

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

<b>Костенко П. Ю., Пономарев В. И., Фалькович С. Е.</b> Оптимизация обработки радиоастрономических наблюдений при юстировке многоэлементного радиоинтерферометра . . . . .	125
<b>Елесин В. Ф., Левченко Е. Б.</b> К теории бозе-конденсации фотонов в неравновесных системах . . . . .	130
<b>Аксенов В. П., Миронов В. Л.</b> Эффект усиления обратного рассеяния в условиях сильных флуктуаций интенсивности . . . . .	141
<b>Малыцев А. А., Позументов И. Е.</b> Статистические характеристики автокомпенсатора с АРУ в цепи управления . . . . .	150
<b>Бреховских В. Л.</b> О коэффициенте отражения и тепловом излучении случайно-неоднородной среды, близкой к слоистой . . . . .	159
<b>Осташев В. Е., Татарский В. И.</b> Метод многократного рассеяния вперед в средах со случайными неоднородностями . . . . .	170
<b>Кляцкин В. И.</b> Стохастический волновой параметрический резонанс (флуктуации интенсивности волны внутри одномерной случайно-неоднородной среды) . . . . .	180
<b>Гурвич А. С., Кан В.</b> Измерения четырехточечной функции когерентности поля лазерного излучения в турбулентной атмосфере . . . . .	192
<b>Гурвич А. С., Елевов Б. С., Покасов Вл. В., Сабельфельд К. К., Татарский В. И.</b> Пространственная структура сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде . . . . .	198
<b>Апельцин В. Ф., Ильинский А. С.</b> Исследование осесимметричного рассеяния электромагнитных волн на конических телах . . . . .	208
<b>Масалов С. А., Шкиль В. М., Ярыгин А. П.</b> Дифракция волн на ленточной решетке типа «жалюзии», расположенной над идеально проводящим экраном . . . . .	217
<b>Терешин О. Н., Ювко А. Н., Чугунов М. В.</b> Синтез антennы вытекающей волны на базе полупрозрачной двумерно-периодической структуры, расположенной над рельефной импедансной подложкой . . . . .	226
<b>Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г.</b> Применение метода регуляризации при коррекции диаграммы направленности антennы, измеренной по протяженному источнику излучения . . . . .	234

### Краткие сообщения и письма в редакцию

<b>Геворкян В. Г., Кисляков А. Г., Мирзабекян Э. Г., Воронов В. Н., Лебский Ю. В.</b> Автоматический нулевой радиометр диапазона длин волн 3—4 мм . . . . .	240
<b>Петров В. В.</b> Уровень параметрически возбуждаемых поверхностных волн в электронной плазме . . . . .	242
<b>Дробежев В. И., Краснов В. М., Салихов Н. М.</b> Одновременные исследования спектрального состава волновых возмущений в D- и F-областях ионосферы . . . . .	244
<b>Крупников А. Ф.</b> О связи сдвигов от давления газа и штарковского смещения центров молекулярных линий . . . . .	247
<b>Курушин Е. П., Часовникова Т. А.</b> Распространение волн в прямоугольном волноводе с тонкой поглощающей ферритовой пленкой . . . . .	248
<b>Реутов В. П.</b> О нелинейном сдвиге частоты стационарных волн в электронном потоке . . . . .	250

УДК 523.164

## ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ЮСТИРОВКЕ МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА

*П. Ю. Костенко, В. И. Пономарев, С. Е. Фалькович*

Методом максимального правдоподобия определены статистически оптимальные алгоритмы измерения координат векторов баз многоэлементного радиоинтерферометра по опорному источнику внеземного радиоизлучения. Приводится оценка точности результатов измерения.

В настоящей работе получены оптимальные алгоритмы оценок поправок к направлениям баз многоэлементного интерферометра и соотношения для дисперсий оценок этих поправок. Предполагалось, что направления баз заранее известны с точностью до лепестка диаграммы направленности интерферометра, возможно из геодезических или других измерений, а оценивать необходимо отклонения задаваемых векторов баз от истинных, не превышающие ширину лепестка диаграммы направленности интерферометра.

Измерение направления базы с точностью до лепестка диаграммы интерферометра возможно путем приема радиоизлучения протяженного внеземного источника с известными координатами и угловым распределением интенсивности. Решение этой задачи представляет самостоятельный интерес и в данной работе не рассматривается.

На входы многоэлементного радиоинтерферометра, состоящего из набора антенн, поступают колебания

$$U_i(t) = S \left[ t - \frac{B_i}{c} \theta_i(t) \right] + n_i(t), \quad (1)$$

$$i = \overline{0, \dots, m}, \quad t \in \left( -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right),$$

которые затем передаются в один приемный пункт.

Здесь  $i$  — номер антенны радиоинтерферометра,  $B_i$  — длина вектора базы, образованного нулевой и  $i$ -й антеннами,  $c$  — скорость света,  $\theta(t)$  — обобщенный угол,  $S(t)$  — сигнал от точечного радиоисточника (координаты которого полагаются известными) на нулевой антenne, имеющей фазовый центр, совмещенный с началом координат,  $S(t)$  и шумы  $n_i(t)$ , вызванные внешними источниками (фоном) и внутренними флуктуациями в аппаратуре, будем считать независимыми стационарными нормальными случайными процессами с равномерными спектрами, ограниченными полосой пропускания приемной системы  $|f| \leq \leq (\bar{f}_0 - F, \bar{f}_0 + F)$ , с нулевыми средними значениями и функциями корреляции вида

$$\langle n_i(t_1) n_j(t_2) \rangle = N_n 2F \operatorname{sinc} 2\pi F(t_1 - t_2) \cos 2\pi f_0(t_1 - t_2) \delta_{ij},$$

$$\langle S(t_1) S(t_2) \rangle = N_s 2F \operatorname{sinc} 2\pi F(t_1 - t_2) \cos 2\pi f_0(t_1 - t_2).$$

где  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $N_s$  и  $N_n$  — спектральные плотности мощности сигнала и помехи.

В дальнейшем полагаем, что на интервале наблюдения

$$\theta(t) = \theta + \dot{\theta}t.$$

Для указанных условий в пренебрежении некоторыми второстепенными факторами [1]

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \sin \alpha_i \sin \alpha + \cos \alpha_i \cos \alpha \cos(\beta - \beta_i) - \\ &- \Omega t \cos \alpha_i \cos \alpha \sin(\beta - \beta_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\alpha$ ,  $\beta$  — склонения и прямые восхождения проекции вектора базы  $B_i$  на небесную сферу и радиоисточника соответственно;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли.

Будем считать, что заранее определены с небольшой погрешностью приближенные опорные значения  $\{\alpha_{0i}, \beta_{0i}\}$ . Тогда уравнение (3) можно линеаризовать. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= \theta(\alpha_i, \beta_i) - \theta(\alpha_{0i}, \beta_{0i}), \quad \Delta\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(\alpha_i, \beta_i) - \\ &- \dot{\theta}(\alpha_{0i}, \beta_{0i}), \quad \Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{0i}, \quad \Delta\beta_i = \beta_i - \beta_{0i}. \end{aligned}$$

Таким образом, задачу измерения погрешностей привязки фазовых центров антенн радиоинтерферометра  $\{\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i\}$  можно свести к оценке  $\{\Delta\theta_i, \Delta\dot{\theta}_i\}$  и решению системы уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= a_{11} \Delta\alpha_i + a_{12} \Delta\beta_i, \\ \Delta\dot{\theta}_i &= a_{21} \Delta\alpha_i + a_{22} \Delta\beta_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $a_{11} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_i}$ ,  $a_{12} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta_i}$ ,  $a_{21} = \frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial \alpha_i}$ ,  $a_{22} = \frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial \beta_i}$  — частные производные, вычисленные для значений  $\alpha_{0i}$ ,  $\beta_{0i}$ .

Для оценки  $\{\Delta\theta_i, \Delta\dot{\theta}_i\}$  воспользуемся методом максимального правдоподобия, обладающим известными свойствами оптимальности, в частности, минимизирующим дисперсию оценок [2].

Можно показать, что при измерении обобщенных углов  $\theta = \{\theta_i\}$  и их производных  $\dot{\theta} = \{\dot{\theta}_i\}$  функция правдоподобия параметра  $Q = (\theta, \dot{\theta})$  при обработке сигналов от радиоисточников, имеющих статистические характеристики вида (2), определяется формулой

$$\begin{aligned} W[\langle U_i(t) \rangle / Q] &= C \exp \left\{ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m M \int_{-T/2}^{T/2} U_i \left[ t + \frac{B_i}{c} (\theta_i + \dot{\theta}_i t) \right] \times \right. \\ &\times U_j \left[ t + \frac{B_j}{c} (\theta_j + \dot{\theta}_j t) \right] dt \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $M = \frac{2N_s}{N_n [N_n + (m+1)N_s]}$ ,  $C$  — не зависящий от  $Q$  коэффициент.

Оценка  $Q$ , определяемая по максимуму функции (5), асимптотически эффективна. Дисперсии оценок  $\theta_i$ ,  $\dot{\theta}_i$  при этом вычисляются как диагональные элементы матрицы, обратной информационной матрице Фишера [2]:

$$\Phi_{kl} = - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l} \ln W[\{U_i(t)\}/\lambda] \right\rangle.$$

Выполняя необходимые операции, находим выражение для элементов матрицы Фишера:

$$\begin{aligned}\Phi_{\theta_{ij}} &= -aTB_iB_j, \quad \Phi_{\dot{\theta}_{ij}} = -a\frac{T^3}{12}B_iB_j, \quad \Phi_{\theta_i \dot{\theta}_j} = 0, \\ \Phi_{\theta_{ii}} &= amTB_i^2, \quad \Phi_{\dot{\theta}_{ii}} = am\frac{T^3}{12}B_i^2, \quad a = 2M\ddot{R}_s(0)\frac{1}{c^2}, \\ \ddot{R}_s(0) &= (2\pi f_0)^2 2FN_s, \quad R_s(t_1 - t_2) = \langle S(t_1)S(t_2) \rangle.\end{aligned}\quad (6)$$

Обратную матрицу  $\Phi^{-1}$  можно найти, учитывая, что матрица  $\Phi$  — блочно-диагональная с блоками  $\Phi_\theta$  и  $\Phi_{\dot{\theta}}$ , лежащими на диагонали. Тогда матрица  $\Phi^{-1}$  также представляет собой блочно-диагональную матрицу, на диагонали которой стоят блоки  $\Phi_\theta^{-1}$  и  $\Phi_{\dot{\theta}}^{-1}$  с элементами

$$\begin{aligned}\Phi_{\theta_{ii}}^{-1} &= \frac{2}{aT(m+1)B_i^2}, \quad \Phi_{\dot{\theta}_{ii}}^{-1} = \frac{1}{aT(m+1)B_iB_j}, \\ \Phi_{\theta_{ii}}^{-1} &= \frac{24}{aT^3(m+1)B_i^2}, \quad \Phi_{\dot{\theta}_{ij}}^{-1} = \frac{12}{aT^3(m+1)B_iB_j}.\end{aligned}\quad (7)$$

Для дисперсий оценок получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta_i}^2 &= \frac{N_n[N_n + (m+1)N_s]\lambda^2}{2(m+1)T2F(2\pi B_i)^2 N_s^2}, \\ \sigma_{\dot{\theta}_i}^2 &= \frac{6N_n[N_n + (m+1)N_s]\lambda^2}{(m+1)T^32F(2\pi B_i)^2 N_s^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Предположение о том, что заранее известно значение измеряемого вектора  $\mathbf{Q}_0 = (\theta_0, \dot{\theta}_0)$ , сравнительно близкое к истинному  $\mathbf{Q}_n = (\theta_n, \dot{\theta}_n) \times \times \left( \theta_{n,i} - \theta_{0,i} \leq \frac{\lambda}{B_i}, \dot{\theta}_{n,i} - \dot{\theta}_{0,i} \leq \frac{\lambda}{QT B_i} \right)$ , позволяет использовать «следящий» алгоритм оценки  $i$ -го параметра вектора  $\mathbf{Q}$  [3]:

$$\hat{\theta}_i = \theta_{0,i} + \Phi_{\theta_{ii}}^{-1} B_i \left( \frac{\partial Y(\mathbf{Q}_0)}{\partial \theta_i} \frac{1}{B_i} + \sum_{j=0, j \neq i}^m \frac{\partial Y(\mathbf{Q}_0)}{\partial \theta_j} \frac{1}{2B_j} \right); \quad (9)$$

$$\hat{\dot{\theta}}_i = \dot{\theta}_{0,i} + \Phi_{\dot{\theta}_{ii}}^{-1} B_i \left( \frac{\partial Y(\mathbf{Q}_0)}{\partial \dot{\theta}_i} \frac{1}{B_i} + \sum_{j=0, j \neq i}^m \frac{\partial Y(\mathbf{Q}_0)}{\partial \dot{\theta}_j} \frac{1}{2B_j} \right); \quad (10)$$

$$Y(\mathbf{Q}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \int_{-T/2}^{T/2} U_i \left[ t + \frac{B_i}{c} (\theta_i + \dot{\theta}_i t) \right] U_j \left[ t + \frac{B_j}{c} (\theta_j + \dot{\theta}_j t) \right] dt. \quad (11)$$

Процедура (11) сводится к формированию суммы взаимно-корреляционных интегралов между пространственно-разнесенными колебаниями  $U_i(t)$ . Из суммы (11) можно исключить слагаемые, не зависящие от  $\theta_i, \dot{\theta}_i$  ( $i = j$ ), и одно из каждой пары одинаковых слагаемых так, что суммирование проводим для  $i = \overline{0, \dots, m}$ ,  $j > i$ .

В качестве практического примера приведем расчет дисперсий оценок поправок к направлению базы  $B_1$  пятиэлементного Станфордского радиотелескопа, ориентированной в направлении Восток—Запад [4].

Допустим, заранее известно, что база  $B_1$  находится примерно на  $37^{\circ}23'$  северной широты и имеет длину  $0,206 \cdot 10^5$  см. Эффективная площадь одной антенны  $A_{\text{эфф}} = 79$  м<sup>2</sup>. Эквивалентная температура шумов одного канала (определенного антенной), включая шумы приемника, антенны и космического фона,  $T_{\text{ш}} = 1000$  К. В качестве «опорного» используем радиоисточник ЗС273В. Длину волны примем  $\lambda = 2,8$  см. Для обеспечения энергетического отношения сигнала к шуму  $\mu = 230$  в полосе частот  $2F = 10^7$  Гц время измерения примерно  $T \approx 10^3$  с.

Тогда дисперсии оценок поправок к направлению базы с учетом, что

$$\sigma_{\frac{\alpha}{\alpha_1}}^2 = \frac{a_{22}^2 \sigma_{\frac{\alpha}{\alpha_1}}^2 + a_{12}^2 \sigma_{\frac{\beta}{\beta_1}}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}, \quad \sigma_{\frac{\beta}{\beta_1}}^2 = \frac{a_{11}^2 \sigma_{\frac{\alpha}{\alpha_1}}^2 + a_{21}^2 \sigma_{\frac{\beta}{\beta_1}}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}, \quad (12)$$

имеют следующие значения:

$$\beta - \beta_{01} = 0: \quad \sigma_{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \approx 0'',17, \quad \sigma_{\frac{\beta}{\beta_1}} \approx 0'',32; \quad \beta - \beta_{01} = \frac{\pi}{4}: \quad \sigma_{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \approx 8'',17, \\ \sigma_{\frac{\beta}{\beta_1}} \approx 0'',32.$$

## ВЫВОДЫ

1) Из выражений (8) следует, что дисперсии оценок поправок к направлению базы  $B_i$  не зависят от конфигурации элементов интерферометра, не образующих базу  $B_i$ , но зависят от числа  $m+1$ . Этот факт можно объяснить тем, что оптимальная процедура измерения требует вычисления входящих в (11) функций корреляции между всеми возможными парами принимаемых сигналов (их число равно  $\frac{m(m+1)}{2}$ ),

а оценить необходимо  $2m$  параметров (размерность вектора  $\mathbf{Q}$ ). Следовательно, имеются избыточные базы, участвующие в измерении вектора  $\mathbf{Q}$ . Использование информации, полученной на «избыточных» базах, позволяет повысить точность проводимых измерений примерно в  $\sqrt{m}$  раз.

2) Анализ приведенных результатов показывает, что измерение поправок к направлениям баз, образованных элементами интерферометра, возможно с точностью до долей лепестка диаграммы интерферометра. При этом на параметры многоэлементного интерферометра не накладываются жесткие ограничения. Вполне возможно снижение  $T_{\text{ш}}$ , расширение полосы принимаемых частот  $2F$ , времени измерения  $T$  и числа элементов интерферометра. Дальнейшее повышение точности будет ограничено средой распространения со случайно-изменяющимся от точки к точке показателем преломления, приводящей к искажениям амплитуды и фазы плоской волны в раскрывах антенн интерферометра, а также точностью, с которой известны координаты опорных радиоисточников.

3) Сравнение результатов вычисления дисперсий оцениваемых параметров в приведенном выше примере показывает, что точность оценок существенно зависит от момента проведения измерения. Прямое восхождение базы точнее измеряется в момент времени, когда  $\beta - \beta_0$  (фаза, равная разности прямых восхождений вектора базы и источника внеземного радиоизлучения в момент времени  $t = 0$ ) равно нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брайсус элл, Колвин, Д'Аддарио, Грэбенкемпер, Прайс, Томпсон, ТИИЭР, 61, № 9, 103 (1973)
- 2 Б Р Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд Сов радио, М, 1968
- 3 С Е Фалькович, Оценка параметров сигнала, изд Сов радио, М, 1970
- 4 Кунсельман, III, ТИИЭР, 61, № 9, 72 (1973)

Харьковский авиационный  
институт

Поступила в редакцию  
6 февраля 1978 г

## OPTIMIZATION OF PROCESSING RADIO ASTRONOMICAL OBSERVATIONS WHEN AJUSTING MULTIELEMENT RADIOINTERFEROMETER

P. Yu Kostenko, V. I. Ponomarjev, S E Fal'kovitch

Statistically optimal algorithms of multielement interferometer baseline coordinates are estimated by the use of the maximum likelihood method. Measurements are made on the reference cosmic radio source. The accuracy estimation of the results of measurements is given

УДК 538.56 : 530.145

## К ТЕОРИИ БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИИ ФОТОНОВ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

*B. F. Елесин, E. B. Левченко*

По аналогии с теорией неидеального бозе-газа исследованы спектр и функция распределения фотонов в полупроводниковом лазере. Показано, что когерентное взаимодействие фотонов центральной моды (конденсата) с активной средой приводит к рождению надконденсатных фотонов, которые при выполнении определенных условий образуют новые когерентные моды, и уширению линии излучения лазера.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Как отмечалось многими исследователями (см., например, [1]), лазеры выше порога генерации ведут себя подобно равновесным системам, испытывающим фазовый переход второго рода: возникновение когерентного излучения приводит к нарушению исходной симметрии системы и сопровождается критическими флуктуациями.

С микроскопической точки зрения когерентное электромагнитное поле в лазере представляет собой бозе-конденсат фотонов, взаимодействующих между собой из-за эффекта насыщения, и поле фотонов в лазере при большом превышении над порогом оказывается аналогичным газу слабо взаимодействующих бозе-частиц [2]. Эта аналогия продемонстрирована в [3] на примере полупроводникового лазера без потерь и состоит в следующем. В неидеальном бозе-газе [2] взаимодействие приводит к возникновению надконденсатных частиц, причем при малой неидеальности последние рождаются из конденсата парами. То же самое имеет место в лазере [3]. Однако физический смысл надконденсатных частиц в обоих случаях оказывается совершенно различным. В теории Боголюбова они существуют виртуально и соответствуют нулевым флуктуациям в неидеальном бозе-газе, в то время как в лазере надконденсатные частицы реальны. В лазере без потерь вылетевшие из конденсата фотоны образуют новые лазерные моды (т. е. новые конденсаты), причем последние возникают парами на равном удалении от центральной моды. Состояние с одним конденсатом неустойчиво. Самый процесс рождения фотонов в лазере без потерь имеет вид параметрического процесса, соответствующего преобразованию двух фотонов конденсата в два надконденсатных фотона.

В [3] пренебрегалось потерями в лазере, которые, однако, всегда существуют и могут привести к подавлению неустойчивости и стабилизировать функцию распределения фотонов.

В настоящей работе исследуется более реалистическая модель полупроводникового генератора (ПКГ) сильного поля, в которой учтено затухание фотонов в резонаторе, и действует источник накачки. Показано, что спектр и функция распределения фотонов существенно зависят от режима работы лазера. Рассмотрены предельные случаи высокой и низкой добротности ПКГ [4]. В первом случае, как и в [3], существенную роль играет процесс рождения пар из конденсата. Отличие от

лазера без потерь состоит в том, что затухание фотонов затрудняет развитие параметрической неустойчивости, и при достаточно малом времени жизни фотона в резонаторе  $\tau_0$  состояние с одним конденсатом устойчиво, т. е. возможна одномодовая генерация ПКГ. В каждой моде резонатора имеется конечное число фотонов, как и в [2], причем фотоны в модах, близких к конденсатной, появляются только вследствие рождения пар из конденсата, а для удаленных мод существенно также и обычное рекомбинационное излучение. При увеличении  $\tau_0$  число надконденсатных фотонов растет, а при некотором значении времени жизни их число обращается в бесконечность одновременно в двух модах резонатора, расположенных симметрично относительно конденсата на расстоянии порядка  $2\lambda$  ( $\lambda = d_{12} E$ ,  $E$  — напряженность электрического поля конденсата,  $d_{12}$  — дипольный момент межзонных переходов). В этих модах образуются новые конденсаты и развивается такой же параметрический процесс, как и в лазере без потерь (рождение из конденсата новых когерентных мод). Число фотонов во вновь возникающих модах стабилизируется вследствие насыщения активной среды.

В работе рассмотрена теория простого спектра-анализатора и показано, что вылетевшие из конденсата фотоны могут быть зарегистрированы и дают вклад в полную выходную мощность излучения ПКГ, т. е. являются реальными частицами. Анализ работы спектра-анализатора позволяет также связать спектр возбуждений с частотным распределением фотонов в излучении лазера. Показано, в частности, что из-за появления двух ветвей в спектре фотонов в ПКГ в режиме высокой добротности возможно образование тонкой структуры в линиях излучения.

В противоположном предельно случае низкой добротности процесс рождения пар фотонов из конденсата не существует, но когерентное взаимодействие фотонов в лазере приводит, тем не менее, к уширению конденсатной моды. Этот эффект невелик, но имеется существенное отличие этого уширения от уширения, обусловленного флуктуациями в системе, а именно: при увеличении объема системы последнее становится сколь угодно малым, тогда как уширение, связанное с когерентным характером взаимодействия фотонов, не исчезает при увеличении объема лазера и, в этом смысле, определяет максимальную степень когерентности излучения полупроводникового лазера.

Хотя в работе рассмотрена модель ПКГ, но полученные результаты качественно справедливы для любых типов лазеров.

## 2. ГАМИЛЬТОНИАН ЗАДАЧИ. ЭЛЕКТРОННЫЕ ГРИНОВСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим следующую модель ПКГ. Электроны и дырки в полупроводнике взаимодействуют с электромагнитным полем и фотонами. Полупроводник будем рассматривать в приближении двух симметричных зон при нулевой температуре. Считаем, что электроны линейно поляризованы, а их волновые векторы параллельны оси резонатора. Потери фотонов учтем, введя поглощение на донорном, примесном уровне. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \sum_p \left( \frac{E_g}{2} + \frac{p^2}{2m} \right) (a_{1p}^+ a_{1p} - a_{2p}^+ a_{2p}) + \sum_k \omega_k^0 c_k^+ c_k + H_{e-ph} + \\ + \sum_{pk} \{ M_k (a_{1p}^+ a_{2p-k} + a_{2p+k}^+ a_{1p}) + m_k (a_{1p}^+ a_i + a_i^+ a_{1p}) \} (c_k + c_{-k}^+), \quad (1)$$

где  $H_{e-ph}$  — гамильтониан электрон-фотонного взаимодействия. Здесь  $E_g$  — ширина запрещенной зоны полупроводника,  $m_e = m_h = m$  — масса

электрона и дырки,  $a_{1p}^+$ ,  $a_{2p}^+$ ,  $a_i^+$  — операторы рождения электрона в зоне проводимости, в валентной зоне и на примесном уровне соответственно,  $c_k^+$  — оператор рождения фотона. Матричные элементы

$$M_k = (2\pi\omega_k^0 / V)^{1/2} \mathbf{e} \mathbf{d}_{12}, \quad m_k = (2\pi\omega_k^0 / V)^{1/2} \mathbf{e} \mathbf{d}_{12},$$

где  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации фотонов,  $\mathbf{d}$  — матричный элемент переходов будем считать вещественным и не зависящим от  $k$ . Далее для краткости положим  $V = 1$ .

Преобразованием сдвига Боголюбова [2]

$$c_k \rightarrow \sqrt{N_{k_0}} e^{-i\Omega t} \delta_{k, k_0} + c_k \quad (\sqrt{N_{k_0}} = \overline{c_{k_0}})$$

выделим в (1) фотоны, находящиеся в бозе-конденсате, в состоянии с импульсом  $k_0$  и частотой  $\Omega$ , причем будем считать, что для конденсатных фотонов выполнено условие сильного поля [8]  $\lambda\tau \gg 1$  ( $1/\tau$  — вероятность рекомбинации электрона или рассеяния его на фотоне), а число фотонов в остальных модах мало.

Если опустить в гамильтониане «антирезонансные» члены, то унитарным преобразованием [5] можно убрать явную зависимость от времени, после чего получим

$$H = H_0 + H_{\text{int}} + H_{e-\text{ph}},$$

$$H_0 = \sum_p \{ \xi_p (a_{1p}^+ a_{1p} - a_{2p}^+ a_{2p}) + \lambda (a_{1p}^+ a_{2p-k_0} + a_{2p-k_0}^+ a_{1p}) \} + \sum_k \Omega_k c_k^+ c_k, \\ H_{\text{int}} = \sum_{pk} \{ M_k a_{1p}^+ a_{2p-k} c_k + m_k a_{1p}^+ a_i c_k + \text{э. с.} \}, \\ \xi_p = (p^2 - p_0^2)/2m, \quad p_0^2 = m(\Omega - E_g), \quad \omega_k^0 = ck, \quad \Omega_k = \omega_k^0 - \Omega.$$
(2)

При использовании гамильтониана (2) для конденсатных фотонов следует использовать уравнение Maxwella

$$i \frac{\partial \overline{c_{k_0}}}{\partial t} = \Omega_{k_0} \overline{c_{k_0}} + \sum_p \{ M_{k_0} \overline{a_{2p-k_0}^+ a_{1p}} + m_{k_0} \overline{a_i^+ a_{1p}} \} = 0. \quad (3)$$

Действительная часть этого уравнения определяет сдвиг частоты конденсатной моды

$$\Omega_{k_0} \overline{c_{k_0}} = \sum_p \{ M_{k_0} u_p v_p (1 - 2n_p) - \text{Re } m_{k_0} \overline{a_i^+ a_{1p}} \}. \quad (4)$$

Здесь введена функция распределения квазичастиц [8]:

$$n_p = \overline{a_{1p}^+ a_{1p}} = \overline{a_{2p}^+ a_{2p}},$$

$$a_{1p} = u_p a_{1p} + v_p a_{2p-k_0}, \quad a_{2p} = u_p a_{2p-k_0} - v_p a_{1p}, \quad (5)$$

$$u_p^2, v_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\xi_p + \xi_{p-k_0}}{[(\xi_p + \xi_{p-k_0})^2 + 4\lambda^2]^{1/2}} \right),$$

$$\epsilon_{1,2p} = \frac{1}{2} (\xi_p - \xi_{p-k_0} \pm \sqrt{(\xi_p + \xi_{p-k_0})^2 + 4\lambda^2}),$$

где  $\epsilon_{1,2p}$  — энергия квазичастиц. В правой части (4) опущен вклад от надконденсатных мод, поскольку число фотонов в этих модах пред-

полагается малым, и удержаны члены только нулевого порядка по малой константе электрон-фононного взаимодействия.

Мнимальная часть (3) устанавливает равенство усиления и поглощения электромагнитного поля конденсата и может быть приведена к виду [4]

$$\frac{N_k}{\tau_0} = \sum_p \frac{\xi}{\epsilon} \left( \frac{\partial n_p}{\partial t} \right)_{st}, \quad \frac{1}{\tau_0} = 2 \operatorname{Im} \sum_p \overline{a_i^+ a_{1p}}, \quad (6)$$

где  $(\partial n_p / \partial t)_{st}$  — интеграл столкновений квазичастиц с фононами. Решая (4), (6) совместно с кинетическим уравнением

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = \left( \frac{\partial n_p}{\partial t} \right)_{st} + (1 - n_p) J_p, \quad (7)$$

где  $J_p$  — ток накачки, можно найти  $\lambda$ ,  $n_p$ ,  $\Omega$  и вычислить электронные гриновские функции нулевого приближения, нормированные на функцию распределения квазичастиц  $n_p$  [6]. Анализ системы уравнений (6), (7) в стационарном случае приведен в работе [4], где показано, что имеются два предельных режима работы ПКГ. При выполнении условия высокой добротности

$$\tau_0 \gg r \tau_{ph}, \quad r = d_{12}^2 m \Omega / 2\pi s, \quad (8)$$

где  $\tau_{ph}$  — время электрон-фононных столкновений,  $s$  — скорость звука, величина поля близка к максимально возможному значению  $\lambda = \omega_D / 2$  ( $\omega_D$  — дебаевская частота), а функция распределения имеет вид фермиевской ступеньки. При обратном знаке неравенства в (8) реализуется режим низкой добротности. В этом случае поле не превышает величины  $\lambda = \pi \omega_D r \tau_0 / 2\tau_{ph}$ , а функция распределения квазичастиц имеет вид

$$n(x) = \begin{cases} u^2(x) & \left( x \leqslant \frac{\lambda}{\omega_D} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x - a}{[(x - a)^2 + c^2]^{1/2}} \right) & \left( x > \frac{\lambda}{\omega_D} \right) \end{cases}, \quad (9)$$

$$a = \int_0^1 dx n(x), \quad x = \frac{\xi}{\omega_D}, \quad c \sim \sqrt{\frac{\lambda}{\omega_D}} \ll 1.$$

Ниже показано, что, помимо  $n_p$  и  $\lambda$ , в предельных случаях высокой и низкой добротности существенно отличаются также и когерентные свойства электромагнитного излучения ПКГ.

### 3. СПЕКТР ВОЗБУЖДЕНИЙ И ЗАТУХАНИЕ ФОТОНОВ В ЛАЗЕРЕ

Электромагнитное поле в однородной системе, возникающее в результате малого возмущения, выражается, как известно, линейно через запаздывающую функцию Грина

$$D^R(k\omega) = -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} (\overline{c_k(t) c_k^+(0)} - \overline{c_k^+(0) c_k(t)}), \quad (10)$$

причем полюсы  $D^R$  как функции комплексного переменного  $\omega$  определяют спектр и затухание собственных колебаний поля в системе. В следующем параграфе будет показано, что спектр фотонов, определенный таким образом, оказывается тесно связанным со спектральным

составом излучения лазера. При наличии конденсата фотонов в лазере кроме  $D^R$  отлична от нуля также аномальная функция  $\hat{D}^R$  [3]:

$$\hat{D}^R(\mathbf{k}, \omega) = -i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \overline{(c_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}^+(t) c_\mathbf{k}^+(0) - c_\mathbf{k}^+(0) c_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}^+(t))}. \quad (11)$$

Систему уравнений для определения  $D^R$  и  $\hat{D}^R$  в лазере наиболее просто получить методом Келдыша [7]. По виду она совпадает с уравнениями Беляева в теории неидеального бозе-газа [8]:

$$[\omega - \Omega_\mathbf{k} - \sum_{11}^R(\mathbf{k}, \omega)] D^R(\mathbf{k}, \omega) - \sum_{02}^R(\mathbf{k}, \omega) \hat{D}^R(\mathbf{k}, \omega) = 1, \quad (12)$$

$$[\omega + \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + \sum_{22}^R(\mathbf{k}, \omega)] \hat{D}^R(\mathbf{k}, \omega) + \sum_{20}^R(\mathbf{k}, \omega) D^R(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Аналогичные уравнения получены в [3] для фотонов в лазере без потерь. Как и в [3], при вычислении собственно энергетических частей оставим только петли на нулевых функциях Грина электронов, нормированных на функцию распределения квазичастиц [6]. В результате получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sum_{11}^R(\mathbf{k}, \omega) = & \sum_{pp'} M_k^2 \delta(p - p' + \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \left\{ u_p^2 \bar{u}_{p'}^2, \frac{1 - n_p - n_{p'}}{\omega - \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p'} + i0} - \right. \\ & - v_p^2 \bar{v}_{p'}^2, \frac{1 - n_p - n_{p'}}{\omega - \varepsilon_{2p} + \varepsilon_{1p'} + i0} + u_p^2 \bar{v}_{p'}^2, \frac{n_{p'} - n_p}{\omega - \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1p'} + i0} + \\ & + v_p^2 \bar{u}_{p'}^2, \frac{n_p - n_{p'}}{\omega - \varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2p'} + i0} \Big\} + \sum_p m_k^2 \left\{ u_p^2 \frac{1 - n_p}{\omega + \varepsilon_l - \varepsilon_{1p} + i0} + \right. \\ & \left. + v_p^2 \frac{n_p}{\omega + \varepsilon_l - \varepsilon_{2p} + i0} \right\} = \sum_{22}^{R*}(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, -\omega) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (13)$$

Как и должно быть, все собственно энергетические части зависят от частоты в комбинации  $\omega + i0$ .

Спектр возбуждений находится из уравнения

$$(\omega - \Omega_\mathbf{k} - \sum_{11}^R)(\omega + \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + \sum_{22}^R) + \sum_{02}^{R2} = 0, \quad (14)$$

причем необходимо воспользоваться соотношением (3), которое с учетом (13) преобразуется к виду

$$\Omega_{\mathbf{k}_0} = \operatorname{Re} (\sum_{11}^R(\mathbf{k}_0, 0) - \sum_{02}^R(\mathbf{k}_0, 0)). \quad (3a)$$

Это равенство, аналогичное теореме Пайнса—Гугенольца в теории бозе-газа, получено в [3] в случае лазера без потерь.

Найдем спектр фотонов в случае высокой добротности ПКГ. Для этого исключим интегралы, в которых существенны большие значения  $\xi$ , с помощью (3), а в оставшихся, быстро сходящихся интегралах, можно положить  $n_p = 1$ . Решая уравнение (14) в случае  $|\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^0| \ll \lambda$  и пренебрегая малыми членами  $\omega/\Omega$ ,  $v_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|/\lambda$ ,  $(M^2 p_0 m / \Omega) \ln(2 \varepsilon_F / \lambda)$ , получим выражение для спектра

$$\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^{(1, 2)} = \left( \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^0 - \frac{i}{2\tau_0} \pm \sqrt{-b^2 \left( \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^0 - \frac{i}{2\tau_0} \right)^2} \right) (1 + b^2)^{-1},$$

$$b = \frac{M^2 p_0 m}{2\pi^2}, \quad \frac{1}{\tau_0} = 2\pi \sum_p m_{k_0}^2 \delta(\varepsilon_i - \xi_p), \quad \varepsilon_i = E_i + \frac{1}{2} \Omega, \quad (15)$$

где  $E_i$  — энергия донорного уровня. При  $\tau_0 \rightarrow \infty$  спектр (15) совпадает со спектром лазера без потерь [3] и неустойчив для всех  $k$ . При конечных  $\tau_0$  растет со временем число фотонов только в модах, удовлетворяющих неравенству

$$b |\omega_{k-k_0}^0| > \frac{1}{2\tau_0}. \quad (16)$$

В этих модах возникают новые конденсаты, число фотонов в которых стабилизируется эффектом насыщения. Поскольку неравенство (16) выполняется или не выполняется одновременно для мод, расположенных симметрично относительно конденсата, то новые конденсаты будут возникать парами. Можно показать, что для достаточно малых  $\tau_0$  устойчивы все моды резонатора, а при увеличении времени жизни первыми возникают два когерентных конденсата в модах, для которых  $\omega_{k-k_0}^0 = \pm 2\lambda$ .

Физическая причина появления новых конденсатов в режиме высокой добротности ПКГ та же, что и в лазере без потерь, а именно: параметрический процесс, при котором два фотона конденсата преобразуются в два надконденсатных фотона с суммарным импульсом  $2k_0$ .

