q |q + \eta_1|^{-\mu} (q\eta_1 + q^2)^2 \exp \left[-\frac{(q + \eta_1)^2}{r_0^2 x_m^2} - 2q^\nu \right] \left(P + \frac{q\eta_2}{\eta_1\eta_2} Q \right), \quad (13)$$

где $Q = \cos(\delta\eta_1\eta_2)$, $P = \sin(\delta\eta_1\eta_2)/\delta\eta_1\eta_2$. Поскольку основной вклад в интегралы (12) и (13) определяется значениями $q \leq 1$, то при условии $\lambda_0 \ll r_0$ можно положить

$$\exp[-(q + \eta_1)^2/r_0^2 x_m^2] \approx \exp(-\eta_1^2/r_0^2 x_m^2).$$

Если теперь в (12) и (13) выполнить интегрирование по угловой переменной, то получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \gamma(\eta_1, \eta_2) = & 2\pi^2 A N_0^{-1} \delta^{(6-\mu-\nu)/2} Q \exp(-\eta_1^2/r_0^2 x_m^2) \times \\ & \times \left\{ \eta_1^{2-\mu} \int_0^{\eta_1} dq q^3 \exp(-2q^\nu) \left[f_1(q^2/\eta_1^2) - \frac{(\mu-2)(4-\mu)}{8} \frac{q^2}{\eta_1^2} \right. \right. \\ & \times f_2(q^2/\eta_1^2) \left. \right] + \int_{\eta_1}^{\infty} dq q^{5-\mu} \exp(-2q^\nu) [f_1(\eta_1^2/q^2) + f_3(\eta_1^2/q^2)] \left. \right\}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \gamma(\eta_1, \eta_2) = & 2\pi^2 A N_0^{-1} \delta^{(8-\mu-\nu)/2} \eta_1 \eta_2 \exp(-\eta_1^2/r_0^2 x_m^2) \times \\ & \times \left\{ \eta_1^{2-\mu} \int_0^{\eta_1} dq q^3 \exp(-2q^\nu) \left[P \left(f_1(q^2/\eta_1^2) - \frac{(\mu-2)(4-\mu)}{8} \right. \right. \right. \\ & \times \frac{q^2}{\eta_1^2} f_2(q^2/\eta_1^2) \left. \right] + \frac{Q}{2} ((1 - (q^2/\eta_1^2)(2\mu - 5)) f_4(q^2/\eta_1^2) - \\ & - f_5(q^2/\eta_1^2)) \left. \right] + \int_{\eta_1}^{\infty} dq q^{5-\mu} \exp(-2q^\nu) \left[P(f_1(\eta_1^2/q^2) + f_3(\eta_1^2/q^2)) - \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{Q}{2} \left(\left(2\mu - 5 - \frac{\eta_1^2}{q^2} \right) f_4(\eta_1^2/q^2) + f_5(\eta_1^2/q^2) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$f_1(z) = {}_2F_1(\mu/2 - 1; \mu/2 - 1; 1; z),$$

$$f_2(z) = {}_2F_1(\mu/2, \mu/2; 3; z),$$

$$f_3(z) = {}_2F_1(\mu/2, \mu/2 - 2; 1; z), \quad f_4(z) = {}_2F_1(\mu/2, \mu/2 - 1, 2; z),$$

$$f_5(z) = {}_2F_1(\mu/2 - 1, \mu/2 - 2; 2; z),$$

${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд. Почленно проинтегрировав выражения (14) и (15) по q , можно получить представление в виде рядов по прямым и обратным степеням η_1 . Получающиеся в общем случае выражения имеют довольно громоздкий вид. Поэтому, чтобы иметь наглядное представление о поведении $\Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)$, рассмотрим колмогоровскую модель турбулентности и три характерные конфигурации точек наблюдения: а) $\eta_1 \ll 1, \eta_2 \ll 1$; б) $\eta_1 \gg 1, \eta_2 \gg 1$; в) $\eta_1 \ll 1, \eta_2 \gg 1$ или, наоборот, $\eta_{1,2} = \rho_{1,2}/\rho_k$. При этом могут быть два режима сильных флюктуаций интенсивности: при $\rho_k \gg \lambda_0$ и при $\rho_k \ll \lambda_0$.

1. Случай $\rho_k \gg \lambda_0$. Здесь $\delta = 1,68 \beta_0^{-12/5}$. Ниже символами K_i и L_i обозначены числовые константы, выражения для которых имеют весьма громоздкий вид и поэтому здесь не приводятся. Выписывая первые члены разложений, получим

$$a) \eta_1 \ll 1, \eta_2 \ll 1 -$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = & \Gamma_2^2(\eta_1) + \Gamma_2^2(\eta_2) + 0,45\delta^{1/3}\{0,81 + \\ & + 0,93(\eta_1^2 + \eta_2^2) - K_1(\eta_1^{7/3} + \eta_2^{7/3}) + K_2[\eta_1^4 \ln(2\eta_1^{5/3}) + \\ & + \eta_2^4 \ln(2\eta_2^{5/3})] - K_3(\eta_1^4 + \eta_2^4) + \dots\} + \dots; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,45\delta^{4/3} \eta_1 \eta_2 \{0,134 + 0,078(\eta_1^2 + \eta_2^2) -$$

$$-\left(K_1 - \frac{1}{2}L_1\right)(\eta_1^{7/3} + \eta_2^{7/3}) + \left(K_2 - \frac{1}{2}L_2\right)[\eta_1^4 \ln(2\eta_1^{5/3}) + \\ + \eta_2^4 \ln(2\eta_2^{5/3})] - \left(K_3 - \frac{1}{2}L_3\right)(\eta_1^4 + \eta_2^4) + \dots; \quad (17)$$

б) $\eta_1 \gg 1, \eta_2 \gg 1$ —

$$\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,063\delta^{1/3} \cos(\delta\eta_1\eta_2)(\eta_1^{-5/3} + \eta_2^{-5/3} + \dots) + \dots; \quad (18)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,063\delta^{1/3} \sin(\delta\eta_1\eta_2)(\eta_1^{-5/3} + \eta_2^{-5/3} + \dots) + \dots; \quad (19)$$

в) $\eta_1 \ll 1, \eta_2 \gg 1$ —

$$\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = \Gamma_2^2(\eta_1) + 0,045\delta^{1/3} \cos(\delta\eta_1\eta_2)[0,40 + 0,93\eta_1^2 - \\ - K_1\eta_1^{7/3} + K_2\eta_1^4 \ln(2\eta_1^{5/3}) - K_3\eta_1^4 + 0,14\eta_2^{-5/3} + \dots] + \dots; \quad (20)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,45\delta^{4/3}\eta_1\eta_2 \left\{ \frac{\sin(\delta\eta_1\eta_2)}{\delta\eta_1\eta_2} [0,40 + 0,93\eta_1^2 - K_1\eta_1^{7/3} + \right. \\ \left. + K_2\eta_1^4 \ln(2\eta_1^{5/3}) - K_3\eta_1^4 + 0,14\eta_2^{-5/3} + \dots] - \frac{1}{2} \cos(\delta\eta_1\eta_2)[0,67 + \right. \\ \left. + 1,71\eta_1^2 - L_1\eta_1^{7/3} + L_2\eta_1^4 \ln(2\eta_1^{5/3}) - L_3\eta_1^4 + \dots] \right\} + \dots \quad (21)$$

2. Случай $\rho_k \ll \lambda_0$. Здесь $\delta = 1,37\beta_0^{-2}G^{-1/6}$. Ниже символами R_i и S_i обозначены числовые константы. Выпишем первые члены разложений:

а) $\eta_1 \ll 1, \eta_2 \ll 1$ —

$$\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = \Gamma_2^2(\eta_1) + \Gamma_2^2(\eta_2) + 0,40\delta^{1/6}G^{-1/6} \times \\ \times [0,83 + 0,97(\eta_1^2 + \eta_2^2) - R_1(\eta_1^{7/3} + \eta_2^{7/3}) - R_2(\eta_1^4 + \eta_2^4) + \dots] + \dots; \quad (22)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,40\delta^{7/6}G^{-1/6}\eta_1\eta_2 \left\{ 0,138 + 0,080(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \right. \\ \left. - \left(R_1 - \frac{1}{2}S_1\right)(\eta_1^{7/3} + \eta_2^{7/3}) - \left(R_2 - \frac{1}{2}S_2\right)(\eta_1^4 + \eta_2^4) + \dots \right\} + \dots; \quad (23)$$

б) $\eta_1 \gg 1, \eta_2 \gg 1$ —

$$\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,050\delta^{1/6}G^{-1/6} \cos(\delta\eta_1\eta_2) \times \\ \times [\eta_1^{-5/3} \exp(-\eta_1^2/r_0^2 x_m^2) + \eta_2^{-5/3} \exp(-\eta_2^2/r_0^2 x_m^2) + \dots] + \dots; \quad (24)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,050\delta^{1/6}G^{-1/6} \sin(\delta\eta_1\eta_2) \times \\ \times [\eta_1^{-5/3} \exp(-\eta_1^2/r_0^2 x_m^2) + \eta_2^{-5/3} \exp(-\eta_2^2/r_0^2 x_m^2) + \dots] + \dots; \quad (25)$$

в) $\eta_1 \ll 1, \eta_2 \gg 1$ —

$$\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = \Gamma_2^2(\eta_1) + 0,40\delta^{1/6}G^{-1/6}[0,41 + 0,97\eta_1^2 - R_1\eta_1^{7/3} - \\ - R_2\eta_1^4 + 0,125\eta_2^{-5/3} \exp(-\eta_2^2/r_0^2 x_m^2) + \dots] + \dots; \quad (26)$$

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2) = 0,40\delta^{7/6}G^{-1/6}\eta_1\eta_2 \left\{ \frac{\sin(\delta\eta_1\eta_2)}{\delta\eta_1\eta_2} [0,41 + 0,97\eta_1^2 - \right.$$

$$- R_1 \eta_1^{7/3} - R_2 \eta_1^4 + 0,125 \eta_2^{-5/3} \exp(-\eta_2^2/r_0^2 x_m^2) + \dots] - \\ - \frac{1}{2} \cos(\delta \eta_1 \eta_2) [0,69 + 1,77 \eta_1^2 - S_1 \eta_1^{7/3} - S_2 \eta_1^4 + \dots] \} + \dots$$
(27)

Перейдем теперь к обсуждению полученных результатов. Можно выделить некоторые общие свойства четырехточечной функции когерентности $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ за фазовым экраном в области сильных флуктуаций интенсивности независимо от показателя спектра неоднородностей и соотношения между ρ_k и λ_0 . Главным членом асимптотического разложения величины $\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ является сумма $\Gamma_2^2(\rho_1) + \Gamma_2^2(\rho_2)$, а поправка к ней имеет порядок $\delta^{(6-\mu-\nu)/2}$ при $\rho_1 \ll \rho_k$, $\rho_2 \ll r_0$ и $\rho_2 \ll \rho_k$, $\rho_1 \leq r_0$. Следующий член асимптотического разложения имеет порядок $\delta^{6-\mu-\nu}$. Этим и последующими членами мы пренебрегаем.

При выполнении условия $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$ из $\operatorname{Re} \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ можно получить корреляционную функцию флуктуаций интенсивности $B_1(x, \rho) = \Gamma_4(x, \rho_1, 0) - 1$. В случае $\rho_k \gg \lambda_0$ из формул (6) и (14) следует выражение для $B_1(x, \rho)$, полностью согласующееся с полученными ранее теоретическими результатами [7].

Перейдем теперь к $\operatorname{Im} \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$. Поведение мнимой части Γ_4 несколько сложнее. Во-первых, по сравнению с $\operatorname{Re} \Gamma_4$ она является величиной более высокого порядка малости по δ , в то время как при слабых флуктуациях и $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$ — одного порядка. Во-вторых, $\operatorname{Im} \Gamma_4$ сильно зависит от относительной ориентации векторов ρ_1 и ρ_2 и их абсолютных значений. Из соображений изотропности при $\rho_1 \rho_2 = 0$ мнимая часть Γ_4 тождественно равна нулю. Это условие может реализоваться в следующих ситуациях: совмещены попарно соседние точки наблюдения; совмещены все точки; точки наблюдения находятся в вершинах прямоугольника. Следует отметить, что знак $\operatorname{Im} \Gamma_4$ при $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ в области сильных флуктуаций противоположен знаку $\operatorname{Im} \Gamma_4$ в области слабых флуктуаций. Остановимся на деталях рельефа функции $\operatorname{Im} \Gamma_4$. При $\rho_{1,2} \sim \rho_k$ существует седловая точка, в которой $\operatorname{Im} \Gamma_4 \sim \delta^{(8-\mu-\nu)/2}$. Максимумы $\operatorname{Im} \Gamma_4$ находятся в точке $\rho_1 \sim \rho_k$, $\rho_2 \sim r_0$ и в симметричной точке. Рельеф $\operatorname{Im} \Gamma_4$ имеет гребень, который располагается над гиперболой $\rho_1 \rho_2 \approx \frac{\pi x}{k}$. При $\rho_1 \rho_2 > \frac{\pi x}{k}$ $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$ — величины одного порядка и ведут себя сходным образом: при возрастании $\rho_{1,2}$ затухают, осциллируя. Такое поведение становится понятным, если привлечь формулу (10). Из нее видно, что различие между $\operatorname{Re} \Gamma_4$ и $\operatorname{Im} \Gamma_4$ исчезает там, где быстро осциллирует подынтегральное выражение в (10), т. е. при $\eta_1 \eta_2 \gg \pi \delta$ или $\rho_1 \rho_2 \gg \frac{\pi x}{k}$.

Хотя здесь рассматривалась задача о фазовом экране, полученные результаты качественно согласуются с данными экспериментов для протяженной среды [5, 6]. Прежде всего отметим, что приведенные в работах [5, 6] рельефы функции $|\Gamma_4(x, \eta_1, \eta_2)|$ имеют такой же вид, что и рельеф $\operatorname{Re} \Gamma_4$ ($\operatorname{Re} \Gamma_4 \approx |\Gamma_4|$ при $|\delta \eta_1 \eta_2| < 1$), который можно получить по формулам (16), (18), (20). В экспериментальных данных по $\operatorname{Re} \Gamma_4$ присутствуют те же масштабы ρ_k и r_0 (вычисленные для случая протяженной среды), что и в данной работе. Относительно мнимой части Γ_4 подтверждается полученный здесь теоретический вывод о том, что в области значений $\rho_{1,2} \sim \rho_k$ эта величина имеет порядок малости больший, чем $\operatorname{Re} \gamma$.

Автор благодарен В. И. Татарскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
2. И. Г. Якушкин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
3. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, № 8, 481 (1977).
4. А. С. Гурвич, В. Каин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 398 (1978).
5. А. С. Гурвич, В. Каин, Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, секция IV, изд. Наука, М., 1978.
6. А. С. Гурвич, В. Каин, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
7. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере, Томск, 1973.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
10 мая 1978 г.

FOUR-POINT FUNCTION OF THE FIELD COHERENCE BEHIND THE PHASE SCREEN IN THE REGION OF STRONG FLUCTUATIONS OF THE WAVE INTENSITY

V. U. Zavorotnyj

The behaviour of four-point function of the field coherence $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ of a plane wave passing the turbulent phase screen is considered. Asymptotic expressions have been obtained for the complex value $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2)$ which are valid in the region of strong fluctuations of the wave intensity. The behaviour of the real and imaginary part of Γ_4 is investigated as a function of the value of the observation point spread in different regimes of the intensity fluctuation saturation.

УДК 538.574 : 530.18

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСИЛЕНИЯ И ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА АНОМАЛЬНОМ ЭФФЕКТЕ ДОПЛЕРА

Н. С. Гинзбург

Исследован режим стационарных колебаний в усилителе типа ЛБВ и генераторе типа ЛОВ, основанных на индуцированном магнитотормозном излучении первоначально прямолинейного пучка релятивистских электронов, движущихся со «сверхсветовой» скоростью в однородном магнитном поле. Показано, что в поле волны достаточно большой интенсивности увеличение поперечного импульса при торможении электронов сменяется его уменьшением, когда продольная скорость электронов становится меньше фазовой скорости волны. В предельном случае, когда магнитное поле исчезающее мало, возможно полное торможение электронного пучка замедленной циркулярно-поляризованной ТЭМ-волной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из возможностей эффективного преобразования энергии сильноточного релятивистского электронного пучка в электромагнитное излучение состоит в использовании индуцированного магнитотормозного излучения электронов в режимах, близких к авторезонансным [1]. Если при этом фазовая скорость волны меньше продольной скорости электронов, движущихся в однородном магнитном поле, то индуцированное излучение может возникнуть даже тогда, когда электроны не имеют начальной поперечной скорости [2-4]. Такой электронный пучок представляет собой поток невозбужденных «сверхсветовых» осцилляторов, и его излучение, обусловленное аномальным эффектом Доплера [5], должно сопровождаться раскачкой поперечных колебаний. Энергообмен с полем предварительно невозбужденного осциллятора, очевидно, не зависит от момента влета его в пространство взаимодействия, поэтому подбором параметров системы можно добиться значительного торможения всех электронов и высоких КПД.

В данной работе рассмотрены стационарные режимы колебаний в усилительном и генераторном вариантах системы. В усилительном варианте направления групповой и фазовой скоростей волны совпадают с направлением невозмущенной скорости электронов, неустойчивость носит конвективный характер; этот вариант по типу неустойчивости назовем лампой бегущей волны (ЛБВ). В генераторном варианте — лампе обратной волны (ЛОВ) — групповая скорость волны противоположна фазовой скорости волны и скорости электронов, и имеет место абсолютная неустойчивость. Требуемый закон дисперсии (нормальный в ЛБВ и аномальный в ЛОВ) может быть получен в периодической замедляющей системе или в однородном диэлектрике.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим взаимодействие между пучком электронов, влетающих в систему со скоростью $v_{||}$, параллельной магнитному полю $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}$,

и циркулярно-поляризованной ТЕМ-волной переменной амплитуды, распространяющейся в однородном диэлектрике с показателем преломления $n > 1$:

$$E_{\perp} = E_x + iE_y = E(z)e^{i(nkz-\omega t)}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (1)$$

$$H_{\perp} = H_x + iH_y = \frac{1}{k} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial z} = \left(inE + \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial z} \right) e^{i(nkz-\omega t)}.$$

Уравнения движения электронов в поле (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\perp}}{dz} - i \frac{eH_0}{c} \frac{p_{\perp}}{p_z} &= -\frac{e}{v_z} \left[E_{\perp} + i \frac{v_z}{c} H_{\perp} \right], \\ \frac{dp_z}{dz} &= \frac{e}{c} \operatorname{Im} \left(\frac{p_{\perp}}{p_z} H_{\perp}^* \right), \\ \frac{d\mathcal{E}}{dz} &= -e \operatorname{Re} \left(\frac{p_{\perp}}{p_z} E_{\perp}^* \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $p = m_0 \gamma v$, $\mathcal{E} = m_0 \gamma c^2$ — импульс и энергия электронов, $p_{\perp} = p_x + ip_y$, m_0 , e — масса покоя и заряд электрона, c — скорость света.

