

СОДЕРЖАНИЕ

Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Березин И. В., Добрушский Л. А., Разин В. А., Теплых А. И., Толмачева А. В., Томчинский А. М., Шавин П. Б. Наблюдения мерцаний дискретного радиоисточника Кассиопея-А на искусственных неоднородностях ионосферы на частотах 25, 240 и 290 МГц	257
Благовещенский Д. В., Дегтярев В. И. Радиошумы декаметрового диапазона во время авроральной суббури в поглощении	262
Комилов К., Хакимов Ф. Х., Цытович В. Н. О спектре модуляционных возмущений в развитой сильной ленгмюровской турбулентности	268
Григорьев В. П., Шулаев Н. С. Квазилинейная релаксация диссипативной неустойчивости релятивистского пучка в ограниченной плазме	281
Белов М. Л., Орлов В. М. Влияние турбулентности атмосферы на размеры дифракционного изображения в локационной схеме наблюдения	290
Гельберг М. Г. Нелинейные эффекты градиентно-дрейфовой неустойчивости	295
Крупнов А. Ф., Буренин А. В. К теории микроволновых спектрометров	305
Строганов В. В. Затягивание частоты при двойном резонансе в таллиевой атомно-лучевой трубке	314
Каплан А. Е. Продольно-неоднородные бегущие волны и их роль в нелинейном отражении и преломлении света	332
Апресян Л. А. Эффекты корреляции среда — частица при однократном рассеянии на частицах в флюктуирующей среде	349
Дубков А. А., Мальцев А. А. Об эффективности автокомпенсации помехи, модулированной по амплитуде случайным телеграфным процессом	353
Колоколов А. А. Взаимодействие атома с неоднородной плоской волной	360
Запевалов В. Е., Зарница И. Г., Нусинович Г. С. О возбуждении паразитных мод, резонансных с первой гармоникой циклотронной частоты, в гиротроне, работающем на моде, резонансной со второй гармоникой	367
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Эпштейн Э. М. Эффект Холла в полупроводнике со сверхрешеткой	373
Вольман В. И. Гауссовые пучки в поперечно-намагниченной ферритовой среде	374
Калинин М. И. К вопросу о кинетическом уравнении для линейной динамической системы с параметром, флюктуирующими по закону Пуассона	377
Новиков А. А., Синицын В. В., Тагер А. С. Динамика двухконтурного генератора на лавинно-пролетном диоде	380
Информация	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XVIII, № 5, 1978 г.	382

УДК 523.164 .551.510.535

НАБЛЮДЕНИЯ МЕРЦАНИЙ ДИСКРЕТНОГО РАДИОИСТОЧНИКА КАССИОПЕЯ-А НА ИСКУССТВЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ ИОНОСФЕРЫ НА ЧАСТОТАХ 25; 240 и 290 МГц

*В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, И. В. Березин, Л. А. Добрушский,
В. А. Разин, А. И. Теплых, А. В. Толмачева, А. М. Томчинский,
П. Б. Шавин*

Приведены результаты наблюдений мерцаний дискретного радиоисточника Кассиопея-А на искусственных неоднородностях ионосферы, а также оценки флуктуаций электронной концентрации в возмущенной области

Как известно, при воздействии мощного коротковолнового излучения на *F*-слой ионосферы (нагреве) в нем создаются искусственные неоднородности электронной концентрации [1–4]. Настоящая работа является продолжением исследований, описанных в [4], и посвящена изучению мерцаний дискретного радиоисточника Кассиопея-А на этих искусственных неоднородностях.

Нагрев ионосферы осуществлялся излучением на частоте 4,6 МГц либо 5,75 МГц. Отличие методики эксперимента от описанной в [4] состояло, во-первых, в том, что мощность передатчика была увеличена до 200 кВт. Во-вторых, в 1977 г. нагрев в ряде случаев производился при помощи двухантенного интерферометра с пространственным периодом интерференционных лепестков на высоте 300 км, равным 3 км, и огибающей диаграммы направленности, примерно соответствовавшей диаграмме одиночной антенны, с помощью которой нагрев производился ранее. В-третьих, интенсивность радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А регистрировалась одновременно в 3 пунктах Горьковской области: Зименках (Π_1), Старой Пустыни (Π_2) и Васильсурске (Π_3); пункт Π_2 был расположен в 66 км юго-западнее Π_1 [4]; пункт Π_3 находился в 100 км восточнее Π_1 . В Π_1 и Π_3 наблюдения проводились в 1976 и 1977 гг. на частоте 25 МГц, в Π_2 — на частотах 25 и 240 МГц в 1976 г. и на 25 и 290 МГц в 1977 г.

Как и в работе [4], для приема радиоизлучения на частоте 25 МГц использовались антенные решетки из 12 волновых вибраторов. На 240 МГц наблюдения проводились при помощи полноповоротного радиотелескопа с параболическим рефлектором диаметром 14 м (РТ-14), а на 290 МГц — при помощи 10-метрового телескопа (РТ-10). На телескопах в качестве приемной аппаратуры использовались радиометры модуляционного типа с чувствительностью около 0,8 К при постоянной времени $\tau = 1$ с. Антennaя температура источника Кассиопея-А составляла 90 К на РТ-10 и 250 К на РТ-14. Радиотелескопы позволяли надежно регистрировать флуктуации интенсивности радиоизлучения Кассиопеи-А, которые обычно составляли 3–6 К. В качестве примера на рис. 1 приведена одна из записей за 17 марта 1977 г. на

частоте 290 МГц (время работы передатчика выделено заштрихованной полосой).

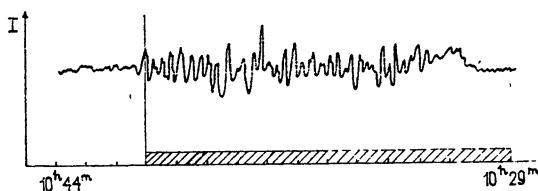


Рис. 1.

В Π_1 определялись также скорость и направление движения неоднородностей. Измерения этих параметров проводились путем пространственно-разнесенного приема радиоизлучения Кассиопеи-А с помощью трех идентичных антенн на частоте 25 МГц. База для приема представляла прямоугольный треугольник с катетами 0,94 и 1,48 км. Величина и направление скорости движения неоднородностей определялись методом подобия.

Наиболее часто эффекты мерцаний, вызванные нагревом, наблюдались в Π_1 , который находился под центром возмущенной области ионосферы, реже в Π_2 , который находился под краем этой области. Такие эффекты, однако, практически отсутствовали в Π_3 , который расположен вдали от возмущенной области.

Мерцания наблюдались также в те дни, когда нагрев осуществлялся интерферометром. Какой-либо периодичности мерцаний, которую можно было бы связать с работой интерферометра, замечено не было. По-видимому, это связано с размытием интерференционной картины вследствие переноса неоднородностей (время переноса неоднородностей на расстояние, равное периоду интерференционной картины, составляет 30—60 с при типичных скоростях переноса 50—100 м/с).

Нагрев ионосферы осуществлялся сеансами длительностью от 7 до 14 мин. Определялись времена запаздывания эффектов τ_s относительно моментов включения передатчика и времена релаксации $\tau_{рел}$ относительно моментов его выключения, скорости и направления движений неоднородностей (в Π_1), частота флюктуаций $f_{\text{фл}}$ (или $1/T_{\text{фл}}$) и величина индекса флюктуаций, усредненная за сеанс,

$$F = \langle (I - \bar{I})^2 / \bar{I}^2 \rangle, \quad (1)$$

где I — интенсивность радиоизлучения, принимаемого антенной.

Времена запаздывания изменились от 0 до 9 мин в Π_1 ; в Π_2 почти во всех случаях мерцания начинались позже. По данным, полученным в Π_1 в феврале — марте 1976 г., было проведено сравнение частоты флюктуаций $f_{\text{фл}}$ со скоростью движения неоднородностей. Зависимость $f_{\text{фл}}$ (s^{-1}) от v (м/с) приведена на рис. 2; видно, что точки расположены в секторе, ограниченном прямыми

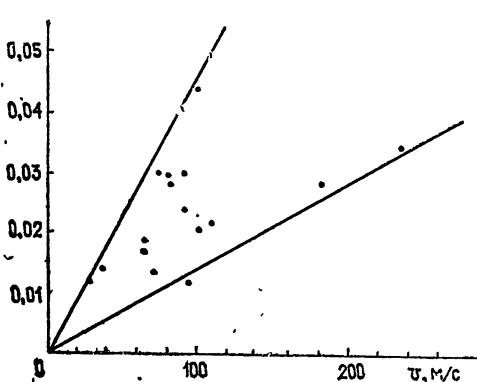


Рис. 2.

$$(f_{\Phi\text{л}})_1 = 1,45 \cdot 10^{-4} v$$

и

$$(f_{\Phi\text{л}})_2 = 4,7 \cdot 10^{-4} v.$$

Из рис. 2 следует, что характерные размеры неоднородностей находятся в пределах от 2 до 7 км, а наиболее часто встречающиеся скорости переноса неоднородностей составляли 50—100 м/с. Времена релаксации в Π_1 изменялись от 1 до 16 мин. Время релаксации мерцаний определяется двумя факторами: диффузией неоднородностей и их сносом из фиксируемой области. Если предположить, что вся возмущенная область движется с измеренной в Π_1 скоростью, то времена сноса неоднородностей $\tau_{\text{сн}}$ лежат в интервале от 2 минут до получаса. В этом же интервале лежат характерные времена расплывания неоднородностей из-за диффузии. (При оценках времени диффузии $\tau_d \sim R_{\parallel}/4D_{\parallel}$, где $D_{\parallel} = \frac{z(T_e + T_i)}{M v_{im}}$, считалось, что $T_e + T_i \approx 3500^\circ$, $M \approx 20$, $v_{im} \sim 2$, $R_{\parallel} = R_{\perp} l$, где $l \sim 10$, а $R_{\perp} \sim$ от 2 до 7 км, где R_{\parallel} — продольный размер неоднородностей.) Однако сопоставление $\tau_{\text{рел}}$ и τ_c , а также $\tau_{\text{рел}}$ и R_{\perp}^2 не показало заметной корреляции этих величин.

Величины индекса флуктуаций F оказались существенно различными для мерцаний, наблюдавшихся одновременно в разных пунктах и на различных частотах. Для сравнения в табл. 1 приведены данные за 23 и 24 марта 1976 года, полученные в Π_1 на 25 МГц и в Π_2 — на 25 и 240 МГц ($T_{\Phi\text{л}}$ — средний период флуктуаций).

Таблица 1

Дата	Время сеанса нагрева	Π_1		Π_2			
		$f_1 = 25 \text{ МГц}$		$f_1 = 25 \text{ МГц}$		$f_2 = 240 \text{ МГц}$	
		$F \cdot 10^2$	$T_{\Phi\text{л}}$	$F \cdot 10^2$	$T_{\Phi\text{л}}$	$F \cdot 10^4$	$T_{\Phi\text{л}}$
23.03. 76 г.	10.31—10.44	16,0	20 с	7,25	60 с	7,8	20 с
24.03. 76 г.	10.01—10.14	18,6	150 с	9,0	90 с	9,0	35 с

Таблица 2

Дата	$f_1 = 25 \text{ МГц}$		$f_2 = 290 \text{ МГц}$	
	$F \cdot 10^2$	$T_{\Phi\text{л}} (с)$	$F \cdot 10^4$	$T_{\Phi\text{л}} (с)$
16.03.77 г.	3,4	60	0,6—2,5	18
17.03.77 г.	1,1	60	1,4—1,8	24
	2,0	45	4,0	18
	1,5	30	3,2	18
	3,4	60—90	8,5	30

В табл. 2 приведены результаты одновременных наблюдений в марте 1977 г. в Π_2 на частотах $f_1 = 25 \text{ МГц}$ и $f_2 = 290 \text{ МГц}$. Точность определения величины F была обычно порядка 10—20%. Вариации значений F для одного и того же сеанса вызваны существенным изменением амплитуды мерцаний (усреднение проводилось отдельно для разных частей сеанса). Из табл. 1 видно, что в Π_2 , который находился на краю

возмущенной области, величины F меньше, чем в Π_1 (в 2—2,3 раза на $f_1 = 25 \text{ МГц}$).

В Π_2 наблюдались одновременные эффекты на частотах 25 и 290 МГц, причем средние периоды флюктуаций для разных (по времени) мерцаний были существенно различны на одной и той же частоте. При этом сравнение средних периодов одновременных мерцаний на 25 и 290 МГц показывает, что их отношение составляет 2,5—3. Если наибольший вклад в мерцания вносят неоднородности с поперечными размерами порядка зоны Френеля $R_{\perp} \sim \sqrt{L\lambda}$ [5, 7] (размер зоны Френеля для наших рабочих частот для высоты 300 км составляет 0,6 и 1,9 км), то отношение периодов мерцаний должно быть близким к отношению размеров зон Френеля (в рассматриваемом случае равным 3,4). Отличие может быть связано с изгибом кривой спектра флюктуаций амплитуды [8].

Таким образом, наблюдения на разных частотах в одном пункте дают возможность исследовать искусственно возбуждаемые неоднородности различных масштабов, движущиеся как единая возмущенная область. Отметим также, что мерцания на неоднородностях с $R_{\perp} = 0,6 \text{ км}$ начинались на 1—3 мин раньше, чем на неоднородностях с $R_{\perp} = 1,9 \text{ км}$, оканчивались они также на 2—4 мин раньше. Этот факт согласуется с результатами наклонного просвечивания ионосферы [8] и свидетельствует о значительной роли диффузии в релаксации неоднородностей.

Оценим флюктуации электронной концентрации в возмущенной области, воспользовавшись выражением для флюктуаций квадрата амплитуды сигнала [6]:

$$F = \left\langle \left(\frac{\Delta I}{I} \right)^2 \right\rangle = 2\pi^{5/2} \Gamma \left(\frac{4-p}{2} \right) \left(\sin \frac{p\pi}{4} \right) \frac{f_0^4 F_2}{f^2 c^3} (\delta N)^2 R_{\parallel} \Delta z, \quad (2)$$

где p — показатель степени спектра флюктуаций электронной концентрации (предполагается, что спектр степенной $\Phi_N(R_{\perp}) \sim R_{\perp}^p$), $\delta N = \Delta N/N$ — относительные флюктуации концентрации, $f_0 F_2$ — критическая частота F -слоя, Δz — толщина слоя с неоднородностями, c — скорость света.

Используя данные 1976 года на 240 МГц, из (2) получаем $\delta N = 2,6 \cdot 10^{-3}$. В 1977 году, когда нагрев производился радиоизлучением большей мощности, значение δN достигало $4 \cdot 10^{-3}$ (по данным на частоте 290 МГц). Для оценки были взяты $R_{\parallel} \sim 5 \text{ км}$, $\Delta z \sim 50 \text{ км}$, $p = 3$.

В заключение отметим, что при нагреве ионосферы возрастание индекса флюктуаций на высоких частотах (240—290 МГц) составляет не менее 5—10 раз, в то время как на низкой частоте (25 МГц) эта величина значительно меньше (2—4 раза по наблюдениям в Π_2). Это различие свидетельствует о более пологом спектре искусственных неоднородностей по сравнению с естественными.

Авторы выражают благодарность за ценные замечания при обсуждении работы Н. А. Митякову, Л. М. Ерухимову и за помощь в проведении эксперимента Л. В. Гришкевичу, Г. П. Комракову и Ю. В. Токареву.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Rubenach, J. Geophys. Res., 78, 6804 (1973).
2. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., УФН, 113, 732 (1974).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., Изв вузов — Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).
4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., Изв вузов — Радиофизика, 19, № 12, 1902 (1976).

5. Л. М. Е р у х и м о в, В. А. Рыжов, Геомагнетизм и аэрономия, 8, № 4, 657 (1968).
6. Г. Г. Гетманцев, Л. М. Е р у х и м о в, Э. Е. М и т я к о в а и др., Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 4, 505 (1976).
7. В. И. Татарский, Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. Л. М. Е р у х и м о в, Э. Е. М и т я к о в а, Е. Н. М я с н и к о в и др., Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1814 (1977).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 мая 1978 г.

OBSERVATIONS OF DISCRETE RADIO SOURCE CASSIOPEIA-A SCINTILLATIONS
BY ARTIFICIAL INHOMOGENEOUS IONOSPHERE AT THE FREQUENCIES
OF 25, 240 AND 290 MHz

*V. V. Belikovich, E. A. Benediktov, I. V. Berezin, L. A. Dobrushskii, V. A. Razin,
A. I. Teplykh, A. V. Tolmacheva, A. M. Tomchinskii, P. B. Shavin*

The observational data on discrete radio source Cassiopeia-A scintillations by artificial ionospheric irregularities are given, as well as estimations of the electron density fluctuations in the disturbance region.

УДК 550.388.2

РАДИОШУМЫ ДЕКАМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВО ВРЕМЯ АВРОРАЛЬНОЙ СУББУРИ В ПОГЛОЩЕНИИ

Д. В. Благовещенский, В. И. Дегтярев

Исследовано поведение уровней радиошума в диапазоне частот 8,0—25,5 МГц за периоды развития авроральных суббури. Перед бухтами аврорального поглощения обнаружен эффект возрастания уровней шумов, по параметрам которого возможно предсказывать начало активной фазы суббури, ее интенсивность и продолжительность.

Воздействие ионосферных возмущений на уровни радиошумов декаметрового диапазона в зоне авроральной активности проявляется прежде всего в существенном поглощении радиошумов во время возмущений [1, 2]. Однако в некоторые периоды магнитно-ионосферной активности наблюдаются случаи аномального повышения интенсивности радиошума [3, 4]. Это увеличение может быть связано либо с улучшением условий прохождения «шумовых» радиоволн от различных источников, либо, скорее всего, с генерацией аврорального шума самой ионосферой в период усиления активности ионосферы.

Последнее предположение заслуживает особого внимания, так как авроральный радиошум, генерируемый в ионосфере, может нести информацию о состоянии ионосферы в области генерации, и, таким образом, в перспективе метод регистрации аномального радиошума декаметрового диапазона может стать одним из методов диагностики ионосферной плазмы.

Как известно [5—7], авроральный радиошум возникает во время высыпаний в верхнюю атмосферу потоков авроральных частиц, однако не установлено четких корреляционных связей интенсивности аврорального радиошума с интенсивностью и спектром потоков авроральных частиц.

Целью настоящей работы являлось установление связи аномального радиошума с характеристиками ионосферы и с параметрами потоков авроральных частиц, а также развитие предположения [4] о природе аномального радиошума декаметрового диапазона перед поглощением как результата регистрации радиоизлучения авроральной ионосферы.

Регистрация радиошумовой компоненты осуществлялась с помощью приемников типа Р-250М2 в диапазоне частот 8,0—25,5 МГц аналогично [4]. Антенны *V*-образные, с длиной луча 46 м, ориентированы на запад и восток вдоль зоны полярных сияний. Время наблюдений — февраль — апрель 1976 г.

Одновременно в пункте приема фиксировалась магнитно-ионосферная обстановка на стандартном комплексе (вертикальное зондирование ионосферы, магнитометры, риометры). В частности, определялись предельные частоты спорадических E_s -слоев $f_0(E_s)$, вероятность полного поглощения $P(B)$ и вероятность экранирующих E_s -слоев $P(E_s)$.

Представляет интерес рассмотреть последовательное изменение

уровней радиошума в период развития индивидуального магнитно-ионосферного возмущения, а именно авроральной суббури.

Наличие авроральных суббурь обнаруживалось по записям поглощения космического радиошума на риометрах ($f = 32$ и 40 МГц). Пример риометрической записи во время суббури дан в верхней части рис. 1. Резкий спад уровня записи и постепенное его восстановление характеризует соответственно рост и постепенное снижение аврорального поглощения. Начало увеличения поглощения или начало активной фазы суббури принято за момент $T = 0$ (рис. 1). Время $\Delta t_{\text{сп}}$ определяет длительность нарастания поглощения от нулевого уровня ($T = 0$) до максимума.

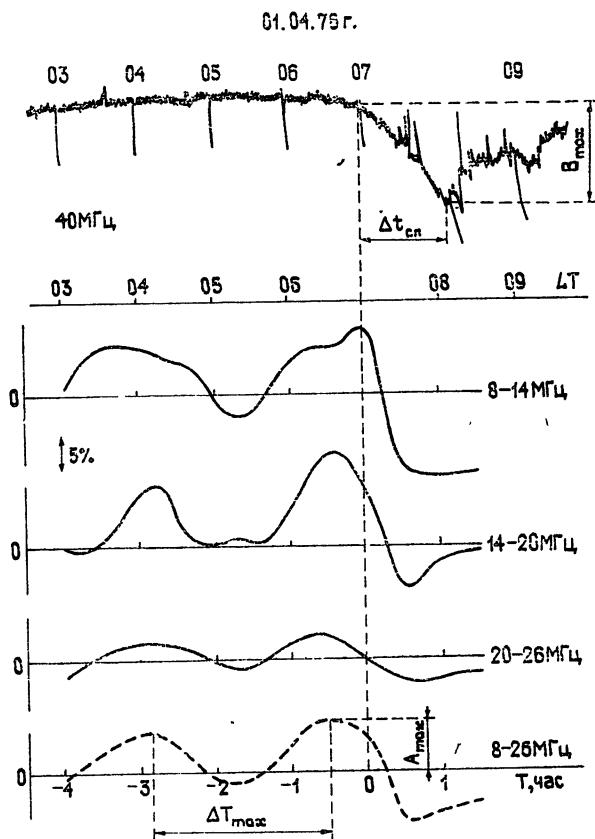


Рис. 1.

За период наблюдений было отобрано 17 изолированных суббурь. Отличительной их особенностью является невозмущенная запись уровня космического радиошума за 3—4 часа перед началом поглощения. Из семнадцати случаев пять сгруппированы вблизи полуночи (21—23 LT) и пять в утреннем секторе (06—09 LT). При этом из общего объема измерений КВ радиошумов выбирались те записи, которые соответствовали указанным периодам возникновения авроральных суббурь.

На рис. 1 представлены данные уровней радиошумов $A_{\text{ш}}$ в процентах по отношению к спокойному периоду (нулевой уровень). Можно видеть два последовательных максимума A_{max} , предваряющих активную фазу суббури. Аномальное увеличение радиошума проявляется практически одинаково во всем исследуемом диапазоне частот. Временной интервал между максимумами обозначен ΔT_{max} .

Усредненные по всем частотам КВ диапазона уровни шумов широтного (вдоль зоны полярных сияний) направления ($A_{ш}$) показаны на рис. 2. Анализ данных обнаружил следующие характерные закономерности.

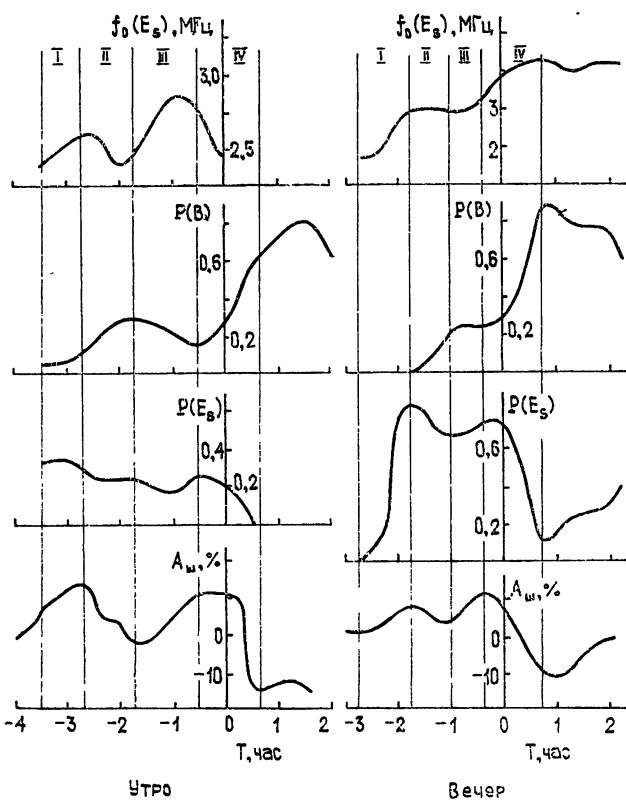


Рис. 2.

За 2,5—3,0 часа перед бухтой поглощения фиксируется первый подъем уровня шума. Его длительность достигает 1—1,5 часа.

Второе повышение отмечается непосредственно перед бухтой поглощения. Максимум его регистрируется за 30—45 мин перед бухтой, продолжительность составляет 0,5—1,5 часа. (Этот результат хорошо соглашается с ранее полученными данными [3].)

В зависимости от частоты и направления антенны увеличение интенсивности шума может достигать 50% от спокойного уровня. В среднем оно несколько больше 10%.

Величины максимумов зависят, по-видимому, от времени протекания суббури. В вечернем секторе первый максимум меньше второго или не проявляется совсем. В утреннем и ночном секторах оба максимума по величине примерно одинаковы. Соотношение между максимумами примерно одно и то же во всем декаметровом диапазоне волн.

Сопоставление вариаций интенсивности шума с ионосферными данными показывает, что на определенных этапах развития суббури возникают четкие закономерности изменения параметров ионосферы и уровней радиошумов (рис. 2). Эти этапы условно разграничены вертикальными линиями и обозначены цифрами I—IV. Ионосферные характеристики на рис. 2 являются результатом усреднения данных за периоды эксперимента, относящиеся ко всем рассматриваемым суббурям.

На первом этапе происходит увеличение интенсивности авроральных потоков. Это приводит к росту f_0E_s и подъему уровня КВ шумов. Спустя некоторое время ($\sim 0,5$ —1 час) наблюдается увеличение ионизации области D , что приводит к увеличению поглощения $P(B)$ (этап II) и спаду уровня радиошумов. Дальнейший рост интенсивности потоков (этап III) приводит к новому подъему f_0E_s и уровня шумов. Следующее за этим резкое повышение поглощения в D -области за счет ужесточения потоков (этап IV) уменьшает уровень радиошумов ниже нулевого. В активную фазу суббури ($T = 0,5 \div 1$ час) значения интенсивности и жесткости потоков максимальны. Поглощение шумов достигает наибольшей величины. По окончании суббури происходит восстановление параметров до исходных значений.

Из рис. 2 можно также видеть корреляцию между $A_{\text{ш}}$ и $P(E_s)$. Наряду с изменениями f_0E_s это свидетельствует об определенной роли области E ионосферы в управлении поведением характеристик радиошумов.

Рассмотренные взаимосвязи параметров приводят к заключению, что причиной повышенного уровня шумов являются процессы в ионосфере. Вероятнее всего перед активной фазой суббури происходит генерация шумов в области E ионосферы за счет высыпания авроральных потоков. В пользу данной точки зрения свидетельствуют следующие факты.

На рис. 3 а представлена эмпирическая связь между параметрами ΔT_{max} и $\Delta t_{\text{сп}}$ (см. рис. 1). Зависимость достаточно близка к линейной, иными словами, продолжительность ионосферного возмущения определяет степень заблаговременности эффектов подъема уровней шумов перед активной фазой суббури.

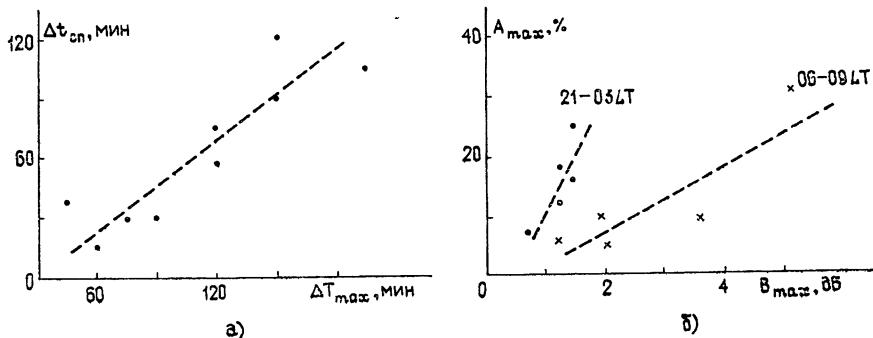


Рис. 3.

Рис. 3 б характеризует тенденцию увеличения уровней радиошумов A_{max} с ростом глубины бухты поглощения B_{max} . Чем интенсивнее потоки, ответственные за поглощение, тем больший подъем уровней шумов следует ожидать. Очевидно, верно и обратное утверждение: амплитуда шумовой компоненты перед бухтой поглощения характеризует степень ее глубины.

Итак, данные рис. 3 отражают взаимосвязь между параметрами бухты поглощения, которые определяются характером потоков [8, 9], и показателями аномального увеличения радиошума.

Известно [9], что суббуря в поглощении зарождается вблизи полуночного меридиана и затем область поглощения распространяется в утренний и вечерний сектор. Если область поглощения космического радиошума одновременно генерирует аномальный радиошум декаметрового диапазона, то можно ожидать эффект движения области погло-

щения при приеме шума. Тогда, в случае регистрации бухты поглощения и аномального радиошума в утреннем секторе, увеличение радиошумового уровня будет отмечено вначале на западном направлении, а затем, через некоторое время, на восточном направлении. Настоящим экспериментом этот эффект подтверждается.

Появление максимумов шума было бы допустимо объяснить улучшенным прохождением шумов от удаленных источников за счет дополнительной ионизации области E (этап II и IV на рис. 2). Оценки показывают, что в этом случае увеличение интенсивности шумов (при самых благоприятных условиях) не превышает единиц процентов от спокойного непоглощенного уровня. Следовательно, данный механизм не является главной причиной аномального увеличения шумов перед бухтой поглощения. Таким образом, экспериментальные факты убедительно свидетельствуют в пользу предположения о природе аномального повышения уровней радиошума перед поглощением как результата генерации в ионосфере аврорального радиошума.

Рассмотрим взаимосвязь между интенсивностью шума и потоками частиц, ответственных за его генерацию. Как было показано в работе [10], плотность потока тормозного радиоизлучения, генерируемого в ионосфере при высыпании потоков авроральных электронов, пропорциональна интенсивности потока электронов, $A_{\text{ш}} \propto J(E)$.

Связь между авроральным поглощением и интенсивностью потока авроральных электронов можно представить в виде [11]

$$B = kJ^{1/2},$$

где B — поглощение в децибелах, J — плотность потока электронов с энергией $E > 40$ кэВ в $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{стера}^{-1}$, k — эмпирический коэффициент, зависящий от условий освещенности ионосферы и численно равный $4 \cdot 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-3}$ соответственно для дня и ночи.

С учетом сказанного и данных рис. 3 б связь между амплитудой шума и интенсивностью потока электронов с энергией более 40 кэВ определяется выражением

$$A_{\text{ш}} (\%) = (2 \div 6) \cdot 10^{-5} J (\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{стера}^{-1}).$$

Большой разброс коэффициента пропорциональности вполне закономерен, так как здесь не были учтены объем излучающего (и поглощающего) слоя и малоэнергичная часть спектра высыпающихся электронов.

В заключение работы следует подчеркнуть, что по рассмотренным параметрам изменения уровней декаметрового радиошума можно прогнозировать начало активной фазы суббури в поглощении, ее продолжительность и, до некоторой степени, интенсивность.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Herman, Arctic Commis, ch. 12, 127 (1964).
2. В. С. Игнатьев, Труды Арктического и антарктического научно-исследовательского института, Гидрометеоиздат, Л., 288, 134 (1970).
3. I. Nishimuta, M. Ose and K. Sinnjo, J. Geomagn. and Geoelectr., 21, № 3, 1238 (1969).
4. Д. В. Благовещенский, В. И. Дегтярев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1238 (1977).
5. Н. К. Осипов, в сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, Иркутск, 19(1), 45 (1971).
6. C. D. Ellyett, J. Atm. Terr. Phys., 31, 671 (1969).
7. L. Hargragg, Planet. Space Sci., 17, № 5, 869 (1969).

8. О. И. Шумилов, А. В. Франк-Каменецкий, Геомагнетизм и аэрономия, 17, № 3, 543 (1977).
9. В. М. Дриацик, Природа аномального поглощения космического радиоизлучения в нижней ионосфере высоких широт, Гидрометеоиздат, Л., 1974.
10. В. И. Дегтярев, В. А. Курлов, А. А. Чернов, в сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, изд. Наука, М., 39, 158 (1976).
11. D. H. Eddy, Can. J. Phys., 42, № 12, 2411 (1964).

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

Поступила в редакцию
24 января 1978 г.,
после доработки
21 сентября 1978 г.

RADIO NOISE OF THE DECAMETER RANGE DURING AURORAL SUBSTORM

D. V. Blagoveshchenskij, V. I. Degtyarev

The behaviour of the radio noise levels in the frequency range 8.0—25.5 MHz have been studied for the periods of auroral substorm development. Before bays of the auroral absorption an effect is detected of the noise level increase the parameters of which may predict the beginning of the active phase of the substorm, its intensity and duration.

УДК 538.56 : 519.25

О СПЕКТРЕ МОДУЛЯЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАЗВИТОЙ СИЛЬНОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

К. Комилов, Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович

Проведен анализ уравнений, описывающих стационарное состояние сильной ленгмюровской турбулентности. На основе полученных решений найдены спектры модуляционных и ленгмюровских колебаний в коротко-

волновой $\left(k > k_*, k_* = \frac{k_d}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, k_d = \frac{\omega_{pe}}{v_{Te}} \right)$ области.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] были получены уравнения, которые описывают стационарное состояние сильной ленгмюровской турбулентности и спектры модуляционных возмущений. Анализ этих уравнений был произведен в области длинноволновых возмущений $\left(k \ll k_* = \frac{k_d}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \text{ где } k_*^{-1} \approx \approx k_0^{-1} — \text{ основной масштаб турбулентности} \right)$.

Задачей настоящей работы является систематический анализ и решение более общей задачи, включающей коротковолновые возмущения. Хотя нелинейные уравнения получены для произвольной трехмерной ленгмюровской турбулентности, здесь мы начнем анализ с простейшего случая одномерной турбулентности. Задачей общей теории является исследование всего спектра модуляционных возмущений и, в частности, с $k \gg k_0$ и $k \gg k_*$.

В дальнейшем для простоты удобно называть модуляционные возмущения с $k \ll k_*$ модуляционными возмущениями длинноволновой области (индекс «о»), а с $k \gg k_*$ — модуляционными возмущениями коротковолновой области (индекс «и») или просто коротковолновыми возмущениями. Для длинноволновых возмущений сохраняются выводы [2] о том, что их уровень в нелинейном режиме имеет порядок $\left(\frac{\delta n_e}{n_0} \right)^2 \sim \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^2$ и обеспечивает модуляционную устойчивость основного длинноволнового максимума в спектре ленгмюровских колебаний за счет нелинейного сдвига частоты ленгмюровских волн. Для коротковолновых модуляционных возмущений ниже принимается следующее: 1) оправданным является предположение о том, что доминирующим является взаимодействие коротковолновых модуляционных возмущений между собой, 2) перенормировка [3] малосущественна, что сводится к пренебрежению величинами $d_{2k',\omega'}$ во всех коэффициентах нелинейных уравнений, 3) нелинейная часть диэлектрической проницаемости $\epsilon_{k',\omega'}^N$ мала по сравнению с линейной $\epsilon_{k',\omega'}^L$. Подчеркнем, что поправка к диэлектрической проницаемости, обусловленная нелинейностью,

$\epsilon_{k, \omega}^N \sim \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}$ — порядка «дисперсии» в длинноволновой области. Когда речь идет о ленгмюровской турбулентности в коротковолновой части спектра, то $\epsilon_{k, \omega}^N$ можно пренебречь.

Таким образом, ленгмюровская турбулентность называется сильной, когда доминирующими являются модуляционные взаимодействия. В предлагаемом подходе нелинейный сдвиг частоты самосогласованно определяется из решения самих нелинейных уравнений для корреляционных функций и зависит от спектральной плотности энергии турбулентности.

В $d_{1k', \omega'}$ можно использовать приближенное соотношение

$$\tilde{\epsilon}_{k, \omega} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{3 k^2 v_{Te}^2}{\omega^3} \quad (1)$$

для расчета эффектов, возникающих как для коротковолновых, так и для длинноволновых возмущений.

Как показано в [2], в длинноволновой области на стадии насыщения модуляционных возмущений ленгмюровские колебания не испытывают нелинейного сдвига частоты. Это связано с тем, что обычный нелинейный сдвиг частоты компенсирован дополнительным нелинейным сдвигом частоты, обвязанным модуляционным возмущениям. С другой стороны, в коротковолновой области нелинейный сдвиг частоты пренебрежимо мал. Таким образом, при подстановке (1) в $d_{1k', \omega'}$ можно считать, что спектр ленгмюровских колебаний не имеет нелинейного сдвига частоты. Тогда интегрирование в $d_{1k', \omega'}$ распространяется на всю область существования колебаний. В действительности, как показано в [4], коротковолновые модуляционные возмущения можно рассматривать независимо от длинноволновых, причем перенормировка обрывает спектр коротковолновых ленгмюровских колебаний при $k > k_*$. Однако интеграл по спектру коротковолновых колебаний порядка полной энергии ленгмюровских колебаний. Таким образом, учет перенормировки при строгих расчетах необходим, однако, пренебрегая им и распространяя интеграл по спектру ленгмюровских колебаний на всю область волновых чисел, мы получим правильные зависимости нелинейных коэффициентов от полной энергии турбулентности. Большая точность в некотором смысле иллюзорна, так как сами спектры получаются сшивкой в различных областях волновых чисел и определяются с точностью до константы порядка единицы.

Учет перенормировки будет предметом отдельного рассмотрения. Здесь же перенормировкой в коротковолновой области пренебрегается.

Следуя основным идеям статистической теории ленгмюровского конденсата [1], получим уравнения для корреляционных функций модуляционных возмущений в коротковолновой области. Для этого положим, что

$$I_k = \begin{cases} I_k^0, & k \ll k_* \\ I_k^l, & k \gg k_* \end{cases}, \quad w_{k'} = \begin{cases} w_{k'}^0, & k' \ll k_* \\ w_{k'}^l, & k' \gg k_* \end{cases}, \quad (2)$$

$$k = \{k, \omega\}, \quad k' = \{k', \omega'\},$$

где I_k^0 , $w_{k'}^0$ — соответственно части корреляционных функций ленгмюровских и модуляционных колебаний в длинноволновой области, а I_k^l и $w_{k'}^l$ — в коротковолновой.

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ МОДУЛЯЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

При получении уравнения для корреляционных функций исходным уравнением служит модель кубической нелинейности [1]:

$$\frac{ik}{4\pi} \tilde{\epsilon}_k E_k = \int S_{k, k_1, k_2} E_{k_1} E_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 + \\ + \int \sum_{k, k_1, k_2, k_3} E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3; \quad (3)$$

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k^L - \frac{8\pi}{ik} \int \tilde{\Sigma}_{k, k_1} I_{k_1} dk_1, \quad (4)$$

где $k = \{k, \omega\}$, $k_1 = \{k_1, \omega_1\}$, ..., $dk_1 = \{dk_1 d\omega_1\}$, ..., $dk_3 = \{dk_3 d\omega_3\}$, а S_{k, k_1, k_2} и $\tilde{\Sigma}_{k, k_1, k_2, k_3}$ — матричные элементы, которые могут быть вычислены при помощи кинетического уравнения. Предполагается, что турбулентные пульсации являются продольными. Далее считается, что турбулентность никогда не становится стационарной, а все времена испытывает временные и пространственные изменения на масштабах порядка модуляционных взаимодействий, т. е. среднее от двух высокочастотных полей определяется соотношением

$$\langle E_k^T E_{k'-k}^T \rangle = I_{k, k'}, \quad (5)$$

$$k = \{k, \omega\}, \quad k' = \{k', \omega'\},$$

$I_{k, k'}$ есть корреляционная функция, имеющая определенную ширину по низкой частоте. Однако среднее от $I_{k, k'}$ по низкой частоте становится стационарным, т. е.

$$\bar{I}_{k, k'} = I_k \delta(k'), \quad (6)$$

$$k = \{k, \omega\}, \quad k' = \{k', \omega'\}.$$

Наряду с этим вводится корреляционная функция низкочастотных модуляционных полей:

$$\overline{E_{k'}^M E_{k''}^M} = w_{k'} \delta(k' + k''), \quad (7)$$

$$k'' = \{k'', \omega''\}, \quad k' = \{k', \omega'\}.$$

Корреляция низкочастотных полей с ленгмюровскими описывается как

$$\overline{E_{k'}^M I_{k, k''}} = V_{k, k'} \delta(k' + k''), \quad (8)$$

$$k = \{k, \omega\}, \quad k' = \{k', \omega'\}, \quad k'' = \{k'', \omega''\}.$$

Вводится также

$$\overline{I_{k, k'} I_{k, k''}} - \bar{I}_{k, k'} \bar{I}_{k, k''} = G_{k, k'/k_1, k''} \delta(k' + k''), \quad (9)$$

$$k_1 = \{k_1, \omega_1\}, \quad k' = \{k', \omega'\}, \quad k'' = \{k'', \omega''\}, \quad k = \{k, \omega\}.$$

Используя основные принципы, изложенные выше, можно получить интегральное уравнение для $w_{k', \omega'}$, содержащее линейные и квадратичные члены по $w_{k', \omega'}$, коэффициенты которого зависят от $I_{k, \omega}$ (подробный вывод см. в [1]):

$$(e_k^M + e_k^{N_1} + e_k^{N_2}) w_{k'}^i \approx \frac{1}{(4\pi n_0 T_e)^3 |e_{-k'}^M|^2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int \frac{\omega_{pe}^6}{k'^2 k''^2 k'''^2 v_{Te}^6 |1+d_{1k'}^l|^2 |1+d_{1k''}^l|^2} \int \frac{dk'_1}{\tilde{\epsilon}_{k_1+k''}} \times \\
 & \times \left(\frac{I_{k_1-k'+k''}^l}{\tilde{\epsilon}_{k_1+k''}} + \frac{I_{k_1}^l}{\tilde{\epsilon}_{k_1-k'+k''}} \right) \int I_{k_1}^l dk_1 \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}_{k''-k_1} \tilde{\epsilon}_{-k'-k_1}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{k''-k_1} \tilde{\epsilon}_{-k'-k_1}} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{k'''-k_1} \tilde{\epsilon}_{k''-k_1}} \right) w_{k''}^l w_{k'''}^l \delta(k' - k'' - k''') dk'' dk''' + \\
 & + \text{члены с заменой } k'' \rightarrow k'''.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь также использовано четырехмерное обозначение, т. е. $k' = \{k', \omega'\}$, $k'' = \{k'', \omega''\}$, $k''' = \{k''', \omega'''\}$, $k_1 = \{k_1, \omega_1\}$, $k'_1 = \{k'_1, \omega'_1\}$.

Выражение для $\epsilon_{k', \omega'}^M$, имеет вид (см. [1])

$$\epsilon_{k', \omega'}^M = \epsilon_{0k', \omega'}^{(l)} + (\epsilon_{0k', \omega'}^{(e)} - 1) \frac{1}{|1 + d_{2k', \omega'}^l|} \tag{11}$$

и определяет диэлектрическую проницаемость, обязанную модуляционным возмущениям, а $\epsilon_{0k', \omega'}^{(e)}$ и $\epsilon_{0k', \omega'}^{(l)}$ — соответственно линейные электронные и ионные диэлектрические проницаемости.

Выражения для $\epsilon_{k', \omega'}^N$ и $\epsilon_{k', \omega'}^S$, получены в работе [1], они довольно громоздкие, поэтому их мы здесь не приводим. Тем более, дальнейший анализ показывает, что их вклад в коротковолновой области мал по сравнению с вкладом, вносимым (11).

Уравнение (10) описывает только взаимодействия модуляционных колебаний между собой в коротковолновой области. Решая его, можно найти спектры модуляционных колебаний в коротковолновой области.

2. СПЕКТРЫ МОДУЛЯЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

Решим уравнение корреляционных функций модуляционных возмущений в коротковолновой области. В уравнение (10) входят интегралы типа $\int \frac{I_{k, \omega} dk d\omega}{(\tilde{\epsilon}_{k-k', \omega-\omega'})^2}$ и $\int \frac{I_{k, \omega} dk d\omega}{(\tilde{\epsilon}_{k-k', \omega-\omega'})^3}$. Прежде всего, приведем оценки этих интегралов в предельном случае $\omega' \ll \omega_1$, $\omega'' \ll \omega_1$, $\omega''' \ll \omega_1$, $\omega_1 \sim \omega_{pe}$, $\omega' < k' v_{Te}$, $\omega'' < k'' v_{Te}$, $\omega''' < k''' v_{Te}$, $\omega' \omega_{pe} \gg k'^2 v_{Te}^2$:

$$\frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k_1-k', \omega_1-\omega'}} \approx \frac{3}{4} \frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2}; \tag{12}$$

$$\frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k_1+k'', \omega_1+\omega''} \tilde{\epsilon}_{k_1-k', \omega_1-\omega'}} \approx \tag{13}$$

$$\approx \frac{1}{2} \frac{W_0}{n_0 T_e} \left(-\frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega' \omega''} + \frac{9}{8} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2} \frac{k''^2 v_{Te}^2}{\omega''^2} \right);$$

$$\frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k_1-k''} \tilde{\epsilon}_{\omega_1-\omega''} \tilde{\epsilon}_{k'-k_1} \tilde{\epsilon}_{\omega'-\omega_1} \tilde{\epsilon}_{k''-k_1} \tilde{\epsilon}_{\omega''-\omega_1}} \approx \frac{1}{2} \frac{W_0}{n_0 T_e} \times \\ \times \left(\frac{3}{4} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega' \omega''} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2} + \frac{3}{8} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega''^2} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2} + \frac{27}{32} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2} \frac{k''^4 v_{Te}^4}{\omega''^4} \right). \quad (14)$$

В дальнейшем вместо частоты ω' , ω'' и ω''' модуляционных возмущений удобно использовать безразмерную фазовую скорость λ , т. е.

$$\lambda = \frac{\omega'}{k' v_{Te}}, \quad \lambda_1 = \frac{\omega''}{k'' v_T}, \quad \lambda_2 = \frac{\omega'''}{k''' v_{Te}}, \quad \lambda_0^2 = \frac{W_0}{n_0 T_e}. \quad (15)$$

Пренебрежем $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k'', \omega''}^{N_2}$, что в дальнейшем будет оправдано. При подстановке (12)–(14) в (10) члены, содержащие $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega' \omega''}$ и $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega' \omega''} \frac{k'^2 v_{Te}^2}{\omega'^2}$, сокращаются, так как в знаменателе интегралов $\tilde{\epsilon}_{k', \omega'}$ входит с разными знаками k' , k'' и k''' . Отметим, что такие члены также сокращаются в линейной теории. С учетом оценок (12)–(14) уравнение (10) можно записать в виде

$$w_{k', \omega'}^i \approx \frac{81}{64} \frac{\lambda_0^4}{\left[\frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 - \lambda^2 \right)^2 \right]^2} \left(\frac{k'}{k_d} \right)^4 \times \\ \times \int \frac{\omega_{pe}^6 (\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left\{ \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \right]^2 \lambda_2^2 + \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right)^2 \right]^2 \lambda_1^2 \right\}}{k'^2 k''^2 k'''^2 v_{Te}^6 4\pi n_0 T_e \lambda_1^4 \lambda_2^4 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} \right)^2 \right]^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \right]^2} \times \quad (16)$$

$$\times w_{k'', \omega''}^i w_{k''', \omega'''}^i \delta(k' - k'' - k''') \delta(\omega' - \omega'' - \omega''') dk'' dk''' d\omega'' d\omega'''.$$

В дальнейшем индекс «*i*» опускается.

Будем иметь в виду, что взаимодействия модуляционных колебаний между собой рассматриваются лишь в коротковолновой области.

Умножая уравнение (16) на $\frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te} 4\pi n_0 T_e}$ и введя обозначение

$$\frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te} 4\pi n_0 T_e} = v_\lambda, \quad (17)$$

получим

$$v_\lambda \approx \frac{81}{64} \frac{\lambda_0^4}{\left[\frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 - \lambda^2 \right)^2 \right]^2} \int \frac{(\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^4 \lambda_2^4} \times \\ \times \left\{ \frac{\lambda_2^2}{\left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \right]^2} + \frac{\lambda_1^2}{\left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \right]^2} \right\} \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda - \lambda_2| |\lambda_1 - \lambda|} v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (18)$$

Уравнение (18) представляет собой довольно сложное интегральное уравнение. Однако в наиболее интересных физических случаях мож-

но найти его приближенное решение. Допустим, что $\lambda \gg \lambda_*$, где $\lambda_* \approx \lambda_0^{1/2} (m_e/m_i)^{1/4}$, $\lambda_* < \lambda_0$ и $k' \ll k_d \lambda$. Из структуры уравнения (18) видно, что основная энергия колебаний приходится на λ_1 и λ_2 порядка λ_* . Но нас интересует случай $\lambda \gg \lambda_*$, поэтому в интегралах (18) λ_1 и λ_2 малы по сравнению с λ , и ими можно пренебречь. Величина λ_* связана с инкрементом модуляционной неустойчивости $\gamma = k v_{Te} \lambda_*$. Отсюда λ_* есть безразмерная фазовая скорость модуляционных колебаний, при которой инкремент модуляционной неустойчивости $\gamma \ll \gamma_{\max}$. На основе проведенного рассуждения приближенное решение уравнения (18) можно записать в виде

$$v_\lambda \approx c_1 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}, \quad (19)$$

где c_1 — константа, которую можно определить из интегралов, входящих в (18), т. е.

$$c_1 \approx \frac{56}{9 \ln \Lambda} \frac{\lambda_*^7}{\lambda_0^4}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{W_0/n_0 T_e}{m_e/m_i} \right)^{1/4}. \quad (20)$$

Предположим, что $\lambda \ll \lambda_* \ll \lambda_0$. В этом случае в интегралах (18) можно пренебречь λ по сравнению с λ_1 и λ_2 . Теперь приближенное решение (18) будет

$$v_\lambda \approx c_2 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \lambda^4, \quad (21)$$

где постоянная c_2 также определяется из интегралов (18) и равна

$$c_2 = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \lambda_0^4. \quad (22)$$

Из полученных решений следует, что при $\lambda \ll \lambda_*$ спектр модуляционных колебаний растет, как λ^4 , при $\lambda \gg \lambda_*$ падает, как $1/\lambda^4$, и имеет максимум при $\lambda = \lambda_*$. Таким образом, общее решение уравнения (18) можно экстраполировать формулой

$$v_\lambda \approx \frac{56}{9 \ln \Lambda} \frac{\lambda_*^3 \lambda^4}{\lambda_*^4 + \frac{\lambda^8}{\lambda_*^4}}. \quad (23)$$

Зная спектр модуляционных колебаний, можно оценить величины $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$, которые в безразмерной форме приобретают следующий вид:

$$\epsilon_{k', \omega'}^{N_1} \approx \epsilon_{k', \omega'}^{N_2} \approx -\frac{9}{8} \epsilon_{k', \omega'}^M \lambda_0^2 \int \frac{dk''}{k''} \frac{v_{\lambda_1} d\lambda_1}{\lambda^4}. \quad (24)$$

Используя теперь спектр модуляционных колебаний (23), получим, что

$$\epsilon_{k', \omega'}^{N_1} \approx \epsilon_{k', \omega'}^{N_2} \approx -\frac{W_0}{n_0 T_e} \epsilon_{k', \omega'}^M. \quad (25)$$

Отсюда видно, что величины $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$ малы по сравнению с $\epsilon_{k', \omega'}^M$, в коротковолновой области, и ими действительно можно пренебречь.