В режиме низкой добротности в быстро сходящиеся интегралы достаточно подставить функцию распределения квазичастиц (9) в виде  $n_p = u_p^2$ . Вычисление показывает, что с точностью до  $\lambda^2/\omega_D^2$  в этом случае  $\sum_{20}^R \equiv 0$ . Для  $|\omega_{k-k_0}^0| \ll 2\lambda$ ,  $b \ll 1$  спектр возбуждений имеет вид

$$\omega_{k-k_0} = \left( \omega_{k-k_0}^0 - \frac{i}{2\tau_0} \right) \left( 1 - \frac{\pi b}{2} \right)^{-1},$$

т. е. неустойчивость в спектре отсутствует. Взаимодействие фотонов со средой приводит к перенормировке скорости света и появлению затухания.

#### 4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТОНОВ В ИЗЛУЧЕНИИ ЛАЗЕРА

Следуя [7], для описания статистического распределения фотонов в лазере введем функции

$$D^+ (\mathbf{k}, \omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \bar{T}_c c_{\mathbf{k}}^+(t_+) c_{\mathbf{k}}^-(t_-), \quad (17)$$

$$\hat{D}^+ (\mathbf{k}, \omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \bar{T}_c c_{2k_0-k}^+(t_+) c_{\mathbf{k}}^-(t_-),$$

где  $T_c$  означает упорядочение вдоль контура  $c$ , проходящего времененную ось из  $-\infty$  в  $+\infty$  ( $t_+$ ), а затем обратно ( $t_-$ ). Функции (17) удовлетворяют следующей системе уравнений.

$$(\omega - \Omega_k - \sum_{11}^R) D^+ - \sum_{20}^R \hat{D}^+ = \sum_{11}^+ D^A + \sum_{20}^+ \hat{D}^A, \quad (18)$$

$$(\omega + \Omega_{2k_0-k} + \sum_{22}^R) \hat{D}^+ + \sum_{02}^R D^+ = -\sum_{20}^R D^A - \sum_{22}^+ \hat{D}^A,$$

где  $D^A* = D^R$ ,  $\hat{D}^A* = \hat{D}^R$ , и удовлетворяет системе (12). При принятых предположениях относительно электронных гриновских функций для входящих в (18) частей собственной энергии можно получить выражения типа

$$\begin{aligned} \sum_{11}^+ (\mathbf{k}, \omega) = & -2\pi i \sum_{pp'} M_k^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) [u_p^2 u_{p'}^2 n_p n_{p'} \delta(\omega - \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p'}) + \\ & + v_p^2 v_{p'}^2 (1 - n_p)(1 - n_{p'}) \delta(\omega - \varepsilon_{2p} + \varepsilon_{1p'}) + u_p^2 v_{p'}^2 n_p (1 - n_{p'}) \times \\ & \times \delta(\omega - \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{1p'}) + v_p^2 u_{p'}^2 (1 - n_p) n_{p'} \delta(\omega - \varepsilon_{2p} + \varepsilon_{2p'})] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (19)$$

Решая (18) с помощью запаздывающих функций Грина, удовлетвроящих системе (12), получим выражение

$$D^+ = \sum_{11}^+ D^R D^A + \sum_{20}^+ (D^R \hat{D}^A + \hat{D}^R D^A) + \sum_{22}^+ D^R \hat{D}^A. \quad (20)$$

Функция распределения «голых» фотонов получается отсюда интегрированием по частоте,

$$N_{\mathbf{k}} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} D^+ (\mathbf{k}, \omega), \quad (21)$$

и отлична от нуля, вообще говоря, для любых значений  $\mathbf{k}$ . Причиной возникновения надконденсатных фотонов является как обычное рекомбинационное излучение, так и когерентное взаимодействие поля конденсата с полупроводником.

Исследуем подробнее вопрос о частотном распределении надконденсатных фотонов в излучении ПКГ. В нашей модели выход фотонов из резонатора осуществляется через донорный уровень, а именно: при поглощении фотона электрон с примеси переходит в верх зоны проводимости. Поскольку при таком переходе энергия сохраняется, то фотоны с разными частотами будут рождать электроны в разных местах зоны. Изучая теперь распределение электронов в зоне проводимости, можно восстановить картину распределения фотонов в излучении лазера. В частности, появление электронов с энергиями, соответствующими поглощенным фотонам с частотой, отличной от  $\Omega$ , означало бы наличие в излучении ПКГ надконденсатных фотонов. Ширина распределения электронов совпадает с шириной линии излучения. Спектр-анализатор подобного типа рассмотрен в [9].

Если пренебречь истощением донора и считать, что верх зоны проводимости пуст, то для скорости изменения функции распределения  $f_p$  электронов можно получить следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_p = m_{k_0}^2 N_{k_0} \delta(\xi_p - \varepsilon_i) + i \sum_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}^2 D^+(\mathbf{k}, \xi_p - \varepsilon_i). \quad (22)$$

Функция  $D^+(\mathbf{k}, \omega)$  для любых  $\mathbf{k}$  имеет особенность при  $\omega = 0$ , так как  $\sum_{11}^+(\mathbf{k}, 0) = \sum_{02}^+(\mathbf{k}, 0) = \sum_{22}^+(\mathbf{k}, 0) = \infty$  (числитель (20) в нуле конечен), и быстро убывает при  $|\omega| > v_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ . Соответственно, функция распределения электронов (22) обнаружит размытие конденсатной моды.

Вычисляя сумму по  $\mathbf{k}$  в (22) в режиме низкой добротности, получаем при  $|\omega| \ll \Delta\omega = v_0/2c\tau_0$ ,  $\omega = \xi_p - \varepsilon_i$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_p = m_{k_0}^2 N_{k_0} \delta(\omega) + m_{k_0}^2 \lambda \frac{M^2 p_0 m}{4\pi} \frac{\tau_0^2}{v_0} \left[ 2 + \ln \left( \frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \right]^2.$$

Второе слагаемое описывает уширение линии излучения лазера вследствие когерентного взаимодействия фотонов и исчезает при  $\lambda = 0$ . Это уширение отличается от уширения, обусловленного флуктуациями, зависимостью от объема системы. Действительно, последнее обращается в нуль при увеличении объема, в то время как  $\Delta\omega$  от объема вообще не зависит и остается конечным при сколь угодно большом объеме лазера. В этом смысле  $\Delta\omega$  определяет предельную степень когерентности излучения ПКГ.

Вклад в функцию распределения фотонов (21), происходящий от области частот  $|\omega| < v_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ , в случае высокой добротности обратно пропорционален химическому потенциалу квазичастиц и поэтому мал, а в случае низкой добротности ПКГ дается выражением

$$N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^* = \frac{M^2 p_0 m}{16\pi} \frac{\lambda}{\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^{02} + (2\tau_0)^{-2}}.$$

Функция  $N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^*$  описывает фотоны, появившиеся вследствие когерентного взаимодействия конденсата с полупроводником, и исчезает при  $\lambda = 0$ . При  $\tau_0 = \infty$   $N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^*$  становится сингулярной при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$  аналогично функции распределения надконденсатных частиц в [2]. Однако фотоны, соответствующие  $N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}^*$ , регистрируются спектром-анализатором и дают вклад в полную выходную мощность излучения лазера, что означает, что они реальны в противоположность виртуальным надконденсатным частицам в теории Боголюбова [2].

При  $|\omega| > v_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$  функция  $D^+(\mathbf{k}, \omega)$  при фиксированном  $\mathbf{k}$  имеет максимум в точке  $\omega = \tilde{\omega}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$ , определяемой решением уравнения

$$\operatorname{Re} [(\omega - \Omega_{\mathbf{k}} - \Sigma_{11}^R) (\omega + \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + \Sigma_{22}^R) + \Sigma_{02}^{R2}] = 0, \quad (23)$$

и быстро убывает при  $|\omega - \tilde{\omega}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}| > \gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$ , где

$$\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} = \operatorname{Im} [(\omega - \Omega_{\mathbf{k}} - \Sigma_{11}^R) (\omega + \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + \Sigma_{22}^R) + \Sigma_{02}^{R2}] \Big|_{\omega=\tilde{\omega}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}}. \quad (24)$$

Отметим, что в случае  $\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} \rightarrow 0$  решения (23) и (14) совпадают, это означает, что фотоны в излучении ПКГ имеют частоты, равные собственным частотам колебаний электромагнитного поля в лазере.

Если расстояние между модами резонатора удовлетворяет неравенству

$$c \Delta k \gg \frac{1}{2\tau_0}, \quad (25)$$

то электромагнитное поле в ПКГ может рассматриваться как совокупность фотонов с законом дисперсии  $\omega = \tilde{\omega}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$  и затуханием  $\gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$ . Функция распределения электронов (22) зафиксирована в этом случае ряд слабо перекрывающихся линий, ширина  $\Delta\xi(k)$  и положение максимума  $\xi(k)$  которых определяются соотношениями

$$\Delta\xi(k) = \gamma_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}, \quad \xi(k) = \tilde{\omega}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0} + \varepsilon_i.$$

При противоположном знаке неравенства в (25) линии, соответствующие отдельным фотонам, замажутся и образуют сплошной фон, на котором будет выделяться только конденсатная мода.

В интервале частот  $v_0 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| < |\omega| < 2\lambda$  вместо (20) имеем

$$D^+ = \sum_{22}^+ \hat{D}^R \hat{D}^A. \quad (26)$$

Фотоны, соответствующие (26), возникают вследствие когерентного процесса рождения пар фотонов из конденсата (эффект «выдавливания» [2, 3]) и отсутствуют, если  $\sum_{20}^R = 0$ . Последнее согласуется с утверждением [10] о невозможности спонтанного излучения полупроводником в состоянии насыщения фотонов с указанными частотами.

Фотоны с частотами  $|\omega| > 2\lambda$  появляются как вследствие «выдавливания» фотонов из конденсата, так и за счет обычного механизма спонтанного излучения.

Считая условие (25) выполненным, рассмотрим подробнее структуру одной моды  $|\omega_{k-k_0}^0| \ll 2\lambda$  в случае высокой добротности ПКГ. Разлагая все величины в (26) по  $|\omega/2\lambda| \ll 1$ , получим

$$D^+ = - \frac{\tau_0^{-1} |\sum_{20}^R(k_0, 0)|^2}{[(\omega - \omega_{k-k_0}^0)^2 + b\omega^2 - (2\tau_0)^{-2}]^2 + [(\omega - \omega_{k-k_0}^0)/2\tau_0]^2}. \quad (27)$$

Хотя множитель  $1/\tau_0$  перед этим выражением численно совпадает с затуханием фотона на примеси, но закон сохранения в  $\sum_{22}^+(k \omega) \approx 1/\tau_0$  указывает, что происходит процесс рождения надконденсатного фотона с одновременным поглощением двух фотонов из конденсата.

Если  $b \gg 1$ , то в частотной зависимости  $D^+(k \omega)$  имеются две узкие линии для каждого значения  $k$  на частотах  $\tilde{\omega}_{k-k_0}^{(1)}$  и  $\tilde{\omega}_{k-k_0}^{(2)}$ , с соответствующими ширинами  $\gamma_{k-k_0}^{(1,2)}$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{k-k_0}^{(1,2)} &= [\omega_{k-k_0}^0 \pm \sqrt{(1+b^2)(2\tau_0)^{-2} - b^2 \omega_{k-k_0}^{02}}] (1+b^2)^{-1}, \\ \gamma_{k-k_0}^{(1,2)} &= \frac{1}{4\tau_0(1+b^2)} \left( 1 \mp \frac{b^2 \omega_{k-k_0}^0}{\sqrt{(1+b^2)(2\tau_0)^{-2} - b^2 \omega_{k-k_0}^{02}}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В силу (22) такие же линии будут наблюдаться на функции распределения электронов в зоне проводимости. Для мод  $\omega_{k-k_0}^0 = \pm 1/(2\tau_0)$ , лежащих на границе устойчивости (см. (16)),  $\gamma_{k-k_0}^{(1)} = 0$ , а число фотонов в этих модах, как и должно быть, обращается в бесконечность.

В противоположном случае  $b < 1$  обе линии сливаются в одну с шириной  $\gamma_{k-k_0} = 1/[2\tau_0(1+b^2)]$ . Число фотонов в модах, лежащих на границе устойчивости, в этом случае также бесконечно.

В режиме низкой добротности ПКГ  $\sum_{20}^R = 0$  и надконденсатные фотоны в излучении с частотами  $|\omega| < 2\lambda$  отсутствуют, а в случае  $|\omega| > 2\lambda$  рождаются в результате спонтанных переходов квазичастиц.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы особенности бозе-конденсации неравновесных фотонов в лазерах. Наиболее существенная из них — это реальность «выдавленных» из конденсата фотонов. В том, что это является следствием неравновесности системы, а не спецификой фотонного газа, можно убедиться, рассмотрев равновесную бозе-конденсацию фотонов — «сверхизлучательный» фазовый переход [11–13]. Можно показать, что в этом случае спектр фотонов устойчив, имеются «выдавленные» фотоны, но, что существенно, эти последние нельзя зарегистрировать спектром-анализатором, т. е. они виртуальны.

Можно показать также, что учет дисперсии показателя преломления полупроводника приводит лишь к несущественным перенормировкам в спектре возбуждений фотонов (15), несколько уменьшая инкремент неустойчивости. Остальные результаты тоже качественно не изменяются.

В работе показано, что новые когерентные моды в ПКГ возникают на равном удалении от центральной моды, что вполне соответствует реальной экспериментальной ситуации [14]. Воспользовавшись неравенством (16), можно оценить номер моды резонатора  $m_0$  (по отношению к конденсату), в которой возникает новая когерентная линия излучения. Для InAs  $m_0 \sim 100$ , для InSb  $m_0 \sim 2$ , для GaAs  $m_0 \sim 0,01$ , откуда видно, что в арсениде галлия одномодовая генерация в режиме высокой добротности может оказаться неустойчивой.

Важным результатом работы является вывод о возможности уширения линии излучения ПКГ, связанного с когерентным характером взаимодействия фотонов конденсата с полупроводником. Хотя размытие конденсата само по себе невелико, но число фотонов, дающих вклад в уширение, может быть довольно значительным. Так, в случае (25) оценка дает в режиме низкой добротности

$$N^* = \sum_k N_{k-k_0}^* \sim \frac{\Omega}{\tau_0 (c \Delta k)^2}.$$

В противоположном случае имеем  $N^* \sim \Omega \tau_0 \gg 1$ .

В данной работе кулоновское взаимодействие электронов явно не рассматривалось. Это оправдано, поскольку исследовался случай высокой плотности экситонов. Противоположный предельный случай малой плотности экситонов может быть рассмотрен аналогично, если воспользоваться методом работы [15]. Выражение для спектра в этом случае с точностью до перенормировки скорости света и изменения параметра  $b$  совпадает с (15). Остальные результаты качественно также не изменяются. Отметим, что бозе-конденсация экситонов и фотонов изучалась в [16]. В этой работе получен спектр возбуждений, качественно согласующийся с (15) (при  $\tau_0 = \infty$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Haken, Rev. Mod. Phys., 41, 67 (1975).
2. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, серия физическая, 2, 77 (1947).
3. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ, 72, 334 (1977).
4. В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, ЖЭТФ, 68, 216 (1975).
5. В. М. Галицкий, С. Н. Грэславский, В. Ф. Елесин, ЖЭТФ, 57, 207 (1969).
6. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ, 59, 602 (1970).
7. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1515 (1964).
8. С. Т. Беляев, ЖЭТФ, 34, 417 (1958).
9. M. Scully and W. E. Lamb, Phys. Rev., 166, 246 (1968).
10. А. С. Александров, В. Ф. Елесин, ЖЭТФ, 5, 615 (1971).
11. В. Ф. Елесин, ФТТ, 18, 2462 (1975).
12. В. Н. Емельянов, Ю. Л. Климонтович, Квантовая электроника, 3, 848 (1976).
13. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, Письма в ЖЭТФ, 24, 78 (1976).
14. И. А. Анисимов, Л. Н. Курбатов, ФТП, 2, 1181 (1968).
15. В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ, 68, 1447 (1972).
16. С. А. Москаленко и др., ЖЭТФ, 64, 1786 (1973).

**TO THE THEORY OF PHOTON BOSE-CONDENSATION  
IN NON-EQUILIBRIUM SYSTEMS**

*V. F. Elesin, E. B. Levchenko*

By analogy with the imperfect Bose gas theory the photon spectrum and distribution function in a semi-conductor laser has been investigated. It is shown that the photon coherent interaction of the central mode (condensate) with an active medium results in the birth of the above-condensate photons which form new coherent modes when the definite conditions are satisfied and to broadening of the laser radiation line

---

УДК 538.574.4

## ЭФФЕКТ УСИЛЕНИЯ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

*В. П. Аксенов, В. Л. Миронов*

Теоретически исследуется эффект усиления обратного рассеяния оптической волны на зеркальном диске в турбулентной атмосфере. Рассмотрение проведено для случая сильных флуктуаций интенсивности. Асимптотический анализ средней интенсивности поля показывает, что эффект усиления обратного рассеяния проявляется лишь в том случае, когда увеличением угловой расходимости падающей оптической волны под действием турбулентных неоднородностей можно пренебречь. При выполнении этого условия эффект усиления наблюдается независимо от ширины диаграммы рассеяния отражающего диска. Приведены асимптотические формулы, позволяющие количественно оценить величину фактора эффективности обратного рассеяния.

Известно [1, 2], что при рассеянии оптических волн на телах, помещенных в случайно-неоднородную среду, происходит угловое перераспределение средней интенсивности рассеянной волны. При этом поток энергии, отраженной строго назад, увеличивается (эффект усиления обратного рассеяния) за счет энергии, рассеянной в боковых направлениях. В [3] это явление было исследовано экспериментально в условиях слабых флуктуаций интенсивности.

В работе [1] эффект усиления рассматривался в случае, когда одновременно ширина диаграммы излучения передатчика и ширина диаграммы рассеяния объекта, на котором происходит дифракция падающей волны, значительно превышают величину уширения этих диаграмм за счет случайно-неоднородной среды. Полученные при этом формулы содержат в общем случае функции корреляции флуктуаций интенсивности волн с различной угловой расходимостью. При этом, как отмечалось в [1], расчет фактора усиления представляет собой весьма сложную задачу о вычислении корреляции интенсивностей двух разных волн. Исследование таких корреляционных функций проводилось только в условиях слабых флуктуаций интенсивности [4].

В настоящей работе получены количественные оценки величины усиления обратного рассеяния для практически интересного случая отражения лазерного пучка с произвольной угловой расходимостью от круглого плоского зеркала конечного размера в условиях турбулентной атмосферы. Задача решена в фазовом приближении метода Гюйгенса—Кирхгофа [5]. Рассмотрены условия сильных флуктуаций интенсивности, и для фактора усиления получены простые асимптотические формулы. Обсуждаются условия, при которых фактор усиления обратного рассеяния становится заметной величиной.

Воспользовавшись представлением, предложенным в [5], запишем комплексную амплитуду отраженного поля в виде

$$u(R; 0) = \frac{k^4 e^{i2kx}}{\pi^4 X^4} \int_{\Sigma_t} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} dt dq_1 dr dq_2 u(t) \times \quad (1)$$

$$\times K(\mathbf{r}) \exp \left\{ \frac{ik}{X} [(t - q_1)^2 + (q_1 - \mathbf{r})^2 + (\mathbf{r} - q_2)^2 + (q_2 - \mathbf{R})^2] + i[s(t; q_1) + s(q_1; \mathbf{r}) + s(\mathbf{r}; q_2) + s(q_2; \mathbf{R})] \right\},$$

где  $k$  — волновое число,  $x$  — расстояние между облучателем и отражателем,  $\mathbf{R}$ ,  $t$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-векторы в плоскости наблюдения и отражения,  $\mathbf{q}_i$  — радиус-вектор во вспомогательной плоскости, находящейся посредине трассы,  $u(t)$  — начальное распределение поля,  $K(\mathbf{r})$  — коэффициент отражения,  $s(t; q_1)$ ,  $s(q_1; \mathbf{r})$ ,  $s(\mathbf{r}; q_2)$ ,  $s(q_2; \mathbf{R})$  — случайные фазовые набеги элементарных сферических волн. Интегрирование в (1) ведется по поверхностям излучателя и отражателя  $\Sigma_t$  и  $\Sigma_r$  и по вспомогательной плоскости.

Исследуем вначале эффект усиления при различной угловой диаграмме рассеивателя, облучаемого расходящейся сферической волной. Зададим  $u(t)$  в виде

$$u(t) = 2\pi u_0 \delta(kt),$$

где  $\delta(kt)$  — дельта-функция.

Если считать флюктуации фазы  $s(q_i; q_j)$  распределенными по нормальному закону и пренебречь корреляцией между набегами фазы элементарных сферических волн на пути от облучателя до вспомогательной плоскости с набегами фазы, возникающими на пути от вспомогательной плоскости пересчета до плоскости отражателя, то для средней интенсивности отраженного излучения получим

$$\langle I(\mathbf{R}; 0) \rangle = \frac{k^2}{x^6 \pi^4} u_0^2 \int dr, ds_{1, 2, 3} K(r/2 + s_1) K^*(r/2 - s_1) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{2k}{X} [2s_2 s_3 + s_1 r - (s_1 - s_2) \mathbf{R}] \right\} G(s_{1, 2, 3}; \mathbf{R}), \quad (2)$$

где

$$G(s_{1, 2, 3}; \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ D_S \left( \frac{X}{2}; -\mathbf{R}; s_2 + s_3 \right) + D_S \left( \frac{X}{2}; s_2 + s_3; 0 \right) + D_S \left( \frac{X}{2}; -\mathbf{R}; s_3 - s_2 \right) + D_S \left( \frac{X}{2}; 0; s_3 - s_2 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; 0; s_1 + s_2 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; s_1 + s_2; 2s_1 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; 2s_1; s_1 - s_2 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; s_1 - s_2; 0 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; -\mathbf{R}; s_1 + s_3 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; 2s_1; s_1 - s_3 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; s_1 + s_3; 2s_1 \right) - D_S \left( \frac{X}{2}; s_1 - s_3; \mathbf{R} \right) \right] \right\}.$$

Здесь  $D_S \left( \frac{X}{2}; q_i; q_j \right)$  — структурная функция фазы двух сферических волн, источники и точки наблюдения которых разнесены соответственно на векторы  $\mathbf{q}_j$  и  $\mathbf{q}_i$ , лежащие в плоскостях, расположенных друг от друга на расстоянии  $\frac{x}{2}$ .

Если  $K(r)$  задать в виде

$$K(r) = 2\pi\delta(kr), \quad (3)$$

соответствующем точечному отражателю, из (2) получим

$$\begin{aligned} \langle I(R; 0) \rangle &= \frac{4}{x^6 \pi^2 k^2} u_0^2 \int ds_{2,3} \exp \left\{ i \frac{2k}{X} [2s_2 s_3 + s_2 R] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[ D_S \left( \frac{X}{2}; -R; s_2 + s_3 \right) + D_S \left( \frac{X}{2}; s_2 + s_3; 0 \right) + D_S \left( \frac{X}{2}; -R; s_3 - s_2 \right) + \right. \\ &\left. + D_S \left( \frac{X}{2}; 0; s_3 - s_2 \right) - 4D_S \left( \frac{X}{2}; 0; s_2 \right) - 2D_S \left( \frac{X}{2}; 0; s_3 \right) - \right. \\ &\left. \left. - 2D_S \left( \frac{X}{2}; R; -s_3 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае отражения от бесконечной зеркальной плоскости, когда  $K(r) = 1$ , получаем для средней интенсивности отраженного поля выражение, отличающееся от (4) лишь множителем  $\frac{1}{4}(xk)^2$ . Выражение (4) с точностью до амплитудного множителя  $u_0^2$  совпадает с выражением для второго момента интенсивности сферической волны, прошедшей в атмосфере расстояние до отражателя:

$$\langle I(R; 0) \rangle_{\text{отр}} = u_0^{-2} \langle I(0; 0) I(R; 0) \rangle_{\text{пп.}} \quad (5)$$

В приближении геометрической оптики [6] можно записать:

$$D_S \left( \frac{X}{2}; q_1; q_2 \right) = 2,91 C_n^2 k^2 \frac{X}{2} d(q_1; q_2),$$

где

$$d(q_1; q_2) = \int_0^1 |q_1 \zeta + (1 - \zeta)q_2|^{5/3} d\zeta,$$

$C_n^2$  — структурная характеристика флуктуаций показателя преломления. Для вычисления интегралов в показателе экспоненты (4) аппроксимируем подынтегральную функцию по переменной  $\zeta$  параболой, которая совпадает с подынтегральной функцией в трех точках  $\zeta = 0, 1/2, 1$ . Вычисляя интеграл, получим

$$d(q_1; q_2) \approx 1/6(|q_1|^{5/3} + |q_2|^{5/3} + 2^{1/3}|q_1 + q_2|^{5/3}). \quad (6)$$

Максимальная относительная ошибка, возникающая вследствие такой аппроксимации, не превышает 11%. Она достигается, когда  $q_1 = -q_2$ . Тогда (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \langle I(R; 0) \rangle &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{u_0^2}{(kX)^4} \int ds_{2,3} \exp \{ i2(2s_2 s_3 + s_2 R_0) \} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{9} \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\} \left[ 2|s_2 + s_3|^{5/3} + 2|s_3 - s_2|^{5/3} - 4|s_2|^{5/3} - \right. \\ &- 4|s_3|^{5/3} + 2^{1/3}(|s_2 + s_3 - R_0|^{5/3} + |s_2 + s_3|^{5/3} + |s_3 - s_2 - R_0|^{5/3} + \\ &\left. + |s_3 - s_2|^{5/3} - 4|s_2|^{5/3} - 2|s_3|^{5/3} - 2|s_3 - R_0|^{5/3}) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $R_0 = R/\sqrt{X/k}$ ,  $\Delta_s(l) = 1,1C_n^2k^2X(l)^{5/3}$  — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на размере  $l$ .

Будем интересоваться сильными флуктуациями интенсивности, когда  $\Delta_s(\sqrt{X/k}) \gg 1$ . Установим области пространства  $\{s_2, s_3\}$ , которые вносят основной вклад в значение интеграла (7) при  $\Delta_s(\sqrt{X/k}) \gg 1$ .

Нетрудно видеть, что вторая экспонента в (7) обращается в нуль при

$$|s_2|, |s_3| \rightarrow \infty \quad (8)$$

и принимает конечные значения при

$$|s_2| \rightarrow \infty, \quad |s_3| \leq 1; \quad (9)$$

$$|s_3| \rightarrow \infty, \quad |s_2| \leq 1; \quad (10)$$

$$|s_2|, |s_3| \leq 1. \quad (11)$$

В соответствии с проведенным анализом представим эту функцию в виде

$$\begin{aligned} G(s_{2,3}; R_0) &= \exp\{\Phi(s_{2,3}; R_0) - \Phi_2(s_2) - \Phi_3(s_3; R_0)\} = \\ &= \exp\{-\Phi_2(s_2)\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\Phi(s_{2,3}; R_0) - \Phi_3(s_3; R_0)]^n + \\ &+ \exp\{-\Phi_3(s_3; R_0)\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\Phi(s_{2,3}; R_0) - \Phi_2(s_2)]^n - \\ &- \exp\{-\Phi_2(s_2) - \Phi_3(s_3; R_0)\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\Phi(s_{2,3}; R_0)]^n, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Phi_2(s_2) = \frac{4}{9} (1 + 2^{1/3}) \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) |s_2|^{5/3},$$

$$\Phi_3(s_3; R_0) = \frac{1}{9} \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) [2(2 + 2^{1/3}) |s_3|^{5/3} + 2 \cdot 2^{1/3} |s_3 - R_0|^{5/3}],$$

$$\begin{aligned} \Phi(s_{2,3}; R_0) &= \frac{1}{9} \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) [(2 + 2^{1/3})(|s_2 + s_3|^{5/3} + |s_2 - s_3|^{5/3}) + \\ &+ 2^{1/3}(|s_3 - s_2 - R_0|^{5/3} + |s_3 + s_2 - R_0|^{5/3})]. \end{aligned}$$

Уже первые ( $n = 0$ ) члены разложения (12) дают хорошее приближение функции  $G(s_{2,3}; R_0)$  в областях (9)–(11) и обращаются в нуль в несущественных для интегрирования областях (8). В частности, сумма первых слагаемых ( $n = 0$ ) в (12) точно совпадает с функцией  $G(s_{2,3}; R_0)$  при  $|s_2| \rightarrow \infty$ ,  $|s_3| \rightarrow \infty$  и  $s_2 = s_3 = R_0 = 0$ .

Нетрудно видеть, что после подстановки разложения (12) под знак интеграла (7) при  $\Delta_s(\sqrt{X/k}) \rightarrow \infty$  третье слагаемое в (12) дает порядок малости  $O\{[\Delta_s(\sqrt{X/k})]^{-12/5}\}$ .

Используя условия (9) и (10), функции типа  $|a + b|^{5/3}$  разложим

в биномиальные ряды  $|a+b|^{5/3} = a^{5/3} \left[ 1 + \frac{5}{3} \frac{(ab)}{a^2} + \frac{5b^2}{6a^2} - \frac{5}{18} \frac{(ab)^2}{a^4} + \dots \right]$ ,  $a > b$  и ограничимся членами второго порядка малости. В результате получим

$$\Phi(s_2, s_3; R_0) - \Phi_3(s_3; R_0) \approx \frac{1}{9} D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) (1 + 2^{1/3}) \frac{10}{3} \left[ s_2^2 s_3^{-1/3} - \frac{1}{3} (s_2 s_3)^2 s_3^{-7/3} \right]; \quad (13)$$

$$\Phi(s_2, s_3; R_0) - \Phi_2(s_2) \approx \frac{1}{9} D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \left\{ (1 + 2^{1/3}) \frac{10}{3} \left[ s_3^2 s_2^{-1/3} - \frac{1}{3} (s_2 s_3)^2 s_2^{-7/3} \right] + 2^{1/3} \left[ R_0^2 s_2^{-1/3} - 2(R_0 s_3) s_2^{-1/3} - \frac{1}{3} (R_0 s_2)^2 s_2^{-7/3} + \frac{2}{3} (s_2 s_3)(s_2 R_0) s_2^{-7/3} \right] \right\}. \quad (14)$$

Удерживая первые члены полученных после интегрирования рядов, будем иметь

$$\langle I(R; 0) \rangle = \begin{cases} \frac{u_0^2}{(kX)^4} N(R) & \text{— отражатель точечный,} \\ \frac{u_0^2}{(2kX)^2} N(R) & \text{— отражатель — бесконечная плоскость.} \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $N(R)$  — фактор эффективности обратного рассеяния;

$$N(R) = n_1(R) + n_2(R),$$

где

$$n_1(R) = 1 + 2,1 \Gamma \left( \frac{5}{6} \right) \Gamma \left( \frac{7}{5} \right) \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{6} \right) \left[ 1 - \frac{\Gamma \left( \frac{13}{5} \right)}{\Gamma \left( \frac{7}{5} \right)} R_0^2 \times \right. \\ \left. \times \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-6/5} \right] \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-2/5} + O \left[ \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-4/5} \right], \quad (16)$$

$$R_0 < \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{3/5};$$

$$n_2(R) = \exp \left[ -0,78 D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) R_0^{5/3} \right] + 2,1 \Gamma \left( \frac{5}{6} \right) \Gamma \left( \frac{7}{5} \right) \Gamma^{-1} \left( \frac{1}{6} \right) \times \\ \times \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-2/5} + O \left[ \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-3/5} \right], \quad (17)$$

$$R_0 < \left\{ D_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-3/5}.$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Приведенные выше формулы (15)–(17) показывают, что в условиях сильных флуктуаций  $\left[ \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \gg 1 \right]$  средняя интенсивность излучения рассеянного строго назад ( $R_0 = 0$ ), может более чем вдвое превышать интенсивность в вакууме. В этом случае

$$N(0) \approx 2 + 0,76 \left\{ \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-2/5}. \quad (18)$$

Заметим, что поперечный размер области, где проявляется эффект усиления средней интенсивности отраженной волны, согласно (15)–(17) имеет порядок радиуса когерентности сферической волны [7]

$$\rho_k = (0,55 C_n^2 k^2 X)^{-3/5},$$

$$R_1 \leq \sqrt{\frac{X}{k}} (0,78)^{-3/5} \left\{ \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-3/5} \approx 0,8 \rho_k,$$

и при увеличении эффективной толщины турбулентной среды размер этой области уменьшается. Из формул (15) — (18) следует также, что как и в случае слабых флуктуаций [1], эффект усиления обратного рассеяния сопровождается ослаблением в боковых направлениях. Ширина угловой области, в которой происходит ослабление рассеяния, имеет оценку  $\Theta \sim 1/\sqrt{Xk}(\Delta_s(\sqrt{X}/k))^{3/5}$ . Учтем теперь конечность размеров отражателя. Для этого зададим  $K(r)$  в виде

$$K(r) = -\exp(-r^2/2a_r^2),$$

где  $a_r$  — радиус диска.

Аналогично тому, как это было сделано для точечного отражателя, используя в существенной для интегрирования аппроксимацию

$$\exp(-a|\eta_i|^{5/3}) \approx \exp(-a^{6/5}\eta_i^2), \quad (19)$$

для зеркального диска получим

$$\langle I(R; 0) \rangle = \left( \frac{\Omega_r}{kX} \right)^2 (g_r^2 + 1,7\delta_r)^{-1} (1 + e^{-\delta_r R_r^2}) \times$$

$$\times \exp[-4\Omega_r^2(g_r^2 + 1,7\delta_r)^{-1} R_r^2] + O(\{\Delta_s(2a_r)\}^{-8/5}), \quad (20)$$

$$R_r < \{\Delta_s(2a_r)\}^{-3/5},$$

где

$$\delta_r = 0,55 \{\Delta_s(2a_r)\}^{6/5}, \quad R_r = R/2a_r, \quad \Omega_r = ka_r^2/X$$

— число Френеля отражателя. Отнормировав выражение (20) на интенсивность отраженного излучения в невозмущенной среде, получим

$$\frac{\langle I(R; 0) \rangle}{I_0(R; 0)} = \frac{g_r^2}{g_r^2 + 1,7\delta_r} (1 + e^{-\delta_r R_r^2}) \exp \left[ -6,8 \frac{\Omega_r^2 \delta_r}{g_r^2(g_r^2 + 1,7\delta_r)} R_r^2 \right]. \quad (21)$$

Если размер отражателя устремить к нулю (точечный рассеиватель), то формула (21) приближенно совпадает с суммой первых членов разложений (16), (17). Различие между ними будет обусловлено аппроксимацией (19). Если размер отражателя выбрать таким, чтобы выполнялось условие

$$\left\{ \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{-6/5} \ll \Omega_r \ll \left\{ \Delta_s \left( \sqrt{\frac{X}{k}} \right) \right\}^{6/5},$$

то в выражении (21) наряду с фактором усиления появляется множитель ослабления [2], обусловленный турбулентным уширением отраженного пучка. Поэтому средняя интенсивность даже в направлении «строго назад» при  $\Delta_s(\sqrt{X/k}) \gg 1$  может оказаться меньше, чем интенсивность в вакууме. Однако пространственное перераспределение энергии за счет корреляции прямой и отраженной волн, сохраняется и в этом случае.

Рассмотрим далее влияние расходности лазерного пучка, освещавшего цель, на перераспределение средней интенсивности рассеянного излучения. Для этого распределение поля в исходной плоскости  $x = 0$  зададим в виде гауссова пучка

$$u(t) = u_0 \exp \left( -\frac{1}{2a_t^2} t^2 - i \frac{k}{2F_t} t^2 \right), \quad (22)$$

где  $a_t$  — радиус пучка,  $F_t$  — кривизна фазового фронта в центре апертуры.