Поле волны (1) связано с плотностью индуцируемого волной высокочастотного тока $j_{\perp} = -eNv_{\perp}$ (N — концентрация электронов) волновым уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_{\perp} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_{\perp}}{\partial t} \quad (3)$$

(влияние полей пространственного заряда не учитываем). Для прямолинейного на входе в систему пучка движение электронов по оси z не зависит от фазы влета, поэтому $\partial N / \partial t = 0$, и из уравнения непрерывности имеем

$$j_{\perp} = \frac{j_0 v_{\perp}}{v_z}, \quad (4)$$

где $j_0 = -eN_0 v_{\parallel}$ — невозмущенная плотность тока.

Перейдем далее к безразмерным переменным, для чего введем

$$\begin{aligned} w &= 1 - \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad p' = \frac{p}{m_0 \gamma_0 c}, \quad E' = \frac{E}{m_0 \gamma_0 c \omega}, \quad \zeta = kz, \\ \Delta &= n \beta_{\parallel} - 1 - \mu + I, \quad \mu = \frac{\omega_H}{\omega}, \quad I = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \frac{\beta_{\parallel}}{n}, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_0 \gamma_0}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{m_0 \gamma_0 c}, \quad \beta_{\parallel} = \frac{v_{\parallel}}{c}, \quad \gamma_0 = (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1/2}$$

и представим p'_{\perp} и E' в виде

$$\begin{aligned} p'_{\perp} &= i \rho e^{i(nkz - \omega t - \delta)}, \\ E' &= A e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (5b)$$

Тогда, предполагая расстройку синхронизма между пучком и волной малой ($\Delta \ll 1$)*, из уравнений (2), (3) с помощью (1), (4), (5) получим самосогласованную систему уравнений, описывающую процесс взаимодействия с ЛБВ,

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{A_p}{p'_z} \sin \Phi; \quad (6a)$$

$$\frac{dp'_z}{d\zeta} = \frac{n A_p}{p'_z} \sin \Phi; \quad (6b)$$

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{[n\beta_{||} - 1 - (n^2 - 1)\omega]A}{p'_z} \sin \Phi; \quad (6c)$$

$$\frac{dA}{d\zeta} = \frac{I_p}{p'_z} \sin \Phi; \quad (6d)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{\Delta - (n^2 - 1)\omega}{p'_z} + \left\{ \frac{[n\beta_{||} - 1 - (n^2 - 1)\omega]A}{p'_z} + \frac{I_p}{Ap'_z} \right\} \cos \Phi, \quad (6d)$$

где $\Phi = \vartheta + \varphi$ — фаза электрона относительно волны.

Уравнения для ЛОВ, так же как и в теории черенковских приборов, получаются из системы (6) в результате замены $I \rightarrow -I$, что обусловлено изменением направления групповой скорости волны.

В качестве граничных условий для электронов будем использовать условие отсутствия модуляции пучка на входе в систему:

$$\omega|_{\zeta=0} = 0, \quad p'_z|_{\zeta=0} = \beta_{||}, \quad p|_{\zeta=0} = 0. \quad (7)$$

Амплитуда волны на входе ЛБВ задается внешним сигналом

$$A|_{\zeta=0} = A(0). \quad (8a)$$

В ЛОВ поле на коллекторном конце системы $\zeta_k = kL$ обращается в нуль:

$$A|_{\zeta=\zeta_k} = 0. \quad (8b)$$

Система уравнений (6) имеет ряд интегралов движения, которые позволяют найти аналитически электронный КПД системы:

$$\eta = \frac{\omega(\zeta_k)}{1 - \gamma_0^{-1}}. \quad (9)$$

Согласно уравнениям (6a), (6b) изменение продольного импульса электрона, так же как и в поле однородной ТЕМ-волны [6], пропорционально изменению его энергии:

$$p'_z = \beta_{||} - nw. \quad (10)$$

Из уравнений (6a), (6g) следует закон сохранения энергии в системе пучок — волна:

$$A^2 - A^2(0) = 2lw. \quad (11)$$

* Появление члена, пропорционального I , в расстройке от синхронизма Δ обусловлено изменением под действием наведенного высокочастотного тока связи между электрическим и магнитным полем волны (по сравнению с холодной системой, см. (1)), что оказывается эквивалентным некоторому изменению частоты вращения электронов в магнитостатическом поле.

Кроме того, уравнения (6) имеют интегралы, связывающие поперечный импульс и фазу электрона с его энергией,

$$\rho = [2(n\beta_{\parallel} - 1)w - (n^2 - 1)w^2]^{1/2}; \quad (12)$$

$$\cos \Phi = - \frac{[2\Delta w - (n^2 - 1)w]}{2\rho A}. \quad (13)$$

Из соотношения (12) видно, что для первоначально прямолинейного пучка торможение электронов ($w > 0$), а следовательно, усиление волны возможно, если скорость пучка на входе больше фазовой скорости волны ($n\beta_{\parallel} > 1$). Однако, согласно (10), (12), торможение электронов будет сопровождаться увеличением поперечного импульса лишь до тех пор, пока продольная скорость электронов $\beta_z = (\beta_{\parallel} - nw)/(1 - w)$ остается больше фазовой скорости волны ($n\beta_z > 1$)*. Когда же изменение энергии электрона w превышает величину $(n\beta_{\parallel} - 1)/(n^2 - 1)$, продольная скорость становится меньше фазовой скорости волны ($n\beta_z < 1$) и поперечный импульс при дальнейшем торможении электрона будет уменьшаться**.

3. ЛБВ-УСИЛИТЕЛЬ

Исследуем сначала более подробно, чем это сделано в [1], движение электронов в поле заданной волны. В усилителе такая ситуация имеет место при достаточно большой амплитуде входного сигнала $\frac{A^2(0)}{I} \gg 1$, когда изменение амплитуды волны по длине системы пре-небрежимо мало***.

Анализ движения электронов можно провести с помощью соотношения

$$\cos \Phi = - \frac{1}{2A(0)} \left[\rho - \frac{2\mu w}{\rho} \right], \quad (14)$$

которое следует из (13) и определяет траекторию частицы на фазовой плоскости Φ, w . Как было отмечено выше, увеличение поперечного импульса электронов сменяется при $w > (n\beta_{\parallel} - 1)/(n^2 - 1)$ его уменьшением. Однако, согласно (14), поперечный импульс может обратиться в нуль ($\rho = 0$) только в отсутствие магнитного поля ($\mu = 0$) и при достаточно большой амплитуде волны ($P = \frac{A^2(0)(n^2 - 1)}{(n\beta_{\parallel} - 1)^2} \gg \frac{1}{4}$), когда изменение энергии электронов достигает максимального значения:

$$w = w_0 = \frac{2(n\beta_{\parallel} - 1)}{n^2 - 1} \quad (15)$$

* Наиболее просто это утверждение можно доказать, если проинтегрировать соотношение, связывающее энергию и импульс электрона: $\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p_z^2 + c^2 p_{\perp}^2}$, и учсть, что при излучении фотона изменение продольного импульса электрона $dp_z = -\hbar(\omega/c)n$ пропорционально изменению его энергии $d\mathcal{E} = -\hbar\omega$, т. е. $(c/n)dp_z = d\mathcal{E}$ (ср. с (10)); в результате для приращения поперечного импульса получим $c^2 dp_{\perp}^2 = (1 - n\beta_z)2\mathcal{E}d\mathcal{E}$.

** Движение электрона при $n\beta_z < 1$ во многом аналогично движению в условиях нормального эффекта Доплера, когда, как известно [1, 3, 6], торможение электрона сопровождается уменьшением поперечного импульса.

*** Структура электромагнитного поля фиксирована также в генераторе типа резонансной ЛБВ, однако в данном случае корректное рассмотрение такой системы требует учета влияния на пучок встречной (несинхронной) волны резонатора [7, 8].

(фазовая траектория при этом претерпевает скачок-пунктир на рис. 1). Чтобы одновременно с поперечным обращался в нуль и продольный импульс электронов ($p'_z = 0$), необходимо в соответствии с (10) и (15) для заданной начальной скорости подобрать оптимальное замедление волны

$$n = n_{\text{opt}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}}{\beta_{\parallel}}. \quad (16)$$

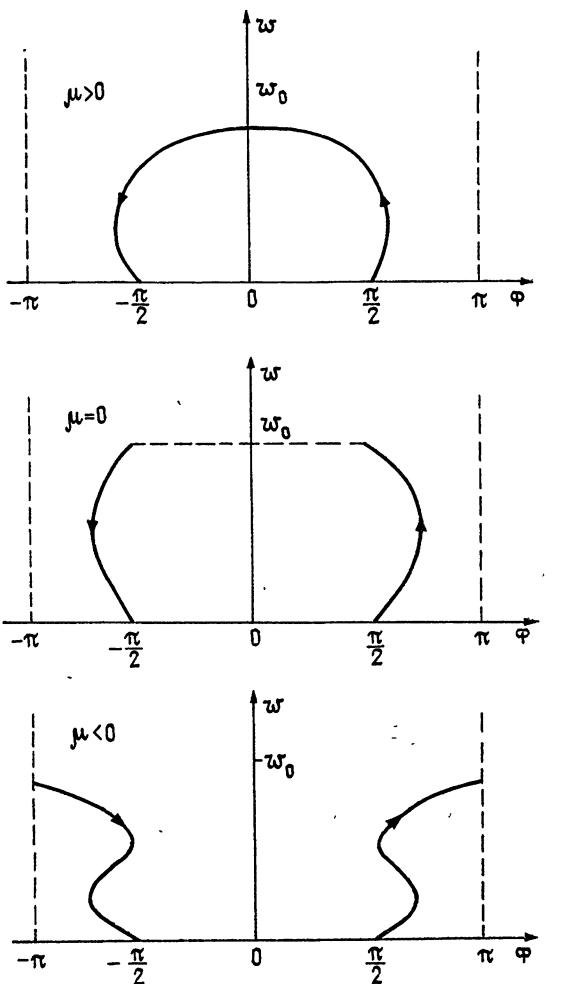


Рис. 1. Траектория электрона на фазовой плоскости Φ , w при различных значениях параметра магнитного поля μ .

Длина системы, на которой происходит полное торможение электронов ($\eta = 1$), находится интегрированием уравнения (6 а):

$$(n \beta_{\parallel} - 1) \beta_{\parallel}^{-1} \zeta_{\text{opt}} = f(P), \quad (17)$$

где график функции $f(P) = \frac{1}{VP} \int_0^1 \frac{dx \sqrt{1-x}}{\sqrt{x} \sqrt{1+(x^2-x)/P}}$ приведен на рис. 2.

Электронный КПД остается близким к единице и при конечных магнитных полях, если только $\frac{\mu^2}{(n_{\text{opt}}^2 - 1)A^2(0)} \ll 1$,

$$\eta \approx 1 - \frac{\mu^2}{(n_{\text{opt}}^2 - 1)A^2(0)}. \quad (18)$$

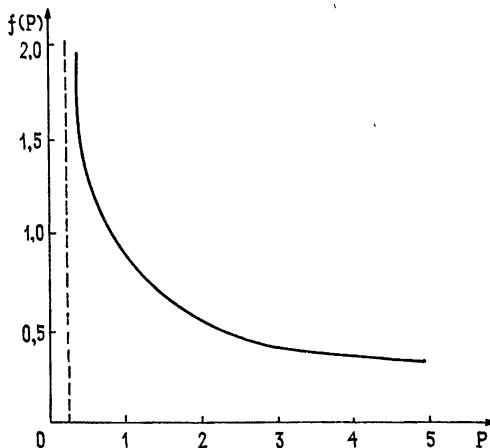


Рис. 2. График функции $f(P)$.

Оптимизация параметров усилителя при условии $\frac{A^2(0)}{I} \ll 1$, когда существенно влияние электронного пучка на продольную структуру поля, может быть проведена с помощью интеграла (13) аналогично предыдущему случаю. Электронный КПД достигает единицы при $\mu = I \ll 1$, $n = n_{\text{opt}}$, $\hat{P} = \frac{4I}{n\beta_{\parallel} - 1} > 1$. Оптимальная длина усилителя зависит от уровня входного сигнала

$$(n\beta_{\parallel} - 1)\beta_{\parallel}^{-1}\zeta_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{P}}} \int_0^1 \frac{dx \sqrt{1-x}}{\sqrt{x} \sqrt{x + (x^2 - x)/\hat{P} + A^2(0)/4Iw_0}}. \quad (19)$$

Мощность электромагнитного излучения в этом случае примерно равна мощности электронного пучка на входе в систему, а коэффициент усиления по мощности

$$\Gamma = \frac{A^2(\zeta_k)}{A^2(0)} = 1 + \frac{2Iw_0}{A^2(0)} \quad (20)$$

может быть очень высок.

4. ЛОВ-ГЕНЕРАТОР

Нелинейная краевая задача (6), (7), (8 б) для ЛОВ имеет решение только при вполне определенных значениях расстройки от синхронизма Δ и выходной амплитуды волны $A(0)$, являющихся собственными числами задачи. Чтобы правая часть интеграла (12) была ограничена на коллекторном конце системы, где амплитуда поля обращается в нуль

и, согласно (11), изменение энергии электронов определяется выражением

$$w(\zeta_k) = \frac{A^2(0)}{2I}, \quad (21a)$$

необходимо предположить следующую связь между собственными числами:

$$\frac{2\Delta}{n^2 - 1} = \frac{A^2(0)}{2I}. \quad (21b)$$

Интеграл (13) при этом приобретает вид

$$\cos \Phi = - \frac{\sqrt{x} \sqrt{x_k - x}}{\sqrt{\hat{P}} \sqrt{1 - x}}, \quad (22)$$

где $x = w/w_0$, $x_k = x(\zeta_k)$, $\hat{P} = 4I/(n\beta_{||} - 1)$.

КПД генератора представим следующим образом:

$$\eta = \frac{x_k w_0}{1 - \gamma_0^{-1}}. \quad (23)$$

Если замедление волны выбрано в соответствии с формулой (16) ($n = n_{opt}$), то $\eta = x_k$. Максимальную величину x_k найдем из (22):

$$x_{k \max} = \begin{cases} 2 \sqrt{\hat{P}} - \hat{P} & (\hat{P} < 1) \\ 1 & (\hat{P} > 1) \end{cases}. \quad (24)$$

Характерная траектория электрона на фазовой плоскости Φ , x , а также зависимости $x = x(\zeta)$ и $A = A(\zeta)$ приведены на рис. 3, 4.

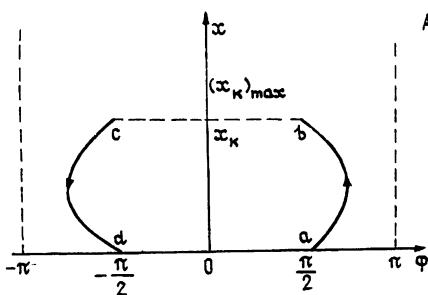


Рис. 3.

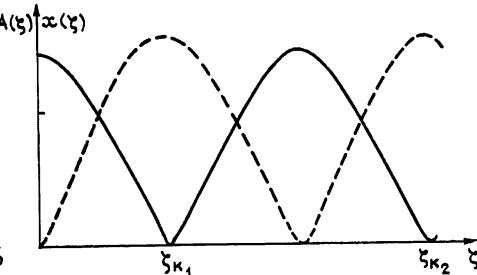


Рис. 4.

Рис. 3. Траектория электрона на фазовой плоскости Φ , x в ЛОВ.

Рис. 4. Зависимости амплитуды поля A (сплошная линия) и изменения энергии электронов x (пунктир) от координаты ζ в ЛОВ.

Мод с одной продольной вариацией поля на рис. 3 соответствует движению электрона от точки a до точки b , в которой поле обращается в нуль. Электрон может совершить еще один оборот по траектории, в результате чего он снова окажется в точке b и т. д. Это будет соответствовать модам с большим числом продольных вариаций. «Время» движения частицы по фазовой траектории до точки b , пропорциональное длине системы, находится интегрированием уравнения (6 а) с учетом (22):

$$\begin{aligned} & \sqrt{I(n\beta_{||}-1)}\beta_{||}^{-1}\zeta_{kq}= \\ & =(-1+2q)\frac{1}{2}\int_0^{x_k} \frac{dx \left(1-\frac{n}{\beta_{||}}w_0x\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x_k-x}\sqrt{1-x+x(x-x_k)/\hat{P}}}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $q = 1, 2, 3, \dots$ — номера мод. Как и следовало ожидать, интеграл (23) при $x_k = x_{k\max}$ расходится. Это означает, что такие режимы не реализуются, поскольку требуют бесконечных длин или токов.

В режиме малого сигнала $x_k \ll 1$ из (23) получим

$$\sqrt{I(n\beta_{||}-1)}\beta_{||}^{-1}\zeta_{kq}=(-1+2q)\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{\beta_{||}}w_0\right)\frac{x_k}{2}\right]. \quad (26)$$

С помощью формул (21), (26), полагая $x_k = 0$, найдем стартовые условия генератора:

$$\Delta=0, \quad \sqrt{I(n\beta_{||}-1)}\beta_{||}^{-1}\zeta_{kq}=(-1+2q)\frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Условие $\Delta=0$ может быть выполнено только для обыкновенной волны, поле которой вращается в направлении, противоположном направлению вращения электрона в магнитном поле.

Из формулы (26) также следует, что при $\frac{n}{\beta_{||}}w_0 < \frac{1}{2}$ режим возбуждения колебаний в генераторе мягкий, а при $\frac{n}{\beta_{||}}w_0 > \frac{1}{2}$ — жесткий (см. рис. 5, на котором пунктиром отмечена ветвь неустойчивых стационарных состояний).

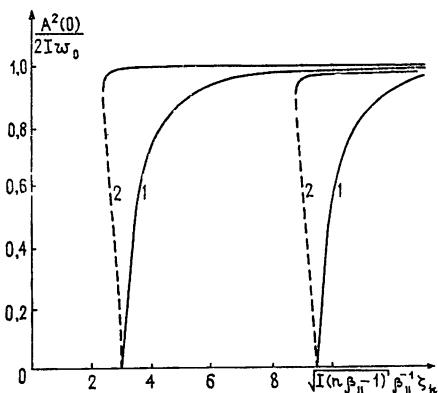


Рис. 5.

Рис. 5. Зависимость амплитуды поля на выходе ЛОВ для первой и второй продольных мод ($q=1,2$) от длины генератора: кривые 1 соответствуют мягкому режиму возбуждения колебаний ($\frac{n}{\beta_{||}}w_0=0,25, \hat{P}=1$), кривые 2 — жесткому режиму ($\frac{n}{\beta_{||}}w_0=1, \hat{P}=1$).