Зная спектр модуляционных колебаний, можно оценить энергию модуляционных возмущений в коротковолновой области при выполнении условий $\lambda_0 \gg \lambda \gg \lambda_*$ и $k' \ll k_d \ll k_d \lambda_0$:

$$\frac{w}{n_0 T_e} = \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2}. \quad (26)$$

Согласно [2] на стадии насыщения модуляционных колебаний

$$\frac{w}{n_0 T_e} \approx \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^2. \quad (27)$$

Сравнивая (26) и (27), находим, что

$$\sqrt{\frac{W_0}{n_0 T_e}} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \frac{m_e}{m_i}}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь область $k' > k_d \lambda$. Опять пренебрежем $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$. В дальнейшем покажем, что они малы. Если $\omega' \ll k'^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}$, тогда интегралы, входящие в (10), имеют следующие оценки:

$$\frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k_1 - k', \omega_1 - \omega'}} \approx -\frac{2}{3} \frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{\omega_{pe}^2}{k'^2 v_{Te}^2}; \quad (29)$$

$$\frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k''' - k_1, \omega''' - \omega_1} \tilde{\epsilon}_{-k' - k_1, -\omega' - \omega_1}} \approx \frac{2}{9} \frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{\omega_{pe}^4}{k'^2 k''^2 v_{Te}^4}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi n_0 T_e} \int \frac{I_{k_1, \omega_1} dk_1 d\omega_1}{\tilde{\epsilon}_{k' - k_1, \omega' - \omega_1} \tilde{\epsilon}_{k'' - k_1, \omega'' - \omega_1} \tilde{\epsilon}_{k''' - k_1, \omega''' - \omega_1}} &\approx \\ &\approx \frac{1}{54} \frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{\omega_{pe}^6}{k'^2 k''^2 k'''^2 v_{Te}^6}. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь уравнение (10) в безразмерных переменных (15) принимает вид

$$\begin{aligned} v_\lambda &\approx \frac{4}{81} \frac{\lambda_0^4 \lambda^4}{\left[\frac{m_e}{m_i} \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{k_d}{k'} \right)^2 \lambda_0^2 \right) - \lambda^2 \right]^2} \left(\frac{k_d}{k'} \right)^8 \times \\ &\times \int \frac{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda)^2]}{|\lambda - \lambda_2|^5 |\lambda_1 - \lambda|^5} |\lambda_1 - \lambda_2|^5 \times \\ &\times \left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda)^2}{\left| 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{k_d}{k'} \right)^2 \lambda_0^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda)^2} \right|^2} + \frac{(\lambda - \lambda_2)^2}{\left| 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{k_d}{k'} \right)^2 \lambda_0^2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda - \lambda_2)^2} \right|^2} \right\} \times \\ &\times v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Если $k'^2 \ll k_d^2 (W_0/n_0 T_e)$ и $\lambda^2 \ll \lambda_0 \sqrt{m_e/m_i} \approx \lambda_*^2$, то уравнение (32) можно привести к виду

$$\begin{aligned} v_\lambda &\approx \frac{1}{4} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \frac{\lambda^4}{\lambda_0^4} \int \frac{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda)^2] |\lambda_1 - \lambda|}{|\lambda - \lambda_2|^5 |\lambda_1 - \lambda|^5} \times \\ &\times [(\lambda_1 - \lambda)^6 + (\lambda - \lambda_2)^6] v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Предположим, что $k' > k_d \lambda$ и $k' \gg \frac{\lambda^2}{\lambda_*} k_d$, $k' \ll k_d \lambda_0$. В этом случае уравнение (32) принимает следующий приближенный вид:

$$w_{\lambda, k'} \approx \frac{1}{9} \int \frac{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda)^2] ((\lambda_1 - \lambda)^6 + (\lambda - \lambda_2)^6)}{|\lambda - \lambda_2| |\lambda_1 - \lambda| |\lambda_1 - \lambda_2|^7} \times \\ \times w_{\lambda_1, k''} w_{\lambda_2, k'''} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (34)$$

где

$$w_{\lambda, k'} = \left(\frac{k_d}{k'} \right)^4 \frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te}} \frac{w_{k', \omega'}}{4\pi n_0 T_e} = v_\lambda \left(\frac{k_d}{k'} \right)^4. \quad (35)$$

В данном случае основной вклад в интегралы в (34) получается вблизи верхнего предела, т. е. на $\lambda_{\max} = k'/k_d$. Отсюда решение уравнения (34) будет следующее:

$$w_{\lambda, k'} = \frac{k_d}{k'}, \quad (36)$$

т. е. не зависит от λ . Следовательно, для v_λ с учетом (36) получим

$$v_\lambda = \left(\frac{k'}{k_d} \right)^3, \quad (37)$$

что также не зависит от λ . Следует отметить, что этот спектр справедлив, когда все три корреляционные функции w_λ , w_{λ_1} и w_{λ_2} , входящие в уравнение (34), находятся в области $k'/k_d < \lambda^2/\lambda_* < (\lambda^2/\lambda)(\lambda_*/\lambda)$.

Представляет интерес случай, когда w_λ находится в области $k' > k_d \lambda_*$, $k' > k_d \lambda$, $k'/k_d < \lambda^2/\lambda_*$, а функции w_{λ_1} и w_{λ_2} — в области $k'/k_d < \lambda^2/\lambda_* < \lambda^3/\lambda^2$. В этом случае для нахождения спектра модуляционных колебаний можно использовать уравнение (33), но в качестве значений v_{λ_1} и v_{λ_2} под интегралом нужно использовать спектр (37). Поскольку подынтегральные выражения существенны вблизи верхнего предела $\lambda_{\max} = k'/k_d$, то оценки приводят к результату

$$v_\lambda \approx \frac{\lambda^4}{\lambda_*^8} \left(\frac{k'}{k_d} \right)^7. \quad (38)$$

На линии $k'/k_d = \lambda_*$ это решение переходит в (23) при $\lambda < \lambda_*$.

Полученные решения (37) и (38) можно экстраполировать формулой

$$v_\lambda \approx \frac{\lambda^4 (k'/k_d)^3}{\lambda_*^8 (k_d/k')^4 + \lambda^4}. \quad (39)$$

Оценим энергию модуляционных колебаний, сосредоточенных в этой области:

$$\frac{w}{n_0 T_e} \approx \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2}. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь случай $k' < k_d \lambda$, $k' < k_d \lambda_0$, но $\lambda > \lambda_*$ и $\lambda > \lambda_0$. В этом случае из уравнения (18) получим

$$v_\lambda \approx \frac{9}{16 \lambda^4} \int \frac{(\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2) |\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda - \lambda_2| |\lambda_2 - \lambda|} \left\{ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^4} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^4} \right\} v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (41)$$

Оценки показывают, что вклад в интегралы в (41) получаем вблизи нижнего предела. Поэтому при интегрировании по λ необходимо положить $\lambda_{\min} = k'/k_d$. Таким образом, решение уравнения (41) будет

$$v_\lambda \approx \frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{k'}{k_d} \right)^7. \quad (42)$$

На линии $\lambda = k'/k_d$ это решение переходит в (37), а при $\lambda_* = k'/k_d$ — в (23), когда $\lambda > \lambda_*$. Энергия модуляционных колебаний в этой области

$$\frac{w}{n_0 T_e} \approx \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^3. \quad (43)$$

Переходим к области $k' > k_d \lambda_0$. В этом случае уравнение (32) принимает вид

$$w_{\lambda, k'} \approx \frac{4}{81} \frac{\lambda_0^4 \lambda^4}{\left(\frac{m_e}{m_i} - \lambda^2 \right)^2} \int \frac{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda)^2]}{|\lambda_1 - \lambda_2|^{11}} \times$$

$$\times |\lambda - \lambda_2|^3 |\lambda_1 - \lambda|^3 [(\lambda_1 - \lambda)^2 + (\lambda - \lambda_2)^2] w_{\lambda_1, k''} w_{\lambda_2, k''} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

где

$$w_{\lambda, k'} \approx \left(\frac{k_d}{k'} \right) v_\lambda. \quad (45)$$

Если $\lambda < \sqrt{m_e/m_i}$, то решение уравнения (44) совпадает с (38). Предположим, что $\lambda > \sqrt{m_e/m_i}$. В этом случае интегрирование (44) существенно вблизи верхнего предела, т. е. $\lambda_{\max} = k'/k_d$. Решение уравнения (44) будем искать в виде $w_\lambda = \text{const} = c$. Оценки дают

$$w_{\lambda, k'} \approx \frac{1}{\lambda_0^4} \left(\frac{k_d}{k'} \right), \quad c = \frac{1}{\lambda_0^4 \lambda_{\max}},$$

$$v_\lambda \approx \frac{1}{\lambda_0^4} \left(\frac{k'}{k_d} \right)^7.$$

При $k'/k_d = \lambda_0$ это решение переходит в (37). Величина энергии модуляционных колебаний в этой области

$$\frac{w}{n_0 T_e} = \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^3. \quad (47)$$

Наконец, рассмотрим случай $k' < k_d \lambda$, $k' > k_d \lambda_0$, $\lambda \gg \sqrt{m_e/m_i}$ и $\lambda_0^2/\lambda^2 \ll 1$. В этом случае уравнение (18) переходит в

$$v_\lambda \approx \frac{81}{64} \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \int \frac{(\lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1^4 \lambda_2^4 |\lambda - \lambda_2| |\lambda_1 - \lambda|} v_{\lambda_1} v_{\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (48)$$

Оценки показывают, что вклад в интеграл (48) существен на нижнем пределе, т. е. на $\lambda_{\min} = k'/k_d$. Будем искать решение (48) в виде $v_\lambda = c/\lambda_4$, где c — константа, которая определяется из интегралов (48). Оценивая интегралы (48), получим $c = (1/\lambda_0^4)(k'/k_d)^{11}$. Таким образом,

$$v_\lambda \approx \frac{1}{\lambda_0^4 \lambda^4} \left(\frac{k'}{k_d} \right)^{11}. \quad (49)$$

При $\lambda = k'/k_d$ спектр (49) переходит в (46), а при $\lambda_0 = k'/k_d$ — в (42). Оценим энергию модуляционных колебаний:

$$\frac{w}{n_0 T_e} = \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^3. \quad (50)$$

Проведенный анализ показывает, что спектры модуляционных колебаний имеют сложный характер.

Оценим теперь величины $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$, при $\omega' \ll (k'^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe})$ и $k' \gg k_d \lambda$. Подставляя приближенные оценки (29) — (31) в выражения $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$ (см. [1]) и переходя к безразмерным переменным (15), получим

$$\epsilon_{k', \omega'}^{N_1} \approx \epsilon_{k', \omega'}^{N_2} \approx - \frac{\epsilon_{k', \omega'}'^4}{108} \lambda_0^2 \int \frac{dk''}{k''} \frac{[k''^2 (k'^2 + 3k''^2) + k''^4]}{k''^4} v_\lambda d\lambda. \quad (51)$$

С учетом (38) запишем

$$\epsilon_{k', \omega'}^{N_1} \approx \epsilon_{k', \omega'}^{N_2} \approx - \epsilon_{k', \omega'}'^4 \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2. \quad (52)$$

Таким образом, и в данном случае величины $\epsilon_{k', \omega'}^{N_1}$ и $\epsilon_{k', \omega'}^{N_2}$ также малы по сравнению с $\epsilon_{k', \omega'}'^4$.

Отметим, что найденные здесь спектры модуляционных колебаний дают возможность определить спектры ленгмюровских колебаний в коротковолновой области. Однако прежде чем приступить к решению этого вопроса, необходимо получить уравнение для корреляционных функций ленгмюровских колебаний.

3. СПЕКТРЫ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

Уравнение для корреляционных функций ленгмюровских колебаний на основе модели кубической нелинейности также получено в работе [1]. Это уравнение в коротковолновой части спектра имеет вид

$$I_k^i = \int \frac{\omega_{pe}^2}{|k'|^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k'}^i dk'}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k'}^i|^2 \tilde{\epsilon}_k} \left(\frac{I_k^i}{\tilde{\epsilon}_k} + \frac{I_{k-k'}^i}{\tilde{\epsilon}_k} \right) + \\ + \int \frac{\omega_{pe}^2}{|k'|^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k'}^i dk'}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k'}^i|^2 \tilde{\epsilon}_k} \frac{I_{k-k'}^0}{\tilde{\epsilon}_k}, \quad (53)$$

$$k = \{ k, \omega \}, \quad k' = \{ k', \omega' \}, \quad dk' = \{ dk' d\omega' \}.$$

Уравнение (53) позволяет определить спектры ленгмюровских колебаний в коротковолновой области, если известны спектры модуляционных возмущений.

Используя полученные спектры модуляционных колебаний, находим спектры ленгмюровских колебаний в коротковолновой области. Для

этого можно использовать формулу (53), записав ее в более удобной форме:

$$\tilde{\epsilon}_{k, \omega} I_{k, \omega}^i = \left(\tilde{\epsilon}_{k, \omega} - \int \frac{\omega_{pe}^2}{k'^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k', \omega}^i dk' d\omega'}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k', \omega'}^i|^2 \tilde{\epsilon}_{k-k', \omega-\omega'} \tilde{\epsilon}_{k, \omega}} \right) I_{k, \omega}^i = \\ = \int \frac{\omega_{pe}^2}{k'^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k', \omega}^i dk' d\omega'}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k', \omega'}^i|^2} \frac{I_{k-k', \omega-\omega'}^0}{\tilde{\epsilon}_{k, \omega}}, \quad (54)$$

где

$$\tilde{\epsilon}_{k, \omega} = \tilde{\epsilon}_{k, \omega} - \int \frac{\omega_{pe}^2}{k'^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k', \omega}^i dk' d\omega'}{|1 + d_{1k', \omega'}^i|^2 \tilde{\epsilon}_{k-k', \omega-\omega'}}. \quad (55)$$

Уравнение (54) по структуре совпадает с известным [5, 6] уравнением для корреляционных функций в турбулентной плазме. Аналогичные [5] расчеты показывают, что в знаменателе правой части (54) вместо $\tilde{\epsilon}_{k, \omega}$ возникает $\tilde{\epsilon}_{k, \omega}$. Чтобы привести уравнение (54) к окончательному виду, произведем еще замену $k' \rightarrow k + k''$. В результате имеем

$$I_{k, \omega}^i = \int \frac{\omega_{pe}^2}{(k+k'')^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k+k'', \omega-\omega''}^i I_{k'', \omega''}^0 dk'' d\omega''}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k+k'', \omega-\omega''}^i|^2 |\tilde{\epsilon}_{k, \omega}|^2}, \quad (56)$$

где

$$\omega'' = \omega_{pe} + \Delta\omega^M + \Delta\omega^N, \quad (57)$$

$\Delta\omega^M$ — нелинейный сдвиг частоты, обвязанный модуляционным возмущениям [2]; он либо порядка $\Delta\omega^N$ (обычный нелинейный сдвиг частоты), либо компенсируется ею. В уравнении (56) волновое число k'' мало по сравнению с волновым числом ленгмюровских колебаний k , и им можно пренебречь, а частота ω'' , которая может быть положительной и отрицательной, согласно (57) порядка ω_{pe} . Таким образом, уравнение (56) можно записать в виде

$$I_{k, \omega}^i = \int \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k, \omega-\omega''}^i I_{k'', \omega''}^0 dk'' d\omega''}{4\pi n_0 T_e |1 + d_{1k, \omega-\omega''}^i|^2 |\tilde{\epsilon}_{k, \omega}|^2}. \quad (58)$$

Поскольку частота ω , входящая в уравнение (58), может быть положительной — $\omega \sim \omega_{pe}$ — и отрицательной — $\omega \sim -\omega_{pe}$, а $\omega_1 = \omega - \omega_{pe}$, то, интегрируя это уравнение как по положительным, так и по отрицательным частотам, а также по волновым числам, получим

$$I_{k, \omega}^i = I_{k, \omega_1 + \omega_{pe}}^i \approx \frac{\omega_{pe}^2 W_0}{2k^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k, \omega_1}^i}{n_0 T_e |1 + (k^2 v_{Te}^2 / \omega_1^2) \lambda_0^2|^2 |\tilde{\epsilon}_{k, \omega_1 + \omega_{pe}}|^2}. \quad (59)$$

При выводе (59) была использована следующая оценка d_1 :

$$d_1 \approx \frac{W_0}{n_0 T_e} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_1^2} \approx \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_1^2} \lambda_0^2, \quad (60)$$

а $\tilde{\epsilon}$ имеет вид

$$\tilde{\epsilon}_{k, \omega_1 + \omega_{pe}} \approx \frac{2\omega_1 \omega_{pe} - 3k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}. \quad (61)$$

Теперь, интегрируя уравнение (59) как по положительным, так и по отрицательным частотам,

$$W_k^i = \int I_{k, \omega}^i d\omega = \int I_{k, \omega_{pe} + \omega_1}^i d\omega_1 + \int I_{k, \omega_{pe} - \omega_1}^i d\omega_1, \quad (62)$$

можно найти спектры ленгмюровских колебаний в области коротковолновых возмущений. Выше мы находили спектры модуляционных колебаний в области коротковолновых возмущений как функцию, зависящую от безразмерной фазовой скорости λ . Поэтому функцию w_{k, ω_1}^i в (59) выразим через безразмерную фазовую скорость, вводя λ в виде

$$\frac{\omega_1}{kv_{Te}} = \lambda. \quad (63)$$

Таким образом, получим

$$W_k^i = \frac{W_0}{2} \int \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{w_{k, \omega_1}^i d\omega_1 \omega_{pe}^4}{n_0 T_e \left| 1 + \frac{3}{4} (\lambda_0 / \lambda)^2 \right|^2 |2\omega_1 \omega_{pe} - 3k^2 v_{Te}^2|^2}. \quad (64)$$

Если выполнено условие $\omega_1 \omega_{pe} \gg k^2 v_{Te}^2$, тогда спектр модуляционных колебаний определяется формулой (23). Считая $\lambda < \lambda_0$, подставляя (23) в (64) и интегрируя по λ вдоль линии $\lambda \approx \lambda_*$ при фиксированном k , получим

$$W_k^i = \frac{\alpha}{k^3}, \quad \alpha = 5,2 \frac{\pi W_0}{\ln \Lambda} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^{-1/2} k_d^2. \quad (65)$$

Теперь предположим, что $\omega_1 \omega_{pe} \ll k^2 v_{Te}^2$, тогда коэффициенты d_1 имеют оценку

$$d_1 \approx -\frac{2}{3} \left(\frac{k_d}{k} \lambda_0 \right)^2, \quad (66)$$

а в выражении (61) членом $\omega_1 \omega_{pe}$ можно пренебречь. В результате уравнение (58) можно привести к виду

$$W_k^i \approx \frac{2\pi}{9} W_0 \frac{k_d^4}{k^5} \int \frac{v_\lambda d\lambda}{\left| 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{k_d}{k} \lambda_0 \right)^2 \right|^2}. \quad (67)$$

По известным спектрам модуляционных колебаний можно определить спектры ленгмюровских колебаний в этой области. Однако анализ показывает, что вклад от спектров (37) и (38) мал по сравнению с (42). Но (42) имеет место, когда $\omega_1 \omega_{pe} \gg k^2 v_{Te}^2$, поэтому, подставляя (42) в (64) и интегрируя по λ вдоль линии $\lambda = \lambda_0$ при постоянном k , имеем

$$W_k^i = \beta k^4, \quad \beta = 3,4\pi \frac{W_0}{k_d^5} \left(\frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^{-5/2}. \quad (68)$$

Переходим в область $\frac{k'}{k_d} > \lambda_0$ и $k' > k_d \lambda$. В этой области спектр

модуляционных колебаний определяется формулой (46). Подставляя (46) в (67), можно показать, что вклад от спектра (46) мал по сравнению с (49). Вместе с тем, (49) справедливо в области $k' > k_d \lambda_0$, $k' < k_d \lambda$. Подставляя (49) в (64), получим

$$W_k^l = \gamma k^8, \quad \gamma = \frac{2\pi W_0}{k_d^9 (W_0/n_0 T_e)^{7/2}}. \quad (69)$$

Проведенный анализ показывает, что в области коротковолновых возмущений спектр ленгмюровских колебаний пропорционален $1/k^3$. Спектр $1/k^3$ получен без учета эффектов, связанных с перенормировкой. Можно ожидать, что учет этих эффектов несколько занижает степень k , и она становится порядка двух.

Необходимо отметить, что найденный аналитический спектр k^{-3} согласуется с результатами численных экспериментов [7].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Хакимов, В. Н. Цытович, Препринт № 103, ФИАН СССР, М., 1975.
2. Ф. Хакимов, В. Н. Цытович, Препринт № 43, ФИАН СССР, М., 1975.
3. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971.
4. К. Комилов, Ф. Хакимов, В. Н. Цытович, Физика плазмы, 5, 35 (1979).
5. V. G. Makhankov and V. N. Tsytovich, Nuclear Fusion, 10, 405 (1970).
6. В. Н. Цытович, ДАН СССР, 154, 76 (1964).
7. Ю. С. Сигов, Ю. В. Ходырев, Препринт ИПМ АН СССР № 129, М., 1974.

Таджикский государственный
университет

Поступила в редакцию
15 июля 1977 г.

ON THE SPECTRUM OF MODULATION PERTURBATIONS IN DEVELOPED STRONG LENGMUIR TURBULENCE

K. Komilov, F. Kh. Khakimov, V. N. Tsytovich

The equations are analysed which describe the stationary state of strong Lengmuir turbulence. Based upon the solutions obtained the spectra of modulation and Lengmuir oscillations in a short wave ($k > k_*$, $k_* = \frac{k_d}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, $k_d = \omega_{pe}/v_{Te}$) region are found

УДК 533.9.01

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ДИССИПАТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев

В квазилинейном приближении рассмотрена диссипативная неустойчивость моноэнергетического релятивистского пучка в плотной плазме, ограниченной металлическим кожухом, как в присутствии сильного продольного магнитного поля, так и без него. Определены времена квазилинейной релаксации, распределения электронов пучка по скоростям и амплитуды установившихся колебаний. Показано, что энергия, теряемая пучком при развитии диссипативной неустойчивости, значительно превосходит энергию установившихся колебаний и идет в основном на нагрев электронов плазмы.

В работах [1, 2] рассматривалась линейная теория диссипативной неустойчивости мощных релятивистских электронных пучков в плазме, ограниченной цилиндрическим проводящим кожухом. В зависимости от параметров системы были определены условия возникновения частоты и инкременты нарастания для различных ветвей колебаний, возбуждаемых пучком в плазме.

Однако для решения вопроса об эффективности плазменно-пучкового взаимодействия и оценки амплитуды возбуждаемых электромагнитных колебаний, что представляет большой интерес при расчете мощности излучения, а также процессов ионизации при транспортировке пучков через плотный нейтральный газ, необходимо провести исследование диссипативной неустойчивости в нелинейном приближении. Первым шагом в этом направлении является квазилинейная теория.

Исследование диссипативной неустойчивости в неограниченной плазме в квазилинейном приближении для $\delta_k \ll v \ll \omega_p$ проводилось в работе [3]. В данной работе эта теория обобщается на случай плазмы, ограниченной цилиндрическим волноводом, для более высоких частот соударений, $\delta_k^2 \ll v^2 \ll \omega_k^2$, и проводится вычисление амплитуды возбуждаемых электромагнитных колебаний (ω_k и δ_k — частота и инкремент нарастания колебаний, v — частота столкновений электронов плазмы с тяжелыми частицами).

1. ПЛАЗМА В СИЛЬНОМ ВНЕШНEM МАГНИТНОM ПОЛЕ

Будем считать, что однородный пучок и плазма полностью заполняют волновод радиуса R с идеально проводящими стенками и на систему наложено внешнее продольное магнитное поле ($B_0 \parallel z$), в котором электроны пучка замагничены, а электроны плазмы — нет, $\omega_p^2 \gg \Omega^2 \gg \delta_k^2$, где $\Omega = eB_0/mc$ — циклотронная частота электрона. Учитывая, что максимальный инкремент соответствует возбуждению аксиально-симметричных колебаний, и ограничиваясь анализом одномерного движения, можно показать, что уравнение, описывающее изменение «фоновой» функции распределения пучка f_0 без учета нелинейного взаимодействия

волн, совпадает по виду с уравнением для случая неограниченной плазмы [4]

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = e^2 \sum_k \frac{2\delta_k |E_k|^2}{(k_z v_0 - \omega_k)^2 + \delta_k^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial p^2} - \\ - e^2 \sum_k \frac{2\delta_k (k_z v_0 - \omega_k) k_z |E_k|^2}{[(k_z v_0 - \omega_k)^2 + \delta_k^2]^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[(v - v_0) \frac{\partial f_0}{\partial p} \right], \quad (1)$$

а уравнение, описывающее изменение энергии возбуждаемых пучком электромагнитных колебаний, имеет вид

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} = 2\delta_k |E_k|^2, \quad k = \{k_z, k_{\perp}(s)\}, \quad (2)$$

где $f_0(t, p)$ — функция распределения электронов пучка, усредненная по расстояниям, большим по сравнению с длиной волны колебаний; E — амплитуда фурье-гармоники электрического поля аксиально-симметричных колебаний

$$E_z(t, r, z) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k E_k(t, r) \exp[i(k_z z - \omega_k t)] + \text{к.с.} \right\}, \\ E_k(t, r) = C_k(t) J_0 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right), \quad (3)$$

μ_{0s} — корни функции Бесселя нулевого порядка, $p = (p)_z = m \gamma v$.

Для решения системы уравнений (1), (2) необходимо определить частоты ω_k и инкременты нарастания δ_k электромагнитных колебаний, возбуждаемых релятивистским электронным пучком в диссипативной плазме.

Как следует из линейной теории, возбуждение аксиально-симметричных колебаний в системе описывается следующим дисперсионным уравнением:

$$(\epsilon_1 + \epsilon_3) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \right) + 2\epsilon_1 k_{\perp}^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_0^3(\omega - k_z v_0)^2},$$

$k_{\perp} = \mu_{0s}/R$, ω_b, ρ — ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы соответственно.

Результаты численного исследования уравнения (4), проведенные для различных параметров системы, представлены на рис. 1. Из рисунка следует, что наиболее сильное взаимодействие происходит в области синхронизма пучковых волн ($\omega = k_z v_0$) с плазменно-волноводными волнами ($\omega_0 = \sqrt{\omega_p^2 - \nu^2/4}$), когда $k_z v_0 = \omega_0$. Эта точка соответствует максимальному значению инкремента. С ростом частоты столкновений максимум инкремента сдвигается в область больших длин волн, зависимость инкремента от k_z становится более плавной и величина инкремента в области синхронизма понижается. Что касается зависимости от поперечного волнового числа, то, как показывают расчеты, наибольший инкремент соответствует наименьшему μ_{0s} .

Приближенный анализ уравнения (4) в области синхронизма ($k_z v_0 = \sqrt{\omega_p^2 - v^2/4}$) при $k_z^2 \gg k_{\perp}^2$ дает следующее выражение для инкремента:

$$\delta = \frac{\omega_b}{2\gamma_0^{3/2}} F_1(v),$$

где функция

$$F_1(v) = \left\{ \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{\omega_p^2} \right) \left(\frac{9}{16} \frac{v^4}{\omega_p^4} + \frac{v^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{v^2}{\omega_p^2} \left(\frac{9}{16} \frac{v^4}{\omega_p^4} + \frac{v^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2} \right] \right\} \quad (5)$$

определяет зависимость максимального инкремента от частоты соударений. В области малых частот соударений ($\delta \ll v \ll \omega_0$) можно получить, что $F_1(v) \approx (\omega_p/v)^{1/2}$, а для других значений v $F_1(v)$ монотонно падает, как показано на рис. 2.

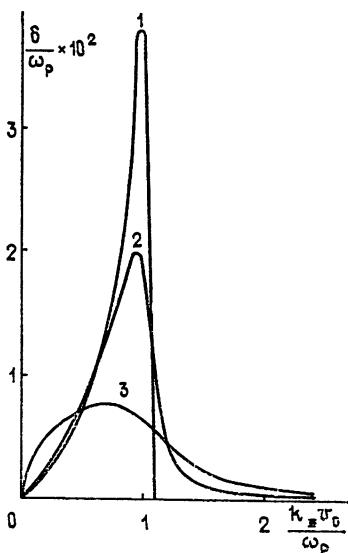


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость инкремента нарастания δ_k от продольного волнового числа k_z при $\gamma_0 = 3$, $n_b/n_p = 10^{-2}$, $k_{\perp}v_0/\omega_p = 0,1$ и различных частотах соударений:

1 — $v/\omega_p = 0$, 2 — $v/\omega_p = 0,2$, 3 — $v/\omega_p = 1$.

Рис. 2. Зависимость функций F_1 и F_2 от частоты соударений.

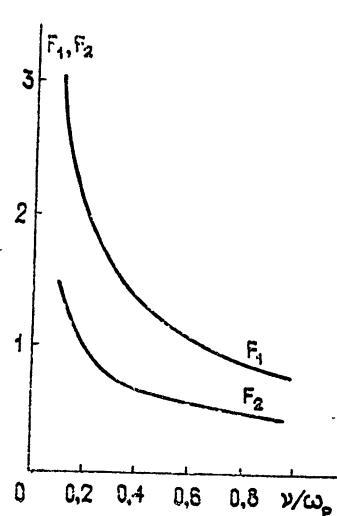


Рис. 2.

Учитывая резонансную зависимость линейного инкремента от k_z в области $v^2 \ll \omega_p^2$ и вводя безразмерные переменные $\xi = p/mc$ и τ , связанное с t соотношением

$$\frac{d\tau}{dt} = 4 \frac{\omega_b \gamma_0^{3/2} \sum_k |E_k|^2}{F_1(v) \frac{8\pi n_b m c^2}{4\gamma_0^3}},$$

приведем систему уравнений (1), (2) к виду

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}, \quad \frac{d}{d\tau} \sum_k \frac{|E_k|^2}{8\pi} = F_1^2(v) \frac{n_b m c^2}{4\gamma_0^3}. \quad (6a, b)$$

При получении (6a) было отброшено второе слагаемое в правой части (1), дающее несущественные поправки в симметричное изменение «фо-

новой» функции f_0 . Следует отметить, что эти уравнения справедливы в области частот $\delta_k^2 \ll v^2 \ll \omega_0^2$, где нелинейное взаимодействие волн оказывается еще слабым [5].

Полагая, что в начальный момент пучок является моноэнергетическим, $f_0(\tau = 0) = (n_b/mc)\delta(\xi - \xi_0)$, $\xi_0 = p_0/mc$, из решения (6а) получим следующее выражение, описывающее эволюцию фоновой функции распределения пучка:

$$f_0 = \frac{n_b}{V\pi\Delta p} \exp\left[-\frac{(p - p_0)^2}{\Delta p^2}\right], \quad (7)$$

где Δp — тепловой разброс электронов пучка по продольным импульсам:

$$\Delta p = 2mc\tau^{1/2}.$$

Таким образом, возбуждение колебаний пучком в плазме сопровождается появлением теплового разброса в пучке, который растет со временем. Поскольку при увеличении разброса происходит стабилизация гидродинамической резистивной неустойчивости, то следует ожидать, что эффективное возбуждение электромагнитных волн происходит за характерное время τ_0 . Для нахождения характерного времени квазилинейной релаксации пучка на гидродинамической стадии необходимо определить величину разброса электронов пучка по скоростям Δv , требуемую для стабилизации рассматриваемой неустойчивости. Для этого воспользуемся дисперсионным уравнением линейной теории (4), из которого в кинетическом приближении с функцией распределения пучка вида (7) при малом разбросе по импульсам ($\Delta p/p_0 \ll 1$) получим

$$\varepsilon_1(\omega_0) - \frac{\omega_b^2}{2\gamma_0^3 \left[(\omega_0 - k_z v_0) + i \left(\delta + \frac{k_z \Delta p}{m \gamma_0^3} \right) \right]^2} = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что пороговое значение $\Delta v = \frac{\Delta p}{m \gamma_0^3}$, при котором происходит стабилизация гидродинамической пучковой неустойчивости, определяется соотношением

$$k_z^2 \Delta v^2 \approx \frac{\omega_b^2}{4\gamma_0^3} F_1^2(v). \quad (9)$$

С помощью формулы (9) легко оценить время квазилинейной релаксации

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \frac{n_b}{n_p} F_2^2(v) \gamma_0 (\gamma_0^2 - 1)$$

и плотность энергии возбуждаемых при диссипативной неустойчивости колебаний

$$\frac{\sum_k |E_k|^2}{8\pi n_b mc^2 \gamma_0} = \frac{1}{32} \frac{n_b}{n_p} F_1^2(v) F_2^2(v) \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^3}, \quad (10)$$

где $F_2(v) = F_1(v) \left(4 - \frac{v^2}{\omega_b^2} \right)^{-1/2}$.

Из приведенных формул видно, что время квазилинейной релаксации и плотность энергии возбуждаемых колебаний уменьшаются с рос-

том частоты соударений, так как $F_2(v)$ является монотонно спадающей при увеличении v функцией (рис. 2).

Для определения амплитуды поля установившихся колебаний воспользуемся следующим уравнением:

$$\frac{1}{8\pi V} \int EE^* dr \approx \frac{1}{32} \frac{n_b}{n_p} F_1^2(v) F_2^2(v) n_b m c^2 \beta_0^2, \quad (11)$$

где V — объем волновода единичной длины.

Проводя интегрирование по всему объему цилиндрического волновода единичной длины и обозначая правую часть уравнения через \mathcal{E}_E , получим

$$\frac{1}{8\pi} \sum_s c_s^2 J_1^2(\mu_{0s}) = \mathcal{E}_E.$$

Принимая во внимание, что $\int_0^1 x J_0(\mu_{0s}x) dx = \frac{J_1(\mu_{0s})}{\mu_{0s}}$, последнее выражение можно привести к виду

$$\sum_s a_s J_0(\mu_{0s}x) = 2\mathcal{E}_E, \quad a_s = \frac{\mu_{0s}}{8\pi} c_s J_1(\mu_{0s}),$$

что представляет собой разложение данной функции в ряд Фурье — Бесселя. Вычисляя коэффициенты ряда, получим выражение для установившихся колебаний электрического поля, возбуждаемых пучком в волноводе, заполненном плазмой

$$E_z = \left\{ \sum_s \frac{\mathcal{E}_E^{1/2}}{\mu_{0s} J_1(\mu_{0s})} J_0 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right) \exp [i(k_z z - \omega_0 t)] + \text{к. с.} \right\}. \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, максимальной амплитудой обладают колебания типа TM_{01} с минимальным попеченным волновым числом $k_{\perp min} = \mu_{01}/R$, для которых инкремент нарастания максимален.

Релаксация диссипативной неустойчивости приводит к торможению пучка электронов. При этом энергия торможения, определяемая вторым слагаемым в правой части уравнения (1), равна

$$\Delta \mathcal{E} = -2 \left(\frac{n_p}{n_b} \right)^{1/2} \frac{\gamma_0^{3/2} \mathcal{E}_E}{F_1^2(v) F_2(v)} = -\frac{1}{16} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/2} F_2(v) \beta_0^2 \gamma_0^{3/2} n_b m c^3. \quad (13)$$

Как видно из последнего соотношения, энергия, теряемая пучком при диссипативной неустойчивости, намного превосходит энергию установившихся электромагнитных колебаний. Следовательно, основная часть энергии, теряемой пучком, переходит в тепловую энергию электронов плазмы, причем механизм нагрева связан с диссипацией высокочастотных полей, возбуждаемых при неустойчивости пучка в плазме.

Выражение для изменения температуры плазмы следует непосредственно из (13) и имеет вид

$$\Delta T \approx \frac{1}{16} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{3/2} F_2(v) \beta_0^2 \gamma_0^{3/2} m c^3. \quad (14)$$

Учитывая поведение функции $F_2(v)$, нетрудно заметить, что с ростом частоты соударений происходит более слабый нагрев электронов плазмы. Это, по-видимому, связано с ослаблением взаимодействия пучка с плазмой в данных условиях. Поэтому, несмотря на то, что относительная часть потерь энергии, идущих на нагрев, увеличивается, общие потери пучка уменьшаются с увеличением диссипации.

2. ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то, как следует из линейной теории устойчивости, происходит возбуждение пучковых волн ($\omega = k_z v_0$) при $v/v_p \ll 1$ на частоте, близкой к ω_p , с инкрементом

$$\delta_k = \frac{\omega_b}{(2\gamma_0)^{1/2}} \left(\frac{\omega_p}{v} \right)^{1/2} \left(\frac{k_z^2}{k^2 \gamma_0^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{2k_\perp^2 \Delta v_\perp^2 \gamma_0 v k^2}{\omega_b^2 \omega_p (k_z^2 / \gamma_0^2 + k_\perp^2)} \right], \quad (15)$$

где $k_\perp = \mu_{0s}/R$, $k^2 = k_z^2 + k_\perp^2$, Δv_\perp — разброс по поперечным скоростям электронов пучка ($k_\perp \Delta v_\perp \ll \delta_{\max}$). Полагая, что $\gamma_0^2 \gg 1$, с учетом теплового разброса электронов пучка по скоростям можно из (15) определить оптимальное значение поперечного волнового числа, при котором инкремент будет максимальен,

$$\delta_{\max} \approx \frac{\omega_b}{(2\gamma_0)^{1/2}} \left(\frac{\omega_p}{v} \right)^{1/2}, \quad (k_\perp^2/k_z)^{\text{opt}} \approx \frac{\delta_{\max} c}{\omega_p \Delta v_\perp}.$$

Так как первоначально $\Delta v_\perp \ll c \delta_{\max} / \omega_p$ (моноэнергетический пучок), то в первый момент преимущественно возбуждаются колебания с $k_\perp \gg k_z$, $k_z = \omega_p/v_0$.

Уравнения, описывающие релаксацию пучка при учете только наиболее быстрорастущей моды, записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \tau} &= \frac{1}{\xi_\perp} \frac{\partial}{\partial \xi_\perp} \left[\xi_\perp \frac{\partial f_0}{\partial \xi_\perp} - \alpha \frac{\xi_\perp^2}{(1 + \xi_\perp^2 + \xi_z^2)^{1/2}} \frac{\partial f_0}{\partial \xi_z} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_z} \left[\rho(r) \frac{\partial f_0}{\partial \xi_z} - \alpha \frac{\xi_\perp}{(1 + \xi_\perp^2 + \xi_z^2)^{1/2}} \frac{\partial f_0}{\partial \xi_\perp} \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d|E_k|^2}{dt} = V \bar{2} \frac{\omega_b}{\gamma_0^{1/2}} \left(\frac{\omega_p}{v} \right)^{1/2} |E_k|^2; \quad (17)$$

$$\alpha = \left(\frac{2\gamma_0 \omega_p v}{\omega_b^2} \right)^{1/2}, \quad \rho(r) = 2 \frac{k_z^2 \sum_s c_s^2 J_0^2 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right)}{\sum_s \frac{\mu_{0s}^2}{R^2} c_s^2 J_1^2 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right)},$$

$\xi_\perp = p_\perp / mc$, $\xi_z = p_z / mc$, τ в уравнении (16) связано с t соотношением

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_b \left(\frac{v\gamma_0}{2\omega_p} \right)^{1/2} \frac{\sum_s c_s^2 \frac{\mu_{0s}^2}{R^2} J_1^2 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right)}{8\pi n_b m c^2}. \quad (18)$$

В отличие от случая безграничной системы пучок — плазма в уравнении появилась радиальная зависимость $\rho(r)$, связанная со структурой полей в цилиндрическом волноводе.

Полагая, что пучок в начальный момент времени близок к моноэнергетическому, $f_0(0, p) = \frac{n_b}{2\pi(mc)^3 \xi_\perp} \delta(\xi_\perp) \delta(\xi_z - p_0/mc)$, и пренебрегая поперечным движением электронов пучка, из уравнения (16) не трудно получить следующее выражение для $f_0(\tau, p)$:

$$f_0(\tau, p) = \frac{n_b}{(\sqrt{\pi})^3 \Delta p_{\perp}^2 \Delta p_z} \exp \left\{ - \left[\frac{p_{\perp}^2}{\Delta p_{\perp}^2} + \frac{(p_z - p_0)^2}{\Delta p_z^2} \right] \right\}, \quad (19)$$

где $p_0 = mv_0\gamma_0$, Δp_{\perp} , Δp_z — тепловой разброс электронов пучка по поперечным и продольным импульсам:

$$\Delta p_{\perp} = m\gamma_0 \Delta v_{\perp} = 2mc\tau^{1/2}, \quad \Delta p_z = [\rho(r)]^{1/2} \Delta p_{\perp}. \quad (20)$$

Из выражений (19) и (20) видно, что в процессе релаксации возникает растущий во времени анизотропный тепловой разброс. Ограничность системы по радиусу приводит к появлению радиальной зависимости. Учитывая зависимость $\tau(r)$, можно показать, что продольный разброс максимален вблизи осевой области, а поперечный — на краю пучка. Так как на этой стадии преимущественно возбуждаются колебания с $k_{\perp} \gg k_z$, стабилизация данной неустойчивости будет происходить из-за нарушения неравенства $k_{\perp} \Delta v_{\perp} < \delta_{\max}$. Очевидно, что при $k_{\perp} \Delta v_{\perp} \approx \delta_{\max}$ с увеличением теплового разброса будет происходить последовательное возбуждение колебаний с меньшим k_{\perp} . В случае ограниченной плазмы существует две возможности: 1) если $\frac{\mu_{01}}{R} = \frac{2,4}{R} > \frac{\omega_p}{v_0}$, то неустойчивость полностью стабилизируется за время $\tau_{\max 1} = \frac{\omega_b^2 \gamma_0}{8\omega_p v} \times \frac{\omega_p^2 R^2}{v_0^2 (2,4)^2}$ — как только $\frac{2,4}{R} \Delta v_{\perp} \approx \delta_{\max}$; 2) если же параметры системы таковы, что $\frac{\mu_{01}}{R} < \frac{\omega_p}{v_0}$, то при $k_{\perp} \approx k_z$ возбуждение «косых» волн прекращается и соответствующее время релаксации этих колебаний $\tau_{\max 2} = \omega_b^2 \gamma_0 / (8\omega_p v)$. Зная время релаксации, в обоих случаях из (17) можно определить плотность энергии возбуждаемых колебаний:

$$\mathcal{E}_E = \frac{\sum_s |E_s|^2}{8\pi} = \frac{1}{4} n_b m c^2 \frac{\omega_b^2}{v^2} \begin{cases} \frac{\omega_p^2 R^2}{v_0^2 (2,4)^2} & \text{при } \frac{\omega_p}{v_0} < \frac{2,4}{R}, \\ 1 & \text{при } \frac{\omega_p}{v_0} \geq \frac{2,4}{R}. \end{cases} \quad (21)$$

Как видно из (21), в случае $\frac{\omega_p}{v_0} < \frac{2,4}{R}$ стабилизация неустойчивости происходит тем быстрее, чем меньше радиус пучка (и волновода), при этом плотность возбуждаемых колебаний также будет уменьшаться с уменьшением радиуса. Таким образом, пучки с относительно малым радиусом не будут возбуждать колебаний в плазме даже при незначительном разбросе по энергиям.

В противоположном случае $\frac{\omega_p}{v_0} > \frac{2,4}{R}$ время возбуждения колебаний и плотность их энергии не зависят от радиуса пучка (волновода) и совпадают со случаем безграничной системы.

Ограничность системы существенно изменяет структуру полей по радиусу, амплитуды их можно оценить, зная плотность их энергии:

$$E_z = \sum_s \frac{k_z \mathcal{E}_E^{1/2}}{\mu_{0s} J_1(\mu_{0s})(k_z^2 + \mu_{0s}^2/R^2)^{1/2}} J_0 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right) \exp [i(k_z z - \omega_p t)] + \text{к. с.},$$

$$E_r = \sum_s \frac{(\mu_{0s}/R)^{\mathcal{E}_E^{1/2}}}{\mu_{0s} J_1(\mu_{0s}) (k_z^2 + \mu_{0s}^2/R^2)^{1/2}} J_1 \left(\mu_{0s} \frac{r}{R} \right) \exp [i(k_z z - \omega_p t)] + \text{к. с.} \quad (22)$$

При $\tau > \tau_{\max 2}$ и $\omega_p/v_0 \gg \mu_{01}/R$ стабилизируются только моды колебаний, у которых $k_\perp \gtrsim k_z$, но так как при $\gamma_0 n_b/n_p \ll v/\omega_p$ и $\tau \approx \tau_{\max 2}$ разброс по продольным импульсам пренебрежимо мал, $\Delta p_z \approx mc\omega_b \gamma_0^{1/2} (\omega_p v)^{-1/2}$, то происходит возбуждение колебаний с $k_z \gg k_\perp$ и инкрементом $\delta \approx \approx \frac{\omega_b}{(2\gamma_0^3)^{1/2}} \left(\frac{\omega_p}{v} \right)^{1/2}$. Амплитуда поля колебаний при этом определяется формулой (12), а плотность энергии — формулой (10), где численный коэффициент $1/32$ должен быть заменен на $1/8$. Время, в течение которого происходит возбуждение колебаний, равно $\tau_0 = \frac{1}{8} \frac{n_b}{n_p} \frac{\omega_p}{v} \gamma_0^3$, и разброс по продольным импульсам к этому времени достигает величины $\Delta p_z \approx mc\omega_b \frac{\gamma_0^{3/2}}{2(\omega_p v)^{1/2}}$.

Таким образом, на релаксацию диссилиативной неустойчивости в отсутствие внешнего магнитного поля оказывает большое влияние геометрия системы. При достаточно малых радиусах волноводов и относительно низкой плотности плазмы, когда $\frac{2,4}{R} > \omega_p/v_0$, происходит в основном возбуждение «косых» колебаний с $k_\perp \gg k_z$. В противоположном случае относительно плотной плазмы и больших радиусов волноводов, когда $\frac{2,4}{R} \ll \omega_p/v_0$, возбуждаются не только колебания с $k_\perp \gg k_z$, но и с $k_z \gg k_\perp$, т. е. спектр колебаний приближается к изотропному.

Потери энергии электронов пучка при релаксации резистивной неустойчивости в отсутствие внешнего магнитного поля определяются следующими выражениями:

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{1}{8} \frac{\omega_b}{(\omega_p v)^{1/2}} \gamma_0^{1/2} n_b mc^2 \begin{cases} \frac{2^{2/3} R^3 \omega_p^2}{(2,4)^2 v_0^2}, & \frac{2,4}{R} > \frac{\omega_p}{v_0} \\ \gamma_0 \left(1 + \frac{2^{3/2}}{\gamma_0} \right), & \frac{2,4}{R} \ll \frac{\omega_p}{v_0} \end{cases} \quad (23)$$

Как видно из выражений (23), энергия, теряемая электронами пучка при релаксации, как в случае $\frac{2,4}{R} > \frac{\omega_p}{v_0}$, так и при $\frac{2,4}{R} \ll \frac{\omega_p}{v_0}$ значительно превосходит энергию возбуждаемых колебаний для пучков с $\gamma_0 \frac{n_b}{n_p} \ll v/\omega_p$. Следовательно, как при отсутствии, так и при наличии внешнего магнитного поля основная доля энергии, теряемой пучком, идет на нагрев электронов плазмы, но так как пучок теряет лишь незначительную часть своей энергии ($n_b mc^2 \gamma_0$), то и изменение температуры электронов плазмы будет небольшим.

В заключение отметим, что v , которая в общем случае определяется температурой электронов плазмы T (эВ), концентрацией ионов плазмы и нейтральных молекул газа n_g [6] —

$$v = 0,63 \cdot 10^{-8} n_g \sqrt{\frac{T}{0,026}} + 0,88 \cdot 10^{-5} n_p T^{-3/2} \ln(2,56 \cdot 10^6 T n_p^{-1/3})$$

— в процессе квазилинейной релаксации считалась постоянной. В действительности же с повышением температуры электронов плазмы происходит также изменение частоты соударений. Однако справедливость подхода сохраняется, если выполняется условие

$$\frac{\Delta T}{T} \left\{ \frac{1}{2} + 0,88 \cdot 10^{-5} n_p T^{-3/2} [1 - 2 \ln(2,56 \cdot 10^6 T n_p^{-1/3})] \right\} \nu^{-1} \ll 1.$$

В частности, для параметров системы $P = 300 \text{ tor}$, $n_p = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $n_b = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $\gamma_0 = 7$, $\frac{\nu}{\omega_p} = 0,4$, $T = 3 \text{ эВ}$, близких к экспериментальным [7], $\Delta\nu/\nu \approx 7\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, ЖТФ, 44, 34 (1974).
2. В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, 1605 (1974).
3. В. У. Абрамович, В. И. Шевченко, ЖЭТФ, 62, 1386 (1972).
4. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ, 57, 966 (1969).
5. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
7. Л. И. Рудаков, В. П. Смирнов, А. Н. Спектор, Письма в ЖЭТФ, 15, 540 (1972).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию
23 марта 1977 г.