Для простоты будем считать отражатель точечным, а коэффициент отражения  $K(r)$  зададим в виде (3). Подставляя (22) и (3) в (1), для средней интенсивности получим

$$\begin{aligned} \langle J(R; 0) \rangle &= \frac{1}{X^2 k^2} \left( \frac{8}{\pi} \right)^4 \Omega_t^4 u_0^2 \exp(-4R_t^2) \int dt, ds_{1,2,3} \times \\ &\times \exp \left\{ -4(4s_1^2 + t^2) - 8tR_t + i8\Omega_t \left[ 2s_3(t + s_3 - s_1) + \right. \right. \\ &+ 2 \left( 1 - \frac{X}{F_t} \right) s_1(t + R_t) + (s_1 - s_2 - t)t \left. \right] \} G(t; s_{1,2,3}), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} G(t; s_{1,2,3}) &= \exp \left\{ \frac{2}{3} \Delta_s(2a_t) \left[ d(t + 2s_1; s_2 + s_3 + t) + \right. \right. \\ &+ d(s_2 + s_3 + t; 0) + d(t - 2s_1; s_3 - s_2 - t) + d(s_3 - s_2 - t; 0) - \\ &- d(4s_1; s_1 + s_2 + t) - d(s_1 + s_2 + t; 0) - 2d(s_1 - s_2 - t; 0) - \\ &- d(t + 2s_1; s_1 + s_3) - d(s_1 - s_3; 0) - d(s_1 + s_3; 0) - \\ &\left. \left. - d(s_1 - s_3; 2s_1 - t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов в показателе экспоненты (23) воспользуемся аппроксимацией (6) и проведем оценку средней интенсивности в условиях сильных ( $\Delta_s(\sqrt{X/k}) \gg 1$ ) флуктуаций. В выражении (23) функция  $G(t; s_{1,2,3})$  принимает отличные от нуля значения только в области

$$\begin{aligned} |s_2| &\rightarrow \infty, \quad |t|, |s_1|, |s_3| \leq 1; \quad |s_3| \rightarrow \infty, \quad |t|, |s_1|, |s_3| \leq 1; \\ |s_1|, |s_2|, |s_3|, |t| &\leq 1. \end{aligned}$$

В соответствии с этим представим  $G(t; s_{1,2,3})$  в виде разложений, аналогичных (12) и проведем интегрирование, воспользовавшись (19). В результате получим

$$\langle I(R; 0) \rangle = I_0(m_1 + m_2), \quad (24)$$

где  $I_0 = \Omega_t^2 g_t^{-2} (kX)^{-2} u_0^2$  — интенсивность отраженного излучения в не-возмущенной среде,

$$m_1 = g_t^2(g_t^2 + 0,73\delta_t)^{-1} + O(\{\Delta_s(2a_t)\}^{-8/5}),$$

где

$$g_t^2 = 1 + \Omega_t^2 \left(1 - \frac{X}{F_t}\right)^2;$$

$$m_2 = 16g_t^2 \varphi(g_t^2; \delta_t) \exp[-4\delta_t(4 + \delta_t)^{-1} R_t^2] \times \\ \times \exp[-16(g_t^2 - 1)\delta_t^2(\delta_t + 4)^{-1} \varphi(g_t^2; \delta_t) R_t^2] + O(\{\Delta_s(2a_t)\}^{-14/5}),$$

$$R_t < \{\Delta_s(2a_t)\}^{-3/5},$$

где

$$\varphi(g_t^2; \delta_t) = [(4 + \delta_t)(4 + 1,53\delta_t) + 16(g_t^2 - 1)]^{-1}, \quad \delta_t = 0,55\{\Delta_s(2a_t)\}^{6/5}.$$

Нетрудно видеть, что первое из слагаемых в (24) совпадает со средней интенсивностью излучения, формируемого точечным источником, амплитуда которого определяется средней интенсивностью в падающем пучке. Из (24) следует, что эффект усиления становится земетным только при облучении отражателя сильно расходящейся волной ( $\Omega_t \ll \{\Delta_s(VX/k)\}^{-6/5}$  или  $F_t \rightarrow 0$ ). В этом случае второе слагаемое в (24) становится сравнимым с первым, что приводит к увеличению мощности излучения, рассеянного строго назад, на величину более чем в два раза.

Когда отражатель облучается плоской волной ( $\Omega_t \gg \{\Delta_s(VX/k)\}^{6/5}$ ) или пространственно ограниченным пучком ( $\{\Delta_s(VX/k)\}^{-6/5} \ll \Omega_t \ll \{\Delta_s(VX/k)\}^{6/5}$ ), пространственное перераспределение мощности, переизлученной рассеивателем, оказывается несущественным.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что эффект перераспределения средней интенсивности при отражении лазерного пучка от плоского зеркала конечных размеров в условиях сильных флуктуаций существенным образом зависит от расходимости падающей на отражатель волны. Если эта расходимость значительно превышает турбулентное уширение падающего пучка, то эффект усиления обратного рассеяния наблюдается при произвольной угловой ширине диаграммы рассеяния отражателя.

Полученный результат можно пояснить следующими качественными соображениями. Известно [7, 8], что наибольшее возмущающее действие на плоскую волну оказывают неоднородности, расположенные вблизи излучателя, а на сферическую — неоднородности, расположенные посередине трассы. Если падающая волна является сферической, то волна, отраженная от плоского зеркала, также будет близка к сферической, и области, оказывающие наиболее существенное влияние на падающее и отраженное излучения, совпадут. Поэтому будет наблюдаться сильная корреляция интенсивности поля падающей и отраженной волн, и, следовательно, эффект усиления обратного рассеяния оказывается значительным. В случае же, например, облучения отражателя плоской волной области, существенные для распространения прямой и обратной волн, не перекрываются, корреляция интенсивностей этих волн оказывается слабой, а эффект усиления — малосущественным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 7, 1064 (1973).
2. М. С. Беленький, В. Л. Миронов, сб. Квантовая электроника, под ред. Н. Г. Басова, № 5 (11), 38 (1972).
3. А. С. Гурвич, С. С. Каракоров, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 5, 794 (1977).
4. З. И. Фейзуллин, Радиотехника и электроника, 15, № 7, 1390 (1970).
5. И. П. Лукин, В. Л. Миронов, Тезисы докладов I Всесоюзного совещания по атмосферной оптике, ч. 1, Томск, 1976.
6. А. И. Кон, З. И. Фейзуллин, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).
7. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1976.
8. Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
26 декабря 1977 г.

THE EFFECT OF BACKSCATTERING AMPLIFICATION UNDER THE CONDITIONS  
OF STRONG INTENSITY FLUCTUATIONS

V. P. Aksenov, V. L. Mironov

The amplification effect of backscattering of an optical wave by a mirror disc in the turbulent atmosphere is theoretically investigated. Consideration has been made for the case of strong intensity fluctuations. The asymptotic analysis of the mean field intensity shows that the effect of backscattering amplification is revealed only in the case when the increase in angular divergence of an incident optical wave affected by turbulent inhomogeneities may be neglected. When this condition is satisfied, the amplification effect is observed independently of the width of the scattering diagram of the reflecting disc. Asymptotic formulas are given which permit the backscattering efficiency factor to be quantitatively estimated.

УДК 538.56 : 519.25

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОКОМПЕНСАТОРА С АРУ В ЦЕПИ УПРАВЛЕНИЯ

*A. A. Мальцев, И. Е. Позументов*

Находятся основные статистические характеристики одноканального автокомпенсатора с АРУ в цепи управления при воздействии гауссовой помехи (моменты управляющего напряжения, мощность нескомпенсированной помехи, коэффициент подавления помехи, эффективное время настройки системы). Введено понятие эффективного динамического диапазона компенсации помехи. Проведено сравнение различных схем компенсации без регулировки, с инерционной АРУ, с безынерционной МАРУ.

В последнее время все большее внимание уделяется анализу работы адаптивных автокомпенсаторов помех с корреляционными обратными связями [1-7]. Однако обычно рассматриваемые схемы (см. [1-4]) обладают, по крайней мере, двумя существенными недостатками [5]: во-первых, довольно жестким ограничением на допустимый динамический диапазон входных сигналов и, во-вторых, очень большим временем установления управляющих напряжений при компенсации слабых помех.

Одним из способов устранения указанных недостатков является изменение цепи управления, состоящее во введении автоматической регулировки усиления — инерционной (АРУ) или безынерционной (МАРУ) — в канал компенсационной антенны (см. рис. 1). Такая схема изучена значительно меньше. Имеется лишь несколько работ [6-7], посвященных анализу только динамических характеристик устройства с МАРУ без учета собственных флюктуаций управляющих напряжений в цепи обратной связи.

Рассматриваемая схема представляет собой гетеродинный вариант автокомпенсатора [5], в котором в качестве перемножителей используются смесители; это упрощает техническую реализацию схемы и не

требует разделения сигнала компенсационного канала на квадратурные составляющие (см., например, [4]). Вырабатываемый в цепи обратной связи весовой коэффициент  $\hat{W}(t)$  осуществляет одновременную регулировку амплитуды и фазы сигнала в компенсационном канале.

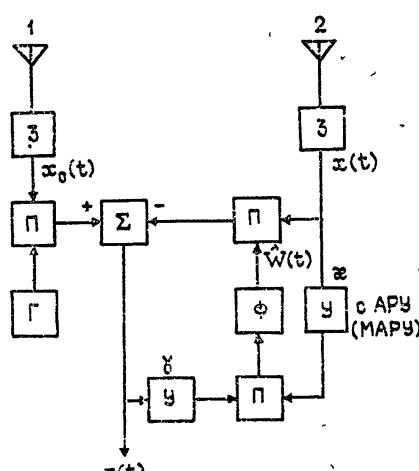


Рис. 1. Функциональная схема одноканального автокомпенсатора помех с корреляционной обратной связью:  
1, 2 — соответственно основная и компенсационная антенны, 3 — входные узкополосные фильтры, П — перемножитель, У — усилитель, Г — гетеродин,  $\Sigma$  — сумматор, Ф — узкополосный фильтр цепи корреляционной обратной связи.

В настоящей работе исследуются динамические и статистические характеристики системы компенсации для двух вариантов схемы, изображенной на рис. 1: с инерционной АРУ и безынерционной МАРУ.

1. Рассмотрим воздействие на автocomпенсатор гауссовой помехи. Пусть напряжение на выходе канала основной антенны равно  $x_0(t) = k_0 x(t + \Delta) + \eta(t)$ , где  $\eta(t)$  — собственный шум канала основной антенны, не коррелированный с помехой (который также может описывать потерю когерентности между основным и компенсационным каналом),  $\Delta$  — время запаздывания волны между основной и компенсационной антеннами. Будем считать сигналы  $x_0(t)$  и  $x(t)$  достаточно узкополосными, а расстояние между антеннами порядка длины волны. Тогда можно пренебречь запаздыванием  $\Delta$  в медленных огибающих помехи и уравнение для комплексной амплитуды управляющего напряжения  $\hat{W}(t)$  записать в виде\* (см. рис. 1)

$$\left[ \frac{d}{dt} + \Pi \right] \hat{W}(t) = k \times(t) [U^2(t)(k_0 e^{i\delta} - \hat{W}(t)) + \hat{U}^* \hat{N}]. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{U}(t)$ ,  $\hat{N}(t)$  — соответственно комплексные амплитуды помехи и собственного шума канала основной антенны,  $U(t) = |\hat{U}(t)|$  — амплитуда помехи, имеющая рэлеевское вероятностное распределение,  $k = \gamma/2T$ ,  $\Pi = T^{-1}$ ,  $T$  — постоянная времени узкополосного фильтра цепи обратной связи,  $\delta = \omega\Delta$  — набег фазы волны между основной и компенсационной антеннами.

Входящий в (1) регулируемый коэффициент усиления в случае АРУ с линейным детектором огибающей и линейной регулировочной характеристикой удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению [8]

$$\left[ \frac{d}{dt} + \Pi_{APU} \right] \times(t) = \Pi_{APU} (x_0 - b_A \times(t) U(t)). \quad (2)$$

Здесь  $\Pi_{APU} = \tau_{APU}^{-1}$ ,  $\tau_{APU}$  — постоянная времени АРУ,  $b_A = \varphi k_A$ ,  $\varphi$  и  $k_A$  — крутизна регулировочной характеристики и коэффициент усиления цепи обратной связи АРУ.

Как следует из (1), уравнения для синфазной  $W_c(t) = \text{Re}[\hat{W}(t)]$  и квадратурной  $W_s(t) = \text{Im}[\hat{W}(t)]$  компонент управляющего напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} + \Pi \right] W_{c,s}(t) &= k \times(t) \left[ U^2(t) \left( k_0 \begin{Bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix} - W_{c,s}(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \begin{Bmatrix} A(t) A_\eta(t) + C(t) C_\eta(t) \\ A(t) C_\eta(t) - C(t) A_\eta(t) \end{Bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $A(t)$ ,  $C(t)$  и  $A_\eta(t)$ ,  $C_\eta(t)$  — соответственно квадратурные компоненты помехи и собственного шума канала основной антенны.

Далее, для определенности, будем находить статистические характеристики  $W_c(t)$ ; характеристики  $W_s(t)$  находятся аналогично.

\* Учет шума второго канала в рамках применяемого метода не представляет существенных затруднений. Однако его введение, в общем случае, приводит к значительно более громоздким выражениям и качественно не изменяет поведения рассматриваемых в данной работе статистических характеристик автocomпенсатора.

2. Рассмотрим схему автокомпенсации с инерционной АРУ такой, что для эффективных постоянных времени автокомпенсации  $T_{\text{эфф}}$  и быстродействия АРУ —  $T_{\text{АРУ}}$  выполняются следующие неравенства:

$$T_{\text{эфф}} \gg T_{\text{АРУ}} \gg \left\{ \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_\eta} \right\}, \quad (4)$$

где  $\tau_{\text{кор}}$  и  $\tau_\eta$  — времена корреляции помехи  $U(t)$  и собственного шума  $\eta(t)$ . В этом случае в первом приближении можно считать  $W_{c,s}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $U(t)$  статистически независимыми и, усредняя уравнения (2), (3), найти установившиеся значения  $\langle W_c \rangle$ ,  $\langle \mathbf{x} \rangle$ :

$$\langle W_c \rangle = \frac{k_0 \langle \mathbf{x} \rangle \beta}{1 + \langle \mathbf{x} \rangle \beta} \cos \delta, \quad \langle \mathbf{x} \rangle = \frac{\mathbf{x}_0}{1 + a \sqrt{\beta}}. \quad (5)$$

Причем эффективные времена быстродействия  $T_{\text{эфф}}$  и  $T_{\text{АРУ}}$  будут равны

$$T_{\text{эфф}} = T(1 + \langle \mathbf{x} \rangle \beta)^{-1}, \quad T_{\text{АРУ}} = \tau_{\text{АРУ}}(1 + a \sqrt{\beta})^{-1}, \quad (6)$$

где  $a = (b_A / \sqrt{\gamma}) \sqrt{\pi/2}$  — безразмерный параметр, пропорциональный крутизне регулировочной характеристики АРУ,  $\beta = (\gamma \langle U^2 \rangle) / 2 = \gamma \langle x^2 \rangle$  — параметр, характеризующий эффективную мощность входной помехи.

Для нахождения дисперсий управляющих напряжений и других статистических характеристик автокомпенсатора перейдем от (2) и (3) к системе уравнений для флуктуаций  $\tilde{W}_c = W_c(t) - \langle W_c \rangle$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t) - \langle \mathbf{x} \rangle$ ,  $\tilde{U} = U(t) - \langle U \rangle$ ,  $\tilde{U}^2 = U^2(t) - \langle U^2 \rangle$ . Вычитая из (2) и (3) усредненные уравнения первого приближения, получим

$$\left[ \frac{d}{dt} + \Pi + k \langle \mathbf{x} \rangle \langle U^2 \rangle \right] \tilde{W}_c = k(k_0 \cos \delta - W_c(t)) \times \\ \times (\mathbf{x}(t) \tilde{U}^2 + \tilde{\mathbf{x}} \langle U^2 \rangle) + k \mathbf{x}(t) [A(t) A_\eta(t) + C(t) C_\eta(t)]; \quad (7a)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} + \Pi_{\text{АРУ}}(1 + a \sqrt{\beta}) \right] \tilde{\mathbf{x}} = -b_A \Pi_{\text{АРУ}} \mathbf{x}(t) \tilde{U}. \quad (7b)$$

В установившемся режиме решение уравнений (7) формально можно записать в виде\*

$$(\tilde{W}_c)_\eta = \int_0^\infty g(\tau) [Q(t - \tau) + Q_\eta(t - \tau)] d\tau, \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \int_0^\infty g_1(\tau) F(t - \tau) d\tau,$$

где

$$Q(t) = k(k_0 \cos \delta - W_c(t)) (\mathbf{x}(t) \tilde{U}^2 + \tilde{\mathbf{x}} \langle U^2 \rangle),$$

$$Q_\eta(t) = k \mathbf{x}(t) (A(t) A_\eta(t) + C(t) C_\eta(t)), \quad (9)$$

$$F(t) = -b_A \Pi_{\text{АРУ}} \mathbf{x}(t) \tilde{U},$$

\* Скобка  $(\dots)_\eta$  означает, что выражение получено с учетом собственных шумов основного канала.

$g(\tau)$ ,  $g_1(\tau)$  — соответственно функции Грина уравнений (7а) и (7б).

Возводя (8) в квадрат, найдем выражения для дисперсий управляющего напряжения и регулируемого коэффициента усиления  $(\sigma_{W_c}^2)_\eta = \langle (\tilde{W}_c)^2 \rangle$ ,  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_{W_c}^2)_\eta &= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau g(\tau) g(\tau_1) [\langle Q(t-\tau) Q(t-\tau_1) \rangle + \langle Q_\eta(t-\tau) Q_\eta(t-\tau_1) \rangle], \\ \sigma_x^2 &= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 g_1(\tau_1) g_1(\tau_2) \langle F(t-\tau_1) F(t-\tau_2) \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

В рамках используемого приближения (4) при нахождении  $(\sigma_{W_c}^2)_\eta$ ,  $\sigma_x^2$  из (10) достаточно ограничиться первым шагом итерационной процедуры\*, полагая, что

$$\begin{aligned} \left\langle x(t-\tau)x(t-\tau_1) \begin{Bmatrix} \tilde{U}^2(t-\tau) \tilde{U}^2(t-\tau_1) \\ \tilde{U}(t-\tau) \tilde{U}(t-\tau_1) \end{Bmatrix} \right\rangle &\approx \langle x^2 \rangle \left\langle \begin{Bmatrix} \tilde{U}^2(t-\tau) \tilde{U}^2(t-\tau_1) \\ \tilde{U}(t-\tau) \tilde{U}(t-\tau_1) \end{Bmatrix} \right\rangle, \\ \left\langle x(t-\tau)x(t-\tau_1) \begin{Bmatrix} A(t-\tau)A(t-\tau_1) \\ C(t-\tau)C(t-\tau_1) \end{Bmatrix} \right\rangle &\approx \langle x^2 \rangle \left\langle \begin{Bmatrix} A(t-\tau)A(t-\tau_1) \\ C(t-\tau)C(t-\tau_1) \end{Bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Как следует из уравнения (7б), ковариационная функция регулируемого коэффициента усиления  $\langle \tilde{x}(t-\tau)\tilde{x}(t-\tau_1) \rangle$  в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\langle \tilde{x}(t-\tau)\tilde{x}(t-\tau_1) \rangle = \sigma_x^2 \exp[-T_{APY}^{-1}|\tau - \tau_1|]. \quad (11)$$

Подставляя последнее выражение в (10) и еще раз используя условие (4), окончательно получим

$$\begin{aligned} (\sigma_{W_c}^2)_\eta &= \sigma_{W_c}^2 + \alpha_\eta \frac{\beta_\eta \beta \langle x \rangle^2}{\left(1 + \frac{\tau_\eta}{\tau_{\text{кор}}}\right)(1 + \langle x \rangle \beta)} \left[ 1 + \frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{APY}} \frac{(4-\pi) a^2 \beta}{\pi (1 + a \sqrt{\beta})^2} \right]; \\ \sigma_{W_c}^2 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\langle W_c \rangle^2}{1 + \langle x \rangle \beta} \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{APY}} + \frac{2}{1 + \frac{T_{APY}}{T_{\text{эфф}}}} \right) \frac{(4-\pi) a^2 \beta}{\pi (1 + a \sqrt{\beta})^2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{APY}} \frac{b_A^2 \langle x \rangle^2 \langle \tilde{U}^2 \rangle}{(1 + a \sqrt{\beta})^2}. \quad (13)$$

Здесь  $\alpha = \tau_{\text{кор}}/T$ ,  $\alpha_\eta = \tau_\eta/T$  — относительные времена корреляции помехи и шума,  $\beta_\eta = \gamma \langle \eta^2 \rangle^{**}$ .

\* Нетрудно показать, что это так называемое борновское приближение для флюктуационных уравнений (7) является известным в теории стохастических дифференциальных уравнений приближением Бурре [9] для исходных уравнений (2), (3).

\*\* Отметим, что при значительном превышении мощности помехи над собственными шумами учет шума компенсационного канала приведет просто к увеличению второго слагаемого в (12) в  $(1 + k_0^2)$  раз.

Аналогичные характеристики нетрудно получить и для другой квадратурной компоненты управляющего напряжения  $W_s(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle W_s \rangle &= \frac{k_0 \langle x \rangle \beta}{1 + \langle x \rangle \beta} \sin \delta, \\ (\sigma_{W_s}^2)_\eta &= \sigma_{W_s}^2 + \alpha_\eta \frac{\beta \eta \beta \langle x \rangle^2}{\left(1 + \frac{\tau_\eta}{\tau_{\text{кор}}}\right) (1 + \langle x \rangle \beta)} \left[ 1 + \frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{\text{APU}}} \frac{(4 - \pi) a^2 \beta}{\pi (1 + a \sqrt{\beta})^2} \right], \\ \sigma_{W_s}^2 &= \frac{\alpha}{2} \frac{\langle W_s \rangle^2}{(1 + \langle x \rangle \beta)} \left[ 1 + \left( \frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{\text{APU}}} + \frac{2}{1 + \frac{T_{\text{APU}}}{T_{\text{эфф}}}} \right) \frac{(4 - \pi) a^2 \beta}{\pi (1 + a \sqrt{\beta})^2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что найденные в [4] статистические характеристики системы компенсации без АРУ получаются из формул (12)–(14) при  $a = 0$ .

Выражение для выходного сигнала автокомпенсатора имеет вид

$$z(t) = x_0(t) - [x_c(t) W_c(t) + x_s(t) W_s(t)].$$

Используя это равенство, нетрудно выразить установившуюся среднюю мощность нескомпенсированной помехи  $\langle z^2 \rangle$  через найденные характеристики управляющих напряжений:

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &= \frac{1}{\gamma \langle x \rangle} [k_0 (\langle W_c \rangle \cos \delta + \langle W_s \rangle \sin \delta) - \langle W_c^2 \rangle - \langle W_s^2 \rangle] + \\ &+ \langle \eta^2 \rangle (1 - 2\alpha_\eta \langle x \rangle \beta) = \frac{1}{\gamma \langle x \rangle} \left[ \langle x \rangle \beta \left( \frac{k_0}{1 + \langle x \rangle \beta} \right)^2 - (\sigma_{W_c}^2)_\eta - \right. \\ &\left. - (\sigma_{W_s}^2)_\eta \right] + \langle \eta^2 \rangle (1 - 2\alpha_\eta \langle x \rangle \beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Как следует из (4), (6), условие применимости использованного выше приближенного метода анализа накладывает следующие ограничения на быстроту и мощность действующих помех:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha_\eta \end{array} \right\} \left( 1 + \frac{\beta}{1 + a \sqrt{\beta}} \right) \ll 1, \quad (16)$$

$$\frac{\tau_{\text{кор}}}{T_{\text{APU}}} (1 + a \sqrt{\beta}) \ll 1.$$

3. Рассмотрим схему автокомпенсации с безынерционной, по отношению к огибающей, АРУ (МАРУ) в канале компенсационной антенны. Будем полагать выполнеными следующие неравенства:

$$T_{\text{эфф}} \gg \left\{ \frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_\eta} \right\} \gg T_{\text{APU}}. \quad (17)$$

В этом случае амплитудную характеристику МАРУ можно считать идеальной (аналогичной характеристике идеального ограничителя огибающей). Тогда с большой степенью точности можно полагать, что огибающая на выходе усилителя с МАРУ будет постоянной:

$$\kappa(t) U(t) = \frac{1}{b_A} = V \quad (\kappa_0 = 1), \quad (18)$$

где  $V$  — уровень ограничения огибающей.

Уравнения релаксации управляемых напряжений при этом примут вид

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} + \Pi + kVU(t) \right] W_{c,s}(t) &= kk_0 VU(t) \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \\ \sin \delta \end{array} \right\} + \\ &+ \frac{k}{U} \left\{ A(t) A_\eta(t) + C(t) C_\eta(t) \right\} \\ &- \left\{ A(t) C_\eta(t) - C(t) A_\eta(t) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Статистическое усреднение уравнения (19) с учетом (17) дает в установившемся режиме

$$\langle W_{c,s} \rangle = \frac{k_0 h \sqrt{\beta}}{1 + h \sqrt{\beta}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta \\ \sin \delta \end{array} \right\}, \quad (20)$$

$$T_{\text{эфф}} = T (1 + h \sqrt{\beta})^{-1}, \quad h = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\gamma V^2}{2}}.$$

Используя предложенный выше способ вычисления дисперсий, несложно найти  $(\sigma_{W_{c,s}}^2)_\eta$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_{W_{c,s}}^2)_\eta &= \sigma_{W_{c,s}}^2 + \alpha_\eta \frac{4h^2 \beta_\eta}{\pi \left( 1 + \frac{\tau_\eta}{\tau_{\text{кор}}} \right) (1 + h \sqrt{\beta})}, \\ \sigma_{W_{c,s}}^2 &= \frac{\alpha}{2} \frac{(4 - \pi)}{\pi} \frac{\langle W_{c,s} \rangle^2}{1 + h \sqrt{\beta}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Мощность нескомпенсированной помехи на выходе автокомпенсатора аналогично (15) можно представить в следующем виде:

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{\gamma} \left[ \beta \left( \frac{k_0}{1 + h \sqrt{\beta}} \right)^2 - (\sigma_{W_c}^2)_\eta - (\sigma_{W_s}^2)_\eta \right] + \langle \eta^2 \rangle (1 - 4h \alpha_\eta \sqrt{\beta}). \quad (22)$$

Соответствующая область применимости полученных результатов определяется соотношениями (17), (20) и в безразмерных параметрах имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \alpha_\eta \end{array} \right\} (1 + h \sqrt{\beta}) \ll 1. \quad (23)$$

4. Кратко обсудим основные показатели работы рассматриваемых схем автокомпенсации: коэффициент подавления помехи, эффективный динамический диапазон компенсации, среднеквадратичные отклонения управляемых напряжений, скорость настройки и остаточный шум на выходе систем.

На рис. 2 показаны величины среднеквадратичных отклонений управляемого напряжения  $(\sigma_w)_\eta = \sqrt{(\sigma_{W_c}^2)_\eta + (\sigma_{W_s}^2)_\eta}$  и коэффициента подавления помехи  $\epsilon = \langle z^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle$  в зависимости от эффективной мощности помехи  $\beta = \gamma \langle x^2 \rangle$ . Кривые приведены для схем без АРУ ( $a = 0$ ) с инерционной АРУ ( $a = 0,3$ ) и с безынерционной

МАРУ ( $h = 10^{-1}$ ). Для удобства сравнения рассматриваемых схем введем понятие эффективного динамического диапазона компенсации  $D = 10 \lg (\beta_{\text{в}}/\beta_{\text{n}})$ . Нижнюю границу  $\beta_{\text{n}}$  будем определять из соотношения  $\epsilon(\beta_{\text{n}}) = 0,1$ , а верхнюю — из  $(\sigma_w)_\eta = 0,1$ . Такой выбор связан с тем, что при  $\beta < \beta_{\text{n}}$  можно считать, что эффективной компенсации помехи нет (помеха настолько слаба, что система при заданном коэффициенте  $\gamma$  на нее практически не реагирует), а при  $\beta > \beta_{\text{в}}$  возникают сильные паразитные флуктуации управляющего напряжения, которые могут привести к существенным искажениям полезного сигнала.

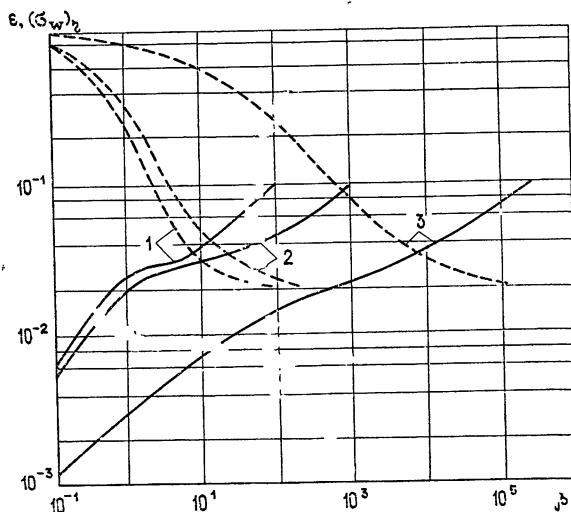


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичного отклонения  $(\sigma_w)_\eta$  (сплошная) и коэффициента подавления помехи  $\epsilon = \langle z^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle$  (штриховая линия) от эффективной мощности помехи  $\beta$  ( $\langle x^2 \rangle = \text{const}$ ) при наличии аддитивного шума в основном канале  $\langle \eta^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle = 2 \cdot 10^{-2}$ . Кривые построены при  $\alpha = \alpha_\eta = 10^{-2}$  для схем: 1—без регулировки ( $a=0$ ), 2—с АРУ ( $a=0,3$ ), 3—с МАРУ ( $h=10^{-1}$ ).

Используя полученные выражения (13)–(15), (21), (22) и задаваясь уровнем собственных шумов  $\langle \eta^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle = 2 \cdot 10^{-2}$ , несложно найти, что динамический диапазон  $D_{\text{МАРУ}}$  системы с МАРУ в два раза больше, чем у системы без регулировки  $D_0$ :

$$D_{\text{МАРУ}} = 2D_0 = 20 \lg \left( \frac{1}{V^{10} \alpha_\eta} \right).$$

Отсюда, кстати, видно, что при уменьшении относительного времени корреляции собственных шумов  $\alpha_\eta = \tau_\eta/T$  диапазон эффективной компенсации увеличивается (из-за уменьшения флуктуаций весовых коэффициентов,  $\beta_{\text{в}} \sim \alpha_\eta^{-1}$ ). Следует отметить, что эффективный динамический диапазон компенсации системы с МАРУ может быть сдвинут в нужную область путем выбора уровня ограничения  $V$  или коэффициента усиления  $\gamma$ , и величина  $D_{\text{МАРУ}}$  при этом не изменяется.

Динамический диапазон системы с инерционной АРУ плавно увеличивается от  $D_0$  до  $D_{\text{МАРУ}}$  при увеличении крутизны регулировочной характеристики. Зависимость  $D_{\text{АРУ}}$  от безразмерного коэффициента  $a = (b_A / \sqrt{\gamma}) \sqrt{\pi/2}$  приведена на рис. 3 ( $\alpha_\eta = 10^{-2}$ ,  $\langle \eta^2 \rangle = 2 \cdot 10^{-2} \times k_0^2 \langle x^2 \rangle$ ). Пунктиром показан участок, где условие применимости нашего приближения (второе неравенство в (16)) нарушается (это переходный участок от инерционной к безынерционной регулировке).

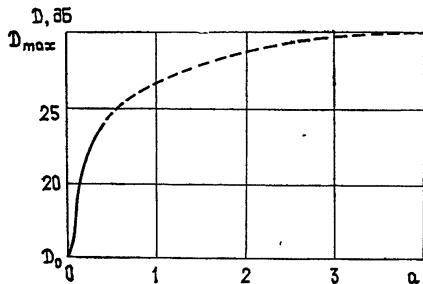


Рис. 3.

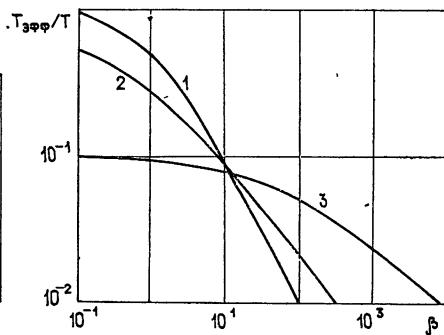


Рис. 4.

Рис. 3. Зависимость эффективного динамического диапазона компенсации  $D_{\text{АРУ}}$  от крутизны регулировочной характеристики АРУ. Кривая построена при  $\alpha = \alpha_\eta = 10^{-2}$ ,  $\langle \eta^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle = 2 \cdot 10^{-2}$ .

Рис. 4. Зависимость эффективного времени настройки системы от эффективной мощности помехи  $\beta$ . Кривые построены для схем: 1 — без регулировки ( $a = 0$ ,  $T = T_0$ ), 2 — с АРУ ( $a = 0,3$ ,  $T = 0,35 T_0$ ), 3 — с МАРУ ( $h = 10^{-1}$ ,  $T = 0,1 T_0$ ).

Введение АРУ (МАРУ), кроме увеличения диапазона эффективной компенсации, позволяет также уменьшить время настройки системы при воздействии на нее слабых помех. Как следует из (6) и (20), введение автоматической регулировки в цепь управления позволяет уменьшить постоянные времени интегрирующих фильтров в цепи обратной связи (уменьшить  $T$ ), что приводит к уменьшению времени настройки системы при малых  $\beta$  (см. рис. 4). Однако при этом несколько увеличивается время релаксации для больших  $\beta$  (АРУ как бы «выравнивает» времена релаксации).

Несложный анализ выражений для дисперсий управляющих напряжений (13), (14), (21) позволяет установить, что для одинаковых времен настройки  $T_{\text{эфф}}$  при введении инерционной АРУ ( $a > 0$ ) флуктуации  $W_{c,s}(t)$  несколько увеличиваются по сравнению со схемой без регулировки (из-за флуктуаций  $x(t)$ , см. (13)), а при введении МАРУ уменьшаются (из-за «идеального» ограничения огибающей, см. (18)).

Наряду с коэффициентом подавления помехи  $\varepsilon = \langle z^2 \rangle / k_0^2 \langle x^2 \rangle$  весьма интересно рассмотреть увеличение мощности шума на выходе системы  $\langle z^2 \rangle$  по сравнению с собственным шумом  $\langle \eta^2 \rangle$  схемы без компенсации. На рис. 5 построены отношения  $\langle z^2 \rangle / \langle \eta^2 \rangle$  в зависимости от  $\beta$  для разных схем автокомпенсации ( $\alpha = \alpha_\eta = 10^{-2}$ ,  $\beta_\eta = \gamma \langle \eta^2 \rangle = 10^{-1}$ ). Из приведенных графиков видно, что применение АРУ и особенно МАРУ в цепи управления может привести к существенному увеличению мощности шума на выходе системы. Из формул (16) и (22) несложно найти выражения для относительного приращения шума при больших  $\beta$  ( $\beta \gg a^{-2}, h^{-2}$ ):

$$\langle z^2 \rangle / \langle \eta^2 \rangle \approx 1 \quad \text{— для схемы без регулировки,}$$

$$\langle z^2 \rangle / \langle \eta^2 \rangle \approx 1 + \frac{a^2}{\beta_\eta} \quad \text{— для схемы с АРУ,}$$

$$\langle z^2 \rangle / \langle \eta^2 \rangle \approx 1 + \frac{1}{\beta_\eta h^2} \quad \text{— для схемы с МАРУ.}$$

Отсюда видно, что для устранения высокого уровня выходного шума в схемах с АРУ и МАРУ необходимо увеличивать коэффициенты усиления в цепи обратной связи  $\gamma$  или поднимать уровень ограничения  $V$  в схеме с МАРУ.

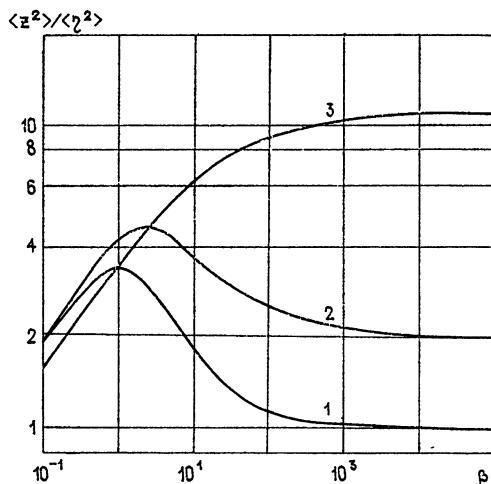


Рис. 5. Приращение мощности шума на выходе различных схем компенсации в зависимости от  $\beta$  ( $\gamma = \text{const}$ ):  
 1—без регулировки, 2—с инерционной АРУ ( $a=0,3$ ), 3—с МАРУ ( $h=1$ ).  
 Кривые даны для  $\alpha=\alpha_\eta = 10^{-2}$ ,  $\beta_\eta = \gamma \langle \eta^2 \rangle = 10^{-1}$ .

В заключение отметим, что результаты данной работы позволяют в зависимости от требуемых характеристик оптимальным образом выбрать схему компенсации и ее параметры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы радиолокации, под ред. Я. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
2. Л. А. Чечик, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 18, № 4, 67 (1975).
3. Б. Уидроу и др., ТИИЭР, 64, № 8, 37 (1976).
4. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, 22, № 7, 1401 (1978).
5. В. Гейбрисэл, ТИИЭР, 64, № 2, 55 (1976).
6. L. E. Vgennan and I. S. Reed, IEEE Trans., AES-7, № 4, 698 (1971).
7. G. W. Lank, IEEE Trans., AES-9, № 2, 328 (1973).
8. Г. П. Тартаковский, Динамика систем АРУ, изд. Сов. радио, М., 1957.
9. R. C. Bourgett, Can. J. Phys., 40, 782 (1962).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
3 февраля 1978 г.