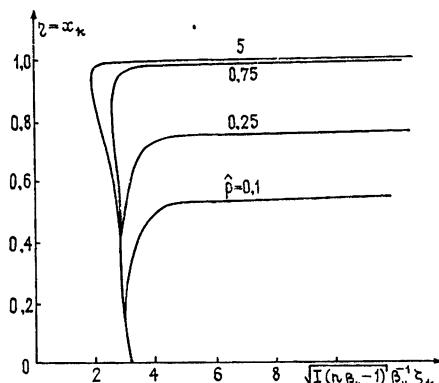


Рис. 6.

Рис. 6. Зависимость КПД при $n=n_{opt}$ от длины генератора для различных \hat{P}_t .

Проанализируем подробнее область ультраквантитативистских скоростей электронов: $\gamma_0 \gg 1$. Требуемое замедление волны в этом случае довольно мало: $n_{\text{opt}} \approx 1 + \gamma_0^{-1}$. Режим возбуждения при $n = n_{\text{opt}}$ жесткий, поскольку

$\frac{n}{\beta_{||}} w_0 = 1$. Рассчитанные с помощью (25) зависимости КПД

$\eta = x_k$ от длины системы и параметра \hat{P} приведены на рис. 6. Как видно из рисунка, при увеличении длины КПД генератора асимптотически приближается к $x_{k \text{ max}}$. Эта величина при достаточно большой плотности тока ($\hat{P} \geq 1$) равна единице. Для таких значений \hat{P} КПД (на верхней устойчивой ветви колебаний) близок к максимальному значению, когда длина системы лишь немного превосходит стартовую длину.

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, существует принципиальная возможность почти полностью затормозить электроны плоской замедленной электромагнитной волной при малых величинах магнитостатического поля или даже при его отсутствии. Однако для удержания сильноточного релятивистского электронного пучка от расплывания под действием сил пространственного заряда необходимо иметь достаточно сильные магнитные поля, что может приводить к снижению КПД приборов. Кроме того, если замедление волны создается с помощью периодической системы, в поле волны помимо синхронной замедленной гармоники присутствует ряд несинхронных гармоник. Эти гармоники в режимах с высоким КПД, которым соответствуют сравнительно большие значения расстроек от синхронизма Δ между пучком и рабочей гармоникой (см., например, (21)), могут оказывать существенное влияние на пучок, уменьшая КПД.

Определенные трудности при создании усилителей и генераторов на аномальном эффекте Доплера связаны также с возможностью возбуждения ТМ-мод на обычном черенковском синхронизме в реальных, ограниченных в поперечном направлении системах. Чтобы избежать такой конкуренции, необходимо, как и в слаборелятивистских лампах с поперечным полем [9, 10]*, использовать замедляющие системы, в которых были бы подавлены паразитные моды с большим значением продольной компоненты электрического поля в приосевой области, а электронный пучок инжектировать вдоль оси системы.

Автор благодарен В. Л. Братману и М. И. Петелину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. И. Петелин, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 6, 902 (1974).
- 2 Дж. Пирс, Лампа бегущей волны, изд. Сов. радио, М., 1952.
- 3 В. В. Железняков, Изв. вузов — Радиофизика, 2, № 1, 15 (1959).
- 4 В. Б. Красовицкий, ЖЭТФ, 66, № 1, 154 (1974).
- 5 В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, 56, № 6, 583 (1947).
- 6 А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, № 6, 1259 (1962); В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, № 3(9), 886 (1962).
- 7 В. Л. Братман, А. Е. Токарев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 8, 1224 (1974).
- 8 Н. С. Гинзбург, В. К. Юллатов, Тезисы докладов на VIII Межвузовской конференции по электронике СВЧ, Ростов-на-Дону, 1976, стр. 55.

* В экспериментальных макетах слаборелятивистских приборов с поперечным полем высокий КПД пока не достигнут, что во многом обусловлено сложностью получения тонких электронных пучков [9, 11]. Можно ожидать, что подобные затруднения возникнут и при создании релятивистских приборов. Однако в дециметровом диапазоне длин волн в гироскопе (который можно рассматривать как кластронный вариант ламп с поперечным полем) уже сейчас получен КПД, превышающий 90% [12].

9. Б. П. Безручко, Д. И. Трубецков, А. П. Четвериков, Обзоры по электронной технике, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 9 (383) (1976).
10. С. П. Кузнецов, А. П. Четвериков, Радиотехника и электроника, 23, № 2, 385 (1978).
11. В. И. Юрьев, В. Н. Добрынченко, В. А. Шестиперов, У. А. Нигматуллин, Радиотехника и электроника, 17, № 4, 830 (1972).
12. Г. И. Будкер и др., Атомная энергия, 44, № 5, 397 (1978).¹

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
28 апреля 1978 г.

NONLINEAR THEORY OF AMPLIFICATION AND GENERATION
OF ELECTROMAGNETIC WAVES BASED ON THE ANOMALOUS
DOPPLER EFFECT

N. S. Ginzburg

The regime of stationary oscillations is investigated in an amplifier of TWT-type and in an oscillator of BWO type based on the induced hyroresonance radiation of the initially rectangular beam of relativistic electrons moving with «superlight» velocity in a homogeneous magnetic field. It is shown that in the wave field of a sufficiently high intensity the increase of the transverse pulse in the electron retarding is changed by its decrease when the longitudinal velocity of electrons is less than the phase velocity of a wave. In the limiting case when the magnetic field is vanishing the total retarding of the electron beam is possible by the slow circularly polarized TEM-wave.

УДК 621.372.822

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕРМООПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В. М. Долгов, Л. Г. Лихолетова

Рассматривается вопрос о визуализации распределения поля с помощью различных типов термотропных холестерических, нематических и смектических жидких кристаллов. Сравнение результатов визуализации проводится для поля основной моды в апертуре прямоугольного волновода. Приводятся теоретические расчеты теплового поля и соответствующие термограммы, полученные с помощью различных жидких кристаллов, а также данные о влиянии термоиндикаторов на характеристики волны, распространяющейся в волноводе.

Один из методов визуализации электромагнитных полей СВЧ состоит в выявлении с помощью термочувствительных жидких кристаллов (ЖК) теплового рельефа, образованного вследствие поглощения некоторой части энергии соответствующим слоем термоиндикатора [1, 2].

Целью настоящей работы является сравнительный анализ результатов визуализации поля основной моды прямоугольного волновода с помощью индикаторов на основе термооптических эффектов в трех основных классах ЖК: холестерических (ХЖК), нематических (НЖК) и смектических (СЖК) [3]. До настоящего времени для визуализации СВЧ полей использовались исключительно ХЖК, применяющиеся для непрерывной регистрации распределения температуры. Наряду с целым рядом положительных свойств и весьма простым способом применения [1–4], процесс регистрации термограмм носит существенно нелинейный характер, что затрудняет количественную обработку полученной информации. Менее информативные методы визуализации с помощью НЖК, СЖК и гистерезисных ХЖК допускают визуализацию полей с большими градиентами, количественную обработку и более или менее длительное запоминание информации.

В приведенной таблице представлено качественное описание термооптических эффектов в ЖК, которые могут использоваться для визуализации распределения электромагнитного поля. Вторая графа описывает исходное состояние ЖК, третья — эффект, на основе которого производится визуализация, четвертая определяет регистрируемую величину. Общая характеристика метода и литературные источники, в которых описывается суть используемого эффекта, содержатся в пятой и шестой графах.

Уравнение, описывающее процесс формирования температурного рельефа на пленочном индикаторе, структура которого показана на рис. 1, будет иметь следующий вид:

$$c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda_x \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \omega(x, y, z, t) \quad (1)$$

при $t(x, y, z, 0) = t_0$ и граничных условиях

Таблица

Жидкий кристалл	Исходное состояние индикатора	Используемый эффект	Регистрируемые параметры	Основная характеристика	Литература
1. Холестерический	Селективное отражение плоской текстуры	Температурная зависимость селективного рассеяния света	а) Длина волны максимального рассеяния б) Спектральная характеристика отражения	Непрерывная зависимость от температуры	[1-3] [4, 5] [7, 8]
2. Гистерезисный, холестерический	Селективное отражение света, плоская текстура	Необратимое изменение механизма рассеяния света при фазовом переходе СЖК-ИЖ	Спектральная характеристика отражения	Дискретный двухуровневый способ регистрации температуры с запоминанием	[9]
3. Нематический	а) В режиме динамического рассеяния б) В режиме оптического накопления	С обратимое (под действием внешнего электрического поля) изменение механизма рассеяния света при фазовом переходе НЖК-ИЖ	Коэффициент отражения или коэффициент пропускания	Дискретный двухуровневый способ регистрации распределения температуры: а) без запоминания б) с запоминанием	[10] [11]
4. Смектический	а) Гомеотропная текстура б) Гомеотропная текстура СЖК типа А	Изменение характеристики рассеяния света при преобразовании: а) СЖК-ИЖ-СЖК б) СЖК типа А-СЖК	Коэффициент отражения или коэффициент пропускания	Дискретный двухуровневый способ регистрации температуры с запоминанием	[12]

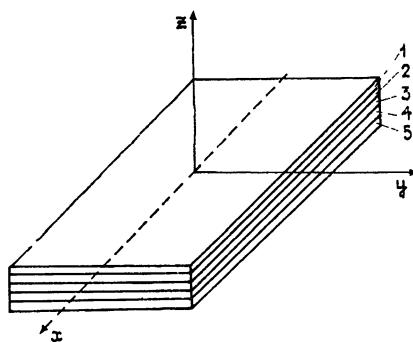


Рис. 1. Структура жидкокристаллического индикатора:
1, 5 — диэлектрическая подложка, 4, 2 — поглощающий проводящий слой, 3 — термочувствительный жидкокристаллический слой
(для ХЖК отсутствуют 1, 2 слои).

$$\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha^\pm (t - t_c^\pm) = 0,$$

$$z = \pm \delta, \quad t_s = t_0,$$

где

$$\lambda_z^{-1} = \frac{1}{2\delta} \sum_i \frac{\delta_i}{\lambda_{iz}},$$

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{2\delta} \sum_i \lambda_{ix} \delta_i,$$

$$c = \frac{1}{2\delta} \sum_i c_i \delta_i, \quad \rho = \frac{1}{2\delta} \sum_i \rho_i \delta_i,$$

λ_{ix} , λ_{iy} , λ_{iz} — коэффициент теплопроводности i -слоя в направлении оси координат, определяемой соответствующим индексом, λ_x , λ_y , λ_z — усредненные коэффициенты теплопроводности в тех же направлениях, c , ρ — усредненные удельная теплоемкость и плотность индикатора как функции соответствующих параметров c_i , ρ_i отдельных слоев толщины δ_i , α^\pm — коэффициенты обмена на поверхности, t_c^\pm — температура среды, омывающей эту поверхность, t_s — температура на контуре индикатора. Диссипативная функция имеет вид

$$\omega = K \exp \left(\frac{-2(z + \delta)}{\delta'} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{a},$$

где K задает плотность источников для уравнения (1) и зависит от параметров поглощающего слоя, размеров волновода и характеристики волны в тракте.

Произведя усреднение температуры по толщине индикатора в соответствии с [5], запишем

$$t = t_c + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[(\mu_1 \varphi_2 - \mu_2 \varphi_1) + \frac{z}{\delta} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]; \quad (2)$$

$$\varphi_t = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_t(m, n)}{2c \rho \omega_t} [1 - e^{-\omega_t x}] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b},$$

$$q_t(m, n) = c_t \frac{b}{n \pi} [1 - (-1)^n] \left\{ (B + D) \left(-\frac{a}{2\pi m} [(-1)^m - 1] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi x} \frac{a}{(m-2)} [(-1)^{m-2} - 1] + \frac{a}{4\pi x (m+2)} [(-1)^{m+2} - 1] \right) - \right. \\ \left. - (\kappa_t t_+^c + \kappa_t t_-^c) \left(\frac{a}{\pi m} \right) [(-1)^m - 1] \right\}, \quad (3)$$

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{3\alpha_-} \left\{ \frac{6}{r_z^0} + \alpha_+ \pm \left[\left(\frac{6}{r_z^0} + \alpha_+ \right)^2 + 3\alpha_-^2 \right] \right\}^{1/2},$$

$$B = K \frac{\delta'}{2} \left(1 - \exp \left(- \frac{4\delta}{\delta'} \right) \right), \quad \alpha_{\pm} = \alpha_+ \pm \alpha_-,$$

$$D = K \left(\frac{\delta'}{2} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{2\delta}{\delta'} \right) - e^{-4\delta/\delta'} \left(\frac{2\delta}{\delta'} + 1 \right) \right],$$

$$t_c^{\pm} = \frac{(t_c^+ - t_0) \pm (t_c^- - t_0)}{2}, \quad r_z^0 = \frac{2\delta}{\lambda_z}.$$

Постоянные, входящие в (3), равны: $f = 9,4 \text{ ГГц}$, $\delta' = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $\lambda_z = 0,4 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{град}$, $\lambda = \lambda_x = \lambda_y = 4,5 \text{ Вт}/\text{м}\cdot\text{град}$, $c = 100 \text{ Вт}\cdot\text{с}/\text{кг}\cdot\text{град}$, $\rho = 4,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$, $t_0 = 20^\circ\text{C}$, $t_c^+ = t_c^- = 20^\circ\text{C}$, $a = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $b = 10^{-2} \text{ м}$, $2\delta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, $\alpha^+ = 12,5 \text{ Вт}/\text{м}^2\cdot\text{град}$.

Численное решение уравнения (1) в стационарном случае определяет температурное распределение, сформированное в термоиндикаторе, достаточно точно передающее распределение квадрата электрического поля в апертуре волновода, оно представлено на рис. 2.

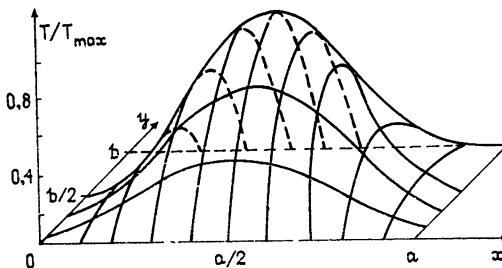


Рис. 2. Распределение температуры поля основной моды в апертуре прямоугольного волновода.

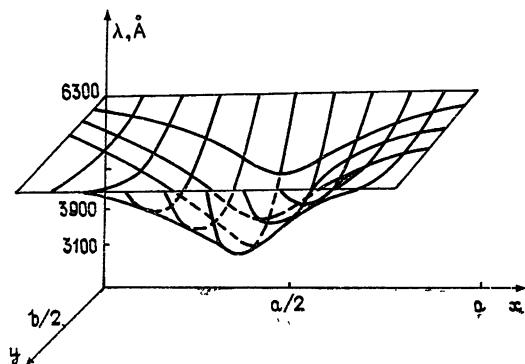
Соответствующее оптическое изображение теплового рельефа для термоиндикатора на основе ХЖК в терминах длины волны максимального рассеяния $\lambda_{\max}(t)$ приведено на рис. 3. Предполагалось, что зависимость от температуры имеет вид

$$\lambda_{\max} = 800 \cdot \exp[-0,45(t - t_x)] \text{ нм},$$

t_x — температура перехода в ХЖК.

Рис. 3. Зависимость длины волны рассеиваемого света от координат для холестерической смеси холестерилпеларгоната и холестерилацетата.

Для получения термограмм при помощи НЖК и СЖК вещество помещалось между двумя стеклами с прозрачным проводящим покрытием SnO_2 . На инди-



катор подавалось постоянное напряжение, величина которого зависела от толщины слоя, состава жидкокристаллической композиции и в наших экспериментах изменялась от 30 до 50 В. Толщина слоя ЖК составляла 25 мк. В результате НЖК начинает интенсивно рассеивать свет, а СЖК образует прозрачную гомеотропную текстуру.

При помещении такого индикатора в апертуру волновода в результате локального нагрева СВЧ полем осуществляется фазовый переход ЖК с образованием соответствующего оптического изображения (рис. 4 а). Нематический жидкий кристалл в области повышенной температуры резко уменьшает коэффициент отражения. В нематических смесях, использующих эффект запоминания, при достаточно быстром охлаждении в отсутствие электрического поля коэффициент отражения увеличивается и сравнивается с коэффициентом отражения невозмущенного нематика. Таким образом, в отличие от термоиндикаторов на основе динамического рассеивания, удается в течение длительного времени (несколько часов — несколько суток) запоминать тепловую информацию об электромагнитном поле. СЖК формирует достаточно сильно рассеивающую конфокальную текстуру (рис. 4 б), которая может долго сохраняться в окружении участков с исходной гомеотропной текстурой.

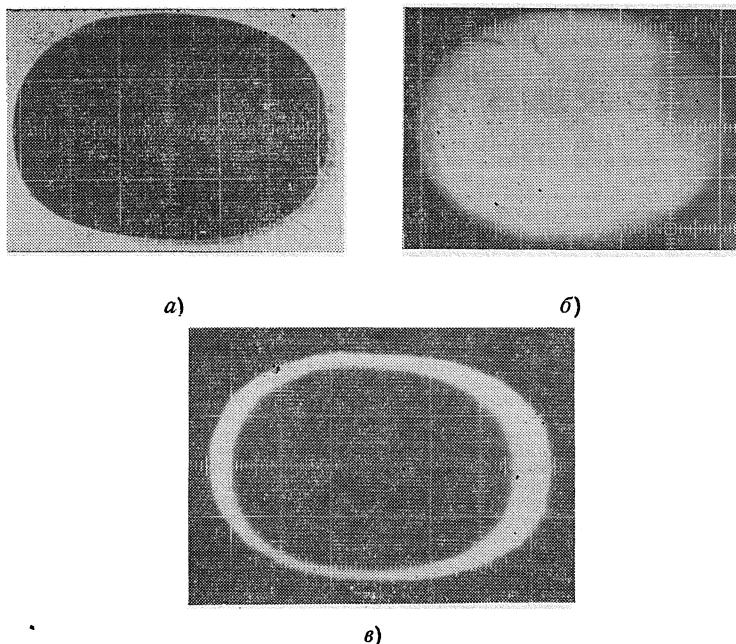


Рис. 4. Оптическое изображение температурного распределения СВЧ поля основной моды в апертуре прямоугольного волновода жидкокристаллических индикаторов на основе:
а) МББА (НЖК), б) 4-октил—4-цианобифенила (СЖК),
в) смеси холестерилпеларгоната и холестерилолеата (ХЖК).

Получение термограмм при помощи индикаторов на основе холестерических ЖК в апертуре прямоугольного волновода аналогично описанному ранее [6]. Непрерывная зависимость длины волны рассеиваемого света от температуры позволяет получать непрерывную регистрацию температурного распределения поля.