QUASI-LINEAR RELAXATION OF DISSIPATIVE INSTABILITY OF RELATIVISTIC BEAM IN BOUNDED PLASMA

V. P. Grigor'ev, N. S. Shulaev

In the quasi-linear approximation the dissipative instability is considered of a monoenergetic relativistic beam in a dense plasma bounded by a metal case both in the presence of a strong longitudinal magnetic field and without it. The times of quasi-linear relaxation, velocity electron beam distribution and steady-state oscillation amplitude are determined. It is shown that the energy lost by the beam in developing the dissipative instability exceeds considerably the energy of steady-state oscillations and is used mainly for the electron plasma heating

УДК 525.7

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ АТМОСФЕРЫ НА РАЗМЕРЫ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ В ЛОКАЦИОННОЙ СХЕМЕ НАБЛЮДЕНИЯ

М. Л. Белов, В. М. Орлов

Рассмотрен вопрос о размытии дифракционного изображения в турбулентной атмосфере в локационной схеме наблюдения. Найдено, как эффективные размеры изображения меняются в зависимости от расстояния приемника до диффузной поверхности при изменении дефокусировки оптической приемной системы и расходности источника.

Известно, что турбулентность атмосферы вызывает размытие дифракционного изображения, которое необходимо учитывать при конструировании прецизионных оптико-электронных устройств. Например, в угломерных приборах [1, 2] размер изображения влияет на крутизну пеленгационной характеристики и, тем самым, на точность определения положения источника. В данной работе исследуется влияние турбулентности атмосферы на размеры дифракционного изображения в локационной схеме наблюдения, включающей в себя направленный источник оптического излучения и приемник с оптической системой в виде параксиальной линзы. Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1 (где s — отражающая поверхность).

Отражающую поверхность считаем плоской со случайнym коэффициентом отражения. В данной работе исследуется влияние турбулентности атмосферы на размеры дифракционного изображения в локационной схеме наблюдения, включающей в себя направленный источник оптического излучения и приемник с оптической системой в виде параксиальной линзы. Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1 (где s — отражающая поверхность). Отражающую поверхность считаем плоской со случайнym коэффициентом отражения.

Используя формулу Дебая (см., например, [3]) и полагая линзу параксиальной, получим выражение для средней интенсивности излучения в плоскости фотодетектора $I(R)$:

$$I(R) = \frac{1}{(\lambda F)^2} \iint_{\Sigma} \Gamma(R', \rho') \exp \left[\frac{i k}{F} \left(R \rho' - \frac{z}{F} R' \rho' \right) \right] d^2 R' d^2 \rho', \quad (1)$$

где $\Gamma(R', \rho')$ — функция когерентности излучения, падающего на входную апертуру приемника, F — фокусное расстояние линзы, Σ — освещенная поверхность линзы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, z — смещение плоскости наблюдения относительно фокальной плоскости линзы.

Считая, что среда плавнонеоднородная, и применяя принцип Гюйгенса — Кирхгофа [4—6], находим функцию когерентности излучения,

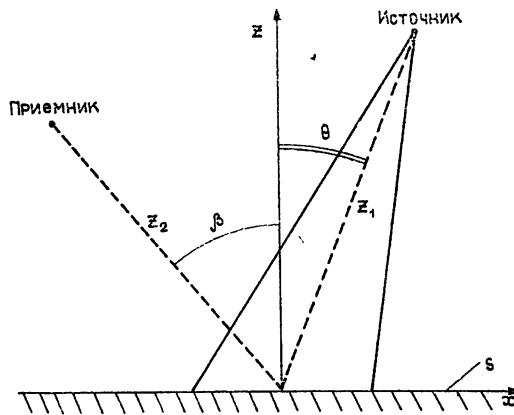


Рис. 1.

отраженного от плоской поверхности со случайным коэффициентом отражения. Далее, воспользовавшись френелевским приближением для функции Грина и подставляя найденное выражение в (1), получим

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{R}) = & \frac{k^4 \cos^2 \theta \cos^2 \beta}{(2\pi)^4 z_1^2 z_2^2 (\lambda F)^2} \int K(\mathbf{R}_0, \rho_0) \Gamma_{ii}(\mathbf{R}_1, \rho_1) \times \\
 & \times \Gamma_{ii}(\mathbf{R}', \rho'; \mathbf{R}) \exp \left\{ ik \rho_{x0} (\sin \theta + \sin \beta) + \right. \\
 & + \frac{ik(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_0)(\rho_1 - \rho'_0)}{z_1} + \frac{ik(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_0)(\rho' - \rho''_0)}{z_2} + \quad (2) \\
 & \left. + 2 [\overline{\chi_{11}\chi_{21}} + \overline{\chi_{12}\chi_{22}}] - \frac{1}{2} [D_\Psi(11-12) + D_\Psi(21-22) + D_\Psi(12-21) + \right. \\
 & \left. + D_\Psi(11-22) - D_\Psi(11-21) - D_\Psi(22-12)] + iB \right\} d^2 R_1 d^2 \rho_1 d^2 R_0 d^2 \rho_0 d^2 R' d^2 \rho'.
 \end{aligned}$$

Здесь черта сверху означает усреднение по ансамблю флюктуаций,

$$\Gamma_{ii}(\mathbf{R}', \rho'; \mathbf{R}) = \exp \left[\frac{ik}{F} \left(\mathbf{R} \rho' - \frac{z}{F} \mathbf{R}' \rho' \right) \right] f(\mathbf{R}', \rho'),$$

$f(\mathbf{R}', \rho')$ — отлична от нуля (равна единице) на входной апертуре приемника, $K(\mathbf{R}_0, \rho_0)$ — функция корреляции коэффициента отражения, $\Gamma_{ii}(\mathbf{R}_1, \rho_1)$ — функция когерентности на апертуре источника, z_1, z_2 — наклонное расстояние от источника и приемника соответственно до отражающей поверхности, \mathbf{R}_1, ρ_1 — векторы на плоскости апертуры источника, \mathbf{R}', ρ' — векторы на плоскости апертуры приемника, \mathbf{R}_0, ρ_0 — векторы на отражающей плоскости,

$$\mathbf{R}_0 = \{R_{0x}, R_{0y}\}, \quad \rho_0 = \{\rho_{0x}, \rho_{0y}\},$$

\mathbf{R}'_0, ρ'_0 — векторы на плоскости, перпендикулярной оптической оси источника,

$$\mathbf{R}'_0 = \{R_{0x} \cos \theta, R_{0y}\}, \quad \rho'_0 = \{\rho_{0x} \cos \theta, \rho_{0y}\},$$

\mathbf{R}''_0, ρ''_0 — векторы на плоскости, перпендикулярной оптической оси приемника,

$$\mathbf{R}''_0 = \{R_{0x} \cos \beta, R_{0y}\}, \quad \rho''_0 = \{\rho_{0x} \cos \beta, \rho_{0y}\},$$

$D_\Psi(nl - ij)$ — структурная функция комплексной фазы флюктуаций полей двух точечных источников, полученная в работе [7]:

$$\begin{aligned}
 D_\Psi(nl - ij) = & [\overline{\chi_{nl} - \chi_{ij}}]^2 + [\overline{S_{nl} - S_{ij}}]^2, \\
 \Psi_{nl} = & \chi_{nl} + iS_{nl},
 \end{aligned}$$

S — фаза, χ — логарифм амплитуды, вычисляются в приближении МПВ (метода плавных возмущений):

$$\Psi_{11} = \Psi \left(\mathbf{R}_1 + \frac{1}{2} \rho_1; \mathbf{R}'_0 + \frac{1}{2} \rho'_0 \right), \quad \Psi_{12} = \Psi \left(\mathbf{R}_1 - \frac{1}{2} \rho_1; \mathbf{R}'_0 - \frac{1}{2} \rho'_0 \right),$$

$$\Psi_{21} = \Psi \left(\mathbf{R}''_0 + \frac{1}{2} \rho''_0; \mathbf{R}' + \frac{1}{2} \rho' \right), \quad \Psi_{22} = \Psi \left(\mathbf{R}''_0 - \frac{1}{2} \rho''_0; \mathbf{R}' - \frac{1}{2} \rho' \right),$$

$$B = (\overline{\chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{21} + \chi_{22}})(\overline{S_{11} - S_{12} + S_{21} - S_{22}}) + \overline{S_{11}} - \overline{S_{12}} + \overline{S_{21}} - \overline{S_{22}},$$

$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ — случайная комплексная фаза (без регулярной составляющей) сферической волны, распространяющейся из точки \mathbf{R} в точку \mathbf{R}' .

В качестве примера рассмотрим случай, когда поверхность диффузная, а падающий и принимаемый пучки проходят по разным неоднородностям среды.

Для диффузной поверхности имеем (см., например, [8])

$$\Gamma(\mathbf{R}_0, \rho_0) = \overline{I_1(\mathbf{R}_0)} A \frac{4\pi}{k^2} \delta(\rho_0),$$

где $I_1(\mathbf{R}_0)$ — интенсивность излучения, падающего на отражающую поверхность от источника, $\delta(\rho)$ — дельта-функция, A — коэффициент отражения по мощности, $\Gamma(\mathbf{R}_0, \rho_0)$ — функция когерентности отраженного излучения на поверхности.

Используя приведенное соотношение и свойство статистической однородности флуктуаций, получим из (2)

$$I(\mathbf{R}) = \frac{A \cos \beta}{\pi F^2} \int \overline{I_1(\mathbf{R}'_0)} \overline{I_2(\mathbf{R}''_0; \mathbf{R})} d^2 R_0. \quad (3)$$

Здесь $I_2(\mathbf{R}''_0; \mathbf{R})$ — интенсивность излучения, падающего на отражающую поверхность от фиктивного источника, на апертуре которого задана функция когерентности $\Gamma_n(\mathbf{R}', \rho'; \mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} \overline{I_2(\mathbf{R}''_0; \mathbf{R})} = & \frac{k^2 \cos \beta}{(2\pi)^2 z_2^2} \int \int \Gamma_n(\mathbf{R}', \rho'; \mathbf{R}) \exp \left[-\frac{ik(\mathbf{R}''_0 - \mathbf{R}')\rho'}{z_2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} D_\Psi(22 - 21) \right] d^2 R' d^2 \rho', \end{aligned}$$

$I_1(\mathbf{R}'_0)$ — интенсивность излучения, падающего на отражающую поверхность от источника,

$$\begin{aligned} \overline{I_1(\mathbf{R}'_0)} = & \frac{k^2 \cos \theta}{(2\pi)^2 z_1^2} \int \int \Gamma_n(\mathbf{R}_1, \rho_1) \exp \left[\frac{ik(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_0)\rho_1}{z_1} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} D_\Psi(11 - 12) \right] d^2 R_1 d^2 \rho_1. \end{aligned}$$

Для проведения конкретных расчетов положим:
для функции когерентности на апертуре источника

$$\Gamma_n(\mathbf{R}_1, \rho_1) = u_0^2 \exp \left(-\frac{2R_1^2}{r_n^2} - \frac{\rho_1^2}{2r_n^2} - \frac{ik}{F_n} \mathbf{R}_1 \rho_1 - \frac{\rho_1^2}{2\rho_k^2} \right),$$

где r_n — эффективный радиус апертуры источника, ρ_k — радиус когерентности источника, F_n — радиус кривизны фазового фронта;

для функции $f(\mathbf{R}, \rho)$, определяющей прозрачность приемной апертуры, —

$$f(\mathbf{R}, \rho) = \exp \left(-\frac{2R^2}{r_n^2} - \frac{\rho^2}{2r_n^2} \right),$$

где r_n — эффективный радиус приемной апертуры;

для структурной функции комплексной фазы [7], полагая $\rho \gg l_0$ (l_0 — наименьший размер неоднородностей среды), —

$$D_{\Psi}(11 - 12) = \frac{3}{8} 0,74 C_{\epsilon}^2 k^2 z_1 |\rho_1|^{5/3},$$

$$D_{\Psi}(22 - 21) = \frac{3}{8} 0,74 C_{\epsilon}^2 k^2 z_2 |\rho'|^{5/3},$$

где C_{ϵ} — структурная постоянная флюктуаций диэлектрической проницаемости.

Вычисляя интеграл и определяя размеры изображения $R_{x,y}$ по спаданию средней интенсивности в e раз, имеем

$$R_x^2 = \frac{F^2 \cos^2 \beta}{2 z_2^2 \cos^2 \theta} \left(\alpha^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \beta} \hat{\alpha}^2 \right), \quad (4)$$

$$R_y^2 = \frac{F^2}{2 z_2^2} (\alpha^2 + \hat{\alpha}^2);$$

$$\alpha^2 = \frac{4 z_1^2}{k^2} \left[\frac{1}{2 r_{ii}^2} + \frac{1}{2 \rho_k^2} + \frac{k^2 r_{ii}^2}{8 z_1^2} \left(1 - \frac{z_1}{F_{ii}} \right)^2 + (k^2 \overline{C_{\epsilon}^2} z_1)^{6/5} N \right], \quad (5)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{4 z_2^2}{k^2} \left[\left(\frac{k z}{F^2} - \frac{k}{z_2} \right)^2 \frac{r_{ii}^2}{8} + \frac{1}{2 r_{ii}^2} + (k^2 \overline{C_{\epsilon}^2} z_2)^{6/5} N \right],$$

$$\overline{C_{\epsilon}^2} = \frac{1}{z_i} \int_0^{z_i} C_{\epsilon}^2(z'_i) dz'_i, \quad N \approx 0,1.$$

На рис. 2 приведена построенная в логарифмическом масштабе зависимость R_y^2 от расстояния приемника до отражающей поверхности z_2 при различной ширине диаграммы направленности источника $2\alpha_i$ и различных z . Расчеты проведены по формуле (5) для однородной среды (кривые 1, 3, 5, 7) ($C_{\epsilon} = 0$) и для среды с сильными флюктуациями показателя преломления (кривые 2, 4, 6, 8) ($C_{\epsilon} = 1,8 \cdot 10^{-6} m^{-1/3}$) при следующих значениях параметров: $z_1 = 5 km$, $\lambda = 1,06 \mu m$, $r_{ii} = r_{\pi} = 4,2 \cdot 10^{-2} m$, $F_{ii} = \infty$, $F = 1,1 \cdot 10^{-1} m$, для кривых 1, 2, 5, 6 — $\rho_k = 10^{-3} m$ ($2\alpha_i \approx 1'6''$), для кривых 3, 4, 7, 8 — $\rho_k = 2 \cdot 10^{-4} m$ ($2\alpha_i \approx 5'30''$), для кривых 1, 2, 3, 4 — $z = 0$, для кривых 5, 6, 7, 8 — $z = 4,8 \cdot 10^{-3} m$.

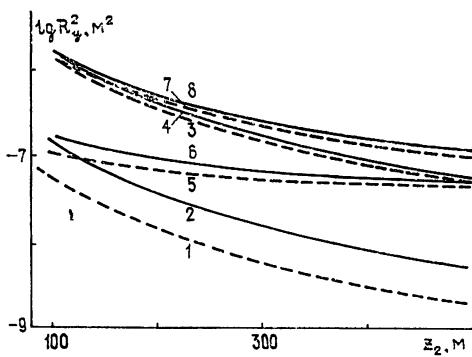


Рис. 2.

Из рисунка видно, что с уменьшением угла расходимости источника влияние турбулентности на размеры изображения усиливается, что объясняется, в основном, увеличением размытия освещенного пятна на отражающей поверхности. Увеличивая дефокусировку оптической системы z , можно добиться того, чтобы влияние турбулентности на размеры дифракционного изображения было мало в интересующем нас интервале z_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Андреев, Р. М. Магид, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 1, 55 (1972).
2. П. А. Бакут, В. Г. Выгон, Ю. П. Шумилов, Радиотехника и электроника, 12, № 7, 1467 (1976).
3. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
4. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 6, 886 (1969).
5. А. Г. Виноградов, З. И. Фейзуллин, Труды РТИ АН СССР, № 18, 66 (1974).
6. М. С. Беленский, В. Л. Миронов, Квантовая электроника, № 5 (11), 38 (1972).
7. А. И. Кон, З. И. Фейзуллин, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).
8. M. H. Lee, J. F. Holmes and J. R. Kegg, J. Opt. Soc. Am., 66, № 11, 1164 (1976).

Поступила в редакцию
1 февраля 1978 г.

THE INFLUENCE OF THE ATMOSPHERE TURBULENCE ON DIMENSIONS
OF THE DIFFRACTION IMAGE IN THE LOCATION SCHEME OF OBSERVATION

M. L. Belov, V. M. Orlov

A problem is discussed on the smearing of the diffraction image in the turbulent atmosphere in the location scheme of observation. The effective dimensions are found to change as a function of the receiver distance up to the diffuse surface with the variation of defocusing of the optical receiver system and the source divergence.

УДК 550.388.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ГРАДИЕНТНО-ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

М. Г. Гельберг

Дано описание нелинейной стадии развития градиентно-дрейфовой неустойчивости. Получено выражение для инкремента нарастания моды k с учетом перекачки энергии из мод с $k' < k$ и ее диссипации на возмущениях с $k'' > k$. Показано, что для средней части спектра турбулентности главными нелинейными эффектами будут турбулентная диффузия на мелкомасштабных возмущениях и влияние градиентов плотности плазмы крупномасштабных мод.

Градиентно-дрейфовая неустойчивость является наиболее вероятным механизмом формирования тонкой структуры ионосферы [1–4]. В экваториальной и среднеширотной ионосфере эта неустойчивость развивается на вертикальных градиентах регулярных слоев E и F [1–3], а в авроральной зоне и полярной шапке — на горизонтальных крупномасштабных градиентах [4].

Линейная теория рассматривает развитие градиентно-дрейфовой неустойчивости в предположении бесконечно малых амплитуд возмущений плотности плазмы n_1 и скоростей движения зарядов $V_{\alpha 1}$ ($\alpha = e, i$). Это предположение позволяет пренебречь нелинейными членами $n_1 V_{\alpha 1}$ в уравнениях непрерывности. Учет нелинейных слагаемых показал [5–7], что нарастание амплитуды плотности плазмы вызывает генерацию вторичных неоднородностей меньшего масштаба. На градиентах вторичных неоднородностей формируются неоднородности третьего каскада [6], и этот многоступенчатый процесс перекачки энергии продолжается до появления неоднородностей предельно малых размеров, подавляемых диффузией. В работе [7] рассмотрен механизм генерации вторичных ноднородностей за счет переноса зарядов крупномасштабными возмущениями электрического поля.

С другой стороны, нарастание амплитуды возмущений ослабляет внешнее электрическое поле и градиент плотности плазмы внешнего масштаба $L^{(0)}$ [8, 9], что ведет к стабилизации неустойчивости. Другой механизм стабилизации градиентно-дрейфовой неустойчивости — турбулентная диффузия неоднородностей на возмущениях плазмы — рассмотрен в работе [8]. Авторы [8] полагают, что диссипация энергии любой моды с волновым вектором \mathbf{k} происходит на всем спектре возмущений.

Цель настоящей работы — дать единое описание нелинейной стадии градиентно-дрейфовой неустойчивости и сопоставить относительный вклад различных нелинейных эффектов применительно к условиям F -области ионосферы.

1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КАСКАДЫ

Выше отмечено, что при развитии градиентно-дрейфовой неустойчивости свободная энергия источника переходит от крупномасштабных мод к мелкомасштабным через серию последовательных каскадов. Путем численного моделирования этот процесс рассмотрен в работе [6].

На градиенте внешнего масштаба $L^{(0)}$ формируются неоднородности самой крупномасштабной моды, волновой вектор $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)}$ которых ориентирован преимущественно перпендикулярно внешнему градиенту $\mathbf{x}^{(0)} = -\nabla n^{(0)}/n^{(0)}$ ($n^{(0)}$ — стационарное значение плотности плазмы). Для первого каскада фазовые соотношения между возмущениями плотности плазмы $n^{(1)}$ и напряженности электрического поля $E^{(1)}$ примерно постоянные на расстояниях порядка $L^{(0)}$. Пространственный радиус корреляции между возмущениями в первом каскаде — $L^{(1)} = |\tilde{\mathbf{k}}^{(1)}|^{-1}$. Неоднородности второго каскада появляются на градиентах неоднородностей первого каскада. Волновые векторы вторичных неоднородностей ориентированы, в основном, вдоль гребней соответствующих первичных дрейфовых волн. Однако в лабораторной системе отсчета ориентация волновых векторов $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ вторичных неоднородностей имеет более изотропный характер, чем ориентация $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)}$. Еще более хаотичной будет ориентация волновых векторов $\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ неоднородностей в последующих каскадах. Фазовые соотношения между возмущениями $n^{(\beta)}$ и $E^{(\beta)}$ примерно постоянны на расстояниях порядка $L^{(\beta-1)} = |\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta-1)}|^{-1}$ и случайны на интервалах большего масштаба.

Для градиентно-дрейфовой неустойчивости частота $\omega^{(\beta)}$ дрейфовых волн в каскаде β будет

$$\omega^{(\beta)} = \tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)} V_\beta,$$

где V_β — скорость дрейфа неоднородностей каскада β . Характерное время автокорреляции $\tau_c^{(\beta)}$, возмущений $n^{(\beta)}$ и $V_\alpha^{(\beta)}$ будет $\tau_c^{(\beta)} \approx (\omega^{(\beta)})^{-1}$.

Таким образом, при развитии градиентно-дрейфовой неустойчивости за счет каскадной перекачки энергии от крупномасштабных возмущений к мелкомасштабным происходит последовательная изотропизация (в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю B_0) и «рандомизация» возмущений в каскадах с более высокими номерами. Адекватным аналитическим аппаратом для описания плазменной турбулентности такого типа является, по нашему мнению, метод последовательных каскадов, развитый Ченом [10, 11]. Чен представляет возмущения плотности n_1 и скоростей движения зарядов $V_{\alpha 1}$ в виде суммы бесконечных рядов по рангам случайности β :

$$n_1 = \sum_{\beta=1}^{\infty} n^{(\beta)}, \quad V_{\alpha 1} = \sum_{\beta=1}^{\infty} V_\alpha^{(\beta)}.$$

Каждому рангу β соответствует своя полоса в спектре возмущений

$$n^{(\beta)} = \int_{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta-1)}}^{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)}} n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \quad V_\alpha^{(\beta)} = \int_{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta-1)}}^{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)}} V_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{k},$$

где $\mathbf{k}^{(\beta)}$ определяют границы между соседними рангами. Характерное волновое число ранга $\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ можно определить как

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)} = \int_{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta-1)}}^{\tilde{\mathbf{k}}^{(\beta)}} n_{\mathbf{k}} \mathbf{k} d\mathbf{k} / n^{(\beta)}.$$

Спектры возмущений в последовательных каскадах градиентно-дрейфовой неустойчивости, вообще говоря, перекрываются, поскольку на развитие неоднородностей масштаба $L^{(\beta+1)}$ влияет как внешний градиент

$\mathbf{x}^{(0)}$, так и градиенты всех каскадов $\beta' < \beta$. В дальнейшем анализе мы отождествляем последовательные каскады градиентно-дрейфовой неустойчивости с последовательными каскадами теории Чена, а влияние перекрытия спектральных полос оценим при сопоставлении относительного вклада градиента $\mathbf{x}^{(0)}$ и градиентов высших порядков на развитие неоднородностей ранга β .

Введем обозначения

$$n = n^{(0)} + n_1, \quad n_\beta = \sum_{\beta'=0}^{\beta-1} n^{(\beta')}, \quad n'_\beta = \sum_{\beta'=1}^{\beta-1} n^{(\beta')}, \quad n^\beta = \sum_{\beta'=\beta}^{\infty} n^{(\beta')}$$

и аналогичные выражения для V_α , $V_{\alpha,\beta}$, $V'_{\alpha,\beta}$, V_α^β , а также $A_\beta = \langle \dots \rangle_\beta$ — оператор сглаживания ранга β со свойством

$$A_\beta n^{(\beta')} = \begin{cases} n^{(\beta')}, & \text{если } \beta' < \beta \\ 0, & \text{если } \beta' \geq \beta \end{cases}$$

и операторы A^β и $A^{(\beta)}$:

$$A^\beta = 1 - A_\beta, \quad A^{(\beta)} = A_{\beta+1} - A_\beta.$$

Операторы A_β , A^β , $A^{(\beta)}$ определены как операторы фильтрации на ансамбле повторных экспериментов.

2. НЕЛИНЕЙНЫЙ ИНКРЕМЕНТ ГРАДИЕНТНО-ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В уравнениях движения для электронов и ионов пренебрежем производными от V_α по времени и инерционными слагаемыми. Тогда найдем

$$\hat{V}_\alpha^{(\beta)} = \hat{\mu}^\alpha E^{(\beta)} \pm (-1) \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \hat{\mu}^\alpha \nabla n^{(\beta)} = \tilde{V}^{(\beta)} \pm (-1) \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \hat{\mu}^\alpha \nabla n^{(\beta)}, \quad (1)$$

где знак «+» относится к ионам, «—» — к электронам, для изотермической плазмы ($T_e = T_i = T$ — температура плазмы) $C_s^2 = 2T/m_i$, m_α , $\Omega_{H,\alpha}$, $\hat{\mu}^\alpha$ — масса, гирочастота и тензор подвижности зарядов сорта α . В системе отсчета с осью z , параллельной магнитному полю B_0 ,

$$\hat{\mu}^i = \begin{pmatrix} \mu_\perp^i & \mu_H^i & 0 \\ -\mu_H^i & \mu_\perp^i & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel^i \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}^e = \begin{pmatrix} -\mu_\perp^e & \mu_H^e & 0 \\ -\mu_H^e & -\mu_\perp^e & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_\parallel^e \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_\parallel^\alpha = e/m_\alpha v_{ap}, \quad \mu_\perp^\alpha = \lambda_\alpha \mu_\parallel^\alpha, \quad \mu_H^\alpha = \Theta \mu_\perp^\alpha,$$

$$\Theta_\alpha = \Omega_{H,\alpha}/v_{ap}, \quad \lambda_\alpha = [1 + \Theta_\alpha^2]^{-1},$$

v_{ap} — частоты столкновений зарядов с нейтралами, $\tilde{V}_\alpha^{(\beta)}$ — возмущение скорости ранга β зарядов сорта α без учета диффузии. В остальном тексте мы опустили знак \sim и под $V_\alpha^{(\beta)}$ будем подразумевать именно эту составляющую скорости.

Применяя к уравнениям непрерывности операторы A_β , A^β и $A^{(\beta)}$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\alpha,\beta} \nabla + \nabla V_{\alpha,\beta} \right) n_\beta = - \langle \nabla (V_\alpha^\beta n^\beta) \rangle_\beta \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \hat{\nabla} \hat{\mu}^\alpha \nabla n_\beta; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\alpha \nabla + \nabla V_\alpha \right) n^\beta = -\nabla (V_\alpha^\beta n_\beta) \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \nabla^\mu \nabla^\alpha \nabla^\beta n_\beta; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\alpha,\beta+1} \nabla + \nabla V_{\alpha,\beta+1} \right) n^{(\beta)} &= -\nabla (V_\alpha^{(\beta)} n_\beta) - \\ &- \langle \nabla (V_\alpha^{\beta+1} n^{\beta+1}) \rangle_{\beta+1} \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \nabla^\mu \nabla^\alpha \nabla^\beta n_\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (3), (4) опущены слагаемые рангов меньше β согласно правилу отбора рангов [10].

Введем «пропагатор» $U_\alpha(t_0 - t)$ как решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\alpha \nabla + \nabla V_\alpha \pm (-1) \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \nabla^\mu \nabla^\alpha \nabla \right) U_\alpha(t_0 - t) = 0$$

с граничным условием $U(0) = 1$. Из уравнения (3) получим

$$n^\beta(t) = - \int_0^t d\tau U_\alpha(t - \tau) \nabla (V_\alpha^\beta n_\beta). \quad (5)$$

В области ионосферы электроны и ионы замагничены ($\Theta_\alpha \gg 1$, $\alpha = e, i$) и для электростатических возмущений ионосферной плазмы

$$|\tilde{k}^{(\beta)} V_\alpha^\beta| \ll |\tilde{k}^{(\beta)} \| V_\alpha^{(\beta)} \|.$$
 (6)

С другой стороны, векторы $V_\alpha^{(\beta)}$ ориентированы параллельно (антипараллельно) $\nabla n^{(\beta-1)}$ вследствие каскадной перекачки энергии мод градиентно-дрейфовой неустойчивости от крупномасштабных к мелкомасштабным. Тогда

$$|\tilde{k}^{(\beta)} V_\alpha^{(\beta)}| \ll |\tilde{k}^{(\beta-1)} V_\alpha^{(\beta)}| \leq |V_\alpha^{(\beta)} \nabla n_\beta| / n_\beta. \quad (7)$$

С учетом (5) и (7) из уравнений (3) и (4) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\alpha,\beta} \nabla + \nabla V_{\alpha,\beta} \right) n_\beta = \nabla \hat{D}_\alpha^\beta \nabla n_\beta \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \nabla^\mu \nabla^\alpha \nabla^\beta n_\beta; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{\alpha,\beta+1} \nabla + \nabla V_{\alpha,\beta+1} \right) n^{(\beta)} &= -\nabla (V_\alpha^\beta n_\beta) + \\ &+ \nabla \hat{D}_\alpha^{\beta+1} \nabla n^{(\beta)} \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H,i}} \nabla^\mu \nabla^\alpha \nabla^\beta n_\beta, \end{aligned} \quad (9)$$

где при расчетах тензора турбулентной диффузии приближенно принято $\nabla V_\alpha^\beta = 0$. Тензор \hat{D}_α^β определен [11] как

$$\hat{D}_\alpha^\beta = \int_0^{t+\infty} d\tau \langle V_\alpha^\beta(t) : U_\alpha(t - \tau) V_\alpha^\beta(\tau) \rangle_\beta,$$

где символ « $:$ » означает прямое произведение векторов, приводящее к тензору.

Система уравнений (8), (9) и равенство (1) описывают развитие возмущений ранга β . Из (9) следует, что возмущения с $\beta' < \beta$ ведут к дополнительной конвекции зарядов, а с $\beta'' > \beta$ — к турбулентной диффузии неоднородностей ранга β .

Для применения локального приближения положим, что $\tilde{k}^{(\beta-1)} \ll \tilde{k}^{(\beta)} \ll \tilde{k}^{(\beta+1)}$. Положим также, что изменения возмущения плотности $n^{(\beta)}$ и потенциала электрического поля $\phi^{(\beta)}$ пропорциональны $\exp[-i(\omega^{(\beta)}t - \tilde{k}^{(\beta)}r)]$. Для рангов $\beta' < \beta$ и $\beta' > \beta$ потребуем, чтобы в спектре возмущений каждому волновому числу $\tilde{k}^{(\beta')}$ соответствовало число $\tilde{k}^{(\beta')}$ и возмущения с этими волновыми числами имели равные амплитуды. Это требование выражает условие действительности величин $V_{\alpha, \beta}$, n_β , $\hat{D}_\alpha^{\beta+1}$, входящих в (9). При сделанных предположениях уравнение (9) примет вид

$$\left[-i(\omega^{(\beta)} - k V_{\alpha, \beta}) + \nabla V_{\alpha, \beta} \pm \frac{C_s^2 B_0}{2\Omega_{H, i}} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^\alpha} \hat{k} + \hat{k} \hat{D}_\alpha^{\beta+1} \hat{k} \right] n_k^{(\beta)} + \\ + (\hat{k} \overset{\wedge}{\mu^\alpha} \hat{k} - i \kappa_\beta \overset{\wedge}{\mu^\alpha} \hat{k}) \phi_k^{(\beta)} n_\beta = 0, \quad (10)$$

где для краткости записи у волновых векторов $\tilde{k}^{(\beta)}$ опущены индексы (β) и знак «~», $\kappa_\beta = \nabla n_\beta / n_\beta$. Дисперсионное уравнение получается из условия разрешимости системы (10). Его решение дает

$$\omega_0^{(\beta)} = \frac{\hat{k} V_{e, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k} - \hat{k} V_{i, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}}, \quad (11)$$

$$\gamma^{(\beta)} = \frac{\hat{k} V_\beta}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}} \frac{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k} \kappa_\beta \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k} - \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k} \kappa_\beta \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}} + \frac{\nabla V_{i, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k} - \nabla V_{e, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}} + \\ + \frac{C_s^2 B_0 \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}} + \frac{\hat{k} \hat{D}_i^{\beta+1} \hat{k} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k} - \hat{k} \hat{D}_e^{\beta+1} \hat{k} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}}, \quad (12)$$

где $V_\beta = V_{i, \beta} - V_{e, \beta}$, $\overset{\wedge}{\mu} = \overset{\wedge}{\mu^i} - \overset{\wedge}{\mu^e}$.

3. АНАЛИЗ ВЫРАЖЕНИЙ (11) И (12)

Заметим, что при $V'_{\alpha, \beta} = 0$ и $n'_\beta = 0$ выражения (11), (12) дают частоту и инкремент градиентно-дрейфовой неустойчивости, предсказанной линейной теорией (см., например, [12]). Однако при возмущениях конечной амплитуды величины $V_\alpha^{(0)}$ и $n_\beta^{(0)}$, входящие в (11) и (12), вообще говоря, отличаются от значений V_{α_0} и n_0 для невозмущенной плазмы. В выражении (11) выделим стационарную $\omega_0^{(0)}$ и квазистационарную $\Delta\omega_0^{(\beta)}$ части:

$$\omega_0^{(0)} = \frac{\hat{k} V_e^{(0)} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k} - \hat{k} V_i^{(0)} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}}, \quad (13)$$

$$\Delta\omega_0^{(\beta)} = \frac{\hat{k} V'_{e, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^i} \hat{k} - \hat{k} V'_{i, \beta} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu^e} \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu} \hat{k}},$$

Смещение частоты $\Delta\omega^{(\beta)}$ постоянно на масштабах $L^{(\beta)}$ и $T^{(\beta)}$ и переменно на масштабах $L^{(\beta')}, T^{(\beta')}$ с $\beta' < \beta$. Чем больше разность $\beta - \beta'$, тем более случайный характер имеет смещение частоты $\Delta\omega^{(\beta)}$.

Относительное смещение частоты

$$\frac{\Delta\omega_0^{(\beta)}}{\omega_0^{(0)}} \approx \frac{\mathbf{k} E_\beta'}{k E_0} = \frac{E_\beta'}{E_0} \frac{\cos \vartheta_\beta(k)}{\cos \vartheta_0(k)},$$

где $\vartheta_\beta(k)$ и $\vartheta_0(k)$ — углы между вектором \mathbf{k} и векторами E_β и E_0 . Для средней части спектра турбулентности в высокоширотной ионосфере при $\vartheta_0(k)$ и $\vartheta_\beta(k)$, меньших $\pi/2$, относительное смещение частоты может составить от долей до 10 и более процентов.

Представим $\gamma^{(\beta)}$ в виде суммы $\gamma^{(\beta)} = \gamma^{(0)} + \Delta\gamma^{(\beta)}$, где

$$\gamma^{(0)} = \frac{\mathbf{k} V^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}} + \frac{C_s^2}{\Omega_{H,i}} \frac{\hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma^{(\beta)} = & \frac{\mathbf{k} V^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}_\beta^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}_\beta^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}} + \\ & + \frac{\mathbf{k} V'_\beta \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}} + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+ \frac{\mathbf{k} V'_\beta \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}_\beta^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} \mathbf{x}_\beta^{(0)} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}} +$$

$$+ \frac{\nabla V_{i,\beta} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - \nabla V_{e,\beta} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}} + \frac{k D_i^{\beta+1} \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \mu^e \hat{\mathbf{k}} - k D_e^{\beta+1} \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \mu^i \hat{\mathbf{k}}}{\hat{\mathbf{k}} \mu \hat{\mathbf{k}}}.$$

Первое слагаемое в (15) описывает вклад в $\gamma^{(\beta)}$ градиентов крупномасштабных неоднородностей, второе — влияние дополнительной конвекции за счет возмущений скорости рангов, третье — совместное влияние первых двух факторов на формирование неоднородностей ранга β . Четвертое слагаемое показывает вклад сдвига скоростей зарядов, пятое — диссипации энергии возмущений ранга β на неоднородностях высших рангов. Последнее слагаемое (15) всегда отрицательное, остальные четыре — квазистационарны на масштабах $L^{(\beta)}$ и $T^{(\beta)}$, флюктуируют на масштабах рангов $\beta' < \beta$.

Таким образом выражение (12) дает инкремент нарастания градиентно-дрейфовой неустойчивости, в котором учтены основные нелинейные эффекты, рассмотренные в работах [6-9].

4. ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ

Для сопоставления вклада каждого из слагаемых (15) в $\gamma^{(\beta)}$ необходимо оценить величину турбулентной диффузии. Выражение для турбулентной диффузии находят обычно в приближении случайной фазы. В работах [5, 13] высказано мнение, что приближение случайной фазы для дрейфовых неустойчивостей неприемлемо, поскольку фазовая ско-

рость возмущений для всех \mathbf{k} одинакова и фазовые соотношения между $n_{\mathbf{k}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}}$ не случайны.

Выше показано, что на масштабах $L^{(\beta')}, T^{(\beta')}$ ($\beta' < \beta$) смещение частоты $\Delta\omega^{(\beta)}$ — флюктуирующая величина. Следовательно, фазовая скорость возмущений ранга β также имеет стационарную и флюктуирующую составляющие.

Представим $\varphi_{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ в виде

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(\beta)} = a_{\mathbf{k}} \exp(i\psi_{\mathbf{k}}) \frac{n_{\mathbf{k}}^{(\beta)}}{n_{\beta}}.$$

Из выражения (10) при $a = i$ получим

$$a_{\mathbf{k}}^2 = \frac{P^2 + Q^2}{(\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2 + (\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2},$$

где

$$P = \omega_0^{(\beta)} - kV_{\beta, \beta} = -kV_{\beta} \frac{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{\hat{k} \hat{k}},$$

$$Q = \gamma^{(\beta)} + \hat{k} D_t^{\beta+1} \hat{k} + \nabla V_{\beta, \beta} + \frac{C_s^2}{2\Omega_{H, t}} \hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}.$$

Для анизотропных неоднородностей F -области ионосферы

$$W = \left| \frac{\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}} \right| = \Theta_i \left| \frac{x^{(0)} \sin \chi_0(k) + x'_{\beta} \sin \chi_{\beta}(k)}{k_{\perp}} \right|,$$

где $\chi_0(k)$ и $\chi_{\beta}(k)$ — углы между вектором \hat{k} и векторами $x^{(0)}$ и x'_{β} . При $|P| \gg |Q|$ и $W \ll 1$ для фазового угла $\psi_{\mathbf{k}}$ найдем

$$\sin \psi_{\mathbf{k}} \approx - \frac{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{[(\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2 + (\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2]^{1/2}}; \quad (16)$$

$$\cos \psi_{\mathbf{k}} \approx - \frac{\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{[(\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2 + (\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2]^{1/2}}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует при $|x^{(0)} \sin \chi_0(k)| \gg |x'_{\beta} \sin \chi_{\beta}(k)|$ и $W \ll 1$ $\psi_{\mathbf{k}} \approx -\pi/2$. С ростом амплитуды возмущений флюктуации фазового угла $\psi_{\mathbf{k}}$ относительно $\psi_{\mathbf{k}}^{(0)} = -\pi/2$ возрастают. Для интенсивных возмущений, когда $|Q| \gg |P|$,

$$\sin \psi_{\mathbf{k}} = - \frac{\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{[(\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2 + (\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2]^{1/2}}; \quad (18)$$

$$\cos \psi_{\mathbf{k}} = - \frac{\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k}}{[(\hat{k} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2 + (\hat{x}_{\beta} \overset{\wedge}{\mu}{}^i \hat{k})^2]^{1/2}}. \quad (19)$$

В зависимости от величины W фазовый угол изменяется от $-\pi/2$ до $3\pi/2$. Таким образом, при малых возмущениях $\psi_k = -\pi/2$. При больших возмущениях он изменяется от 0 до 2π . Следовательно, при сильной турбулентности приближение случайной фазы оправдано.

Как отмечено выше, главный эффект турбулентной диффузии можно учесть в дрейфовом приближении, и, следовательно, можно воспользоваться результатом Чена [11]:

$$\mathbf{k} \hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k} = \sum_{\beta'=\beta+1}^{\infty} (\mathbf{k}' V^{(\beta')})^2 / \mathbf{k}^{(\beta')} \hat{D}_a^{\beta+2} \mathbf{k}^{(\beta')}. \quad (20)$$

Равенство (20) не дает явного выражения для тензора диффузии, а определяет связь между тензорами \hat{D}_a^β разных рангов. Для оценки величины $\hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k}$ используем гипотезу подобия [11]

$$\mathbf{k} \hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k} k^{-2} \approx \mathbf{k}^{(\beta')} \hat{D}_a^{\beta+2} \mathbf{k}^{(\beta')} (k^{(\beta')})^{-2}. \quad (21)$$

Соотношение (21) выражает приближенное равенство тензоров диффузии соседних рангов. Это отношение не транзитивно, т. е. из

$$\mathbf{k} \hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k} k^{-2} \approx \mathbf{k}' \hat{D}_a^{\beta+2} \mathbf{k}' (k')^{-2}$$

и

$$\mathbf{k}' \hat{D}_a^{\beta+2} \mathbf{k}' (k')^{-2} \approx \mathbf{k}'' \hat{D}_a^{\beta+3} \mathbf{k}'' (k'')^{-2}$$

не следует, что

$$\mathbf{k} \hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k} k^{-2} \approx \mathbf{k}'' \hat{D}_a^{\beta+3} \mathbf{k}'' (k'')^{-2}.$$

Из (20) и (21) получим

$$\mathbf{k} \hat{D}_a^{\beta+1} \mathbf{k} \approx \frac{1}{B_0} \overline{k^{(\beta+1)}} |E^{\beta+1}|,$$

где

$$\overline{k^{(\beta+1)}}^2 = \frac{\sum_{\beta'=\beta+1}^{\infty} (\mathbf{k}^{(\beta')} E^{(\beta')})^2}{(E^{\beta+1})^2}.$$

5. ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ВКЛАД НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Обозначим через $\gamma_j^{(0)}$ первое слагаемое (14), а через I_j — отношение j -го слагаемого (15) к $\gamma_j^{(0)}$. Для анизотропных неоднородностей F -области ионосферы с $k_\perp^2/k_\parallel^2 \geq \Theta_i \Theta_e$ получим

$$I_1 \approx \frac{x'_\beta}{x^{(0)}} \frac{\sin \chi_\beta(k)}{\sin \chi_0(k)}; \quad (22)$$

$$I_2 \approx \frac{n'_\beta}{n^{(0)}} \frac{\sin \vartheta_\beta(k)}{\sin \vartheta_0(k)}; \quad (23)$$

$$I_3 \approx I_1 I_2; \quad (24)$$

$$I_4 \approx \frac{\tilde{k}_{\parallel\beta}}{k_\perp \sin \chi_0(k)} \frac{\nabla_\parallel n'_\beta}{\nabla n^{(0)}}, \quad (25)$$

где

$$\tilde{k}_{\parallel \beta} = \sum_{\beta'=\beta+1}^{\infty} k_{\parallel \beta'}^{(\beta')} E_{\parallel \beta'}^{(\beta')}/E_{\parallel \beta},$$

$$I_5 \approx \frac{\overline{k^{\beta+1}}}{k} \frac{\nabla n^{\beta+1}}{\nabla n^{(0)}} \frac{1}{\sin \chi_0(k) \sin \vartheta_0(k)}. \quad (26)$$

Для возмущений ранга β угол между $\nabla n^{(\beta-1)}$ и k примерно равен $\pi/2$, а между $\nabla n^{(\beta-2)}$ и k — примерно 0 или π . Ориентация k относительно градиентов плотности низших рангов будет близкой к изотропной, и вклад $\nabla n^{(\beta')}$ с $\beta' < \beta - 2$ в I_1 может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому при $|\nabla n^{(\beta-1)} / \nabla n^{(0)}| \geq 1$ влияние предшествующего каскада на развитие возмущений ранга β становится доминирующим. Сопоставление (23), (24) показывает, что вторым по величине будет третье слагаемое. Сдвиг скоростей за счет крупномасштабных возмущений вносит незначительный вклад I_4 по сравнению с первыми тремя слагаемыми. Этот член следует учитывать только при слабо анизотропных неоднородностях, когда

$$\tilde{k}_{\parallel \beta}^2 > k_{\perp} |\nabla n^{(0)} / n^{(0)}|.$$

Для оценки относительного вклада турбулентной диффузии положим, что δ — доля спектра турбулентности n для масштабов $k' > k$. Тогда приближенно можно записать

$$I_5 \approx \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\overline{k^{\beta+1}}}{k} \frac{\nabla n'_{\beta}}{\nabla n^{(0)}}.$$

Так как $\overline{k^{\beta+1}}/k > 1$, то, если δ не слишком мало, $I_5 \geq I_1$.

Таким образом, для средней части широкополосного спектра турбулентности градиентно-дрейфовой неустойчивости основными нелинейными эффектами являются турбулентная диффузия на возмущениях высшего ранга и влияние градиентов плотности крупномасштабных неоднородностей. Остальные эффекты (перенос зарядов возмущениями электрического поля, сдвиг скоростей V_a) влияют на развитие турбулентности в меньшей степени.

Приведенные выше оценки показали, что при конечных амплитудах возмущений слагаемое I_1 дает максимальный положительный вклад в нелинейный инкремент неустойчивости. С другой стороны, отрицательный член I_5 больше или равен I_1 . Следовательно, при сильной турбулентности градиентно-дрейфовая неустойчивость стабилизируется главным образом за счет турбулентной диффузии.

Предположение о каскадной перекачке энергии неустойчивости от больших масштабов к малым позволяет сделать некоторое заключение о форме спектра турбулентности. Выше отмечено, что вклад предыдущего каскада $\beta-1$ в формирование неоднородностей ранга β будет доминировать над вкладом градиента внешнего масштаба, если

$$\left| \frac{\nabla n^{(\beta)}}{n_{\beta}} \right| > \left| \frac{\nabla n^{(0)}}{n^{(0)}} \right| = \kappa^{(0)}.$$

Полагая $n^{(\beta)}/n_{\beta} = (\kappa^{(0)}/k)^{\alpha_1}$, получаем

$$(\kappa^{(0)}/k)^{\alpha_1} > \kappa^{(0)} k,$$

$\alpha_1 < 1$. Следовательно, механизм турбулизации плазмы будет каскадным, если показатель степени спектрального распределения меньше единицы. Заметим, что, хотя теория подобия для градиентно-дрейфовой неустойчивости предсказывает спектральное распределение с $\alpha_1 = 1$ [14], прямые измерения на спутниках показали [15], что в F-области ионосферы для средней части спектра $\alpha_1 = 0,92$. Таким образом, рассмотрение нелинейной стадии градиентно-дрейфовой неустойчивости в предположении каскадной перекачки энергии из крупномасштабных мод в мелкомасштабные позволило оценить вклад различных нелинейных эффектов и показать, что основным процессом, стабилизирующим неустойчивость, будет турбулентная диффузия на возмущениях высших рангов. Стабилизация роста возмущений ранга за счет ослабления градиента внешнего масштаба [8, 9, 13] не окажет существенного влияния при каскадном механизме развития неустойчивости, поскольку положительная часть нелинейного инкремента определяется, в основном, $\nabla n^{(8-1)}$.

Перенос зарядов за счет возмущений электрического поля в F-области ионосферы оказывает менее существенное влияние на развитие неустойчивости, чем возмущения плотности, хотя, как показано в работе [7], в нижней ионосфере на высотах $H \approx 100$ км этот нелинейный эффект может стать доминирующим.

Вклад сдвигов скоростей зарядов за счет возмущений становится ощутимым только для неоднородностей с малой анизотропией.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Tsuda, T. Sato and K. I. Maeda, Radio Sci., 4, 212 (1966).
2. J. D. Whitehead, J. Atm. Terr. Phys., 29, 1285 (1967).
3. D. M. Cunold, J. Geophys. Res., 74, 5709 (1969).
4. G. C. Reid, J. Geophys. Res., 73, 1627 (1968).
5. A. Register, J. Geophys. Res., 77, 2975 (1972).
6. T. D. Rognlien and J. Weinstok, J. Geophys. Res., 79, 4733 (1974).
7. R. N. Sudan, J. Akinrimisi and D. T. Farley, J. Geophys. Res., 78, 240 (1973).
8. T. Sato, Phys. Fluids, 14, 2426 (1971).
9. T. Sato, Phys. Fluids, 17, 621 (1974).
10. C. M. Tchen, Phys. Fluids, 16, 13 (1973).
11. C. M. Tchen, Plasma Phys., 18, 609 (1976).
12. М. Г. Гельберг, сб. Распространение радиоволн в полярной ионосфере, изд. Наука, Апатиты, 1977, стр. 3.
13. T. Sato, J. Geophys. Res., 81, 539 (1976).
14. E. Ott and D. T. Farley, J. Geophys. Res., 79, 2469 (1974).
15. P. L. Dayson, J. P. McClure and W. B. Hanson, J. Geophys. Res., 79, 1497 (1974).

Полярный геофизический институт
Кольского филиала АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1977 г.

NONLINEAR EFFECTS OF THE GRADIENT DRIFT INSTABILITY

M. G. Gel'berg

The description of the nonlinear development stage of the gradient-drift instability is given. An expression has been obtained for the increment of the mode increase k taking into account the energy pump from the modes with $k' < k$ and its dissipation by disturbances with $k'' > k$. It is shown that for the average part of the turbulence spectrum the principle nonlinear effect is the turbulent diffusion by the small-scale disturbances and the influence of the plasma density gradients of large-scale modes.

УДК 535.825.4

К ТЕОРИИ МИКРОВОЛНОВЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

A. Ф. Крупнов, A. B. Буренин

В статье проведена общая классификация микроволновых спектрометров и указаны принципиальные ограничения на чувствительность в каждом их типе. В результате определены предельно достижимые параметры микроволновых спектрометров и пути их реализации.

Интенсивное развитие в последнее время методов микроволновой спектроскопии [1-4] стимулировало более тщательное рассмотрение теории микроволновых спектрометров. Обзор полученных результатов дает возможность провести общую классификацию микроволновых спектрометров, указать принципиальные ограничения на чувствительность в каждом их типе и таким образом определить предельно достижимые параметры микроволновых спектрометров и пути их реализации. Это является целью настоящей работы.

1. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРОМЕТРА

Микроволновой спектрометр предназначен для регистрации взаимодействия сканируемого по частоте когерентного микроволнового излучения с образцом газа, который в подавляющем большинстве случаев находится в состоянии термодинамического равновесия. При взаимодействии меняются характеристики как излучения, так и газа; эти изменения, передаваемые по соответствующему каналу на регистратор, и являются полезным сигналом спектрометра. На регистратор поступает также информация о частоте излучения, что позволяет получить картину спектра взаимодействия. Структурная схема такого спектрометра изображена на рис. 1. Естественно считать, что характеристики источ-

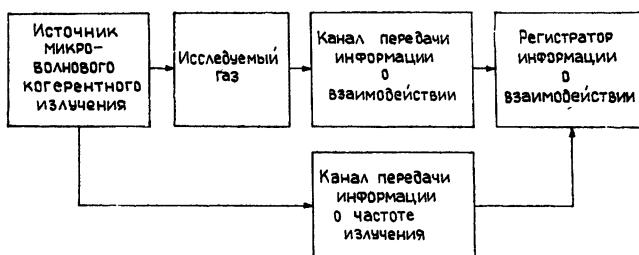


Рис. 1. Структурная схема микроволнового спектрометра.

ника когерентного излучения могут быть выбраны, по крайней мере в принципе, таким образом, чтобы обеспечить оптимальные параметры спектрометра. Напротив, объект исследований, как правило, не поддается существенным вариациям, и в дальнейшем мы будем полагать, что это — находящийся в состоянии термодинамического равновесия газ

n молекул*. Для микроволновой области наиболее характерен случай, когда

$$n_1 - n_2 \ll n_1, n_2 \ll n, \quad (1)$$

где n_1 и n_2 — число молекул соответственно в нижнем и верхнем энергетическом молекулярных состояниях, между которыми происходит переход под воздействием излучения.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МИКРОВОЛНОВЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

Следуя работе [5], все микроволновые спектрометры в зависимости от способа формирования полезного сигнала от линий газа можно разделить на два класса: в приборах первого класса полезный сигнал наблюдается в виде изменения параметров излучения, прошедшего через образец, а в приборах второго класса сигналом является изменение параметров самого образца под воздействием излучения. Эта ситуация условно изображена на рис. 2. Данная классификация является достаточно глубокой. Как будет показано в дальнейшем, достоинства и недостатки двух основных классов спектрометров являются взаимно дополнительными. В результате те основные проблемы, которые нужно решать для достижения предельной чувствительности в одном классе спектрометров, практически отсутствуют в другом.

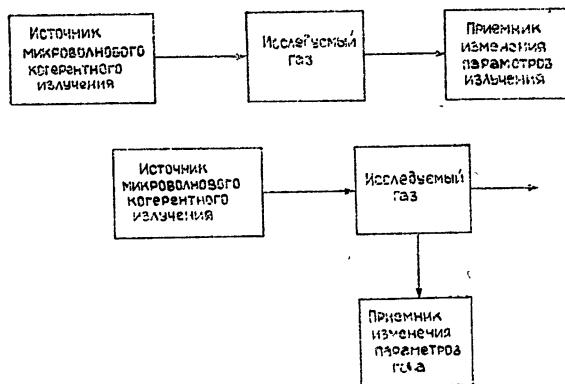


Рис. 2. Классификация спектрометров.

3. ПРЕДЕЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МИКРОВОЛНОВЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

Условие наблюдения полезного сигнала при заданном соотношении сигнал/шум (S/N) можно записать в виде

$$P_c/P_{\text{ш}} \sim S/N, \quad (2)$$

где P_c — мощность полезного сигнала на входе регистратора; $P_{\text{ш}}$ — мощность шума в полосе приема регистратора. В зависимости от того, изменение какой характеристики поля или образца является сигналом, конкретные выражения в (2) будут меняться. Несмотря на это разнообразие, мощность сигнала можно характеризовать мощностью излучения, поглощаемого газом, и провести общее рассмотрение с этой точки зрения.

* Тем самым из настоящего рассмотрения исключается, например, метод двойного резонанса и т. д.

Для достижения предельной чувствительности микроволновый спектрометр, как это следует из анализа его структурной схемы и выражения (2), должен удовлетворять следующим общим требованиям:

(А) мощность, поглощаемая газом, должна быть максимально возможной при заданном разрешении и максимально преобразовываться в полезный сигнал (условие максимума сигнала);

(Б) увеличение мощности сигнала при увеличении мощности излучения не должно сопровождаться увеличением мощности шума (условие независимости сигнала и шума);

(В) мощность шума должна определяться шумами канала передачи, который должен иметь минимальное количество рабочих степеней свободы* (условие минимума шума).

В спектрометрах первого класса трудности связаны с выполнением первых двух требований. Действительно, для обеспечения максимума сигнала необходимо, чтобы мощность поля излучения была близка к мощности, нужной для насыщения спектральной линии. Менее принципиален, хотя и практически важен тот факт, что при выполнении этого требования может произойти перегрузка СВЧ приемника. Главное же, что сигнал, представляющий из себя малое изменение мощности излучения, наблюдается на большом фоновом уровне. В результате при увеличении мощности излучения будет расти не только сигнал, но и шум [6]. Выполнение третьего требования не вызывает затруднений, так как канал передачи является электромагнитным и может быть сделан одномодовым.

В спектрометрах второго класса ситуация обратна. Фоновый сигнал здесь принципиально отсутствует, и первые два требования легко выполняются. Все трудности связаны только с выполнением третьего требования. Действительно, поглощаемая газом энергия первоначально распределяется по $n_1 - n_2$ молекулам. Столкновительная релаксация может привести только к перераспределению энергии по n молекулам. Поскольку оба эти числа весьма велики по сравнению с единицей, то трудно реализовать канал передачи информации о взаимодействии с малым числом степеней свободы.

При выполнении всех трех требований условие обнаружимости полезного сигнала преобразуется к виду

$$(P_{\text{погл}})_{P_0 \sim P_{\text{нас}}} \sim \frac{S}{N} kT \Delta f. \quad (3)$$

Здесь $P_{\text{погл}}$ — поглощаемая газом мощность при мощности электромагнитного излучения P_0 ; $P_{\text{нас}}$ — мощность насыщения наблюдаемой спектральной линии; Δf — полоса приема регистратора. Подчеркнем, что из выражения (3) следует предельная чувствительность микроволновых спектрометров независимо от их класса. Рассмотрение конкретных типов спектрометров с точки зрения соотнесения их чувствительности с предельной будет проведено ниже.

4. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИЛА МИКРОВОЛНОВЫХ СПЕКТРОМЕТРОВ

Разрешающая сила микроволнового спектрометра определяется шириной спектральных линий. Уменьшая давление в газовой ячейке, можно сузить линию так, чтобы решающим фактором было доплеровское уширение. Дальнейшее повышение разрешающей силы связано с получением узкой субдоплеровской структуры. Интересно, что круг

* Температура канала передачи обычно определяется температурой образца газа, причем микроволновая спектроскопия в основном работает с полярными газами, которые не допускают глубокого охлаждения.

соответствующих методов во втором классе спектрометров, по-видимому, шире. Последнее утверждение основывается на том факте, что методы, применимые в первом классе, применимы и во втором; но только в спектрометрах второго класса возможна селекция по скоростям возбужденных молекул в канале передачи информации [2]. Отметим, что разрешающая сила при заданной величине модуля матричного элемента перехода непосредственно определяет максимальную мощность излучения, которая может быть использована в спектрометре.

5. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРОМЕТРА

Для сравнения конкретных типов спектрометров между собой необходимо иметь некоторый формальный критерий. С этой целью мы введем понятие основного уравнения микроволнового спектрометра.

Как известно, основными параметрами газа, определяющими его взаимодействие с излучением, являются разность населенностей на резонансных уровнях $n_1 - n_2$, модуль матричного элемента перехода между ними $|\mu_{12}|$ и однородная полуширина наблюдаемой спектральной линии $\Delta\nu$. Первые два параметра характеризуют интенсивность взаимодействия, а последний — время взаимодействия. Соотношение между ними, вытекающее из условия наблюдения сигнала с заданным соотношением сигнал/шум (2), мы и будем называть основным уравнением микроволнового спектрометра. Смысл основного уравнения заключается в следующем: какая бы характеристика ни использовалась в той или иной конкретной ситуации для определения чувствительности спектрометра, ее нижний предел определяется только требованием выполнения основного уравнения*.

Проиллюстрируем сказанное на примере «идеального» микроволнового спектрометра, основное уравнение которого записывается в виде (3). Учитывая, что

$$(P_{\text{погл}})_{P_0 \sim P_{\text{нас}}} \sim (n_1 - n_2) h \nu \Delta \nu, \quad (4)$$

получаем

$$(n_1 - n_2) \Delta \nu \sim \frac{S}{N} \frac{kT}{h \nu} \Delta f. \quad (5)$$

Прежде всего заметим, что в полученное основное уравнение не входит величина модуля матричного элемента перехода, т. е. критерий обнаружения сигнала безразличен к этому параметру. Этот парадоксальный, на первый взгляд, результат связан с тем обстоятельством, что используемая в спектрометре мощность

$$P_0 \sim P_{\text{нас}} \sim \frac{3}{8\pi} \frac{ch^2 (\Delta\nu)^2 as}{|\mu_{12}|^2} \quad (6)$$

стремится к бесконечности при $|\mu_{12}| \rightarrow 0$ и поглощенная мощность остается конечной. Здесь a — сечение ячейки, $s = \sum_M 1$ — степень вырождения перехода по ориентации момента количества движения молекулы относительно неподвижной системы координат. Разумеется, имеющаяся в распоряжении экспериментатора мощность излучения P_0 ограничена.

В наиболее распространном случае, когда однородная полуширина

* Следует заметить, что минимально обнаружимые значения различных конкретных характеристик (например, коэффициента поглощения) в условиях насыщения спектральных линий начинают выражаться через те же параметры, которые входят в определение этих конкретных характеристик. В результате получаются неявные уравнения, анализ которых затруднен.

спектральной линии определяется столкновениями молекул между собой, условие (6) при заданной мощности P_0 фиксирует оптимальную величину $\Delta\nu_{\text{opt}}$. Действительно, при $\Delta\nu < \Delta\nu_{\text{opt}}$ сигнал ослабевает как n^2 , а при $\Delta\nu > \Delta\nu_{\text{opt}}$ величина сигнала стремится к насыщению, и мы при отсутствии выигрыша в величине сигнала проигрываем в разрешающей силе. С учетом этого обстоятельства и при переходе к более удобной для дальнейшего рассмотрения относительной разности населенностей $\delta_{12} = (n_1 - n_2)/n$ основное уравнение (5) можно переписать в виде

$$\delta_{12} |\mu_{12}| \sim \frac{S}{N} \frac{kT\Delta f}{n\nu} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{\text{cas}}{P_0} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Подчеркнем, что в уравнении (7) плотность числа молекул в газовой ячейке определяется используемой в спектрометре мощностью согласно условию (6).

6. КОНКРЕТНЫЕ ТИПЫ СПЕКТРОМЕТРОВ ПЕРВОГО КЛАССА

Рассмотрим спектрометр первого класса, сигналом от линии в котором является изменение мощности излучения в результате взаимодействия с газом, а в качестве приемника используется квадратичный СВЧ детектор. Практическим примером такого спектрометра является, например, штарк-спектрометр [6].

Для квадратичного детектора

$$i = \alpha P_{\text{вх}}, \quad (8)$$

где i — ток детектора, $P_{\text{вх}}$ — мощность на входе детектора. Как известно,

$$P_{\text{вх}} = P_0 + 2(P_0 P_{\text{ш}})^{1/2} + P_{\text{ш}}. \quad (9)$$

Нетрудно показать, что при заданной величине P_0 выгодно работать по концентрации молекул на пороге насыщения. В результате, так как сигналом является изменение мощности излучения,

$$i_{\text{c}} = \alpha \Delta P_0 = \alpha P_{\text{погл}} \sim \alpha(n_1 - n_2) h\nu \Delta\nu. \quad (10)$$

Канал передачи здесь можно сделать одномодовым и

$$i_{\text{ш}} = 2\alpha (P_{\text{нac}} kT\Delta f)^{1/2}. \quad (11)$$

Следовательно, основное уравнение запишется в виде

$$\delta_{12} |\mu_{12}| \sim \frac{S}{N} \frac{1}{n\nu} \left(\frac{3}{2\pi} kT\Delta f \text{cas} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

В связи с тем, что для рассматриваемого спектрометра принципиально не выполняется требование (Б), его предельные характеристики значительно хуже, чем у идеального спектрометра. Действительно, из (7) и (12) получаем

$$\frac{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{штарк}}}{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{ид}}} \sim 2 \left(\frac{P_0}{kT\Delta f} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (13)$$

Ситуация не меняется и в случае использования вместо квадратичного детектора супергетеродинного приемника или применения баланса по СВЧ излучению [7]*. Вообще в настоящее время неясно, каким образом хотя бы частично обойти затруднения, связанные с выполнением

* В дальнейшем мы будем условно называть штарк-спектрометром вообще спектрометр первого класса.

условия (Б) в микроволновых спектрометрах первого класса. Именно это обстоятельство накладывает наиболее принципиальное ограничение на возможность повышения чувствительности таких спектрометров.

7. КОНКРЕТНЫЕ ТИПЫ СПЕКТРОМЕТРОВ ВТОРОГО КЛАССА

Рассмотрим первоначально спектрометр второго класса, сигналом от спектральных линий в котором является изменение термодинамических параметров газа в результате взаимодействия с излучением. Практическим примером такого спектрометра является, в частности, спектрометр с акустическим детектором (РАД) [1, 3].

Из-за поглощения мощности излучения газ изменяет свою энергию с частотой модуляции f_m , причем максимальная амплитуда колебаний

$$\Delta E_c \sim P_{\text{погл}} \frac{\Delta f^{\text{яч}}}{f_m^2 + (\Delta f^{\text{яч}})^2} \frac{1}{2\pi}, \quad (14)$$

где $\Delta f^{\text{яч}}$ — полоса частот, связанная с временем тепловой релаксации газа в ячейке. Условие обнаружимости этого эффекта на фоне флюктуаций энергии газа, а следовательно, и эффекта изменения любого термодинамического параметра можно записать в виде

$$\Delta E_c \sim (\bar{E}_f^2 \Delta f)^{1/2}. \quad (15)$$

Здесь \bar{E}_f^2 — спектральная плотность мощности флюктуаций энергии газа в полосе приема Δf . Учитывая, что

$$\bar{E}_f^2 \Delta f^{\text{яч}} \sim (kT)^2 n, \quad (16)$$

и оптимизируя условие обнаружения, представленное в виде (2), по параметру $\Delta f^{\text{яч}}$ при заданной частоте модуляции*, получим

$$P_{\text{погл}} \sim \frac{S}{N} 2\pi kT (N \Delta f^{\text{яч}} \Delta f)^{1/2}. \quad (17)$$

Как обычно, считая, что мы работаем при заданной мощности P_0 по концентрации молекул на пороге насыщения**, получаем основное уравнение спектрометра в виде

$$\delta_{12} |\mu_{12}| \sim \frac{S}{N} \frac{kT}{v} \left(\frac{3\pi}{2} \frac{\text{cas } \Delta f^{\text{яч}} \Delta f}{n P_0} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Этот результат было нетрудно предвидеть, поскольку рассматриваемый спектрометр отличается от идеального только большим числом рабочих степеней свободы канала передачи. Каналом передачи здесь является газ, причем число степеней свободы пропорционально n . Из (7), (12) и (18) получаем

$$\frac{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{РАД}}}{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{ид}}} \sim 2\pi \left(n \frac{\Delta f^{\text{яч}}}{\Delta f} \right)^{1/2} \gg 1; \quad (19)$$

$$\frac{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{штарк}}}{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{РАД}}} \sim \left(\frac{P_0}{P_{\text{кр}}} \right)^{1/2} \frac{n_{\text{РАД}}}{n_{\text{штарк}}}, \quad (20)$$

* Частота модуляции ограничена снизу техническими шумами. Условие оптимизации дает $\Delta f^{\text{яч}} \sim \sqrt{3} f_m$.

** Подчеркнем, что РАД принципиально может работать только при условии, если однородная полуширина спектральных линий определяется столкновениями молекул между собой.

т. е., исключая технические детали и полагая $n_{\text{РАД}} \sim n_{\text{штарк}}$, получим, что РАД превосходит штарк-спектрометр по чувствительности при использовании мощностей больше некоторой критической, причем

$$P_{\text{кр}} \sim \pi^2 n_{\text{РАД}} kT \Delta f_{\text{яч}} \quad (21)$$

не зависит от диапазона частот*.

Хотя мы исследовали пока только самый невыгодный вариант спектрометра второго класса (число степеней канала передачи определяется полным числом молекул в газовой ячейке), тем не менее его чувствительность в определенных условиях может быть даже лучше, чем любого спектрометра первого класса. Рассмотрим теперь перспективы дальнейшего повышения чувствительности, т. е. перспективы уменьшения числа рабочих степеней свободы канала передачи.

В газовой ячейке взаимодействуют с излучением и поглощают энергию $n_1 - n_2$ молекул. Можно попытаться считать возбужденные молекулы, т. е. применить приемник в виде счетчика числа частиц на уровне. Поскольку приходится считать на фоне равновесной населенности уровня, то число степеней свободы канала передачи будет пропорционально n_2 (или n_1), что существенно меньше n . К сожалению, в настоящее время техника квантовых счетчиков для микроволновой спектроскопии еще совершенно не разработана. Более того, не видно, что еще можно предложить, кроме переизлучения поглощенной молекулами энергии. Чтобы отсечь поле накачки, необходимо разделение процессов поглощения и переизлучения во времени или пространстве. Обычное спонтанное излучение не годится для этой цели в силу его ничтожной интенсивности в диапазоне частот микроволновой спектроскопии. Однако процесс переизлучения идет значительно быстрее в случае использования спонтанного когерентного излучения [8]. Суть его заключается в следующем.

Поле излучения индуцирует в образце газа волну поляризации. Если снять поле излучения или вывести взаимодействующие молекулы из области поля без искажения фазового фронта волны поляризации, то волна поляризации будет излучать энергию в ту же самую модуляции, которая ее возбудила. Интенсивность этого когерентного спонтанного излучения пропорциональна квадрату числа возбужденных молекул. Хотя при реализации этой методики мы выполним свою цель, а именно перейдем к одномодовому каналу передачи сигнала на регистратор, нам придется заплатить за это проигрышем в сигнале из-за малого коэффициента преобразования мощности поглощения в мощность переизлучения, т. е. не будет выполнено условие (A). Ниже мы проведем оценки как для спектрометра с разделением во времени (СРВ), так и для спектрометра с разделением в пространстве (СРП).

Практическим примером СРВ является, например, сантиметровый спектрометр, описанный в [9]. СРП пока еще не реализован. При оценках мы будем считать, что в СРВ период модуляции выбирается порядка времени жизни возбужденного состояния и прием сигнала осуществляется в узкой полосе на частоте модуляции. Что касается СРП, то, по-видимому, его удобно выполнить на основе предложенного в работе [2] субдоплеровского спектрометра второго класса (рис. 3). При этих предложениях рассмотрение для обоих спектрометров практически совпадает. Отметим, что, как правило, время жизни возбужденного состояния много меньше времени переизлучения.

Переизлучаемая мощность может быть представлена в виде

$$P_{\text{изл}} \sim 2\pi E_{\text{погл}} \Delta v_{\text{изл}}. \quad (22)$$

* Заметим, что поскольку при заданной конфигурации ячейки $\Delta f_{\text{яч}} \sim 1/n$, то $P_{\text{кр}}$ не зависит от числа частиц в ячейке.

Здесь $E_{\text{погл}}$ — средняя мощность, поглощаемая молекулами за время взаимодействия с полем; $\Delta \nu_{\text{изл}}$ — полуширина линии переизлучения. Мощность источника излучения должна обеспечивать перевод системы взаимодействующих с полем молекул в сверхизлучательное состояние*. При этом

$$E_{\text{погл}} \sim \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \hbar \nu, \quad (23)$$

для полуширины линии переизлучения нетрудно получить

$$\Delta \nu_{\text{изл}} \sim \frac{1}{\eta} (n_1 - n_2) \Delta \nu_{\text{сп}}, \quad (24)$$

где коэффициент $1/\eta$ учитывает долю молекул, участвующих в переизлучении (из-за разброса по времени взаимодействия с полем, по квантовому числу M и т. д.**), а

$$\Delta \nu_{\text{сп}} \sim \frac{(2\pi)^2 \nu^3}{hc^3} |\mu_{12}|^2 \quad (25)$$

— полуширина линии спонтанного излучения изолированной молекулы.

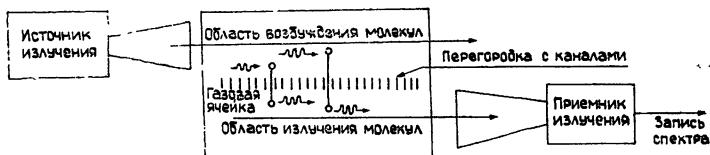


Рис. 3. Спектрометр с пространственным разделением, использующий когерентное спонтанное излучение молекул.

В результате основное уравнение спектрометра имеет вид

$$\delta_{12} |\mu_{12}| \sim \left(\frac{S}{N} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi n \nu^2} \left(\frac{\eta}{\pi} kT \Delta f c^3 \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Из (12), (18) и (26) получаем

$$\frac{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{штарк}}}{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{СРВ (П)}}} \sim \left(\frac{S}{N} \right)^{1/2} \frac{\nu}{\nu_{kp}} \frac{n_{\text{штарк}}}{n_{\text{СРВ (П)}}}; \quad (27)$$

$$\frac{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{РАД}}}{(\delta_{12} |\mu_{12}|)_{\text{СРВ (П)}}} \sim \left(\frac{S}{N} \right)^{1/2} \frac{\nu}{\nu_{kp}} \left(\frac{P_{kp}}{P_0} \right)^{1/2} \frac{n_{\text{СРВ (П)}}}{n_{\text{РАД}}}. \quad (28)$$

Здесь

$$\nu_{kp} \sim c \left(\frac{\eta}{6\pi^2 as} \right)^{1/2},$$

$$P_{kp} \sim \pi^2 n_{\text{РАД}} kT \Delta f^{1/2}. \quad (29)$$

* Условие на нижнюю границу мощности источника излучения практически совпадает с (6), где в качестве однородной полуширины линии берется полуширина, связанная с конечным временем взаимодействия с полем.

** Разумеется, расчет этого коэффициента в случаях СРВ и СРП различен.

8. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

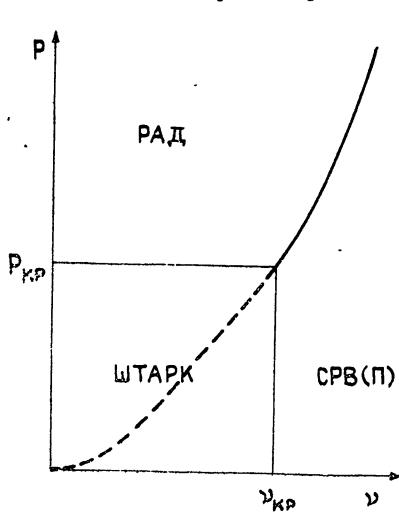
Выражения (20), (21), (27) — (29) дают возможность провести хотя и приближенное, но весьма полезное рассмотрение областей превосходства в предельной чувствительности различных типов спектрометров. Примечательно, что в конечном счете (принимая $n_{\text{штарк}} \sim n_{\text{РАД}} \sim n_{\text{СРВ(П)}}$) важнейшими параметрами являются мощность излучения, используемого в спектрометре, и рабочая частота спектрометра. Численные оценки дают

$$\nu_{\text{кр}} \sim 1 \div 25 \text{ ГГц} \quad (\text{при } a \sim 3 \text{ см}^2, \eta \sim 10 \div 10^2, s \sim 10^2 \div 1),$$

$$P_{\text{кр}} \sim 1 \text{ Вт} \quad (\text{при } a \sim 3 \text{ см}^2, l \sim 10 \text{ см}, T \sim 300 \text{ К}),$$

(l — длина газовой ячейки спектрометра).

На рис. 4 приведена диаграмма, показывающая области превосходства в предельной чувствительности для рассмотренных в этой статье типов спектрометров при условии обнаружения сигнала вида $S/N \sim 1$. Заметим, что при возрастании требования к отношению сигнал/шум



область преимущества СРВ(П) расширяется. Рассмотрение этой диаграммы позволяет сделать вывод, что область превосходства спектрометров первого класса практически совпадает с «классической» областью сантиметровой микроволновой спектроскопии с источниками излучения малой мощности. При этом важно, что в области преимущества спектрометров второго класса растет и абсолютная чувствительность спектрометров.

Рис. 4. Области преимущества в предельной чувствительности рассмотренных в статье спектрометров. Пунктиром показано проявление границ раздела РАД/СРВ(П).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. П. Казаков, Е. Н. Каракин, А. Ф. Крупнов, Письма в ЖЭТФ, 18, 285 (1973).
2. А. Ф. Крупнов, ЖЭТФ, 69, 1981 (1975).
3. А. F. Krupnov and A. V. Burenin, in «Molecular Spectroscopy: Modern Research», K. N. Rao, ed., Academic Press, 2, 93 (1976).
4. Т. Törging, J. Mol. Spectr., 48, 148 (1973).
5. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, 295 (1973); А. В. Буренин, А. Ф. Крупнов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 8, 1242 (1974).
6. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
7. В. Горди, УФН, 39, вып. 2, 201 (1949).
8. R H Dicke, Phys. Rev., 93, № 1, 99 (1954).
9. J. M. Ekkers, V Colloquium on high resolution Molecular Spectroscopy, Tours, 1977.

Институт прикладной физики АН СССР

Поступила в редакцию
19 января 1978 г.

TO THE THEORY OF MICROWAVE SPECTROMETERS

A. F. Krupnov, A. V. Burenin

The paper gives the general classification of microwave spectrometers and the principle sensitivity limitations for each type. As a result, the limiting attainable parameters of the microwave spectrometers and the way of their realization are defined.

УДК 539.2

ЗАТЯГИВАНИЕ ЧАСТОТЫ ПРИ ДВОЙНОМ РЕЗОНАНСЕ В ТАЛЛИЕВОЙ АТОМНО-ЛУЧЕВОЙ ТРУБКЕ

B. B. Стrogанов

Дано теоретическое рассмотрение поведения атомов таллия в пучке при последовательном их взаимодействии с электромагнитными полями, частоты которых соответствуют резонансным частотам переходов ($F = 1, m_F = \pm 1 \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 0, m_F = 0)$). Определены оптимальные условия наблюдения низкочастотных и высокочастотных резонансных переходов Рамзеля при использовании метода двойного резонанса с атомными переходами ($F = 1, m_F = 1 \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 0, m_F = 0) \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 1, m_F = 1)$). Исследована зависимость резонансной частоты переходов ($F = 1, m_F = 0 \leftrightarrow (F = 0, m_F = 0)$) от частоты, разности фаз и амплитуды магнитных осциллирующих полей, индуцирующих переходы ($(F = 1, m_F = 1) \leftrightarrow (F = 1, m_F = 0)$).

Приводится описание таллиевой двухрезонансной атомно-лучевой трубы и таллиевого атомного стандарта частоты на ее основе. Рассмотрены результаты экспериментального исследования двойного резонанса со схемой переходов ($F = 1, m_F = 1 \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 0, m_F = 0) \rightarrow (F = 1, m_F = 0) \rightarrow (F = 1, m_F = 1)$) и эффекта «затягивания» частоты. Приведены предварительные данные о точности и стабильности таллиевого стандарта.

Расположение уровней сверхтонкой структуры основного состояния атомов Tl^{205} дает возможность достигнуть высокой точности ($10^{-12} - 10^{-13}$) таллиевого атомного эталона частоты и времени [1]. Для атома таллия, находящегося в постоянном магнитном поле H_0 , частоты переходов между уровнями $(0,0)$, $(1,0)$ и $(1, \pm 1)$ равны

$$\nu_{(1,0)-(0,0)} = \nu_0 + 20,6 H_0^2, \\ \nu_{(1,\pm 1)-(1,0)} = \pm 4,67 \cdot 10^5 H_0 - 10,3 H_0^2, \quad (1)$$

где $\nu_0 = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$, H_0 — в эрстедах. Малая зависимость от внешних магнитных полей частоты переходов между уровнями $(1,0)$ и $(0,0)$, используемой в качестве эталонной в атомном стандарте частоты, относится к числу достоинств таллия, однако по этой же причине для пространственного разделения атомов, находящихся в состояниях $(1,0)$ и $(0,0)$, требуется применение громоздких магнитных систем.

В 1964 г. Бонаноми предложил использовать метод двойного резонанса [2] по схеме рис. 1 для уменьшения размеров таллиевой атомно-лучевой трубы. В первом магните «A» испытывают заметные отклонения лишь атомы, находящиеся в состояниях $(1, +1)$. В промежутке между двумя магнитами траектории этих атомов параллельны осям.

Во втором магните атомы с состоянием $(1, +1)$ вновь отклоняются к оси и попадают на детектор. Эффективный магнитный момент атомов, находящихся в состоянии $(1, +1)$, сравнительно велик: $\mu_{\text{эфф}} = \mu_0/3$, что позволяет применить для их пространственного разделения значительно меньшие по размерам магниты.

Между магнитами имеются катушки и резонатор для индуцирования низкочастотных — $(1, \pm 1)$ — $(1, 0)$ и высокочастотных — $(1, 0)$ — $(0, 0)$ — резонансных переходов. Атомы пучка взаимодействуют с двумя когерентными низкочастотными и двумя когерентными высокочастотными полями.

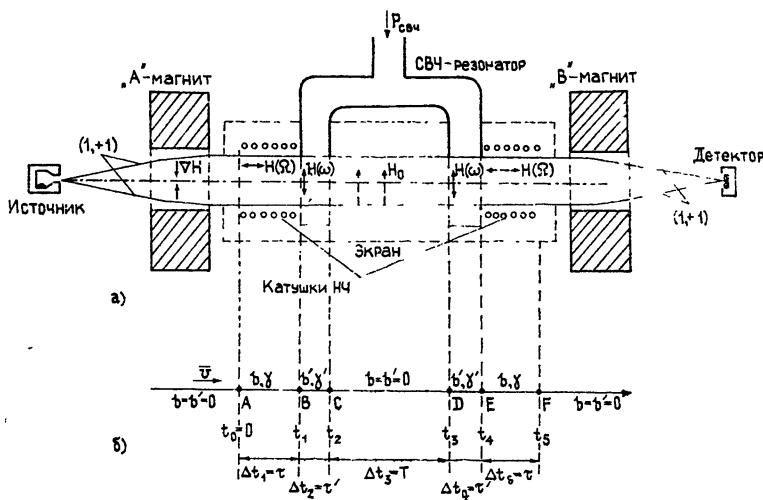


Рис. 1. Схематический вид таллиевой атомно-лучевой трубки с двойным резонансом.

В процессе проведения экспериментальных исследований с подобной атомно-лучевой трубкой была обнаружена зависимость параметров высокочастотной резонансной кривой, определяемой переходами $(1,1) \leftrightarrow (0,0)$ от условий индуцирования низкочастотных переходов $(1, \pm 1) \leftrightarrow (1,0)$. Поэтому представляет интерес рассмотреть поведение атомов в такой системе.

Уравнение Шредингера в данном случае имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi, \quad (2)$$

где \hat{H}_1 — гамильтониан, определяющий возмущение, индуцирующее переходы между зеемановскими подуровнями согласно правилам отбора $\Delta F = 0$, $\Delta m = \pm 1$; \hat{H}_2 — гамильтониан, определяющий возмущение, вызывающее переходы, между уровнями с энергиями w_i согласно правилам отбора $\Delta F = \pm 1$; $\Delta m = 0$;

$$\Psi = \sum a_{l(t)} \Psi_l \quad (i=1, \dots, 4) \quad (3)$$

— волновая функция 4-уровневой системы, представленная в виде разложения по собственным функциям не зависящего от времени гамильтониана свободного атома \hat{H}_0 , при этом $w_1 > \dots > w_4$.

Подставляя (3) в (2) и проводя обычные преобразования, получаем систему уравнений

$$i\hbar \dot{a}_{1(t)} = w_1 a_{1(t)} + a_{2(t)} \int \Psi_1^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_2 dq + \\ + a_{3(t)} \int \Psi_1^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_3 dq + a_{4(t)} \int \Psi_1^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_4 dq,$$

$$\begin{aligned}
i\hbar \dot{a}_{2(t)} &= w_2 a_{2(t)} + a_{1(t)} \int \Psi_2^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_1 dq + \\
&+ a_{3(t)} \int \Psi_2^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_3 dq + a_{4(t)} \int \Psi_2^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_4 dq, \\
i\hbar \dot{a}_{3(t)} &= w_3 a_{3(t)} + a_{1(t)} \int \Psi_3^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_1 dq + \\
&+ a_{2(t)} \int \Psi_3^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_2 dq + a_{4(t)} \int \Psi_3^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_4 dq, \\
i\hbar \dot{a}_{4(t)} &= w_4 a_{4(t)} + a_{1(t)} \int \Psi_4^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_1 dq + \\
&+ a_{2(t)} \int \Psi_4^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_2 dq + a_{3(t)} \int \Psi_4^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Psi_3 dq.
\end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $\hat{H}_1 \neq 0$, а $\hat{H}_2 = 0$. Согласно правилам отбора и с учетом того, что

$$\begin{aligned}
w_1 - w_2 &\approx w_2 - w_3 \ll w_{1+3} - w_4, \\
V_{1,3} = V_{1,4} = V_{3,4} &= 0, \quad V_{1,2} = V_{2,1}^* \neq 0, \\
V_{2,3} = V_{3,2}^* &\neq 0, \quad U_{i,j} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$V_{i,I} = \int \Psi_i^* \hat{H}_1 \Psi_j dq, \quad U_{i,I} = \int \Psi_i^* \hat{H}_2 \Psi_j dq, \tag{6}$$

мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i\hbar \dot{a}_{1(t)} &= w_1 a_{1(t)} + a_{2(t)} V_{1,2}, \\
i\hbar \dot{a}_{2(t)} &= a_{1(t)} V_{1,2} + w_2 a_{2(t)} + a_{3(t)} V_{2,3}, \\
i\hbar \dot{a}_{3(t)} &= a_{2(t)} V_{3,2} + w_3 a_{3(t)}, \\
i\hbar \dot{a}_{4(t)} &= w_4 a_{4(t)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для случая, когда $\hat{H}_1 = 0$, но $\hat{H}_2 \neq 0$ и

$$V_{ij} = 0, \quad U_{1,3} = U_{2,3} = U_{1,2} = U_{1,4} = U_{3,4} = 0, \quad U_{2,4} = U_{4,2}^* \neq 0, \tag{8}$$

мы имеем

$$\begin{aligned}
i\hbar \dot{a}_{1(t)} &= w_1 a_{1(t)}, \\
i\hbar \dot{a}_{2(t)} &= w_2 a_{2(t)} + a_{4(t)} U_{2,4}, \\
i\hbar \dot{a}_{3(t)} &= w_3 a_{3(t)}, \\
i\hbar \dot{a}_{4(t)} &= w_4 a_{4(t)} + a_{2(t)} U_{4,2}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим случай, описываемый системой (7) при возмущении, имеющем вид

$$V_{1,2} = V_{2,3} = \hbar b e^{-i\Omega t}, \quad V_{2,1} = V_{3,2} = \hbar b e^{i\Omega t}, \tag{10}$$

где Ω — частота вращения магнитного вектора возмущающего поля b , H_1 — величина, пропорциональная его напряженности: $b = \gamma_I H_1/2$; γ_I — гиromагнитные отношения. Соотношение (10) приближенно, по-

скольку в общем случае осциллирующего поля величины $V_{i,j}$ должны содержать компоненты как с множителем $e^{-i\Omega t}$, так и с $e^{i\Omega t}$. Однако в индуцировании переходов принимает участие одна из компонент [3].

Решая систему методом Эйлера, после обычных преобразований для момента времени $t = t_i + \Delta t$ при условии, что $b \neq 0$ в промежутке Δt , получаем

$$\begin{aligned}
 a_{1(t_i+\Delta t)} &= \left\{ \left[\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \frac{i \Delta\Omega}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right] \times \right. \\
 &\quad \times a_{1(t_i)} + \left(-\frac{\Delta\Omega b}{\gamma^2} + \frac{\Delta\Omega b}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right) \times \\
 &\quad \times a_{2(t_i)} \exp(-i\Omega t_i) + \left(-\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t \right) a_{3(t_i)} \exp(-2i\Omega t_i) \Big\} \times \\
 &\quad \times \exp \left[(-i\Omega \Delta t) - \frac{i w_2}{\hbar} \Delta t \right], \\
 a_{2(t_i+\Delta t)} &= \left\{ \left(-\frac{b \Delta\Omega}{\gamma^2} + \frac{b \Delta\Omega}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right) a_{1(t_i)} \times \right. \\
 &\quad \times \exp(i\Omega t_i) + \left[\left(\frac{\Delta\Omega}{\gamma} \right)^2 + \frac{2b^2}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t + \left(\frac{b \Delta\Omega}{\gamma^2} - \frac{b \Delta\Omega}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right) a_{3(t_i)} \exp(i\Omega t_i) \right] \exp \left(-\frac{i w_2 \Delta t}{\hbar} \right), \\
 a_{3(t_i+\Delta t)} &= \left\{ \left(-\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t \right) a_{1(t_i)} \exp(2i\Omega t_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\Delta\Omega b}{\gamma^2} - \frac{b \Delta\Omega}{\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right) a_{2(t_i)} \exp(i\Omega t_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma \Delta t - \frac{i \Delta\Omega}{\gamma} \sin \gamma \Delta t \right] a_{3(t_i)} \exp \left[(i\Omega \Delta t) - \frac{i w}{\hbar} \Delta t \right], \right. \\
 a_{4(t_i+\Delta t)} &= a_{4(t_i)} \exp \left(-\frac{i w \Delta t}{\hbar} \right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\gamma = \sqrt{(\Delta\Omega)^2 + (\sqrt{2} b)^2},$$

$$\Delta\Omega = \frac{w_1 - w_2}{\hbar} - \Omega \approx \frac{w_2 - w_3}{\hbar} - \Omega = \Omega_0 - \Omega. \tag{12}$$

В частном случае, для области индуцирования I (см. схему АЛТ), когда выполняются начальные условия

$$a_{1(t_i=0)}, \quad a_{2+4(t_i=0)} = 0, \tag{13}$$

имеем для $\Delta t = t$

$$a_{1(t)} = \left[\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma t - \frac{i \Delta\Omega}{\gamma} \sin \gamma t \right] \exp \left[i \left(-\Omega - \frac{w_2}{\hbar} \right) t \right],$$

$$\begin{aligned} a_{2(t)} &= \left[\frac{b \Delta \Omega}{\gamma^2} + \frac{b \Delta \Omega}{\gamma^2} \cos \gamma t - \frac{i b}{\gamma} \sin \gamma t \right] \exp \left(-\frac{i w_2 t}{\hbar} \right), \\ a_{3(t)} &= \left[-\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\gamma^2} \cos \gamma t \right] \exp \left[i \left(-\frac{w_2}{\hbar} \right) t \right], \\ a_{4(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Резонансная кривая определяется вероятностью нахождения атома на уровне (1,1) и имеет вид

$$P = |a_{1(t)}|^2 = \left[\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{(\Delta \Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma t \right]^2 + \left(\frac{\Delta \Omega}{\gamma} \sin \gamma t \right)^2. \quad (15)$$

Минимальное значение $P = 0$ достигается при $\Delta \Omega = 0$ и $\gamma t = \pi$. Ширина резонансной кривой равна $2\Delta\Omega = 2.5 b$.

Выполняя аналогичным образом вычисления для случая $V = 0$ и $U_{2,4} = nb e^{i\omega t}$, мы получаем для момента времени Δt

$$\begin{aligned} a_{1(t_i + \Delta t)} &= a_{1(t_i)} \exp \left(-\frac{i w \Delta t}{\hbar} \right), \\ a_{2(t_i + \Delta t)} &= a_{2(t_i)} \left\{ \left(\cos \frac{\gamma' \Delta t}{2} - \frac{i \Delta \omega}{\gamma'} \sin \frac{\gamma' \Delta t}{2} \right) + a_{4(t_i)} \times \right. \\ &\times \left. \left[-\frac{2ib'}{\gamma'} \sin \frac{\gamma' \Delta t}{2} \exp(-i\omega t_i) \right] \right\} \exp \left[i \left(-\frac{\omega}{2} - \frac{w_2 + w_4}{2\hbar} \right) \Delta t \right], \\ a_{3(t_i + \Delta t)} &= a_{3(t_i)} \exp \left(-\frac{i w_3}{\hbar} \Delta t \right), \\ a_{4(t_i + \Delta t)} &= \left\{ \left(\cos \frac{\gamma' \Delta t}{2} + \frac{i \Delta \omega}{\gamma'} \sin \frac{\gamma' \Delta t}{2} \right) a_{4(t_i)} + \right. \\ &+ \left. \left[-\frac{2ib'}{\gamma'} \sin \frac{\gamma' \Delta t}{2} \exp(i\omega t_i) \right] a_{2(t_i)} \right\} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{2} - \frac{w_2 + w_4}{2\hbar} \right) \Delta t \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь γ' определяется соотношением для высокочастотных переходов

$$\gamma' = \sqrt{(\Delta\omega)^2 + (2b')^2}. \quad (17)$$

В (17) величина b' пропорциональна напряженности магнитного вектора СВЧ поля, а $\Delta\omega = \frac{w_2 - w_4}{\hbar} - \omega = \omega_0 - \omega$ — расстройка. В том случае, если оба возмущения отсутствуют, мы имеем

$$a_{k(t_i + \Delta t)} = a_{k(t_i)} \exp \left(-i \frac{w_k \Delta t}{\hbar} \right). \quad (18)$$

Теперь имеется все необходимое, чтобы перейти к непосредственному вычислению $a_{k(t)}$ в АЛТ с двойным резонансом.

Пусть атомы моноскоростного пучка в момент $t_0 = 0$ (см. рис. 1) влетают в область AB, где $b \neq 0$, $b' = 0$; в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t_i = \tau$ они влетают в область BC, где $b' \neq 0$, $b = 0$. В область CD ($b = b' = 0$) атомы попадают в $t_2 = \tau + \tau'$, где они находятся в течение времени T .

В области DE, где $b' \neq 0$, $b = 0$, атомы находятся с момента времени $t_3 = \tau + \tau' + T$ до момента $t_4 = \tau + 2\tau' + T$. В области EF с $b \neq 0$, $b' = 0$ они находятся в промежутке времени от $t_4 = \tau + 2\tau' + T$ до $t_5 = 2\tau' + 2\tau + T$. Последовательно применяя формулы (11), (16) и (18), мы приходим в результате простых преобразований к выражению для интересующего нас коэффициента

$$\begin{aligned} a_{1(t_5)} = & \left\{ \left[\left(\frac{b}{\gamma} \right)^2 + \frac{(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma\tau - \frac{i\Delta\Omega}{\gamma} \sin \gamma\tau \right]^2 \times \right. \\ & \times \exp [-i\lambda(T + 2\tau')] + \left(-\frac{\Delta\Omega b}{\gamma^2} + \frac{b\Delta\Omega}{\gamma^2} \cos \gamma\tau - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma\tau \right)^2 \times \\ & \times \left[\left(\cos \frac{\gamma'\tau'}{2} - \frac{i\Delta\omega}{\gamma'} \sin \frac{\gamma'\tau'}{2} \right)^2 \exp \left(-\frac{i\lambda' T}{2} \right) + \right. \\ & + \left. \left(-\frac{2ib'}{\gamma'} \sin \frac{\gamma'\tau'}{2} \right)^2 \exp \left(\frac{i\lambda' T}{2} \right) \right] \exp \left[\frac{i\lambda'}{2} (T + 2\tau') \right] + \\ & \left. + \left(-\frac{b^2}{\gamma^2} + \frac{b^2}{\gamma^2} \cos \gamma\tau \right)^2 \exp [i\lambda(T + 2\tau')] \right\} \exp \left[-i \left(\Omega + \frac{w_2}{\hbar} \right) t_5 \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\lambda = \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_2}{\hbar} - \Omega = \frac{\bar{W}_2 - \bar{W}_3}{\hbar} - \Omega, \quad \lambda' = \frac{\bar{W}_2 - \bar{W}_4}{\hbar} - \omega,$$

\bar{W}_i — среднее значение энергий уровня в области C.

Рассмотрим частный случай, когда $b' = 0$, $b \neq 0$, что соответствует низкочастотному резонансу, используя метод раздельных осциллирующих полей:

$$\begin{aligned} a_{1(t_5)} = & \left\{ \left[\left(\frac{b}{\gamma} \right)^2 + \frac{(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} \cos \gamma\tau - \frac{i\Delta\Omega}{\gamma} \sin \gamma\tau \right]^2 \exp (-i\lambda T) + \right. \\ & + \left(-\frac{\Delta\Omega b}{\gamma^2} + \frac{b\Delta\Omega}{\gamma^2} \cos \gamma\tau - \frac{ib}{\gamma} \sin \gamma\tau \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{\gamma^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{b^2}{\gamma^2} \cos \gamma\tau \right)^2 \exp (i\lambda T) \right\} \exp \left[-\left(\Omega + \frac{W_2}{\hbar} \right) t \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Это случай, когда низкочастотные возмущения в обеих областях AB EF имеют одинаковую начальную фазу. Вблизи резонанса, когда $\Delta\Omega \ll \sqrt{2}b$, вероятность нахождения атома на уровне 1 будет равна

$$\begin{aligned} P = |a_{1(t_5)}|^2 = & \left[\frac{1}{2} \cos \lambda T (1 + \cos^2 b \sqrt{2}\tau) - \frac{1}{2} \sin^2 b \sqrt{2}\tau \right]^2 + \\ & + (\cos b \sqrt{2}\tau \sin \lambda T)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Для $b \sqrt{2}\tau = n\pi$ $P = 1$, для $b \sqrt{2}\tau = \pi/2$ $P = [(\cos \lambda T - 1)/2]^2$, $\Delta P_{\text{int}} = P_{\max} - P_{\min}$, амплитуда интерференции максимальна и равна 1 при максимальном значении вероятности (см. (14)) обнаружения атома на уровне 2 после первого низкочастотного возмущения, величину которого в данном случае следует считать оптимальной.

Рассмотрим далее случай, когда $b \neq 0$ и $b' \neq 0$. При условии ма-

лых расстроек $\Delta\Omega \ll \sqrt{2}b$ и $\Delta\omega \ll 2b'$ с учетом того, что $\tau' \ll T$, получаем

$$\begin{aligned} a_{1(t_s)} = & \frac{1}{2} \cos \lambda T (1 + \cos^2 b \sqrt{2}\tau) - i \cos b \sqrt{2}\tau \sin \lambda T - \\ & - \frac{1}{2} \cos b \sqrt{2}\tau \sin \lambda T - \frac{1}{2} \sin^2 b \sqrt{2}\tau \left[\cos^2 b' \tau' \cos \frac{\lambda' T}{2} - \right. \\ & \left. - i \sin \frac{\lambda' T}{2} \right] \exp \left(i \frac{\lambda' T}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Вероятность обнаружения атома в состоянии (1, 1) после его вылета из области взаимодействия равна

$$\begin{aligned} P = a_{1(t_s)}^* a_{1(t_s)} = & 0,25 (1 + \cos^2 b \sqrt{2}\tau)^2 \cos^2 \lambda T + \cos^2 b \sqrt{2}\tau \times \\ & \times \sin^2 \lambda T + 0,25 \sin^4 b \sqrt{2}\tau \left(1 - \sin^2 b' \tau' \cos^2 \frac{\lambda' T}{2} \right) - 0,5 \times \\ & \times (1 + \cos^2 b \sqrt{2}\tau) \sin^2 b \sqrt{2}\tau \cos \lambda T \left(\cos 2b' \tau' \cos^2 \frac{\lambda' T}{2} + \sin^2 \frac{\lambda' T}{2} \right) + \\ & + \cos b \sqrt{2}\tau \sin^2 b \sqrt{2}\tau \sin \lambda T \left[(\cos 2b' \tau' - 1) \cos \frac{\lambda' T}{2} \sin \frac{\lambda' T}{2} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть низкочастотные возмущения «оптимальны»: $b\sqrt{2}\tau = \pi/2$. Тогда, если условия соответствуют минимуму низкочастотной резонансной кривой, т. е. $\lambda T = 0$, имеем

$$P = \frac{1}{4} (1 - \cos 2b' \tau')^2 \cos^2 \frac{\lambda' T}{2}. \quad (24)$$

Если $b' \tau' = \pi/2$, то

$$P = \cos^2 \frac{\lambda' T}{2}, \quad (25)$$

что соответствует оптимальной амплитуде интерференции

$$\Delta P = P_{\max(\lambda'=0)} - P_{\min(\lambda'=\pi/T)} = 1.$$

Для $b' \tau' = 0, \pi$ имеем $P = 1$ и $\Delta P = 0$. При $\lambda T = \pi$, что соответствует максимуму низкочастотной резонансной кривой,

$$P = \frac{1}{4} (1 - \cos 2b' \tau')^2 \cos^2 \frac{\lambda' T}{2} + \sin^2 \frac{\lambda' T}{2}. \quad (26)$$

В этом случае $P = 1$ при $b' \tau' = 0$ и

$$P = \sin^2 \frac{\lambda' T}{2} \quad (27)$$

при $b' \tau' = \pi/2$.

На рис. 2 приведены зависимости P от $b' \tau'$ для значений $\lambda T = 0, \pi/4, \pi/2$ и π . Из графика видно, что амплитуда максимальна и равна 1 при высокочастотном возмущении, в два раза большем оптимального (см. (25)). Если $2b' \tau' = \pi/2$, то $\Delta P = 0,75$.

На рис. 3 представлены кривые ΔP для случая $b\sqrt{2}\tau \neq \pi/2$, т. е. когда значения низкочастотного возмущения не равны оптимальным и когда $\lambda T = 0, \pi$. Максимального значения амплитуда ΔP достигает при $b\sqrt{2}\tau = \pi/2$.