#### STATISTICAL CHARACTERISTICS OF AUTOCOMPENSATOR WITH AVC IN THE CONTROL CIRCUIT

A. A. Mal'tsev, I. E. Pozumentov

The basic statistic characteristics of a single-channel autocompensator with AVC in the control circuit are found under the action of the Haussian noise effect (control voltage moments, non-compensated noise power, noise suppression coefficient, effective time of the system adjustment). The notion of the effective dynamic range of noise compensation is introduced. Various compensation schemes are compared: without control, with inertial AVC, with non-inertial IAVC.

УДК 538.574.2

## О КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТРАЖЕНИЯ И ТЕПЛОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ, БЛИЗКОЙ К СЛОИСТОЙ

B. L. Breхovskих

Рассматривается полубесконечная случайнно-неоднородная среда, при чем радиус корреляции неоднородностей по горизонтали велик по сравнению с радиусом корреляции по вертикали и длиной волны. Приведён вывод уравнения для коэффициента отражения, которое, в свою очередь, позволяет вывести уравнение Эйнштейна—Фоккера для плотности распределения вероятностей коэффициента отражения. Среднее значение энергетического коэффициента отражения найдено для двух предельных случаев: 1) поглощение в среде преобладает над рассеянием; 2) сильное рассеяние.

В работе [2] было рассчитано тепловое излучение слоистой случайнно-неоднородной среды. Расчет был основан на выводе уравнений для плотности распределения вероятностей коэффициента отражения. Оказывается, что аналогичный метод можно использовать и для слабо-не-слоистой среды.

Пусть диэлектрическая проницаемость среды имеет вид

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_0 & (z > 0) \\ \epsilon_1[1 + i\epsilon_2 + \tilde{\epsilon}(x, y, z)] & (-L \leq z \leq 0) \\ \epsilon_L & (z < -L) \end{cases},$$

где  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_L$  — действительные постоянные ( $\epsilon_2 \ll 1$ ), а  $\tilde{\epsilon}(x, y, z)$  — гауссова случайная функция, определяемая моментами вида

$$\langle \tilde{\epsilon}(x, y, z) \rangle = 0,$$

$$\langle \tilde{\epsilon}(x, y, z) \tilde{\epsilon}(x', y', z') \rangle = \sigma_{\epsilon}^2 \exp \left[ -\frac{|z - z'|}{l} - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{l_1^2} \right], \quad (1)$$

где  $l_1 \gg l$ , а угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций  $\tilde{\epsilon}$ . Случай  $l_1 \rightarrow \infty$  соответствует модели слоистой среды, рассмотренной в [1, 2]. Конкретный вид зависимости корреляционной функции от  $x$  и  $y$  не играет существенной роли, так как для расчетов понадобятся лишь функции вида

$$b_1(z, z') = \langle \frac{\partial \tilde{\epsilon}(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\epsilon}(x, y, z')}{\partial x} \rangle = \frac{2}{l_1^2} \sigma_{\epsilon}^2 \exp \left( -\frac{|z - z'|}{l} \right), \quad (1a)$$

$$b_2(z, z') = \langle \tilde{\epsilon}(x, y, z) \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}(x, y, z')}{\partial x^2} \rangle = -b_1(z, z').$$

Рассматривается задача об отражении плоской волны, падающей нормально на неоднородный слой из области  $z > 0$  и поляризованной

по оси  $x$ . Будем полагать, что выполняется условие  $(kl_1)^2 \gg 1$ , где  $k$  — волновое число. Тогда можно считать поле  $\mathbf{E}$  медленно меняющимся по поперечным координатам. Для наглядности можно ввести малый параметр  $\mu \ll 1$  и новые переменные  $\xi = \mu x$ ,  $\eta = \mu y$ , так что производные по поперечным координатам  $\partial E/\partial x = \mu(\partial E/\partial \xi)$  и  $\partial E/\partial y = \mu(\partial E/\partial \eta)$  являются величинами первого порядка малости. Из уравнения для электрического поля

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

получим следующую систему уравнений для его компонент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_x - \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi \partial z} + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi \partial \eta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_y - \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta \partial z} + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi \partial \eta} \right) &= 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_z - \mu \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi \partial z} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial \eta \partial z} \right) + \mu^2 \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что падающая волна  $\mathbf{E}_0 = (E_0, 0, 0)$ , отсюда получаем

$$E_x = E_x^{(0)} + \mu^2 E_x^{(2)} + \dots,$$

$$E_y = \mu^2 E_y^{(2)} + \mu^4 E_y^{(4)} + \dots,$$

$$E_z = \mu E_z^{(1)} + \mu^3 E_z^{(3)} + \dots,$$

где точками обозначены члены высших порядков малости. Уравнение для  $E_x$  с учетом первой малой поправки (порядка  $\mu^2$ ) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_x - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} = 0, \quad (4)$$

где  $E_z$  определяется из соотношения

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}. \quad (5)$$

Нас интересует в конечном счете вертикальная составляющая потока энергии, пропорциональная следующему выражению:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [E \operatorname{rot} \mathbf{E}^*]_z = \operatorname{Im} \left[ E_x^{(0)} \frac{\partial E_x^{(0)*}}{\partial z} + \mu^2 \left( E_x^{(0)} \frac{\partial E_x^{(2)*}}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + E_x^{(2)} \frac{\partial E_x^{(0)*}}{\partial z} - E_x^{(0)} \frac{\partial E_z^{(1)*}}{\partial \xi} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Основные расчеты проводятся в предположении  $\epsilon_0 = \epsilon_1$ ; переход к общему случаю осуществляется затем при помощи условий непрерывности на границе слоя величины  $E_x$  и  $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_y$ .

Рассмотрим область  $z > 0$ . Уравнение (4) переходит в скалярное волновое уравнение

$$\Delta E_x + k^2 E_x = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1.$$

$E_x$  можно представить в виде  $A_0 e^{-ikz} + B_0(x, y, z) e^{ikz}$ , где первое и второе слагаемые представляют собой соответственно падающую и отраженную волны. Амплитуда  $B_0(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} \right) + \dots, \quad (7)$$

где многоточием обозначены члены порядка  $\mu^4$  и выше. Компонента  $E_z$  выражается через  $B_0$  по формуле (5):

$$E_z = \frac{i}{k} \frac{\partial B_0}{\partial x} e^{ikz}.$$

Отношение вертикальных потоков энергии отраженной и падающей волн согласно (6) равно

$$\frac{s_{\text{отр}}}{s_{\text{пад}}} = \frac{1}{|A_0|^2} \left[ |B_0|^2 + \frac{1}{2k^2} \operatorname{Re} \left( -B_0 \frac{\partial^2 B_0^*}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 B_0^*}{\partial y^2} \right) \right].$$

Очевидно, что в силу симметрии задачи

$$\langle B_0 \frac{\partial^2 B_0^*}{\partial x^2} \rangle = \langle B_0 \frac{\partial^2 B_0^*}{\partial y^2} \rangle.$$

Обозначив  $K_0(x, y, z) = [B_0(x, y, z)]/A_0$ , получим

$$\frac{\langle s_{\text{отр}} \rangle}{s_{\text{пад}}} = \langle |K_0|^2 \rangle.$$

Таким образом, задача состоит в отыскании  $\langle |K_0|^2 \rangle$ . Так как эта величина не зависит от  $z$ , будем вычислять значение  $\langle |K_0(x, y, 0)|^2 \rangle$ .

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые применялись для случая слоистой среды [1, 2]. В области  $-L \leq z \leq 0$  полагаем  $E_x = A(x, y, z) e^{-ikz} + B(x, y, z) e^{ikz}$ ,  $B/A = K_1(x, y, z)$ . Поскольку вместо одной неизвестной функции  $E_x$  вводится две функции  $A$  и  $B$ , требуется связать их дополнительным условием. Это условие обеспечивает выполнение равенства  $K_1(x, y, 0) = K_0(x, y, 0)$  и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} e^{-ikz} + \frac{\partial B}{\partial z} e^{ikz} &= \frac{i}{2k} \left[ \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) e^{-ikz} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) e^{ikz} \right] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (A e^{-ikz} + B e^{ikz}) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Если теперь при помощи (5)–(8) записать условия непрерывности  $E_x$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial x}$  на границе  $z = 0$ , то получим  $A(x, y, 0) = A_0$ ,  $B(x, y, 0) = B_0(x, y, 0)$ .

Уравнения (4), (5), (8) позволяют выписать систему двух дифференциальных уравнений первого порядка по  $z$  для амплитуд  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{ik}{2} (i\epsilon_2 + \tilde{\epsilon})(A + B e^{2ikz}) - \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad + \frac{i}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\epsilon_2 + \tilde{\epsilon}) \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} e^{2ikz} \right) \right] - \frac{i}{4k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \times \end{aligned} \quad (9)$$

$$\times [(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(A + Be^{2ikz})],$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(Ae^{-2ikz} + B) + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) + \frac{i}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \times$$

$$\times \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \left( \frac{\partial A}{\partial x} e^{-2ikz} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right] + \frac{i}{4k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(Ae^{-2ikz} + B)]$$

(предполагалось, что  $\varepsilon_1/\varepsilon \approx 1 - (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})$ , т. е. флюктуации  $\tilde{\varepsilon}$  достаточно малы).

Для функции  $K_1(x, y, z)$  получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial z} &= \frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} + K_1 e^{ikz})^2 + \frac{i}{2k} \left\{ \frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2} + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 K_1}{\partial y^2} + \frac{2}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_1 \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_1 \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial K_1}{\partial x} \right] \times (10) \\ &\times (1 - K_1 e^{2ikz}) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial A}{\partial x} (e^{-ikz} - K_1 e^{ikz})^2 \right] \} + (F_x - F_y), \end{aligned}$$

где

$$F_x = \frac{i}{4kA} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (e^{-ikz} + K_1 e^{ikz})^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) A \right] \right\} + \frac{i}{4k} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}, \quad (11)$$

а  $F_y$  получается путем замены в (11) всех производных по  $x$  соответствующими производными по  $y$ . Заметим, что последнее слагаемое в (10) не влияет на величину  $\langle |K_1|^2 \rangle$ , поскольку, в силу симметрии задачи,  $\langle (F_x - F_y) K_1 \rangle = 0$ .

В нулевом приближении уравнения (9), (10) совпадают с уравнениями для слоистой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= -\frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(A + Be^{2ikz}) = -\frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})A(1 + K_1 e^{2ikz}), \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} &= \frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} + K_1 e^{ikz})^2. \end{aligned} \quad (12)$$

В дальнейшем будем считать горизонтальные координаты фиксированными:  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , а функции  $K_1$ ,  $A$ ,  $B$  и их производные — функциями одного аргумента  $z$ , зависящими от  $x_0$  и  $y_0$  как от параметров. Например, запись  $\partial K_1 / \partial x$  будет означать  $(\partial K_1(x, y, z) / \partial x)_{x=x_0, y=y_0}$ . Все производные  $\partial K_1 / \partial x$ ,  $\partial A / \partial x$  и т. д., стоящие в правой части уравнения (10), достаточно вычислить в нулевом приближении.

Метод вычисления величины  $\langle |K_1|^2 \rangle$  основан на том, что в данном случае уравнение в частных производных (10) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{df_i}{dz} = F_i(f_1, \dots, f_n, z) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13)$$

где набор функций  $\{f_i\}$  включает в себя  $K_1$ ,  $\partial K_1 / \partial x$ ,  $A$ ,  $\partial A / \partial x$  и т. д. Более подробные математические выкладки приведены в Приложении. При расчетах использован предложенный в [3] метод вывода УЭФ (уравнения Эйнштейна—Фоккера) для системы типа (13) с начальны-

ми условиями. Так как среда обладает поглощением, то при  $L \rightarrow \infty$  должно существовать стационарное распределение вероятностей для коэффициента отражения. В Приложении приводится система дифференциальных уравнений для определения стационарной плотности вероятностей  $P(Q)$ , где  $Q$  — модуль коэффициента отражения. Распределение по фазе предполагается равномерным. Решение в нулевом приближении, т. е. для слоистой среды, имеет вид (см. [6, 2])

$$P_0(Q) = \frac{4\alpha Q}{(1 - Q^2)^2} \exp\left(-\frac{2\alpha Q^2}{1 - Q^2}\right), \quad (14)$$

где

$$\alpha = \frac{2\epsilon_2}{\sigma_e^2 kl} (1 + 4k^2 l^2). \quad (15)$$

В случае слабо-неслоистой среды точного решения для  $P(Q)$  получить не удается. Решение получено для двух предельных случаев:  $\alpha \ll 1$  и  $\alpha \gg 1$ . Параметр  $\alpha$  является отношением коэффициента поглощения в среде к коэффициенту рассеяния, поэтому случай  $\alpha \ll 1$  соответствует среде с сильным рассеянием, а при  $\alpha \gg 1$  преобладающую роль играет поглощение. При расчетах удобно ввести новую переменную

$$v = \frac{Q^2}{1 - Q^2} \quad (0 \leq v \leq \infty).$$

При этом

$$P(v) = P(Q) \frac{dQ}{dv},$$

$$P_0(v) = 2\alpha e^{-2\alpha v}.$$

Для наиболее интересного случая  $\alpha \ll 1$   $P(v)$  имеет вид

$$P(v) = P_0(v) - \frac{8}{3\alpha(kl_1)^2} \left\{ (3 + 8k^2 l^2) \left[ \ln(v+1) + (v+1) - \frac{3}{v+1} + 2\alpha \ln \alpha \right] + \frac{8k^2 l^2}{3} \right\} \frac{e^{-2\alpha v}}{(v+1)^2}.$$

При  $\alpha \gg 1$

$$P(v) = P_0(v) + \frac{2\alpha}{(kl_1)^2} (1 - 2\alpha v) e^{-2\alpha v}.$$

Умножая  $P(v)$  на  $Q^2 = v/(v+1)$  и интегрируя по  $v$  от 0 до  $\infty$ , получим среднее значение  $\langle |K|^2 \rangle = \langle |K_0|^2 \rangle$ . Если  $\epsilon_0 \neq \epsilon_1$ , то следует предварительно выразить функцию  $\langle |K_0|^2 \rangle$  через  $K$  при помощи условий непрерывности  $E_x$  и  $(\text{rot } E)_y$  на границе  $z = 0$ , а также условия  $A(0) = r_0 B(0)$ , где

$$r_0 = \frac{k - k_0}{k + k_0}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}.$$

Для слоистой среды средний энергетический коэффициент отражения равен ([2])

$$\langle |K_0|^2 \rangle^{(0)} = 1 + 2\alpha \exp\left(\frac{2\alpha}{1 - r_0^2}\right) \text{Ei}\left(-\frac{2\alpha}{1 - r_0^2}\right). \quad (16)$$

В случае слабо-неслоистой среды

$$\langle |K_0|^2 \rangle = \langle |K_0|^2 \rangle^{(0)} + \Delta \langle |K_0|^2 \rangle.$$

Для 1)  $\alpha \ll 1$ : получены следующие выражения:

$$\Delta \langle |K_0|^2 \rangle = \frac{2}{\alpha(kl_1)^2} \left[ 1 - \frac{2r_0^2}{3} + 2 \left( \frac{2kl}{3} \right)^2 (5 - r_0^2) \right] \quad (17)$$

(этот результат вычислен в предположении  $r_0^2 \ll 1$ ;

2)  $\alpha \gg 1$ :

$$\Delta \langle |K_0|^2 \rangle = -\frac{1}{2\alpha(kl_1)^2} (1 - r_0^2)^2. \quad (18)$$

Полученные формулы справедливы при  $\Delta \langle |K_0|^2 \rangle \ll \langle |K_0|^2 \rangle^{(0)}$ , откуда следуют условия  $(kl_1)^2 \gg \alpha^{-1}$ ;  $(l_1/l)^2 \gg \alpha^{-1}$ , эквивалентные неравенству

$$\gamma \gg \frac{\sigma_e^2 l}{l_1^2}, \quad \gamma = \frac{k\varepsilon_2}{2}. \quad (19)$$

Это условие накладывает ограничение на глубину проникновения поля в неоднородную среду. Если коэффициент затухания слишком мал, то вследствие накапливающихся эффектов угол отклонения направления распространения волн от вертикали может стать большим. При этом уже нельзя было бы пренебречь членами высших порядков малости по  $\mu$  в уравнениях (4), (9) и т. д.

Строго говоря, для оценки применимости данного метода следует вычислить поправки следующего порядка и потребовать, чтобы они были малы. Ввиду сложности задачи сделать это не представляется возможным. По-видимому, на коэффициент  $\gamma$  следует наложить ограничение, вытекающее из следующих соображений: потребуем, чтобы поперечное смещение луча на длине затухания  $z_0 = \gamma^{-1}$  было много меньше горизонтального размера неоднородностей  $l_1$  (лучи, идущие от разных неоднородностей, не должны пересекаться). Оценку величины поперечного смещения луча можно произвести по формуле

$$l_{\perp}^2 \sim \frac{\sigma_e^2 l z_0^3}{l_1^2}$$

(см., например, [7]). Положив  $l_{\perp} \ll l_1$ , получим

$$\gamma^3 \gg \frac{\sigma_e^2 l}{l_1^4}.$$

Это условие является более жестким, чем (19).

Случай слабого рассеяния ( $\alpha \gg 1$ ) относится к области применимости метода малых возмущений (приближения однократного рассеяния). Для  $r_0 = 0$  этот метод дает  $\Delta \langle |K_0|^2 \rangle = -1/[2\alpha(kl_1)^2]$ , что совпадает с полученным выше результатом.

Яркостная температура теплового излучения рассчитывается по формуле

$$T_a = T_0(1 - \langle |K_0|^2 \rangle),$$

где  $T_0$  — термодинамическая температура среды.

На рис. 1 приведены графики зависимости яркостной температуры от длины волны для слаборассеивающей среды ( $\sigma_\varepsilon^2 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ). Выбраны значения параметров, характерные для антарктических льдов (см. [2, 4, 5]):  $\varepsilon_1 = 1,8$ ,  $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $l = 2$  мм. Пунктирная линия соответствует тепловому излучению слоистой среды. Кривые 1 и 2 представляют собой соответственно результаты данной работы и работы [6], где рассматривалось тепловое излучение неслоистой среды в борновском приближении (там же приведены результаты численного решения уравнений переноса для случая  $\alpha \sim 1$ , который здесь не рассматривается).

Несовпадение графиков 1 и 2 объясняется тем, что во втором случае значение  $\langle |K_0|^2 \rangle^{(0)}$  (коэффициент отражения от слоистой среды) вычислено в борновском приближении и отличается от точного значения (16).

Автор благодарен В. И. Татарскому за многочисленные обсуждения и полезные советы, касающиеся данной работы, а также Б. С. Абрамовичу, высказавшему ряд ценных замечаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнение (10) для коэффициента отражения  $K_1(x, y, z)$  неудобно для дальнейшего использования тем, что в него входит неизвестная функция  $A(x, y, z)$ , для которой граничное условие задано при  $z = 0$ , т. е. на верхней границе слоя. При выводе уравнения для плотности распределения вероятностей требуется иметь систему функций с начальными условиями в одной точке.

Введем новую функцию  $K(z)$ :

$$K = K_1 + \frac{1}{2k^2 A} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \Phi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \Phi_2 \right) - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial K_1}{\partial y} \right], \quad (\text{П.1})$$

где функции  $\Phi_1(x, y, z)$  и  $\Phi_2(x, y, z)$  удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = & -2ikK_1 + ik(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(1 + K_1 e^{2ikz})\Phi_1 - ik(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} - \\ & - K_1 e^{ikz})^2 - \frac{ik}{2}(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} + K_1 e^{ikz})^2, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -2ikK_1 + ik(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(1 + K_1 e^{2ikz})\Phi_2 + \frac{ik}{2}(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} + K_1 e^{ikz})^2,$$

с начальными условиями при  $z = -L$ :

$$(\Phi_1)_{z=-L} = -\frac{2k}{k_L} \frac{k - k_L}{k + k_L}, \quad (\Phi_2)_{z=-L} = -(\Phi_1)_{z=-L}, \quad k_L = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_L}.$$

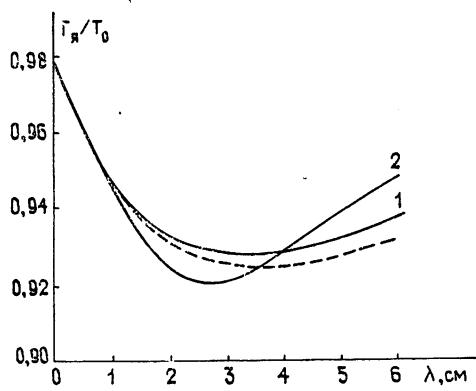


Рис. 1.

Физический смысл функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  таков:  $\Phi_1 = (\partial^2 K_{\text{в}} / \partial \theta^2)_{\theta=0}$ ,  $\Phi_2 = = (\partial^2 K_{\text{г}} / \partial \theta^2)_{\theta=0}$ , где  $K_{\text{в}}$  и  $K_{\text{г}}$  — коэффициенты отражения для плоской волны вертикальной и горизонтальной поляризаций, вычисленные в нулевом приближении (приближении слоистой среды),  $\theta$  — угол падения. В этом можно убедиться, сравнивая (П.2) с результатами работы [2], где рассчитаны коэффициенты отражения от слоистой среды для обеих поляризаций. Заметим, что второе слагаемое в правой части (П.1) имеет порядок  $\mu^2$ , т. е. функции  $K$  и  $K_1$  в приближении слоистой среды совпадают. После подстановки (П.1) в (10) получим замкнутое уравнение для  $K$ , в котором не содержится функция  $A$  и ее производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial z} = & \frac{ik}{2} (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(e^{-ikz} + Ke^{ikz})^2 + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \right) - \\ & - \frac{i}{2k} (1 - Ke^{2ikz}) \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial K}{\partial x} \right] - \frac{i}{4k} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Phi_1 \frac{\partial}{\partial x} \times \right. \\ & \times \left. \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})(1 + Ke^{2ikz}) \right] \right\} - \frac{i}{4k} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Phi_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \times \right. \right. \\ & \times (1 + Ke^{2ikz}) \left. \right] \left. \right\} + \frac{i}{4k} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial K}{\partial x} (1 + Ke^{2ikz}) + \right. \\ & + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} (e^{-ikz} + Ke^{ikz})^2 \left. \right] - \frac{i}{4k} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}) \frac{\partial K}{\partial y} (1 + Ke^{2ikz}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} (e^{-ikz} + Ke^{ikz})^2 \right] . \right. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Уравнения для функций  $\partial K / \partial x$ ,  $\partial K / \partial y$ , а также  $\partial \Phi_1 / \partial x$  и  $\partial \Phi_2 / \partial y$  легко получить соответствующим дифференцированием из (П.3) и (П.2). Так, например, для функции  $f(z) = \partial K / \partial x$  путем дифференцирования (П.3) по  $x$  получим

$$\frac{df}{dz} = ik(i\varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon})f(1 + Ke^{2ikz}) + \frac{ik}{2} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} (e^{-ikz} + Ke^{ikz})^2 + o(\mu^3).$$

В результате имеем систему уравнений типа (13), а точнее, следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dz} = & v_i(f, z) + \tilde{\varepsilon} F_i^{(0)}(f, z) + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} F_i^{(1)}(f, z) + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} F_i^{(2)}(f, z) + \\ & + \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial x^2} F_i^{(3)}(f, z) + \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial y^2} F_i^{(4)}(f, z) \quad (i = 1, \dots, 9), \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где  $f$  включает в себя функции  $K$ ,  $\partial K / \partial x$ ,  $\partial K / \partial y$ ,  $\partial^2 K / \partial x^2$ ,  $\partial^2 K / \partial y^2$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\partial \Phi_1 / \partial x$ ,  $\partial \Phi_2 / \partial y$ , а  $v_i$  и  $F_i^{(m)}$  — детерминированные функции. Начальные условия для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  были приведены выше, а значение  $K(-L)$  получено из условий непрерывности  $E_x$  и  $(\text{rot } E)_y$  при  $z = -L$ ,

$$K(-L) = \frac{k - k_L}{k + k_L}, \quad (\text{П.5})$$

и представляет собой френелевский коэффициент отражения на границе  $(\varepsilon_1, \varepsilon_L)$ . Поскольку значения  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $K$  при  $z = -L$  не зависят от

поперечных координат, все остальные функции  $f_i$  имеют нулевые начальные условия.

Для слоистой среды система (П.4) вырождается в одно уравнение (12). Вывод уравнения, которому подчиняется в этом случае плотность распределения вероятностей коэффициента отражения, приведен в работе [1]. В качестве модели функции  $\tilde{\epsilon}(z)$  был взят случайный телеграфный или обобщенный телеграфный процесс, для которого

$$\langle \tilde{\epsilon}(z) \tilde{\epsilon}(z') \rangle = \sigma_{\epsilon}^2 \exp\left(-\frac{|z - z'|}{l}\right).$$

Там же показано, что при определенных условиях, выполняющихся в большинстве практически важных случаев, полученное уравнение для плотности вероятности совпадает с уравнением Эйнштейна—Фоккера. Удобный метод вывода УЭФ для системы типа (13) предложен в [3]. Согласно результатам этой работы, уравнение Эйнштейна—Фоккера для плотности распределения вероятностей  $P_z(f)$  в точке  $z$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_z(f)}{\partial z} = & - \frac{\partial}{\partial f_k} \{ [v_k(f, z) + A_k(f, z)] P_z(f) \} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial f_k \partial f_l} [F_{kl}(f, f, z) P_z(f)], \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где

$$\begin{aligned} F_{kl}(f, f', z) = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left\{ \langle \tilde{\epsilon}(z) \tilde{\epsilon}(z') \rangle F_k^{(0)}(f, z) \times \right. \\ & \times F_l^{(0)}(f', z') + \langle \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x}(z) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x}(z') \rangle F_k^{(1)}(f, z) F_l^{(1)}(f', z') + \\ & + \langle \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y}(z) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y}(z') \rangle F_k^{(2)}(f, z) F_l^{(2)}(f', z') + \langle \tilde{\epsilon}(z) \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial x^2}(z') \rangle \times \\ & \times F_k^{(0)}(f, z) F_l^{(3)}(f', z') + \langle \tilde{\epsilon}(z) \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial y^2}(z') \rangle F_k^{(0)}(f, z) F_l^{(4)}(f', z') \Big\}, \\ A_k(f, z) = & \frac{\partial}{\partial f_l} F_{kl}(f, f', z)|_{f'=f}. \end{aligned}$$

При наличии системы уравнений (П.4) с выписанными в явном виде функциями  $v_i$ ,  $F_l^{(0)}$ ,  $F_l^{(1)}$  и т. д., схемы вывода УЭФ (П.6), а также формул (1), (1а), вывод уравнений для плотности вероятностей представляет собой чисто техническую задачу. Связанные с этим расчеты чрезвычайно громоздки и по этой причине здесь не приводятся. В определенной степени они облегчаются тем, что с самого начала делается предположение о равномерном распределении коэффициента отражения по фазе. Функции  $f_i$ , входящие в (П.4), являются комплексными, в то время как для вывода УЭФ требуется оперировать с действительными функциями. Поэтому необходимо каждой  $f_i$  поставить в соответствие две действительные функции. Удобно сделать это следующим образом:

$$K = Q e^{i\varphi},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x} &= (x_1 + iy_1)e^{i\varphi}, & \frac{\partial K}{\partial y} &= (x_2 + iy_2)e^{i\varphi}, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} &= (p_1 + iq_1)e^{i\varphi}, & \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} &= (p_2 + iq_2)e^{i\varphi}, \\ \Phi_1 &= (\xi_1 + i\eta_1)e^{i\varphi}, & \Phi_2 &= (\xi_2 + i\eta_2)e^{i\varphi}, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= (r_1 + is_1)e^{i\varphi}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= (r_2 + is_2)e^{i\varphi}.\end{aligned}$$

Тогда  $P(f) = P(Q, x_1, y_1, p_1, q_1, \dots, r_2, s_2)$ . Уравнение Эйнштейна — Фоккера для  $P(f)$ , проинтегрированное по всем аргументам, кроме  $Q$ , является уравнением для определения плотности вероятностей модуля коэффициента отражения  $P(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int P(f) dx_1 dy_1 \dots$ . В это уравнение, наряду с  $P(Q)$ , входят функции вида

$$\bar{p}_1(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p_1 P(Q, x_1, y_1, p_1, \dots) dx_1 dy_1 dp_1 \dots$$

Умножая УЭФ на  $p_1$  и интегрируя, получим, в свою очередь, уравнение для определения  $\bar{p}_1(Q)$ . В действительности не требуется выписывать УЭФ полностью в виде (П.6), а можно заранее удерживать лишь те члены, которые дадут ненулевой вклад при соответствующем интегрировании. Это значительно упрощает расчеты. В результате для расчета  $P(Q)$  была получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}Q \frac{d}{dQ} \left[ \frac{(1-Q^2)^2}{4Q} P(Q) \right] + \alpha Q P(Q) &= \frac{\alpha}{2} \bar{p} + \frac{Q}{2} \frac{d}{dQ} [(1-Q^2)\bar{p}] - \\ &- \frac{1-Q^2}{4Q} \frac{d}{dQ} [Q(\bar{p}\bar{\xi} + \bar{f})] + \frac{1}{2(kl_1)^2} \left[ \frac{1-Q^2}{Q} \frac{d}{dQ} (Q^2\bar{\xi}) + (3+8k^2l^2)\bar{\xi} \right];\end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dQ} \left[ \frac{(1-Q^2)^2}{4Q} \frac{d\bar{p}}{dQ} \right] + \alpha \frac{d\bar{p}}{dQ} &= -\frac{1-Q^2}{Q^2} \frac{d}{dQ} (Q\bar{\varphi}) + \frac{1}{(kl_1)^2} \times \\ &\times \left[ -\frac{d}{dQ} \left( \frac{(1-Q^2)^2}{Q} P_0(Q) \right) + 4(3+8k^2l^2)P_0(Q) \right];\end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$\frac{(1-Q^2)^2}{4} \left( \frac{d^2\bar{\varphi}}{dQ^2} - \frac{1}{Q} \frac{d\bar{\varphi}}{dQ} - \frac{3\bar{\varphi}}{Q^2} \right) + \alpha \left( Q \frac{d\bar{\varphi}}{dQ} - \frac{\bar{\varphi}}{Q} \right) = \frac{3+8k^2l^2}{(kl_1)^2} Q^2 P_0(Q); \quad (\text{П.9})$$

$$\frac{d}{dQ} \left[ \frac{(1-Q^2)^2}{4Q} \frac{d\bar{\xi}}{dQ} \right] + \alpha \frac{d\bar{\xi}}{dQ} = 2\alpha P_0(Q) - \frac{d}{dQ} \left[ \frac{(1-Q^2)^2}{Q} P_0(Q) \right]; \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned}\frac{(1-Q^2)^2}{4} \left( \frac{d^2\bar{f}}{dQ^2} - \frac{1}{Q} \frac{d\bar{f}}{dQ} - \frac{3\bar{f}}{Q^2} \right) + \alpha \left( Q \frac{d\bar{f}}{dQ} - \bar{f} \right) &= 2\alpha \bar{\varphi} + 2(1-Q^2) \times \\ &\times \frac{d}{dQ} (Q\bar{\varphi}) - (1-Q^2) \frac{d}{dQ} (\bar{\varphi}\bar{\xi}) - \frac{2}{Q} \bar{\varphi}\bar{\xi} + \frac{Q}{(kl_1)^2} [(3+8k^2l^2)\bar{\xi}] + \\ &+ 2Q(1+8k^2l^2)P_0(Q),\end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где приняты следующие обозначения:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 = \bar{p}_2, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2,$$

$$\varphi = x_1^2 - y_1^2, \quad f = (x_1 r_1 + x_2 r_2) - (y_1 s_1 + y_2 s_2),$$

$\alpha$  и  $P_0(Q)$  определяются согласно (14), (15). Границными условиями служат требования ограниченности всех производных от  $K$  по поперечным координатам при  $Q = 0$  и  $Q = 1$ . Точного решения для  $P(Q)$  получить не удается из-за невозможности проинтегрировать уравнения (П.9), (П.11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1040 (1977).
2. В. Л. Бреховских, В. И. Татарский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, № 2, 144 (1977).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 706 (1973).
4. А. С. Гурвич, В. И. Калинин, Д. Т. Матвеев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 2, № 12, 1247 (1973).
5. L. Tsang and J. A. Kong, Radio Sci., 11, № 7, 593 (1976); 11, № 7, 599 (1976).
6. Б. С. Абрамович, А. И. Дятлов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1222 (1975).
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
1 июля 1977 г.,  
после переработки  
21 августа 1978 г.

#### THE REFLECTION COEFFICIENT AND THERMAL RADIATION OF A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM CLOSE TO A STRATIFIED ONE

V. L. Brekhovskikh

A semi-infinite randomly-inhomogeneous medium is considered, the horizontal correlation radius of inhomogeneities being large as compared to the vertical correlation radius and the wavelength. The equation is derived for the reflection coefficient which in its turn permits to derive the Einstein—Fokker equation for the probability distribution density of the reflection coefficient. The mean energetic reflection coefficient is found for two limiting cases: 1. Absorption in the medium prevails over scattering. 2. Strong scattering.

УДК 538.574.4

## МЕТОД МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*B. E. Осташев, B. I. Татарский*

Для решения задач о распространении волн в случайно-неоднородных средах предлагается метод многократного рассеяния вперед (ММРВ). Сущность этого метода заключается в том, что поле волны, подчиняющейся волновому уравнению, аппроксимируется суммой полей всех многократно рассеянных вперед волн. ММРВ позволяет обобщить марковское приближение метода параболического уравнения (МПУ) на пучки с большой угловой шириной («широкие» пучки), немалоугловое (интегральное) рассеяние, а также более последовательно учесть как анизотропию среды, так и дифракционные эффекты. В настоящей работе, используя ММРВ, вычисляется среднее поле и его продольная корреляция, а уравнение для поперечной корреляционной функции, при условии ее квазиоднородности, сводится к уравнению переноса излучения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. СРАВНЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ММРВ И МПУ

Как известно [1], в марковском приближении МПУ осуществляется учет многократного рассеяния. В этом приближении МПУ позволяет просто и наглядно получать замкнутые уравнения для моментов поля любого порядка. С другой стороны, МПУ применим лишь для узких пучков и в малоугловом приближении. В настоящей работе предлагается ММРВ, который позволяет избавиться от этих ограничений. Сущность ММРВ заключается в том, что поле  $U$ , подчиняющееся волновому уравнению, аппроксимируется полем  $E$  — первым членом ряда по кратности обратного рассеяния, являющимся суммой всех многократно рассеянных вперед волн, не испытавших обратного рассеяния [2].

Мы будем рассматривать следующую задачу. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\mathbf{r}) = 1$  при  $x \leq 0$ , и  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) = 1 + \epsilon(\mathbf{r})$  при  $x > 0$ . Здесь  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$  — гауссова случайная функция со средним значением, равным нулю. Слева на случайно-неоднородную среду падает волна  $E_0$ . Нас интересуют характеристики случайного поля  $E$  в среде.

В ММРВ поле  $U$  аппроксимируется полем  $E$ , в МПУ — подчиняющимся параболическому уравнению полем  $V$ . Сравним уравнения для полей  $E$  и  $V$ . Поле  $E$  подчиняется интегральному уравнению [2]:

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) + k^2 \int_0^x dx_1 \int d^3 p_1 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_1), \quad (1.1)$$

где  $G_0(\mathbf{r}) = \exp(ikr)/4\pi r$  — функция Грина,  $\mathbf{r} = (x, \rho)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. В (1.1) и далее  $x > 0$ . Интегральный вид волнового уравнения совпадает с (1.1), если в последнем верхний предел интегрирования по  $x_1$  положить равным  $\infty$ . Интегрирование по  $x_1$  до  $x$  в (1.1) приводит к тому, что в поле  $E$  не входят волны, испытавшие обратное

рассеяние. Поэтому  $E$  хорошо аппроксимирует  $U$ , если выполняются условия малости обратного рассеяния\* [2]

$$ka \gg 1, \quad k\sigma^2 a \ll 1. \quad (1.2)$$

В (1.2)  $a$  — радиус корреляции  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\sigma^2 = \langle \tilde{\epsilon}^2 \rangle$ .