Характерной особенностью гистерезисных ХЖК является необратимость: после охлаждения из изотропной жидкости он не возвращается

в состояние, в котором находился до нагревания. В отличие от НЖК и СЖК гистерезисный ХЖК не требует для работы постоянного электрического поля. Изображение сохраняется длительное время после удаления СВЧ поля. При необходимости исходное состояние индикатора может быть восстановлено.

Для оценки влияния описанных жидкокристаллических индикаторов на характеристики электромагнитного поля в волноводном тракте рассмотрим модель, приведенную на рис. 5. Тонкий изотропный индикатор расположен в апертуре бесконечного идеального волновода и характеризуется комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ^* . В пользу состоятельности такой модели свидетельствуют следующие обстоятельства.

Рис. 5. К определению коэффициента отражения электромагнитной волны от индикатора.

1) Индикаторы на основе ХЖК используются, как правило, в микрокапсулированном варианте и с электродинамической точки зрения могут рассматриваться как гомогенная в макроскопическом смысле среда, в которой поглощение электромагнитной волны происходит по всему объему. В качестве поглощающего наполнителя используются различные композиции с диэлектрическим механизмом потерь.

2) Отличие индикаторов, работающих на основе НЖК и СЖК, от индикаторов с ХЖК состоит в том, что для реализации исходного состояния текстуры необходимо прикладывать к ЖК слою постоянное электрическое поле и, следовательно, вводить в рассмотрение проводящие подложки (слой 2, 4 на рис. 1).

Проводимость их должна быть такой, чтобы обеспечить необходимый электрооптический эффект на постоянном токе и чтобы в то же время можно было рассматривать подложку как диэлектрическую в диапазоне СВЧ. Для частоты $9,4 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ величина удельной проводимости материала, в котором значения амплитуды токов проводимости и токов смещения равны между собой, составляет $2,61 \text{ сим/м}$ при $\epsilon' = 5$. В зависимости от степени легирования, методики нанесения и обработки проводимостью такого порядка обладает часто используемый в электрооптике SnO_2 .

3) Остальные компоненты индикаторов представляют собой диэлектрики с малыми потерями (лавсан, майлар, тефлон, слюда).

Жидкие кристаллы, используемые в индикаторах в диапазоне СВЧ, ведут себя как диэлектрики со средними значениями диэлектрической проницаемости [13]

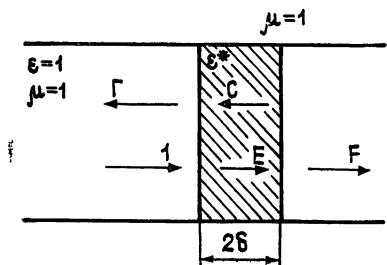
$$\epsilon' \approx 2,5 \div 2,8, \quad \epsilon'' \sim 10^{-2} \div 10^{-1}.$$

Учитывая малую толщину индикаторов ($50 \div 200 \text{ мк}$), можно ввести эффективные значения $\epsilon'_{\text{эфф}}$ и $\epsilon''_{\text{эфф}}$ индикаторов. По данным измерений, проведенных в прямоугольном резонаторе с расчетом по методу возмущений, эффективные значения диэлектрических постоянных для индикаторов следующие:

$$\text{на основе ХЖК} - \epsilon'_{\text{эфф}} = 2,3 \div 2,55, \quad \epsilon''_{\text{эфф}} = 0,09 \div 0,11,$$

$$\text{на основе НЖК} - \epsilon'_{\text{эфф}} = 2,9 \div 3,2, \quad \epsilon''_{\text{эфф}} = 0,15 \div 0,18,$$

$$\text{на основе СЖК} - \epsilon'_{\text{эфф}} = 2,9 \div 3,2, \quad \epsilon''_{\text{эфф}} = 0,15 \div 0,18.$$



Описанные индикаторы не изменяют структуру поля в поперечном направлении, однако приводят к более или менее существенным отражениям волн от индикаторов.

Величина комплексного коэффициента отражения может быть определена в модельном подходе из следующей системы уравнений:

$$E + C - \Gamma = 1,$$

$$Ee^{-j\gamma_2 l} + Ce^{-j\gamma_1 l} - Fe^{j\gamma_1 l} = 0,$$

$$(E - C) \frac{\gamma_2}{\omega \mu} + \Gamma \frac{\gamma_1}{\omega \mu_0} = \frac{\gamma_1}{\omega \mu_0},$$

$$(-Ee^{j\gamma_2 l} + Ce^{-j\gamma_1 l}) \frac{\gamma_2}{\omega \mu} + Fe^{j\gamma_1 l} \frac{\gamma_1}{\omega \mu_0} = 0,$$

Γ — комплексный коэффициент отражения от индикатора, γ_1 , γ_2 — продольные постоянные распространения в пустой и заполненной части волновода соответственно, E , C , F — коэффициенты, определяемые отражениями на границах индикатора.

Значение Γ , полученное из (4) и прорабоченное для случая $2\delta = 50 \text{ мк}$, как функция $\epsilon'_{\text{эфф}}$ и $\epsilon''_{\text{эфф}}$ представлено на рис. 6. Заштрихованная область определяет диапазон диэлектрических параметров индикатора, введение которого в тракт создает стоячую волну с КСВ $\leq 1,05$.

Измеренные значения КСВ в волноводе, содержащем индикаторы, составили:

ХЖК и КСВ $\leq 1,05$,

СЖК и КСВ $\leq 1,08$,

НЖК и КСВ $\leq 1,08$.

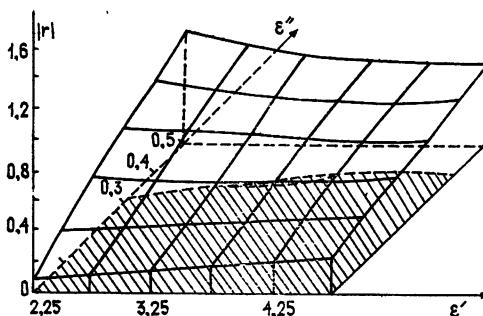


Рис. 6. Зависимость модуля комплексного коэффициента отражения от эффективных диэлектрических параметров индикатора.

Применение описанных индикаторов для визуализации полей делает процедуру исследования весьма простой, обеспечивает длительное запоминание информации при визуализации поля в областях волноводного тракта с ограниченным доступом и особенно эффективно при исследовании полей с высокими градиентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. F. Augustine, Electronics, 41, № 13, 118 (1969).
2. J. C. Sethares and M. R. Stiglits, Appl. Opt., 8, № 12, 2560 (1960).
3. П. де Жен, Физика жидкокристаллов, изд. Наука, М., 1977.
4. В. М. Долгов, Приборы и методы автоматизации экспериментальных исследований, изд. ДГУ, Днепропетровск, 1976.
5. Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинах, изд. Наукова думка, Киев, 1972.
6. Е. Л. Барташевский, В. М. Долгов, В. А. Красовицкий, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 5, 734 (1974).
7. J. L. Ferguson, Cryst., 1, 293 (1966).
8. J. L. Ferguson, N. N. Goldberg and R. J. Nadaling, MolmCryst., 1, 309 (1966).
9. А. П. Капустин, Электрооптические и акустические свойства жидких кристаллов, изд. Наука, М., 1973.
10. G. H. Heilmeyer, L. A. Zanoni and L. A. Barton, Appl. Phys. Lett., Proc. IEEE, 56, 1162 (1968).
11. G. H. Heilmeyer and L. A. Zanoni, Appl. Phys. Lett., 13, 91 (1968).
12. Hagen, S. Le. Berge and L. Thirapart, Appl. Phys. Lett., 25, 683 (1974).
13. Е. Л. Барташевский, В. М. Долгов, Н. В. Палий, в сб. Электродинамика и физика СВЧ, ДГУ, Днепропетровск, 1973.

Днепропетровский государственный
университет

Поступила в редакцию
21 марта 1978 г.

THE USE OF THERMOOPTICAL EFFECTS IN LIQUID CRYSTALS FOR
THE VISUALIZATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS

V. M. Dolgov, L. G. Likholtova

A problem is considered on visualization of the field distribution by different types of thermotropic cholesterine, nematic and smactic liquid crystals. The comparison of visualization results is given for the fundamental mode field in the aperture of a rectangular waveguide. Theoretical calculations of the thermal field and the corresponding thermograms obtained by different liquid crystals are given as well as data on the influence of thermoindicators on the characteristics of the wave propagating in the waveguide.

УДК 621.372.434.1

**СИММЕТРИЧНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО П-ОБРАЗНОГО РЕЗОНАТОРА
С ЧАСТИЧНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ЕМКОСТНОГО ЗАЗОРА
ДИЭЛЕКТРИКОМ***

B. V. Сенченко, A. T. Фиалковский

Двумя различными методами решается задача о симметричных электрических колебаниях П-образного резонатора, емкостный зазор которого частично заполнен однородным изотропным диэлектриком. Анализируется поведение полей на границе «сшивания», исследуется относительная сходимость при вычислении резонансной частоты и добротности резонатора. Данна физическая интерпретация полученных результатов.

Цилиндрические резонаторы, перестраиваемые аксиальным металлическим или диэлектрическим стержнем, нашли широкое применение в СВЧ технике. Частичное заполнение емкостного зазора диэлектриком позволяет эффективно возбуждать гиперзвук в кристаллах [1, 2], повышать точность измерения параметров твердых диэлектриков [3, 4], обрабатывать вещества СВЧ полем [5]. Однако методы расчета таких резонаторов [3, 4] не обеспечивают требуемой точности в широком диапазоне значений их параметров.

В настоящей работе рассмотрены собственные симметричные электрические колебания П-образного резонатора с частичным заполнением емкостного зазора диэлектриком. Данна сравнительная оценка двух подходов к решению задачи. Численный анализ позволил выявить характерные особенности резонатора.

1. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Исследуемая система (рис. 1) представляет собой тороид, емкостный зазор которого частично ($d_1 \leq d$) заполнен линейным однородным диэлектриком. Благодаря азимутальной симметрии решение задачи сводится к определению скалярной функции $H_\Phi(r, z) = \Psi(r, z)$, удовлетворяющей внутри области V уравнению Гельмгольца, граничным условиям на идеальной металлической поверхности S и условиям сопряжения на поверхности раздела сред.

Цилиндрической поверхностью S_{12} ($r = a, 0 \leq z \leq d$) разбиваем область V на две частичные области V_1 ($r \leq a, 0 \leq z \leq d$) и V_2 ($r \geq a, 0 \leq z \leq H$). Решение $\Psi(r, z)$ ищем в виде рядов Фурье по радиальным волнам областей V_1 и V_2 соответственно:

* Результаты работы доложены на III Межведомственной конференции «Машинное проектирование устройств и систем СВЧ» (Киев, сентябрь, 1976 г.) и на семинаре «Теория и инженерная реализация элементов и систем функциональной микроэлектроники» (Киев, апрель 1977 г.).

$$\Psi(z, r) = \begin{cases} -ik\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(r) Z_n^{(1)}(z) & (z \leq d_1) \\ -ik \sum_{n=1}^{\infty} A_n \eta_n Y_n(r) Z_n^{(2)}(z) & (z \geq d_1) \\ ik \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\varphi_m(r)}{g_m} \cos \beta_m z & \text{внутри } V_2, \end{cases} \quad (1\alpha)$$

где

$$Y_n(r) = \frac{I_1(x_n r)}{x_n I_0(x_n a)}, \quad \eta_n = \varepsilon \frac{Z_n^{(1)}(d_1)}{Z_n^{(2)}(d_1)},$$

$$Z_n^{(1)}(z) = \cos \beta_n^{(1)} z, \quad Z_n^{(2)}(z) = \cos \beta_n^{(2)} (d - z),$$

$\beta_n^{(1)} = \sqrt{k^2 \varepsilon + x_n^2}$, $\beta_n^{(2)} = \sqrt{k^2 + x_n^2}$, k — волновое число свободного пространства, ε — диэлектрическая проницаемость заполнения, x_n — корни уравнения $\beta^{(1)} \operatorname{tg} \beta^{(1)} d_1 + \varepsilon \beta^{(2)} \operatorname{tg} \beta^{(2)} (d - d_1) = 0$, $\varphi_m(r) = I_0(g_m b) K_1(g_m r) + K_0(g_m b) I_1(g_m r)$, $g_m = \sqrt{\beta_m^2 - k^2}$, $\beta_m = (m-1)\pi/H$. Использование в качестве базиса области V_1 собственных волн двухслойной радиальной линии позволяет решить проблему учета сильных возмущений [6] и не вводить дополнительный локальный базис.

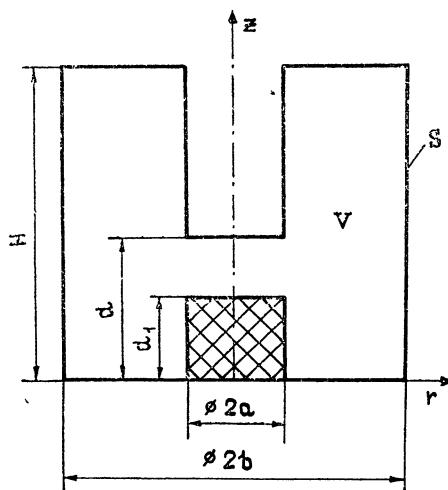


Рис. 1.

Удовлетворяя граничному условию для продольной составляющей электрического поля на поверхности ($r = a$, $0 \leq z \leq H$) и для магнитного поля на поверхности S_{12} , учитывая ортогональность* волн области V_1 ,

$$\int_0^{d_1} Z_n^{(1)}(z) Z_p^{(1)}(z) dz + \frac{\eta_n \eta_p}{\varepsilon} \int_{d_1}^a Z_n^{(2)}(z) Z_p^{(2)}(z) dz = \begin{cases} 0 & (n \neq p) \\ \delta_n & (n = p) \end{cases},$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд A_n :

* Условие ортогональности можно вывести с помощью леммы Лоренца [7], которая для случая кусочно-однородных сред формулируется в обычном виде ввиду выполнения условий непрерывности касательных составляющих поля на границе раздела,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{pn} A_n = -\Psi_p A_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \quad (2)$$

где

$$\alpha_{pn} = \alpha_{np} = \frac{2}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(a) G_{nm} G_{pm}}{g_m(1 + \delta_{1m}) f_m(a)},$$

$$\Psi_p = \epsilon Y_p(a) \delta_p,$$

$$\delta_p = \int_0^{d_1} [Z_p^{(1)}(z)]^2 dz + \frac{\eta_p^2}{\epsilon} \int_{d_1}^d [Z_p^{(2)}(z)]^2 dz,$$

$$G_{nm} = \int_0^{d_1} Z_n^{(1)}(z) \cos \beta_m z dz + \eta_n \int_{d_1}^d Z_n^{(2)}(z) \cos \beta_m z dz,$$

$$f_m(r) = I_0(g_m b) K_0(g_m r) - K_0(g_m b) I_0(g_m r),$$

δ_{1m} — символ Кронекера.

Условие существования нетривиального решения системы (2) приводит к трансцендентному уравнению для волнового числа

$$D(k) = 0. \quad (3)$$

К решению исходной задачи можно подойти несколько иначе. Согласно работе [8], для удовлетворения интегральному уравнению относительно касательной составляющей электрического поля $E_\tau(z)$ на поверхности S_{12} , к которому может быть сведена краевая задача, необходимо и достаточно обратить в нуль первую вариацию функционала $\Phi^e\{\mathbf{E}_\tau\}$:

$$\delta\Phi^e\{\mathbf{E}_\tau\} = \delta(\Phi_1\{\mathbf{E}_\tau\} + \Phi_2\{\mathbf{E}_\tau\}) = 0, \quad (4)$$

где

$$\Phi_1\{\mathbf{E}_\tau\} = - \int_{S_{12}} \mathbf{E}_\tau (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_{12}) dS, \quad \Phi_2\{\mathbf{E}_\tau\} = - \int_{S_{12}} \mathbf{E}_\tau (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_{21}) dS,$$

$\mathbf{H}_1(r, z)$ и $\mathbf{H}_2(r, z)$ — магнитные поля в областях V_1 и V_2 соответственно, возбуждаемые заданным на S_{12} электрическим полем $\mathbf{E}_\tau(z)$, $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{n}_{21}$ — внешняя к области V_1 единичная нормаль. Функционал $\Phi^e\{\mathbf{E}_\tau\}$ означает разность потоков вектора Умова — Пойнтинга через поверхность связи S_{12} . Апроксимируя пробное поле \mathbf{E}_τ функцией с варьируемыми параметрами $\{\alpha_n\}$, из условия (4) получаем систему уравнений относительно неизвестных $\{\alpha_n\}$.

При решении частных задач о возбуждении полем $\mathbf{E}_\tau(z)$ объемов V_1 и V_2 представим магнитное поле $\mathbf{H}_1(r, z)$ в виде ряда Фурье (1 а) по радиальным волнам двухслойной области V_1 , а поле $\mathbf{H}_2(r, z)$ — в виде ряда Фурье по системе собственных функций $\{\mathbf{H}_v, \mathbf{H}_v\}$ области V_2 с «заметаллизированной» поверхностью S_{12} :

$$\mathbf{H}_2(r, z) = \sum_v h_v \mathbf{H}_v(r, z), \quad (5)$$

где $h_v = -\frac{ik_f v}{k^2 - k_v^2}$, $f_v = \int_{S_{12}} (\mathbf{E}_\tau(z) \times \mathbf{H}_v(a, z)) n dS$ — электрический коэффициент возбуждения области V_2 , k_v — собственное значение v -й функции

* Система собственных функций области должна включать наряду с бесконечным числом вихревых функций одну гармоническую, собственное значение которой равно нулю [9].

ции. Такой подход был использован, в частности, в работе [8] (стр. 371) при решении задачи о собственных колебаниях П-образного резонатора с однородным заполнением. Следует отметить, что использование системы собственных функций $\{E_n, H_n\}$ в качестве базиса области V_2 приводит к неравномерной сходимости на поверхности связи S_{12} , т. е. к ухудшению точности при численном решении задачи.