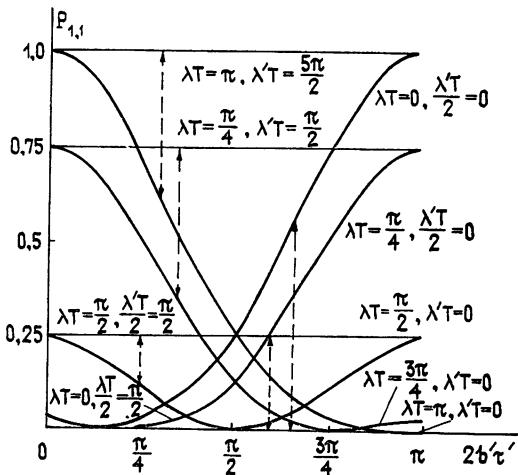


Рис. 2. Зависимость вероятности $P_{1,1}$ обнаружения атома в состоянии $(1,1)$ от величины высокочастотного возмущения $b'\tau'$ для значений $\lambda T = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ (кривые 1—5 соответственно).

Посмотрим, как будут вести себя вероятности переходов, если величины возмущений сохраняются постоянными, но меняется λT за счет изменения Ω либо H_0 , либо соотношения фаз колебаний полей.

Будем считать, что величина низкочастотных возмущений «оптимальная», т. е. $b\sqrt{2}\tau = \pi/2$, а начальные фазы как низкочастотных, так и высокочастотных возмущений соответственно равны.

На рис. 4 представлены зависимости вероятности обнаружения атома на уровне $(1,1)$ от λT для случаев, когда $\lambda' T/2 = 0$ или $\pi/2$, а $2b'\tau' = \pi/2, \pi$. Если $2b'\tau' = 0$, то $P \equiv 0$ для всех λT . В точке $\lambda T = 0$ мы имеем максимум интерференционной кривой, а в точке $\lambda T = \pi$ — минимум. Может показаться, что интерференционная кривая переворачивается в процессе изменения λT с одновременным изменением амплитуды. Однако, как это будет видно из дальнейшего, происходит еще и смещение экстремальных точек. Таким образом, разность значений $\Delta P = P_{(\lambda' T=0, \lambda T)} - P_{(\lambda' T=\pi, \lambda T)}$ в случае «оптимального» высокочастотного возмущения

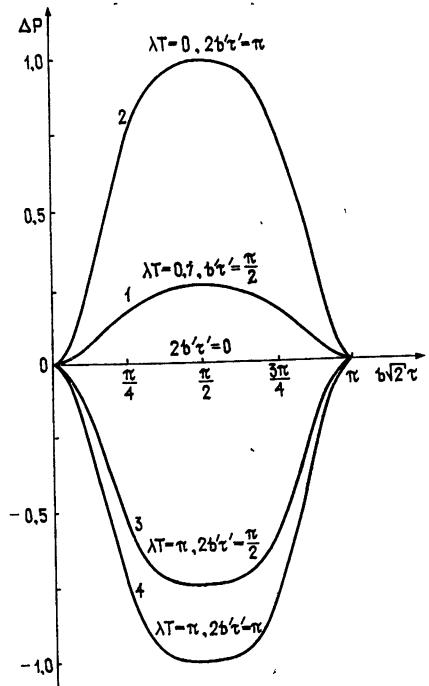


Рис. 3. Зависимости амплитуды интерференции РЭМСИ ΔP от величины низкочастотного возмущения для значений $\lambda T=0, 2b't'=\pi/2, \pi, \lambda T=\pi, 2b't'=\pi/2, \pi$ (кривые 1—4 соответственно).

частотного возмущения $2b'\tau' = \pi$ в точке $\lambda T = \pi/2$ меняет знак, проходя через нулевое значение.

Когда величина низкочастотного возмущения отлична от $\pi/2$, то при изменении λT происходит сдвиг экстремальных по $\lambda' T$ значений P .

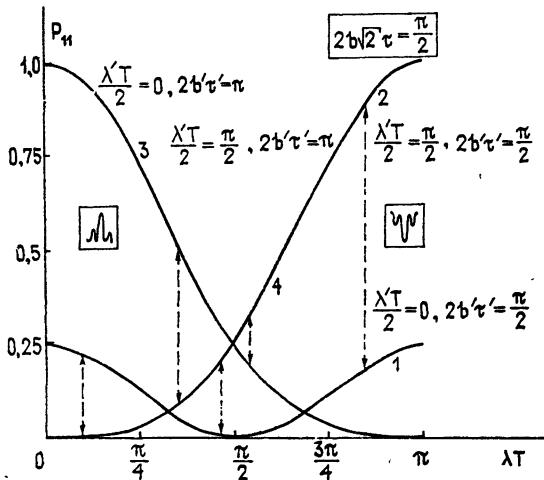


Рис. 4. Зависимость вероятности $P_{1,1}$ обнаружения атома на уровне (1,1) от λT для $\lambda' T/2 = 0, \pi/2, \pi$ при $2b' \tau = \pi/2$ и $\lambda' T/2 = 0, \pi/2$ при $2b' \tau' = \pi$ (кривые 1—4 соответственно).

Приравнивая производную по χ от вероятности $P_{1,1}$, определяемой (23), к нулю и учитывая, что $\tau \ll T$, мы находим условие экстремальных значений

$$\frac{1}{2} T(1 - \cos 2b' \tau') \sin^2 b \sqrt{2} \tau \left[\frac{1}{2} \sin^2 b \sqrt{2} \tau (1 + \cos 2b' \tau') \sin \lambda' T - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau) \cos \lambda T \sin \lambda T - \cos b \sqrt{2} \tau \sin \lambda T \cos \lambda' T = 0. \right] \quad (28)$$

Если $T(1 - \cos 2b' \tau') \neq 0$ и $\sin^2 b \sqrt{2} \tau \neq 0$, т. е. T, b и b' не равны нулю, то условием экстремальных значений будет равенство нулю выражения в квадратных скобках, откуда следует соотношение

$$\operatorname{tg} \lambda' T = \frac{2b \cos b \sqrt{2} \tau \sin \lambda T}{(1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau) \cos \lambda T - \cos^2 b' \tau' \sin^2 b \sqrt{2} \tau}. \quad (29)$$

Выражение (29) показывает, что экстремального значения резонансная кривая $P_{1,1(\omega)}$ соответственно переходам (1,0)—(0,0) достигает при $\omega_1 = \omega_0 - \lambda'$, и ее отличие от ω_0 , равное некоторому λ' , зависит как от $\Delta\Omega = \Omega_0 - \Omega$, так и от значений b и b' , т. е. от мощности СВЧ и НЧ полей, а также от постоянного поля H_0 и фаз разнесенных полей, поскольку в общем случае в (29) вместо λT войдет $(\lambda T - \varphi)$. Например, в случае, соответствующем эксперименту, когда ВЧ и НЧ поля находятся в противофазах, соответственно будем иметь

$$\operatorname{tg} (\lambda' T - \pi) = \frac{2 \cos b \sqrt{2} \tau \sin (\lambda T - \pi)}{(1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau) \cos (\lambda T - \pi) - \cos^2 b' \tau' \sin^2 b \sqrt{2} \tau}. \quad (30)$$

Перепишем это выражение в виде

$$\operatorname{tg}(\lambda' T - \pi) = -\frac{\alpha \sin(\lambda T - \pi)}{\beta + \cos(\lambda T - \pi)}, \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{2 \cos b \sqrt{2} \tau}{1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau}, \quad \beta = \frac{\cos^2 b' \tau' \sin^2 b \sqrt{2} \tau}{1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau}.$$

Для «оптимальных» значений $b \sqrt{2} \tau = \pi/2$ имеем $\operatorname{tg}(\lambda' T - \pi) = 0$, т. е. $P_{1,1}$ зависит от λ . Если же $b \sqrt{2} \tau \neq \pi/2$, то $\operatorname{tg} \lambda' T$ существенно зависит от α и β . Нуевые значения $\operatorname{tg} \lambda' T$ принимает в точках $\lambda T = 0, \pm n\pi$, независимо от значений α и β (см. рис. 5), так что и $\lambda' T = 0, \pm n\pi$.

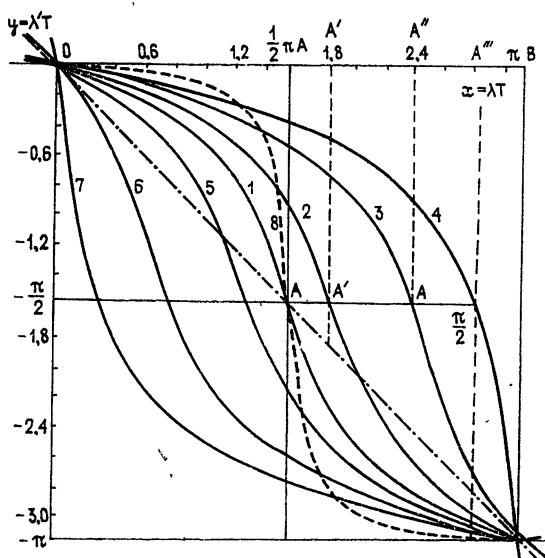


Рис. 5. Вид функции $\lambda' T = \arctg \left[-\frac{\alpha \sin(\lambda T - \pi)}{\beta + \cos(\lambda T - \pi)} \right]$, где $\alpha = \frac{2 \cos b \sqrt{2} \tau}{1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau}$ и $\beta = \frac{\sin^2 b \sqrt{2} \tau \cos^2 b' \tau'}{1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau}$ для значений $\alpha = 0,4$ ($b \sqrt{2} \tau = 1,35$); $\beta = 0$ ($b' \tau' = 1,57$), $0,3$ ($b' \tau' = 1,0$), $0,7$ ($b' \tau' = 0,4$), $0,95$ ($b' \tau' = 0,2$) (кривые 1-4 соответственно). Кривые 5-8 построены при тех же значениях α и β , кривая 9 построена для случая $\alpha = 0,1$ ($b \sqrt{2} \tau = 1,45$) и $\beta = 0$ ($b' \tau' = \pi/2$).

Таким образом, функция $\lambda' T = f(\lambda T)$ имеет точки, расположенные на прямой, проходящей через начало координат, в данном случае — биссектрисе. Однако в эксперименте времена дрейфа атомов между НЧ и ВЧ полями соответственно несколько отличаются, поэтому угол наклона прямой будет отличаться от 45° .

Если $\alpha \rightarrow 0$, то фаза $\lambda' T - \pi$ будет меняться скачком на $\pm \pi$ в точках A и C (см. рис. 6), где

$$\operatorname{tg}(\lambda' T - \pi) = \alpha [\operatorname{tg}(\lambda T - \pi)] \rightarrow \infty.$$

Если же $\cos(\lambda T - \pi) = \beta \rightarrow 0$, то точки A и C будут смещаться по направлениям к точке B . Изменение $y = \lambda' T$ в промежутке значений $x \in (0, A)$ будет более медленным, чем в промежутке $x \in (A, B)$.

На рис. 5 видно, что те кривые, которым соответствуют меньшие значения $b'\tau'$, более пологи в точке 0, чем в точке B . Следует иметь в виду, что в данном случае точке 0 соответствуют начальные разности фаз, равные π , и максимальные значения на НЧ и ВЧ интерференционных кривых, тогда как точке B , где $\lambda T = 2\pi$, — минимальные значения.

Итак, минимальна зависимость $\lambda' T$ от λT в случае, когда начальные фазы отличаются на π , а $\lambda T = 0$.

Для малых λT выражение (30) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \lambda' T = - \frac{2 \cos b \sqrt{2} \tau}{(1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau) + \cos^2 b' \tau' \sin^2 b \sqrt{2} \tau} \lambda T. \quad (32)$$

Множитель перед λT не может превышать 1, поэтому можно (32) представить в виде

$$\frac{\lambda' T}{\lambda T} = \frac{2 \cos b \sqrt{2} \tau}{(1 + \cos^2 b \sqrt{2} \tau) + \cos^2 b' \tau' \sin^2 b \sqrt{2} \tau}. \quad (33)$$

На рис. 6 приведена зависимость этого отношения от величины ВЧ возмущения, оно максимально для $b' \tau' = \pi/2$. В окрестностях точек $b' \tau' = 0, \pi$ решающую роль начнет играть первый множитель в (28) и $\lambda'/\lambda \rightarrow 0$ будет стремиться к 0. Таким образом, сдвиг частоты λ' зависит как от λ , так и от величин b и b' , поля H_0 и разности фаз низкочастотных сигналов. Любые изменения величин λ и H_0 , приводящие к смещению низкочастотной интерференционной резонансной кривой вниз либо вверх по частоте, приводят к смещению высокочастотной интерференционной резонансной кривой соответственно вверх либо вниз по частоте. Устранить такую зависимость можно, сконструировав АЛТ таким образом, чтобы в ней детектор регистрировал атомы, совершившие переходы $(1, +1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0)$. Аналогичным ранее рассмотренному способом можно найти значения $a_{2(t)}$ в момент времени t_4 , тогда

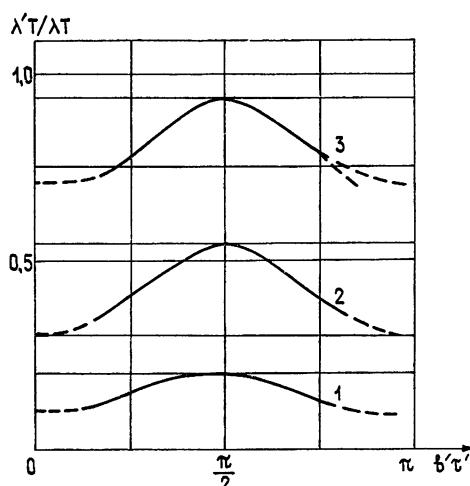


Рис. 6. Зависимость отношения $\lambda' T / \lambda T$ от величины $b' \tau'$ для значений $\cos b \sqrt{2} \tau = 0,1; 0,3; 0,7$ (кривые 1—3 соответственно). Кривая 4 представляет зависимость отношения $\lambda' T / \lambda T$ от $b \sqrt{2} \tau$ при $b' \tau' = \pi/2$.

$$P_{(0, 0)} = a_{2(t_4)} a_{2(t_4)}^* = \frac{1}{2} \sin^2 b \sqrt{2} \tau \left(1 - \sin^2 2b' \tau' \cos^2 \frac{\lambda' T}{2} \right), \quad (34)$$

при $b \sqrt{2} \tau = \frac{\pi}{2}$

$$P_{(0, 0)} = \frac{1}{2} \left(1 - \sin^2 2b' \tau' \cos^2 \frac{\lambda' T}{2} \right). \quad (35)$$

В данном случае выражение для P , с точностью до 1/2 совпадающее с известным [3], определяет резонансную кривую.

Из рассмотренного выше можно сделать следующие выводы о ра-

боте АЛТ со схемой переходов атомов такого вида: $(1,1) \rightarrow (1,0) \leftrightarrow (0,0) \rightarrow (1,1)$. Амплитуды как низкочастотной, так и высокочастотной интерференций максимальны и равны 1 при условии, что величина низкочастотных возмущений равна половине от считающейся оптимальной в случае простого резонанса типа $(1, \pm 1) \leftrightarrow (1, 0)$, а величина высокочастотного возмущения — в два раза больше оптимальной для простого резонанса $(1, 0) \leftrightarrow (0, 0)$.

Если низкочастотное возмущение близко к оптимальному, то низкочастотная и высокочастотная интерференции отсутствуют. Далее, кризиса высокочастотного резонанса имеет в центре максимум, если противофазны как НЧ, так и ВЧ возмущения, или минимум, если ВЧ возмущения противофазны, а низкочастотные — синфазны.

Следует заметить, что расчеты были выполнены для моноскоростного пучка. Однако учет распределения атомов по скоростям в реальной трубке вследствие малого разброса последних не изменит качественно картины. Изменится лишь соотношение величин максимумов интерференционных кривых.

Экспериментальные исследования двойного резонанса в таллиевых пучках и эффекта «затягивания» частоты были выполнены на установке, основной частью которой являлся таллиевый атомно-лучевой стандарт частоты.

Точные измерения проводились в сравнении с цезиевым атомно-лучевым стандартом частоты фирмы Hewlett Packard. Таллиевая трубка была сконструирована и изготовлена по схеме рис. 1 и имела 6-полосные магниты, что позволило повысить интенсивность пучка и работать со сравнительно медленными атомами. Длина полюсных наконечников — магнитов АЛТ — составила 10 см, между ними зазор 5 мм, напряженность поля вблизи полюсов 5000 Э.

Одним из основных узлов АЛТ является П-образный резонатор с отверстиями ($\emptyset 5$) в боковых стенках на расстоянии $\lambda_b/2$ от концов, предназначенными для прохождения атомов пучка. Тип волны в резонаторе — H_{01n} с $n = 39$, т. е. в области взаимодействия магнитные векторы СВЧ полей сдвинуты по фазе на π . Общая длина резонатора $l = 354$ мм, а длина между его плечами, равная длине дрейфа атомов, — 286 мм. В центре узкой стенки имеется круглое окно ($\emptyset 5$) связи резонатора с подводящим волноводом. Добротность резонатора по частоте $\approx 1310,8$ Гц, $Q = 3200$.

Для индуцирования низкочастотных переходов применены катушки длиной 40 мм, наложенные на поверхность медной трубы. Для получения таллиевого пучка служит печка из нержавеющей стали с многоканальным коллиматором пучка. Аллюндированный нагреватель позволяет поддерживать температуру источника в пределах $T = 900 \div 950$ К. Источник окружен двухслойным экраном из полированного титана, значительно снижающим тепловое рассеяние. Расход таллия 0,25 грамма в месяц.

Детектирование пучка производилось посредством ионизации атомов на монокристалле вольфрама с поверхностным слоем оксида.

Сравнительно низкая температура нити 1100 К позволяет иметь устойчивый слой оксида на поверхности при 100-процентной ионизации атомов пучка, однако среднее время нахождения атомов таллия на поверхности детектора оказывается сравнительно велико ($\tau = 0,1$ с), что ограничивает полосу пропускания детектора. Отношение сигнал/шум детектора на частоте 1 Гц равно 100; на частоте 0,1 Гц — 500. Шум детектора обусловлен дробовым шумом пучка.

Система формирования постоянного поля в области переходов обычна, состоит из четырех параллельных оси АЛТ проводников.

Для устранения внешних полей область переходов окружена трех-

слойным экраном. Внутренние экраны с диаметром 90 и 110 мм изготовлены из пермаллоя. Наружный ($\varnothing 130$) экран из железа «Армко» ослабляет поле до 0,5 Э. Для создания рабочего вакуума не хуже $1 \cdot 10^{-7}$ Tor используются два насоса типа НЭМ-5.

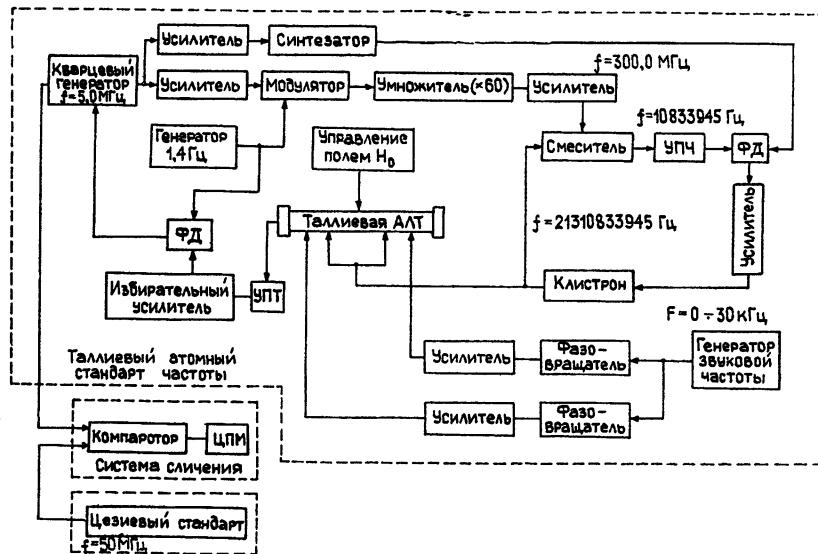


Рис. 7. Блок-схема таллиевого атомно-лучевого стандарта частоты.

Для исследования двойного магнитного резонанса в таллиевой АЛТ была разработана измерительная радиосистема (рис. 7), в которую входят: кристаллический генератор мощностью 10 мВт и центральной частотой $f = 21310833 \text{ кГц}$ выходного сигнала; система фазовой автоподстройки частоты кристаллического генератора, включающая в себя синтезатор частоты, выдающий сигнал с центральной частотой $v = 10833945 \text{ Гц}$ и позволяющий плавно перестраивать частоту на величину от единицы до сотен килогерц; система индикации, включающая в себя электрометрический каскад усилителя постоянного тока (полоса $0 \div 30 \text{ Гц}$) и полосовой усилитель на частоту модуляции 1 Гц; система, вырабатывающая сигнал ошибки в режиме автоматической подстройки частоты кварцевого генератора по атомной линии.

На катушки для индуцирования низкочастотных атомных переходов сигналы подавались с разделенных усилителей мощности, на последние сигналы через фазовращатели поступали со звукового генератора.

В отсутствие резонансных переходов интенсивность пучка, падающего на детектор, максимальна, а напряжение на детекторе, пропорциональное ионному току ($U_d = RI_d$, $R = 10^{11} \Omega$ — входное сопротивление электрометра), составляет несколько вольт (до 3 В).

Согласно формуле (14) вероятность нахождения атомов на уровне (1, 1) меняется в зависимости от величины магнитного вектора низкочастотного сигнала в пределах от 1 до 0. Представленный на рис. 8 график иллюстрирует влияние разброса атомов пучка по скоростям. В точке $U_{lf} = (U_{lf})_{opt}$ 1/5 часть атомов (теоретически 25%) остается на уровне (1, 1). С дальнейшим ростом U_{lf} вероятность обнаружения атома на уровне (1, 1) вновь увеличивается, но действие разброса по скоростям накапливается и в точке $U_{lf} = 2(U_{lf})_{opt}$. Максимальное значение составляет лишь 62% от начального значения (теоретически также 62%).

Если выбрать напряжение на первой катушке $U_{lf} = (U_{lf})_{opt}$, т. е. 8 В в данном случае, и на вторую катушку подать низкочастотный сигнал с фазой, противоположной фазе сигнала на первой катушке, то действие разброса скоростей будет в значительной степени скомпенсировано.

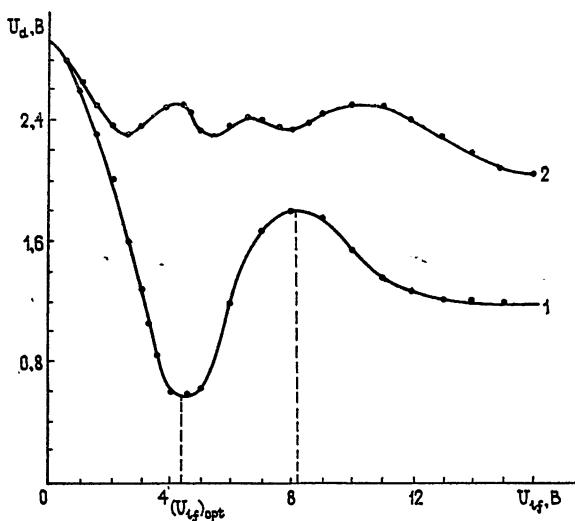


Рис. 8. Зависимость напряжения детектора U_d при низкочастотном резонансе Раби от напряжения сигнала на катушке — кривая 1, кривая 2 снимались при одновременной подаче сигналов на обе катушки. Напряжение и фаза сигнала на второй катушке подбирались для максимального возврата атомов в начальное состояние.

При плавном изменении поля H_0 , частоты F или соотношения фаз низкочастотных сигналов наблюдается интерференционная резонансная кривая (кривая 1, рис. 9). Кривые 3—5 на рис. 10 представляют зависимости величины $\Delta U_d = (U_d)_{\max} - (U_d)_{\min}$ от напряжения U_{lf} низкочастотного сигнала на 1-й катушке для нескольких значений напряжения низкочастотного сигнала на катушке 2. Для сравнения там же приведена зависимость U_d от напряжения U_{lf} низкочастотного сигнала для каждой катушки (кривые 1, 2).

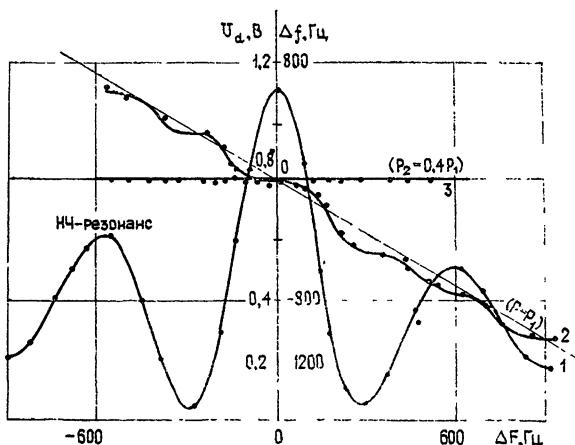


Рис. 9. Низкочастотная интерференционная резонансная кривая РЭМСИ и зависимость частоты центрального максимума кривой высокочастотного резонанса РЭМСИ от частоты поля в катушках.

Как уже отмечалось в [1], при двойном резонансе в данной конструкции АЛТ на атом последовательно, в процессе его пролета вдоль оси трубы, действуют низкочастотное, два высокочастотных и вновь низкочастотное возмущения. Высокочастотные колебания находятся в противофазах, а низкочастотные могут иметь любое соотношение фаз.

Из рис. 10 (кривые 5 и 6) видно, что амплитуды как низкочастотной интерференции $(\Delta U_d)_{int, f}$, так и высокочастотной $(\Delta U_d)_{int, f}$ достигают максимального значения при $U_{lf} = (1/2)(U_{lf})_{opt}$, что соответствует теоретическим подсчетам, однако составляют они не более 20 и 10% соответственно от значения $U_d = 1,8 \text{ В}$ при $(U_{lf})_1 = (U_{lf})_2 = 0$.

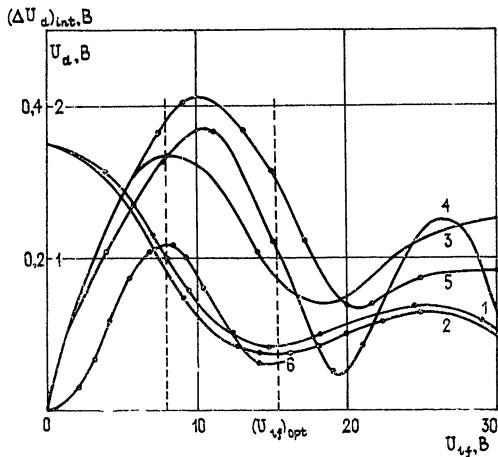


Рис. 10. Зависимость напряжения на детекторе от напряжения низкочастотного сигнала на первой катушке $(U_{lf})_1$ при $(U_{lf})_2 = 0$ и от $(U_{lf})_2$ при $(U_{lf})_1 = 0$ (кривые 1, 2). Зависимости амплитуды низкочастотного резонанса Рамзэя от $(U_{lf})_1$ при $(U_{lf})_2 = 5, 7, 10 \text{ В}$ (кривые 3, 4, 5 соответственно) и амплитуды высокочастотного резонанса РЭМСИ от $(U_{lf})_1$ при $(U_{lf})_2 = 7 \text{ В}$, $F = 40 \text{ кГц}$, $f = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ (кривая 6).

В процессе измерений было подтверждено, что форма высокочастотной интерференционной резонансной кривой связана с низкочастотным интерференционным резонансом независимо от того, вызывается изменение его условий перестройкой частоты звукового сигнала, величины поля H_0 или изменением фазовых соотношений напряжений на катушках.

В любом случае смещение максимума низкочастотной резонансной кривой вверх по частоте вызывает смещение высокочастотной резонансной кривой вниз по частоте и, соответственно, обратно. Этот эффект зависит от величины напряженности СВЧ поля.

На рис. 11 приведены кривые высокочастотного резонанса, снятые по точкам экстремумов для оптимального значения мощности высокочастотного поля. Из них видно, что при частоте сигнала, соответствующей минимуму кривой низкочастотного резонанса, кривая высокочастотного резонанса в центре имеет минимум и, соответственно, обратно. Для промежуточных значений F экстремумы высокочастотной резонансной кривой смешены.

Наименьшее влияние на высокочастотный резонанс мощность СВЧ поля оказывает в экстремальных точках кривой низкочастотного резонанса и наибольшее в точках, находящихся на полусклонах. На рис. 9 (кривая 2) приведена зависимость от F частоты центрального пика высокочастотной резонансной кривой для оптимального значения мощности СВЧ сигнала. Зависимость центральной частоты высокочастотно-

го резонанса от мощности высокочастотного сигнала, фазового соотношения и амплитуд низкочастотных сигналов в АЛТ с двойным резонансом ограничивает возможности получения удовлетворительных параметров стандарта частоты.

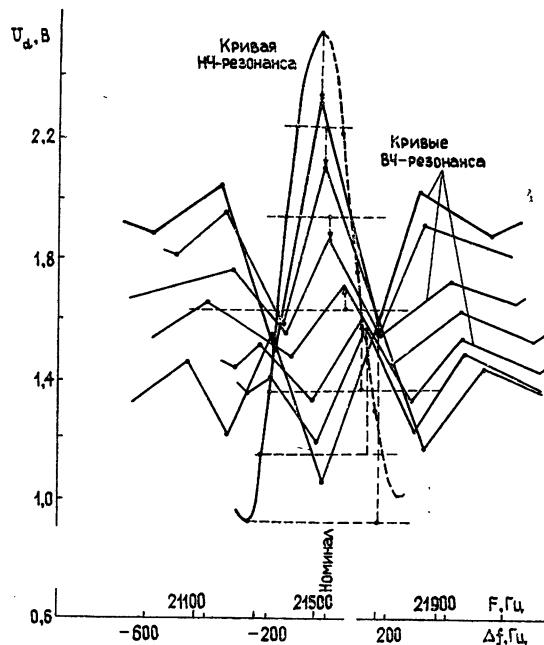


Рис. 11. Высокочастотные резонансные кривые РЭМСИ, снятые для различных точек низкочастотной резонансной кривой РЭМСИ.

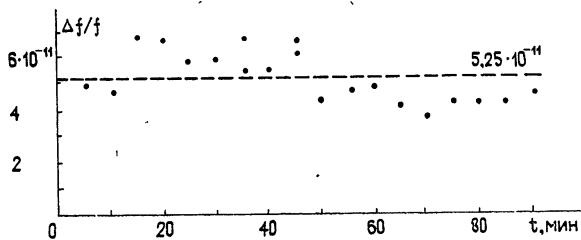


Рис. 12. Долговременная стабильность таллиевого атомно-лучевого стандарта частоты.

В предварительных экспериментах с таллиевым стандартом частоты были получены следующие результаты. На рис. 12 представлены результаты измерений частоты кварцевого генератора в течение полутора часов в режиме автоматической подстройки его частоты по спектральной линии $(1, 0) - (0, 0)$. Часовой уход составил величину $2 \cdot 10^{-11}$ при среднеквадратичных уходах за 1 минуту, равных $2,5 \cdot 10^{-11}$. Сравнение с образцовой частотой сигнала цезиевого стандарта фирмы Hewlett Packard (см. табл. 1) дало в среднем отличие $5 \cdot 10^{-11}$. Однако разброс значений достигает величины 10^{-11} . Причина разброса лежит в эффекте «затягивания» частоты. На рис. 13 показана зависимость сдвига частоты стандарта от частоты сигнала, индуцирующего низкочастотные пере-

ходы при оптимальной мощности СВЧ поля. Зависимость сдвига частоты сигнала стандарта от мощности СВЧ сигнала для нескольких значений отстройки F от центра приведена на рис. 14.

Таблица 1

Номер измерения	1	2	3	4	5
	0	$1,1 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$10 \cdot 10^{-11}$
Номер измерения	6	7	8		
	$7 \cdot 10^{-11}$	$10 \cdot 10^{-11}$	$0,5 \cdot 10^{-11}$		

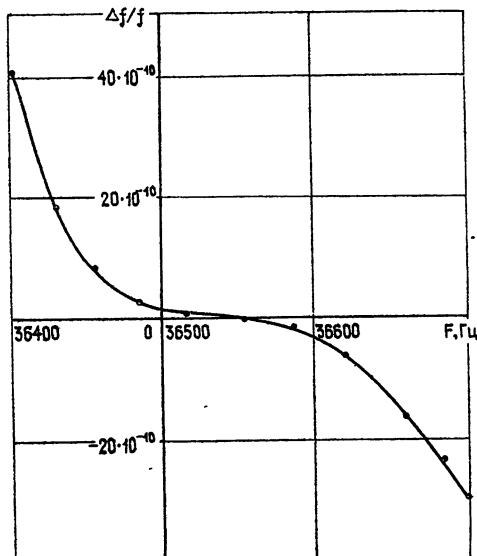


Рис. 13. Зависимость частоты таллиевого атомного стандарта от частоты сигнала, индуцирующего низкочастотные переходы в АЛТ для случая, когда мощность СВЧ поля близка к оптимальной.

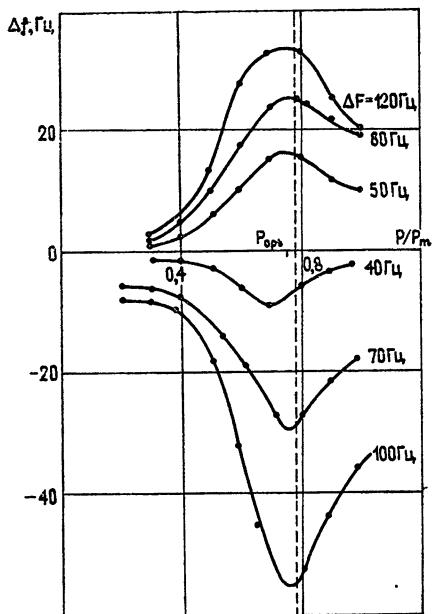


Рис. 14. Зависимость частоты таллиевого стандарта от мощности СВЧ поля для нескольких значений отстройки частоты от центра НЧ резонансной линии в сторону меньших (кривые 1-3) и в сторону больших (кривые 4-6) частот.

Подводя итоги, можно сказать, что метод двойного резонанса в случае когерентных низкочастотных полей неприемлем в атомно-лучевых трубках вследствие эффекта «затягивания» частоты. Что касается использования некогерентных полей, то в этом случае будет использоваться на порядок меньшая доля атомов пучка, а сам эффект тем не менее полностью не будет исключен.

Сам метод представляет определенный интерес для исследования интерференции квантовых состояний.

В заключение автор благодарит В. С. Будыкина, Г. В. Жилина за участие в разработке таллиевой АЛТ, В. Е. Байкова и Н. С. Горюкова за проделанную работу по изготовлению и налаживанию измерительной аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Bonapomy, IRE Trans. Instrum., 1—11, № 3—4, 215 (1962).
2. R. F. Laceу, Metrolosia, 3, № 3, 78 (1967).
3. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
5 сентября 1977 г.,
после объединения
6 июня 1978 г.

FREQUENCY PULLING WITH THE DOUBLE RESONANCE
IN A TALLIUM ATOM TUBE

V. V. Stroganov

A theoretical consideration of tallium atom behaviour in a beam is given in their consequent interaction with electromagnetic field the frequency of which corresponds to resonance frequencies of transition ($F = 1, m_F = \pm 1$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow and ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 0, m_F = 0$). Optimal observation conditions of low-frequency and high-frequency Ramsey resonance transitions are defined using the method of double resonance with atom transitions ($F = 1, m_F = 1$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 0, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 1$). The dependence is studied of the transition resonance frequency ($F = 1, m_F = 0$) \leftrightarrow ($F = 0, m_F = 0$) on the frequency, phase difference and the amplitude of magnetic oscillating fields which induce the transitions ($F = 1, m_F = 1$) \leftrightarrow ($F = 1, m_F = 0$).

The description of a tallium two-resonant atom-ray tube and the tallium atom frequency standard on its basis is given. The results of the experimental investigation of double resonance with the transition scheme ($F = 1, m_F = 1$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow \rightarrow ($F = 0, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 0$) \rightarrow ($F = 1, m_F = 1$) and the effect of the frequency «pulling» are analysed. Preliminary data on the accuracy and stability of the tallium standard are presented.

УДК 535 : 530.18 : 538.3

ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И ИХ РОЛЬ В НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ СВЕТА*

А. Е. Каплан

Развита аналитическая теория новых типов одномерных стационарных волн в нелинейной оптике и электродинамике (продольно-неоднородные бегущие волны — ПНБВ). В прозрачной среде для ПНБВ возникает проблема континуума (невозможность определения параметров волны при полностью заданных условиях на границе и в бесконечности), которая «снимается» при введении произвольно малого поглощения. Построено асимптотическое (по малому поглощению) решение, что дает возможность осуществить предельный переход к прозрачной среде и обосновать отбор единственно реализуемого типа ПНБВ и принятые ранее условие излучения. Рассмотрено влияние ПНБВ на характеристики гистерезисов отражения и на ограничение мощности проходящей волны, исследован новый эффект нелинейного смещения преломленных лучей вдоль границы сред, обусловленный ПНБВ. Найденный принцип отбора реализуемых ПНБВ (минимум средней плотности энергии и максимум ее потока) обобщен в виде теоремы на широкий класс нелинейностей произвольного типа.

ВВЕДЕНИЕ

Ранее [1] нами было показано, что отражение плоской световой волны, падающей из линейной среды с проницаемостью ϵ_0 на границу нелинейной среды с ϵ_{nl} , зависящей от интенсивности поля $|E|^2$, должно сопровождаться рядом новых эффектов: 1) изменением угла пропускания ξ и коэффициента отражения r по сравнению с линейным случаем (вплоть до полного внутреннего отражения (ПВО), либо, наоборот, нелинейного просветления границы); 2) изменением глубины проникновения поля в отражающую среду при ПВО и, наконец, 3) гистерезисными скачками величин ξ и r при изменении угла скольжения ϕ падающей волны или ее интенсивности $|E_{in}^2|$. Если нелинейную проницаемость можно представить в виде $\epsilon_{nl} = \epsilon_0 + \Delta\epsilon_l + \Delta\epsilon_{nl}$, где $\Delta\epsilon_l$ — не зависящая от поля величина, а $\Delta\epsilon_{nl} = \epsilon_2 |E|^2$, то эти явления осуществимы при произвольном знаке нелинейности ϵ_2 .

При обычной в оптике малости нелинейности ($|\Delta\epsilon_{nl}| \ll \epsilon_{nl}$) необходимыми условиями для получения сильных эффектов являются малость линейной расстройки $\Delta\epsilon_l$ и почти скользящее падение волны [1]:

$$1 \gg |D| \sim |\Delta\epsilon_{nl}/\epsilon_0|, \quad 1 \gg \sin^2 \phi, \quad \text{где } D \equiv \Delta\epsilon_l/\epsilon_0. \quad (1)$$

Возможность гистерезиса при $\epsilon_2 > 0$ обсуждалась и в [2], где, однако, фактически без основания она была сочтена нереализуемой (из-за не-однородного задания граничных условий для преломленной плоской волны в [2] не определены по отдельности ее амплитуда и угол преломления, в силу чего нельзя было вообще судить о параметрах гистерезиса, которые оказываются достаточно большими при условиях (1)).

Построенная в [1] теория основывалась на учете лишь двух возможных типов волн в нелинейной среде: однородной бегущей волны

* Результаты работы доложены на IX Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике в июне 1978 г. в Ленинграде (см «Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике...», М., 1978, т. 1, стр. 238 и 241).

(ОБВ), аналогичной падающей, либо приповерхностной неоднородной волны, распространяющейся строго вдоль границы в режиме ПВО. Обе они, по существу, — аналоги соответствующих линейных волн. Однако, если при $\epsilon_2 > 0$ в отсутствие диссипации эти волны исчерпывают все возможные ситуации для одномерного случая, то для $\epsilon_2 < 0$ возможно существование еще одного типа одномерных волн, которые мы будем называть продольно-неоднородными бегущими волнами (ПНБВ); при достаточном удалении от границы они переходят в ОБВ. Этот тип волн обсуждался в [3–6] (на его существование указывалось и в [1]); он является частным случаем широкого класса одномерных нелинейных стационарных волн [7]. (Понятие о продольной неоднородности привлено нами [3, 6], чтобы различать ПНБВ от самовоздействия, обусловленного поперечной неоднородностью волны, такого как самофокусировка [8] или самоискривление [9] волн с ограниченным поперечником, и от волны ПВО.) В [3] были получены все возможные точные решения типа ПНБВ в случае $\Delta\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon_2 |E|^2$, а в [6] для произвольного вида $\epsilon_{\text{нл}}(|E|^2)$ был сформулирован и доказан критерий (приведенный без доказательства и в [3]), который связывает существование ПНБВ с наличием участка монотонного убывания функции $F(|E|^2) = |E|^4 [\epsilon_0^{-1} \epsilon_{\text{нл}}(|E|^2) - \cos^2 \psi]$ в области, где $F > 0$.

Особенностью ПНБВ является невозможность выделения конечно-го числа возможных решений этого типа при полностью заданных граничных условиях и условиях излучения (в непоглощающей среде) — так называемая проблема континуума [3–5], что кардинально отличается от положения для линейной среды либо нелинейной с $\epsilon_2 > 0$. В [3] был предложен принцип минимализации средней плотности энергии ПНБВ, позволяющий отобрать единственный вид физически реализуемой ПНБВ (см. ниже (11)); одновременно к отбору именно этого же вида пришли авторы [5] путем численного эксперимента с введением слабого поглощения. В [4] утверждалось, что учет поглощения не обеспечивает отбора, однако в последующей работе (вышедшей после поступления настоящей статьи в редакцию, в 1978 г.) автор [4], ссылаясь, аналогично [5], на численный эксперимент, проходит к тому же отбору, что и [3, 5].

В настоящей работе показано (разд. 3), что принцип этого отбора при учете поглощения может быть обоснован аналитически с помощью отыскания асимптотического разложения (по малому поглощению) решения для потока энергии волны в зависимости от ее интенсивности; при этом обосновывается также и сам «бегущий» характер ПНБВ, как и энергетический подход к их отбору [3]. Более того, удается доказать в виде теоремы и обобщить энергетический критерий отбора ПНБВ (минимум плотности энергии) и других реализуемых типов волн на широкий класс нелинейностей общего типа, а также сделать исчерпывающие утверждения для нелинейностей вне этого класса (разд. 7). Учет ПНБВ в теории нелинейного отражения и преломления плоской падающей волны при $\epsilon_2 < 0$ приводит 1) к изменению вида гистерезисной петли и области существования гистерезиса (разд. 4), 2) к самоограничению плотности энергии преломленного света (обсуждавшегося также в [5]) — разд. 5 и 3) к новому эффекту нелинейного смещения преломленных лучей вдоль границы сред (разд. 6).

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ТИПЫ ВОЛН

Поле в линейной среде будем представлять в виде двух однородных плоских волн — падающей (под углом скольжения ψ к границе, рис. 1) и отраженной, обладающих электрическими векторами соответственно E_{in} (задаваемым) и rE_r , где r — амплитудный коэффициент отражения, а E_r — отображение E_{in} относительно плоскости, нормаль-

ной к оси x (x лежит в плоскости границы и вместе с осью z образует плоскость падения, рис. 1). За исключением формул (2)–(12а), (12б), (31) и разд. 3, 5–7, будем предполагать выполненные условия (1). (Реально все результаты, связанные с (1), справедливы с хорошей точностью вплоть до $\psi \sim 30^\circ$ и $\Delta\epsilon/\epsilon_0 \sim 0,5$.) Тогда из уравнений Максвелла следует, что волновое уравнение для комплексной амплитуды поля $|E|^2$ в челинейной среде не зависит от направления плоскости поляризации E_{ln} и в одномерном случае записывается в виде

$$\frac{d^2E}{dz^2} + k_0^2 E \left(Q - |E|^2 \frac{|\epsilon_2|}{\epsilon_0} \right) = 0, \quad (2)$$

где $Q \equiv D + \sin^2 \psi$, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0/c}$ (полное поле есть $\frac{1}{2} E e^{-i\omega t} + \text{к. с.}$).

При условии (1) $Q \approx D + \psi^2$. При поляризации E_{ln} перпендикулярно к плоскости падения уравнение (2) является точным вне зависимости от (1); для произвольного вида нелинейности $\epsilon_{nl}(|E|^2)$ волновое уравнение см., например, в [6].

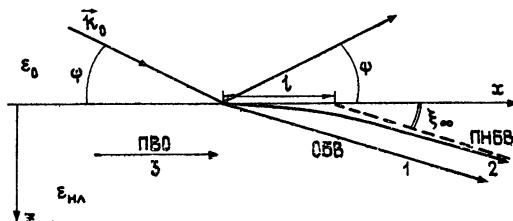


Рис. 1. Волновая схема явления в плоскости падения.

Представим поле $E(x, z)$ в виде

$$E = \frac{\epsilon_0}{|\epsilon_2|} u(z) \exp \left[ik_0 \int_0^z \xi(z) dz + i\varphi \right] \exp (ik_0 x \sin \psi) \quad (3)$$

$(\varphi = \text{const})$,

где $u(z)$ и $\xi(z)$ — действительные, а зависимость от x определяется лишь последним множителем, таким же, как и в падающей (и отраженной) волне, в силу сохранения составляющей импульса волны вдоль границы, что следует и из граничных условий. При условии (1) ξ есть угол, составляемый лучом (точнее — нормалью к фазовому фронту волны) с осью x в точке z . Для ОВВ $u, \xi = \text{const}$ (рис. 1, кривая 1), для ПВО — $\xi \equiv 0$ (рис. 1, кривая 3). В общем случае $u, \xi \neq \text{const}$.

В силу отсутствия источников излучения внутри полубесконечной нелинейной среды без диссипации необходимо среди решений уравнения (2) выбирать чисто бегущие волны, уходящие в глубь среды (либо приповерхностные волны ПВО, вообще не уносящие энергию вдоль оси z), чему соответствует требование, чтобы в (3) при $z \rightarrow \infty$ было [1, 3, 6]

$$u \rightarrow \text{const} \equiv u_\infty \geqslant 0, \quad \xi \rightarrow \text{const} \equiv \xi_\infty \geqslant 0. \quad (4)$$

По существу, (4) есть условие излучения Зоммерфельда [10]. (отсутствие обратной волны).

Подставляя (3) в (2), получаем первый интеграл

$$I \equiv \xi u^2 = \text{const} = \xi_\infty u_\infty^2 \geqslant 0, \quad (5)$$

представляющий собой закон сохранения потока энергии* [7], переносимой вдоль z , а также уравнение для действительной амплитуды u :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + k_0^2 u(Q - u^2 - \xi^2) = 0, \quad (6)$$

из которого, с учетом (4) и (5) следует, что

$$u_\infty = \xi_\infty = 0 \quad \text{при } Q \leq 0; \quad (7a)$$

$$u_\infty^2 + \xi_\infty^2 = Q \quad \text{при } Q \geq 0. \quad (7b)$$

Первый интеграл уравнения (6), удовлетворяющий условию (4) с учетом (5), (7), есть

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 = k_0^2 u^{-2} (u^2 - u_\infty^2)^2 \left(u_\infty^2 + \frac{u^2}{2} - Q \right). \quad (8)$$

Он является частным случаем более общего интеграла движения [6], определяющего ПНБВ при произвольном виде нелинейности. Из (7a) следует, что в нелинейном случае при $Q \leq 0$, как и в линейном, возможна только волна ПВО; интегрирование (8) дает ее профиль [1] (рис. 2 б, кривая 3):

$$u = \frac{\sqrt{V - 2Q}}{\operatorname{sh}(k_0 z \sqrt{V - Q} + C_1)} \quad (C_1 = \text{const}). \quad (9)$$

При $Q = 0$ (9) переходит в $u = \sqrt{2}/(k_0 z + C_1)$ в отличие от линейного случая, когда $E = \text{const}$. При $Q > 0$ всегда $u_\infty \geq 0$; здесь формально возможны как бегущие, так и ПВО волны. При $u_\infty^2 < 2Q/3$ возможны лишь ОБВ, т. е. $u(z) \equiv u_\infty$ (иначе правая часть в (8) при $u \rightarrow u_\infty$ была бы отрицательна, что невозможно). Наконец, при $2Q/3 \leq u_\infty^2 < Q$, кроме ОБВ, возможны также и ПНБВ, что соответствует критерию [6], поскольку здесь $F(u) = u^4(Q - u^2)$ и в указанном интервале $F(u_\infty)$ положительна и убывающая.

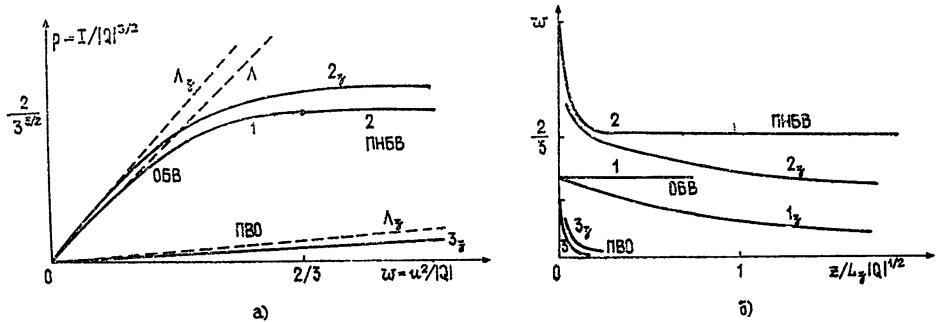


Рис. 2. а) Зависимость плотности потока энергии ρ от интенсивности поля w . Кривые: L — линейная среда без поглощения, L_3 — с поглощением; 1 — нелинейная ОБВ, 2 — нелинейная предельная ПНБВ (11), 2₃ — то же с поглощением, 3₃ — нелинейное ПВО с поглощением. б) Зависимость ω от расстояния z , смысл кривых тот же.