Уравнение для  $V$  также запишем в интегральном виде:

$$V(r) = \frac{2k}{i} \int d^2 \rho_1 \tilde{G}_0(x, \rho - \rho_1) E_0(0, \rho_1) + k^2 \int_0^x dx_1 \int d^2 \rho_1 \times \\ \times \tilde{G}_0(r - r_1) \tilde{\epsilon}(r_1) V(r_1). \quad (1.3)$$

В правой части (1.3) первое слагаемое, которое мы обозначим  $V_0$ , играет роль падающей волны, а  $\tilde{G}_0(x, \rho) = \exp\left(i k x + \frac{i k \rho^2}{2x}\right) / 4\pi x$  является френелевским приближением  $G_0$ . Поле  $V$  не содержит волн, испытавших обратное рассеяние (интегрирование по  $x_1$  в (1.3) распространяется до  $x$ ). Кроме пренебрежения волнами с обратным рассеянием, что правомочно при условиях (1.2), в (1.3) сделаны еще два приближения: функции  $G_0$  и  $E_0$  в (1.1) заменяются в (1.3) на  $\tilde{G}_0$  и  $V_0$ . Эти замены не исказают вид поля, если

$$\lambda \ll x, \quad \rho^2 \ll x^2, \quad k\rho^4 \ll x^3. \quad (1.4)$$

Если ввести диаметр падающего пучка  $l$ , то условия (1.4), используя оценки для угловой расходимости пучка, можно записать в виде

$$1 \ll k^2 \min(a^2, l^2), \quad \lambda \ll x \ll k^3 \min(a^4, l^4). \quad (1.5)$$

Итак, границами применимости уравнения для  $E$  являются условия (1.2), а для уравнения (1.3) — условия (1.2), (1.4) или (1.5). Последние два условия ограничивают наше рассмотрение узкими пучками  $kl \gg 1$  и малоугловым интегральным рассеянием  $x \gg \rho$ . Таким образом, ММРВ можно рассматривать как обобщение МПУ на широкие пучки и немалоугловое (интегральное) рассеяние (однако здесь сохраняется условие малости угла рассеяния на одной неоднородности —  $ka \gg 1$ ). С другой стороны, для широких пучков и в малоугловом приближении (условия (1.4) или (1.5)) ММРВ совпадает с МПУ. Это позволяет дать обоснование МПУ в рамках теории многократного рассеяния, что представляет самостоятельный интерес [3].

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ПОЛЯ $E$

Дальнейшая часть работы посвящена анализу первых и вторых моментов поля  $E$ . В данном разделе получим уравнения для этих моментов. Для этого применим к (1.1) диаграммную технику [4]. Для того, чтобы замкнуть уравнения Дайсона для  $\bar{E}$  и Бете—Солпитера для  $W(r, r') = \langle E(r) E^*(r') \rangle$ , будем рассматривать их в приближении Бурре (ПБ) и в лестничном приближении.

Полученные так замкнутые уравнения для  $\bar{E}$  и  $W$  гораздо проще исследовать в спектральном виде. Поэтому введем операторы  $\bar{M}$  и  $\bar{L}_\rho$ :

\* Здесь и в дальнейшем, вплоть до (3.4), при оценках границ применимости считаем, что флуктуации  $\tilde{\epsilon}$  изотропны.

$$\begin{aligned}\overset{\vee}{M}[\varphi] &= \int d^2x \exp(i\kappa\rho + i\sqrt{k^2 - x^2}x) \varphi(x, x), \\ i\sqrt{k^2 - x^2} &= -\sqrt{x^2 - k^2} \quad \text{при } x > k, \\ \overset{\vee}{L}_p[\varphi] &= \int d^2x \exp(i\kappa\rho) \varphi(x, x).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Операторы  $\overset{\vee}{M}$  и  $\overset{\vee}{L}_p$  выражают разложение по плоским волнам и преобразование Фурье по поперечным координатам. При  $k < x$  неоднородные волны, входящие в (2.1), затухают вдоль оси  $x$ . Так как  $ka \gg 1$ , то ими мы будем пренебрегать, т. е. будем считать, что  $\kappa > x$ . Направление распространения каждой из плоских волн в (2.1) определяется единичным вектором  $\mu = (\mu_{||}, \mu_{\perp})$ . Здесь  $\mu_{||} = \sqrt{k^2 - x^2}/k = \cos\theta$  и  $\mu_{\perp} = x/k$  — проекции вектора  $\mu$  на ось  $x$  и на плоскость  $\rho$ , а  $\theta$  — угол между  $\mu$  и осью  $x$ .

В уравнении Дайсона в ПБ разложим  $\bar{E}$  и  $E_0$  по плоским волнам с амплитудами  $\bar{e}(x, x)$  и  $e_0(x)$ :  $\bar{E} = \overset{\vee}{M}[\bar{e}]$ ,  $E_0 = \overset{\vee}{M}[e_0]$ . От корреляционной функции  $\bar{e} B(x, \rho)$  перейдем к  $F(x, x)$ :  $B = \overset{\vee}{L}_p[F]$ . Тогда уравнение для  $\bar{e}$  примет вид

$$\begin{aligned}\bar{e}(x, x) = e_0(x) - \frac{k^4}{4\sqrt{k^2 - x^2}} \int_0^x dx_1 \int_0^{x-x_1} dx_2 \int \frac{d^2x_1}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} \times \\ \times \bar{e}(x_1, x) F(x_2, x - x_1) \exp[ix_2(\sqrt{k^2 - x_1^2} - \sqrt{k^2 - x^2})].\end{aligned}\quad (2.2)$$

В уравнении Бете—Солпитера перейдем к новым переменным  $R = (\rho + \rho')/2$  и  $\rho_0 = \rho - \rho'$ , а от функции  $W(x, x'; R, \rho_0)$  — к  $w(x, x'; p, x)$ :  $W = \overset{\vee}{L}_R \overset{\vee}{L}_{\rho_0}[w]$ . Поле  $\bar{E}$  здесь удобнее представить в виде  $\bar{E} = \overset{\vee}{L}_p[f]$ . Среднюю функцию Грина  $\bar{G}$ , вычисленную ММРВ, также представим в виде  $\bar{G} = \overset{\vee}{L}_p[g]$ . При этом  $g = f$ , если  $e_0 = i/(8\pi^2\sqrt{k^2 - x^2})$ . После этих преобразований уравнение Бете—Солпитера в лестничном приближении принимает вид

$$\begin{aligned}w(x, x'; p, x) = f\left(x, x + \frac{p}{2}\right) f^*\left(x', x - \frac{p}{2}\right) + (2\pi k)^4 \times \\ \times \int_0^x dx_1 \int_0^{x'} dx_2 \int d^2x_1 g\left(x - x_1, x + \frac{p}{2}\right) g^*\left(x' - x_2, x - \frac{p}{2}\right) F(x_1 - \\ - x_2, x - x_1) w(x_1, x_2; p, x_1).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Заметим, что для марковского приближения ММРВ (т. е. когда  $B(x, \rho) = \delta(x) A(\rho)$  [1]) уравнения (2.2), (2.3) являются точным следствием причинного по  $x$  уравнения (1.1).

Уравнения (2.2), (2.3) являются исходными для дальнейшего анализа.

### 3. СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ПОЛЯ

Сначала рассмотрим уравнение (2.2). В данном разделе мы приближенно решим это уравнение, оценим границы применимости полученного решения, рассмотрим  $\bar{e}$  при некоторых конкретных видах функции  $B$ , а также сравним  $\bar{E}$  с  $\bar{V}$ .

Будем считать, что в (2.2)

$$r = \frac{x}{\cos \theta} \gg a, \quad \gamma a = \frac{k^2 \sigma^2 a^2}{4} \ll 1, \quad (3.1)$$

где  $\gamma$  — коэффициент экстинкции  $\bar{e}$ , равный, как будет ясно из дальнейшего,  $\frac{k^2 \sigma^2 a}{4}$ . Интеграл по  $x_2$  в (2.2) представим как интеграл от 0 до  $\infty$  минус интеграл от  $(x - x_2)$  до  $\infty$ . Второй из этих интегралов при выполнении (3.1) мал по сравнению с первым. После пренебрежения им (2.2) легко решается:

$$\bar{e}(x, \mathbf{x}) = \exp \left( -\frac{kx \beta(\mathbf{x})}{\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \right) e_0(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

В (3.2)  $\beta = \gamma + i\varphi$  — комплексный коэффициент экстинкции ( $\gamma$  и  $\varphi$  — действительные), равный

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{k^3}{4 \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \int_0^\infty dx \int d^2 \mathbf{x}_1 F(x, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \exp [ix(\sqrt{k^2 - \mathbf{x}_1^2} - \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2})]. \quad (3.3)$$

Выражение (3.2), полученное ММРВ, определяет амплитуду плоской волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде в направлении вектора  $\mu$ . Напомним, что  $k > x$ , так что в (3.2) величина  $kx/\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} = r$  — длина пути плоской волны в среде до точки наблюдения. Итак, согласно (3.2),  $\bar{e}$  экспоненциально затухает в направлении  $\mu$  с коэффициентом экстинкции  $\gamma$  и, кроме того, содержит фазовый множитель  $\exp(-i\varphi r)$ .

Рассмотрим теперь границы применимости (3.2). Ими являются, прежде всего, условия (1.2) и (3.1). (Условие применимости ПБ —  $\gamma a \ll 1$  уже входит в (3.1).) Далее, в ММРВ мы пренебрегаем волнами с обратным рассеянием. Поэтому мы можем рассматривать лишь такие волны, направление распространения которых отстоит от плоскости  $\rho$  больше чем на угол рассеяния на одной неоднородности, т. е. существует ограничение на  $\theta$ . Оно имеет вид  $\pi/2 - \theta \gg \sqrt{1/ka}$  и получается из сравнения  $\bar{e}$  и  $\bar{u}$ , где  $\bar{U} = \bar{M}[\bar{u}]$ , а  $\bar{U}$  — решение уравнения Дайсона в ПБ для волнового уравнения. Объединяя ограничение на  $\theta$  с (1.2) и (3.2) и обобщая их на анизотропные среды, получаем границы применимости выражения (3.2):

$$r = \frac{x}{\cos \theta} \gg a(\theta), \quad ka(\theta) \gg 1, \quad \gamma(\theta) a(\theta) = \frac{k^2 \sigma^2 a^2(\theta)}{4} \ll 1,$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta \gg \sqrt{\frac{1}{ka(\theta)}}. \quad (3.4)$$

В (3.4)  $a(\theta)$  и  $\gamma(\theta) = k^2 \sigma^2 a(\theta)/4$  — радиус корреляции  $\varepsilon$  и коэффициент экстинкции  $e$  в направлении, составляющем угол  $\theta$  с осью  $x^*$ .

Перейдем к рассмотрению комплексного коэффициента экстинкции  $\beta$ . Его действительную часть удобно представить в виде

\* При  $\theta < \theta_d \sim 1/ka(\pi/2)$  и  $a(\pi/2) \ll \sqrt{a(0)\lambda}$  в (3.4)  $a(\theta)$  надо заменить на  $a_{\text{эфф}}$ , а  $\gamma(\theta)$  (так как в этом случае  $|\varphi| \gg \gamma$ ) — на  $|\varphi| \sim k^2 \sigma^2 a_{\text{эфф}} \ln(2a(0)/a_{\text{эфф}})$  (см. (3.8) и далее).

$$\gamma = \frac{k^4 \pi}{4} \int_{\theta < \pi/2} d^2 \mu \Phi(k \mu'_\parallel - k \mu_\parallel, k \mu'_\perp - k \mu_\perp), \quad (3.5)$$

где  $\Phi(p, \kappa) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} F(x, \kappa)$  — трехмерный спектр флюктуаций.

Минимую часть  $\beta$  удобнее определять из (3.3). Далее, согласно (3.3),  $\beta$  определено, если известны функции  $F$  или  $B$ . Мы рассмотрим два случая: дельта-корреляцию  $\epsilon$  вдоль оси  $x$  и корреляционную функцию гауссова вида

$$B(x, \rho) = \frac{2 \sigma^2}{\sqrt{2}} \exp \left( -\frac{x^2}{a^2(0)} - \frac{\rho^2}{a^2(\pi/2)} \right). \quad (3.6)$$

В марковском приближении  $F$  и  $B$  дельта-коррелированы вдоль оси  $x$ . Следовательно, (3.2) является точным следствием как (2.2), так поэому и (1.1). В этом случае  $\varphi = 0$ , а  $\gamma(\theta) = k^2 \sigma^2 a(0)/4 \cos \theta$ . Такой вид  $\gamma(\theta)$  легко объясним: в марковском приближении среда разбита на слои, перпендикулярные оси  $x$ , и радиус корреляции неоднородностей в направлении  $\theta$  равен  $a(\theta) = a(0)/\cos \theta^*$ .

Для корреляционной функции гауссова вида (3.6) рассмотрим сначала случай, когда радиус первой зоны Френеля, вычисленный на расстоянии  $x = a(0)$ , много меньше  $a(\pi/2)$ :  $\sqrt{a(0)\lambda} \ll a(\pi/2)$ . В этом случае, как легко можно показать,  $\gamma \gg |\varphi|$ . Например, если  $E_0 = e^{ikx}$ , то  $\gamma(0) = k^2 \sigma^2 a(0)/4$ ,  $\varphi(0) = -\frac{k^3 \sigma^2 a^2(0)}{2 \sqrt{\pi} a^2(\pi/2)}$  и  $|\varphi|/\gamma = a(0)\lambda/a^2(\pi/2) \ll 1$ .

Зависимость  $\gamma$  от  $\theta$  получим, подставляя соответствующий (3.6) спектр  $\Phi$  в (3.5):

$$\gamma(\theta) = \frac{k^2 \sigma^2 a(\theta)}{4}, \quad a(\theta) = \frac{a(0) a(\pi/2)}{\sqrt{a^2(0) \sin^2 \theta + a^2(\pi/2) \cos^2 \theta}}. \quad (3.7)$$

Согласно (3.7) зависимость  $\gamma$  от  $\theta$  определяется зависимостью  $a$  от  $\theta$ . При этом  $a(\theta)$  — длина пути волны, идущей под углом  $\theta$  в эллипсоидальной неоднородности, полуоси которой вдоль оси  $x$  и в плоскости  $\rho$  равны  $a(0)$  и  $a(\pi/2)$ . Для изотропной среды  $a(0) = a(\pi/2) = a$  и эллипсы переходят в окружности, так что  $a(\theta) = a$ ,  $\gamma(\theta) = k^2 \sigma^2 a/4$ .

Иначе обстоит дело при  $\sqrt{a(0)\lambda} \gg a(\pi/2)$  и  $\theta < \theta_d$  ( $\theta_d \sim 1/ka(\pi/2)$  — угол дифракционной расходимости нормально падающей на среду волны). Здесь становятся существенными дифракционные эффекты. Подставляя в (3.5) и (3.3)  $\Phi$  и  $F$ , соответствующие (3.6), имеем

$$\beta = \gamma + i\varphi = \frac{k^3 \sigma^2 a^2(\pi/2) \sqrt{\pi}}{8} - i \frac{k^3 \sigma^2 a^2(\pi/2)}{4 \sqrt{\pi}} \ln \left( \frac{2a(0)}{ka^2(\pi/2)} \right). \quad (3.8)$$

Согласно (3.8)  $|\varphi|$  велико по сравнению с  $\gamma$ , а в выражении для  $\gamma$  эффективный радиус корреляции  $a_{\text{эфф}} = (ka^2(\pi/2)\sqrt{\pi})/8$ . Такой вид  $a_{\text{эфф}}$  легко объясним: неоднородности здесь сильно вытянуты вдоль оси  $x$  ( $a(0) \gg a^2(\pi/2)k \gg a(\pi/2)$ ), и из-за дифракционной расходимости нормально падающая на среду волна пересекает неоднородности не вдоль, а попрек. Это и приводит к тому, что  $a_{\text{эфф}} \sim a(\pi/2)/\theta_d \sim ka^2(\pi/2)$ . При  $\theta > \theta_d$  дифракционные эффекты практически не влияют на направление распространения волны. В этом случае коэффициент экстинкции дается выражением (3.7).

\* В марковском приближении МПУ  $a(\theta) = a(0)$ , см. [1].

И в заключении этого раздела сравним  $\bar{E}$  с решением  $\bar{V}$  исходного уравнения МПУ (1.3) в марковском приближении [1]. Поле  $\bar{E} = \hat{M}[\bar{e}]$  (см. (2.1) и (3.2)). Поле  $\bar{V}$  представим в аналогичном виде:  $\bar{V} = \hat{M}_\pi[\bar{v}]$ . Здесь  $\hat{M}_\pi$  определяется выражением (2.1), если в нем положить  $\sqrt{k^2 - x^2} = k^2 - (x^2/2k)$ , а  $\bar{V} = \exp(-k^2 \sigma^2 a(0)x/4)e_0(x)$ . Итак,  $\bar{E}$  отличается от  $\bar{V}$  в двух отношениях. Во-первых — приближенной заменой  $\hat{M}$  на  $\hat{M}_\pi$ . Такая замена при  $\bar{e} \equiv 0$  соответствует замене  $E_0$  в (1.1) на  $V_0$  в (1.3) и не искажает вид поля при условиях (1.4), (1.5). Во-вторых,  $e$  заменяется на  $\bar{v}$ . Но  $\bar{v}$  затухает вдоль оси  $x$  с коэффициентом экстинкции, не зависящим от направления. В то же время  $\bar{e}$  затухает вдоль направления распространения плоской волны с коэффициентом экстинкции, зависящим от направления. Кроме того,  $\bar{e}$  содержит, вообще говоря, фазовый множитель и при  $\sqrt{a(0)\lambda} \gg a(\pi/2)$  учитывает дифракцию на неоднородностях среды. Суммируя выше сказанное, получим, что  $\bar{E}$  в отличие от  $\bar{V}$  хорошо описывает не только узкие, но и широкие пучки, а также учитывает анизотропию и дифракцию на неоднородностях среды.

#### 4. ПРОДОЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЯ

Полученное в предыдущем разделе выражение (3.2) для  $\bar{e}$  дает также и явное выражение для функций  $f$  и  $g$ , входящих в уравнение Бете—Соллитера (2.3). Таким образом, уравнение (2.3) для продольной корреляционной функции  $w(x, x'; p, \mathbf{x})$  становится замкнутым. Однако для поперечной корреляционной функции  $w(x; p, \mathbf{x}) \equiv w(x, x' = x; p, \mathbf{x})$  оно не замкнуто, так как при  $x' = x$  в правой части (2.3) остается  $w(x, x'; p, \mathbf{x})$ . Для того, чтобы замкнуть уравнение для  $w(x; p, \mathbf{x})$ , в данном разделе вычисляется  $w(x, x'; p, \mathbf{x})$ , что представляет также и самостоятельный интерес.

Положив, для определенности, в уравнении (2.3)  $x > x'$  и продифференцировав его по  $x$ , получим некоторое интегродифференциальное уравнение. Если в полученном уравнении пренебречь интегральным членом в правой части, то оно легко решается, и мы получаем следующее выражение для продольной корреляции:

$$w(x, x'; p, \mathbf{x}) = \exp \left\{ \left[ i \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} - \frac{k \beta(\mathbf{x})}{\sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2}} \right] \times \right. \\ \left. \times (x - x') \right\} w(x'; p, \mathbf{x}), \quad x > x'. \quad (4.1)$$

Интегральным же членом можно пренебречь при некотором новом, по сравнению с (3.4), ограничении на  $\theta$ :  $(\pi/2) - \theta \gg \gamma(\theta)a(0)$ . Отметим, что  $w(x; p, \mathbf{x})$  правильно описывает поперечную корреляцию поля  $U$  лишь при условии  $\sigma_{\text{отр}} x \ll 1$ , где  $\sigma_{\text{отр}}$  — эффективный поперечник рассеяния назад из единицы объема. Итак, границами применимости (4.1) являются условия (3.4) и

$$\frac{\pi}{2} - \theta \gg \gamma(\theta)a(0) = \frac{k^2 \sigma^2 a(\theta)a(0)}{4}, \\ \sigma_{\text{отр}} x \ll 1. \quad (4.2)$$

Рассмотрим (4.1) подробнее. Для этого разложим  $E$  по плоским волнам:  $E = \hat{M}[e]$ . Переходя в (4.1) к  $e(x, \mathbf{x})$ , получим:

$$\begin{aligned} \left\langle e\left(x, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) e^*\left(x', \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \right\rangle &= \frac{\bar{e}\left(x - x', \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)}{e\left(0, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)} \times \\ &\times \left\langle e\left(x', \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) e^*\left(x', \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \right\rangle, \quad (4.3) \\ &x > x'. \end{aligned}$$

Согласно (4.3) продольная корреляция двух плоских волн, распространяющихся в направлениях, соответствующих векторам  $\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$  и  $\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ , равна произведению их поперечной корреляции в плоскости  $x' = \text{const}$  и среднего значения амплитуды первой из волн при распространении ее от этой плоскости до плоскости  $x = \text{const}$  в направлении, соответствующем  $\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ .

В марковском приближении ММРВ (4.1) и (4.3) являются точными следствиями как (2.3), так поэтому и (1.1). В марковском приближении МПУ выражение для продольной корреляции сохраняет вид формулы (4.3), однако затухание  $\bar{v}$  вычисляется при этом уже не вдоль направления, соответствующего  $\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$ , а вдоль оси  $x$ .

Рассмотрим важный случай нормального падения плоской волны на среду. В этом случае  $W(x, x'; \mathbf{R}, \rho_0)$  не зависит от  $\mathbf{R}$ , а

$$w(x, x'; \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{p}) w(x, x'; \mathbf{x}). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), видим, что плоские волны, входящие в (4.3), распространяются в одном и том же направлении  $\mathbf{x}$ , а саму эту формулу можно интерпретировать как следствие дельта-коррелированности вдоль направления распространения волн.

Выражение для  $w(x, x'; \mathbf{p}, \mathbf{x})$  при  $x' > x$  аналогично выражению (4.1) для  $w(x, x'; \mathbf{p}, \mathbf{x})$  при  $x' < x$  и может быть получено подобно ему. Эти выражения связывают продольную корреляцию с поперечной, что позволяет замкнуть уравнение для  $w(x; \mathbf{p}, \mathbf{x})$  (см. начало раздела). Итак, замкнутое уравнение для  $w(x; \mathbf{p}, \mathbf{x})$  имеет вид

$$\begin{aligned} w(x; \mathbf{p}, \mathbf{x}) &= f\left(x, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) f^*\left(x, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) + (2\pi k)^4 \int_0^x dx_1 \times \\ &\times \int d^2 x_1 w(x_1; \mathbf{p}, \mathbf{x}_1) g\left(x - x_1, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) g^*\left(x - x_1, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \times \quad (4.5) \\ &\times \int_0^{x-x_1} dx_2 F(x_2, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \left[ \tilde{f}\left(-x_2, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \tilde{f}^*\left(x_2, \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{f}^*\left(-x_2, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \tilde{f}^*\left(x_2, \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

где  $\tilde{f}(x, \mathbf{x}) = f(x, \mathbf{x})$  при  $e_0(\mathbf{x}) = 1$ .

## 5. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПОЛЯ К УРАВНЕНИЮ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ (УПИ)

Последний раздел работы посвящен анализу поперечной корреляции. Исходным уравнением для этого анализа является полученное выше уравнение (4.5). В правой части (4.5) в соответствии с выводом выражения для  $\epsilon$  верхний предел интегрирования по  $x_2$  полагаем равным  $\infty$ . Дифференцируя после этого (4.5) по  $x$ , получаем с учетом (3.4) следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x; p, \mathbf{x})}{\partial x} = & \left[ i \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} - i \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} - \right. \\ & - \frac{k \beta \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)}{\sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2}} - \frac{k \beta^* \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)}{\sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2}} \Big] w + \\ & + \frac{\pi k^4}{2 \sqrt{\left[ k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2 \right] \left[ k^2 - \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2 \right]}} \int d^2 \mathbf{x}_1 w(x; p, \mathbf{x}_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx' \times \\ & \times F(x', \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \left\{ \exp \left[ ix' \left( \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} - \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[ -ix' \left( \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} - \sqrt{k^2 - \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В случае нормального падения плоской волны на среду это уравнение совпадает с УПИ (см. (5.9)). Границами применимости (5.1) являются условия (3.4) и (4.2). Уравнение (5.1) допускает рассмотрение как узких, так и широких пучков. Однако оно довольно громоздко. Если же ограничить ширину пучка условием квазиоднородности  $W(x; R, \rho_0)$  по  $R$ :

$$\tilde{R} \gg \max(\tilde{\rho}_0, a(\theta)), \quad (5.2)$$

где  $\tilde{R}$  и  $\rho_0$  — характерные масштабы изменения  $W$  по  $R$  и  $\rho_0$ , то (5.1) существенно упрощается и сводится к УПИ. Действительно, в этом случае в (5.1) везде можно положить  $\mathbf{x} \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \approx \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_1 \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \approx \mathbf{x}_1$  кроме разности первых двух членов в квадратных скобках в правой части (5.1), которая равна  $-\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} / \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$ . Поэтому (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x; p, \mathbf{x})}{\partial x} + \left( \frac{i p \mathbf{x} + 2 \gamma(\mathbf{x}) k}{\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \right) w = & \frac{\pi k^4}{2 \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \int d^2 \mathbf{x}_1 w(x; p, \mathbf{x}_1) \times \\ & \times \Phi \left( \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} - \sqrt{k^2 - \mathbf{x}_1^2}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1 \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для того, чтобы перейти от (5.3) к УПИ, введем функции

$$J(r; \mathbf{x}) \equiv J(x, R; \mathbf{x}) = k \sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} \int d^2 p e^{ipR} w(x; p, \mathbf{x}), \quad r = (x, R); \quad (5.4)$$

$$\chi(\mu', \mu) = \frac{k^4 \pi}{2} \Phi(k\mu'_{\parallel} - k\mu_{\parallel}, k\mu'_{\perp} - k\mu_{\perp}); \quad (5.5)$$

$$\alpha(\mu) \equiv 2\gamma(\mu) = \int_{\theta' < \frac{\pi}{2}} d^2\mu' \chi(\mu', \mu). \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) следует из (5.5) и (3.5). Переходя в (5.3) к функциям  $J$ ,  $\chi$  и  $\alpha$ , а от  $\mathbf{x}$  — к  $\mu$ , получим

$$(\mu \nabla_r + \alpha(\mu)) J(r; \mu) = \int_{\theta' < \frac{\pi}{2}} d^2\mu' J(r; \mu') \chi(\mu', \mu). \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) является УПИ\* для лучевой интенсивности  $J(r; \mu)$  в точке  $r = (x, R)$ , распространяющейся в направлении  $\mu$  с индикаторной рассеяния  $\chi(\mu', \mu)$  и коэффициентом ослабления  $\alpha(\mu)$ . В соответствии с тем, что в ММРВ мы рассматриваем только рассеянные вперед волны, интегрирование в (5.7) и (5.6) распространяется на переднюю полусферу. Соотношение (5.6), при пренебрежении обратным рассеянием, выражает закон сохранения энергии. Из (5.6) также следует, что коэффициент ослабления  $\alpha(\mu)$  является суммой коэффициентов экстинкции когерентных составляющих амплитуд  $e(x, \mathbf{x})$ . Границами применимости уравнения (5.7) следует считать условия (3.4), (4.2) и (5.2). Таким образом, вывод уравнения (5.7) оказывается более простым, чем обычно (см., например, [5]). Связь лучевой интенсивности и поперечной корреляционной функции можно получить из (5.4):

$$W(r; \rho_0) \equiv W(x; R, \rho_0) = \int_{\theta' < \pi/2} d^2\mu \exp(ik\mu_{\perp}\rho_0) J(r; \mu). \quad (5.8)$$

Впервые аналогичное соотношение было получено в [6].

Для случая  $E_0 = e^{ikx}$  условия (5.2) оказываются выполненными всегда. Подставляя (4.4) в (4.1), получаем

$$\left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \alpha(\mu) \right) J(x; \mu) = \int_{\theta' < \pi/2} d^2\mu' J(x; \mu') \chi(\mu', \mu), \quad (5.9)$$

где  $J(x; \mu)$  определяется из (5.4) при  $R = 0$ . Уравнение (5.9) является точным следствием (5.1), чем оно отличается от более общего уравнения (5.7), получающегося из (5.1) лишь в предположении квазиоднородности поля.

В марковском приближении МПУ уравнение для поперечной корреляционной функции сводится к УПИ лишь в малоугловом приближении. В отличие от МПУ уравнение (5.1), полученное ММРВ, применимо как для узких, так и для широких пучков, а при условии квазиоднородности поперечной корреляционной функции сводится к УПИ (5.7),

\* Строго говоря, УПИ для углов  $\theta < \frac{\pi}{2}$  совпадает с (5.7), если в последнем не ограничивать пределы интегрирования по  $\theta'$ . Однако так как предполагается, что обратное рассеяние мало, то в УПИ такое ограничение на  $\theta'$ , связанное с пренебрежением перерассеяния из задней полусферы в переднюю, правомочно. Поэтому в работе о (5.7) мы говорим как об УПИ.

которое описывает рассеяние на большие углы и позволяет более последовательно учесть анизотропию среды. Заметим, что марковского приближения в ММРВ недостаточно для сведения (5.1) к УПИ.

---

Предложенным выше ММРВ вычислялись первые и вторые моменты поля в случайно-неоднородной среде. Полученные результаты позволяют обобщить аналогичные результаты в марковском приближении МПУ на широкие пучки, немалоугловое (интегральное) рассеяние, а также более последовательно учитывают как анизотропию среды, так и дифракционные эффекты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
2. В. Е. Осташев, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 714 (1978).
3. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1 (1970).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 12, 1852 (1972).
6. Л. С. Долин, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
6 марта 1978 г.

#### THE METHOD OF MULTIPLE FORWARD SCATTERING IN MEDIA WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. E. Ostashev, V. I. Tatarskii

The multiple forward scattering method (MFSM) is suggested problems of wave propagation in randomly-inhomogeneous media. The essence of this method is that the wave field obeying the wave equation is approximated by the sum of fields of all forward multi-scattered waves. MFSM permits to generalize the Markov approximation of the parabolic equation method (PEM) for beams with a large angular width («broad» beams), not small angular (integral) scattering, as well as to take into account more successively both the medium anisotropy and diffraction effects. In the present paper the mean field and its longitudinal correlation are calculated by MFSM. The equation for the transverse correlation function under the condition of its quasi-homogeneity is reduced to the radiative transfer equation.

УДК 538.56 . 519.25

**СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ  
РЕЗОНАНС (ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ  
ВНУТРИ ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ)**

*B. I. Кляцкин*

Получено стохастическое выражение для интенсивности волны в поглощающей одномерной случайно-неоднородной среде. В случае отсутствия поглощения волны показано, что как одноточечные моменты интенсивности, так и многоточечные корреляционные функции описываются выражением, содержащим одну квадратуру. При этом моменты интенсивности волны внутри слоя экспоненциально растут с ростом толщины слоя, что соответствует явлению стохастического параметрического резонанса.

1. Задача о распространении волн в одномерной среде со случайными неоднородностями привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, простотой этой задачи по сравнению с аналогичными задачами для двух- или трехмерных сред и, с другой стороны, важностью ее для понимания физики процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что эта задача допускает точное решение, можно проследить на ней влияние различных моделей среды на статистические характеристики волны, а также определить условия применимости обычной теории переноса лучистой энергии. Обычно рассматривается вопрос о нахождении статистических характеристик коэффициента отражения волны от слоя среды (см., например, [1], где содержится библиография этого вопроса). При наличии слабого затухания волны в среде для коэффициента отражения волны от слоя при этом устанавливается стационарное распределение вероятностей [2]. В работе [3] была проанализирована роль конечности радиуса корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости для различных моделей среды и было показано, что распределение вероятностей, аналогичное полученному в [2], при определенных ограничениях на параметры среды не зависит от выбора модели флюктуаций среды. Что касается поля волны внутри слоя, то этот вопрос изучался относительно мало. Так в работе [4] было получено распределение средней интенсивности волны в слое среды для модели дискретных случайных неоднородностей (волна распространяется без поглощения). Эта модель допускает предельный переход к непрерывной среде. В работе [5] это же распределение средней интенсивности было получено для непрерывной среды более традиционным путем, а именно, изучая непосредственно волновое уравнение. Ниже мы получим стохастическое выражение для интенсивности волны внутри слоя, и будет показано, что как одноточечные статистические характеристики интенсивности, так и многоточечные (корреляционные функции) находятся с помощью одной квадратуры. При этом моментные функции интенсивности волны внутри слоя среды экспоненциально растут с ростом толщины слоя. Это явление может быть названо стохастическим волновым параметрическим резонансом по аналогии с обычным параметрическим резонансом.

2. Пусть, как обычно (см., например, [3]), диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(x)$  равна

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon_0 - \text{const} & \text{при } -\infty < x < 0 \\ \bar{\epsilon} + \tilde{\epsilon}(x), \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2 - \text{const} & \text{при } 0 < x < L, \\ \epsilon_L - \text{const} & \text{при } L < x < \infty \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{\epsilon}$  — среднее значение диэлектрической проницаемости слоя флюктуирующей среды, занимающей часть плоскости  $0 < x < L$ , а  $\tilde{\epsilon}(x) = \epsilon^*(x)$  — ее флюктуирующая часть. Волновое поле описывается уравнением

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(x) U = 0. \quad (2)$$

Пусть далее нормально к слою распространяется волна из области  $x > L$   $A_L \exp[-ik_L(x-L)]$ , где  $k_L = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_L}$ . С учетом отраженной волны полное поле в области  $x > L$  будет иметь вид

$$U(x) = A_L \exp[-ik_L(x-L)] + B_L \exp[ik_L(x-L)]. \quad (3)$$

В области же  $x < 0$  волновое поле имеет вид

$$U(x) = A_0 \exp(-ik_0 x) \quad \left( k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \right). \quad (4)$$

Внутри слоя волновое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 \left[ 1 + \frac{\tilde{\epsilon}(x)}{|\bar{\epsilon}|} \right] U = 0, \quad (5)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} = \kappa + i\gamma$  ( $\gamma$  — коэффициент затухания, который мы считаем малым, т. е.  $\gamma \ll \kappa$ ). На границах слоя при  $x=0$  и  $x=L$  должно выполняться условие непрерывности  $U(x)$  и  $\frac{dU(x)}{dx}$ .

В работе [3] изучались статистические характеристики комплексного коэффициента отражения волны от слоя

$$R(x) = \frac{kU(x) - iU'(x)}{kU(x) + iU'(x)}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad U'(x) = \frac{dU(x)}{dx}, \quad (6)$$

для которого имеется дифференциальное уравнение первого порядка по  $x$ :

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2i(\kappa + i\gamma)R + i \frac{\kappa}{2} \frac{\tilde{\epsilon}(x)}{|\bar{\epsilon}|} (1 + R(x))^2, \quad R(0) = \frac{k - k_0}{k + k_0}. \quad (7)$$

Коэффициент отражения волны от слоя  $R_L = B_L/A_L$  определяется через решение  $R(L)$  уравнения (7) по формуле

$$R_L = \frac{(k_L + k)R(L) + (k_L - k)}{(k_L + k) + (k_L - k)R(L)}. \quad (8)$$

В частном случае, когда  $k_0 = k_L = k$ , условия (7), (8) упрощаются и принимают вид

$$R(0) = 0, \quad R_L = R(L). \quad (9)$$

Для определения поля внутри среды введем функцию

$$\psi(x) = \frac{i}{k} \frac{U'(x)}{U(x)} \equiv \frac{1 - R(x)}{1 + R(x)}. \quad (10)$$

Тогда функция  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению первого порядка по  $x$  (уравнение Риккати):

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = ik \left( \psi^2 - 1 - \frac{\tilde{\epsilon}(x)}{|\tilde{\epsilon}|} \right), \quad \psi(0) = \frac{k_0}{k}. \quad (11)$$

Если мы знаем решение уравнения (11), то поле волны внутри среды можно найти из дифференциального уравнения (10) относительно  $U(x)$ , решения которого с условием  $U|_{x=L} = A_L(1 + R_L)$  имеет вид

$$U(x) = A_L(1 + R_L) \exp \left[ ik \int_x^L d\xi \psi(\xi) \right]. \quad (12)$$

Выражение (12), однако, не очень удобно для анализа. Его можно переписать в другом виде. А именно,

$$U(x) = A_L(1 + R_L) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_x^L d\xi [(\psi + \psi^*) + (\psi - \psi^*)] \right\}. \quad (13)$$

Теперь можно исключить из (13) мнимую часть функции  $\psi(x)$ . В самом деле, из уравнения (11) следует, что

$$\frac{d}{dx}(\psi + \psi^*) = i \times (\psi^2 - \psi^{*2}) + \gamma (2 - \psi^2 - \psi^{*2}) \quad (14)$$

(в правой части (14) пренебрегается малым квадратичным членом  $\gamma \tilde{\epsilon}$ ) и, следовательно,

$$i \times (\psi - \psi^*) = \frac{d}{dx} \ln(\psi + \psi^*) + \gamma \frac{\psi^2 + \psi^{*2} - 2}{\psi + \psi^*}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получаем выражение для поля  $U(x)$  в виде

$$U(x) = A_L(1 + R_L) \left[ \frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)} \right]^{1/2+i\gamma/2} \times \\ \times \exp \left[ i \frac{x}{2} \int_x^L d\xi (\psi + \psi^*) - \gamma \int_x^L d\xi \frac{1 + \psi\psi^*}{\psi + \psi^*} \right]. \quad (16)$$

Следовательно, интенсивность волны  $I(x) = UU^*$  внутри среды описывается выражением

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*) \left[ \frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)} \right] \times \\ \times \exp \left[ -2\gamma \int_x^L d\xi \frac{1 + \psi\psi^*}{\psi + \psi^*} \right] \quad (I_0 = |A_L|^2). \quad (17)$$

Отметим, что в случае отсутствия поглощения ( $\gamma = 0$ ) выражение

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*) \left[ \frac{\psi(L) + \psi^*(L)}{\psi(x) + \psi^*(x)} \right] \quad (17')$$

сразу следует из закона сохранения потока энергии в среде

$$\frac{d}{dx} \left( U^* \frac{dU}{dx} - U \frac{dU^*}{dx} \right) = 0, \quad (18)$$

если вместо  $U'(x)$  подставить ее выражение через  $\psi$  по формуле (10).