Пробное поле $E_r(z) = \mathcal{E}(z) e_z$ берем в виде

$$\mathcal{E}(z) = \begin{cases} (d-z)^{-1/3} & (z \leq d_1) \\ \varepsilon(d-z)^{-1/3} & (z \geq d_1) \end{cases}. \quad (6)$$

Удовлетворяя условию (4), с учетом (1 а), (5) и (6) получаем трансцендентное уравнение для волнового числа k :

$$\frac{1}{k} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k^2 - k_m^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_j C_m}{(1 + \delta_{0m})(k^2 - k_{jm}^2)} - \frac{a \varepsilon}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n^2}{\delta_n} Y_n(a) = 0, \quad (7)$$

где

$$C = \left(\int_0^d \mathcal{E}(z) dz \right)^2 / \left(H \ln \frac{b}{a} \right), \quad S_j = \frac{2 J_0^2(b \lambda_j) \ln \frac{b}{a}}{J_0^2(a \lambda_j) - J_0^2(b \lambda_j)},$$

$$U_n = \int_0^{d_1} \mathcal{E}(z) Z_n^{(1)}(z) dz + \frac{\eta_n}{\varepsilon} \int_{d_1}^d \mathcal{E}(z) Z_n^{(2)}(z) dz,$$

$$C_m = 2 \left(\int_0^d \mathcal{E}(z) \cos k_m z dz \right)^2 / \left(\int_0^d \mathcal{E}(z) dz \right)^2,$$

$$k_{jm} = \sqrt{k_m^2 + \lambda_j^2},$$

$k_m = m \pi / H$, λ_j — корни уравнения $N_0(\lambda b) J_0(\lambda a) - J_0(\lambda b) N_0(\lambda a) = 0$, δ_{0m} — символ Кронекера.

Добротность Q резонатора определяем при условии малых потерь в диэлектрике и металле методом возмущений [7], используя в качестве первого приближения поле (1) идеального резонатора:

$$Q = \frac{W}{P_A + P_M},$$

где

$$\begin{aligned} W = & \sum_{n, j=1}^{\infty} A_n A_j \left[\int_0^a Y_n(r) Y_j(r) r dr \left(\varepsilon \int_0^{d_1} \frac{dZ_n^{(1)}}{dz} \frac{dZ_j^{(1)}}{dz} dz \right. \right. + \right. \\ & + \eta_n \eta_j \int_{d_1}^d \frac{dZ_n^{(2)}}{dz} \frac{dZ_j^{(2)}}{dz} dz \left. \right) + \int_0^a R_n(r) R_j(r) r dr \left(\varepsilon \int_0^{d_1} Z_n^{(1)} Z_j^{(1)} dz \right. + \\ & \left. \left. + \eta_n \eta_j \int_{d_1}^d Z_n^{(2)} Z_j^{(2)} dz \right) \right] + \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 \left[(1 + \delta_{1m}) \int_a^b f_m^2(r) r dr + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\beta_m}{g_m} \right)^2 (1 - \delta_{1m}) \int_a^b \varphi_m^2(r) r dr \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta} = & \epsilon \operatorname{tg} \delta \sum_{n, j=1}^{\infty} A_n A_j \left[\int_0^a R_n(r) R_j(r) r dr \int_0^{d_1} Z_n^{(1)} Z_j^{(1)} dz + \right. \\
 & \left. + \int_0^a Y_n(r) Y_j(r) r dr \int_0^{d_1} \frac{dZ_n^{(1)}}{dz} \frac{dZ_j^{(1)}}{dz} dz \right], \\
 P_m = & \frac{k^2}{2 \sqrt{\pi f \sigma}} \left\{ \sum_{n, l=1}^{\infty} A_n A_l (\epsilon^2 + \eta_n \eta_l) \int_0^a Y_n(r) Y_l(r) r dr + \right. \\
 & + \sum_{m, l=1}^{\infty} \frac{B_m B_l}{g_m g_l} \left[(1 + (-1)^{m+l}) \int_a^b \varphi_m(r) \varphi_l(r) r dr + a \varphi_m(a) \times \right. \\
 & \left. \times \varphi_l(a) \int_a^H \cos \beta_m z \cos \beta_l z dz + \frac{(1 + \delta_{ml}) \delta_{ml} H}{2 b g_m g_l} \right] \left. \right\},
 \end{aligned}$$

$R_n(r) = \frac{I_0(\chi_n r)}{I_0(\chi_n a)}$, $\operatorname{tg} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь, σ — удельная проводимость металла, f — резонансная частота, δ_{ml} — символ Кронекера.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Обосновать возможность применения метода редукции к решению системы (2) и оценить скорость сходимости не всегда удается. Численные исследования подобных систем [10, 11] указывают на довольно сложную зависимость приближенного решения от способа усечения и выбора параметров системы. Поэтому целесообразно проверять правильность полученных результатов по нескольким критериям: относительной сходимости, соответствуя результата, полученных разными способами, удовлетворению граничным условиям, сравнению с экспериментом, выполнению закона сохранения энергии и др. В настоящей работе при численном анализе резонатора I (рис. 2—5, 6а) с параметрами $a = 1,5 \text{ см}$, $b = 4,76 \text{ см}$, $H = 9,96 \text{ см}$, $d = 4 \text{ см}$, $\sigma = 58 \frac{\text{Мсм}}{\text{м}}$, $\operatorname{tg} \delta = 2 \cdot 10^{-4}$ и резонатора II (рис. 6б) с параметрами $a = 0,75 \text{ см}$, $b = 2,56 \text{ см}$, $H = 2 \text{ см}$, $d = 0,5 \text{ см}$ использовались первые пять из указанных критериев.

2.1. Распределение поля. Относительная сходимость

В блок данных программы входят величины, определяющие время счета и точность результатов: N и M — число учитываемых радиальных волн в разложениях (1а) и (1б) соответственно, T — число учитываемых ТЭМ собственных функций в разложении (5), P и Λ — верхние пределы по индексам j и m соответственно в двойной сумме уравнения (7).

На рис. 2 представлены распределения составляющих $E_z(a, z)$ и $H_\varphi(a, z)$ на поверхности S_{12} для основного колебания резонатора I с $\epsilon = 1$ (сплошные кривые — поле области V_1 , штриховые — области V_2). Увеличение значения M улучшает выполнение граничных условий для электрического поля на поверхности $r = a$, $0 \leq z \leq H$, но не влияет на распределение магнитного поля. Это объясняется тем, что коэффициенты B_m разложения (1б) определяются из неоднородных граничных условий для электрического поля на указанной поверхности. Увеличение значения N улучшает «сшивание» магнитных полей (рис. 2в) и позволяет приближенному решению более точно удовлетворить условию

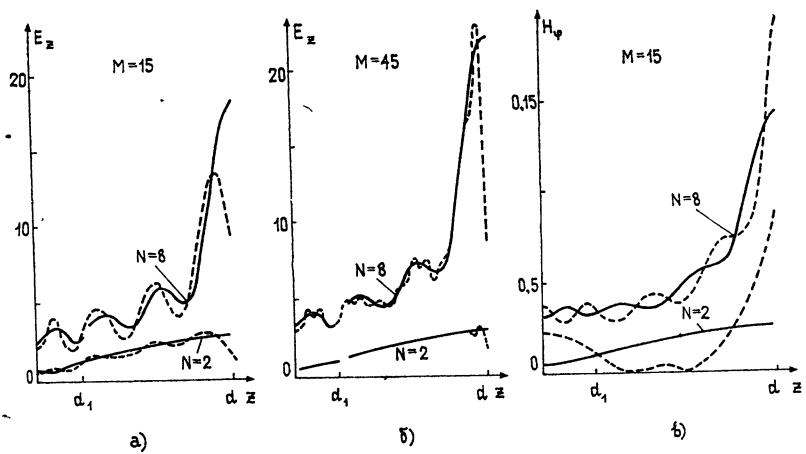


Рис. 2.

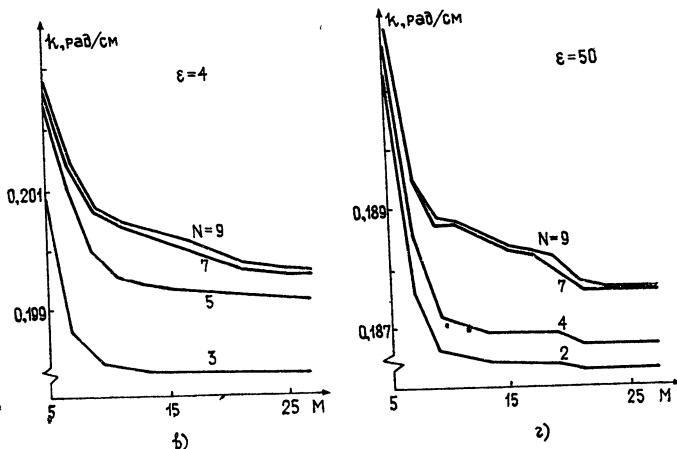
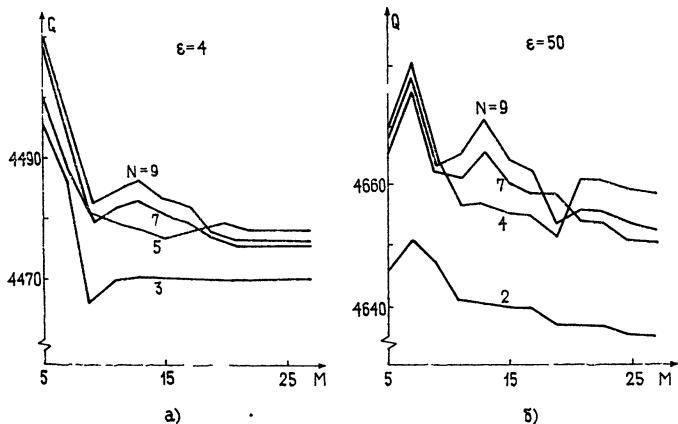


Рис. 3.

Мейкснера на ребре (рис. 2 а, б). Значения величин $N \geq 10$ и $M \geq 50$ достаточны для удовлетворительного выполнения граничных условий в рассматриваемом резонаторе. Сходимость волнового числа k и добротности Q значительно лучше сходимости полей (рис. 3, $d_1 = 2,6 \text{ см}$). Относительная погрешность порядка 0,1% определения величины k достигается при $N \sim 5$, $M \sim 15$. С увеличением значения ϵ точность определения Q несколько ухудшается в результате возрастания погрешности при решении системы (2).

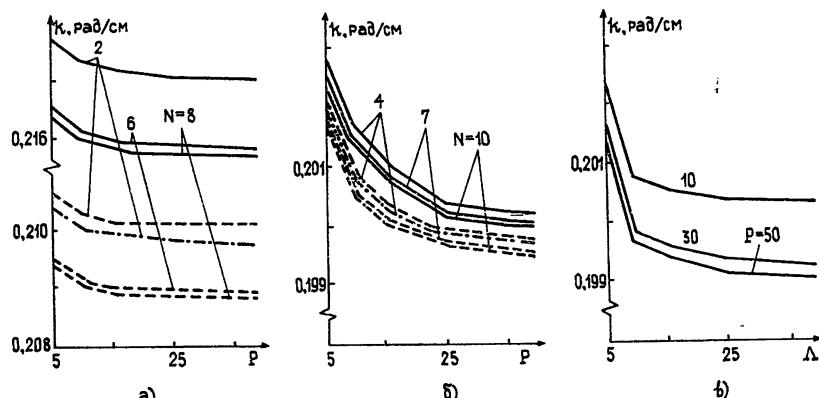


Рис. 4.

При использовании уравнения (7) сходимость, как отмечалось выше, ухудшается (рис. 4, $d_1 = 2,6 \text{ см}$, $\epsilon = 4$). На рис. 4 а показана зависимость волнового числа k от значения P при выборе собственных функций $\{E_v, H_v\}$ по правилу $j=m$ (сплошная — $T=2$, штриховая — $T=6$, штрихпунктирная — $T=16$). Сходимость можно улучшить выбором вихревых собственных функций области V_2 по правилу $j=1, m=0, 1, \dots, \Lambda; j=2, m=0, 1, \dots, \Lambda$; и т. д. На рис. 4 б дана зависимость величины k от числа P ($\Lambda=12$, сплошная линия — $T=5$, штриховая — $T=10$, штрихпунктирная — $T=20$), а на рис. 4 в — от числа Λ ($N=7$, $T=10$) для такого выбора функций. Численный эксперимент показал, что сходимость величины k по одному из чисел N , T , P или Λ не зависит от значения остальных. Это свойство алгоритма позволяет быстро определять их оптимальные значения. Для рассматриваемого резонатора целесообразно брать $N \sim 6$, $T \sim 10$, $P \sim 50$, $\Lambda \sim 40$.

2.2. Зависимость характеристик резонатора от параметров заполнения. Сравнение с экспериментальными данными

На рис. 5 представлена зависимость волнового числа k , определяемого из уравнения (3), и добротности Q резонатора I от величины d_1 . Уменьшение значения k при увеличении d_1 объясняется введением диэлектрика в область возрастающих значений электрического поля по мере приближения к ребру металлического стержня. Зависимость добротности (рис. 2б) имеет характерную черту: для большего значения ϵ кривая $Q(d_1)$ идет выше (до некоторого значения d_1), затем наступает более быстрый спад. Крутизна этой зависимости максимальна в области малых воздушных зазоров ($d_1 \sim d$). Для объяснения поведения кривых $Q(d_1)$ исключим незначительное влияние зависимости глубины скользящего слоя d_0 от частоты, положив $d_0 = \text{const}$ (рис. 4в, сплошные кривые — $\text{tg} \delta = 2 \cdot 10^{-4}$, штриховые — $\text{tg} \delta = 0$). При введении диэлектрика на-

пряженность поля в области металлического ребра уменьшается, т. е. уменьшаются потери P_m в металле (штриховые кривые), а в объеме диэлектрического заполнения — увеличивается, что приводит к росту диэлектрических потерь P_d . При малых значениях величины ϵ указанное перераспределение поля незначительное, поэтому при увеличении d_1 основное влияние оказывает рост потерь P_d (за счет введения все большего объема диэлектрика с потерями в область возрастающих значений электрического поля) и кривые $Q(d_1)$ монотонно падают. Для больших значений ϵ перераспределение поля возрастает (поле сильнее «прижимается» к диэлектрику), в результате чего добротность сначала увеличивается, а при некотором значении d_1 влияние потерь P_d становится преобладающим и добротность падает. С увеличением значения ϵ точка экстремума кривой $Q(d_1)$ смещается вправо.

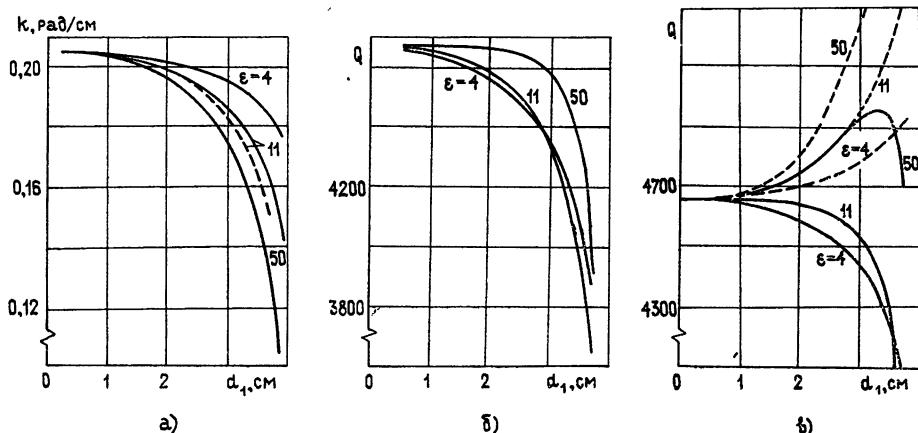


Рис. 5.

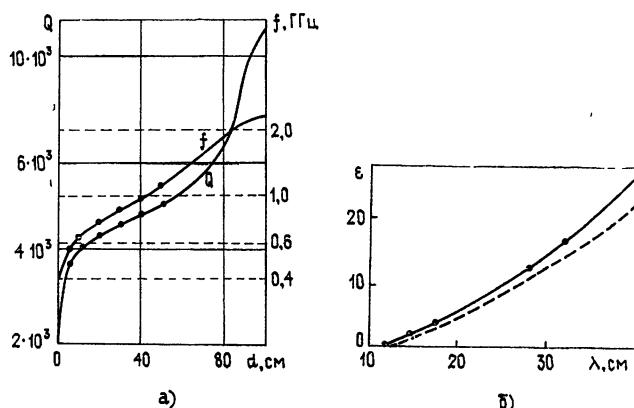


Рис. 6.

Результаты расчетов резонатора I с $d_1=0$ (рис. 6а) и резонатора II с $d_1=d$ (рис. 6б) сравнивались с экспериментальными данными, приведенными в работах [12] и [13] соответственно (сплошные кривые — решение уравнения (3), точки — экспериментальные данные). Совпадение результатов наблюдается во всем диапазоне значений величин d и ϵ . При малых воздушных зазорах уравнение (3) дает более точные

значения волнового числа k , чем уравнение (7) (рис. 5 а и рис. 6 б, штриховые кривые).

В заключение отметим, что проведенные исследования подтвердили применимость предложенных алгоритмов расчета характеристик симметричных электрических колебаний П-образного резонатора с частичным заполнением в широком диапазоне значений его параметров. Представление поля в виде (1) позволяет точнее определить значение резонансного волнового числа k при $d_1 \sim d$. Сходимость резонансной частоты и добротности по сравнению со сходимостью поля на поверхности S_{12} значительно выше. Наличие малого воздушного зазора резко увеличивает добротность, причем кривые $k(d_1, \epsilon)$ и $Q(d_1, \epsilon)$ имеют максимальную крутизну именно при $d_1 \sim d$. Это подтверждает целесообразность применения рассматриваемого резонатора в схемах измерения параметров твердых диэлектриков [3, 4], объясняет причину большого (около 100%) расхождения с экспериментом рассчитанного в [1] значения емкости гиперзвукового преобразователя. Частичное заполнение ёмкостного зазора расширяет возможности разработчиков при конструировании различных СВЧ устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Прохоров, В. Е. Лямонов, Вопросы радиофизики, серия Общетехническая, № 5, 44 (1970).
2. Н. М. Чиркин, А. Б. Власов, В. Г. Басов, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 13, № 7, 879 (1970).
3. И. А. Малинов, Радиотехника, 20, № 3, 9 (1965).
4. Н. М. Карих, Измерительная техника, № 5, 68 (1977).
5. Л. Г. Бунин, С. В. Торопчина, Вопросы электронной техники, Научные труды Саратовского политехнического института, вып. 78, 24 (1975).
6. В. В. Никольский, Тр. МИРЭА, вып. 70, 99 (1974).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, Л., 1949.
9. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, изд. Наука, М., 1967.
10. А. А. Кириленко, В. П. Шестопалов, Н. П. Яшина, ЖВММФ, 17, № 6, 1482 (1977).
11. R. Mittra, J. Res. NBS, 67D, № 2, 245 (1963).
12. E. Kühn, AEU, 22, № 12, 557 (1968).
13. О. В. Карпова, Физика твердого тела, 1, № 2, 246 (1959).

Поступила в редакцию
24 апреля 1978 г.