Интегрирование (8) дает два возможных вида ПНБВ [3, 6]:

* Для произвольного распределения поля в пространстве законы сохранения энергии и импульса поля в бездиссиативных средах с $\epsilon_{\text{пл}}$ ([E?]) получены в [1].

$$u = \left[u_{\infty}^2 \pm 2B^2 / \operatorname{ch}^2(Bk_0 z + C) \right]^{1/2}, \quad \text{где } B = (3u_{\infty}^2/2 - Q)^{1/2}. \quad (10a)$$

При $u_{\infty}^2 = Q$ они вырождаются в приповерхностные волны ПВО ($\xi \equiv 0$) [1, 3]:

$$u = \sqrt{Q} \operatorname{ctg}^{\text{th}}(k_0 z / \sqrt{2} + C), \quad (10b)$$

а при $u_{\infty}^2 = 2Q/3$ (т. е. при минимально возможном u_{∞}^2 для ПНБВ) остается только один (предельный) вид ПНБВ [3-6] (рис. 2 б, кривая 2):

$$u_{\text{пп}} = \left[\frac{2Q}{3} + \frac{2}{(k_0 z + C)^2} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ПРОБЛЕМА КОНТИНУУМА ПНБВ

Константы интегрирования для ОБВ и решений (9)–(11), как и фаза φ в (3), определяются из граничных условий, что дает и область существования того или иного решения. Приравнивая, как обычно, тангенциальные составляющие полей по обе стороны границы, получаем, кроме уже упомянутого сохранения тангенциальной компоненты волнового вектора (справедливого для произвольных параметров задачи), также обобщенное граничное условие для преломленной волны E (и формулу для коэффициента отражения r) [1, 3], которые при условии (1) не зависят от направления плоскости поляризации E_{in} :

$$\frac{i dE(0)}{dz} + k_0 \sin \psi [2E_{\text{in}} - E(0)] = 0; \quad (12a)$$

$$r = \frac{E(0)}{E_{\text{in}}} - 1. \quad (12b)$$

(Если вектор E_{in} нормален к плоскости падения, то (12) справедливо вне зависимости от (1).)

Подставляя в (12 а) E в виде (3), вводя приведенную интенсивность падающего поля $\delta^2 \equiv 4 |\epsilon_2 E_{\text{in}}^2 | \epsilon_0^{-1}$, получаем при выполнении (1) граничные условия для амплитуды $u_0 \equiv u(0)$ и угла $\xi_0 \equiv \xi(0)$ на границе и формулу для фазы φ в (3):

$$k_0^{-2} \left[\frac{du(0)}{dz} \right]^2 = \psi^2 \delta^2 - u_0^2 (\psi + \xi_0)^2; \quad (13a)$$

$$\cos \varphi = \frac{u_0 (\psi + \xi_0)}{\psi \delta}. \quad (13b)$$

При $Q \leq 0$ для ПВО (7 а), (9) неизвестными остаются лишь C_1 (или u_0) и φ , которые однозначно определяются из (13). В [1], в частности, показано, что глубина проникновения поля в вещества здесь уменьшается по сравнению с линейным случаем. При $Q > 0$ в случае $u_{\infty}^2 < 2Q/3$, когда осуществляется лишь ОБВ, подставляя (7б) в (13а), с учетом $du/dz = 0$ получаем «нелинейную» формулу Снеллиуса для угла ξ [1]:

$$(\psi + \xi)^2 (Q - \xi^2) = \delta^2 \psi^2 \quad \left(\xi^2 > \frac{Q}{3} \right), \quad (14)$$

а принимая во внимание связи между r , ξ и u ,

$$r = \frac{2u}{\delta} - 1 = \frac{(\psi - \xi)}{(\psi + \xi)}; \quad (15a)$$

$$u = (Q - \xi^2)^{1/2} = \frac{\psi \delta}{(\psi + \xi)}, \quad (15b)$$

имеем и «френелевские формулы» для r [1] и u :

$$16r\psi^2 + 4D(1+r)^2 = \delta^2(1+r)^4; \quad (16a)$$

$$u^2(Q - u^2) = \psi^2(\delta - u)^2 \quad (u^2 < 2Q/3) \quad (16b)$$

$$(\varphi = 0).$$

Поскольку при ОБВ ξ , $u = \text{const}$, граничных условий также хватило для определения всех параметров решения (рис. 3, 4). Наконец, при $2Q/3 \leq u_\infty^2 < Q$, когда возможны ПНБВ, для определения трех констант решения (3), (10а)— u_∞ , C (или u_0) и φ —имеется лишь два уравнения (13 а), (13 б); условия излучения (4) уже были полностью использованы при построении ПНБВ. Таким образом, появляется континуум решений при полностью заданных граничных условиях. Факторами, уточняющими задачу и «снимающими» континуум, могут стать поглощение, рассеяние, неоднородность падающего поля и т. п. Рассмотрим простейший из них—поглощение, что позволяет произвести выбор единственного физически реализуемого вида ПНБВ с помощью последующего предельного перехода от поглощающей среды к полностью прозрачной.

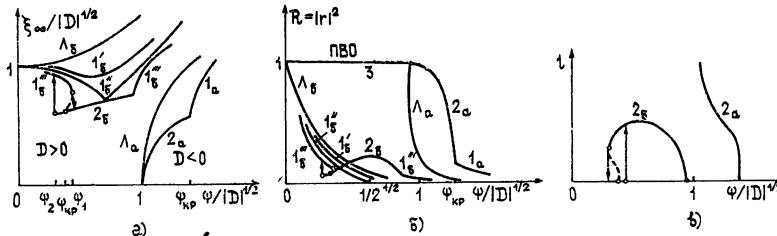


Рис. 3. Зависимость угла прохождения ξ_∞ (а), коэффициента отражения R (б) и лучевого смещения t (в) от угла скольжения падающей волны ϕ . Кривые: J —линейный случай, 1, 2—нелинейный (1—ОБВ, 2—ПНБВ), с индексами $a-D<0$; $b-D>0$; $1'_6-\delta^2<4D$; $1''_6-\delta^2=4D$ (нелинейное просветление); $1'''_6-\delta^2>4D$.

3. УЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ И ОТБОР РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

Введем поглощение, как обычно, в виде мнимой добавки $i\gamma\varepsilon_0$ ($\gamma > 0$) к проницаемости нелинейной среды ε_{nl} (если известна длина L_3 экспоненциального затухания интенсивности вдоль луча, то $\gamma=(k_0L_3)^{-1}$). Тогда в (2) множитель при $k_0^2 E$ будет содержать дополнительное слагаемое $i\gamma$, а граничные условия (12 а), (12 б) сохранят прежний вид. Отыскивая решение снова в форме (3), находим, что уравнение (6) остается в силе, а вместо интеграла потока энергии (5), который теперь не сохраняется, имеем уравнение

$$\frac{dI}{dz} = -k_0\gamma u^2 = -\frac{u^2}{L_3} \quad (I \equiv u^2 \xi). \quad (17)$$

Вместо условия (4) потребуем затухания поля при $z \rightarrow \infty$:

$$u \rightarrow 0; \quad (18a)$$

$$\xi \rightarrow \text{const} \equiv \xi_3 = \left[\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} (Q^2 + \gamma^2)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (18b)$$

(18б) является следствием из условия (18а), которое применено дважды к уравнению (2), измененному с учетом $i\gamma$: 1) при $u \rightarrow 0$ оно становится линейным и 2) у этого линейного уравнения есть лишь один вид решения, для которого справедливо (18а) и которое имеет вид $u \exp(ik_0 z \xi_3 + i\varphi)$, где ξ_3 как раз и определяется (18б). В частности, при относительно слабом поглощении ($\gamma \ll |Q|$) имеем $\xi_3 \approx \sqrt{Q}(1 + \gamma^2/8Q^2)^{1/2}$ при $Q > 0$ и $\xi_3 \approx \gamma/2|Q|^{1/2}$ при $Q < 0$.

Исключая из системы уравнений (6) и (17) переменную z , получаем уравнение, связывающее лишь I и w . Вводя обозначения $w \equiv u^2 \times \propto |Q|^{-1}$, $\rho \equiv I|Q|^{-3/2}$, $\mu \equiv \gamma|Q|^{-1}$, запишем его в виде

$$\frac{1}{4} \mu^2 w^2 \frac{d}{dw} \left[w \left(\frac{d\rho}{dw} \right)^{-2} \right] = \rho^2 + w^3 - w^2 \operatorname{sign} Q, \quad (19)$$

где μ — малый параметр задачи.

Решение уравнения (19), согласно (18а), (18б), должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\rho(0) = 0; \quad (20a)$$

$$\frac{d\rho(0)}{dw} = \xi_3 |Q|^{-1/2}, \quad (20b)$$

которые полностью определяют решение, что и приводит к снятию континуума. Если $\rho(w)$ найдено, то зависимость $w(z)$ следует из (17):

$$\int \left(\frac{d\rho}{dw} \right) \left(\frac{dw}{w} \right) = - \frac{z}{L_3 |Q|^{1/2}}, \quad (21)$$

а граничным для нее по-прежнему является условие (13а) (где, по определению, $\xi_0 = \rho_0 w_0^{-1} |Q|^{1/2}$), что дает конечное число решений.

В случае $Q < 0$ (ПВО при $\gamma = 0$) имеем (рис. 2 а, кривая 3_3 ; кривая L_3 есть $\rho \approx \mu w/2$)

$$\rho = 2\mu \left(\sqrt{1 + \frac{w}{2}} - 1 \right) + O(\mu^3) \quad (\mu \ll 1), \quad (22)$$

$w(z)$ с точностью до $O(\mu^2)$ определяется по-прежнему (9) (рис. 2 б, кривая 3_3).

В случае $Q > 0$, представляющем наибольший интерес, введем функцию $\rho_{\text{пп}}(w)$, дающую поток энергии в прозрачной среде ($\gamma = 0$):

$$\rho_{\text{пп}} = w \sqrt{1 - w} \quad \text{при } w \leq \frac{2}{3}; \quad (23a)$$

$$\rho_{\text{пп}} = 2 \cdot 3^{-3/2} \quad \text{при } w \geq \frac{2}{3}, \quad (23b)$$

где (23а) соответствует ОБВ, а (23б) — предельной ПНБВ (11) (рис. 2 а, кривые 1 и 2). Тогда, представляя решение уравнения (19) в виде $\rho = \rho_{\text{пп}} + \Delta\rho$, нетрудно показать, что при $\mu \rightarrow 0$ для решения, удовлетворяющего условиям (20), имеем (рис. 2а, кривая 2_3)

$$\Delta \rho = \frac{\mu^2 w \left(1 - \frac{w}{2}\right)}{\sqrt{1-w} (2-3w)^3} + o(\mu^2) \quad \text{при} \quad \frac{2}{3} - w \gg \mu^{2/5}; \quad (24a)$$

$$\Delta \rho = O(\mu^{4/5}), \quad \frac{d \Delta \rho}{dw} = O(\mu^{2/5}) \quad \text{при} \quad \left|w - \frac{2}{3}\right| \leq O(\mu^{2/5}); \quad (24b)$$

$$\Delta \rho = B \mu^{4/5} + \mu \sqrt{2} \left(\sqrt{w - \frac{2}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{w - \frac{2}{3}}} \right) + O(\mu^{9/5}) \\ \text{при} \quad w - \frac{2}{3} \gg \mu^{2/5}, \quad (24b)$$

где $B = \text{const} = O(1)$. При этом (24 а) следует из подстановки (23 а) в качестве нулевого приближения в левую часть (19), а (24 в) — из аналогичной подстановки (23 б) в правую часть (19) и последующего его решения (и оценки остаточного члена) с учетом результата (24 б). Последний же определяется следующим: вблизи точки $w = 2/3$, оставляя в правой части (19) первые неисчезающие в разложении по $\Delta w = w - 2/3$ и $\Delta \rho = \rho - 2 \cdot 3^{-3/2}$ члены (и полагая в левой части $w \approx 2/3$) и делая подстановку $w = a \Delta w \mu^{-2/5}$, $\rho = b \Delta \rho \mu^{-4/5}$ ($a, b = \text{const} = O(1)$), получаем уравнение, совсем не содержащее параметра μ , откуда и следуют масштабы $\mu^{2/5}$ по Δw и $\mu^{4/5}$ по $\Delta \rho$, задающие асимптотику решения (24 а), (24 б), (24 в) при $\mu \rightarrow 0$. Принимая в качестве независимого переменного не w , а ρ , его можно привести к так называемому уравнению Пенлеве [12] $6 \bar{w}'' = \bar{\rho} + \bar{w}^2$ (при $a = \frac{1}{2} \cdot 3^{7/5}$, $b = 3^{13/10}$); оно справедливо при $|\Delta w| \ll 1$, но не обязательно при $|\Delta w| \lesssim \mu^{2/5}$, поэтому при $\mu \rightarrow 0$ область его действия частично перекрывается с областями решений (24 а), (24 в), в связи с чем граничные условия для его однозначного решения даются асимптотикой при $w \rightarrow -\infty$, определяемой независимо найденным решением (24 а), для которого, в свою очередь, граничные условия есть (20 а), (20 б).

Таким образом, и в случае $Q > 0$ существует непрерывный предельный переход $\rho \rightarrow \rho_{\text{пр}}$ при $\mu \rightarrow 0$ для любых значений w . Из (24 а), (24 б), (24 в) видно, что волнами, реализующимися в пределе среды с $\mu = 0$, являются либо ОВВ с $w < 2/3$, либо предельная ПНВВ (11) с $w_{\infty} = 2/3$, которая тем самым является единственным реализуемым видом ПНВВ. Вместе с волной ПВО (9) (при $Q < 0$) они составляют полный набор физически реализуемых одномерных волн в полубесконечной среде без поглощения при $\epsilon_2 < 0$.

При $w < \frac{2}{3} - O(\mu^{2/5})$, подставляя (23 а) в (21), получаем в первом приближении по μ пространственный профиль $w(z)$ затухающей ОВВ

$$3 \sqrt{1-w} + 2 \operatorname{arth} \sqrt{1-w} = -\frac{z}{L_3 \xi_3} + \text{const} \quad (25)$$

((рис. 2б), кривая I_3), который при $w \rightarrow 0$ переходит в линейное решение $w \propto \exp(-z/L_3 \xi_3)$. При $w > \frac{2}{3} + O(\mu^{2/5})$ (24 в) получаем, что $w(z)$

с точностью до $\mathcal{O}(\mu)$ соответствует ПНБВ (11). Наконец, рассматривая переходную область $w \sim 2/3$ (24 б) от (11) к (25), получаем ширину этого перехода $\Delta z \sim (k_0 \mu^{1/5} |Q|^{1/2})^{-1}$. Итак, вплоть до $z \sim L_3 |Q|^{1/2}$ во всех случаях можно говорить о воспроизведении картины, характерной для прозрачной среды. Нигде не наблюдается осцилляции $w(z)$ (т. е. стоячих или частично-стоячих волн), что означает отсутствие потоков, отраженных обратно, и дает обоснование принятого ранее условия (4) для прозрачных сред.

Интересно, что в случае $\epsilon_2 > 0$ в области линейного ПВО ($Q < 0$, т. е. $F < 0$ при $w \rightarrow 0$) есть зона значений Q , где при сильном поле учет поглощения приводит к осциллирующей по z картине поля (вплоть до некоторого $z = z_0$, после чего волна экспоненциально затухает), как показано в [13] для поглощающей нелинейной плазмы (часть результатов [13] повторена в [4]). Причем в одномерном рассмотрении при $\gamma \rightarrow 0$ нет предельного перехода, т. е. картина поля не переходит в одну из волн (в частности, ОБВ), характерных для прозрачной нелинейной среды [1, 2] в этой зоне (заметим, что при $\gamma = 0$ здесь нет проблемы континуума, т. е. число решений конечно). Объясняется это тем, что при $\epsilon_2 > 0$ затухание нелинейной ОБВ приводит к уменьшению ϵ_{nl} , в связи с чем при $Q < 0$ происходит внутреннее отражение на глубине $z_0 = O(\gamma^{-1})$, что и формирует обратную волну, интерферирующую с прямой. (При $Q > 0$ эта проблема не возникает.) Заметим, однако, что в условиях нелинейной оптики, т. е. при почти скользящем падении (1), для двумерных волн (т. е. уже при учете конечной ширины пучка света) можно ожидать, что зона нелинейной интерференции, вызванной поглощением при $Q < 0$, будучи отнесена далеко от входной области, слабо повлияет на явления, происходящие в этой области. Кроме того, как указывалось в [1], в двумерном случае большую роль должны сыграть самофокусировка и самоискривление.

4. ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РЕЖИМАМИ ОБВ И ПНБВ. ГИСТЕРЕЗИС

Поскольку значение u_∞^2 для реализуемой ПНБВ теперь известно, из (13 а) с учетом (5) получаем для u_0

$$u_0^2 = D \pm \left[2\psi^2 \delta^2 - \left(\psi + \sqrt{\frac{Q}{3}} \right)^2 \left(D + 2\psi \sqrt{\frac{Q}{3}} \right) \right]^{1/2} \geq u_\infty^2 = 2 \frac{Q}{3}, \quad (26)$$

а ϕ находим из (13 б). При $D < 0$, а также при $2\psi^2/D > 1$, для заданного δ реализуется либо одна ПНБВ (верхний знак в (26)), либо—одна ОБВ (16 б). С изменением δ или ϕ они непрерывным образом переходят друг в друга; разрыв испытывает лишь производная (рис. 3 и 4). Точка «стыковки» этих состояний определяется подстановкой $u_0^2 = u_\infty^2$ в (26), т. е.

$$\left[\delta - \sqrt{\frac{2Q}{3}} \left(1 + \psi^{-1} \sqrt{\frac{Q}{3}} \right) \right]_{kp} = 0 \quad (Q \approx D + \psi^2), \quad (27)$$

что дает критический угол ψ_{kp} при заданном δ или наоборот. В частности,

$$\psi_{kp} \approx 0,77 \delta \quad \text{при } D = 0; \quad (28a)$$

$$\psi_{kp}^2 \approx -D + \frac{3}{2} \delta^2 \quad \text{при } \delta^2 \ll -D > 0. \quad (28b)$$

Однако при условиях [3]

$$D > 0; \quad (29a)$$

$$\frac{2\psi^2}{D} < 1, \quad \frac{4D}{\delta^2} < 1 \quad (\text{т. е. } |\varepsilon_2 E_{in}^2| > \Delta \varepsilon_l > 0) \quad (29b)$$

существует область параметров ϕ и δ , где есть уже два состояния предельной ПНБВ (11) с разными u_0 (оба знака в (26)) и одновременно— одна ОБВ (16 б) либо наоборот (т. е. три возможных состояния в каждой точке области, кроме ее краев).

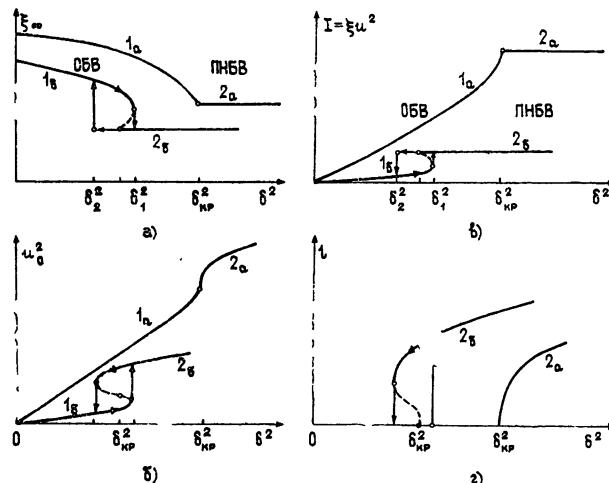


Рис. 4. Зависимость угла прохождения ξ_∞ (а), интенсивности волны на границе u_0^2 (б), плотности потока энергии I (в) и лучевого смещения l (г) от приведенной интенсивности падающего поля δ^2 в безгистерезисном случае (индекс а) и гистерезисном (индекс б). Кривые: 1—ОБВ, 2—ПНБВ.

В соответствии с теорией бифуркаций, если кривая состояний (например, $u_0(\delta^2)$, см. рис. 4 б, кривые 1_b и 2_b) имеет S-образный вид, то внутри области неоднозначности устойчивы те две из трех ветвей, которые имеют продолжение в области с единственным возможным состоянием (сплошные ветви кривых 1_b , 2_b на рис. 4 б). Здесь это приводит к естественному энергетическому критерию устойчивости решений: $du_0^2/d(\delta^2) > 0$, т. е. с ростом интенсивности падающего поля энергия устойчивой волны должна возрастать, а не падать, что можно рассматривать как некую аналогию принципа Ла-Шателье для данного случая. Устойчивы те ПНБВ, которым соответствуют верхний знак в (26), и те ОБВ, для которых в (16 б) выполнено условие

$$u^2 \leqslant \min \left\{ \frac{1}{16} \left[(\psi + \sqrt{8Q + \psi^2})^2 - 4\psi^2 \right]; \quad \frac{2Q}{3} \right\}. \quad (30)$$

Переход от одной из устойчивых ветвей к другой в области (29 а), (29 б), по теории бифуркаций, происходит скачком в точках уменьшения числа состояний, т. е. в точках, где производная от характеристики состояния по задаваемому параметру обращается в бесконечность ($du_0^2/d\psi = \infty$ или $du_0^2/d(\delta^2) = \infty$). При увеличении δ^2 (или ψ) скачок от ОБВ к ПНБВ происходит в точке δ_1^2 при заданном ψ (либо ψ_1 при заданном δ^2), определяемой исключением u_0^2 из (16 б) и (30) (взятого

со знаком равенства) в области (29 а), (29 б). Обратный скачок при уменьшении δ^2 (или ψ) происходит в точке $\delta_2^2 < \delta_1^2$ (или $\psi_2 < \psi_1$), определяемой обращением в нуль радикала в (26). В сильном падающем поле ($\delta^2 \gg 4D$) или при малом угле скольжения ($\psi^2 \ll D$) имеем $2(\delta\psi)_1 \approx \sqrt{6}(\delta\psi)_2 \approx D$, откуда ширина гистерезисной петли по углу ψ при заданной интенсивности δ^2 есть $\psi_1 - \psi_2 \approx D/10\delta$, а по δ^2 при заданном ψ — $\delta_1^2 - \delta_2^2 \approx D^2/12\psi^2$.

При $\mu \neq 0$ можно получить общую френелевскую формулу, пригодную для произвольных параметров системы, которая в пределе $\mu \rightarrow 0$ должна давать характеристики всех реализуемых типов волн. Используя (13 а), (13 б) и (17), в обозначениях разд. 3 получаем формулу для $w_0 \equiv w_0^2 |Q|^{-1}$:

$$\left(\frac{\psi \delta}{Q} \right)^2 = w_0 \left[\left(\frac{\psi}{|Q|^{1/2}} + \frac{\rho(w_0)}{w_0} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{2d\rho(w_0)/dw_0} \right)^2 \right], \quad (31)$$

где $\rho(w)$ — решение (19), удовлетворяющее условию (20 а), (20 б).

При $\mu \rightarrow 0$ из нее вытекают, как частные случаи, формулы для ПВО [1], ОБВ [1] (здесь (16б)) и ПНБВ (26) в результате использования соответственно (22), (23 а) и (24 в). Первая поправка на малое поглощение для ПВО и ОБВ следует из учета первого члена разложения ρ по степеням μ в (22) и (24 а) соответственно, а для ПНБВ — трех членов в (24 в). Переход между ОБВ и ПНБВ (24 б) при изменении $\delta^2 |Q|^{-1}$ или $\psi |Q|^{-1/2}$ (27) как бы размывается на интервале шириной $O(\mu^{2/5})$. Гистерезисы по-прежнему обусловливаются S -образностью зависимости $w_0(\delta^2)$ (или $w_0(\psi)$) либо, наоборот, N -образностью функции $\delta^2(w_0)$, но неравенство (29 б) теперь усиливается добавлением в его левую часть величин $O(\mu^{2/5})$. Это приводит к пороговому условию на величину поглощения для наблюдения гистерезиса: $\mu < \mu_{\text{пор}} = O(1)$, т. е. $L_3 > L_{\text{пор}} \sim (k_0 D)^{-1}$. В случае $\epsilon_2 = -10^{-10}$ СГСЭ при полях $E_{in} = 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$ необходимая величина D , согласно (29 а), (29 б), есть $\approx 10^{-4}$, и при $k_0 = 10^5 \text{ см}^{-1}$ имеем $(k_0 D)^{-1} = 1 \text{ мм}$; многие же нелинейные среды в оптическом диапазоне имеют намного более слабое поглощение ($L_3 > 10 \text{ см}$).

5. ОГРАНИЧЕНИЕ ПРОХОДЯЩЕЙ МОЩНОСТИ. КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ И ФАЗА

С существованием ПНБВ связан эффект ограничения проходящего потока энергии (см. также [5]). Задиксируем угол ψ таким, чтобы в слабом поле существовала ОБВ ($\sin^2 \psi > \max\{0, -D\}$). При этом плотность потока падающей энергии нормально к границе есть $|E_{in}^2| \sin \psi / 8\pi$; умножив на $8\pi |\epsilon_2| \epsilon_0^{-1}$, запишем его в виде $I_{in} = \delta^2 \sin \psi / 4$. Плотность потока прошедшей волны вдоль z есть I (5). При увеличении I_{in} от нуля вначале сохраняется ОБВ и I растет (рис. 4 в); затем, с установлением ПНБВ, где $I = \text{const}$, проходящий поток перестает расти. В безгистерезисной области ($\sin^2 \psi > \max\{-D, D/2\}$) ограничение наступает при $\delta^2 > \delta_{kp}^2$ (27), (28 а), (28 б) (рис. 4 в, кривые I_a , I_a'), а в гистерезисной (29) — при $\delta^2 > \delta_1^2$ (рис. 4 в, кривые I_b , I_b').

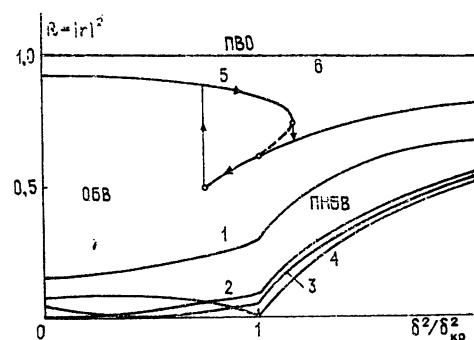
Рассмотрим поведение коэффициента отражения по мощности $R = |r|^2$ (рис. 5). При ПВО $R = 1$; для ОБВ r следует из (16 а) (рис. 3 б), а для ПНБВ имеем

$$R \equiv |r|^2 = 1 - \frac{I}{I_{in}} = 1 - \left(\frac{4Q}{3} \right)^{3/2} (\delta^2 \sin \psi)^{-1}. \quad (32)$$

При увеличении мощности ($\delta^2 \gg \delta_{kp}^2$) $R \rightarrow 1$, т. е. отражение приближается к полному из-за ограничения прохождения (рис. 5). При условии (29) зависимость $R(\psi)$ имеет минимум $R=1-4D/\delta^2$ в точке $\psi^2 = D/2$. Фаза отраженной волны есть $\varphi_r = 2\varphi$ [1], где φ — фаза преломленной волны (3), (13 б). Для ОБВ $\varphi = 0$, для ПВО — см. [1], а для ПНБВ в (13 б) необходимо подставить u_0 из (26) и соответствующее ξ_0 . При наличии поглощения в (32) необходимо положить $I = \rho(w_0)|Q|^{3/2}$, где w_0 определяется из (31); порога по поглощению и зависимости от гистерезиса здесь нет.

Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения R от интенсивности падающего поля δ^2 .

Кривые: 1— $D < 0, \psi^2 > |D|$; 2— $D = 0$; 3— $\psi^2 > D/2$; 4— $\psi^2 = D/2$; 5— $\psi^2 < D/2$; 6— $D < 0, \psi^2 < |D|$ (ПВО).



6. СМЕЩЕНИЕ ПРЕЛОМЛЕННЫХ ЛУЧЕЙ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

Из линейной теории известно, что при ПВО пучка света с ограниченным поперечным сечением отраженный пучок смешен вдоль границы сред [14]; если же ПВО нет или плоская волна неограничена, это явление отсутствует. Однако в нелинейной задаче при наличии ПНБВ происходит сдвиг лучей (нормалей к фазовому фронту) вдоль границы, обусловленный связью между $u^2(z)$ и $\xi(z)$ (5); причем, в противоположность линейному случаю это справедливо уже для прошедшей, а не отраженной волны, в отсутствие ПВО и при неограниченной плоской падающей волне. Реализуемой ПНБВ (11) соответствует начальное «прилипание» лучей (рис. 1, кривая 2), т. е. их смещение в направлении падения.

Уравнение траектории лучей есть $dz/dx = \xi(z)$, откуда с учетом (5) и (11) получаем ее форму:

$$x = z \sqrt{\frac{3}{Q}} + \frac{l}{1 + \frac{z_l}{z}}, \quad \text{где } l = \frac{3}{k_0 Q} \sqrt{\frac{3u_0^2}{2Q} - 1},$$

$$z_l = \frac{(3/Q)^{3/2}}{k_0^2 l}. \quad (33)$$

Здесь l — смещение луча при $z \rightarrow \infty$; z_l — характерная глубина половинного смещения, а u_0^2 определяется из (26). Пусть $k_0 = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $D = -10^{-4}$, $\psi = \sqrt{\frac{3}{Q} |D|} = 0^\circ, 7$; по (27) это дает $\delta_{kp} = 0,77 \cdot 10^{-2}$,

что при $|\epsilon_2/\epsilon_0| = 10^{-10}$ СГСЭ соответствует критическому значению поля для появления ПНБВ $E_{kp} = 1,15 \cdot 10^5 \text{ В/см}$. Тогда при превышении падающего поля E_{in} над критическим в два раза (что дает $3u_0^2/2Q = 5$ (26)) получаем $l = 1,2 \text{ см}$, а $z_l = 0,01 \text{ мм}$ (т. е. смещение сильное и происходит уже на очень малой глубине). Эффект не зависит от наличия гистерезиса; слабое поглощение не вносит пороговых условий. Зависимость l от ψ и δ^2 представлена на рис. 3 в и 4 г.

Представляет интерес выяснить влияние конечной ширины пучка света, для исследования которого требуется построение теории нелинейной дифракции с граничными условиями, самосогласованными с решением для поля (такие условия не возникали ранее в теории параболизированного нелинейного уравнения применительно к самофокусировке (или дефокусировке), поскольку поле на границе считалось известным). Приведем здесь качественные оценки. Для наблюдения ПНБВ в безгистерезисной области и связанных с ними эффектов ограничения проходящего потока и смещения преломленных лучей потребуем, чтобы угол дифракционной расходимости преломленного пучка $\Delta \xi_d$ был меньше изменения угла наклона лучей в ПНБВ вдоль траектории, т. е. $\Delta \xi_d < \xi_\infty - \xi_0$. Это дает пороговое условие на поперечный размер пучка a :

$$a > a_{\text{пор}} \left(1 - \frac{2Q}{3u_0^2} \right)^{-1}, \quad \text{где } a_{\text{пор}} = \frac{3\psi}{k_0 Q}. \quad (34)$$

Для приведенного выше примера $a > 0,1 \text{ мм}$. Для наблюдения гистерезиса в случае слабого затухания ($L_3 \gg L_{\text{пор}}$) потребуем, аналогично [1], чтобы ширина гистерезисной петли по углу была больше угла дифракционной расходимости падающего пучка, откуда следует условие

$$a > \frac{10 \delta_{kp}^2}{k_0 D (\delta_{kp} - 2\sqrt{D})}, \quad (35)$$

что для $\delta_{kp} = 4\sqrt{D} = 4 \cdot 10^{-2}$ дает $a > 0,8 \text{ мм}$.

7. КРИТЕРИИ РЕАЛИЗУЕМОСТИ И ОТБОРА ВОЛН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ВИДЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Нетрудно заметить, что предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ (разд. 3) в случае $\Delta \epsilon_{nl} = -|e_2 E^2|$ указал на реализацию лишь того типа ПНБВ, который имел минимальное значение $|E_\infty^2|$ из всех возможных ПНБВ (а тем самым, — и минимальную среднюю по z плотность энергии*). Естествен вопрос о справедливости этого критерия, предложенного в [3], в случае произвольного вида нелинейности среды (в частности, когда нелинейность велика, как, например, в плазме в сильных электромагнитных полях), а также при произвольной величине угла ψ . Более того, применительно к общему виду $\epsilon_{nl}(|E|^2)$ возникает задача о существовании тех или иных типов волн, характерных для прозрачной среды, в средах с очень малым поглощением, поскольку оказывается, что не только не все (кроме одного) виды ПНБВ, но и не все ОБВ могут быть реализованы, а в некоторых случаях — ни одна из бегущих волн, разрешенных в прозрачной среде, не реализуется. Под реализуемыми, как и прежде, мы будем понимать те волны в прозрачной среде, которые являются решениями одномерного нелинейного волнового уравнения (см., например, (2) в [6]) на полубесконечном интервале z , удовлетворяющими условиям излучения (4) на бесконечности, и которые в то же время соответствуют предельным волновым решениям в полу бесконечной поглощающей среде при равномерном предельном переходе к полной прозрачности, т. е. при $\gamma \rightarrow 0$. Волновое уравнение в последнем случае имеет вид

* Одновременно для данной нелинейности предельная ПНБВ (11) определяет максимум функции $F(|E|^2)$ [6] (см. Введение), а тем самым — и максимум плотности потока энергии в глубь среды, поскольку, как следует из (5) и (7б), $I^2 \propto F(|E_\infty^2|)$ (что, кстати, выявляет физический смысл функции F); согласно же [6] минимальное значение $|E_\infty^2|$ для ПНБВ соответствует максимумам F . В общем случае определяющим максимумом становится лишь один из них (см. ниже).

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 E [\epsilon_{\text{нл}}(|E|^2) \epsilon_0^{-1} - \cos^2 \psi + i \gamma] = 0. \quad (36)$$

Кроме волн, близких к реализуемым волнам (а в некоторых случаях — вместо них), при наличии поглощения на определенных участках среды могут образовываться стоячие (либо «частично-стоячие») волны с осциллирующей структурой амплитуды в пространстве, связанные с нелинейным отражением волны от края такого участка. Достаточные условия* реализуемости чисто бегущих волн (ОБВ или ПНБВ) и отбор единственного реализуемого типа волны из континуума ПНБВ для произвольной нелинейности определяется следующей теоремой.

Пусть в системе в отсутствие поглощения выполнены условия существования ПНБВ [6], т. е. A_T существует область $U(v \leq U$, где $v \equiv |E|^2 \geq 0)$ такая, что $F(v) > 0$ в U , где $F(v) \equiv v^2 [\epsilon_{\text{нл}}(v)/\epsilon_0 - \cos^2 \psi]$ — непрерывная в U функция, и B_T в U имеется конечное число интервалов V монотонного убывания функции $F(v)$ (согласно теореме [6] для ПНБВ $v_\infty \in V$, где $v_\infty \equiv v(z \rightarrow \infty)$). Минимальное значение каждого из интервалов V соответствует, таким образом, максимумам $F(v)$ в U . Обозначим наименьшее из этих минимальных значений через v_m и введем функцию $G(v, v_m) \equiv \int_{v_m}^v v^{-2} [F(v_m) - F(v)] dv$.

Пусть, кроме того, выполнены условия: $B_T F(v) > 0$ при $v \rightarrow 0$ (что, в частности, всегда выполняется при $\epsilon(0) > \epsilon_0 \cos^2 \psi$ **), и $G(v, v_m) > 0$ при всех $v > v_m$.

Тогда реализуемыми (в указанном выше смысле) ОБВ являются те и только те, для которых $0 \leq v_\infty \leq v_m$, а реализуемыми ПНБВ — те и только те, для которых $v_\infty = v_m$. При этом решения волнового уравнения с $v < \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$ не могут содержать каких-либо других волн, кроме указанных (в частности, отсутствуют какие-либо осциллирующие решения).

Доказательство теоремы основывается на асимптотическом исследовании решений уравнения типа (19), следующего из (36), которое для произвольной нелинейности записывается с простой подстановкой γ, v и $J \equiv v \xi$ (плотность потока энергии) вместо μ, ω и ρ соответственно, и с правой частью наиболее общего вида: $J^2 - F(v)$, т. е.

$$\frac{1}{4} \gamma^2 v^2 \frac{d}{dv} \left[v \left(\frac{dJ}{dv} \right)^{-2} \right] = J^2 - F(v). \quad (37)$$

При этом достаточно показать, аналогично (23), (24), что для решения этого уравнения $J(v)$, удовлетворяющего условию типа (20), справедливо соотношение $J(v) \rightarrow J_{\text{пр}}$ при $\gamma \rightarrow 0$ для всех конечных v , где $J_{\text{пр}}^2 \equiv F(v)$ при $0 \leq v \leq v_m$ и $J_{\text{пр}}^2 \equiv F(v_m)$ при $v \geq v_m$. Это нетрудно сделать применительно ко всем функциям F , удовлетворяющим условиям теоремы. В частности, при $0 < v < v_m$ для $\Delta J = J - J_{\text{пр}}$ получаем $\Delta J = O(\gamma^2)$, а в интервале $v > v_m$ имеем $dJ/dv = O(\gamma) = -(1/2) \gamma [v G^{-1}(v, v_m)]^{1/2} + o(\gamma)$ (кроме малой области вблизи v_m , где $\Delta J = O(\gamma^\alpha)$, $\alpha > 0$). Таким образом, $J(v)$ испытывает монотонное изменение на обоих интервалах (на втором из них это связано с тем, что всюду $G > 0$ и dJ/dv не меняет знак), откуда следует чисто бегущий характер волны для любых конечных v при $\gamma \rightarrow 0$. В случае, если $F(v)$ — гладкая в точке v_m функция (что имеет место во всех фи-

* Ниже показано, что они являются и необходимыми

** Добавим, что, кроме того, в силу физических причин (невозможность $\epsilon_{\text{нл}} = \infty$) всегда $F \neq 0$ при $v \rightarrow 0$,

зических интересных случаях), то ширина переходной области в точке v_m есть $|v - v_m| = O(\gamma^{2/5})$, и в этой области $\Delta J = O(\gamma^{4/5})$, а в интервале $v - v_m > O(\gamma^{2/5})$ имеем $\Delta J = \gamma^{4/5} \text{const} + O(\gamma)$, т. е. и характер асимптотики ΔJ по γ аналогичен (24 а) — (24 в). Заметим, что пространственная асимптотика реализуемой при этом ПНБВ при $z \rightarrow \infty$ [6] также аналогична (11), т. е. $v - v_m = O(z^{-2})$. Точный же ход интенсивности v реализуемой ПНБВ в пространстве определяется уравнением (4) в [6] при $v_\infty = v_m$:

$$dv/dz = -2k_0[vG(v, v_m)]^{1/2}. \quad (38)$$

Кроме нелинейности, рассматривавшейся в предыдущих параграфах, условиям теоремы удовлетворяют многие реальные виды нелинейной проницаемости: отрицательная нелинейность с насыщением, $\epsilon_{\text{нл}} = \epsilon(0) - |\epsilon_2 E^2| (1 + |E/E_{\text{нас}}|^2)^{-1}$ (при выполнении условий $0 < \epsilon(0) - \epsilon_0 \cos^2 \psi < |\epsilon_2 E_{\text{нас}}^2|$); она характерна для резонансного однофотонного поглощения (или усиления) сильного поля на квантовом переходе вещества с сильным насыщением в одном из крыльев линии; эта нелинейность может быть очень большой в газах (ϵ_2 и $|E_{\text{нас}}^2|$ определяются параметрами перехода и расстройкой, см. [3], гл. 2 и 8); нелинейность, связанная с двухфотонным поглощением, в частности, когда $\Delta \epsilon_{\text{нл}} \approx -|E|^4$ [3]; нелинейности в полупроводниках различных типов [15] и т. д.

Дополним теорему тремя утверждениями (приводимыми здесь без доказательства), которые устанавливают характер волновых режимов в полубесконечной нелинейной среде для всех возможных видов поведения функций F и G , не удовлетворяющих условиям теоремы (однако по-прежнему всюду предполагается непрерывность $F(v)$).

1) Если первые три условия теоремы выполнены, а условие Γ_t — нет (т. е. при $v > v_m$ есть область, где $G < 0$), то A_1 из ОБВ по-прежнему реализуемы лишь те, для которых $v_\infty < v_m$, B_1 существует некоторый класс граничных условий (таких, что $v_m < v_0 < v_1$, см. ниже), когда ПНБВ реализуема (при этом так же $v_\infty = v_m$ и ход ПНБВ определяется уравнением (38), приведенным в доказательстве теоремы). Однако при этом возможен (а при $v_0 > v_1$ — обязателен) ряд альтернативных волновых режимов, характеризующихся осцилляциями интенсивности на некотором отрезке оси z , начиная от границы, причем длина участка осцилляций для $v_0 > v_1$ растет при $\gamma \rightarrow 0$. Эта «частично-стоячая» волна обусловлена отражением (существенно неполным) слабо затухающей бегущей волны от края области образования ПНБВ, где велик градиент $\epsilon_{\text{нл}}$. Вблизи этого края $J^2 = F(v_m)$, а интенсивность поля осциллирует между значениями v_m и v_1 , где $v_1 (> v_m)$ есть ближайшее к v_m решение уравнения $G(v_1, v_m) = 0$.

2) Если условие B_t теоремы не выполнено, т. е. $F < 0$ при $v \rightarrow 0$ (что означает наличие ПВО в слабом поле при $\gamma = 0$), то вне зависимости от выполнения остальных трех условий бегущие волны (ОБВ либо ПНБВ) всегда нереализуемы. В этом случае A_2 если $G(v, 0) > 0$ всюду при $v > 0$, где $G(v, 0) = - \int_0^v v^{-2} F dv$ (для чего, в частности,

нарушение условия A_t является достаточным), то реализуемой для всех конечных v является приповерхностная волна ПВО с $v_\infty = 0$ (и только она), ход интенсивности которой в пространстве определяется уравнением $dv/dz = -2k_0[vG(v, 0)]^{1/2}$; B_2) если есть область, где $G(v, 0) < 0$ (для чего условие A_t является необходимым), то, кроме реализуемой волны ПВО с $v_\infty = 0$, которая определяется уравнением п. A_2 , при $v_0 < v_2$, где v_2 — наименьшее положительное решение уравнения

$G(v_2, 0) = 0$, возможно (а при $v_0 > v_2$ — обязательно) образование ряда альтернативных осциллирующих режимов, обусловленных почти полным внутренним отражением волны в глубине слоя. Вблизи точки отражения $J = O(\gamma)$, а интенсивность v осциллирует между нулем и величиной v_2 . Так же, как и в п. Б₁, для $v_0 > v_2$ при $\gamma \rightarrow 0$ осцилляции занимают все большую часть пространства из-за увеличения глубины проникновения поля. В частном случае $\Delta\varepsilon_{\text{нл}} \propto +|E^2|$ при $\epsilon(0) < 0$ эта ситуация детально исследовалась в [13].

3) Если условие В_т (а, значит, и А_т) выполнено, а условие Б_т (а, значит, и Г_т) — нет, т. е., если $F(v)$ — всюду положительная и неубывающая, то реализуемы ОБВ (и только ОБВ) с произвольными конечными v_∞ .

Нетрудно видеть, что приведенные теорема и утверждения исчерпывают все возможные виды поведения непрерывных $F(v)$ и все типы одномерных волн в нелинейной среде. Из них видно, в частности, что все четыре условия теоремы являются не только достаточными, но и необходимыми для одновременной реализуемости ПНБВ и отсутствия осцилляционных режимов. Эта теорема и утверждения имеют чрезвычайно важное значение для теории, поскольку (вместе с теоремой [6]) позволяют при произвольном виде нелинейности $\varepsilon_{\text{нл}}(v)$ и угле падения волны сразу же делать заключение как о существовании различных типов волны в прозрачной среде, так и об их реализуемости при учете поглощения. Вместе с тем, они дают правило отбора единственно реализуемого из континуума типа ПНБВ, которое подтвердило принцип минимальной энергии волны; определяют набор возможных реализуемых ОБВ и указывают условие появления осциллирующих режимов. Универсальную роль при этом играет функция $F(v)$, введенная в [6] (и связанная с ней функция $G(v, v_m)$), информация о поведении которой обеспечивает полное описание волновых свойств системы.

Автор благодарен участникам семинара Р. В. Хохлова за обсуждение результатов работы в мае 1977 г. (и особенно признателен самому [Р. В. Хохлову] за соображения, связанные с предельным переходом), а также участникам семинара С. М. Рытова (январь и ноябрь 1977 г.), за дискуссию критерия существования ПНБВ, проблемы континуума, и эффектов, возникающих при возбуждении ПНБВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Каплан, Письма в ЖЭТФ, 24, 132 (1976); ЖЭТФ, 72, 1710 (1977).
2. Б. Б. Бойко, И. З. Джилавадари, Н. С. Петров, ЖПС, 23, 888 (1975).
3. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопулло, Е. И. Якубович, Резонансные взаимодействия света с веществом, изд. Наука, М., 1977, стр. 331.
4. Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ, 3, 583 (1977); 4, 74 (1978).
5. В. А. Пермяков, О. В. Багдасарян, Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, 1, М., 1977, стр. 139.
6. А. Е. Каплан, Квантовая электроника, 5, 166 (1978).
7. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда, изд. Наука, Л., 1975, стр. 165.
8. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).
9. А. Е. Каплан, Письма в ЖЭТФ, 9, 58 (1969) (см. также [8], стр. 312).
10. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М., 1953, стр. 327.
11. Б. Я. Зельдович, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 5, 20 (1970).
12. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М—Л., 1950.
13. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, 1662 (1967).
14. F. Goos und H. Napschew, App. d. Phys., 1, 333 (1947); 5, 251 (1949).
15. А. А. Борщ, М. С. Бродин, Н. Н. Крупа, ЖЭТФ, 70, 1805 (1976).

**LONGITUDINAL INHOMOGENEOUS TRAVELLING WAVES AND THEIR ROLE
IN THE NONLINEAR LIGHT REFLECTION AND REFRACTION***A. E. Kaplan*

An analytical theory is developed of new types of one-dimensional stationary waves in the nonlinear optics and electrodynamics (longitudinal inhomogeneous travelling waves — LITW). In a transparent medium a problem of continuum occurs for LITW (when the wave parameters are impossible to define with the fully given conditions at the boundary and in the infinity), which is solved with the introduction of an arbitrary small absorption. An asymptotic solution (over the small absorption) is built permitting to make the limiting transition to the transparent medium and to prove the choice of the only realize type of LITW as well as the accepted earlier radiation condition. The influence of LITW is considered on the hysteresis characteristics of reflection and on the limitation of the passing wave power. A new effect of the nonlinear shift of refracted waves along the boundaries of media due to LITW is investigated. The found principle of the realized LITW choice (the minimum of the average energy density and the maximum of its flux) is generalized in the form of the theorem for a wide class of the arbitrary type nonlinearities.

УДК 538.574.4

**ЭФФЕКТЫ КОРРЕЛЯЦИИ СРЕДА — ЧАСТИЦА
ПРИ ОДНОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ НА ЧАСТИЦАХ
В ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ**

Л. А. Апресян

Показано, что при рассеянии на частицах, вкрапленных в флюктуирующую среду со средним показателем преломления, близким к показателю преломления частиц, возникают корреляционные эффекты, которые удобно трактовать как дополнительный вклад в рассеяние от «заполненных дырок» — объемов частиц, содержащих неоднородности среды.

При рассеянии на частицах, вкрапленных в непрерывную флюктуирующую среду, возникают корреляционные эффекты, из-за которых сечение рассеяния не сводится просто к сумме сечений рассеяния на частицах и в среде. Такие эффекты могут быть существенными, если флюктуации показателя преломления среды сравнимы с показателем преломления частиц, и проявляются уже в приближении однократного рассеяния, а следовательно, не зависят от формы рассеивающего объема. Покажем, что указанные эффекты в простейшем случае можно условно представить как добавление рассеяния от «заполненных дырок», т. е. объемов частиц с показателем преломления, равным флюктуирующей части показателя преломления среды.

Пусть частицы однородны и характеризуются диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . Геометрические характеристики частиц будем описывать функцией $\theta_i(\bar{r} - \bar{r}_i)$, равной единице внутри i -й частицы и нулю вне ее. Функция θ_i учитывает различие ориентаций, размеров и формы частиц, а \bar{r}_i — радиус-вектор некоторой фиксированной точки внутри i -й частицы.

Считая, что частицы непроницаемы для среды, запишем диэлектрическую проницаемость ϵ в виде

$$\epsilon = \epsilon_0(\bar{r}) \left(1 - \sum_i \theta_i(\bar{r} - \bar{r}_i)\right) + \sum_i \epsilon_1 \theta_i(\bar{r} - \bar{r}_i), \quad (1)$$

где $\epsilon_0(\bar{r})$ — случайная диэлектрическая проницаемость среды. Это выражение инвариантно относительно замены $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 + f_j$, где f_j — произвольная функция, отличная от нуля лишь внутри некоторой j -й частицы. Однако, если концентрация частиц не слишком велика, то в пределе $v_r/V \rightarrow 0$ (v_r — средний объем всех частиц, а V — полный рассеивающий объем) случайную функцию $\epsilon_0(\bar{r})$ можно фиксировать однозначно, считая все свойства $\epsilon_0(\bar{r})$ такими же, как и в отсутствие частиц. Существенно, что это допущение налагает ограничения только на концентрацию частиц, но не на соотношение размеров частиц с размерами неоднородностей среды.

Рассеянное поле будем описывать в борновском приближении, что отвечает случаю не слишком больших флюктуаций показателя преломления среды и «мягких» частиц. Тогда интенсивность некогерентного

рассеяния во фраунгоферовой зоне по отношению к частицам и неоднородностям среды будет пропорциональна спектру флуктуаций

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - \bar{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_0 - \tilde{\epsilon}_0 \sum_i \bar{\theta}_i - \bar{\epsilon}_0 \sum_i \tilde{\theta}_i - \sum_i (\tilde{\epsilon}_0 \tilde{\theta}_i - \bar{\epsilon}_0 \bar{\theta}_i) + \sum_i \epsilon_1 \tilde{\theta}_i. \quad (2)$$

Прямая черта означает здесь усреднение по статистическому ансамблю, а волнистая — выделение случайной части ($\tilde{a} \equiv a - \bar{a}$). При этом для простоты считается, что ϵ_1 , а также число частиц N в рассеивающем объеме не флуктуируют, так что $\sum \bar{\theta}_i = \Sigma \bar{\theta}_i$.