Выразим теперь в формуле (17) функцию  $\psi(x)$  через  $R(x)$  согласно формуле (10). В результате получаем равенство

$$I(x) = I_0(1 + R_L)(1 + R_L^*) \frac{1 - |R(L)|^2}{1 - |R(x)|^2} \frac{(1 + R(x))(1 + R^*(x))}{(1 + R(L))(1 + R^*(L))} \times \times \exp \left( -2\gamma \int_x^L d\xi \frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2} \right), \quad (19)$$

где  $R_L$  связана с величиной  $R(L)$  по формуле (8). Формула (19) сильно упрощается в случае  $k_0 = k_L = k$  и принимает вид

$$I(x) = I_0 [1 - |R(L)|^2] \frac{1 + |R(x)|^2 + R(x) + R^*(x)}{1 - |R(x)|^2} \times \times \exp \left( -2\gamma \int_x^L d\xi \frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2} \right). \quad (20)$$

Далее мы ограничимся этим случаем. Отметим, что величина  $I(0)/I_0 = |T|^2$  представляет собой квадрат модуля коэффициента прохождения волны через слой среды  $T = A_0/A_L$ , и, следовательно, полагая  $x = 0$  в (20), получаем связь между коэффициентом прохождения и коэффициентом отражения волны при наличии поглощения в среде в виде

$$|T|^2 = (1 - |R_L|^2) \exp \left( -2\gamma \int_0^L d\xi \frac{1 + |R(\xi)|^2}{1 - |R(\xi)|^2} \right). \quad (21)$$

Введем теперь модуль и фазу комплексной функции  $R(x)$  по формуле

$$R(x) = \sqrt{\frac{u(x) - 1}{u(x) + 1}} \exp(i\varphi(x)), \quad u > 1. \quad (22)$$

Тогда формула (20) перепишется в виде

$$I(x) = \frac{2I_0}{1 + u(L)} [u(x) + \sqrt{u^2 - 1} \cos \varphi] \exp \left( -2\gamma \int_x^L d\xi u(\xi) \right), \quad (23)$$

а сами функции  $u(x)$  и  $\varphi(x)$  описываются уравнениями, вытекающими из (7),

$$\frac{du}{dx} = -2\gamma(u^2 - 1) + \kappa \frac{\tilde{\epsilon}}{|\tilde{\epsilon}|} \sqrt{u^2 - 1} \sin \varphi, \quad u(0) = 1, \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\kappa + \kappa \frac{\tilde{\epsilon}}{|\tilde{\epsilon}|} \left( 1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \cos \varphi \right), \quad \varphi(0) = 0.$$

Из уравнений (24) следует, что при достаточно малых  $\gamma$  и  $\tilde{\epsilon}(x)$  функция  $\varphi(x)$  имеет структуру

$$\varphi(x) = 2\kappa x + \tilde{\varphi}(x), \quad (25)$$

где  $\tilde{\varphi}(x)$  — функция, медленно меняющаяся на длине волны так же, как и функция  $u(x)$ . Поэтому при изучении различных комбинаций из функций  $I(x)$  целесообразно изучать их медленные изменения по  $x$ , т. е. предварительно усреднив по быстроменяющимся на длине волны функциям. Такое усреднение будем обозначать тильдой. Так осреднение формулы (23) дает

$$\tilde{I}(x) = \frac{2I_0 u(x)}{1+u(L)} \exp \left( -2\gamma \int_x^L d\xi u(\xi) \right). \quad (26)$$

Эта формула была получена ранее в работе [5]. Аналогичным образом получаем

$$\tilde{I}^2(x) = \frac{2I_0}{(1+u(L))^2} (3u^2(x) - 1) \exp \left( -4\gamma \int_x^L d\xi u(\xi) \right) \quad (27)$$

и т. д. Далее без ограничения общности положим  $I_0 = 1/2$ .

3. Обратимся теперь к статистическому описанию интенсивности волны в слое флюктуирующей среды. Будем, как обычно, считать функцию  $\tilde{\epsilon}(x)$  случайной гауссовой функцией, дельта-коррелированной по  $x$ , т. е.

$$\langle \tilde{\epsilon}(x) \tilde{\epsilon}(x') \rangle = 2\sigma^2 l \delta(x - x'). \quad (28)$$

Тогда решение задачи (23) ( $u(x)$ ,  $\varphi(x)$ ) будет марковским процессом [1], а при усреднении всех статистических характеристик по масштабам порядка длины волны и сама величина  $u(x)$  будет марковским процессом, плотность вероятности перехода и одноточечная вероятность которого удовлетворяют уравнениям [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} p(u_y, y | u_x, x) &= 2\gamma \frac{\partial}{\partial u_y} (u_y^2 - 1) p + D \hat{L} p \quad (y > x), \\ p(u_y, x | u_x, x) &= \delta(u_y - u_x), \\ \frac{\partial}{\partial x} P_x(u_x) &= 2\gamma \frac{\partial}{\partial u_x} (u_x^2 - 1) P_x + D \hat{L} P_x, \\ P_0(u_x) &= \delta(u_x - 1), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $D = \kappa^2 \sigma^2 l / 2 |\tilde{\epsilon}|^2$  — коэффициент диффузии, а  $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u}$  — оператор Лежандра. Если систему уравнений (24) дополнить уравнением

$$\frac{d}{dx} q(x) = 2\gamma u(x), \quad q(0) = 0, \quad (30)$$

то, как отмечено в работе [5], для нахождения медленно меняющихся статистических характеристик  $u(x)$  и  $q(x)$  можно рассматривать их как совместный марковский процесс, плотности вероятностей которого описываются уравнениями (29) с добавленными в правую часть членами

ми  $-2\gamma \frac{\partial}{\partial q}$  и  $p$ . В этом случае, в принципе, можно, пользуясь плотностью вероятностей перехода и одноточечной вероятностью  $u(x)$ ,  $q(x)$ , вычислить все одноточечные статистические характеристики интенсивности волны.

Остановимся более подробно на случае отсутствия затухания  $\gamma = 0$ . В этом случае, как хорошо известно, решения уравнений (29) можно записать в виде интегралов Мелера—Фока:

$$\begin{aligned} p(u_L, L | u_x, x) &= \int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th} \mu\pi \exp \left[ -\left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) (L - x) \right] \times \\ &\quad \times P_{-1/2+i\mu}(u_L) P_{-1/2+i\mu}(u_x), \end{aligned} \quad (31)$$

$$P_x(u_x) = \int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th} \mu\pi \exp \left[ -\left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) x \right] P_{-1/2+i\mu}(u_x),$$

где  $P_{-1/2+i\mu}(u)$  — функция Лежандра первого рода (функция конуса), удовлетворяющая уравнению

$$\hat{L} P_{-1/2+i\mu}(u) = -\left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\mu}(u). \quad (32)$$

(Здесь и далее величины  $L$  и  $x$  соответствуют безразмерным величинам  $L \rightarrow DL$ ,  $x \rightarrow Dx$ .)

Нахождение одноточечных моментов интенсивности волны (22) в этом случае просто сводится к квадратурам. Так для величины  $\tilde{I}^n(x)$  получаем выражение  $\tilde{I}^n(x) = g_n(u_x)/(1 + u(L))^n$ , где  $g_n(u_x)$  — полином по  $u(x)$  степени  $n$ , и, следовательно,

$$\langle \tilde{I}^n(x) \rangle = \int_1^\infty \frac{du_L}{(1 + u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_n(u_x) p(u_L, L | u_x, x) P_x(u_x). \quad (33)$$

Отметим, что все моменты  $I(0) = |T|^2$ , как хорошо известно, экспоненциально затухают с ростом толщины слоя  $L \rightarrow \infty$ , т. е. слой случайно-неоднородной среды в среднем полностью отражает волну. Моменты величины  $I(L) = 1 - |T|^2$ , при  $L \rightarrow \infty$ , будут стремиться к единице. Рассмотрим теперь поведение статистических характеристик интенсивности внутри слоя. Подставляя в (33) выражение (31) для  $p$ , с помощью формулы (см., например, [6])

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{(1 + x)^n} P_{-1/2+i\mu}(x) &= \frac{\pi}{\operatorname{ch} \mu\pi} K_n(\mu), \\ K_{n+1}(\mu) &= \frac{\mu^2 + (n - 1/2)^2}{2n} K_n, \quad K_1 = 1 \end{aligned} \quad (34)$$

можно выполнить интегрирование по  $u_L$  и перейти к двукратному (по внешнему виду) интегралу

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}^n(x) \rangle &= \pi \exp \left[ -\frac{1}{4} (L - x) \right] \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} K_n(\mu) \times \\ &\quad \times \exp [-\mu^2 (L - x)] \int_1^\infty du g_n(u) P_{-1/2+i\mu}(u) P_x(u). \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что так как  $I(0) = 1/(1 + u(L))$ , то интеграл

$$\int_1^\infty \frac{du_L}{(1 + u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_k(u_x) p(u_L, \Delta | u_x, x) P_x(u_x) \quad (33')$$

описывает корреляции коэффициента прохождения волны с интенсивностью внутри слоя.

4. Дальнейшая задача сводится к вычислению внутреннего интеграла в (35) и (33'). Покажем, что такие интегралы сводятся к решению простой системы дифференциальных уравнений. Для этого рассмотрим функции

$$f_k(x) = \int_1^\infty du u^k P_{-1/2+i\mu}(u) P_x(u) \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (36)$$

Дифференцируя (36) по  $x$ , используя уравнение (29) и интегрируя по частям, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{df_k}{dx} &= \int_1^\infty du P_x(u) \frac{d}{du}(u^2 - 1) \frac{d}{du} u^k P_{-1/2+i\mu}(u) = \\ &= - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 - k \right) f_k + 2k \Psi_k - k(k-1) f_{k-2}(x), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\Psi_k(x) = \int_1^\infty du u^{k-1} (u^2 - 1) \frac{dP_{-1/2+i\mu}(u)}{du} P_x(u). \quad (38)$$

При выводе (37) используется равенство (32). Дифференцируя теперь функцию  $\Psi_k(x)$  по  $x$ , аналогичным образом получаем уравнение для  $\Psi_k(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_k}{dx} &= \int_1^\infty du P_x(u) \frac{d}{du} (u^2 - 1) \frac{d}{du} u^{k-1} (u^2 - 1) \frac{dP_{-1/2+i\mu}(u)}{du} = \\ &= - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 + k \right) \Psi_k - 2k \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_k - \\ &\quad - (k-1)(k-2) \Psi_{k-2} + 2(k-1) \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_{k-2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Начальными условиями для (37) и (39) являются, очевидно, условия

$$f_k(0) = 1, \quad \Psi_k(0) = 0. \quad (40)$$

Таким образом, функции  $f_k(x)$  и  $\Psi_k(x)$  связаны замкнутой рекуррентной системой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которую не представляет труда решить. Представим решение (37), (39) в виде

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \tilde{f}_k(x) \exp \left[ - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 \right) x \right], \\ \Psi_k(x) &= \tilde{\Psi}_k(x) \exp \left[ - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 \right) x \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда для  $\tilde{f}_k(x)$  и  $\tilde{\Psi}_k(x)$  получаем систему уравнений

$$\frac{d\tilde{f}_k}{dx} - k\tilde{f}_k = 2k\tilde{\Psi}_k - k(k-1)\tilde{f}_{k-2} \exp[-4(k-1)x], \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Psi}_k}{dx} + k\tilde{\Psi}_k = & -2k\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{f}_k + (k-1)\left[2\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{f}_{k-2} - \right. \\ & \left. - (k-2)\tilde{\Psi}_{k-2}\right] \exp[-4(k-1)x] \end{aligned}$$

с начальными условиями  $\tilde{f}_k(0) = 1$ ,  $\tilde{\Psi}_k(0) = 0$ . Отметим, что соответствующее решение однородной системы имеет вид

$$\tilde{f}_k(x) = A(\mu) \sin 2k\mu x + B(\mu) \cos 2k\mu x.$$

Рассмотрим простейшие случаи.

$$1) \quad k=0, \quad \frac{d\tilde{f}_0}{dx} = 0, \quad \tilde{f}_0(x) = 1, \quad f_0(x) = \exp\left[-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)x\right]. \quad (43)$$

Тогда интеграл, получающийся из (33'),

$$\pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \pi}{\operatorname{ch}^2 \mu \pi} K_n(\mu) \exp\left[-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)L\right] \equiv \langle |T|^{2n} \rangle,$$

где  $T$  — коэффициент прохождения волны через слой флюктуирующей среды.

$$2) \quad k=1, \quad \frac{d\tilde{f}_1}{dx} - \tilde{f}_1 = 2\tilde{\Psi}_1, \quad \frac{d\tilde{\Psi}_1}{dx} + \tilde{\Psi}_1 = -2\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{f}_1.$$

Следовательно,

$$f_1(x) = \exp\left[-\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\right)x\right] \left(\cos 2\mu x + \frac{\sin 2\mu x}{2\mu}\right), \quad (44)$$

и интеграл, получающийся из (33'),

$$\begin{aligned} \pi e^{-L/4} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \pi}{\operatorname{ch}^2 \mu \pi} K_n(\mu) e^{-\mu^2 L} \left(\cos 2\mu x + \frac{\sin 2\mu x}{2\mu}\right) = \\ = \begin{cases} \langle \tilde{I}(x) \rangle & \text{при } n=1 \\ \langle \tilde{I}(0)\tilde{I}(x) \rangle = \langle \tilde{I}(x) \rangle - \langle \tilde{I}(L)\tilde{I}(x) \rangle & \text{при } n=2 \text{ и т.д.} \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что выражение (45) для  $\langle \tilde{I}(x) \rangle$  было получено ранее в работах [4, 5].

3)  $k=2$ ,

$$\frac{d\tilde{f}_2}{dx} - 2\tilde{f}_2 = 4\tilde{\Psi}_2 - 2e^{-4x},$$

$$\frac{d\tilde{\Psi}_2}{dx} + 2\tilde{\Psi}_2 = -4\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\tilde{f}_2 + 2\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)e^{-4x}$$

и, следовательно,

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{\mu^2 + 5/4}{2(1 + \mu^2)} \cos 4\mu x + \frac{\mu^2 + 3/4}{2\mu(1 + \mu^2)} \sin 4\mu x + \frac{\mu^2 + 3/4}{2(1 + \mu^2)} e^{-4x}. \quad (46)$$

В этом случае интегралы (35), (33') будут описывать второй момент интенсивности и корреляции квадрата интенсивности в точке  $x$  с коэффициентами прохождения и отражения волны. Так

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}^2 \rangle &= \frac{\pi}{2} e^{4x - L/4} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp(-\mu^2 L) \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) \tilde{f}_2(x), \\ \langle \tilde{I}^2 \rangle &= \frac{\pi}{4} e^{-L/4} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} e^{-\mu^2 L} \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) (3e^{4x} \tilde{f}_2(x) - 1). \end{aligned} \quad (47)$$

Отметим, что при  $L \rightarrow \infty$  и  $x \neq 0$   $\langle \tilde{I}^2 \rangle / \langle \tilde{I} \rangle = 3/2$ .

Таким образом, решая последовательно рекуррентную систему уравнений (42), можно выразить соответствующий момент интенсивности через единственную квадратуру. Интегралами такого же типа, как мы видели выше, описываются и корреляции  $I^n(x)$  с интенсивностью на границах слоя.

Рассмотрим теперь структуру возникающих выражений. Как мы видели выше, моменты интенсивности волны внутри слоя среды описываются интегралами вида

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}^n(x) \rangle &\sim \exp\left(n^2 x - \frac{L}{4}\right) \int_{-\infty}^\infty d\mu \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \Phi(\mu) \exp(-\mu^2 L + \\ &+ 2in\mu x) = \exp\left[-\frac{L}{4} + n^2 L \xi (1 - \xi)\right] \int_{-\infty}^\infty d\mu \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \times \\ &\times \Phi(\mu) \exp[-L(\mu - in\xi)^2], \end{aligned} \quad (48)$$

где величина  $\xi = x/L$ , а функция  $\Phi(\mu)$  — алгебраическая функция параметра  $\mu$ . Если рассмотреть асимптотический случай  $L \rightarrow \infty$ ,  $\xi$  — фиксированная величина  $0 \leq \xi \leq 1$ , то из выражения (48) следует существование двух масштабов

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1 - \frac{1}{2n}$$

таких, что при  $0 \leq \xi < \xi_1$  величина  $\langle \tilde{I}^n \rangle$  экспоненциально мала. При  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  величина  $\langle \tilde{I}^n \rangle$  экспоненциально велика, достигая при этом максимума в точке  $\xi = 1/2$ :  $\langle \tilde{I}^n \rangle_{\max} \sim \exp\left[\frac{(n^2 - 1)L}{4}\right]$ . При

$1 \geq \xi > \xi_2$  величина  $\langle \tilde{I}^n \rangle$  экспоненциально быстро стремится к единице. Все высказывание относится к случаю  $n \geq 2$ . Исключение составляет случай  $n = 1$ , когда точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  сливаются и распределение средней интенсивности носит монотонный характер. При этом (см., например, [4, 5]) при  $L \rightarrow \infty$

$$\langle \tilde{I}(\xi) \rangle = \theta(\xi - 1/2) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 1/2 \\ 1/2 & \text{при } \xi = 1/2 \\ 1 & \text{при } \xi > 1/2 \end{cases}$$

Первый масштаб  $\xi_1$  определяется равенством  $n^2 \xi(1 - \xi) = 1/4$ , а второй масштаб обусловлен тем фактом, что в силу необходимости  $\langle \tilde{I}^n(L) \rangle \rightarrow 1$  при  $L \rightarrow \infty$ , основной вклад в интеграл (48) должен давать полюс  $\mu_n = i(n - 1/2)$ . При этом контур интегрирования должен быть сдвинут выше значения  $\mu_n$ , т. е.  $\mu_n < in \xi$ . Отметим, что с ростом  $n$   $\xi_1 \rightarrow 0$ , а  $\xi_2 \rightarrow 1$ . На рис. 1 схематически изображено распределение моментных функций интенсивности волны внутри слоя среды. Тот факт, что моментные функции интенсивности экспоненциально растут внутри слоя, свидетельствует о наличии явления стохастического параметрического резонанса, аналогичного обычному параметрическому резонансу. Разница заключается в том, что в силу того, что в граничных точках моменты интенсивности заданы, экспоненциальный рост происходит внутри слоя и максимальное значение достигается в его середине.

5. Аналогично тому, как исследовались одноточечные характеристики интенсивности волны, можно рассмотреть и многоточечные характеристики, такие, как корреляции интенсивности в двух и более точках внутри среды. Они также будут описываться квадратурой типа интегралов (45) и (47). Найдем, например, корреляционную функцию интенсивности  $B_{y,x} = \langle \tilde{I}(x) \tilde{I}(y) \rangle$ , где  $L \geq y \geq x$ . Тогда по определению плотности вероятностей перехода

$$B_{y,x} = \int_1^\infty \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{du_x du_y du_L}{(1 + u_L)^2} u_x u_y p(u_L, L | u_y, y) \times \\ \times p(u_y, y | u_x, x) P_x(u_x). \quad (49)$$

Подставляя в (49) интегральное представление для первой функции  $p$  (31) и интегрируя по  $u_L$ , получаем выражение

$$B_{y,x} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\mu \mu \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\sinh \mu \pi}{\cosh^2 \mu \pi} \exp [-(\mu^2 + 1/4)(L - y)] \times \\ \times \int_1^\infty du_x u_x P_x(u_x) \int_1^\infty du_y u_y P_{-1/2+i\mu}(u_y) p(u_y, y | u_x, x). \quad (50)$$

Внутренний интеграл  $f_1(y) = \int_1^\infty du_y u_y P_{-1/2+i\mu}(u_y) p(u_y, y | u_x, x)$  можно

вычислить совершенно аналогично вычислению функции  $f_k(x)$  (36). В самом деле, так как плотность вероятностей перехода, как функция переменной  $y$ , удовлетворяет такому же уравнению, как и одноточечная плотность вероятностей  $P_y$ , то функция  $f_1(y)$  будет удовлетворять системе уравнений

$$f_1(y) = \tilde{f}_1(y) \exp [-(\mu^2 - 3/4)(y - x)],$$

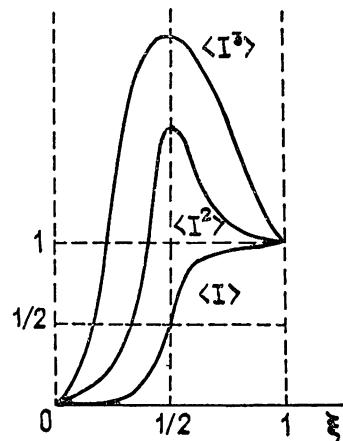


Рис. 1.

$$\frac{d\tilde{f}_1}{dy} - \tilde{f}_1 = 2\tilde{\Psi}_1, \quad \frac{d\tilde{\Psi}_1}{dy} + \tilde{\Psi}_1 = -2(\mu^2 + 1/4)\tilde{f}_1, \quad (51)$$

где функция  $\tilde{\Psi}_1(y)$  аналогична функции  $\tilde{\Psi}_1(x)$  (38) с заменой  $P_x(u)$  на  $p(u_y, y|u_x, x)$ . Начальные условия для системы (51) получаются из определения функций  $f_1(y)$  и  $\Psi_1(y)$  путем предельного перехода  $y \rightarrow x$ , т. е.

$$\tilde{f}_1|_{y=x} = u_x P_{-1/2+i\mu}(u_x), \quad \tilde{\Psi}_1|_{y=x} = (u_x^2 - 1) \frac{dP_{-1/2+i\mu}(u_x)}{du_x}. \quad (52)$$

Решение системы (51) с условиями (52) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(y) = & u_x P_{-1/2+i\mu}(u_x) \left[ \cos 2\mu(y-x) + \frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu} \right] + \\ & + \frac{1}{\mu} (u_x^2 - 1) \frac{dP_{-1/2+i\mu}(u_x)}{du_x} \sin 2\mu(y-x). \end{aligned} \quad (53)$$

Подставляя теперь (53) в (50), получаем выражение

$$\begin{aligned} B_{y,x} = & \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\mu \mu \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp \left[ -L \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) + y + \right. \\ & \left. + x(\mu^2 - 3/4) \right] \int_1^\infty du_x u_x \tilde{f}_1(y) P_x(u_x) \end{aligned}$$

или выражение

$$\begin{aligned} B_{y,x} = & \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\mu \mu \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp \left[ -L \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) + \right. \\ & + y + x \left( \mu^2 - \frac{3}{4} \right) \left. \right] \left\{ \left[ \cos 2\mu(y-x) + \frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu} \right] f_2(x) + \right. \\ & \left. + \Psi_2(x) \frac{\sin 2\mu(y-x)}{\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

где уже функции  $f_2(x)$  и  $\Psi_2(x)$  описываются системой уравнений (37), (39). Таким образом, корреляционную функцию интенсивности можно записать окончательно в виде интеграла:

$$\begin{aligned} B_{y,x} = & \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\mu \mu \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp \left[ -L \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) + y + 3x \right] \times \\ & \times \left\{ \left[ \cos 2\mu(y-x) + \frac{\sin 2\mu(y-x)}{2\mu} \right] \tilde{f}_2(x) + \Psi_2(x) \frac{\sin 2\mu(y-x)}{\mu} \right\}, \end{aligned} \quad (55)$$

где функция  $\tilde{f}_2(x)$  описывается формулой (46), а  $\tilde{\Psi}_2(x)$  определяется из равенства

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{d\tilde{f}_2}{dx} - 2\tilde{f}_2 + 2e^{-4x} \right] = \tilde{\Psi}_2(x). \quad (56)$$

При  $y = x$  формула (55) переходит, естественно, в формулу (47), а по-

лагая  $x = 0$ , получаем корреляцию  $\langle \tilde{I}(0) \tilde{I}(y) \rangle$ , совпадающую с формулой (45).

Таким образом, как все одноточечные моментные функции интенсивности волны внутри слоя флуктуирующей среды, так и корреляционные функции разного порядка описываются единственной квадратурой.

В заключение благодарю В. И. Татарского за внимание к работе и полезное обсуждение вопросов, рассмотренных выше.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. Б. С. Абрамович, А. И. Дятлов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1222 (1975).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1040 (1977).
4. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, 1856 (1969).
5. Б. С. Абрамович, Ю. А. Рыжов, Тезисы VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению радиоволн, Ростов-на-Дону, 1977.
6. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, изд. Наука, М., 1974.
7. R. H. Lang, J. Math. Phys., 14, 1921 (1973).
8. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, 1165 (1977).
9. W. Kohler and G. C. Papanicolaou, Maht. Phys., 15, 2186 (1974).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 марта 1978 г.

### STOCHASTIC WAVE PARAMETRIC RESONANCE (WAVE INTENSITY FLUCTUATIONS INSIDE A ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM)

V. I. Klyatskin

A stochastic expression is obtained for the wave intensity in absorbing one-dimensional randomly-inhomogeneous medium. In the absence of wave absorption it is shown that both the one-point intensity moments and many-point correlation functions are described by the expression containing one quadrature. In this case the wave intensity moments inside the layer are exponentially increased with the growth of the layer thickness that corresponds to the phenomenon of the stochastic parametric resonance.

*Примечание при корректуре.* Среднее распределение интенсивности волны внутри слоя среды было получено также в [7], используя теорию инвариантного погружения. Отметим, что в общем случае применение теории инвариантного погружения к стохастическим краевым задачам дано в работе [8]. В работе [8] рассматривался случай нахождения источника волны внутри слоя среды, и для второго момента интенсивности так же был получен экспоненциальный рост этой величины.

УДК 621.371.24

## ИЗМЕРЕНИЯ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

*A. С. Гурвич, В. Кан*

Представлены результаты экспериментального исследования четырехточечной функции когерентности комплексного поля лазерного излучения в турбулентной атмосфере. Измерения проводились в области случайных фокусировок интенсивности излучения при больших значениях волнового параметра. Результаты измерений сравниваются с результатами аналогичных измерений, но при малых значениях волнового параметра. Отмечены общие тенденции в поведении четырехточечной функции когерентности, а также особенности, связанные с различием волнового параметра.

1. Ранее [1] нами были проведены измерения четырехточечной функции когерентности

$$\Gamma_4 = \langle E(x, \rho) E^*(x, \rho + \rho_1) E^*(x, \rho + \rho_2) E(x, \rho + \rho_1 + \rho_2) \rangle$$

комплексного поля волны  $E(x, \rho)$ , распространяющейся в направлении  $0x$  в случайно-неоднородной среде, при небольших значениях волнового параметра  $D \sim 1$ . В настоящей работе приводятся результаты измерений модуля и аргумента комплексной функции  $\Gamma_4$  в атмосфере при больших значениях волнового параметра  $D \gg 1$  и в условиях, когда  $x_m \rho_c \gg 1$ . Здесь  $D = \frac{x_m^2 L}{k}$ ,  $x_m$  — пространственное волновое число, соответствующее внутреннему масштабу  $l_0$  пульсаций диэлектрической проницаемости,  $L$  — длина трассы,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны излучения,  $\rho_c = \left(\frac{1}{2} 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L\right)^{-3/5}$  — радиус когерентности комплексного поля в плоскости  $x = L$ ,  $C_\epsilon^2$  — структурная характеристика пульсаций диэлектрической проницаемости. Функция  $\Gamma_4$  зависит, в общем случае, от большого числа переменных  $x, \rho, \rho_1, \rho_2$ , характеристик турбулентности и т. д. [2]. Однако в случае локально-изотропной турбулентной среды и исходной плоской волны число независимых переменных существенно меньше. При выполнении условий  $D \gg 1$  и  $x_m \rho_c \gg 1$  в качестве продольного параметра, учитывавшего длину трассы, свойства турбулентности и длину волны, удобно взять [3]

$$\beta_0 = (0,31 C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6})^{1/2}.$$

Для  $\Gamma_4$  очевидным является следующее предельное соотношение:

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty) = (\Gamma_2(x, \rho_1))^2 \equiv (\langle E(x, \rho) E^*(x, \rho + \rho_1) \rangle)^2,$$

поэтому целесообразно ввести безразмерные поперечные координаты  $\eta = \rho/\rho_c$ . Тогда, с учетом локальной изотропности,  $\Gamma_4$  зависит от следующих безразмерных переменных:

$$\Gamma_4 = \Gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi),$$

где  $\varphi$  — угол между  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Из соображений симметрии следует также, что

$$\operatorname{Im} \Gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \pi/2) = 0$$

и

$$\Gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi) = \Gamma_4(\beta_0, \eta_2, \eta_1, \varphi).$$

Отметим, что  $\rho_c$  связано с поперечным масштабом  $l_T$ , введенным в [3], соотношением

$$l_T \approx 1,49 (\beta_0)^{36,55} \rho_c.$$

Первоочередной интерес представляет исследование  $\Gamma_4$  в области значений параметра  $\beta_0 \geq 1$ , при которых наблюдаются максимальные флуктуации интенсивности излучения. Для значений параметра  $\beta_0 \ll 1$  функция  $\Gamma_4$  может быть рассчитана в приближении метода плавных возмущений (МПВ) [4, 5]. Для  $\beta_0 \gg 1$  можно ожидать, что  $\operatorname{Im} \Gamma_4 \ll 1$  в силу нормализации поля  $E(x, \rho)$  [6].

2. Эксперимент проводился в атмосфере на приземной трассе. Коллинированный пучок He-Ne лазера с  $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ ,  $\Omega = \frac{k \alpha_0^2}{L} = 30$ ,  $\Omega_T = \frac{k \alpha_0 \rho_c}{L} \gg 2$  ( $2\alpha_0$ ,  $\Omega$  — соответственно эффективный размер и число Френеля передающей апертуры,  $\Omega_T$  — параметр, определяющий турбулентное уширение пучка) проходил дистанцию 650 м и отражался назад. В качестве отражающей системы применялся объектив, в фокусе которого размещалась прямоугольная призма с двумя отражениями. С помощью этой системы устраивалось влияние регулярной рефракции и одновременно оказывалось возможным разнести приемный и передающий пункты на 2,5 м. При такой геометрии можно было считать, что флуктуации амплитуды и разности фаз световых волн при прямом и обратном прохождении пучка некоррелированы, так как существенные совпадающие участки трассы были малы по сравнению с общей длиной трассы  $L = 1,3 \text{ км}$ . На приемном конце излучение проходило через телескопическую систему, и далее уменьшенное изображение пучка попадало на трафарет с четырьмя приемными отверстиями, расположеннымими в виде параллелограмма. Сьюстировав элементы установки для определенного трафарета и изменяя окулярами телескопической системы размеры изображения пучка на трафарете, можно, таким образом, получать значения  $\Gamma_4$  для различных конфигураций приемных точек, которые имеют одинаковое отношение  $\rho_2:\rho_1 = m$  и отличаются линейными размерами  $\rho_1, \rho_2$ . Измерения проводились во всем диапазоне существенных для  $\Gamma_4$  изменений  $\rho_1/\rho_c, \rho_2/\rho_c \geq 12$  и для двух предельно отличающихся углов  $\varphi$ :  $\varphi = 0$  — приемные точки, расположенные в виде вырожденного параллелограмма, и  $\varphi = \pi/2$  — точки, расположенные в виде прямоугольника.

Описание супергетеродинной аппаратуры и методика измерений изложены в [5]. Часть прошедшего трассу излучения на приемном конце отводилась стеклянной пластиной на аппаратуру для определения пространственных спектров  $\Gamma_2$ , из которых независимым способом определялись значения  $\rho_c$  [7]. Из-за необходимости визуальной юстировки элементов установки измерения проводились в ночное время. Нормировка  $\Gamma_4$  на среднюю интенсивность излучения  $\langle I \rangle$  производилась с помощью измеренных средних от произведения амплитуд и

экспериментального коэффициента корреляции флюктуаций интенсивности  $b_I(\rho) = \frac{\Gamma_4(x, \rho, 0) - \Gamma_2^2(0)}{\Gamma_4(x, 0, 0) - \Gamma_2^2(0)}$ , как указано в [1]. Для измерений  $b_I(\rho)$  использовался трафарет с  $\rho_1 = 0$ , для измерений относительной дисперсии флюктуаций интенсивности  $\beta^2 = \frac{\Gamma_4(x, 0, 0) - \Gamma_2^2(0)}{\langle I \rangle^2}$  — трафарет с  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ . В остальных случаях отношение  $\rho_2 : \rho_1$  изменялось от 1 до 12, а  $\rho_1$  и  $\rho_2$  варьировались в пределах  $0,1 \text{ см} \leq \rho_1 \leq 1,0 \text{ см}; 0,2 \text{ см} \leq \rho_2 \leq 4,0 \text{ см}$ .

Величина  $C_e^2$  определялась из измерений  $\rho_c$ , и в эксперименте ее значения были заключены в пределах  $(0,7 \div 1,3) \cdot 10^{-14} \text{ см}^{-2/3}$  и, соответственно,  $\beta_0 = 1,9 \div 2,6$ ;  $\rho_c = (0,49 \div 0,37) \text{ см}$ ,  $l_T = (1,06 \div 0,94) \text{ см}$ . Среднее измеренное по всему циклу значение  $(\beta)_{\text{ср}}$  равнялось 1,2, что согласуется с [3].

Внутренний масштаб  $l_0$  в атмосфере при обычных условиях может изменяться от 0,1 см до 1,0 см, и для таких  $l_0 \quad D \gg 1$ .

3. Как уже отмечалось, функция  $\Gamma_4$  — комплексная, и в эксперименте измерялись как модули  $|\Gamma_4|$ , так и аргументы  $\arg \Gamma_4$ . Экспериментальные значения  $\arg \Gamma_4$  для  $\varphi = \pi/2$ , усредненные по конфигурациям с одинаковым отношением  $\rho_2 : \rho_1 = m$ , приведены в табл. 1\*.

Таблица 1  
Значения  $(\arg \Gamma_4)_{\text{эксп}}$  для  $\pi = \varphi/2$

$\eta_1 = \eta_2 = 0$	$\eta_1 = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
		$0,4 < \eta_1 < 1,0$	$0,4 < \eta_1 < 1,0$	$0,2 < \eta_1 < 0,8$	$0,2 < \eta_1 < 0,8$
0,03 $\pm 0,04$	-0,01 $\pm 0,02$	0,01 $\pm 0,04$	-0,04 $\pm 0,04$	0,05 $\pm 0,06$	0,01 $\pm 0,05$

Из приведенных данных видно, что средние измеренные значения  $\arg \Gamma_4$  близки к нулю, что следует из условий симметрии.

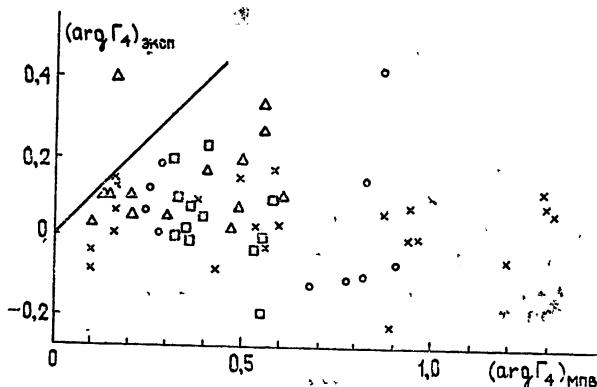


Рис. 1. Аргумент  $\Gamma_4$ :  $\varphi = 0$ ,  $\beta_0 = 1,9 \div 2,6$ ,  $D \gg 1$ ; 1 — треугольники,  $m=1$ ; 2 — кружки,  $m=2$ ; 3 — крестики,  $m=4$ ; 4 — квадратики,  $m=12$ . Прямая на рисунке соответствует совпадению эксперимента с расчетом.