SYMMETRIC ELECTRIC OSCILLATIONS OF A CYLINDER II-SHAPED RESONATOR WHEN THE CAPACITY GAP IS PARTIALLY FILLED BY THE DIELECTRIC

V. V. Senchenko, A. T. Fialkovskij

The problem on the symmetrical electric oscillations of II-shaped resonator the capacity gap of which is partially filled by a homogeneous isotropic dielectric is solved by two different methods. The field behaviour on the boundary of «matching» is analysed. The relative convergence is investigated when the resonance frequency and the resonator Q-factor being calculated. The physical interpretation of the results obtained is given.

УДК 533.951; 537 52

ОБ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РАЗРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. И. Эфендиев, А. И. Бежанова, Г. М. Садых-заде

Исследованы свойства гелиевого разряда с винтовыми колебаниями при внешнем синхронизирующем воздействии; когда частота винтовых колебаний следует за частотой внешнего источника при изменении последней в некоторой полосе частот (полоса захватывания). Показано, что измеренное и рассчитанное значения ширины полосы захватывания при малой величине внешнего сигнала находятся в хорошем согласии. При достаточной величине воздействия удавалось подавить винтовые колебания. Рассмотрена также возможность подавления токовоконвективной неустойчивости с помощью системы обратных связей. Найдено, что на амплитуду винтовых колебаний существенное влияние оказывает величина сдвига фаз между винтовыми колебаниями и возмущением, возникающим в цепи обратной связи. Далее, на основании автоколебательных свойств разряда выдвинуто предположение о возможном механизме подавления страт при развитии токовоконвективной неустойчивости.

При исследовании колебательных свойств разряда было обнаружено, что в некоторых случаях (см., например, [1, 2]) разряд проявляет особенности, свойственные автоколебательным системам. В частности, для разряда со стратами характерно явление синхронизма, причем синхронизирующее воздействие могут оказывать как колебания, существующие в разряде одновременно со стратами [3, 4], так и колебания от внешнего источника, включенного в цепь разряда [1].

В настоящей работе представлены, с одной стороны, данные об исследовании автоколебательных свойств разряда с винтовыми колебаниями, возникающими в разряде с развитием токовоконвективной неустойчивости (ТКН) и об одном способе подавления ТКН системой обратных связей. Эти результаты представляют, в известной степени, продолжение ранее начатых исследований [5, 6]. С другой стороны, на основе представлений о разряде как автоколебательной системе сделана попытка объяснить некоторые колебательные свойства разряда в магнитном поле.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Разряд исследовался в гелии при давлении от 1 до 0,3 Torr на установке, описанной в [7]. Стеклянная разрядная трубка имела диаметр 2,2 см и длину 80 см. Конусообразная форма молибденового анода способствовала подавлению встречающихся обычно в указанных разрядных условиях анодных колебаний. Катод — оксидный, косвенного накала. Расстояние между катодом и торцом соленоида составляло 30 см, что исключало непосредственное влияние магнитного поля на катодные части разряда, служащие, как известно, очагом образования страт. В одной серии экспериментов в качестве источника внешнего синхронизирующего воздействия использовался звуковой генератор ГЗ-33, сигнал с которого мог подаваться либо между анодом и одним из зондов, находящихся в плазме, либо ГЗ-33 включался в цепь разряда последо-

вательно. Для осуществления системы обратных связей — в другой серии экспериментов — на разрядную трубку или цилиндр с радиусом, вдвое большим радиуса разрядной трубки (цилиндр надевался на трубку), наматывались два провода в форме винта, расположенные параллельно друг другу с диаметрально противоположных сторон вдоль по поверхности трубки или цилиндра. Шаг винта — 42 см, значение это близко шагу ТКН для данных параметров разряда [8]. Витки подсоединялись последовательно в цепь электростатического цилиндрического зонда, находящегося в плазме. В цепь зонда включались также нагрузочное R_h и балластное R_b сопротивления, причем по виткам винта пропускалась лишь переменная составляющая ионного тока в цепи зонда I , отбираемая из общего зондового тока с помощью LC-фильтра. Величина I регулировалась с помощью R_h и измерялась ламповым вольтметром ВЗ-4, регистрирующим сигнал с R_b .

Наблюдения во всех случаях велись с помощью анализатора гармоник и осциллографа, на вертикальные входы которых подавался усиленный сигнал либо с ФЭУ-19, либо с одного из плоских зондов, находящихся под «плавающим» потенциалом.

2. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Наблюдения частотного спектра разряда на экране анализатора гармоник С4-12 в магнитных полях B , больших B_{kp} , критических для возникновения ТКН, показывают, что в спектре, кроме частоты, соответствующей частоте винтовых колебаний f_v , содержатся частоты, кратные f_v — $2f_v$, $3f_v$, а также комбинационные частоты. При этом все составляющие частотного спектра представляют собой результат сложения группы волн, близких по частоте.

Наряду с колебаниями, вызванными развитием ТКН, в разряде обнаруживаются нерегулярные колебания более низких частот, имеющие непрерывный спектр частот.

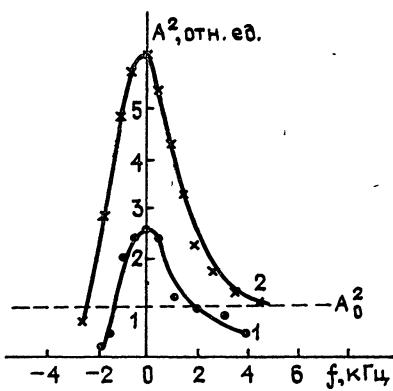


Рис. 1. Зависимость квадрата амплитуды захваченных колебаний от величины расстройки;

$P = 0,96 \text{ Torr}$, ток разряда — 200 мА, $B = B_{kp} = 2130 \text{ Гс}$, $f_v = 24,9 \text{ кГц}$, величина синхронизирующего напряжения: 1 — $12B$, 2 — $15B$.

Включение в цепь разряда источника переменной ЭДС одним из описанных выше способов приводило к тому, что частота винтовых колебаний f_v следовала за частотой генератора при изменении последней внутри некоторой полосы (полоса захватывания), близкой к f_v . Амплитуда захваченных колебаний при минимальной расстройке, т. е. когда частота генератора совпадает с f_v , может в 3—4 раза превосходить собственную амплитуду винта (рис. 1). Ширина полосы захватывания зависит от величины синхронизирующего напряжения. При малой величине последнего ширина полосы захватывания обычно не превосходит ширины волнового пакета, т. е. составляет величину порядка 2,5—3,5 кГц. При этом изменение частоты синхронизирующего напряжения в пределах области захватывания приводит к уве-

личению амплитуды колебаний и уменьшению ширины волнового пакета, т. е. все частоты f_v , лежащие в некотором интервале 2,5—3,0 кГц, подчиняются вынуждающей силе и все вместе совершают колебания на частоте этой силы. Захватывание колебаний осуществляется легче,

т. е. необходимая величина синхронизирующего напряжения меньше, а ширина области захватывания больше, когда переменное напряжение прикладывалось между анодом и зондом, нежели при последовательном включении генератора в цепь разряда.

Измерения полос захватывания в закритической области магнитных полей показали, что ширина полос меняется мало. При этом синхронизирующее воздействие на разряд оказывает переменная ЭДС лишь с частотой, близкой f_v . Синхронизация на частотах кратных f_v и комбинационных не наблюдалась.

Полное гашение колебаний внешней ЭДС наблюдалось [5] только тогда, когда переменное напряжение прикладывалось между анодом и зондом при достаточной величине напряжения. В остальных случаях наблюдалось лишь частичное гашение, т. е. амплитуда винтовых колебаний значительно уменьшалась, становясь в несколько раз меньше того значения, которое она имела в отсутствие внешнего воздействия.

Как было показано ранее [5], винтовые колебания могут стимулировать появление страт на участке разряда, находящемся вне соленоида и свободном от этих колебаний при наложении на разряд поля. (В отсутствие магнитного поля страты существуют на всем протяжении положительного столба.) Стимулированные страты носят регулярный характер на небольшом участке столба со стороны катода порядка 12—15 см, в средней же части разрядного промежутка их спектр сильно размыт и наблюдается модуляция страт низкочастотным шумом. Внешним воздействием можно синхронизировать страты в средней части столба. Длина стимулированных страт имеет такое же значение, как и для страт в отсутствие магнитного поля. Стимулированные страты могут образовываться и при токах разряда, меньших граничного тока, необходимого для возникновения естественных страт в отсутствие магнитного поля. По мере приближения разрядного тока к граничному амплитуда стимулированных страт возрастает. Надо заметить, что стимулированные страты образуются при давлениях, не меньших 0,3 Torr, т. е. при давлениях, не меньших нижнего граничного для существования страт в отсутствие магнитного поля. Таким образом, винтовые колебания оказывают на разряд резонансное воздействие, подобное тому, которое оказывает на разряд внешний источник переменной ЭДС при искусственном возбуждении страт [9].

В неоновом разряде страты на участке катод — торец соленоида (страты I) при включении магнитного поля продолжают существовать [7]. Развитие винтовых колебаний здесь приводило к тому, что частота страт I «подтягивалась» к частоте винтовых колебаний (как правило, f_v мало отличается от f_1) и страты I совершили вынужденные колебания на частоте f_v , т. е. в неоновом разряде наблюдалось явление частичного увлечения частоты страт f_v , характерное для автогенераторов.

3. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ТКН

В силу обнаруженных автоколебательных свойств разряда в магнитном поле возникло предположение о том, что с помощью системы обратных связей можно подавить ТКН или во всяком случае задержать ее развитие.

Осуществляя обратную связь способом, описанным выше, в самом деле удалось задержать появление ТКН до полей B'_{kp} , на десятки гауссов превышающих B_{kp} . Величина $B'_{kp} - B_{kp}$ во всем исследованном диапазоне давлений не зависит от последнего (в пределах ошибок измерений). Подавлять винтовые колебания можно лишь тогда, когда в частотном спектре наблюдается только основная гармоника f_v . Было оценено минимальное значение тока, протекающего в цепи обратной связи,

при котором еще наблюдалось подавление ТКН. Оказалось, что эта величина составляет примерно $10^{-5} A$ (рис. 2). Весьма существенным было влияние постоянной составляющей зондового тока на подавление ТКН, т. е. оказалось, что существует некоторое минимальное значение напряжения между анодом и зондом, при котором гасятся винтовые колебания. Например, для давления 0,42 Tor величина этого напряжения составляет 100 В («плавающий» потенциал — 78 В), при меньших напряжениях амплитуда винтовых колебаний при включении обратной связи может даже увеличиваться. Для того, чтобы оценить влияние сдвига фаз между винтовыми колебаниями и возмущением, возникающим в витках обратной связи, на амплитуду винтовых колебаний, проволока в одной части экспериментов наматывалась на цилиндр, который мог вращаться вокруг оси трубы. И в этом случае удавалось отодвинуть границу появления винтовых колебаний, величина $B'_{kp} - B_{kp}$ оставалась прежней, при этом она также не зависела от давления. Изменение же сдвига фаз $\Delta\phi$ показывает, что при $\Delta\phi = 180^\circ$, т. е. когда колебания в разряде и колебания в витках обратной связи находятся в противофазе, амплитуда винтовых колебаний становится равной нулю (рис. 3).

Малое значение величины $B'_{kp} - B_{kp}$, возможно, связано с малыми токами, текущими в цепи обратной связи. Величина магнитного поля, созданного током в цепи обратной связи, порядка $3 \cdot 10^{-4} Gc$.

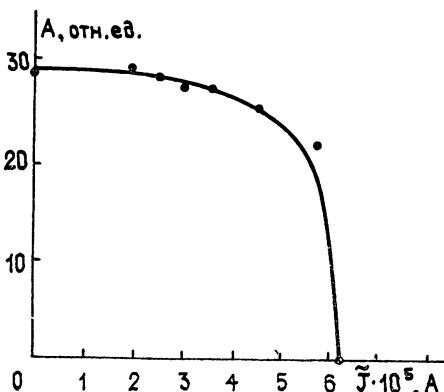


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость амплитуды винтовых колебаний от величины тока в цепи обратной связи;

$P = 0,52 \text{ Tor}$, ток разряда 200 mA , $B = B_{kp} = 1200 \text{ Gc}$.

Рис. 3. Зависимость амплитуды винтовых колебаний от сдвига фаз между винтовыми колебаниями и возмущением в цепи обратной связи. Условия те же, что и на рис. 2.

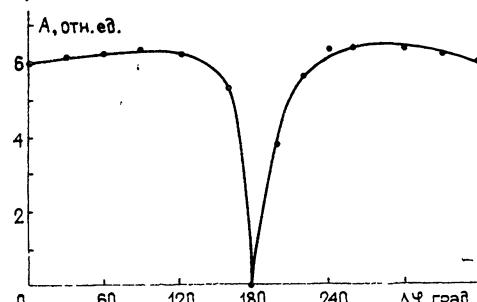


Рис. 3.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, как эксперименты, проведенные ранее [5, 6], так и описанные выше, свидетельствуют о том, что разряд в магнитном поле проявляет свойства автоколебательных систем. В частности, воздействуя на разряд с винтовыми колебаниями, можно навязать этому разряду частоту внешнего генератора. Для определения спектральной ширины полосы захватывания Δ в случае слабых внешних сигналов можно воспользоваться формулой [10] $\Delta = 2(\omega - \omega_0) \approx A\omega_0/A_0$, где ω , ω_0 — частоты внешнего воздействия и автоколебаний соответственно, A и A_0 — амплитуды внешнего сигнала и автоколебаний. Вычисления Δ при давлении 0,96 Tor и токе разряда 200 mA и $A = 0,5$ В дают значение $\Delta = 4,4 \text{ кГц}$ при $B = B_{kp}$. Амплитуда винтовых колебаний при этих условиях равна

2,8 В. Измеренное же значение $\Delta = 3,8 \text{ кГц}$. Приведенная выше формула указывает также на то, что с увеличением A должна увеличиваться и ширина области захватывания. Такое увеличение Δ наблюдается на опыте [5]. Однако вычисленные значения сильно разнятся от измеренных, что, впрочем, понятно, так как условие малости внешнего сигнала в этих экспериментах не выполнялось.

Выше отмечалось, что в полях B , больших $B_{\text{кр}}$, наряду с основной частотой появляются и гармонические составляющие винтовых колебаний. Такое обогащение спектра гармониками должно, согласно общим свойствам автоколебательных систем [10], приводить к снижению частоты. Такое снижение f_v или ее постоянство при превышении магнитного поля $B_{\text{кр}}$ на величину порядка 50 Гс наблюдалось в экспериментах. Кстати, в силу нелинейности системы (разряда), наряду с гармоническими составляющими, должны возникать комбинационные частоты, что и наблюдалось в опытах.

Наблюдавшееся в экспериментах [5] подавление колебаний стратовых или винтовых при достаточной величине A является также проявлением одного из общих свойств автоколебательных систем, заключающегося в том, что при «мягком» режиме возбуждения вне областей принудительной синхронизации подавление автоколебаний имеет место, если амплитуда внешнего воздействия A удовлетворяет условию $A \geq A_0/\sqrt{2}$.

На основании всего сказанного можно предположить следующий механизм подавления стратовых колебаний винтовыми, которое имело место в гелиевом разряде. Амплитуда стратовых колебаний в магнитном поле сильно уменьшается, а амплитуда винтовых колебаний растет при увеличении B . При полях $B = B_{\text{кр}}$ амплитуда страт имеет в несколько десятков раз меньшее значение, чем в отсутствие поля. С другой стороны, частота винтовых колебаний, как правило, находится за границами полос захватывания для страт. Если при этом амплитуды страт и винтовых колебаний сравнимы, то обычно наблюдается наложение колебаний. С увеличением индукции магнитного поля в закритической области за счет быстрого нарастания амплитуды винтовых колебаний может происходить асинхронное гашение первых. Анализ амплитуд обоих видов колебаний показывает, что соотношение для асинхронного гашения, записанное выше, выполняется. Так, амплитуда страт в магнитном поле уменьшается с 4,5 В при $B = 0$ до 0,28 В при $B = B_{\text{кр}}$ (давление — 0,96 Torr, ток разряда — 350 mA). Амплитуда винтовых колебаний для тех же разрядных условий в критическом магнитном поле — 2,8 В. Таким образом, условие для асинхронного гашения выполняется, и можно предположить, что затухание страт при развитии винтовых колебаний связано именно с этим. В тех же случаях, когда амплитуда страт имеет существенное значение, возможно существование обоих типов колебаний [7].

Таким образом, из всего сказанного выше можно прийти к заключению, что разряд в магнитном поле обладает всеми свойствами автоколебательных систем.

Следует также заметить, что автоколебательный характер разряда имеет не только при наличии рассмотренных выше типов колебаний, но также на участке разряда с падающей вольт-амперной характеристикой в лазерной трубке [11], в цезиевых диодах [12] и т. д., т. е. автоколебательный режим, видимо, весьма распространенный режим разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Зайцев, ДАН СССР, 84, № 1, 41 (1952)
2. М. А. Молчакин, Радиотехника и электроника, 20, 1656 (1975).
3. К. И. Эфендиев, Ученые записки Азербайджанского университета, № 8, 9 (1957).

- 4 А. А. Зайцев, В. Ф. Махров, И. А. Савченко, В. Н. Швилкин, сб. Коллекция и волны в плазме, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
- 5 К. И. Эфендиев, А. И. Бежанова, Изв. вузов — Радиофизика, 18, 777 (1975).
- 6 К. И. Эфендиев, Г. М. Садых-заде, Теплофизика высоких температур, 14, 203 (1976).
- 7 А. В. Недоспасов, К. И. Эфендиев, А. И. Бежанова, ЖТФ, 45, 1659 (1975).
- 8 G. A. Paulikas and R. V. Pytle, Phys. Fluids, № 5, 348 (1962).
- 9 А. А. Зайцев, Г. С. Леонов, Радиотехника и электроника, 10, 33 (1965).
- 10 К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
- 11 Ю. Г. Захаренко, В. Е. Привалов, Оптика и спектроскопия, 29, № 2, 237 (1970).
- 12 С. М. Левитский, И. Н. Грошев, Радиотехника и электроника, 9, № 1, 132 (1964).

Азербайджанский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 марта 1978 г.

AUTO-OSCILLATION PROPERTIES OF A CHARGE IN THE MAGNETIC FIELD

K. I. Efendiev, A. I. Bezhanova, G. M. Sadykh-sade

Properties of a helium discharge with helical oscillations are investigated with the external synchronizing effect when the frequency of helical oscillations followed by the frequency of the external source, the latter variating in a certain frequency band (lockin band). It is shown that the measured and calculated values of the lockin bandwidth with the small value of the external signal are in a good agreement. When the value of the effect is sufficient the helical oscillations are succeeded to be suppressed. A possibility is considered of current-convective instability suppression by the system of inverted relations. It is found that the amplitude of helical oscillations is essentially affected by the value of the phase shift between the helical oscillations and disturbances occurred in the inverse relation chain. On the basis of auto-oscillation discharge properties an assumption is made on the possible mechanism of the strata suppression in developing current-convective instability.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371.4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ УКВ СИГНАЛОВ, ОТРАЖЕННЫХ ОТ ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

Ю. А. Лемента, И. М. Фукс

Из экспериментальных и теоретических исследований, проведенных в [1, 2], следует, что функции распределения удельного сечения рассеяния радиолокационных сигналов УКВ диапазона, отраженных от поверхности моря, отличны от экспоненциальных (а амплитуды — от распределения Рэлея) и зависят как от параметров РЛС (частоты, поляризации, угла облучения поверхности, длительности импульса), так и от состояния поверхности моря.