Поскольку $\tilde{\epsilon}_0$ не зависит от θ_i , величина $\tilde{\epsilon}_0 \tilde{\theta}_i = 0$. Учитывая также, что $\Sigma \bar{\theta}_i = v_r/V$, запишем (2) в виде

$$\tilde{\epsilon} = (1 - v_r/V) \tilde{\epsilon}_0 + \sum_i (\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_0) \tilde{\theta}_i - \sum_i \tilde{\epsilon}_0 \tilde{\theta}_i. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое описывает флуктуации среды, причем множитель $(1 - v_r/V)$ учитывает уменьшение объема среды за счет вытеснения среды частицами. Второе слагаемое описывает флуктуации проницаемости частиц в «эффективной среде» с проницаемостью $\tilde{\epsilon}_0$, а последняя сумма — «заполненные дырки». Нетрудно видеть, что все три слагаемых в (3) некоррелированы, так что спектр флуктуаций равен сумме слагаемых, соответствующих среде, частицам и «заполненным дыркам». Рассмотрим последнее из них.

Для простоты пренебрежем корреляцией между разными частицами (учет такой корреляции не вызывает затруднений). Тогда «дырки» также оказываются некоррелированными, и корреляция связанных с ними флуктуаций представляется в виде

$$\begin{aligned} B_\theta(\bar{p}) &\equiv \overline{\tilde{\epsilon}_0(\bar{r} + \bar{p}) \tilde{\epsilon}_0(\bar{r}) \sum_i \tilde{\theta}_i(\bar{r} + \bar{p} - \bar{r}_i) \tilde{\theta}_j(\bar{r} - \bar{r}_j)} = \\ &= \overline{\tilde{\epsilon}_0(\bar{p}) \tilde{\epsilon}_0(0) \sum_i \tilde{\theta}_i(\bar{p} + \bar{r}_i) \tilde{\theta}_i(\bar{r}_i)} = \sigma_\epsilon^2 b_\epsilon(\bar{p}) N B_\theta(\bar{p}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_\epsilon^2 b_\epsilon(\bar{p}) = \overline{\tilde{\epsilon}_0(\bar{p}) \tilde{\epsilon}_0(0)}$ — корреляционная функция флуктуаций среды, $\sigma_\epsilon^2 = \tilde{\epsilon}_0^2$, а

$$B_\theta(\bar{p}) = \overline{\tilde{\theta}_i(\bar{p} + \bar{r}_i) \tilde{\theta}_i(\bar{r}_i)} \quad (5)$$

— корреляционная функция, зависящая от геометрии частиц. Выражение (4) описывает сформулированное выше представление о «дырках», заполненных неоднородностями среды.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи (4). Если характерный размер частиц a много меньше радиуса корреляции неоднородностей среды l_ϵ , то в (4) можно приближенно положить $b_\epsilon(\bar{p}) \approx b_\epsilon(0) = 1$. Этот случай соответствует однородному заполнению «дырки» веществом среды, так что диаграмма рассеяния на «дырке» совпадает с диаграммой рассеяния на частице. Аналогично в случае $a \gg l_\epsilon$ в (4) можно положить $B_\theta(\bar{p}) \approx B_\theta(0) = \bar{\theta}_i(1 - \bar{\theta}_i) = \frac{v_r}{NV} \left(1 - \frac{v_r}{NV}\right)$. При этом диаграмма рассеяния на «дырке» совпадает с диаграммой для неоднородностей среды, что соответствует заполнению «дырки» некогерентно

рассеивающими неоднородностями среды. Таким образом, эффективный размер, определяющий диаграмму рассеяния «дырки», по порядку величины равен $\min(a, l_\epsilon)$, причем в общем случае для $a \sim l_\epsilon$ эта диаграмма не совпадает по форме ни с диаграммой для частицы, ни с диаграммой для неоднородностей среды и может быть вычислена непосредственно из (4):

Приведем некоторые количественные оценки. Сечение однократного рассеяния естественно поляризованного света в объеме V равно

$$\sigma = \frac{\pi k^4}{4} (1 + (\bar{n} \bar{n}_0)^2) V \Phi_\epsilon(\bar{q}), \quad (6)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\bar{q} = k(\bar{n} - \bar{n}_0)$ — вектор рассеяния, \bar{n} и \bar{n}_0 — единичные векторы направлений падающей и рассеянной волн, а

$$\Phi_\epsilon(\bar{q}) = \int B_\epsilon(\bar{p}) e^{-i\bar{p} \cdot \bar{q}} \frac{d\bar{p}}{(2\pi)^3} \quad (7)$$

— спектр флюктуаций. Согласно (4) σ распадается на сумму

$$\sigma = \sigma_q + \sigma_0 + \sigma_d. \quad (8)$$

где сечения σ_q , σ_0 и σ_d относятся к частицам, среде и «дыркам» и равны

$$\begin{pmatrix} \sigma_q \\ \sigma_0 \\ \sigma_d \end{pmatrix} = \frac{\pi k^4}{4} (1 + (\bar{n} \bar{n}_0)^2) V \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_0)^2 N \Phi_0(\bar{q}) \\ \left(1 - \frac{v_r}{V}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \Phi_\epsilon(\bar{q}) \\ \sigma_\epsilon^2 N \Phi_{\epsilon 0}(\bar{q}) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь Φ_0 , Φ_ϵ и $\Phi_{\epsilon 0}$ — спектры величин B_0 , b_ϵ и $B_0 b_\epsilon$ соответственно.

Если частицы одинаковы и имеют форму шара радиуса a , а корреляционная функция флюктуаций экспоненциальна,

$$b_\epsilon(\bar{p}) = \exp\left(-\frac{|\bar{p}|}{l_\epsilon}\right), \quad (10)$$

то все входящие в (9) величины выражаются через элементарные функции, однако ввиду громоздкости соответствующих выражений мы не будем их здесь выписывать. Ограничимся предельным случаем крупномасштабных неоднородностей среды $kl_\epsilon \gg 1$ и мелкомасштабных частиц $ka \ll 1$. В этом случае неоднородности среды рассеивают главным образом в направлении вперед в конус с углом раствора порядка λ/l_ϵ , а сечения рассеяния от частиц и «дырок» почти изотропны. При $Vq^3 \gg 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_q \\ \sigma_0 \\ \sigma_d \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} (\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_0)^2 \frac{v_r^2}{NV} \\ \left(1 - \frac{v_r}{V}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \frac{8\pi}{q^4 l_\epsilon} \\ \sigma_\epsilon^2 \frac{v_r^2}{NV} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что для достаточно больших углов рассеяния при выполнении неравенства

$$(ql_\epsilon)^4 \gg 8\pi \frac{Nl_\epsilon^3 V}{v_r^2} \quad (12)$$

рассеяние на «заполненных дырках» значительно интенсивней рассеяния на неоднородностях среды (считается, что $v_r \ll V$). При этом сечение рассеяния на «заполненных дырках» растет с ростом интенсивности флуктуаций среды, тогда как сечение рассеяния на частицах остается постоянным. Этот эффект, в принципе, допускает простую экспериментальную проверку, если показатель преломления частиц выбрать близким к среднему показателю преломления среды, исключив, тем самым, рассеяние на частицах. В качестве возможных примеров укажем рассеяние света на гидрозолях и рассеяние звука на частицах в турбулентной жидкости.

В заключение подчеркнем, что использованная в данной заметке концепция «заполненных дырок» в известной мере более условна, чем, например, концепция «дырок» в теории твердого тела, поскольку в данном случае каждый дискретный рассеиватель одновременно выступает и как «частица», и как «дырка». Однако понятие «заполненных дырок» оказывается достаточно удобным и, кроме того, наглядно подчеркивает элемент статистической неоднородности, вносимой дискретными рассеивателями в статистически однородную среду.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
30 января 1978 г.

MEDIUM-PARTICLE CORRELATION EFFECTS WITH THE SINGLE PARTICLE SCATTERING IN A FLUCTUATING MEDIUM

L. A. Apresyan

It is shown that the scattering by particles disseminated into the fluctuating medium with the average refraction index close to the particle refraction index gives the correlation effects which are convenient to explain as an additional contribution to the scattering from the «filled holes» — particle volumes having the medium inhomogeneities.

УДК 538.56 · 519.25

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ АВТОКОМПЕНСАЦИИ ПОМЕХИ, МОДУЛИРОВАННОЙ ПО АМПЛИТУДЕ СЛУЧАЙНЫМ ТЕЛЕГРАФНЫМ ПРОЦЕССОМ

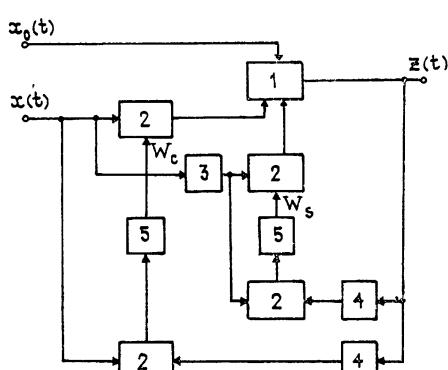
A. A. Дубков, A. A. Мальцев

Рассматривается вопрос об эффективности подавления компенсационной схемой негауссовой помехи, промодулированной по амплитуде случайнным телеграфным процессом. Опираясь на результаты работы [1], найдены точные соотношения для статистических характеристик автокомпенсатора, позволяющие проанализировать особенности его работы при подавлении как непрерывных, так и импульсных мешающих сигналов.

1. В последнее время все большее внимание уделяется теории и практическому использованию адаптивных автокомпенсаторов помех с корреляционными обратными связями [1–7]. Области применения таких систем становятся самыми разнообразными (см., например, [2]).

В абсолютном большинстве работ, посвященных анализу подобных устройств, рассматривается компенсация либо гауссовых, либо чисто синусоидальных помех. В то же время очень часто (например, в радиолокации [1, 8]) приходится иметь дело с хаотически модулированными и импульсными мешающими сигналами. Определение статистических характеристик автокомпенсатора в этих случаях представляется также весьма интересным.

Настоящая работа посвящена анализу работы одноканального автокомпенсатора при воздействии на него помехи, модулированной по амплитуде случайнным телеграфным процессом. С помощью производящей функции телеграфного процесса, найденной ранее в [9], получены точные выражения для статистических характеристик автокомпенсатора без традиционных ограничений на время корреляции помехи и постоянные интегрирования фильтров в цепи обратной связи. Проведенное исследование, в частности, показало, что широко используемое в литературе приближение взаимной независимости огибающей помехи и управляющих напряжений [2–6] не позволяет, в принципе, выявить особенности автокомпенсации негауссовых помех.



2. Усредненные уравнения, описывающие процесс установления управляющих напряжений $W_{c,s}(t)$ в автокомпенсаторе, собранном по квадратурной схеме (см. рис. 1), имеют вид [7, 10]

Рис. 1. Функциональная схема квадратурного автокомпенсатора помех:
1—сумматор, 2—умножители, 3—фазовращатель на $\pi/2$, 4—усилители обратной связи (с коэффициентами усиления $\gamma_{c,s}$),
5—фильтры нижних частот (с постоянными временем $T_{c,s}$).

$$\frac{dW_{c,s}}{dt} + \frac{1}{T_{c,s}} W_{c,s} = \frac{\gamma_{c,s}}{2T_{c,s}} \left[UU_0 \left\{ \cos(\varphi - \varphi_0) \right\} - U^2 W_{c,s} \right]. \quad (1)$$

Здесь $U_0(t)$, $\varphi_0(t)$ и $U(t)$, $\varphi(t)$ — огибающие и фазы колебаний соответственно в основной и в компенсационной антенах. Остальные обозначения ясны из рис. 1.

Предположим, что хаотически модулированная помеха приходит с определенного направления и имеет постоянную частоту заполнения ω_0 , т. е.

$$\varphi(t) - \varphi_0(t) = \delta = \text{const},$$

а ее огибающая $U(t)$ представляет собой телеграфный процесс, принимающий с равной вероятностью лишь два значения U_1 и $U_2 > U_1$. При этом рассматривается случай, когда моменты скачков $U(t)$ образуют так называемый пуассоновский поток событий [11, 12], и, следовательно, $U(t)$ является стационарным марковским процессом с ковариационной функцией

$$B_U(\tau) = \left(\frac{U_2 - U_1}{2} \right)^2 e^{-2\nu|\tau|},$$

где ν — средняя частота перескоков.

Для упрощения дальнейших выкладок сделаем ряд допущений.

а) Будем пренебречь неполной корреляцией и запаздыванием между огибающими колебаний в разных антенах, полагая*

$$U_0(t) = k_0 U(t).$$

б) Предположим также, что оба канала (для $W_c(t)$ и $W_s(t)$) квадратурного автокомпенсатора построены из идентичных элементов, т. е.

$$T_c = T_s = T, \quad \gamma_c = \gamma_s = \gamma.$$

Сделанные допущения позволяют вместо двух уравнений (1) анализировать лишь одно стохастическое дифференциальное уравнение для нормированного управляющего напряжения $W = W_c/k_0 \cos \delta$, $W_s/k_0 \sin \delta$:

$$T \frac{dW}{dt} + \left[1 + \frac{\gamma}{2} U^2(t) \right] W = \frac{\gamma}{2} U^2(t). \quad (2)$$

Наша задача состоит в отыскании спектрально-корреляционных характеристик нормированного управляющего напряжения $W(t)$ и нескомпенсированной помехи $z(t)$ на выходе системы.

3. Воспользуемся тем, что решение уравнения (2) записывается в явном виде

$$W(t) = [W(0) - 1] e^{-t/T} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2T} \int_0^t U^2(\tau') d\tau' \right\} + \\ + 1 - \frac{1}{T} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-\tau}{T} \right) \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2T} \int_\tau^t U^2(\tau') d\tau' \right\} d\tau. \quad (3)$$

* Используемый в данной работе метод позволяет, вообще говоря, точно вычислить статистические характеристики автокомпенсатора и при более общей постановке задачи, когда сигнал, поступающий на основную антенну, имеет вид

$$x_0(t) = k_0 U(t - \Delta) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \eta(t).$$

Здесь $\eta(t)$ — некоррелированный с $U(t)$ узкополосный процесс. Однако при этом получаются чрезвычайно громоздкие и труднообозримые аналитические выражения.

Установившийся процесс $W(t)$, который нас в дальнейшем и будет интересовать, находим, устремляя формально в (3) t к ∞ :

$$W(t) = 1 - \frac{1}{T} \int_0^\infty e^{-\gamma/T} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2T} \int_{t-\tau}^t U^2(\tau') d\tau' \right\} d\tau. \quad (4)$$

В соответствии с рис. 1 для нескомпенсированной помехи $z(t)$ имеем

$$\begin{aligned} z(t) &= U_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - W_c(t) U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &- W_s(t) U(t) \sin(\omega_0 t + \varphi) = k_0 U(t) [1 - W(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), получаем явное функциональное соотношение, связывающее установившийся процесс $z(t)$ на выходе автокомпенсатора с огибающей входной помехи $U(t)$:

$$z(t) = \frac{k_0 U(t)}{T} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{T}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2T} \int_{t-\tau}^t U^2(\tau') d\tau' \right\} d\tau \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (6)$$

В работе [9] была найдена так называемая производящая функция моментов марковского телеграфного сигнала $\xi(t)$ со значениями ± 1 . Для того чтобы воспользоваться результатами [9], процесс $U^2(t)$, принимающий лишь два значения U_1^2 и U_2^2 , удобно представить в виде

$$U^2(t) = \langle U^2 \rangle [1 + \mu \xi(t)]. \quad (7)$$

Здесь $\langle U^2 \rangle = \frac{U_1^2 + U_2^2}{2}$, $\mu = \frac{1-m^2}{1+m^2}$, $m = \frac{U_1}{U_2}$, где μ — коэффициент амплитудной модуляции поступающей на автокомпенсатор помехи.

Проводя усреднение в (3) и (4), учитывая (7) и формулу (12) для функции $\vartheta_\lambda(\tau) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_{t_0+\tau}^t \xi(\tau') d\tau' \right\} \right\rangle$ в [9], не составляет труда найти среднее значение установившегося управляющего напряжения и время быстродействия компенсационной схемы*:

$$\langle W \rangle = \beta \frac{1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \beta (1 - \mu^2)}{1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \beta^2 (1 - \mu^2)}; \quad (8)$$

$$t_{\text{быстр}} = \frac{1}{\sqrt{[1 + 2\alpha(1 + \beta) - \sqrt{1 + (2\alpha\beta\mu)^2}]}}. \quad (9)$$

Здесь введены безразмерные параметры, имеющие наглядный физический смысл: $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T = 1/2\sqrt{T}$ — относительное время корреляции помехи, $\beta = \gamma \langle U^2 \rangle / 2$ — ее эффективная мощность.

Как следует из (4), (7), для определения вторых моментов $W(t)$ необходимо раскрыть среднее вида

$$\left\langle \exp \left\{ -\lambda_1 \int_{\tau_1}^{\tau_1} \xi(\tau') d\tau' - \lambda_2 \int_{\tau_2}^{\tau_2} \xi(\tau'') d\tau'' \right\} \right\rangle.$$

* Вообще говоря, процесс установления управляющего напряжения определяется двумя постоянными временем. За время быстродействия берется большая из них.

Опираясь на «марковость» процесса $\xi(t)$, можно показать, что оно выражается уже через более сложные функции $R_\lambda(\xi_0 | \xi, \tau)$ и

$$\Theta_\lambda(\xi_0, \tau) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_{t_0}^{t_0+\tau} \xi(\tau') d\tau' \right\} \mid \xi(t_0) = \xi_0 \right\rangle$$

(см. формулы (11) и (12) в [9]). Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат для дисперсии и спектральной плотности мощности флюктуаций $W(t)$:

$$\sigma_W^2 = \frac{\frac{\beta^2 \mu^2 \alpha}{1+\alpha} \left[1 + \beta \frac{\alpha(3+4\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} + 2\beta^2 \frac{\alpha^2(1-\mu^2)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} \right]}{\left[1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} + \beta^2 \frac{\alpha}{1+\alpha}(1-\mu^2) \right]^2 \left[1 + \beta \frac{1+4\alpha}{1+2\alpha} + \beta^2 \frac{2\alpha(1-\mu^2)}{1+2\alpha} \right]}; \quad (10)$$

$$S_W(\omega) = \langle W \rangle^2 \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\nu A_1}{\omega^2 + 4\nu^2} + \frac{\Omega_1(B_1 + C_1)}{2(\omega^2 + \Omega_1^2)} + \frac{\Omega_2(B_1 - C_1)}{2(\omega^2 + \Omega_2^2)} \right], \quad (11)$$

где

$$\Omega_{1,2} = \nu [1 + 2\alpha \mp \sqrt{1 + 4b^2}],$$

$$A_1 = \frac{\alpha^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2 - a^2},$$

$$B_1 = \frac{\alpha^2 b^2 [(2a-1)b^2 - a(a+1)(2a+1)]}{(a^2 + a - b^2)^2 (a^2 - a - b^2) (2a^2 + a - 2b^2)},$$

$$C_1 = \frac{\alpha^2 b^2}{\sqrt{1 + 4b^2}} \frac{[4b^4 - b^2(4a^2 + 6a + 1) - a(a+1)(2a+1)]}{(a^2 + a - b^2)^2 (a^2 - a - b^2) (2a^2 + a - 2b^2)},$$

$$a = \alpha(1 + \beta), \quad b = \alpha\beta\mu.$$

Важнейшей характеристикой автокомпенсатора является коэффициент подавления помехи

$$\epsilon = \frac{\langle z^2 \rangle}{\langle x_0^2 \rangle} = \frac{\gamma \langle z^2 \rangle}{k_0^2 \beta}.$$

С помощью (6), (7) и [9] вычисляем этот параметр:

$$\epsilon = \frac{1 + \beta \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} [3 - 2\mu^2 + 4\alpha(1-\mu^2)] + \beta^2 \frac{2\alpha^2(1-\mu^2)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}}{\left[1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} + \beta^2 \frac{\alpha}{1+\alpha}(1-\mu^2) \right] \left[1 + \beta \frac{1+4\alpha}{1+2\alpha} + \beta^2 \frac{2\alpha}{1+2\alpha}(1-\mu^2) \right]}. \quad (12)$$

Из приведенных формул, полагая $\mu = 0$, получаем тривиальную ситуацию подавления одной синусоидальной помехи:

$$\begin{aligned} t_{\text{быстр}} &= \frac{T}{1 + \beta}, & \langle W \rangle &= \frac{\beta}{1 + \beta}, \\ \sigma_W^2 &= 0, & \epsilon &= \frac{1}{(1 + \beta)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае импульсного мешающего сигнала $\mu = 1$ ($U_1 = 0$) выражения (8)–(10), (12) также несколько упрощаются:

$$\langle W \rangle = \frac{\beta}{1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}},$$

$$t_{\text{быстр}} = \frac{1}{\nu [1 + 2\alpha(1 + \beta) - \sqrt{1 + (2\alpha\beta)^2}]}, \quad (14)$$

$$\sigma_w^2 = \beta^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{1 + \beta \frac{\alpha(3 + 4\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}}{\left(1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \left(1 + \beta \frac{1+4\alpha}{1+2\alpha}\right)},$$

$$\varepsilon = \frac{1 + \beta \frac{\alpha}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}}{\left(1 + \beta \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}\right) \left(1 + \beta \frac{1+4\alpha}{1+2\alpha}\right)}.$$

4. Зависимости (8), (10), (12), (14) статистических характеристик автокомпенсатора от эффективной мощности помехи $\beta = \gamma \langle U^2 \rangle / 2$ для разных значений $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T$ представлены на рис. 2—4. Рис. 2а—4а приведены для хаотически модулированной помехи с коэффициентом модуляции $\mu = \sqrt{2}/2$, рис. 2б—4б—для чисто импульсной помехи с $\mu = 1$.

На рис. 2 показаны установившиеся средние значения управляющих напряжений. Как следует из графиков, при больших β среднее $\langle W \rangle$ существенно зависит от вида действующей помехи. Для модулированного мешающего сигнала (рис. 2 а) при $\beta \rightarrow \infty$ среднее значение $\langle W \rangle \rightarrow 1$ при любых α , в то время как для импульсного (рис. 2 б) $\langle W \rangle \rightarrow (1 + \alpha)/(1 + 2\alpha)$. Подобное снижение $\langle W \rangle$ для импульсной помехи связано с тем, что в отсутствие сигнала (в период между импульсами) управляющие напряжения, в силу неидеальности интеграторов, несколько уменьшаются и тем больше, чем больше $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T$.

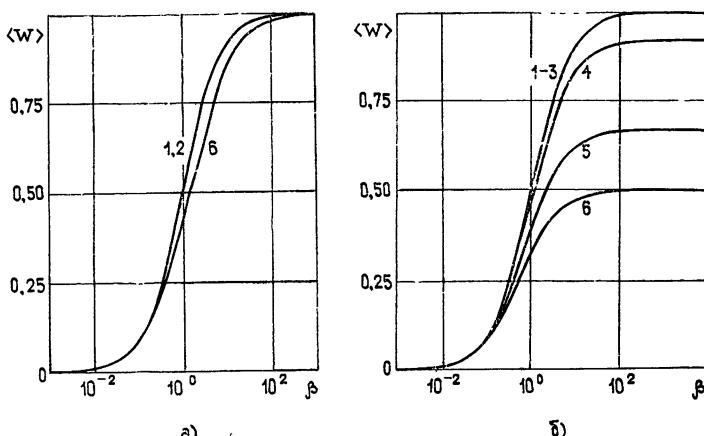


Рис. 2.

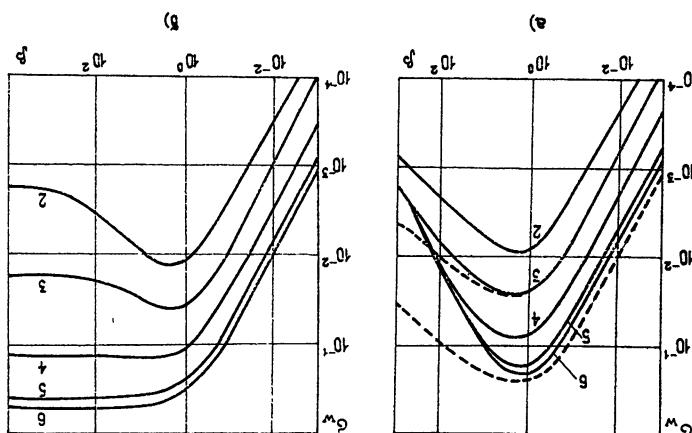


Рис. 3.

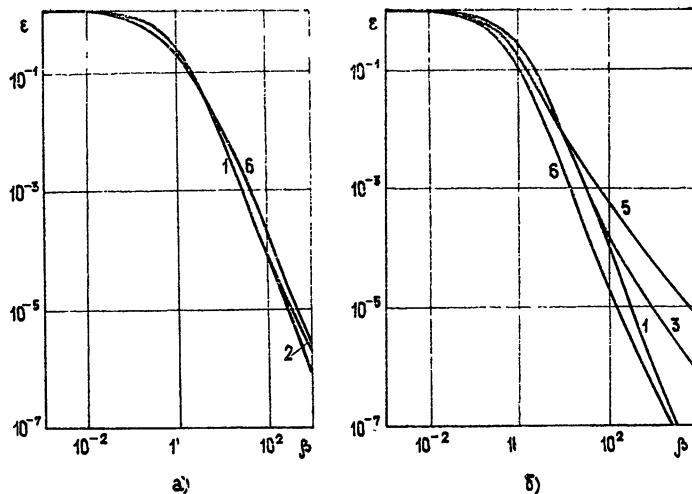


Рис. 4.

Рис. 2—4. Теоретические зависимости установленных статистических характеристик от эффективной мощности помехи $\beta = \gamma \frac{\langle U^2 \rangle}{2}$: рис. 2—средние значения нормированных управляющих напряжений $\langle W \rangle$, рис. 3—средние квадратичные отклонения σ_W , рис. 4—коэффициенты подавления помехи ε ; а) случай подавления модулированной помехи с коэффициентом модуляции $\mu = \sqrt{2}/2$, б) случай чисто импульсной помехи, $\mu = 1$. Кривые приведены для разных $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T$: 1— $\alpha = 0$, 2— $\alpha = 10^{-3}$, 3— $\alpha = 10^{-2}$, 4— $\alpha = 10^{-1}$, 5— $\alpha = 1$, 6— $\alpha = 10^3$. Штриховыми линиями на рис. За даны аналогичные кривые для эквивалентной гауссовой помехи.

На рис. 3 представлены графики для средних квадратичных отклонений управляющих напряжений σ_W . Из сравнения рис. 3а и рис. 3б видно, что при $\beta \leq 1$ изменение коэффициента модуляции μ с $\mu = \sqrt{2}/2$ до $\mu = 1$ приводит лишь к небольшому (менее чем на $2dB$) увеличению σ_W^* . Однако в случае компенсации импульсной помехи (см. рис. 3б) при $\beta \gg 1$ дисперсия $W(t)$ выходит на постоянный уровень, зависящий лишь

* Напомним, что при компенсации одной синусоидальной помехи ($\mu = 0$) управляющие напряжения совсем не флюктуируют: $\sigma_W = 0$ (см. (13)).

от α . Флуктуации $W(t)$ при этом перестают зависеть от β , поскольку полностью определяются величиной уменьшения W в промежутках между импульсами. Поэтому, например, при компенсации «медленной» помехи ($\alpha \gg 1$) их относительный уровень может быть довольно большим: $\sigma_W / \langle W \rangle \sim 1$.

Эффективность автокомпенсации помехи системой определяется коэффициентом подавления ϵ , зависимость которого от β показана на рис. 4. Как видно, коэффициент подавления при $\beta \leq 10$ очень слабо зависит от значений μ и α . Однако при $\beta \geq 10$ эта зависимость становится существенной. Так, например, из рис. 4 б видно, что наиболее плохо при больших β подавляется чисто импульсная помеха с $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T \approx \approx 0,1 \div 1$.

В заключение отметим, что найденные в настоящей работе точные выражения для статистических характеристик автокомпенсации хаотически модулированной помехи при относительно малой ее эффективной мощности $\beta \leq \max \{1, 1/\alpha\}$ ($\mu = \sqrt{2}/2$) хорошо совпадают с аналогичными характеристиками подавления гауссовой помехи [7, 10] (см. рис. 3 а). При больших же мощностях β результаты существенно отличаются.

Это свидетельствует о том, что на работу рассматриваемой системы при компенсации слабых мешающих сигналов оказывают влияние только их спектрально-корреляционные свойства, в то время как при больших β становится принципиальной негауссовость (тонкая структура) воздействующих помех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы радиолокации, под ред. Я. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
2. Б. Уидроу и др. ТИИЭР, 63, № 12, 69 (1975).
3. У. Ф. Гейбриел. ТИИЭР, 64, № 2, 55 (1976).
4. Л. А. Чечик. Изв. вузов — Радиоэлектроника, 18, вып. 4, 67 (1975).
5. Н. Я. Кузь. Радиотехника и электроника, 19, № 10, 2194 (1974).
6. В. Н. Акимов, Б. П. Бурдзейко, В. В. Шахгильдян. Радиотехника, 31, № 9, 61 (1976).
7. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов. Радиотехника и электроника, 23, № 7, 1401 (1978).
8. В. В. Васин, Б. М. Степанов. Справочник-задачник по радиолокации, изд. Сов. радио, М., 1977.
9. А. А. Дубков, А. А. Мальцев. Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 1, 107 (1979).
10. А. А. Мальцев, А. И. Саичев. Радиотехника и электроника, 23, № 12, 2543 (1978).
11. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1974.
12. В. А. Казаков. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи, изд. Сов. радио, М., 1973.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 октября 1977 г.

THE AUTOCOMPENSATION EFFICIENCY OF THE NOISE MODULATED OVER THE AMPLITUDE BY A RANDOM TELEGRAPH PROCESS

A. A. Dubkov, A. A. Mal'tsev

A problem is considered on the efficiency of suppression by the compensation scheme the nongaussian noise modulated over the amplitude by a random telegraph process. The results of paper [9] give accurate relations for the statistic characteristics of the autocompensator which allows to analyse the peculiarities of its operation when suppressing both continuous and pulse noise signals.

УДК 538.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМА С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНОЙ

А. А. Колоколов

В дипольном приближении рассмотрено взаимодействие атома с однородной и неоднородной плоскими волнами. Методами классической электродинамики показано, что вынужденное излучение возбужденного атома переносится интерференционным потоком, который определяется как полем падающей волны, так и полем индуцированного диполя. Интерференционный поток обладает пространственной направленностью, зависящей от пространственной структуры падающей волны, и переносит не только энергию, но и импульс излучения. В случае взаимодействия атома с неоднородной волной интерференционный поток распространяется в направлении, перпендикулярном к потоку энергии, переносимой неоднородной волной. Этот результат позволяет естественным образом объяснить усиление света при полном отражении от активной среды.

Рассматривая условия равновесия между тепловым излучением и равномерно движущимся осциллятором, Эйнштейн показал, что в каждом акте испускания и поглощения фотона импульс атома должен изменяться [1]. Отсюда был сделан вывод о том, что излучение атома имеет «игольчатый» характер и сконцентрировано в узком телесном угле. Однако описание направленности излучения атома на основе уравнений Максвелла встречает определенные трудности, поскольку размеры атома много меньше длины волны света [2-4].

В [2] для описания излучающего атома предлагалось использовать модель сверхнаправленной антенны [5, 6]. При этом было упущено из виду, что вокруг сверхнаправленной антенны всегда существует большое реактивное поле, которое занимает область пространства с линейными размерами, много большими длины волны излучения. Если бы излучающий атом представлял собой сверхнаправленную антенну, то это реактивное поле обязательно проявилось бы в процессе резонансной безызлучательной передачи энергии между атомами. Подробные экспериментальные исследования безызлучательного переноса энергии показали, что реактивное поле возбужденного атома в случае разрешенного перехода хорошо описывается обычными формулами для диполя [7]. Следовательно, рассмотрение атома как сверхнаправленной антенны противоречит опыту.

В [3] предпринята попытка объяснить направленность излучения атома с помощью пространственной делокализации возбужденного атома. Было показано, что излучение атома является направленным только в том случае, когда линейные размеры области локализации много больше длины волны излучения. Приведенное объяснение не согласуется с квантовой теорией, где излучение атома считается остронаправленным независимо от области локализации.

На первый взгляд кажется, что в настоящее время, когда существует хорошо разработанный аппарат квантовой теории, все эти попытки не представляют особого интереса. Однако дело обстоит не так просто. Во-первых, уравнения Максвелла без каких-либо изменений использу-

ются в квантовой теории, где вторичное квантование поля всегда строится на основе решений волнового уравнения, удовлетворяющих определенным граничным условиям. В то же время при описании вынужденного излучения считается, что атом испускает плоскую волну. На первый взгляд кажется, что это утверждение не согласуется с решениями уравнений Максвелла, которые описывают излучение источников с линейными размерами, много меньшими длины волны излучения. Поэтому для внутренней непротиворечивости такого подхода необходимо с помощью уравнений Максвелла обосновать возможность изменения импульса излучения в результате взаимодействия с отдельным атомом.

Во-вторых, в последнее время возрос интерес к взаимодействию вещества с так называемыми неоднородными плоскими волнами [8], вторичное квантование которых пока отсутствует. В этом случае далеко не очевидно, каким образом следует вводить операторы рождения и уничтожения фотонов, поскольку неизвестен конкретный вид уравнения сохранения импульса. Таким образом, задача корректного рассмотрения обмена импульсом между полем и отдельным атомом на основе классических уравнений Максвелла сохраняет актуальность и в настоящее время.

В феноменологической электродинамике обмен энергией между полем и веществом описывается с помощью комплексной поляризуемости. Очевидно, что обмен импульсом также должен определяться комплексной поляризуемостью. Данная статья посвящена исследованию пространственной направленности взаимодействия плоских волн с атомом, который характеризуется комплексной поляризуемостью. На основе уравнений Максвелла приводится простое объяснение пространственной направленности процессов поглощения и вынужденного испускания света атомом. Особое внимание уделяется вынужденному излучению атома, взаимодействующего с неоднородной плоской волной.

1. СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Сначала рассмотрим простой случай, когда на атом, помещенный в начало системы координат, падает однородная плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x . Электрическое поле волны направлено по оси z и описывается формулой

$$E_z = Ae^{i(kx-\omega t)}, \quad (1.1)$$

где $k = \omega/c$, а ω и c — соответственно частота и скорость света в вакуме. Под действием поля (1.1) атом приобретает дипольный момент

$$P_z = \alpha Ae^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

где $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ — комплексная поляризуемость атома на частоте ω . В случае невозбужденного атома $\alpha'' > 0$, в случае возбужденного — $\alpha'' < 0$.

Полный поток вектора Пойнтинга I через произвольную поверхность состоит из трех слагаемых:

$$I = I_0 + I_s + I_i, \quad (1.3)$$

где I_0 и I_s — потоки энергии, переносимой падающей волной (1.1) и рассеянным атомом излучением соответственно, а I_i — интерференционный поток, определяемый как полем (1.1), так и полем диполя (1.2). В формуле (1.3) только величина I_i линейна по α'' и в соответствии с теоремой Пойнтинга может описывать перенос энергии, связанный с поглощением или вынужденным испусканием света атомом.

Согласно теореме Пойнинга* связанный с поглощением или вынужденным испусканием поток энергии I_i через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую атом, определяется выражением

$$I_i = -\frac{1}{2} \omega \alpha'' |A|^2. \quad (1.4)$$

Однако до сих пор, насколько нам известно, не была исследована пространственная направленность интерференционного потока.

Для анализа пространственной направленности интерференционного потока в качестве поверхности выберем поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leq r^2$, $-l \leq x \leq l$. Используя известные формулы для поля диполя в волновой зоне, запишем выражение для интерференционного потока через плоскость $x = l$:

$$I_{ix}(l) = \frac{ck^2}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{y^2+z^2=r^2} \left(\alpha |A|^2 \frac{l^2+y^2}{R^3} e^{-ik(l-R)} + \alpha^* |A|^2 \frac{l}{R^2} e^{ik(l-R)} \right) dy dz \right], \quad (1.5)$$

где $R = \sqrt{l^2 + y^2 + z^2}$, $\alpha^* = \alpha' - i\alpha''$.

После перехода в цилиндрическую систему координат $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ и введения новой переменной $v = \sqrt{l^2 + r^2}$ выражение (1.5) принимает вид

$$I_{ix}(l) = \frac{ck^2}{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_l^{\sqrt{l^2+r^2}} \langle |A|^2 \cos^2 \varphi \rangle \left[\alpha \frac{l^2}{v^2} e^{ik(v-l)} + \alpha^* \frac{l}{v} e^{-ik(v-l)} + \alpha \frac{v^2-l^2}{v^2} e^{ik(v-l)} \right] dv \right\}, \quad (1.6)$$

где $\langle |A|^2 \cos^2 \varphi \rangle = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} |A|^2 \cos^2 \varphi d\varphi$. Входящие в (1.6) интегралы

можно разложить в асимптотический ряд по степеням малого параметра $(kl)^{-1}$ и ограничиться учетом только первых членов разложения. Если принять, что волна (1.1) имеет большой, но конечный поперечный размер $\sigma \gg \lambda$, где λ — длина волны излучения, и выбрать $r \gg \sigma$, то в результате интегрирования по частям получаем

$$I_{ix}(l) = -\frac{ck}{4} |A|^2 \operatorname{Re}(i\alpha^* - i\alpha) = -\frac{1}{2} \omega \alpha'' |A|^2. \quad (1.7)$$

Согласно теореме Пойнинга (1.4) весь интерференционный поток проходит через плоскость $x = l \gg \lambda$. Отсюда ясно, что интерференционный поток через остальную часть поверхности цилиндра равен нулю. Прямым расчетом можно показать, что интерференционные потоки через плоскость $x = -l$ и боковую поверхность цилиндра $y^2 + z^2 = r^2 \gg \sigma^2$ по отдельности равны нулю. Для нахождения $I_{ix}(-l)$ доста-

* Здесь не рассматривается квадратичный по поляризумости поток энергии I_s , связанный с рассеянием. Для корректного описания процесса рассеяния необходимо учесть обратную реакцию рассеянного излучения на атом. В результате в поляризумости атома появится дополнительный член $i 2\omega^3 |\alpha^2| / 3c^3$. Соответствующий интерференционный поток компенсирует поток энергии I_s через замкнутую поверхность и будет описывать уменьшение энергии и импульса падающей волны, обусловленное рассеянием.

точно в выражении (1.6) заменить l на $-l$, в результате $I_{ix}(-l) \sim \sim \operatorname{Re}(i\alpha^* + i\alpha) = 0$.

Формула, описывающая интерференционный поток через боковую поверхность цилиндра, после несложных преобразований может быть записана в виде

$$I_{ir}(\rho) = \frac{ck^2\rho}{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-l/\rho}^{l/\rho} \left[\alpha^* \langle |A(\rho)|^2 \cos^2 \varphi \rangle \frac{\exp[-ik\rho(V\sqrt{1+\eta^2} - \eta)]}{1+\eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \langle |A(\rho)|^2 \sin^2 \varphi \rangle \frac{\exp[ik\rho(V\sqrt{1+\eta^2} - \eta)]}{(1+\eta^2)^{3/2}} \eta \right] d\eta \right\}. \quad (1.8)$$

Разлагая интегралы в ряд по степеням малых параметров l/ρ и $\lambda\rho/l$ и ограничиваясь учетом только первых членов разложения, получаем

$$I_{ir}(\rho) = \frac{ck}{2} \langle |A(\rho)|^2 \cos^2 \varphi \rangle \sin(kl) [\alpha' \cos(kV\sqrt{\rho^2 + l^2}) - \\ - \alpha'' \sin(kV\sqrt{\rho^2 + l^2})].$$

При $\rho \gg \sigma$ $A(\rho) \rightarrow 0$, поэтому $I_{ir}(\rho) \rightarrow 0$, если выбрать $\rho \gg \sigma$.

Таким образом, полный поток энергии, поглощаемой (при $\alpha'' > 0$) или излучаемой (при $\alpha'' < 0$) атомом, переносится интерференционным потоком в направлении, определяемом волновым вектором падающей плоской волны. В результате излучения атомом сферической волны может происходить не только изменение энергии, но и импульса излучения. Именно поэтому в рамках классических уравнений Максвелла можно говорить о пространственной направленности процессов взаимодействия отдельного атома с плоской волной.

Отметим, что в случае интерференционного потока отношение переносимой им энергии к импульсу равно ω/k и совпадает с обычным отношением, известным для однородной плоской волны.

2. СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Кроме однородных плоских волн уравнения Максвелла имеют также решения в виде неоднородных волн, у которых одна или две компоненты волнового вектора являются мнимыми. Неоднородные волны возникают, например, при полном отражении света от плоской границы раздела двух сред. Возбужденные атомы, находящиеся в резонансном поле неоднородной волны, могут совершать вынужденные переходы с излучением света. Представляет интерес рассмотреть пространственную направленность этого излучения.

Пусть неоднородная волна распространяется вдоль оси y , а ее амплитуда экспоненциально убывает по оси x :

$$E_z = A \exp[i(k_y y - \omega t) - \hbar x]. \quad (2.1)$$

Здесь $k_y > k = \omega/c$, $\hbar = \sqrt{k^2 - k_y^2}$, поток энергии, переносимой волной (2.1), направлен вдоль оси y . Для исследования пространственной направленности взаимодействия снова рассмотрим интерференционный поток через поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leq \rho^2$, $-l_1 \leq x \leq l_2$, $\rho \gg l_1$.

Выпишем выражение для интерференционного потока через плоскость $x = -l_1$:

$$I_{ix}(-l_1) = -\frac{ck^2}{8\pi} |A|^2 \exp(\hbar l_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_{y^2+z^2=\rho^2} \int \int \left(-i\alpha \frac{\hbar}{k} \frac{l_1^2 + y^2}{R^3} \times \right. \right.$$

$$\times \exp [i(kR - k_y y)] + \alpha^* \frac{l_1}{R^2} \exp [-i(kR - k_y y)] dy dz \Big\}. \quad (2.2)$$

После перехода в цилиндрическую систему координат и несложных преобразований выражение (2.2) принимает вид

$$I_{ix}(-l_1) = -\frac{ck^2}{4} |A|^2 \exp(hl_1) \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \left[-i\alpha \frac{h}{k} \frac{J_0(k_y r) e^{ikR}}{R} - i\alpha \frac{h}{kk_y} \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\frac{J_0(k_y r) e^{ikR}}{R^3} \right) + \alpha^* l_1 \frac{J_0(k_y r) e^{-ikR}}{R^2} \right] r dr \right\}, \quad (2.3)$$

где $R = \sqrt{l_1^2 + r^2}$. При условии $\rho \gg l_1$ в силу сходимости интегралов (2.2) пределы интегрирования могут быть расширены до значения $\rho = \infty$.

Используя известный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{J_0(k_y r) e^{ikR}}{R} r dr = \frac{\exp(-hl_1)}{h} \quad (k_y > k), \quad (2.4)$$

а также соотношения, получаемые на основе (2.4) путем дифференцирования по параметрам,

$$\int_0^\infty \frac{J_0(k_y r) e^{ikR}}{R^2} r dr = K_0(k_y l_1) + i \int_0^k \frac{\exp(-\sqrt{k_y^2 - u^2} l_1)}{\sqrt{k_y^2 - u^2}} du; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_0(k_y r) e^{ikR}}{R^3} r dr &= \frac{1}{l_1} \left[\exp(-hl_1) + ik l_1 K_0(k_y l_1) - \right. \\ &\quad \left. - kl_1 \int_0^k \frac{\exp(-\sqrt{k_y^2 - u^2} l_1)}{\sqrt{k_y^2 - u^2}} du \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

можно доказать, что первый член асимптотического разложения выражения (2.3) по степеням $(kl_1)^{-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} I_{ix}(-l_1) &= -\frac{ck}{4} |A|^2 \exp(hl_1) \operatorname{Re} [-i\alpha \exp(-hl_1) + \\ &\quad + i\alpha^* \exp(-hl_1)] = -\frac{ck\alpha''}{2} |A|^2 = -\frac{\omega\alpha''}{2} |A|^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, а $K_0(x)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента. Мы снова видим, что весь интерференционный поток, связанный с поглощением или вынужденным излучением атома, проходит через одну плоскость $x = -l_1$.

Для нахождения интерференционного потока через плоскость $x = -l_2$ в выражении (2.3) достаточно заменить l_1 на $-l_2$. Отсюда сразу следует, что $I_{ix}(l_2) \sim \exp(-2hl_2)$ и при $l_2 \rightarrow \infty$ $I_{ix}(l_2) \rightarrow 0$. Соответственно интерференционный поток через боковую поверхность цилиндра обращается в нуль. Проведенные нами оценки показывают, что

$$|I_{ix}(\rho)| < C \frac{k}{h \sqrt{k\rho}},$$

где C — постоянная, не зависящая от ρ .

Таким образом, при переходе от однородной к неоднородной волне угол между интерференционным потоком и направлением потока энергии, переносимой соответствующей волной, меняется скачком на $\pi/2$. Полученный скачок связан с неограниченностью неоднородной волны (2.1) в плоскости yz и обусловлен скачкообразным изменением значения интеграла (2.4) в точке $k = k_y$. Если считать, что неоднородная волна возникает при полном отражении пучка, ограниченного в поперечном сечении, то направление интерференционного потока будет непрерывным образом зависеть от параметров падающего пучка.

Поле (2.1) соответствует преломленной волне, возникающей при полном отражении однородной плоской волны от границы раздела двух сред $x = \text{const} < 0$. Следовательно, поток энергии, обусловленный поглощением или вынужденным излучением атома в поле неоднородной волны, направлен перпендикулярно к поверхности раздела двух сред. В случае возбужденных атомов ($\alpha'' < 0$) интерференционный поток направлен к поверхности раздела сред и приводит к увеличению интенсивности отраженного света. Таким образом, зная направленность вынужденного излучения атома в поле неоднородной волны, можно объяснить усиление отраженного света при углах падения, превышающих критический угол полного отражения [9–14]. Отметим, что в силу симметрии задачи отражение сферической волны, излучаемой атомом, от поверхности раздела сред может изменить только величину интерференционного потока, но не его направление.

В настоящей статье методами классической электродинамики показано, что пространственная направленность взаимодействия атома с излучением определяется не геометрическими размерами атома, а пространственной структурой внешнего электромагнитного поля. Нами рассмотрено только вынужденное излучение. Направленность спонтанного излучения требует специального анализа. Если принять, что спонтанное излучение вызывается взаимодействием атома с нулевыми колебаниями поля [15, 16], то согласно полученным здесь результатам направленность спонтанного излучения определяется волновым вектором той моды поля, нулевые колебания которой вызвали данный переход.

Недавно был предложен эксперимент по прямому измерению импульса атома, взаимодействующего с неоднородной волной [17]. Проведение такого эксперимента представляет большой интерес из-за необычной пространственной направленности вынужденного излучения атома в поле неоднородной волны.

Актуальной и до сих пор не решенной окончательно является задача вторичного квантования неоднородных волн и создание полной квантовой теории взаимодействия этих волн с веществом. В литературе имеются лишь отдельные попытки решения этой задачи [18, 19].

Автор благодарен Г. В. Скроцкому, Л. А. Вайнштейну, а также участникам семинаров по проблемам дифракции ИРЭ АН СССР под руководством Я. Н. Фельда и кафедры волновых процессов МГУ под руководством Р. В. Хохлова за обсуждение данной работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Z. Phys., 18, 121 (1917).
2. V. Beers, Am. J. Phys., 40, № 18, 1139 (1972); 41, № 2, 275 (1973).
3. L. Janossy, Acta Phys. Hung., 39, № 2, 109 (1975).
4. A. V. Duggant, Am. J. Phys., 44, № 7, 630 (1976).
5. А. З. Фрадин, ЖТФ, 9, № 13, 1161 (1939).
6. Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, Госэнергоиздат, М., 1963.

7. М. Д. Галанин, Труды ФИАН СССР, 12, 3 (1960).
8. О. Bryngdahl, Progress in optics, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam — London, 11, 167 (1972).
9. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов, Письма в ЖЭТФ, 16, вып. 5, 298 (1972).
10. Б. Бойко, И. З. Джилавдари, Н. С. Петров, ЖПС, 18, вып. 4, 727 (1973).
11. А. А. Колоколов, Письма в ЖЭТФ, 21, вып. 11, 660 (1975).
12. Л. А. Вайнштейн, УФН, 118, вып. 2, 339 (1976).
13. W. Lukosz and P. R. Heggmann, Opt. Commun., 17, № 2, 192 (1976).
14. P. R. Callagy and C. K. Carniglia, JOSA, 66, № 8, 775 (1976).
15. T. H. Boyer, Phys. Rev., 11D, № 4, 790, 809 (1975).
16. P. W. Milonni, Phys. Reports, 25, № 1, 1 (1976).
17. G. Rosen and Ch. Imbert, Opt. Commun., 18, № 3, 247 (1976).
18. C. K. Carniglia and L. Mandel, Phys. Rev., 3D, № 1, 280 (1971).
19. C. K. Carniglia, L. Mandel and K. H. Drexhage, JOSA, 62, № 4, 479 (1972).

Научно-исследовательский институт
органических полупродуктов
и красителей

Поступила в редакцию
7 февраля 1977 г.,
после переработки
2 августа 1978 г.

ATOM INTERACTION WITH AN INHOMOGENEOUS PLANE WAVE

A. A. Kolokolov

Interaction of an atom with homogeneous and inhomogeneous plane waves are considered in the dipole approximation. By the method of classical electrodynamics it is shown that the induced radiation of an excited atom is transferred by the interference flux which is defined both by the incident wave field and the field of the induced dipole. The interference flux has the spatial directivity depending on the spatial incident wave structure and transfers not only the energy but the radiation pulse, as well. In the case of the interaction of an atom with an inhomogeneous wave the interference flux propagates in the direction perpendicular to the energy flux transferred by an inhomogeneous wave. This result permits to explain naturally the light amplification with the complete reflection from the active medium.