\* Здесь и далее приведены значения  $(\arg \Gamma_4)_{\text{эксп}}$ , полученные из измерений, в которых  $\frac{\Gamma_2(\eta_1)}{\langle I \rangle} \geq 0,25$  [5].

На рис. 1 значениями, соответствующими различным  $m$ , показаны значения  $(\arg \Gamma_4)_{\text{эксп}}$  для вырожденного параллелограмма  $\varphi = 0$ . По оси абсцисс отложены величины  $\arg \Gamma_4$ , рассчитанные в приближении МПВ. Экспериментальные значения  $\arg \Gamma_4$  меньше рассчитанных в приближении МПВ. Ограниченнaя точность измерений в наших экспериментах не дала возможности исследовать в деталях поведение  $\arg \Gamma_4$  при изменении отношения сторон приемного параллелограмма. Однако надежно установлен тот факт, что для всех конфигураций экспериментальные значения  $\arg \Gamma_4$  не превышают, в основном, 0,25 радиана и разница с расчетом тем больше, чем большее теоретические значения. При прочих равных условиях значения  $(\arg \Gamma_4)_{\text{эксп}}$  для  $m = 1$  больше, чем для других конфигураций. Аналогичный результат получен для  $\beta_0 \geq 2$  и  $D \sim 1$  [1].

Результаты измерений модуля  $\Gamma_4$  были нормированы на его максимальное значение  $\Gamma_4(x, 0, 0)$ . Значения  $|\gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi)| = |\Gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi)| / \Gamma_4(\beta_0, 0, 0) = \langle I \rangle^2 (1 + \beta^2)$  для фиксированного угла

$\varphi$  можно представить в виде рельефа над координатной плоскостью, на которой отложены  $\eta_1, \eta_2$ . На рис. 2 представлены сечения рельефа  $|\gamma_4|$  плоскостью  $\eta_1 = \eta_2$ . Эти сечения соответствуют расположению приемных точек в виде квадрата  $\varphi = \pi/2$  и вырожденного ромба  $\varphi = 0$ . Как видно из рисунка, значения  $|\gamma_4|$  для  $\varphi = \pi/2$ , в среднем, несколько больше соответствующих величин  $|\gamma_4|$  для  $\varphi = 0$ . Отметим, что для других сечений  $\eta_2 = m\eta_1$  соответствующие экспериментальные значения  $|\gamma_4|$  при  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 0$  также незначительно отличаются друг от друга. Аналогичный результат отмечен в [1] для  $D \sim 1$ . Штрихпунктирная линия на этом рисунке представляет значения  $|\gamma_4|$ , рассчитанные в приближении МПВ для средних условий эксперимента. Расчетная зависимость дает заметно меньшие значения по сравнению с экспериментальными. На этом же рисунке соответствующими значениями, обведенными кружками, показаны величины  $|\gamma_4|$ , полученные в дополнительной серии измерений с меньшими  $\beta_0$ :  $\beta_0 = 1,4 \div 1,8$  (эти измерения проводились только для трафарета с  $m=1$ ). Видно, что уменьшение  $\beta_0$  приводит к некоторому увеличению значений  $|\gamma_4|$ . Однако в исследовавшемся диапазоне изменений условий распространения света это различие незначительно.

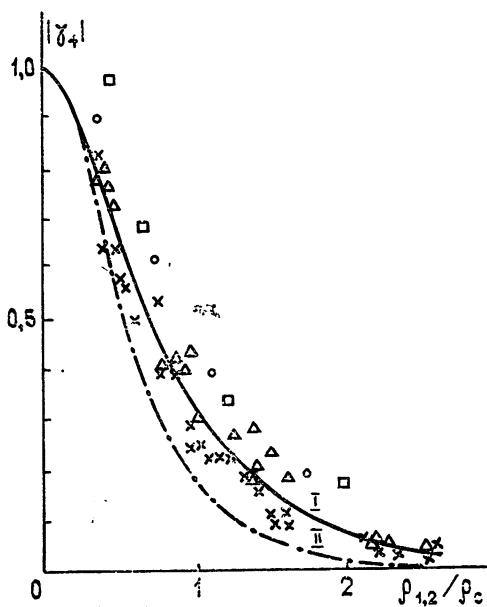


Рис. 2. Сечение рельефа  $|\gamma_4|$  плоскостью  $\eta_1 = \eta_2$ ;  $D \gg 1$ ,  $(\beta)_c = 1,2$ ; 1, 2 —  $\beta_0 = 1,9 \div 2,6$ ; 1 — треугольники,  $\varphi = \pi/2$ ; 2 — крестики,  $\varphi = 0$ ; I — среднее по этим измерениям; II — расчет в приближении МПВ для средних условий эксперимента; 3, 4 —  $\beta_0 = 1,4 \div 1,8$ ; 3 — квадратики,  $\varphi = \pi/2$ ; 4 — кружки,  $\varphi = 0$ .

На рис. 3 сплошными линиями представлены усредненные экспериментальные изолинии рельефа  $|\gamma_4|$ , которые соответствуют сечениям поверхности  $|\gamma_4|$  плоскостями, параллельными плоскости  $\eta_1 \eta_2$ . На ри-

сунке показаны изолинии уровняй 0,2 (внешняя изолиния); 0,4; 0,6. Штриховыми линиями для сравнения показаны изолинии тех уровней из [1] для  $\beta_0 = 2,5$  и  $D \sim 1$  (изолинии строились по средним для  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 0$  значениям  $|\gamma_4|$ ). При построении штриховых изолиний учитывалось, что в эксперименте [1] выполнялось условие  $x_m \rho_c \ll 1$  и соответствующий радиус когерентности  $\rho_{c0}$  определялся из спектра  $\Gamma_2$ . Значения  $\beta_0$  для  $D \sim 1$  вычислялись с учетом внутреннего масштаба гурбулентности [1]. Штрихпунктирными линиями проведены асимптотики изолиний уровня 0,2 при  $\eta_2 \rightarrow \infty$ , т. е.  $\frac{\Gamma_2^2(\eta_1)}{\langle I \rangle^2(1 + \beta^2)} = 0,2$ .

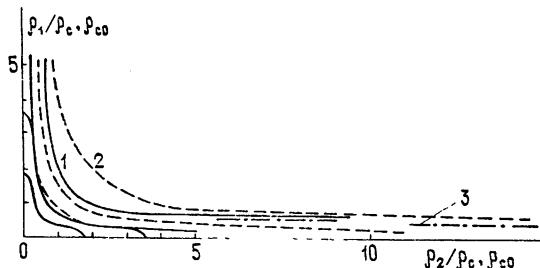


Рис. 3. Усредненные изолинии уровней 0,2; 0,4; 0,6 рельефа  $|\gamma_4|$ :  
1 —  $\beta_0 = 1,9 \div 2,6$ ,  $(\beta)_{cp} = 1,2$ ,  $D \gg 1$ ; 2 —  $\beta_0 = 2,5$ ,  $\beta = 1,5$ ,  $D \sim 1$  [1];  
3 — асимптотики изолиний уровня 0,2,  $\Gamma_2^2(\eta_1)/\langle I \rangle^2(1 + \beta^2) = 0,2$ .

Из рисунка видно, что крутизна ската рельефа  $|\gamma_4|$  для  $D \gg 1$  вблизи  $\eta_1 = \eta_2$  заметно больше, чем для  $D \sim 1$ . Для  $D \gg 1$  значения  $|\gamma_4|$  близки к своей асимптотике при  $\eta_2 \geq 10$  (при  $\eta_1 \approx 1$   $|\Gamma_4(\eta_1, \eta_2 = 0)| = 1,2$ ). Для  $D \sim 1$  подобное распадение  $\Gamma_4$  на  $\Gamma_2^2$  происходит лишь при  $\eta_2 \geq 30 \div 40$ .

Отметим, что в [8] были исследованы соотношения подобия и получено выражение для поперечного масштаба  $l_{T0} = 1,32L^{1/2}k^{-1/2}\beta_0^{-1/3}$  в условиях, когда  $D$  мало. Если представить значения  $|\gamma_4|$  для  $D \gg 1$  в виде рельефа над координатной плоскостью  $\xi_{1,2} = \eta_{1,2} \frac{\rho_c}{l_T}$ , а для  $D \sim 1$ , соответственно, в виде рельефа над координатной плоскостью  $\mu_{1,2} = \eta_{1,2} \frac{\rho_{c0}}{l_{T0}}$ , то крутизны скатов этих рельефов вблизи  $\xi_1 = \xi_2$  и  $\mu_1 = \mu_2$  становятся приблизительно одинаковыми.

В заключение перечислим основные результаты работы. Измерения  $\Gamma_4(\beta_0, \eta_1, \eta_2, \varphi)$  в области случайных фокусировок интенсивности излучения  $\beta_0 = 1,9 \div 2,6$  при больших значениях волнового параметра  $D \gg 1$  показали, что экспериментальные величины аргумента  $\Gamma_4$  меньше соответствующих аргументов, вычисленных в приближении МПВ. Для модуля  $|\Gamma_4|$  несущественна зависимость от угла  $\varphi$ . Рельеф  $|\gamma_4|$  для  $D \gg 1$  отличается большей крутизной вблизи  $\eta_1 = \eta_2$  по сравнению с рельефом для таких же  $\beta_0$  и  $D \sim 1$ . Распадение  $\Gamma_4$  на  $\Gamma_2^2$  при  $\eta_2 \gg \eta_1 \approx 1$  происходит значительно быстрее для  $D \gg 1$ , чем для  $D \sim 1$  при  $\beta_0 = 2 \div 3$ .

Пользуемся случаем выразить благодарность В. У. Заворотному за плодотворную дискуссию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Гурвич, В. Кан, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 3, 398 (1978).
2. В. И. Татарский, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.
3. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1973.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. А. С. Гурвич, В. Кан, Б. П. Потапов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 393 (1976).
6. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, № 8, 481 (1977).
7. А. В. Артемьев, А. С. Гурвич, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 734 (1971).
8. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Ф. Э. Мартвель, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1020 (1977).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 апреля 1978 г.

MEASUREMENTS OF FOUR-POINT COHERENCE FUNCTION OF THE LASER RADIATION FIELD IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

*A. S. Gurvich, V. Kan*

The results of experimental investigation of the four-point coherence function of a laser radiation complex field in the turbulent atmosphere are given. Measurements were made in the region of random focusings of radiation intensity at large values of the wave parameter. The results of measurements are compared with the results of analogous measurements but for small values of the wave parameter. General trends in the behaviour of the four-point coherence function are noted as well as the peculiarities connected with the difference of the wave parameter.

УДК 5—35.5 :

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

*А. С. Гурвич, Б. С. Елепов, Вл. В. Покасов, К. К. Сабельфельд,  
В. И. Татарский*

Приводятся результаты численных расчетов пространственных корреляционных функций сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде. Сравнение с соответствующими измеренными величинами обнаруживает их хорошее согласие. Численные расчеты подтверждают справедливость асимптотической теории сильных флуктуаций, развитой в [11—14].

### 1. ВВЕДЕНИЕ

После экспериментального обнаружения сильных флуктуаций интенсивности света, распространяющегося в турбулентной атмосфере [1], появилось значительное число работ, посвященных этому вопросу (см. обзоры [2, 3] и монографию [4]). В работах [5—10] были получены уравнения, пригодные для описания сильных флуктуаций интенсивности. Для случая плоской падающей волны в ряде работ найдены асимптотические решения для вторых и более высоких моментов интенсивности в области насыщения флуктуаций (см. [11—14] и обзор [2]). Одновременно был выполнен и целый ряд экспериментальных исследований сильных флуктуаций (см., например, [15—18], [4]). Что касается точных решений уравнения для четвертого момента поля, то аналитически его удается получить только в виде континуального интеграла [14]. В работе [19] методом сеток было получено численное решение этого уравнения, соответствующее корреляционной функции показателя преломления в виде гауссовой кривой. Получить таким же образом численное решение, соответствующее практически более интересному случаю степенного спектра показателя преломления, значительно сложнее. В работе [20] это удалось сделать лишь для двумерной модели неоднородностей. Однако применение метода статистических испытаний [21, 22] позволяет получить численное решение в случае степенных спектров и для трехмерных неоднородностей.

В настоящей работе излагаются результаты численного решения уравнения для четырехточечной функции когерентности, результаты измерений частотных спектров флуктуаций интенсивности света в приземном слое атмосферы и производится сравнение расчетных и экспериментальных результатов.

### 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТВЕРТОГО МОМЕНТА ПОЛЯ, УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА «ЧАСТИЦ» И МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Функция когерентности четвертого порядка выражается через комплексную амплитуду поля  $u(x, r)$  при помощи формулы

$$\Gamma_4(x, r_1, r_2) = \langle u(x, 0) u(x, r_1 + r_2) u^*(x, r_1) u^*(x, r_2) \rangle.$$

Здесь  $x$  — продольная и  $r_{1,2}$  — поперечные координаты. В случае плоской падающей волны функция  $\Gamma_4$  удовлетворяет уравнению ([<sup>5-10</sup>])

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} = \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma_4}{\partial r_1 \partial r_2} - \frac{\pi k^2}{4} F(r_1, r_2) \Gamma_4, \quad (2.1)$$

$$\Gamma_4(x=0) = 1,$$

причем функция  $F$  имеет вид

$$F(r_1, r_2) = 2H(r_1) + 2H(r_2) - H(r_1 + r_2) - H(r_1 - r_2); \quad (2.2)$$

$$H(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}] \Phi_{\epsilon}(0, \mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\Phi_{\epsilon}(p, \mathbf{x}) \geq 0$  — трехмерная спектральная плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости (обозначения совпадают с принятыми в [<sup>23, 26</sup>]).

Корреляционная функция относительных флюктуаций интенсивности  $I(x, \mathbf{r}) = |u(x, \mathbf{r})|^2$  в плоскости  $x = \text{const}$ , т. е. функция

$$B_I(x, \mathbf{r}) = \langle I(x, 0) I(x, \mathbf{r}) \rangle - \langle I(x) \rangle^2$$

связана с  $\Gamma_4$  формулой

$$B_I(x, \mathbf{r}) = \Gamma_4(x, 0, \mathbf{r}) - 1. \quad (2.4)$$

Имеет место соотношение [<sup>23</sup>]

$$\lim_{|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty} \Gamma_4(x, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\Gamma_2(x, \mathbf{r}_1)|^2, \quad (2.5)$$

где  $\Gamma_2(x, \mathbf{r}) = \langle u(x, 0) u^*(x, \mathbf{r}) \rangle$  — функция когерентности второго порядка. Соотношение (2.5) описывает распадение четырехточечного момента на произведение двухточечных моментов при неограниченном раздвижении двух пар точек друг относительно друга.

Рассмотрим трансформанту Фурье от  $\Gamma_4$  по  $\mathbf{r}_2$ :

$$\varphi(x, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}'} \Gamma_4(x, \mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}'. \quad (2.6)$$

Из (2.1) следует, что  $\varphi$  удовлетворяет уравнению [<sup>23</sup>]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\pi k^2}{2} H(\mathbf{r}) \varphi = \pi k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}] \times$$

$$\times \Phi_{\epsilon}(0, \mathbf{x}') \varphi(x, \mathbf{r}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') d^2 \mathbf{x}' \quad (2.7)$$

с начальным условием

$$\varphi(0, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что  $\varphi^* = \varphi$ .

Уравнение (2.7) с учетом начального условия (2.8) можно преобразовать в интегральное уравнение

$$\varphi(x, \mathbf{r}, \mathbf{x}) = \varphi_0(x, \mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x}' K(x, \mathbf{r}, \mathbf{x};$$

$$x', \mathbf{r}', \mathbf{x}') \varphi(x', \mathbf{r}', \mathbf{x}'), \quad (2.9)$$

где

$$\varphi_0(x, r, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \exp \left\{ -\frac{\pi k^2 x}{2} H(r) \right\}; \quad (2.10)$$

$$K(x, r, \mathbf{x}; x', r', \mathbf{x}') = \pi k^2 \delta \left( r - r' - \frac{\mathbf{x}(x-x')}{k} \right) \Phi_{\epsilon}(0, \mathbf{x}-\mathbf{x}') \times \\ \times \{1 - \cos[(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}']\} \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x H \left[ r - \frac{\mathbf{x}(x-\xi)}{k} \right] d\xi \right\}. \quad (2.11)$$

В операторной форме уравнение (2.9) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \hat{K} \varphi, \quad (2.12)$$

где  $\hat{K}$  — интегральный оператор с ядром (2.11). Как известно, если норма  $\|\hat{K}\|$  оператора  $\hat{K}$  меньше единицы, решение уравнения (2.12) можно записать в виде сходящегося итерационного ряда. В качестве нормы можно принять

$$\|\hat{K}\| = \sup_{x, r, \mathbf{x}} N, \quad (2.13)$$

где

$$N(x, r, \mathbf{x}) = \int_0^x dx' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 r' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x}' K(x, r, \mathbf{x}; x', r', \mathbf{x}'). \quad (2.14)$$

Подставляя (2.11) в (2.14) и вводя вместо  $x'$  новую переменную интегрирования

$$v = -\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x H \left[ r - \frac{\mathbf{x}(x-x'')}{k} \right] dx'',$$

можно получить формулу

$$N = 1 - \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x H \left[ r - \frac{\mathbf{x}(x-\xi)}{k} \right] d\xi \right\}. \quad (2.15)$$

Согласно (2.3)  $H \geq 0$ . Поэтому, если  $H$  ограничена, то при любых  $x, r, \mathbf{x}$  получим  $N < 1$ ,  $\|\hat{K}\| < 1$ .

Нас, однако, будет интересовать случай, когда при  $r \gg l_0$  ( $l_0$  — внутренний масштаб неоднородностей) функция  $H(r)$  имеет вид, соответствующий турбулентным флуктуациям диэлектрической постоянной [23]:

$$H(r) = p C_{\epsilon}^2 r^{5/3}. \quad (2.16)$$

Здесь  $C_{\epsilon}^2$  — структурная характеристика флуктуаций  $\epsilon$ ,  $p = 2\sqrt{\pi}/9 \times \Gamma(11/6)\Gamma(5/3) \approx 0,464$ . В этом случае  $H$  неограниченно возрастает с ростом своего аргумента. Поэтому выполнения условия  $\|\hat{K}\| < 1$  можно добиться лишь в том случае, если искусственно ограничить область изменения  $r$  и  $\mathbf{x}$ :

$$|r| \leq R(x), \quad |\mathbf{x}| \leq \mathbf{x}_m. \quad (2.17)$$

Ограничение  $|\mathbf{x}| \leq \mathbf{x}_m$  эквивалентно учету внутреннего масштаба турбулентности. Заметим, что рассматривать чисто степенные функции  $H(r) \sim r^{5/3}$  недопустимо и с точки зрения исходного уравнения (2.1), так как при этом не существуют вторые производные от  $F$  при  $r_1 = \pm r_2$ .

Что касается ограничения области интегрирования в уравнении (2.9) по  $r'$ , то оно неизбежно при любом численном методе решения. Однако если одновременно с этим ограничением использовать асимптотическое условие (2.5), то такое ограничение становится несущественным, если  $R$  достаточно велико.

В дальнейшем мы будем использовать функцию  $H$  вида (2.16). Введем безразмерные переменные. В качестве продольного масштаба  $L$  возьмем расстояние, на котором вычисленная при помощи метода возмущений величина относительных флуктуаций интенсивности равна единице:

$$\beta_0^2(L) = \alpha C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6} = 1. \quad (2.18)$$

Здесь  $\alpha = 2^{8/3} \pi^{3/2} \sin \frac{\pi}{12} / 33 \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,307$ . Так как  $\beta_0^2(x) = \alpha C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$ , то безразмерное продольное расстояние  $\xi = x/L$  связано с  $\beta_0^2(x)$  формулой

$$\xi \equiv \frac{x}{L} = [\beta_0(x)]^{12/11}. \quad (2.19)$$

В качестве поперечного масштаба введем величину, пропорциональную радиусу первой зоны Френеля на расстоянии  $L$ :

$$l = \sqrt{L/k} = (\alpha C_\epsilon^2 k^3)^{-3/11}. \quad (2.20)$$

Если ввести безразмерные поперечные переменные  $r_0 = r/l$ ,  $\kappa_0 = \kappa l$  и безразмерную функцию  $\varphi_0(\xi, r_0, \kappa_0) = l^{-2} \varphi\left(\xi L, r_0 l, \frac{\kappa_0}{l}\right)$ , то уравнение (2.7) примет вид (индексы «0» в дальнейшем опускаем в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu_1 r^{5/3} \varphi &= \mu_2 \cdot \int_{\kappa' < \kappa_m l} \int | \kappa - \kappa' |^{-11/3} \times \\ &\times \{1 - \cos[(\kappa - \kappa') r]\} \varphi(\xi, r, \kappa') d^2 \kappa'; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\varphi(0, r, \kappa) = \delta(\kappa). \quad (2.22)$$

Здесь  $\mu_1 = \frac{\pi p}{2\alpha} \approx 2,37$ ,  $\mu_2 = 11 \Gamma(11/6)/12 \pi^3 \sin \frac{\pi}{12} \approx 0,338$ . Область интегрирования по  $\kappa'$  в (2.21) ограничена в соответствии с условием (2.17) кругом  $\kappa' < \kappa_m l$ .

Асимптотическое условие (2.5), сформулированное в терминах функции  $\varphi$ , имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\xi, r, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) l^{-\mu_1} \kappa \rho^{5/3} \rho d\rho. \quad (2.23)$$

Вместо функции  $\varphi$  можно ввести новую функцию

$$Q(\xi, r, \kappa) = \kappa \varphi(\xi, r, \kappa).$$

Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + n \frac{\partial Q}{\partial r} + \sigma(r, \kappa) Q = \int_{\kappa' < \kappa_m l} \int \sigma_s(r, \kappa') g(r, \kappa' \rightarrow \kappa) Q(\xi, r, \kappa') d^2 \kappa' \quad (2.24)$$

и начальному условию

$$Q(0, r, \mathbf{x}) = \kappa \delta(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Здесь

$$n = \kappa/x, \quad (2.26)$$

$$\sigma(r, \mathbf{x}) = \sigma_s(r, \mathbf{x}) = \mu_1 r^{5/3} x^{-1};$$

$$g(r, \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) = \frac{\mu_2}{\mu_1} r^{-5/3} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-11/3} \{1 - \cos [(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{r}]\}. \quad (2.27)$$

Если интерпретировать  $\xi$  как время,  $x$  — как скорость, то уравнение (2.24) можно считать нестационарным многоскоростным уравнением переноса частиц в плоской среде, причем  $\sigma(r, \mathbf{x})$  — полное сечение взаимодействия,  $\sigma_s = \sigma$  — сечение рассеяния,  $g(r, \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x})$  — индикаторика рассеяния, нормированная условием

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(r, \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}' = 1.$$

Так как  $\sigma = \sigma_s$ , то в точках столкновения поглощение отсутствует. Функции  $Q(\xi, r, \mathbf{x})$  и  $\varphi(\xi, r, \mathbf{x})$  можно рассматривать соответственно как поток и плотность числа частиц [24]. При этом асимптотическое условие (2.23) задает плотность частиц при  $r \rightarrow \infty$ .

О общем случае задачи теории переноса решаются методом Монте-Карло путем моделирования траекторий частиц по такой схеме [21]:

п. 1. Выбор начальной точки траектории соответственно плотности распределения источника;

п. 2. Выбор длины свободного пробега;

п. 3. Проверка вылета из среды или какого-либо другого критерия окончания траектории;

п. 4. Определение координат очередной точки столкновения;

п. 5. Выбор типа столкновения (поглощение или рассеяние, в данном случае всегда происходит рассеяние);

п. 6. Моделирование новой скорости и нового направления пробега частицы;

п. 7. Переход на п. 2 для дальнейшего моделирования траектории.

Конкретные алгоритмы моделирования описаны в [21, 22]. Однако в результате проведения расчетов по этой схеме оказалось, что описанный прямой подсчет числа частиц не дает возможности оценить функции  $B_I(x, r)$  и  $\varphi(x, r, \mathbf{x})$  с достаточной степенью точности и эффективно учесть асимптотику (2.23). Поэтому был разработан алгоритм метода Монте-Карло, основанный на моделировании «сопряженных» траекторий [25] и аналитическом осреднении, с помощью которого эффективно учитывается асимптотика (2.23). При этом используется свойство решения  $Q^+$  сопряженного уравнения, заключающееся в том, что  $Q^+(\xi, r, \mathbf{x})$  представляет собой условное математическое ожидание вклада в вычисляемый функционал при условии, что (обращенные по направлению) траектории начинаются в точке  $(\xi, r, \mathbf{x})$ . Следовательно, после первого достижения траекторией (не обращенной) области  $r > r_m$ , в которой справедлива асимптотика, эту траекторию можно оборвать, прибавив к результату величину  $Q^+$  в точке обрыва. Более подробно методика расчетов с использованием «сопряженных» траекторий изложена в [21, 22]. Значения  $r_m$  (в безразмерных единицах), при которых использовалась асимптотическая формула, брались из следующих соображений. Ясно, что  $r_m$  должно превышать наибольший из возможных характерных масштабов функции  $B_I(x, r)$ . Из экспериментальных результатов известно, что с ростом  $\beta_0$  (или  $\xi$ ) наибольший масштаб корреляции, соответствующий точке пересечения функцией  $B_I(x, r)$

оси абсцисс, отодвигается от начала координат. При  $\xi \sim 1$  с большим запасом можно принять  $r_m \sim 10$ , а при  $\xi \sim 10 - r_m \sim 40$ . В процессе проведения расчетов величина  $r_m(\xi)$  увеличивалась в два раза и было установлено, что результаты при этом не изменяются. Величина  $x_m$  при расчетах принималась равной 100, что по порядку величины соответствует внутреннему масштабу  $l_0 \sim l/20$ .

В условиях проведенных экспериментов внутренний масштаб турбулентности  $l_0$  был приблизительно в пять раз большим, чем при расчетах. В процессе численных расчетов производилась попытка увеличения внутреннего масштаба турбулентности, однако это встретило некоторые затруднения.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ, РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ СРАВНЕНИЕ

В процессе расчетов оценивались функционалы

$$\Gamma_4(\xi, r_0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, r_0, x_0) d^2 x_0; \quad (3.1)$$

$$W_I(\xi, p) = \frac{2}{\pi} \iint_{x_0^2 > p^2} [\varphi(\xi, 0, x_0) - \delta(x_0)] \frac{d^2 x_0}{\sqrt{x_0^2 - p^2}}. \quad (3.2)$$

По  $\Gamma_4(\xi, r, 0)$ , согласно (2.4), можно найти корреляционную функцию флюктуаций интенсивности  $B_I(\xi, r_0)$  и, в частности, средний квадрат флюктуаций

$$\beta^2 \equiv \langle I^2(\xi) \rangle - 1 = \Gamma_4(\xi, 0, 0) - 1, \quad (3.3)$$

для которого использовалась специальная локальная оценка. Функция  $W_I(\xi, p)$  представляет собой одномерную спектральную плотность флюктуаций интенсивности, связанную с  $B_I(\xi, r)$  равенством

$$B_I(\xi, r) = \int_0^{\infty} W_I(\xi, p) \cos(pr) dp.$$

Относительная ошибка вычислений величин  $1 + \beta^2$ ,  $1 + B_I$ ,  $W_I$  порядка 10%.

На рис. 1 представлена зависимость  $\beta = \beta(\beta_0)$ , полученная в результате расчетов (кривая 1), осредненная экспериментальная кривая (2) и асимптотическая зависимость

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{0,861}{\beta_0^{4/5}}}, \quad (3.4)$$

следующая из работ [11–14] (3). Как следует из приведенных результатов, полученная в результате численных расчетов функция  $\beta = \beta(\beta_0)$  приближается к единице, причем быстрее, чем асимптотическая кривая (3.4), и быстрее, чем экспериментальная кривая (2). Возможно, что завышение экспериментальных результатов по сравнению с теоретическими связано с ограниченностью поперечных размеров пучка (см. [4], рис. 6.25) и конечным значением внутреннего масштаба [17], хотя могут оказаться существенными и другие факторы как теоретического, так и экспериментального характера.

На рис. 2 представлены результаты численного расчета нормированных корреляционных функций

$$b_I(\xi, \rho) = \frac{B_I(\xi, \rho)}{B_I(\xi, 0)}. \quad (3.5)$$

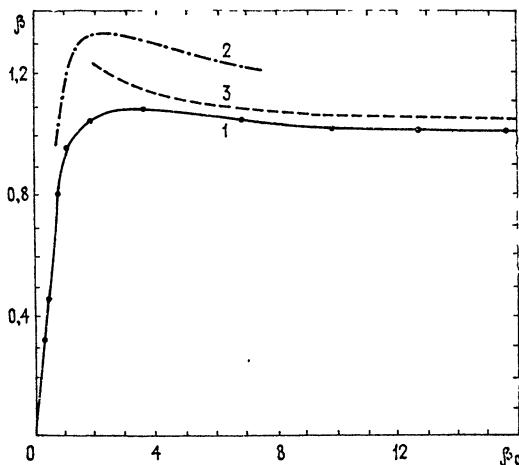


Рис. 1. Зависимость  $\beta = \beta(\beta_0)$ : 1 — результаты численного расчета; 2 — усредненные экспериментальные результаты; 3 — расчет по асимптотической формуле (3.4).

По оси абсцисс отложена величина  $\frac{r}{r_k} = r_0 \xi^{3/5}$ , где  $r_0 = \frac{r}{l}$  и  $l$  определено формулой (2.30). Величина  $r_k = l \xi^{-3/5} = (\alpha C_e^2 k^2 x)^{-3/5}$  является радиусом когерентности поля. Сплошной линией нанесена зависимость

$$\tilde{b}_I(\xi, r) = \exp \left\{ -\mu_1(r/r_k)^{5/3} \right\}, \quad (3.6)$$

соответствующая главному члену полученного в [11–14] асимптотического разложения для области  $\beta_0 \gg \gg 1$ . Как видно из рис. 2, уже начиная со значений  $\beta_0 \sim 1$ , формула (3.6) хорошо описывает корреляционную функцию (3.5) в области больших значений коэффициента корреляции. Что же касается малых значений  $b_I$ , то, как следует из работ [11–14], здесь, помимо масштаба  $r_k = l \xi^{-3/5}$ , вторым характерным масштабом является величина  $r_D = l \xi^{8/5}$ , так что кривые, соответствующие различным  $\xi$ , не должны совпадать. Кроме того, относительная ошибка вычисления  $b_I$  в области  $|b_I| \ll 1$  существенно возрастает.

Имеющиеся экспериментальные данные (см. [4]) качественно согласуются с полученными зависимостями  $b_I(\xi, r)$ , однако их точность невелика, так что проводить детальное сравнение не имеет смысла.

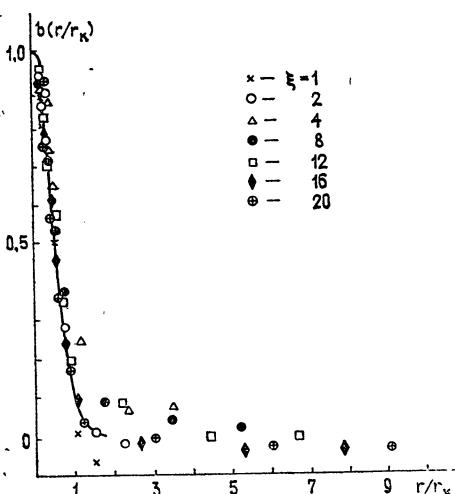


Рис. 2. Пространственная нормированная корреляционная функция флуктуаций интенсивности при различных значениях параметра  $\xi$ . Сплошная кривая — зависимость (3.6).

Значительно более обширны и надежны экспериментальные данные по частотным спектрам флуктуаций интенсивности. Предварительные данные и методика их получения были приведены в [15, 16]. Ниже, на рис. 3 (кривые 4, 5, 6), приводятся частотные спектры флуктуаций интенсивности, полученные в коллимированном пучке ( $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ ) с эффективным диаметром  $2a = 31 \text{ см}$  на трассах длиной от  $1,75 \text{ км}$  до  $13,5 \text{ км}$ . Число Френеля излучающей апертуры  $\Omega = ka^2/x$  во всех случаях превышало 18. По оси ординат отложено нормированное произведение частоты  $f$  на спектральную плотность  $W_1(f)$ , т. е. величина  $fW(f)/\beta^2(x)$ . По оси абсцисс отложен  $\ln(2\pi f l/v)$ , где  $v$  — непосредственно измеренная (по пространственно-временным корреляциям [27]) средняя скорость движения дифракционной картины в плоскости наблюдения. В этих координатах площадь под кривой частотного спектра равна единице. В случае выполнения условия «замороженности» неоднородностей имеет место соотношение  $2\pi f/v = x$ , где  $x$  — пространственная круговая частота. Кривые 4, 5, 6 на рис. 3 соответствуют значениям  $\beta_0 = 1; 6; 18$ .

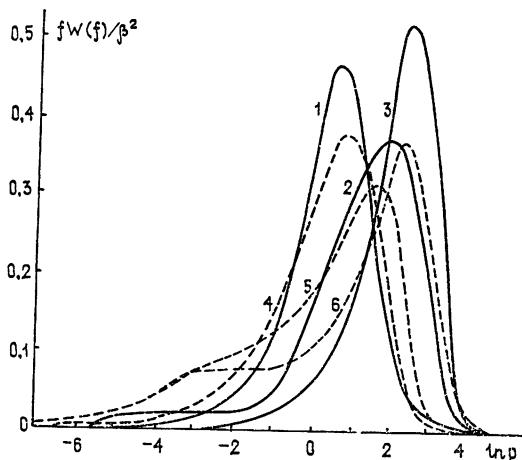


Рис. 3. Нормированные одномерные пространственные спектры флуктуаций интенсивности: кривые 1, 2, 3 — результат численного расчета для значений параметра  $\beta_0 = 1; 6.7; 15.6$ ; кривые 4, 5, 6 — результат измерений при  $\beta_0 = 1; 6; 18$ .

На том же графике приведены полученные в результате численных расчетов величины  $pW_1(p)/\beta^2(\xi)$  для значений  $\beta_0 = 1; 6.73; 15.6$ , близких к имевшим место в экспериментах. По сравнению с теоретическими, экспериментальные кривые несколько «размазаны» и соответственно этому в силу нормировки имеют меньшее значение в максимуме. Аналогично обстоит дело и в области слабых флуктуаций. В обоих случаях это можно, по-видимому, объяснить флуктуациями скорости дрейфа дифракционной картины.

Если же отвлечься от этого различия, то в остальном соответствие расчетных и экспериментальных значений вполне удовлетворительное: положения максимумов на шкале частот очень близки; относительная высота и общее взаимное расположение кривых имеют один и тот же характер. Наблюдается некоторое расхождение пространственных спектров в области крупных масштабов (малых частот), что может быть связано и с ограниченностью пучка, и с отклонениями спектра неоднородностей от степенного вблизи внешнего масштаба турбулентности.

На рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе представлено по-

лученное в результате численных расчетов семейство функций  $S(q) = qW_1(\xi, q)/\beta^2(\xi)$ . Здесь  $q = \pi r_k = p \xi^{-3/5}$  — волновое число, измеряемое в единицах, соответствующих радиусу когерентности поля  $r_k$ . На том же графике приведена кривая  $A$ , являющаяся преобразованием Фурье главного члена асимптотического разложения (3.6) для корреляционной функции. Как видно из графиков, в области высоких частот при всех  $\xi \geq 4$  полученные в результате численных расчетов спектры хорошо аппроксимируются кривой  $A$ , соответствующей главному члену асимптотического разложения (3.6). Расхождение между этими кривыми в области значений  $\ln q \sim 3 \div 4$  связано с влиянием внутреннего масштаба неоднородностей, не учтенного при построении кривой  $A$ . Это, впрочем, легко можно было бы сделать, так как высокочастотная часть спектра описывается асимптотикой, получаемой методом возмущений [12]. В области низких частот рассчитанные кривые совпадают с кривой  $A$ , в тем большем диапазоне частот, чем больше  $\xi$ . Локальный минимум на кривых, соответствующих большим значениям  $\xi$ , отвечает масштабу  $r_D = x/k r_k = r_k \xi^{11/5}$ , так что соответствующая ему безразмерная частота  $q_D = r_k/r_D = \xi^{-11/5}$  с ростом  $\xi$  отодвигается все дальше в область низких частот.