В [3] на основе комбинированной модели исследуются функции распределения флуктуаций амплитуды A и интенсивности I радиолокационных сигналов для случая, когда размеры освещенного участка поверхности малы по сравнению с длиной волны крупномасштабных составляющих морского волнения (способ разделения на крупно- и мелкомасштабные составляющие морского волнения см. в [4]).

Однако если длительность импульса РЛС такова, что размеры освещенного участка сравнимы или больше характерной длины волны крупномасштабных составляющих морской поверхности, то $W(I|\gamma)$ — условная плотность распределения флуктуаций интенсивности отраженного сигнала — зависит не от мгновенного наклона γ в одной точке поверхности, как полагали в [1, 3], а от формы поверхности в пределах всего освещенного участка. Поэтому при рассеянии на двумерной поверхности $\gamma(x) = \partial z / \partial x$

с гауссовым распределением наклонов $W(\gamma(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_0^2}} \exp(-\gamma^2(x)/2\gamma_0^2)$ имеем

$$W(I|\gamma(x)) = \frac{1}{I_0} \exp(-I/I_0), \quad (1)$$

где $I_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma(\gamma(x)) \sqrt{1+\gamma^2(x)} dx$ — усредненная по реализациям мелкой ряби интенсивность отраженного сигнала с единичной площади для заданной реализации профиля наклонов $\gamma(x)$, $L = \frac{c\tau_n}{2}$ — линейный размер освещенного участка по оси X , τ_n — длительность зондирующего импульса, $\sigma(\gamma(x))$ — удельное сечение рассеяния на мелкой ряби, покрывающей плоскость с наклоном $\gamma(x)$.

Тогда для получения плотности распределения флуктуаций интенсивности $W(I)$ при усреднении $W(I|\gamma(x))$ необходимо проводить функциональное интегрирование с, вообще говоря, бесконечнократной плотностью распределений:

$$\begin{aligned} W(I) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\iiint \dots \int}_{n} W(I|\gamma(x)) W(\gamma(x_1) \gamma(x_2) \dots \gamma(x_n)) d\gamma(x_1) d\gamma(x_2) \dots d\gamma(x_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(I|\gamma(x)) W\{\gamma(x)\} D\{\gamma(x)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

При $\gamma_0^2 \ll 1$ из формулы (2) следует

$$\langle I \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\gamma(x)) W(\gamma(x)) d\gamma(x) = \sigma_0, \quad (3)$$

где σ_0 — удельное сечение рассеяния, определенное в [4] как функция угла облучения

Ψ , длины радиоволны λ , P_1 и P_2 — поляризаций приемного и передающего устройства для различных состояний поверхности моря;

$$\langle I^2 \rangle = \frac{2}{L^2} \int_0^L dx_1 dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma(x_1) d\gamma(x_2) \sigma(\gamma(x_1)) \sigma(\gamma(x_2)) \times \\ \times W(\gamma(x_1), \gamma(x_2), |x_1 - x_2|), \quad (4)$$

где

$$W(\gamma(x_1), \gamma(x_2), |x_1 - x_2|) = \frac{1}{2\pi\gamma_0^2} \exp\left(-\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} H_n(\eta_1) H_n(\eta_2)$$

— ортогональное разложение двумерной плотности распределения двух нормированных случайных величин $\eta_1 = \gamma(x_1)/\gamma_0$ и $\eta_2 = \gamma(x_2)/\gamma_0$ с коэффициентом корреляции R (см. [5]), $H_n(\eta)$ — полиномы Эрмита. Полагая $R = \exp[-(x_1 - x_2)^2/\rho^2]$ (ρ — интервал корреляции крупных волн), формулу (4) можно преобразовать к виду

$$\langle I^2 \rangle = \langle I \rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{1}{\alpha\sqrt{n}} \Phi(\alpha\sqrt{n}) + \frac{1}{\alpha^2 n} [\exp(-\alpha^2 n) - 1] \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) H_n(\eta) d\eta \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

где $\alpha = L/\rho$, а $\Phi(\alpha\sqrt{n})$ — интеграл Френеля.

Используя формулу (5), на ЭВМ был вычислен коэффициент вариации интенсивности $(\delta I/I)^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}$ как функция длительности импульса τ_i при различных значениях нормированного угла облучения Ψ/γ_0 ($\gamma_0 = \sqrt{\langle \gamma(x)^2 \rangle}$ — дисперсия углов наклонов крупномасштабных составляющих морского волнения). Расчеты проводились для горизонтальной поляризации излучения и приема, когда $\sigma(\eta) \sim \operatorname{tg}^4(\Psi + \eta\gamma_0)$. Из расчетов, результаты которых приведены на рис. 1, следует, что при малых

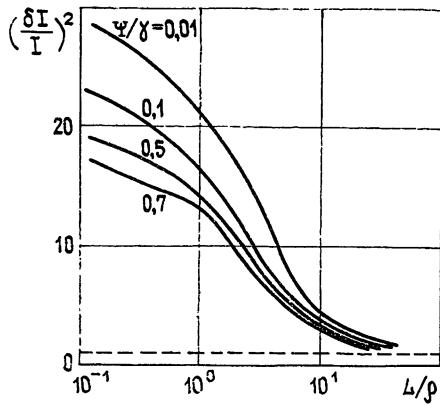


Рис. 1.

длительностях импульсов и скользящих углах облучения модуляция сигнала наклонами крупной структуры на поверхности моря приводит к распределению флюктуаций интенсивности, отличному от экспоненциального распределения, а при фиксированной длительности импульса это отличие тем больше, чем меньше величина отношения Ψ/γ_0 (пунктиром на рисунке обозначено $(\delta I/I)^2 = 1$, соответствующее экспоненциальному закону распределения интенсивности).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Jakeman and P. N. Pussey, IEEE Trans. Antennas and Propag., 24, № 6, 806 (1976).
2. G. V. Trank, IEEE Trans., AES-8, № 2, 196 (1972).

3. Ю. А. Лемёнта, И. М. Фукс, Труды VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, т. 1, Ростов-на-Дону, 1977.
 4. Ю. А. Лемёнта, И. М. Фукс, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 379 (1978).
 5. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
12 июня 1978 г.

УДК 538.56 : 519 25

ДВУХФОТОННЫЙ РЕЗОНАНС В РАЗНЕСЕННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ ПОЛЯХ

С. И. Зуб, А. С. Клейман

В нелинейной лазерной спектроскопии ширины резонансов, как известно, ограничены снизу величиной, обратной времени взаимодействия частиц со световым полем. Пролетное время, соответствующее поперечному размеру луча 1 см, составляет $10^{-4} \div 10^{-5}$ с, тогда как время распада некоторых запрещенных переходов атомов и молекул в оптическом диапазоне может быть значительно большим [1].

Ввиду этого является важным поиск методов, которые уменьшают вклад пролетного эффекта в ширину резонансов. В радиоспектроскопии соответствующим методом является метод Рамзея. При взаимодействии частицы с двумя разнесенными когерентными полями возникает резонанс с шириной, обратной времени пролета между полями [2]. Зависимость резонансного условия от скорости частиц из-за эффекта Доплера приводит к тому, что в оптическом диапазоне применение метода Рамзея в обычном виде для разрешенных переходов оказывается невозможным [3].

Доплеровский сдвиг исключается в случае двухфотонного поглощения из встречных бегущих компонент стоячей волны, при этом резонансно взаимодействуют с полем все частицы независимо от их скорости [4]. Таким образом, возникают предпосылки для применения метода Рамзея с использованием запрещенных переходов.

При расчете интенсивности резонанса будем пользоваться следующей системой уравнений для амплитуд вероятности поглощения:

$$\hbar \left(\frac{da_m}{dt} + \frac{1}{2} \gamma_m a_m \right) = \sum_n V_{mn}(t) \exp(i\omega_{mn} t) a_n, \quad (1)$$

где $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$ — частоты атомных переходов, $V_{mn}(t)$ — матричный элемент гамильтониана взаимодействия поля с атомом. Для системы разнесенных когерентных полей гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$V(t) = V\eta(t) \cos \Omega t \sin k\vartheta t. \quad (2)$$

Множитель $\eta(t) = 1$, если $0 \leq t < \tau$ или $T < t < T + \tau$, и $\eta(t) = 0$ вне указанных интервалов, где τ — время пролета через световой луч, T — время пролета до второго луча. Ограничимся для простоты рассмотрением трех атомных уровней, причем $V_{31} = 0$.

Метод Рамзея дает выигрыш по сравнению с однополевым возбуждением резонанса, когда $T \gg \tau$ и $T \geq [(\gamma_1 + \gamma_3)/2]^{-1}$, где $(\gamma_1 + \gamma_3)/2$ — естественная ширина перехода.

Так как для наблюдения двухфотонного резонанса тщательная коллимация пучка не является необходимой, то $v \tau \gg 1$, где v — доплеровская ширина линии в пучке. Рассмотрим область частот, настолько близких к резонансу, что $|\omega_{31} - 2\Omega| \tau \ll 1$. При этих предположениях вероятность перехода, усредненная по поперечным скоростям пучка, оказывается равной

$$\begin{aligned} \bar{P}_{13} = & \frac{|V_{32}|^2 |V_{21}|^2}{32 \hbar^4 \tau^{-2} (\omega_{21} - \Omega)^2} \left[\frac{\exp(-\gamma_3 T) + \exp(-\gamma_1 T)}{2} + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{\gamma_3 + \gamma_1}{2} T\right) \cos(\omega_{31} T - 2\Omega T) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Вклад процессов двухфотонного поглощения из односторонних волн в доплеровский пьедестал резонанса мал по параметру $(v\tau)^{-1}$.

В результате усреднения выражения (3) по распределению продольных скоростей пучка получаем характерный рамзееевский резонанс с максимумом на частоте $\omega_{31}/2$ и с шириной, равной $v_0/2L$, определяемой исключительно пролетным эффектом, где v_0 — средняя скорость атомов в пучке, L — пролетное расстояние. Зависимость интенсивности резонанса от частоты поля показана на рис. 1, где $\gamma_1 = \gamma_3 = v_0/L$.

С помощью описанного метода возможно получение резонансов с шириной, меньшей естественной ширины перехода, при этом интенсивность падает в экспоненциальной зависимости от выигрыша в добротности [5].

В данной системе интенсивность и расходимость пучка могут быть сравнительно велики. Необходимо отметить, что световое уширение и сдвиг отсутствуют, поскольку переход запрещенный, а во втором порядке теории возмущений (который и используется при расчете) насыщается при реальных значениях поля не наступит. Также следует заметить, что интенсивность пучка может быть достаточно велика (сравнимо со значениями интенсивности в газовой ячейке низкого давления, которая используется для двухфотонного возбуждения переходов [1]), поэтому и интенсивность сигнала будет того же порядка, что и в обычных применениях двухфотонного поглощения для спектроскопии сверхвысокого разрешения.

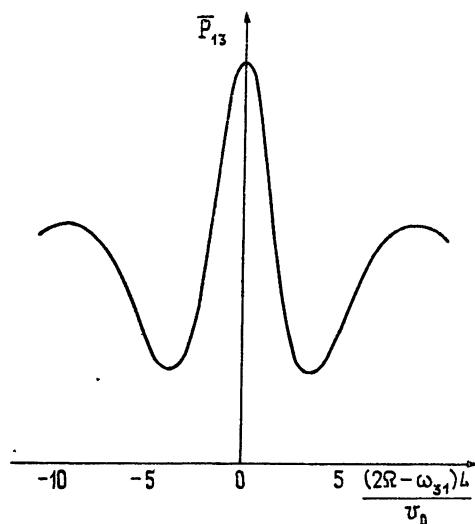


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Летохов, В. П. Чеботаев, Принципы нелинейной лазерной спектроскопии, изд. Наука, М., 1975.
2. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
3. В. П. Чеботаев, Квантовая электроника, 3, № 4, 694 (1976).
4. Л. С. Василенко, В. П. Чеботаев, А. В. Шишов, Письма в ЖЭТФ, 12, № 3, 161 (1970).
5. С. И. Зуб, А. С. Клейман, Е. П. Тимофеев, Тр. ВНИИФТРИ, Метрологическое обеспечение измерений оптико-физических параметров излучения ОКГ, М., 1975, стр. 138.

Харьковский Всесоюзный
научно-исследовательский институт
метрологии

Поступила в редакцию
10 марта 1978 г.

УДК 538.56 : 519.25

**О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АППАРАТА УРАВНЕНИЙ
КОЛМГОРОВА — ФЕЛЛЕРА ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ,
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ
С СИММЕТРИЧНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ**

A. И. Саичев

1. Во многих задачах статистической радиофизики возникает потребность определения статистических свойств систем, на которые воздействует пуассоновский процесс вида

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k h(t - t_k), \quad (1)$$

где A_k — взаимно независимые амплитуды с одинаковым вероятностным распределением $P(A)$, t_k — пуассоновский поток с интенсивностью ν (см., например, [1]). Если поведение системы описывается дифференциальным уравнением, зависящим от $\eta(t)$, импульсы которого $h(t)$ можно аппроксимировать дельта-функцией, то анализ статистических свойств системы сводится к решению соответствующего уравнения Колмогорова — Феллера (КФ). К анализу уравнения КФ задача сводится и в том случае, когда $h(t)$ — импульсная переходная характеристика (функция Грина) линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Однако подобная аппроксимация реальных импульсов не всегда физически правомерна. Дело в том, что во многих задачах статистической физики, например в задачах распространения волн в среде с дискретными случайными неоднородностями, импульсы по своему смыслу должны быть симметричными, в то время как упомянутые импульсные переходные характеристики принципиально несимметричны. В результате при анализе статистики систем, находящихся под действием пуассоновских процессов с симметричными импульсами, не удается непосредственно использовать аппарат уравнений КФ.

В данном сообщении на простом примере иллюстрируются соображения, позволяющие использовать уравнение КФ и в том случае, когда $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$, где $h_1(t)$ и $h_2(-t)$ — импульсные переходные характеристики линейных систем.

2. Пусть случайный процесс $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} + a(x) = \eta(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $\eta(t)$ — пуассоновский процесс (1), отдельный импульс которого имеет вид

$$h(t) = e^{-p|t|}.$$

Рассмотрим временной интервал $[0; T]$. В этом интервале процесс $\eta(t)$ удобно записать в виде $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$, где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ являются решениями соответственно «вперед» и «назад» по времени следующих стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} + p\eta_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(t - t_k), \\ \frac{d\eta_2}{dt} - p\eta_2 &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta(t - t_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Дополним их граничными условиями

$$\eta_1(0) = y_1, \quad \eta_2(T) = z_2 \quad (4)$$

и обозначим решения уравнений (2), (3) вместе с (4) так: $\eta_1(y_1, t)$, $\eta_2(t, z_2)$, $x(x_0, y_1, t, z_2)$. Наличие граничных условий (4) в два разных момента времени не позволяет сразу применить к анализу совместной статистики упомянутых решений аппарат уравнений КФ. Известно, однако, что статистику решений двухточечных граничных задач можно выразить через решения уравнений типа Эйнштейна — Фоккера — Планка или КФ некоторой вспомогательной задачи Коши [2, 3]. В данном случае это решения уравнений (2), (3) с граничными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \eta_1(0) = y_1, \quad \eta_2(0) = z_2.$$

Обозначим вспомогательные решения $x(x_0, y_1, y_2, t)$, $\eta_1(y_1, t)$, $\eta_2(y_2, t)$. Их совместное вероятностное распределение

$$\begin{aligned} f(x, z_1, z_2; t | x_0, y_1, y_2) &= \langle \delta[x - x(x_0, y_1, y_2, t)] \times \\ &\times \delta[z_1 - \eta_1(y_1, t)] \delta[z_2 - \eta_2(y_2, t)] \rangle \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению КФ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (z_1 + z_2) \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [af] + p \frac{\partial}{\partial z_1} [z_1 f] - p \frac{\partial}{\partial z_2} [z_2 f] + \\ &+ \nu \int_{-\infty}^{\infty} P(A) f(x, z_1 - A, z_2 + A; t | x_0, y_1, y_2) dA - \nu f, \end{aligned} \quad (5)$$

$$f(x, z_1, z_2; 0 | x_0, y_1, y_2) = \delta(x - x_0) \delta(z_1 - y_1) \delta(z_2 - y_2).$$

Заметим, что согласно свойствам дельта-функций

$$\delta[x - x(x_0, y_1, y_2, T)] \delta[z_1 - \eta_1(y_1, T)] \delta[z_2 - \eta_2(y_2, T)] e^{pT} = \\ = \delta[x - x(x_0, y_1, T, z_2)] \delta[z_1 - \eta_1(y_1, T)] \delta[y_2 - \eta_2(0, z_2)]$$

нетрудно выразить через решение уравнения КФ (5) совместное вероятностное распределение $W_3(x, z_1, y_2, T | x_0, y_1, z_2)$ решений системы уравнений (2), (3) с граничным условием (4):

$$W_3(x, z_1, y_2; T | x_0, y_1, z_2) = \langle \delta[x - x(x_0, y_1, T, z_2)] \times \\ \times \delta[z_1 - \eta_1(y_1, T)] \delta[y_2 - \eta_2(0, z_2)] \rangle = e^{pT} f(x, z_1, z_2; T | x_0, y_1, y_2). \quad (6)$$

Если $\eta(t)$ — стационарный пуассоновский процесс, то легко сообразить, что y_1, z_2 — взаимно независимые случайные величины, вероятностным распределением которых является стационарное вероятностное распределение процесса $\eta_1(t) = f_0(z)$, удовлетворяющее уравнению КФ:

$$p \frac{d}{dz} [zf_0(z)] + \nu \int_{-\infty}^{\infty} P(A)f_0(z-A)dA - \nu f_0(z) = 0.$$

Поэтому, домножив равенство (6) на $f_0(y_1)f_0(z_2)$ и проинтегрировав его по y_1, y_2, z_1, z_2 , получим окончательную формулу для $W_1(x; T | x_0)$ — одномерного вероятностного распределения решений уравнения (2), в правой части которого стоит стационарный пуассоновский процесс с симметричными экспоненциальными импульсами:

$$W_1(x; T | x_0) = e^{pT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y_1)f_0(z_2)f(x, z_1, z_2; T | x_0, y_1, y_2) dy_1 dy_2 dz_1 dz_2.$$

В некоторых задачах, например при статистическом анализе волн, прошедших через слой с дискретными случайными неоднородностями, вне слоя импульсы не возникают. В данном случае это соответствует тому, что $\eta(t)$ — нестационарный пуассоновский процесс, у которого оставлены только импульсы с центрами внутри интервала $t_k \in [0; T]$. При этом $y_1 = z_2 = 0$ и

$$W_1(x; T | x_0) = e^{pT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z_1, 0; T | 0, y_2) dz_1 dy_2.$$

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.
2. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1165 (1977).
3. А. И. Сачев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 996 (1978).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 июня 1978 г.