УДК 621.385.6

**О ВОЗБУЖДЕНИИ ПАРАЗИТНЫХ МОД, РЕЗОНАНСНЫХ
С ПЕРВОЙ ГАРМОНИКОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ ЧАСТОТЫ,
В ГИРОТРОНЕ, РАБОТАЮЩЕМ НА МОДЕ,
РЕЗОНАНСНОЙ СО ВТОРОЙ ГАРМОНИКОЙ**

B. E. Запевалов, И. Г. Зарницаина, Г. С. Нуцинович

Рассмотрена конкуренция между рабочей модой гиротрона, резонансной со второй гармоникой циклотронной частоты, и паразитной модой, возбуждающейся с относительно большим продольным волновым числом в резонансе с первой гармоникой. Определен разнос между критической частотой паразитной моды и циклотронной частотой, при котором стартовый ток этой моды выше стартового тока рабочей моды. При значениях параметров, близких к экспериментальным, проанализированы возможности расширения области устойчивости колебаний рабочей моды.

1. Рабочими модами гиротронов обычно являются моды с малым продольным волновым числом, характеризующиеся высокой добротностью. При работе на этих модах разброс поступательных скоростей электронов слабо влияет на циклотронный резонанс между частицами и высокочастотным полем, что позволяет получать в гиротроне высокий КПД. Спектр таких мод близок к спектру критических частот мод соответствующего волновода.

При работе на основном циклотронном резонансе в качестве рабочей обычно выбирают моду, достаточно удаленную по частоте от остальных, чтобы избежать конкуренции мод. При этом наличие мод, резонансных с высшими гармониками циклотронной частоты ω_H , несущественно, так как в слаборелятивистском МЦР стартовые токи мод возрастают с ростом номера гармоники n пропорционально θ_{\perp}^{-2n} [1]. Отсюда следует, что при работе в условиях резонанса высокочастотного поля со второй гармоникой ω_H ($n=2$) (и, тем более, при $n > 2$) наличие в спектре критических частот резонатора моды, резонансной с ω_H , нежелательно, так как такая паразитная мода может легко самовозбудиться. Однако, даже если в спектре резонатора нет мод, критические частоты которых близки к ω_H , определенную опасность в гиротронах, работающих на $2\omega_H$, представляют моды, возбуждающиеся с относительно большим продольным волновым числом h в условиях циклотронного резонанса

$$|\omega_n \pm h\nu_{\parallel} - \omega_H| \ll \omega_H. \quad (1)$$

В настоящей работе анализируются возможные колебательные режимы гиротрона, в котором для рабочей моды выполняется условие циклотронного резонанса $\omega_p \approx 2\omega_H$, а для паразитной моды — условие (1).

2. В предназначенных для освоения субмиллиметрового и коротковолновой части миллиметрового диапазона гиротронах, работающих на $2\omega_H$ (а также в гиротронах клистронного типа) ток пучка невелик [2]. Поэтому для увеличения добротности (и амплитуды автоколебаний)

в резонаторах этих гиротронов создают закритические сужения на коллекторном и катодном концах, что позволяет считать структуру полей обеих мод фиксированной.

Оценим стартовые токи конкурирующих мод, задавая продольную структуру поля рабочей моды в виде $f_p(z) = \sin \pi \frac{z}{L}$, паразитной —

$f_n = \sin q \pi \frac{z}{L}$ (L — длина резонатора, q — число вариаций поля паразитной моды). Будем считать, что функции, описывающие зависимость от угла пролета восприимчивостей электронного потока по отношению к полям обеих мод, являются величинами одного порядка, добротности

мод Q_s можно определить как $Q_s \approx \frac{4\pi}{q_s} \frac{(L/\lambda_s)^2}{1 - R_1^s R_2^s}$ [3] ($R_{1,2}^s$ — коэффи-

циенты отражения волн на концах резонатора). Тогда из линейной теории МЦР-монотрона [1] получаем следующее соотношение между стартовыми токами рабочей и паразитной мод:

$$\frac{I_p^{ct}}{I_n^{ct}} = \frac{1}{4q\beta_{\perp}^2} \frac{G_n}{G_p} \frac{1 - R_1^p R_2^p}{1 - R_1^n R_2^n}, \quad (2)$$

где β_{\perp} — отношение поперечной компоненты скорости частиц к скорости света c , структурные коэффициенты $G_{p,n}$ для гиротронов с аксиально-симметричным пространством равны

$$G = J_{m \pm n}^2(zR_0)[(v^2 - m^2)J_m^2(v)]^{-1}.$$

Здесь z — поперечное волновое число, R_0 — радиус центров орбитального вращения электронов, m — азимутальный индекс моды H_{mpq} , v — p -й корень уравнения $J'_m(v) = 0$.

Из (2) видно, во-первых, что с ростом напряжения (пропорционально β_{\perp}^2 в (2)) стартовые токи мод, резонансных с разными гармониками гирочастоты, сравниваются. Кроме того, соотношение (2) позволяет оценить требования к спектру резонатора, исходя из предположения, что паразитная мода со стартовым током, превышающим стартовый ток рабочей моды, не возбуждается. Считая, что частота паразитной моды $\omega = \sqrt{\omega_{kp}^2 + h^2 c^2}$ равна $\tilde{\omega} = \omega_{kp} + \tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega} \ll \omega_{kp} = zc$, из условия $I_p^{ct}/I_n^{ct} \leq 1$ находим

$$\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_{kp}} \right)_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\lambda_n G_n (1 - R_1^p R_2^p)}{8\beta_{\perp}^2 L G_p (1 - R_1^n R_2^n)} \right|^2. \quad (3)$$

Таким образом, если разнос между критической частотой паразитной моды и циклотронной частотой $|\omega_H - \omega_{kp}| \approx \tilde{\omega}$ удовлетворяет условию (3), то стартовый ток паразитной моды превышает стартовый ток рабочей моды.

Условие (3) является необходимым для того, чтобы первой возбудилась рабочая мода, но не достаточным для того, чтобы возбудившиеся колебания оставались устойчивыми. Как показано в [4], при появлении колебаний, резонансных с $2\omega_H$, область самовозбуждения моды, критическая частота которой близка к ω_H , расширяется. Поэтому даже при выполнении условия (3) представляется необходимым анализ конкуренции мод с $\omega_p \approx 2\omega_H$ и $\omega_n \approx \omega_H \pm hv_{\parallel}$. Ниже описан расчет конкуренции таких мод, экспериментально исследованной в [5].

3. Расчет проводился развитым в [6] методом, позволяющим определить влияние параметров многомодового генератора на устойчивость одномодовых колебаний. Вычислялись факторы возбуждения, определяющие (с учетом эффектов насыщения) мощность взаимодействия электронного потока с полями мод: сначала вычислялся фактор возбуждения $\hat{\Phi}_s$ генерирующей моды, зависящий от амплитуды автоколебаний F_s , расстройки $\Delta_s \sim \omega_s - n_s \omega_H$ и продольной структуры моды $f_s(z)^*$, и определялась с помощью уравнения баланса [4, 6] соответствующая заданному току I амплитуда стационарных колебаний F_s^{ct} . Затем вычислялся фактор возбуждения негенерирующей моды $\hat{\Phi}_{s'} (s' \neq s)$, зависящий не только от расстройки $\Delta_{s'} \sim \omega_{s'} - n_{s'} \omega_H$ и продольной структуры $f_{s'}(z)$, но и (в силу нелинейных свойств электронного потока) от амплитуды $F_{s'}^{ct}$, расстройки $\Delta_{s'}$ и структуры $f_{s'}(z)$ генерирующей моды. После этого определялась область значений параметров генератора, в которой, согласно условию [4, 6]

$$\hat{\Phi}'_s(F_s^{ct}) > \hat{q} \hat{\Phi}'_{s'}(F_{s'}^{ct}), \quad (4)$$

колебания второй моды не возбуждаются, т. е. генерация s -й моды устойчива. В (4) параметр \hat{q} равен $Q_p G_{\pi} / Q_p \beta_{\perp}^2 G_p$ (см. (2)) в случае генерации рабочей моды и $Q_p \beta_{\perp}^2 G_p / G_{\pi} Q_p$ — при генерации паразитной

моды; $\hat{\Phi}_{s, s'}$ — реальные части факторов возбуждения, которые при фиксированной структуре полей мод в силу аксиальной симметрии рабочего пространства гиротрона не зависят [7] ни от фаз s -х мод, ни — при неодинаковых азимутальных индексах мод — от их разности фаз. Как и в [4, 6, 7], система предполагалась достаточно высокодобротной, чтобы можно было пренебречь полем пространственного заряда (при значениях параметров, имевших место в экспериментах [5], условие пренебрежения полем пространственного заряда в гиротроне — условие (5) работы [8] — выполняется с достаточным запасом). Продольная структура рабочей моды аппроксимировалась гауссовой функцией $f_p(\zeta) =$

$$= \exp \left\{ - \left[\frac{2(\zeta - \zeta_0)}{\mu_p} \right]^2 \right\} \left(\zeta = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_{\parallel}} \frac{\omega_H z}{c} \right) \text{ — приведенная продольная коор-}$$

дината}, продольная структура паразитной моды — синусоидой $f_n(\zeta) = \sin \pi q \frac{\zeta}{\mu_p}$, причем число вариаций поля q считалось фиксированным,

что в относительно узкой области $\left(\frac{\Delta \omega}{\omega} < 2\% \right)$ конкуренции мод допустимо**. Расчетные значения параметров были близки к имевшим место в экспериментах [5]: $\mu = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_{\parallel}} \frac{\omega_H L_{\text{вз}}}{c} = 5^{***}$ ($L_{\text{вз}}$ — длина пространства взаимодействия), $\mu_p = 3,5$, $\zeta_0 = 2,5$, $\mu_n = 5$, $q = 5,4$, $\frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} = 1$, $\beta =$

* Используются принятые в [4, 6, 7] обозначения параметров и исходные предположения о модели генератора

** В [5] условие циклотронного резонанса (1) выполнялось для встречной (по отношению к электронам) бегущей волны, являющейся компонентой поля паразитной моды. Результаты расчетов, проводимых в приближении фиксированной синусоидальной структуры поля, дают при резонансе со встречной волной погрешность в определении стартового тока моды, не превышающую 10% по сравнению с расчетами [3], учитывающими нефиксированность поля волны

*** Значение $\mu = 5$ соответствует случаю однородного распределения магнитостатического поля по длине резонатора в [5].

$$= \sqrt{\beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2} = 0,3, Q_p = 4 \cdot 10^3, q = 1, \omega_p = 2\pi \cdot 33,73 \text{ ГГц}, \omega_{n, kp} = 2\pi \cdot 14,6 \text{ ГГц}.$$

Конкуренция мод может возникнуть в тех случаях, когда определяемые линейной теорией [1] зоны самовозбуждения каждой из мод $(\Delta_p = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} (\frac{\omega_p}{2\omega_H} - 1) \in [0,22; 0,9], \Delta_{\pi} = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} (\frac{\omega_{\pi}}{\omega_H} - 1) \in [-3,3; -2,2])$ соответствуют одной и той же области значений магнитостатического поля. В эксперименте [5] величина взаимной расстройки мод $\tilde{\Delta} = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{2\omega_{\pi} - \omega_p}{2\omega_H}$ была близка к $\tilde{\Delta} \approx -3$. Зависимости стартовых токов

обеих мод невозбужденного генератора от расстройки Δ_p при $\tilde{\Delta} = -3$ показаны на рис. 1 сплошными линиями, штрихпунктирные линии определяют при жестком самовозбуждении минимальный ток, при котором существуют колебания. При таком взаимном расположении зон самовозбуждения в процессе подачи напряжения на генератор первой может

возбудиться любая мода. Поэтому при расчете рассматривались обе возможности.

Полученные результаты позволили разделить область самовозбуждения обеих мод на плоскости параметров I, Δ_p (рис. 1) на три качественно различные области I—III. В I независимо от очередности возбуждения мод устанавливаются колебания рабочей моды, в II всегда возбуждается паразитная мода, в III в зависимости от очередности самовозбуждения устанавливается одномодовая генерация первоначально возбудившейся моды. Как показали расчеты, аналогичные описанным в [9], при подаче любым способом импульсного напряжения в гиротроне [6] первой возбуждается паразитная мода. Сопоставление рис. 1 с рис. 2 из

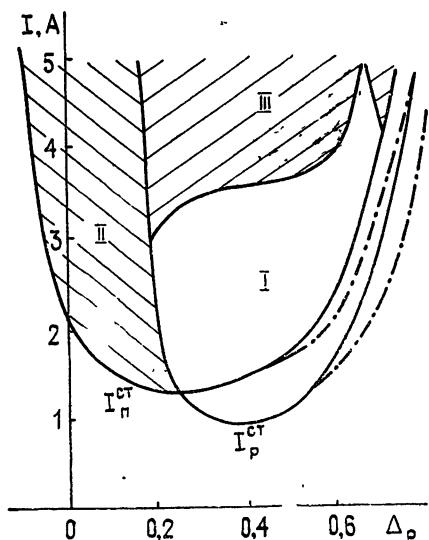


Рис. 1.

[5], где $\delta_b = -\frac{\beta_{\perp}^2}{2} (\Delta_p - 0,38)$, свидетельствует о том, что зона I на

рис. 2 [5] соответствует зоне I рис. 1, а зоны II, III рис. 1 соответствуют зоне генерации встречной волны, показанной в [5] на рис. 2, хотя и значительно уже ее вследствие предположения о фиксированности поля паразитной моды.

Зависимости факторов возбуждения обеих мод от текущей координаты позволяют определить целесообразность укорочения рабочего пространства для подавления паразитной моды. На рис. 2 приведены такие зависимости для случаев первоначального возбуждения рабочей (a, б) и паразитной (в, г) мод. Из рис. 2 а, б видно, что при возбуждении рабочей моды эффекты «насыщения» начинают проявляться примерно одновременно для обеих мод, и преимущество рабочей моды обеспечивается лишь большими значениями $\hat{\Phi}'_p$ в линейном режиме

(ср. рис. 2 а, б с рис. 1 при указанных на рис. 2 значениях $\tilde{\Delta}$). При этом нужно иметь в виду, что паразитная мода с нефиксированным продольным волновым числом возбуждается с частотой, соответствующей минимальному стартовому току; в такой ситуации рабочую моду нужно сравнивать с паразитной модой, имеющей расстройку $\tilde{\Delta}$, при которой фактор $\hat{\Phi}'$ ($\tilde{\Delta}$) максимальен.

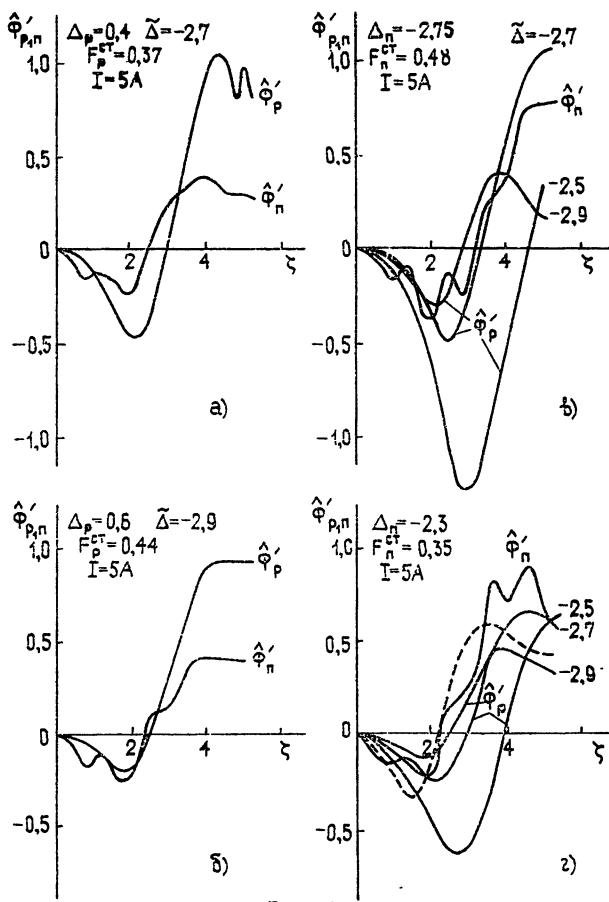


Рис. 2.

При первоначальном возбуждении паразитной моды, как следует из рис. 2 в, г, эффекты «насыщения» для нее проявляются раньше, чем для рабочей моды с малыми (по модулю) расстройками $\tilde{\Delta}$, и позже, чем для рабочей моды с большими расстройками $\tilde{\Delta}$, что можно объяснить кинематическими соображениями: эффективная группировка определяется углом пролета $\Theta = \tilde{\Delta}\zeta$, т. е. при больших расстройках она соответствует меньшим длинам. Из графиков, приведенных на рис. 2 в, следует, что при расстройке $\Delta_p = -2.75$, укоротив длину пространства взаимодействия путем уменьшения однородного участка магнитостатического поля с $\mu = 5$ до $\mu = 3.8 \div 3.9$, можно расширить зону самовозбуждения рабочей моды в область больших (по модулю) расстроек $\tilde{\Delta}$. Следует, однако, иметь в виду, что уменьшение μ за счет укорочения

длины резонатора повышает требования к спектру паразитных мод — условие (3) можно записать в виде $\left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_{kp}}\right)_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{8\beta_{||}\mu_n} \frac{G_n}{G_p} \right]^2$.

Расширение зоны генерации рабочей моды возможно также вследствие изменения ее продольной структуры. Если продольная структура рабочей моды имеет более близкий к катоду максимум $f_p(\zeta) = \exp \left\{ - \left(\frac{(\zeta - 1,75)^2}{1,75} \right) \right\}$, то с укорочением длины пространства взаимодействия возможно возбуждение рабочей моды в более широкой области расстроек $\tilde{\Delta}$ (соответствующая зависимость фактора $\hat{\Phi}'_p(\zeta)$ показана на рис. 2 г штриховой линией для значения $\tilde{\Delta} = -2,9$).

Обе меры — укорочение длины пространства взаимодействия и смещение максимума распределения поля рабочей моды в сторону катода — были использованы в [5] и привели к существенному расширению зоны устойчивой генерации рабочей моды. Таким образом, проведенный расчет согласуется с результатами эксперимента и их интерпретацией, данной в [5], а также проясняет ряд нелинейных свойств гиротрона, определяющих конкуренцию мод.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 2, 290 (1975).
2. Н. И. Зайцев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, 19, № 5, 1056 (1974).
3. В. Л. Братман, М. А. Моисеев, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 1045 (1975).
4. И. Г. Зарницына, Г. С. Нусинович, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 461 (1977).
5. В. Е. Запевалов, Г. С. Кораблев, Ш. Е. Цимлинг, Радиотехника и электроника, 22, № 8, 1661 (1977).
6. И. Г. Зарницына, Г. С. Нусинович, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 12, 1858 (1974).
7. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
8. В. Л. Братман, М. И. Петелин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 10, 1538 (1975).
9. Г. С. Нусинович, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 3, 44 (1974).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
3 мая 1978 г

EXCITATION OF PARASITIC MODES RESONANT WITH THE FIRST HARMONICS OF THE CYCLOTRON FREQUENCY IN A GYROTRON OPERATING AT THE MODE RESONANT WITH THE SECOND HARMONICS

V. E. Zapevalov, I. G. Zarnitsyna, G. S. Nusinovich

A competition is considered between the gyrotron operating mode resonant with the second harmonic of the cyclotron frequency and a parasitic mode excited with a relatively high longitudinal wave number in a resonance with the first harmonic. A separation is found between the critical frequency of the parasitic mode and the cyclotron frequency when the starting current of this mode is higher than the starting current of the operating one. Possibilities of broadening of the stability oscillation region of the operating mode are analysed if the parameter values being close to the experimental ones.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 538.632

ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

Э. М. Эпштейн

Периодическая полупроводниковая структура, период которой мал по сравнению с длиной свободного пробега электрона, — сверхрешетка (СР) — обладает рядом интересных свойств, к числу которых относится возможность отрицательной дифференциальной [1] и абсолютной [2] проводимости. Как будет показано в настоящей работе, нелинейность свойств СР приводит к интересным особенностям в эффекте Холла.

Как и в [1, 2], будем описывать дисперсию электронов в направлении оси СР приближением сильной связи. Будем рассматривать квазиклассическую ситуацию $\Delta \gg eEd$, \hbar/τ (d — период СР, Δ — ширина минизоны проводимости, τ — время свободного пробега электрона, E — напряженность электрического поля) и пользоваться кинетическим уравнением Больцмана с постоянным временем релаксации τ .

Необходимо отметить, что приближение постоянного изотропного времени релаксации не учитывает влияния анизотропии и непарabolичности электронного спектра СР на рассеяние электронов. В двумерных задачах (к каковым относится эффект Холла) это приближение еще менее обосновано, чем в одномерных [1, 2]. В то же время сравнение полученных ниже недиагональных кинетических коэффициентов с теми, которые были вычислены с учетом анизотропии рассеяния в интеграле столкновений (в предельном случае слабого электрического поля) [3], обнаруживает удовлетворительное согласие (расхождение лишь в численных множителях порядка единицы). Поэтому можно надеяться, что приближение постоянного изотропного времени релаксации правильно передает качественные особенности явления.

Будем полагать магнитное поле H слабым и учитывать в линейном приближении, электрическое поле — произвольным (в рамках квазиклассического приближения). Решая уравнение Больцмана итерациями по H и подставляя решение в формулу для плотности тока, найдем компоненты тензора проводимости σ_{ik} (ось x совпадает с осью СР):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\parallel} [1 + (E_x/E_0)^2]^{-1}; \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{\perp}; \quad (2)$$

$$\sigma_{yz} = -\sigma_{zy} = \sigma_{\perp} \eta_x; \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{\parallel} \eta_z [1 - 3(E_x/E_0)^2] [1 + (E_x/E_0)^2]^{-3}; \quad (4)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{\parallel} \eta_y [1 + (E_x/E_0)^2]^{-1}; \quad (5)$$

σ_{yx} получается из σ_{zx} , а σ_{xz} из σ_{xy} заменой $\eta_z \rightarrow -\eta_y$. Здесь

$$\sigma_{\parallel} = \frac{e^2 n \tau \Delta d^2}{2 \hbar^2} \left\langle \cos \frac{p_x d}{\hbar} \right\rangle, \quad \sigma_{\perp} = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (6)$$

— проводимость соответственно вдоль и поперек оси СР в слабом электрическом поле, n — концентрация электронов проводимости, угловые скобки означают усреднение по равновесному распределению. В случае невырожденного электронного газа

$$\left\langle \cos \frac{p_x d}{\hbar} \right\rangle = I_1 \left(\frac{\Delta}{2 k T} \right) / I_0 \left(\frac{\Delta}{2 k T} \right),$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $\eta_i = \frac{e \tau}{mc} H_i$, $E_0 = \hbar/e d \tau$.

Из формул (1)–(5), в частности, следует нарушение соотношений Онсагера

в сильных полях ($\sigma_{xy} \neq -\sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} \neq -\sigma_{zx}$), на что уже обращалось внимание (применительно к другим нелинейным системам) в работе [4].

Пусть ток течет вдоль оси y (вдоль слоев СР), в остальных направлениях образец электрически разомкнут, холловское поле измеряется в направлении оси x (вдоль оси СР). Из формул (1)–(5) получаем в линейном по H приближении для холловского поля

$$E_x = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}\sigma_{yy}} j = -R(E_x) H_z j; \quad (7)$$

$$R(E_x) = \frac{1}{enc} \frac{1 - 3(E_x/E_0)^2}{[1 + (E_x/E_0)^2]^2} \quad (8)$$

(j — плотность тока).

Коэффициент Холла $R(E_x)$ зависит от холловского поля E_x , поэтому соотношение (7) представляет собой уравнение относительно E_x . Это уравнение можно переписать в виде

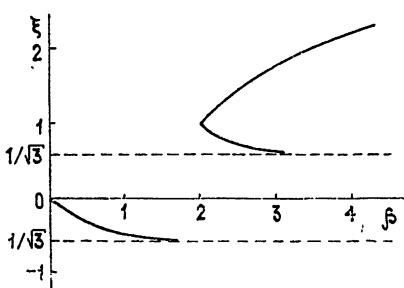


Рис. 1. Зависимость холловского поля от плотности тока (в безразмерных переменных).

шается, а начиная с $j = 2j_0$, становится неоднозначной. При этом становится возможным переключение холловского поля с изменением знака. Переключение обусловлено изменением знака компоненты тензора проводимости σ_{xy} при $E_x = E_0/\sqrt{3}$. Последнее, в свою очередь, имеет ту же природу, что и отрицательная дифференциальная проводимость СР [1]: в достаточно сильном электрическом поле импульс, приобретаемый электроном за время пробега, $\delta p \sim eE\tau$, становится сравнимым с размером мини-зоны Бриллюэна порядка \hbar/d .

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki and R. Tsu, IBM J. Res. Dev., 14, 61 (1970).
2. А. А. Игнатов, Ю. А. Романов, ФТТ, 17, 3388 (1975); Phys. Stat. Sol., B73, 327 (1976); Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 1, 132 (1978).
3. А. Я. Шик, ФТП, 7, 261 (1973).
4. М. Аш, Ю. Г. Завьялов, О. Г. Сарбей, Письма в ЖЭТФ, 13, 401 (1971).

Поступила в редакцию
16 мая 1978 г.

УДК 538

ГАУССОВЫ ПУЧКИ В ПОПЕРЕЧНО-НАМАГНИЧЕННОЙ ФЕРРИТОВОЙ СРЕДЕ

В. И. Вольман

Предположим, что вдоль оси y в безграничной попоперечно-намагниченной неоднородной вдоль оси x ферритовой среде распространяется электромагнитная волна, вектор электрического поля которой ориентирован параллельно оси z . Система уравнений для составляющих поля имеет вид [1]

$$H_x = \frac{1}{\omega \mu_{\perp}} \left(\beta E_z - \frac{\mu_a}{\mu} \frac{dE_z}{dx} \right); \quad (1)$$

$$H_y = \frac{i}{\omega \mu_{\perp}} \left(\frac{\beta}{\mu} \frac{\mu_a}{\mu} E_z - \frac{dE_z}{dx} \right); \quad (2)$$

$$\frac{dH_y}{dx} + i\beta H_x - i\omega \epsilon E_z = 0, \quad (3)$$

где β — коэффициент распространения вдоль оси y ; μ и μ_a — компоненты тензора магнитной проницаемости; $\mu_{\perp} = (\mu^2 - \mu_a^2)/\mu$; ω — угловая частота.

Подставляя (1) и (2) в (3), получаем

$$E_z'' - \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\perp}} E_z + \left\{ \omega^2 \epsilon \mu_{\perp} - \beta^2 - \beta \mu_{\perp} \left(\frac{1}{\mu_{\perp}} \frac{\mu_a}{\mu} \right)' \right\} E_z = 0, \quad (4)$$

где штрих означает дифференцирование по x .

Параметры μ , μ_a и μ_{\perp} можно выразить через μ^+ и μ^- [3]:

$$\frac{\mu_0}{\mu_{\perp}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{\mu^+} + \frac{\mu_0}{\mu^-} \right),$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_{\perp}} \frac{\mu_a}{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{\mu^+} - \frac{\mu_0}{\mu^-} \right),$$

где μ^+ и μ^- — магнитные проницаемости феррита соответственно для волн с правой и левой поляризациями. Так как отношение $\frac{\mu^-}{\mu_0} \approx 1$ и чрезвычайно слабо зависит от напряженности внешнего магнитного поля, то

$$\frac{\mu_{\perp}'}{\mu_{\perp}} \approx -\mu_{\perp} \left(\frac{1}{\mu_{\perp}} \frac{\mu_a}{\mu} \right)' \approx -\frac{y'}{y+1}; \quad (5)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_{\perp}} \approx \frac{1}{2} (y+1), \quad (6)$$

где $y(x) = \frac{\mu_0}{\mu^+(x)}$, и уравнение (4) принимает вид

$$E_z'' + \frac{y'}{y+1} E_z' + \left(\frac{2k^2}{y+1} - \beta^2 - \beta \frac{y'}{y+1} \right) E_z = 0, \quad (7)$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0$.

Будем искать те решения (7), которые при $|x| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, в виде

$$E_z(x) = E_z(0) e^{-f(x)}, \quad (8)$$

где $f(x) = f(-x)$. После подстановки (8) в (7) приходим к дифференциальному уравнению

$$y' + \frac{f'' - f'^2 + \beta^2}{f' + \beta} y - \frac{2k^2 - f'' + f'^2 - \beta^2}{f' + \beta} = 0. \quad (9)$$

Решение его в квадратурах имеет вид [4]

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(y_0 + \int_0^x \frac{2k^2 - f'' + f'^2 - \beta^2}{f' + \beta} e^{F(x)} dx \right), \quad (10)$$

где

$$F(x) = \int_0^x \frac{f'' - f'^2 + \beta^2}{f' + \beta} dx = \ln \frac{f'(x) + \beta}{f'_0 + \beta} - f(x) + \beta x + f_0 \quad (11)$$

и $y_0 = y(0)$, $f'_0 = f'(0)$, $f_0 = f(0)$.

С учетом (11) запишем после преобразований интеграл в (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{e^{f_0}}{f'_0 + \beta} \int_0^x (2k^2 - f'' + f'^2 - \beta^2) e^{-f(x)+\beta x} dx = \\ = 1 - \frac{f'(x) + \beta}{f'_0 + \beta} e^{-f_1(x)} + \frac{2k^2}{f'_0 + \beta} \int_0^x e^{-f_1(x)} dx, \end{aligned} \quad (12)$$

где $f_1(x) = f(x) - \beta x - f_0$.

Подставляя (10) — (12) в (6), получаем

$$\frac{\mu_{\perp}(x)}{\mu_{\perp}(0)} = \frac{\frac{f'(x) + \beta}{f'_0 + \beta} e^{-f_1(x)}}{1 + \frac{k_{\perp}^2}{f'_0 + \beta} \int_0^x e^{-f_1(x)} dx}, \quad (13)$$

где $k_{\perp}^2 = \omega^2 \epsilon \mu_{\perp}(0)$.

Коэффициент распространения β находится из квадратного уравнения

$$\beta^2 - \beta \frac{\mu'_{\perp}(0)}{\mu_{\perp}(0)} - \left[k^2 + f'_0 \frac{\mu'_{\perp}(0)}{\mu_{\perp}(0)} + f'^2_0 - f''_0 \right] = 0, \quad (14)$$

вытекающего из (4) при $x = 0$. Согласно (14)

$$\beta_{1,2} = \frac{\mu'_{\perp}(0)}{2\mu_{\perp}(0)} \pm \sqrt{k_{\perp}^2 + \left[f'_0 + \frac{\mu'_{\perp}(0)}{2\mu_{\perp}(0)} \right]^2 - f''_0}. \quad (15)$$

Как и следовало ожидать, при $f''_0 = f'_0 = \mu'_{\perp}(0) = 0$ $\beta^2 = k_{\perp}^2$.

В качестве примера рассмотрим электромагнитную волну, у которой

$$E_z(x) = E_z(0) \exp[-(x/x_0)^2] \quad (16)$$

Эта волна и является низшим типом волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой меняется по квадратичному закону [2]. Параметр x_0 характеризует плотность распределения энергии. Подставляя в (13) и (15) $f(x) = (x/x_0)^2$, получаем

$$\frac{\mu_{\perp}(x)}{\mu_{\perp}(0)} = \frac{1}{\beta x_0} \frac{\left(2\frac{x}{x_0} + \beta x_0\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \beta x\right]}{1 + \sqrt{\pi} \frac{(k_{\perp} x_0)^2}{\beta x_0} \exp\left[\frac{1}{4}(\beta x_0)^2\right] \left[\Phi\left(\frac{\beta x_0}{2}\right) + \Phi\left(\frac{x}{x_0} - \frac{\beta x_0}{2}\right)\right]}, \quad (17)$$

$$\beta_{1,2} x_0 = \frac{\mu'_{\perp}(0)}{2\mu_{\perp}(0)} x_0 \pm \sqrt{(k_{\perp} x_0)^2 + \left(\frac{\mu'_{\perp}(0)}{2\mu_{\perp}(0)} x_0\right)^2} - 2, \quad (18)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$. На рис. 1 построена зависимость отношения $\frac{\mu_{\perp}(x)}{\mu_{\perp \max}}$,

описываемая выражением (17), в предположении, что $\mu'_{\perp}(0) = 0$ при различных значениях βx_0 .

В заключение отметим, что согласно (8)

$$f(x) = -\ln \frac{E_z(x)}{E_z(0)}, \quad (19)$$

и поэтому в соответствии с (13)

$$\cdot \frac{\mu_{\perp}(x)}{\mu_{\perp}(0)} = \frac{\frac{\beta E_z(x) - E'_z(x)}{\beta E_z(0) - E'_z(0)} e^{\beta x}}{1 + \frac{k_{\perp}^2}{\beta E_z(0) - E'_z(0)} \int_0^x E_z(x) e^{\beta x} dx}. \quad (20)$$

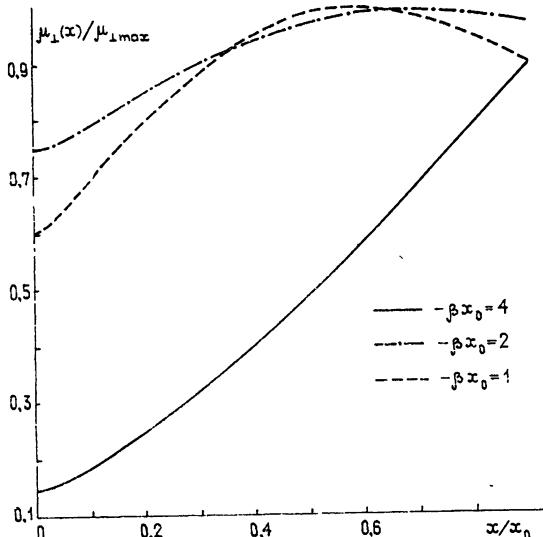


Рис. 1.

Выражение (20) устанавливает прямую связь между параметрами феррита и желаемой структурой электромагнитного поля

Возможность управления структурой электрического, а следовательно, и магнитного поля в намагниченных ферритах позволяет с новых позиций подойти к разработке конструкций ферритовых коммутаторов, фазовращателей, растранных головок и других элементов

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
2. Д. Маркузе, Оптические волноводы, изд. Мир, М., 1974.
3. В. И. Вольман, Ю. В. Пименов, Техническая электродинамика, изд. Связь, М., 1971.
4. Э. К. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.

Московский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
13 июня 1977 г.,
после доработки
6 сентября 1978 г.

УДК 538.56

К ВОПРОСУ О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ, ФЛУКТУИРУЮЩИМ ПО ЗАКОНУ ПУАССОНА

М. И. Калинин

В различных задачах физики (резонансное взаимодействие импульсного оптического излучения с веществом, возбуждение контура импульсным радиоизлучением) возникает необходимость исследования второго статистического момента $\langle \hat{Z}(t) \rangle = \langle z(t) \times z^*(t) \rangle$ стохастической динамической системы

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A + B \theta(t)] z(t), \quad z(0) = z_0; \quad (1)$$

$$A \leftarrow \text{diag}(l\omega_1, \dots, l\omega_N), \quad \omega_j \neq \omega_k, \quad \text{если } j \neq k, \quad (2)$$

где $z(t)$ — вектор состояния невырожденной N -уровневой динамической системы, на которую действует внешнее возбуждение $\theta(t)$, представляющее собой случайную последовательность некоррелированных импульсов

$$\theta(t) = \sum_j \theta_0(t - \tau_j). \quad (3)$$

Важными характеристиками динамической системы (1), (2) являются диагональные элементы $\langle \hat{Z}_{jj}(t) \rangle$ второго статистического момента (в случае молекулярной системы — средние населенности уровней).

В [1] получено кинетическое уравнение для второго статистического момента системы (1), (2) со стационарными пуассоновскими флуктуациями параметров вида (3). В данной заметке производится обобщение результатов работы [1] на случай нестационарных импульсных флуктуаций параметров системы (1), (2), статистические свойства которых полностью задаются средней плотностью импульсов $n_1(\tau)$ на оси времени [2]. Кумулянтные функции такого нестационарного пуассоновского процесса (3) легко определяются с помощью производящего функционала [2] (стр. 143) и имеют вид

$$k_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} n_1(\tau) d\tau \theta_0(t_1 - \tau) \dots \theta_0(t_n - \tau), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Кинетическое уравнение в [1] строится на основе усредненного по времени уравнения [3], которое получается в результате упрощения уравнения Кубо (см. (9) из [3]) для второго статистического момента динамической системы с произвольными стационарными флуктуациями $\theta(t)$ параметров.

В случае нестационарных флуктуаций $\theta(t)$ можно записать аналог уравнения Кубо для второго статистического момента $\hat{R}_K(t)$ в представлении взаимодействия, производя упрощение уравнения Дайсона в одногрупповом приближении таким же образом, как и в [3],

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_K(t) = e^{-\hat{A}t} \int_0^{\infty} \hat{M}(t, t - t') e^{-\hat{A}t'} dt' e^{\hat{A}t} \hat{R}_K(t). \quad (5)$$

Здесь $\hat{M}(t, t')$ — массовый оператор уравнения Дайсона в одногрупповом приближении [1]. Матрица \hat{A} определена в [1]: $\hat{A} = A \times I + I \times A^*$.

К уравнению (5) в общем случае нестационарных флуктуаций $\theta(t)$ нельзя применять процедуру усреднения по времени Боголюбова [4], как это делалось в [1, 3]. Если, например, $\theta(t)$ отличается от нуля только на конечном временном интервале $(0, T)$, то усреднение по времени уравнения (5) приводит к нулевому результату. В то же время желательно иметь возможность применить эту процедуру, так как она не только приводит к упрощению уравнения Кубо, но и выделяет замкнутую систему уравнений для диагональных элементов. Некоторое преобразование уравнения (5) позволяет применить видоизмененный метод усреднения по времени.

Ряд (12) из [1] для массового оператора $\hat{M}(t, t')$ сворачивается с помощью формулы (4) в конечное выражение вида (13) из [1]:

$$\hat{M}(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} n_1(\tau) d\tau \hat{T}(t - \tau, t' - \tau). \quad (6)$$

Оператор $\hat{T}(t, t')$ определен в [1] и отличен от нуля только при таких значениях t и t' , при которых отличаются от нуля значения импульсных функций $\theta_0(t)$ и $\theta_0(t')$. Если на протяжении длительности импульса τ_0 средняя плотность $n_1(\tau)$ мало меняется, то ее можно вынести из-под знака интеграла в точке $\tau = t$, не совершая при этом большой ошибки. Подставляя получившееся выражение для массового оператора $\hat{M}(t, t')$ в (5), получаем уравнение для второго статистического момента $\hat{R}_1(t)$ в этом приближении:

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_1(t) = n_1(t) e^{-\hat{A}t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \hat{T}(t', t'') e^{-\hat{A}(t'' - t')} e^{\hat{A}t} \hat{R}_1(t). \quad (7)$$

К этому уравнению можно применить процедуру частичного усреднения по времени [6], когда усреднение проводится по быстрым осцилляциям $e^{\hat{A}t}$, а медленно меняющаяся функция $n_1(t)$ при этом полагается константой. В результате получаем усреднение по времени уравнение

$$\frac{d}{dt} \bar{\bar{R}}(t) = n_1(t) \bar{\bar{C}} \bar{\bar{R}}(t), \quad (8)$$

где

$$\bar{\bar{C}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L dt e^{-\hat{A}t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \hat{T}(t', t'') \exp[-\hat{A}(t' - t'')] e^{\hat{A}t}. \quad (9)$$

Дальнейшее выделение замкнутой системы уравнений для диагональных элементов второго статистического момента полностью повторяет ход рассуждений работы [1] и приводит к кинетическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \bar{\bar{Z}}_{jj}(t) = \sum_{k=1}^N [W_{jk}(t) \bar{\bar{Z}}_{kk}(t) - W_{kj}(t) \bar{\bar{Z}}_{jj}(t)] + \gamma_j(t) \bar{\bar{Z}}_{jj}(t). \quad (10)$$

Его коэффициенты выражаются формулами, аналогичными (24) и (26) из [1]:

$$W_{jk}(t) = n_1(t) |S_{jk}|^2, \quad \gamma_j(t) = n_1(t) [2\operatorname{Re} S_{jj} + \sum_{k=1}^N |S_{kj}|^2], \quad (11)$$

S_{jk} — амплитуда параметрического возбуждения динамической системы (1), (2) одним неслучайным импульсом $\theta_0(t)$ с центром в нулевой момент времени [1].

В случае молекулярной системы, взаимодействующей с излучением, матрица B является антиэрмитовой. Для такой системы справедливо условие унитарности (22) из [1], в силу которого все $\gamma_j(t) \equiv 0$ и выполняется закон сохранения полной вероятности:

$\sum_{j=1}^N \bar{\bar{Z}}_{jj}(t) = \text{const.}$ При этом можно показать, что величина $H(t) = -\sum_{j=1}^N \bar{\bar{Z}}_{jj}(t) \ln \bar{\bar{Z}}_{jj}(t)$ не убывает со временем (аналог H -теоремы Больцмана в статистической механике, см. [6], стр. 153). Это означает, что кинетическое уравнение (10) (при $\gamma_j(t) \equiv 0$) описывает необратимую релаксацию системы к равнораспределению, как и в случае стационарных флуктуаций $\theta(t)$ параметров системы (1), (2). Однако при нестационарных флуктуациях параметров вида (3) равнораспределение в динамической системе $\left(\bar{\bar{Z}}_{jj}(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\bar{Z}}_{kk}^{(0)}, j = 1, \dots, N \right)$ успеет установиться лишь при условии, что интервал T гораздо больше времени релаксации $\tau_r \sim 1/W_{jk}$, т. е. при условии

$$\bar{N} S^2 \gg 1, \quad (12)$$

где \bar{N} — среднее полное число импульсов, действующих на динамическую систему, $S \sim \min_{\{j, k\}} |S_{jk}|$ — мера интенсивности воздействия одного импульса на рассматриваемую систему.

Для определения условий применимости кинетического уравнения (10) с коэффициентами (11) справедливы все оценки работы [1]. Дополнительно следует оценить погрешность перехода от уравнения (5) к уравнению (7). Строгая оценка может быть получена методом, изложенным в [3]. Приведем здесь только ограничение на скорость изменения $n_1(\tau)$, вытекающее из требования малости погрешности, допускаемой при указанном переходе

$$\tau_0 \max_{\{\tau\}} |d \ln n_1(\tau)/d\tau| \ll 1. \quad (13)$$

Отметим, что если средняя плотность импульсов $n_1(\tau)$ отлична от нуля лишь на конечном временном интервале, то погрешность применения усредненного по времени уравнения (8), а следовательно, и кинетического уравнения (10) не нарастает бесконечно, как в случае стационарных флуктуаций, а ограничена сверху константой.

В заключение автор благодарит Ю. Н. Барабаненкова за постановку задачи и полезные советы и А. А. Дубкова за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Калинин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 10, 1516 (1977).
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 373 (1977).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.
5. Л. В. Шарова, Дифференциальные уравнения, 10, № 6, 1074 (1974).
6. Я. П. Терлецкий, Статистическая физика, изд. Высшая школа, М., 1973.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
24 апреля 1978 г.

УДК 621.373

ДИНАМИКА ДВУХКОНТУРНОГО ГЕНЕРАТОРА НА ЛАВИННО-ПРОЛЕТНОМ
ДИОДЕ

A. A. Новиков, B. B. Синицын, A. C. Тагер

В последние годы интенсивно обсуждаются новые представления о природе хаотических явлений в активных системах, связанные с обнаружением в фазовом пространстве динамических систем не слишком высокой размерности ($n \geq 3$) странных аттракторов — притягивающих областей, где почти все траектории неустойчивы и ведут себя очень сложно и запутанно [1, 2]. Одним из наиболее изученных примеров возникновения стохастичности является стабилизация неустойчивости квазимохроматического колебания за счет взаимодействия с затухающей субгармоникой. В работах [3, 4] этот распадный механизм стохастичности изучался на модельных примерах в предположении, что неравновесность среды проявляется только через инкремент основного колебания, а взаимодействие имеет консервативный характер.

В настоящей работе публикуются предварительные результаты численного эксперимента по исследованию аналогичных явлений в двухконтурном ГЛПД, нелинейность которого существенно неконсервативна. Интерес к этой задаче связан, в частности, с поиском удовлетворительного объяснения явления раз渲ала спектра при настройке ГЛПД — внезапного резкого уширения линии автоколебаний.

Высокочастотные процессы в ГЛПД описываются системой уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{\tau_\delta}{2} \frac{dJ_L}{dt} &= J_L \{ \Psi(E) - 1 \} + I_s, \\ S \epsilon \frac{dE}{dt} &= I - J_L, \\ C_L \frac{dU}{dt} &= I - \frac{\delta}{W} J_L - \frac{1}{T} \int_{t-\tau}^t J_L(t') dt', \\ U + ZI &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначения в (1) совпадают с [5], $Z(\omega)$ — импеданс контурной системы, обладающей двумя резонансными частотами ω_1 и $\omega_2 = \omega_1/2$, причем в области активности диода лежит только ω_1 .

Как известно, квазимохроматические колебания имеют место лишь при работе на частоте, существенно большей лавинной. В этом случае можно перейти к укороченным уравнениям для плавно меняющихся комплексных амплитуд, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \gamma a_1 + i \delta_1 a_1 + e^{i\xi} a_2^2 e^{i\Delta t} + \rho_{11} a_1 |a_1|^2 + \rho_{12} a_1 |a_2|^2, \\ \dot{a}_2 &= -\nu a_2 + i \delta_2 a_2 + a_1 a_2^* e^{-i\Delta t} + \rho_{21} a_2 |a_1|^2 + \rho_{22} a_2 |a_2|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Смысл параметров в (2) тот же, что и в работах [3, 4]. Дополнительный параметр ξ определяет соотношение активной и реактивной составляющей квадратичной нелинейности. При $\xi = \pi$ синхронное взаимодействие имеет консервативный характер, как и в [3, 4], а случай $\xi = 0$ соответствует взрывной неустойчивости. Величина ξ от параметров ГЛПД зависит слабо и сохраняется на уровне $\xi = 1,5 \div 2$. При выводе (2) использо-

вана естественная при рассмотрении квазимонохроматических процессов полиноминальная аппроксимация интегрального умножения. Кроме того, для простоты отброшено нелинейное затухание колебания ω_2 . Правомочность этого упрощения подтверждается результатами расчета, поскольку средняя интенсивность колебания ω_2 приблизительно на порядок меньше интенсивности ω_1 . Как видно из уравнений (2), в формировании процессов в ГЛПД принимают участие все основные типы нелинейных взаимодействий, как синхронные, так и несинхронные, как активные, так и реактивные. Отметим, что все известные модели распадной стохастичности [2-4] опираются на рассмотрение уравнений, являющихся частными случаями (2).

Исследование уравнений (2) при значениях параметров, характерных для реальных диодных структур и режимов ГЛПД ($\delta/W = 0,15$, $\tau_b/\tau = 0,2$, $1/C_d \omega_1 \rho = 0,1 \div 0,2$, ρ — характеристическое сопротивление контура на ω_1) проводилось с помощью численного моделирования на ЭВМ после перехода к общепринятым при исследовании взаимодействия колебаний кратных частот действительным переменным

$$X = -|a_1| \cos \Phi, \quad Y = |a_1| \sin \Phi, \quad Z = |a_2|^2,$$

где $\Phi = \arg a_1 - 2\arg a_2 + \Delta t$.

Полученные результаты свидетельствуют, что все представляющие интерес изменения структуры фазового пространства системы связаны с изменением угла пролета диода θ и эффективной расстройки контурной системы $\tilde{\Delta} = \frac{2\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} + \Delta_d$ (Δ_d — дополнительная расстройка, вносимая реактивностями диода).

Стохастический режим генерации возникает в узкой полосе $\theta \approx 2,3 \div 2,7$ в результате следующей цепочки превращений. При достаточно большой величине расстройки $\tilde{\Delta}$ реализуется одночастотный режим генерации на частоте ω_1 . В фазовом пространстве системы (т. е. в верхнем полупространстве XYZ) все траектории притягиваются к плоскости XY , на которой существует устойчивый предельный цикл в виде окружности радиуса $R = \sqrt{1 - \frac{Y}{\text{Re } \rho_{11}}}$, охватывающей неустойчивое состояние равновесия в начале координат плоскости. Скорость движения по окружности определяется нелинейной поправкой к частоте. При уменьшении расстройки одночастотный режим мягко переходит в статический двухчастотный, что соответствует переходу из нижнего полупространства в верхнее устойчивого состояния равновесия. Несколько раньше перестает существовать предельный цикл на плоскости $Z = 0$ за счет рождения на окружности пары состояний равновесия (устойчивого узла и седла). Окружность радиуса R становится при этом сепаратрисой родившегося седла. Это сопровождается скачкообразным изменением частоты генерации — взаимодействие с субгармоникой приводит к компенсации нелинейной поправки к частоте.

При дальнейшем уменьшении эффективной расстройки статический двухчастотный режим превращается в автомодуляционный. Это сопровождается потерей устойчивости состояния равновесия с $Z > 0$ и рождением устойчивого предельного цикла в верхнем полупространстве. Появившийся цикл не имеет определенной ориентации в целом. Будучи достаточно развитым, он большей своей частью прижат к плоскости $Z = 0$.

При еще меньших значениях $\tilde{\Delta}$ этот цикл разрушается и движение изображающей точки становится крайне нерегулярным. Убывающий характер корреляционной функции свидетельствует о возникновении стохастического режима. При увеличении эффективной расстройки все превращения происходят в обратном порядке.

При других значениях угла пролета, также соответствующих реальным режимам ЛПД ($\theta \approx 1 \div 4$), имеют место аналогичные бифуркации, но пространственный предельный цикл не разрушается.

Отметим, что при углах пролета $\theta \approx 2,3 \div 2,7$ реактивная кубическая нелинейность заметно преобладает над активной кубической нелинейностью. Это позволяет предположить, что в нашем случае механизм возникновения стохастичности аналогичен рассмотренному в [4].

Авторы выражают благодарность М. И. Рабиновичу за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Lorenz, J. Atm. Sci., 20, 130 (1963).
2. М. И. Рабинович, УФН, 125, № 1 (1978).
3. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 318 (1977).
4. В. И. Дубровин, В. Р. Коган, М. И. Рабинович, Физика плазмы, 4, № 5 (1978).
5. А. С. Тагер, В. М. Вальд-Перлов, Лавинно-пролетные диоды и их применение в технике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1968.

Поступила в редакцию
12 января 1979 г.