УДК 538.574

СИЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ ЗА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

B. У. Заворотный

До настоящего времени теория сильных флуктуаций интенсивности волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, рассматривала два крайних случая: поведение волны за фазовым экраном [1-3] и распространение волны в протяженной среде [4-6]. Асимптотическая теория, развитая в работе [6], позволяет записать выражение для статистических моментов поля волны в том общем случае, когда статистические характеристики среды зависят от продольной координаты распространения волны.

Это дает возможность исследовать ситуации, являющиеся промежуточными по отношению к фазовому экрану и случаю протяженной среды. Такие ситуации могут иметь место при распространении света в турбулентной атмосфере по наклонным трассам, при просвечивании атмосфер планет во время покрытия ими естественных или искусственных источников излучения, при прохождении радиоволн через межзвездную и межпланетную плазму, ионосферу.

Итак, используя методы работы [6], в случае исходной плоской волны единичной амплитуды можно написать следующее выражение для функции когерентности поля четвертого порядка Γ_4 , справедливо в области сильных флуктуаций интенсивности волны:

$$\Gamma_4(x, r_1, r_2) = \Gamma_2^2(x, r_1) + \Gamma_2^2(x, r_2) + \gamma(x, r_1, r_2) + \gamma(x, r_2, r_1), \quad (1)$$

где

$$\Gamma_2(x, r) = \exp \left[-\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D(\xi; r) \right]$$

— функция когерентности поля второго порядка;

$$\begin{aligned} \gamma(x, r_1, r_2) &= \pi k^2 \int_0^x dx' \iint d^2 \mathbf{x} \Phi_\epsilon(x'; 0, \mathbf{x}) \left\{ 1 - \cos \left[r_1 \mathbf{x} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x^2}{k} (x - x') \right] \right\} \exp \left\{ i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_2 - \frac{k^2}{2} \int_0^x d\xi D \left(\xi; r_1 - \frac{\mathbf{x}}{k} [x - \max(x', \xi)] \right) \right\}, \\ D(\xi; r) &= 2\pi \int d^2 \mathbf{x} \Phi_\epsilon(\xi; 0, \mathbf{x}) [1 - \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}]; \end{aligned}$$

$\Phi_\epsilon(\xi; 0, \mathbf{x})$ — зависящая от продольной координаты ξ трехмерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ .

Приведенные формулы позволяют рассматривать произвольные зависимости статистических характеристик среды от продольной координаты, мы же остановимся на следующем конкретном случае. Пусть исходная плоская волна падает на турбулентный слой толщины a , а затем распространяется в невозмущенной среде, что соответствует такому виду структурной характеристики турбулентности $C_\epsilon^2(\xi)$:

$$C_\epsilon^2(\xi) = \begin{cases} C_\epsilon^2 = \text{const} & (0 < \xi < a) \\ 0 & (a < \xi < x) \end{cases}, \quad (2)$$

где x — координата точки наблюдения. В этом случае, используя (1), можно для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности волны в точке x получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \beta^2(x) &\equiv \Gamma_4(x, 0, 0) - 1 = 1 + 2\gamma(x, 0, 0) = 1 + 2\pi^2 \int_{x-a}^x d\xi \xi^2 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\mathbf{x} \mathbf{x}^5 \Phi_\epsilon(0, \mathbf{x}) \exp \left[-\frac{k^2}{2}(x - \xi) D \left(\frac{x\xi}{k} \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x-a}^\xi D \left(\frac{x\xi'}{k} \right) d\xi' \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi_\epsilon(0, \mathbf{x}) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2)$, $x_m = 5,92/\lambda_0$, λ_0 — внутренний масштаб турбулентности. Для указанного выше спектра

$$D(r) = 1,46 C_\epsilon^2 r^{5/3} \quad \text{при} \quad r \gg \lambda_0; \quad (4)$$

$$D(r) = 1,64 C_\epsilon^2 \lambda_0^{-1/3} r^2 \quad \text{при} \quad r \ll \lambda_0. \quad (5)$$

Область, существенная для интегрирования по \mathbf{x} , в (3) определяется неравенством $(x\mathbf{x}/k) \leq \rho_{\text{ког}}$, где радиус когерентности поля $\rho_{\text{ког}}$ находится из уравнения $k^2 a D(\rho_{\text{ког}})/4 = 1$. Тогда с учетом формул (4) и (5) из (3) получаем асимптотические выражения

$$\beta^2(x) = 1 + 0,34 S_1 \left(\frac{a}{x} \right) \left(\beta_0^2 \right)^{-2/5} \quad \text{при} \quad \rho_{\text{ког}} \gg \lambda_0; \quad (6)$$

$$\beta^2(x) = 1 + 0,62 S_2 \left(\frac{a}{x} \right) \left(\beta_0^2 G^{7/6} \right)^{-1/6} \quad \text{при} \quad \rho_{\text{ког}} \ll \lambda_0, \quad (7)$$

где

$$S_1 \left(\frac{a}{x} \right) = \int_{1-\frac{a}{x}}^1 dy y^2 \left[\left(1 - \frac{5}{8} y \right) y^{5/3} - \frac{3}{8} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{8/3} \right]^{-7/5},$$

$$S_2 \left(\frac{a}{x} \right) = \int_{1-\frac{a}{x}}^1 dy y^2 \left[y^2 - \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^3 \right]^{-7/6},$$

$G = \sigma_m^2 x/k$ — волновой параметр; $\beta_0^2 = 0,307 C_e^2 k^{7/6} x^{11/6}$ — дисперсия флуктуаций интенсивности волны, вычисленная в первом приближении метода возмущений при $G \gg 1$. Отметим попутно, что комбинация $\beta_0^2 G^{7/6}$ соответствует геометрооптическому приближению ($G \ll 1$) для дисперсии флуктуаций интенсивности. Результаты численного счета интегралов S_1 и S_2 в зависимости от параметра a/x представлены на рис. 1.

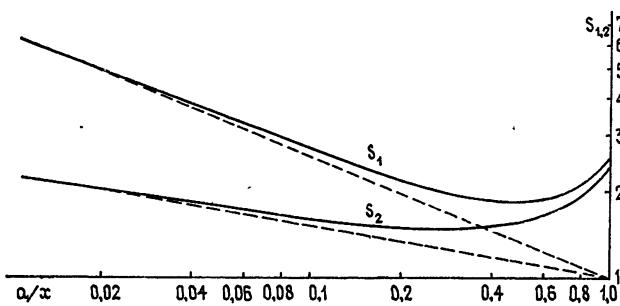


Рис. 1.

Функции $S_1(a/x)$ и $S_2(a/x)$ обладают следующими асимптотическими свойствами. При $a/x = 1$, что соответствует случаю протяженной среды,

$$S_1 \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{3}{2} F \left(\frac{7}{5}, \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{8} \right) \approx 2,556,$$

$$S_2 \left(\frac{a}{x} \right) = \frac{3}{2} F \left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3} \right) \approx 2,511,$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд. Если подставить эти значения в формулы (6) и (7), то получатся известные выражения для $\beta^2(x)$ в протяженной случайно-недонородной среде [4-6]. При $a/x \ll 1$

$$S_1 \left(\frac{a}{x} \right) = \left(\frac{a}{x} \right)^{-2/5}, \quad S_2 \left(\frac{a}{x} \right) = \left(\frac{a}{x} \right)^{-1/6}$$

(эти асимптоты показаны пунктиром на рис. 1). В этом случае

$$\beta^2(x) = 1 + 0,43 (\sigma_0^2)^{-2/5} \quad \text{при } \rho_{\text{ког}} \gg \lambda_0; \quad (8)$$

$$\beta^2(x) = 1 + 0,69 (\sigma_0^2 G^{7/6})^{-1/6} \quad \text{при } \rho_{\text{ког}} \ll \lambda_0, \quad (9)$$

где $\sigma_0^2 = 0,563 C_e^2 k^{7/6} x^{5/6} a$ — относительная дисперсия флуктуаций интенсивности волны на расстоянии x от слоя толщиной a , вычисленная в первом приближении метода возмущений.

Формулы (8) и (9), справедливые при $\sigma_0^2 \gg 1$, совпадают с результатами, получаемыми для величины $\beta^2(x)$ при $\sigma_0^2 \gg 1$, исходя из модели фазового экрана [3, 6]. Отсюда напрашивается вывод, что предельный переход $a/x \rightarrow 0$ означает переход к такому тонкому слою, который эквивалентен фазовому экрану. Но в действительности это не так. В наших рассуждениях мы не требовали отсутствия флуктуаций интенсивности на вы-

ходе из слоя, тогда как для модели фазового экрана это условие необходимо. В то же время условие $a/x \ll 1$ чисто геометрическое*.

Таким образом, совпадение выражений (8) и (9) с результатами для фазового экрана свидетельствует о том, что в области сильных флуктуаций интенсивности турбулентный слой (даже имеющий на выходе значительные амплитудные флуктуации) на расстоянии $x \gg a$ действует как фазовый экран.

Автор благодарит В. И. Татарского за постановку задачи и С. С. Кацкарова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
2. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
3. K. S. Sochelashvili and V. I. Shishov, Optica Acta, 18, 313 (1971).
4. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
5. И. Г. Якушкин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
6. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, № 2, 481 (1977).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
22 февраля 1978 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

В сообщении [1] обсуждаются известные, приводимые, например, в книгах [2, 3], выражения для чувствительности компенсационного и модуляционного радиометров

$$\Delta T_k = T(\Delta f \Delta t)^{-1/2}, \quad (1)$$

$$\Delta T_m = 2T(\Delta f \Delta t)^{-1/2} \quad (2)$$

и утверждается, что в действительности предельная чувствительность модуляционной схемы в $\sqrt{2}$ раз лучше, чем (2). Полемический тон статьи [1] создает впечатление, что в указанных монографиях приводятся неверные выражения для чувствительности модуляционной схемы. Однако это не так, а автор [1] в сущности предлагает метод (или схему), который бы позволил получить чувствительность, промежуточную между (1) и (2)**.

Здесь уместно подчеркнуть, что модуляционной схемой принято называть именно ту конкретную схему, для которой верна формула (2). Напомним, что смысл ее применения заключается в том, чтобы избежать влияния аномальных флуктуаций тока детектора вблизи нулевой частоты. Если рассмотреть спектр шумов и сигнала на выходе квадратичного детектора радиометра (рис. 1), то мы увидим, что в случае компенсационного радиометра полезный сигнал существует только на нулевой частоте, а в случае модуляционного (меандра) — составляющая нулевой частоты уменьшается вдвое, появляются компоненты на частоте модуляции F_m и ее гармониках $3F_m$, $5F_m$ и т. д. В классическом модуляционном радиометре используются только переменные составляющие, постоянная же исключается, так как она обременена аномальными флуктуациями. Если последние малы, то ее можно использовать, как предложено в [1], и получить в модуляционной схеме независимый (компенсационный) канал и соответственно выигрыш в $\sqrt{2}$ раз. Однако имеет ли это смысл? Ведь если аномальные флуктуации малы, то можно использовать чистую компенсационную схему. Легко убедиться, что при любом уровне аномальных флуктуаций предлагаемый вариант уступает по чувствительности

* Отметим, что полученное условие относится к поправке, описывающей выход на асимптотику. Само асимптотическое выражение для $G_4(x, r_1, r_2)$, равное $G_2^2(x, r_1) + G_2^2(x, r_2)$ (получить которое можно, исходя из нормализации поля в области насыщения флуктуаций), сохраняет свой вид при любых значениях a/x , поскольку в $G_2(x, r)$ входит лишь толщина неоднородного слоя a .

** Из общих соображений ясно, что можно предложить целый ряд схемных решений, в которых бы получалась чувствительность, промежуточная между (1) и (2). Предельным же значением чувствительности является только (1).

сти либо компенсационной, либо модуляционной схемам. Действительно, используя обозначения [1] и считая, что среднеквадратичное значение выходных флуктуаций складывается из флуктуаций тепловых σ_T (определеняемых шумами системы T) и аномальных флуктуаций σ_a , можем записать выходное отношение сигнал/шум для обсуждаемых схем:

а) Классическая компенсационная

$$\frac{c}{\text{ш}} = \frac{u_c}{\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_a^2}} = \frac{u_c}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_T^2}}} ;$$

б) Классическая модуляционная

$$\frac{c}{\text{ш}} = \frac{u_c}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{2} ;$$

в) Промежуточная (гибрид компенсационной и модуляционной)

$$\frac{c}{\text{ш}} = \frac{\frac{u_c}{2} + \frac{u_c}{2}}{\sqrt{\sigma_T^2 + (\sigma_T^2 + \sigma_a^2)}} = \frac{u_c}{\sigma_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_T^2}}} .$$

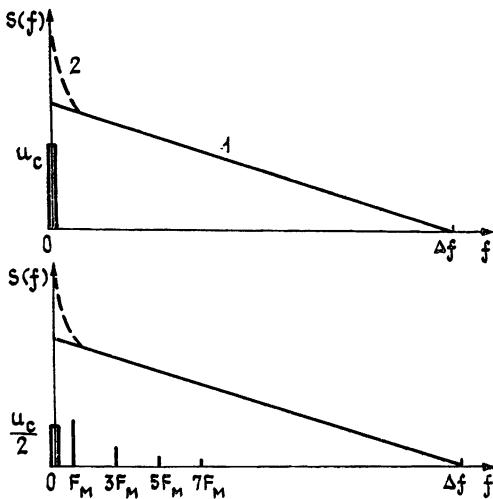


Рис. 1. Спектры на выходе квадратичного детектора компенсационного (вверху) и модуляционного радиометров:
1—нормальные шумы, 2—компоненты аномальных флуктуаций.

Из сравнения следует, что при

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_T^2} < 3$$

преимущество по чувствительности за компенсационной схемой, и именно ее следует применять, а при

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_T^2} > 3$$

— за модуляционной, и в любом случае гибридный вариант ухудшает либо одну, либо другую схему.

Еще одно замечание относительно физического смысла выражения для чувствительности модуляционного радиометра. По нашему мнению, неверно утверждение, что при модуляции сигнала изменение чувствительности (относительно компенсационного варианта) происходит за счет уменьшения вдвое времени наблюдения. От времени зависят выходные флуктуации, а так как время наблюдения Δt принято одинаковым при сравнении схем, то в случае малых сигналов среднеквадратичное значение флуктуаций на выходе обеих схем остается неизменным (это отмечается в [1]). Таким образом, изменение чувствительности при переходе к режиму модуляции может происходить только за счет изменения сигнала, вызванного модуляцией (рис. 1).

В заключение, учитывая сказанное выше, следует отметить, что в практическом плане предложенная схема вряд ли представит интерес, но обсуждение вопроса о чувствительности радиометров безусловно полезно, поскольку позволяет углубить наше понимание процесса приема слабых шумовых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 448 (1978).
2. Н. А. Еспкина, Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Радиотелескопы и радиометры, изд. Наука, М., 1973.
3. Дж. Д. Краус, Радиоастрономия, изд. Сов. радио, М., 1973.

Д. В. Корольков

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

(Ответ на письмо Д. В. Королькова)

Заметка [1] действительно имеет полемический характер, однако в ней 1) нет утверждения о неправильности формулы (1) (нумерация письма) и 2) нет акцента на предложении новой схемы модуляционного радиометра (с использованием постоянной составляющей сигнала), против чего возражает автор письма. В сообщении [1] сделана попытка обратить внимание читателей на некорректность довольно широко распространенного объяснения [2–4] отличия предельных чувствительностей компенсационного (ΔT_k) и модуляционного (ΔT_m) радиометров уменьшением средней энергии сигнала из-за модуляции. Это объяснение правдоподобно, так как при оптимальной модуляции сигнала меандром его средняя энергия убывает вдвое и как раз $\Delta T_m = 2\Delta T_k$. В заметке [1] показано, что это совпадение чисто случайно (приводится пример синусоидальной модуляции, при которой средняя энергия сигнала также убывает вдвое, а $\Delta T_{m,p} = -2\sqrt{2}\Delta T_k$). На самом деле ухудшение предельной чувствительности модуляционного радиометра в его обычной схеме обусловлено 1) отбрасыванием постоянной составляющей сигнала (фактор $\sqrt{2}$) и 2) уменьшением времени наблюдения вдвое (также фактор $\sqrt{2}$ при модуляции меандром). Подчеркиваю, что речь идет именно о предельной чувствительности радиометра, при оценке которой флуктуации параметров не учитываются. Только при этом условии можно сравнивать предельные чувствительности компенсационного и модуляционного радиометров. Тогда предельная чувствительность модуляционного радиометра (с использованием постоянной составляющей сигнала) $\Delta T_{m,p} = -\sqrt{2}\Delta T_k$, а не $2\Delta T_k$. В сообщении [1] предлагается также определение чувствительности, пользуясь которым можно просто получить уже известные формулы для ΔT_m и ΔT_k , что облегчает понимание их физического смысла. Таким образом, основное внимание в [1] уделялось методическим вопросам.

Что касается схемы модуляционного радиометра с использованием постоянной составляющей сигнала, то она, как это и отмечалось в [1], применима лишь в условиях, когда работает и компенсационный метод. Спрашивается, зачем, если все-таки $\Delta T_{m,p} = -\sqrt{2}\Delta T_k$? Использование модуляции может быть вопросом удобства измерений (например, при спектрально-поляризационных наблюдениях), и тогда для правильной интерпретации данных нужно использовать соответствующие соотношения для ΔT_m и ΔT_k .

Флуктуации параметров в радиометрах приводят к необходимости использования классической схемы модуляции сигнала с отбрасыванием его постоянной составляющей, здесь автор полностью согласен с Д. В. Корольковым. Присоединяюсь также к мнению Д. В. Королькова о полезности дискуссии вопроса о соотношении предельных значений ΔT_m и ΔT_k .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 448 (1978).
2. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, З. Н. Парийский, Радиотелескопы и радиометры, изд. Наука, М., 1973.
3. J. D. Kraus, Radio Astronomy, McGraw Hill, N. Y., 1966; русский перевод Дж. Д. Краус, Радиоастрономия, изд. Сов. радио, М., 1973.
4. А. Г. Николаев, С. В. Перцов, Радиотеплолокация, изд. Сов. радио, М., 1964.

А. Г. Кисляков