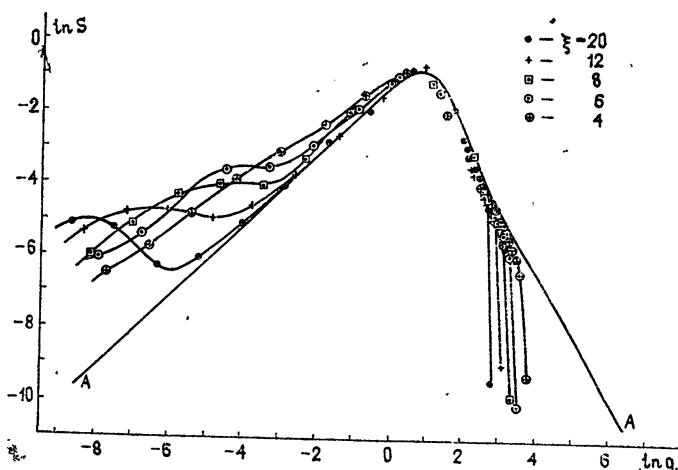


Рис. 4. Пространственные одномерные спектры флюктуаций интенсивности при различных значениях параметра  $\xi$  как функции безразмерной частоты  $q = \pi r_k$ .

Что касается поведения экспериментальных спектров, то, как отмечалось выше, соответствующий им внутренний масштаб турбулентности примерно в 5 раз превышал принятый в расчетах. К такому же эффекту могла привести и ограниченность пучка [28]. В связи с этим экспериментальные спектры в области высоких частот убывают быстрее расчетных.

Следует, по-видимому, провести дополнительные эксперименты, в которых было бы обращено специальное внимание на выяснение причины небольших расхождений, наблюдающихся как в деталях частотных спектров, так и в зависимости  $\beta = \beta(\beta_0)$ .

В заключение отметим, что результаты численных расчетов и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются друг с другом, что свидетельствует о применимости положенной в основу расчетов теоретической модели, основанной на марковском приближении. Результа-

ты численных расчетов хорошо согласуются и с асимптотической теорией [11–14] в области ее применимости.

Авторы весьма признательны Г. А. Михайлову за большую помощь и внимание к работе, а также В. И. Шишову за полезное обсуждение результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. вузов — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
2. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, № 3, 413 (1974).
3. A. S. Gurvich and V. I. Tatarskii, Radio Sci., 10, № 1 (1975).
4. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1976.
5. В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
6. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
7. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, 594 (1969).
8. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, 952 (1969).
9. M. Begap and T. Ho, J. Opt. Soc. Am., 59, 1134 (1969).
10. J. E. Molynex, J. Opt. Soc. Am., 61, 248 (1971).
11. K. S. Gochelashvily and V. I. Shishov, Opt. Acta, 18, 767 (1971).
12. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, 1237 (1974).
13. И. Г. Якушкин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
14. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 73, вып. 2 (8), 481 (1977).
15. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях лазерного излучения, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1973.
16. А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, С. О. Ломадзе, К. П. Погосян, В. В. Покасов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 4, 610 (1975).
17. А. С. Гурвич, М. А. Каллистров, Ф. Э. Мартвель, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1020 (1977).
18. J. R. Dunphy and J. R. Kegg, J. Opt. Soc. Am., 63, № 8, 981 (1973).
19. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 1, 16 (1970).
20. W. R. Brown, Jr., J. Opt. Soc. Am., 62, 966 (1972).
21. Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбинян, Б. А. Карагин, Б. С. Елевов, Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, гл. 6, изд. Наука, Новосибирск, 1976.
22. Б. С. Елевов, Г. А. Михайлов, ЖВММФ, 16, № 5, 1264 (1976).
23. V. I. Tatarskii, The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation, Nat. Techn. Inf. Serv., Springfield, Va, 22151 (1971).
24. Г. А. Михайлов, Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, изд. Наука, Новосибирск, 1974.
25. Г. И. Марчук, В. В. Орлов, К теории сопряженных флуктуаций, в сб. Нейтронная физика, Атомиздат, М., 1961, стр. 30.
26. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
27. В. А. Безверхний, А. С. Гурвич, В. В. Покасов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, № 1, 102 (1978).
28. Н. С. Тиме, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 8, 1198 (1971).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
30 января 1978 г.

### A SPATIAL STRUCTURE OF STRONG LIGHT INTENSITY FLUCTUATIONS IN THE TURBULENT MEDIUM

*A. S. Gurvich, B. S. Elepov, Vl. V. Pokasov, K. K. Sabel'feld, V. I. Tatarskii*

The results of numerical calculations of spatial correlation functions of strong light intensity fluctuations in the turbulent medium are given. Comparison with the corresponding measured values shows their good agreement. The numerical calculations confirm the validity of the asymptotic theory of strong fluctuations developed in [11–14].

УДК 538.574.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОНИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

*B. F. Апельцин, A. С. Ильинский*

Неполным проекционным методом Галеркина для векторных осесимметричных задач дифракции точечных источников на конических телах получены диаграммы направленности рассеянного поля в резонансной области частот. Рассмотрены случаи идеально проводящего конуса, возбуждаемого вертикальным магнитным или электрическим диполем на оси симметрии, и изучено влияние на диаграмму слаживания вершины и кромки конуса, а также влияние неоднородной плазменной среды, локализованной вблизи поверхности конуса.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Используемый в работе проекционный метод нахождения приближенного решения внешних задач дифракции и распространения радиоволн хорошо известен в литературе [1–5]. Он пригоден для проведения практических исследований различных антенных устройств, так как позволяет учитывать реальную геометрию рассеивателей и реальные свойства неоднородной среды, наличие которой вблизи рассеивателя может дополнительно осложнить картину дифракционных явлений. Для случая осесимметричных рассеивателей метод приводит к одномерным алгоритмам. Однако реализация этого метода и в этом случае, для произвольного внешнего возбуждения в векторных задачах дифракции, связана со значительными техническими трудностями и до настоящего времени не проведена. В то же время случай осесимметричного возбуждения в таких задачах является значительно более простым для реализации, поскольку задача сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка с краевыми условиями для каждой из двух возможных поляризаций: *E*-поляризация (возбуждение электрическим диполем) и *H*-поляризация (возбуждение магнитным диполем). Эти задачи, являясь частным случаем по способу возбуждения, сохраняют общность геометрии и свойств неоднородной среды в классе осесимметричных рассеивателей. Структура рассеянного поля в дальней зоне для этих случаев несет значительную информацию о влиянии на решение особенностей геометрии тела и параметров среды, и можно ожидать, что эти свойства характерны для векторных задач и в более общей постановке.

Конкретные численные результаты для осесимметричных задач дифракции на конечных конусах в резонансной области частот в широкой печати не известны; следовательно, их получение и исследование представляет значительный интерес, тем более, что описываемый проекционный метод пригоден для различных поляризаций электромагнитного поля и позволяет варьировать геометрию рассеивателя и свойства неоднородной среды в довольно широких пределах, а также обладает рядом преимуществ в смысле простоты реализации и надежности получаемых результатов.

## 2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Прежде всего рассмотрим постановки задач для точных решений, удобные для перехода к соотношениям проекционного метода построения приближенных решений. Пусть  $S$  — замкнутая поверхность идеально проводящего тела вращения, уравнение которой в сферических координатах  $\rho = \rho_0(\vartheta)$ . Будем считать, что область неоднородности среды заключена между  $S$ - и  $S_1$ -поверхностью, подобной  $S$  и описываемой уравнением  $\rho = p\rho_0(\vartheta)$ ;  $p > 1$  — параметр, характеризующий толщину неоднородного слоя. В области неоднородности среда описывается функциями  $\sigma(\rho, \vartheta)$ ;  $\epsilon(\rho, \vartheta)$  — проводимость и диэлектрическая проницаемость. Вне  $S_1$  среда гладко переходит в однородную:  $\sigma = 0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ . Магнитная проницаемость  $\mu = \mu_0$  всюду вне  $S$ . Обозначим через  $\Sigma$  сферу, концентрическую с  $S$  и  $S_1$ , радиус которой  $R > \max_{\vartheta} p\rho_0(\vartheta)$ . Область между  $S$  и  $S_1$  обозначим через  $D$ , область между  $S_1$  и  $\Sigma$  — через  $D_1$ . Вне  $\Sigma$  на оси вращения расположен вертикальный диполь, излучающий электромагнитное поле частоты  $\omega$ . Постановки задач для точных решений имеют следующий вид.

### 1. $E$ -поляризация:

$$\begin{cases} \hat{L}[H_\varphi] + H_\varphi = 0 & \text{в } D \\ \hat{L}[H_\varphi] + k_0^2 H_\varphi = 0 & \text{в } D_1 \end{cases}; \quad (1)$$

$$E_\tau = 0 \quad \text{на } S; \quad (2)$$

$$H_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} T_n V_n^{(1)}(k_0 \rho, \vartheta) + H_\varphi^{(0)} \quad \text{вне } \Sigma. \quad (3)$$

### 2. $H$ -поляризация:

$$\begin{cases} L[E_\varphi] + k^2(\rho, \vartheta) E_\varphi = 0 & \text{в } D \\ L[E_\varphi] + k_0^2 E_\varphi = 0 & \text{в } D_1 \end{cases}; \quad (4)$$

$$E_\varphi = 0 \quad \text{на } S; \quad (5)$$

$$E_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} T_n V_n^{(1)}(k_0 \rho, \vartheta) + E_\varphi^{(0)} \quad \text{вне } \Sigma. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $H_\varphi$  — компонента полного магнитного поля,  $E_\varphi$  — компонента полного электрического поля,

$$\hat{L}[H_\varphi] = \rho \sin \vartheta \nabla \left[ \frac{1}{k^2 \rho^2 \sin^2 \vartheta} \nabla (\rho \sin \vartheta H_\varphi) \right], \quad L \equiv \hat{L} \quad \text{при } k^2 \equiv 1,$$

$$k^2(\rho, \vartheta) = \omega^2 \epsilon \mu_0 + i \sigma \omega \mu_0, \quad k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0,$$

$E_\tau = \frac{i k_0}{k^2 \rho \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial n_t} (\rho \sin \vartheta H_\varphi)$  — тангенциальная компонента электрического поля,  $H_\varphi^{(0)}$  — компонента магнитного поля электрического диполя,  $E_\varphi^{(0)}$  — компонента электрического поля магнитного диполя,  $V_n^{(1)}(k_0 \rho, \vartheta) = \zeta_n^{(1)}(k_0 \rho) P_n^{(1)}(\cos \vartheta)$  — расходящиеся (при зависимости от времени  $e^{-i\omega t}$ ) сферические гармоники однородного пространства,  $T_n$  — коэффициенты разложения рассеянного поля вне  $\Sigma$  по  $V_n^{(1)}$ , подлежащие определению при решении задачи построения поля в дальней зоне. Равенства (3), (6) являются неоднородными парциальными условиями излучения [1]. Отметим еще естественное ограничение на  $k^2(\rho, \vartheta)$ :  $\operatorname{Im} k^2 = \omega \sigma \mu_0 > 0$  в  $D$ .

Постановки задач для приближенных решений  $H_{\varphi}^{(N)}$ ,  $E_{\varphi}^{(N)}$  являются проекционными аналогами задач (1)–(3) и (4)–(6). Предварительно неортогональным преобразованием координат  $\xi = \rho/\rho_0(\vartheta)$ ,  $\psi = \vartheta$  область  $D$  отображается на сферический слой  $1 \leq \xi \leq p$ , строится базисная по угловой координате  $\psi$  система ортонормированных функций  $\{\chi_n(\psi)\}$ , где  $\chi_n(\psi) = a_{nk} V_k^{(1)}(pk_0\rho_0(\psi), \psi)$ ,  $a_{nk}$  — треугольная матрица ортогонализации,  $V_k^{(1)}(pk_0\rho_0(\psi), \psi)$  — ограничение функций  $V_k^{(1)}$  на поверхность  $S_1$ :  $\xi = p$ .

Под приближенным решением  $H_{\varphi}^{(N)}$  ( $E_{\varphi}^{(N)}$ ) понимается отрезок ряда Фурье:  $\sum_{n=1}^N z_n(\xi) \chi_n(\psi)$  для каждой из двух рассмотренных задач. Приближенные решения должны удовлетворять следующим системам уравнений.

### 1. $E$ -поляризация:

$$\int_0^\pi \{\hat{L}_{\xi, \psi}[H_{\varphi}^{(N)}] + H_{\varphi}^{(N)}\} \chi_m^*(\psi) G(\psi) d\psi = 0 \quad \text{в } D \quad (m = 1, \dots, N); \quad (1')$$

$$\int_S E_{\varphi}^{(N)} \chi_m^*(\psi) d\sigma = 0 \quad \text{на } S \quad (m = 1, \dots, N); \quad (2')$$

$$\begin{cases} \int_{S_1} \frac{\partial H_{\varphi}^{(N)}}{\partial n_e} \Big|_{S_1-0} \chi_m^* d\sigma = \int_{S_1} \frac{\partial H_{\varphi}^{(N)}}{\partial n_e} \Big|_{S_1+0} \chi_m^* d\sigma & (m = 1, \dots, N); \\ H_{\varphi}^{(N)}|_{S_1-0} = H_{\varphi}^{(N)}|_{S_1+0}; \\ H_{\varphi}^{(N)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_n V_n^{(1)}(\rho, \vartheta) + H_{\varphi}^{(0)} \quad \text{вне } \Sigma. \end{cases} \quad (3')$$

### 2. $H$ -поляризация:

$$\int_0^\pi \{L_{\xi, \psi}[E_{\varphi}^{(N)}] + k^2(\xi, \psi) E_{\varphi}^{(N)}\} \chi_m^*(\psi) G(\psi) d\psi = 0 \quad \text{в } D \quad (m = 1, \dots, N); \quad (4')$$

$$\int_S E_{\varphi}^{(N)} \chi_m^*(\psi) d\sigma = 0 \quad \text{на } S \quad (m = 1, \dots, N); \quad (5')$$

$$\begin{cases} \int_{S_1} \frac{\partial E_{\varphi}^{(N)}}{\partial n_e} \Big|_{S_1-0} \chi_m^* d\sigma = \int_{S_1} \frac{\partial E_{\varphi}^{(N)}}{\partial n_e} \Big|_{S_1+0} \chi_m^* d\sigma & (m = 1, \dots, N); \\ E_{\varphi}^{(N)}|_{S_1-0} = E_{\varphi}^{(N)}|_{S_1+0}; \\ E_{\varphi}^{(N)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_n V_n^{(1)}(\rho, \vartheta) + E_{\varphi}^{(0)} \quad \text{вне } \Sigma. \end{cases} \quad (6')$$

Здесь  $G(\psi) = \frac{D(\rho, \vartheta, \psi)}{D(\xi, \psi, \vartheta)}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n_e}$  — дифференцирование по направлению

внешней нормали к  $S_1$ ,  $\tilde{T}_n$  — приближенные значения искомых коэффициентов  $T_n$ .

Системы равенств (3'), (6') являются неоднородными парциальными условиями излучения на  $S_1$ , записанными как условия гладкого сшивания решения внутренней задачи с полем в  $D_1$ , которое представляется в виде

$$H_{\varphi}^{(N)} = \sum_k \tilde{T}_k V_k^{(1)}(\rho, \vartheta) + \begin{cases} H_{\varphi}^{(0)}, \\ E_{\varphi}^{(0)}, \end{cases} \quad (7)$$

где первое слагаемое — рассеянная часть поля, содержащая лишь расходящиеся сферические волны. Если поле источника разложить на поверхности  $S_1$  по базису  $\{\chi_n(\psi)\}$ , то, пользуясь вторыми равенствами из (3'), (6'), получим следующие соотношения между коэффициентами:

$$\tilde{T}_k = \begin{cases} \tilde{z}_k(p) - B_k & (k \leq N) \\ -B_k & (k > N) \end{cases}. \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{z}_k(p) = z_n(p)a_{nk}$ ,  $B_k = \int_{S_1} \left( \frac{H_\varphi^{(0)}}{E_\varphi^{(0)}} \right) \chi_m^*(\psi) d\sigma a_{mk}$ .

Равенства (1') и (4') являются очевидно системами обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $z_n(\xi)$ , в частности, (4') имеет вид

$$\xi^2 \sum_{k=1}^N A_{mk} \ddot{z}_k(\xi) + \xi \sum_{k=1}^N H_{mk} \dot{z}_k(\xi) + \sum_{k=1}^N V_{mk} z_k(\xi) + \xi^2 \sum_{k=1}^N W_{mk}(\xi) z_k(\xi) = 0. \quad (9)$$

Равенства (1'), в силу отличия оператора  $\hat{L}$  в области  $D$  от  $L$ , приводят к системе дифференциальных уравнений, отличной от (9), у которой матрицы  $A_{mk}$ ,  $H_{mk}$ ,  $V_{mk}$  являются функциями  $\xi$ , и должны вычисляться на каждом шаге интегрирования системы заново. Это сильно затрудняет непосредственную реализацию проекционного метода, охватывающую обе поляризации. Однако нетрудно показать [6], что заменой искомой функции  $H_\varphi$  на  $\sqrt{k^2} v$  (1) приводится к виду  $L[v] + \tilde{k}^2(p, \vartheta)v = 0$ , где  $\tilde{k}^2(p, \vartheta) = \sqrt{k^2} \hat{L}[\sqrt{k^2}] + k^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta}$ .

То есть задачи (1)–(3) и (4)–(6) становятся алгоритмически эквивалентными, отличаясь лишь видом функции  $k^2$  и краевым условием на  $S$ . Приближенное решение  $H_\varphi^{(N)}$  при этом связано с  $v^{(N)}$  тем же равенством:  $H_\varphi^{(N)} = \sqrt{k^2} v^{(N)}$ . Отметим, в частности, что  $\tilde{k}^2(p, \vartheta)$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \tilde{k}^2(p, \vartheta) = & k^2(p, \vartheta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\ln k^2) + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} (\ln k^2) - \\ & - \frac{\cos \vartheta}{\rho^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\ln k^2) - \frac{1}{4} |\nabla \ln k^2|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Добавка к  $k^2(p, \vartheta)$  в (10) содержит лишь логарифмические производные, т. е. для неоднородной среды без резких градиентов,  $k^2(p, \vartheta)$  и  $\tilde{k}^2(p, \vartheta)$  оказываются достаточно близкими, что оправдывает часто применяемое на практике пренебрежение градиентными членами в уравнении для  $E$ -поляризации.

Системы равенств (2') или (5') снабжают систему дифференциальных уравнений (9) краевым условием при  $\xi = 1$ , соответственно третьего рода или первого рода, а системы равенств (3') и (6') — неоднородным краевым условием третьего рода при  $\xi = p$  после исключения  $\tilde{T}_n$  с помощью (8). Коэффициенты  $\tilde{T}_n$  определяются после решения задачи равенствами

$$\tilde{T}_n = \tilde{z}_n(p) - B_n, \quad \text{где } \tilde{z}_n(p) \equiv 0 \text{ при } n \geq N.$$

Вопросы существования и единственности решений задач (1')—(3') и (4')—(6') и их сходимости к точным решениям  $H_\varphi$  и  $E_\varphi$  подробно рассмотрены в [6]. Там же получены оценки скорости сходимости и выяснено влияние на скорость сходимости различных параметров задачи, характеризующих геометрию тела и неоднородную среду. В частности, доказано, что приближенные решения  $H_\varphi^{(N)}$ ,  $E_\varphi^{(N)}$  сходятся к  $H_\varphi$ ,  $E_\varphi$  в области  $D$  в норме  $W_2^{(1)}(D)$ , причем значения коэффициентов  $\tilde{T}_n$  сходятся к значениям  $T_n$  при  $N \rightarrow \infty$ . Скорость сходимости увеличивается при наличии в среде поглощения,  $\operatorname{Im} k^2(\rho, \vartheta) \neq 0$  и при уменьшении параметра  $\rho$  — толщины неоднородного слоя. Скорость сходимости ухудшается при возрастании отличия геометрии рассеивателя от сферы.

Таким образом, рассмотренный вариант проекционного метода приводит к сравнительно легко реализуемому и довольно гибкому алгоритму, так как краевая задача для системы (9) имеет наиболее простой вид за счет выбранного неортогонального преобразования координат. Базисные функции  $\{\chi_n(\psi)\}$  связаны с геометрией рассеивателя, что положительно сказывается на скорости сходимости. Параметр  $\rho$ , определяющий положение поверхности  $S_1$ , не фиксирован и ограничен снизу размерами области неоднородности. В однородном пространстве  $S_1$  можно стянуть до поверхности  $S$  (что соответствует  $\rho = 1$ ). При этом алгоритм становится эквивалентным методу неортогональных рядов [7]. Возможность менять положение внешней границы  $S_1$  при решении конкретных задач позволяет осуществлять отбор решений, достаточно близких к точным, т. е. решений, у которых  $\tilde{T}_n$  достаточно близки к  $T_n$ . Действительно, положение  $S_1$ , на которой ставятся парциальные условия излучения, не влияет на точное решение ( $S_1$  не является реальной границей раздела сред). Следовательно, в пределах заданной точности, приближенное решение должно обладать тем же свойством, что будет показано на конкретных примерах.

### 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ КРУГЛОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОНУСА ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ДИПОЛЯМИ

Вначале рассмотрим задачу о возбуждении конуса магнитным вертикальным диполем в однородной среде. Если высота конуса —  $h$ , угол при вершине между высотой и образующей —  $\alpha$ , и точка с декартовыми координатами  $(0, 0, 0)$  расположена на середине высоты, то уравнение образующей конуса в сферических координатах имеет вид

$$\rho_0(\vartheta) = \begin{cases} \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\cos \vartheta \operatorname{tg} \alpha + \sin \vartheta} & (0 \leq \vartheta \leq \pi - \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \alpha)) \\ -\frac{h}{2 \cos \vartheta} & (\pi - \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \alpha) < \vartheta \leq \pi) \end{cases}. \quad (11)$$

На оси  $OZ$  на расстоянии  $b$  от вершины конуса, т. е. в точке  $(0, 0, (h/2) + b)$ , расположен вертикальный магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}_0 = (0, 0, m_0)$ . В этом случае внешнее поле  $E_\varphi^{(0)}$  будет иметь вид

$$E_\varphi^{(0)} = ik_0 m_0 \frac{\exp(ik_0 R)}{R^2} \left( ik_0 - \frac{1}{R} \right) \rho \sin \vartheta, \quad (12)$$

где  $R = \left[ \left( b + \frac{h}{2} \right)^2 + \rho^2 - 2 \left( b + \frac{h}{2} \right) \rho \cos \vartheta \right]^{1/2}$ . Краевое условие (5) для проекционной задачи приводит к системе равенств при  $\xi = 1$ :

$$\tilde{z}_n(1) = 0 \quad (n = 1, \dots, N). \quad (13)$$

На поверхности  $S_1$  ( $\xi = p$ ) для  $\tilde{z}_n(p)$  получаем неоднородное краевое условие третьего рода, причем неоднородность задается значениями  $E_\varphi^{(0)}$  и  $\frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial n_e}$  на  $S_1$ . Пусть конус задан следующими значениями параметров:  $\alpha = \pi/9$ ,  $h = 1,7\lambda$ ,  $b = 0,7\lambda$ , и если  $\lambda = 0,3$ , то  $k_0 = 2\pi/0,3$ . На рис. 1 представлены диаграммы направленности для  $\text{mod } E_\varphi$  рассеянного поля для случаев  $p = 1,1$ ,  $N = 7$  (кривая 1),  $p = 1,1$ ,  $p = 1,01$ ,  $N = 8$  (кривая 2),  $p = 1,1$ ,  $N = 9$  (кривая 3), построенные в полярных координатах. Они являются главной частью асимптотики при  $\rho \rightarrow \infty$  для  $\text{mod} \sum_{n=1}^N \tilde{T}_n V_n^{(1)}(\rho, \vartheta)$ . Рис. 1 демонстрирует влияние параметра  $p$  на скорость сходимости проекционного метода. При  $p = 1,1$  для  $N = 8, 9$  решение нельзя считать установившимся в области боковых лепестков, причем, вообще говоря, не ясно, связано ли это с недостаточной раз мерностью базиса  $N$  при данном  $p$ , или при  $N = 9$  оказывается накопление погрешности округления чисел в ЭВМ. Тем не менее, решение, полученное при  $N = 8$ , можно считать точным, поскольку при этом значении  $N$  диаграмма направленности устойчива к изменению  $p$  (кривые при  $p = 1,1$  и  $p = 1,01$  совпадают), что подтверждает справедливость критерия отбора нужных решений, сформулированного в конце предыдущего пункта.

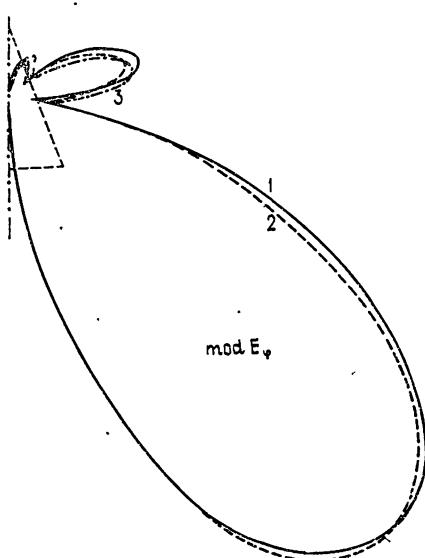


Рис. 1.

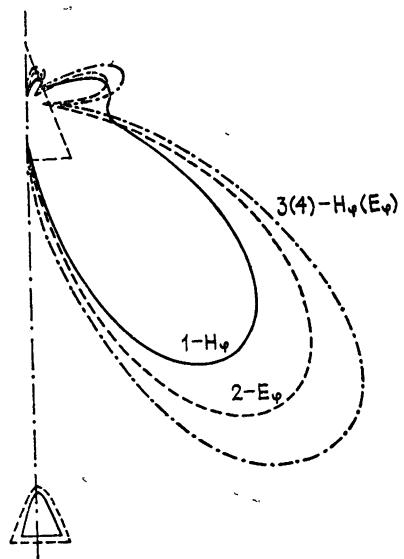


Рис. 2.

Поведение рассеянного поля при наличии вблизи поверхности тела неоднородной среды иллюстрируется диаграммами направленности на рис. 2. Описанный выше конус с вершиной, сглаженной шаром радиуса  $0,2\lambda$ , возбуждается магнитным и электрическим диполями как в пустоте (кривые 1 и 2), так и при наличии неоднородного слоя плазменного типа вблизи поверхности конуса (кривая 3(4)). Сглаживание вершины конуса необходимо в случае  $E$ -поляризации во избежание появления особенности в краевом условии на  $S$ . Неоднородная плазменная среда

описывается в нашем случае зависимостями  $\operatorname{Re} \epsilon$  и  $\operatorname{Im} \epsilon$  ( $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость) от расстояния от поверхности  $S$  по радиусу в четырех сечениях по углу  $\vartheta$ , причем  $\operatorname{Im} \epsilon$  сильно возрастает вблизи  $S$ . Такой способ задания параметров среды применяется на практике и позволяет построить функцию  $k^2(\xi, \psi)$  в виде

$$k^2(\xi, \psi) = k_0^2 \sum_{n=1}^4 \epsilon_n(\xi) \Phi_n(\psi),$$

где  $\{\Phi_n(\psi)\}$  — кусочно-линейное на  $(0, \pi)$  разбиение единицы, соответствующее значениям  $\Phi_n$  углов сечений.

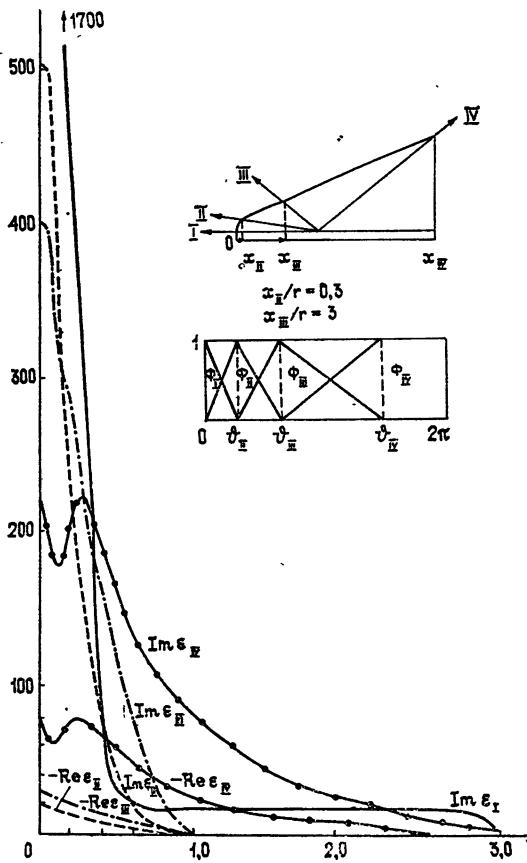


Рис. 3.

На рис. 3 представлены графики  $\operatorname{Re} \epsilon_n(\xi)$  и  $\operatorname{Im} \epsilon_n(\xi)$  для  $n = 1, 2, 3, 4$ , а также вид функций  $\Phi_n(\psi)$  и положение сечений относительно конуса.

На рис. 2 диаграммы направленности в пустоте для  $E$ -поляризации (кривая 1) и  $H$ -поляризации (кривая 2) заметно отличаются друг от друга как по величине максимума главного лепестка, так и структурой боковых лепестков. Кривая 3(4) — те же диаграммы при наличии описанного неоднородного слоя. Их совпадение свидетельствует об экранирующей роли плазменного слоя по отношению к полю источника. Действительно,  $E$ - и  $H$ -поляризации различаются главным образом краевым условием на  $S$ , поскольку различие функций  $k^2(\xi, \psi)$  и  $\tilde{k}^2(\xi, \psi)$ , согласно (10), незначительно. Полученный результат означает, что

поле не проникает до поверхности конуса, отражаясь от неоднородного слоя, и частично поглощается им. Это подтверждается также увеличением амплитуды диаграмм по сравнению со случаем однородной среды, т. е. увеличивается эффективная отражающая поверхность конуса.

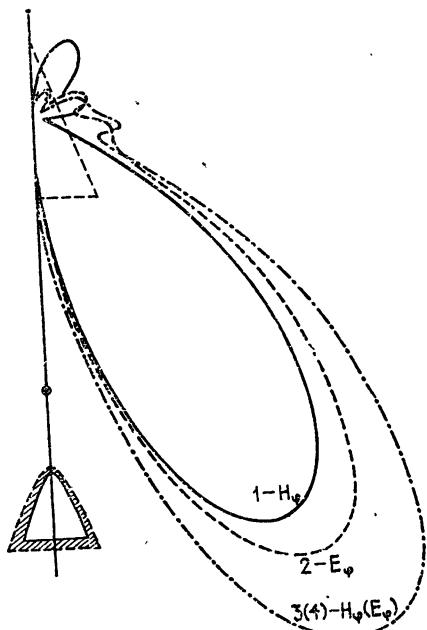


Рис. 4.

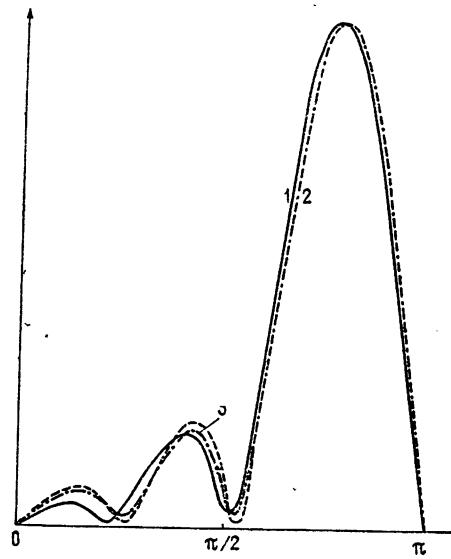


Рис. 5.

На рис. 4 представлены результаты, аналогичные предыдущему, но для случая более коротких волн:  $h = 2,55 \lambda$ ,  $b \approx \lambda$  ( $k_0 = 2\pi/0,2$  при  $\lambda = 0,2$ ). У диаграмм наблюдается увеличение количества боковых лепестков; главный лепесток становится уже. Значительнее становится разность между максимумами диаграмм при наличии неоднородного слоя и без него, что свидетельствует об увеличении отражающей способности неоднородной среды с возрастанием частоты.

Рассмотрим теперь влияние на диаграммы направленности сглаживания вершины и кромки конуса. Для этого рассмотрим случай возбуждения описанного конуса с прежними параметрами магнитным диполем в однородной среде.

На рис. 5 в прямоугольной системе координат изображены диаграммы для случаев: острый конус (кривая 1), конус с вершиной, сглаженной шаром радиуса  $0,2h$  (кривая 2), и конус со сглаженной вершиной и кромкой (кривая 3). Главные лепестки всех диаграмм мало различаются по ширине и расположению максимума (во втором и третьем случаях практически совпадают). Во втором случае у боковых лепестков незначительно сдвигаются максимумы и минимумы за счет уменьшения оптической длины образующей; максимумы боковых лепестков несколько увеличены по сравнению с острым конусом, сглаженная вершина дает больший вклад в рассеянное поле. Дополнительное сглаживание кромки не приводит к заметным качественным изменениям диаграммы.

Все три диаграммы свидетельствуют о том, что мелкие детали геометрии рассеивателя в резонансной области частот сравнительно мало влияют на диаграмму направленности, т. е. для их «разрешения»

необходимы более высокие частоты. Отметим, что это лишний раз подтверждает необходимость использования широкого диапазона частот для устойчивого решения обратных задач восстановления формы рассеивателя по полю в дальней зоне.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Свешников, ДАН СССР, 184, № 1, 63 (1969).
2. А. Г. Свешников, в сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 13, изд. МГУ, 1969, стр. 145
3. В. Ф. Апельцин, А. С. Ильинский, в сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 16, изд. МГУ, 1971, стр. 125.
4. А. Г. Свешников Ю. А. Еремин, ДАН СССР, 221, № 1 (1975).
5. В. В. Никольский, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 1, 5 (1977).
6. В. Ф. Апельцин, Диссертация, ф-т ВМиК МГУ, 1976
7. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. Наука, М., 1962.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 января 1978 г.

### INVESTIGATION OF AXIAL-SYMMETRIC SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY CONIC BODIES

*V. F. Apel'tsin, A. S. Il'insky .*

The radiation patterns of the scattered field in the resonant frequency region are obtained for vector axial-symmetric problems of point source diffraction by conic bodies by the Galerkin non-full projection method. The cases of a perfectly conducting cone excited by a vertical magnetic or electric dipole on the symmetry axis have been considered. The influence upon the diagram of smoothing the apex and cone edge has been studied as well as the influence of the inhomogeneous plasma medium localized near the surface of the cone.

УДК 621.372.8

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКЕ ТИПА «ЖАЛЮЗИ», РАСПОЛОЖЕННОЙ НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ ЭКРАНОМ

*С. А. Масалов, В. М. Шкиль, А. П. Ярыгин*

Развит строгий метод решения задачи о дифракции плоских волн на ленточной решетке типа «жалюзи», расположенной над идеально проводящим экраном. Проведено исследование влияния экрана на дифракционные свойства решетки типа «жалюзи»

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача о дифракции плоских волн на периодической структуре, составленной из бесконечно тонких идеально проводящих лент, плоскости которых составляют некоторый произвольный угол  $\phi$  с нормалью к плоскости решетки, расположенной на расстоянии  $a$  над идеально проводящим экраном (рис. 1). Интерес к такой структуре вызван некоторыми ее применениями в радиотехнике.

Метод, используемый в настоящей работе, опирается на результаты работ [1, 2], где рассмотрена задача о дифракции плоских волн на ножевой решетке и решетке типа «жалюзи». Он позволяет свести задачу дифракции электромагнитных волн на рассматриваемой структуре к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмового типа с матричными элементами, экспоненциально убывающими с ростом индексов. Последнее обстоятельство позволило эффективно применить метод усечения при численном решении бесконечных систем уравнений.

В данной работе проведено исследование влияния экрана на дифракционные свойства решетки типа «жалюзи» в случае  $E$ -поляризации.

### 2. СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Пусть на систему «решетка — экран» со стороны  $z > 0$  под углом  $\phi$  (рис. 1) падает плоская  $E$ -поляризованная электромагнитная волна с единственной отличной от нуля  $E_x$ -составляющей электрического поля  $E_x = \exp[ik(y \sin \phi - z \cos \phi)]$ . Выберем период решетки равным  $l$ , ширину лент  $2h$ , временную зависимость в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

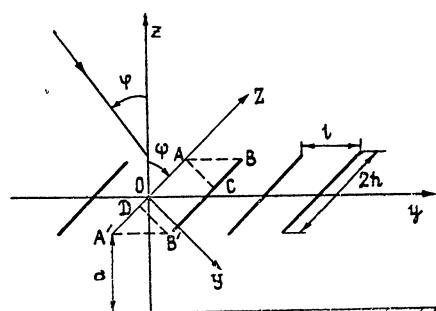


Рис. 1. Геометрия задачи.

С этой целью представим искомое поле в частичных областях следующим образом [2]:

$$E_{x_1} = \exp [ik(y \sin \varphi - z \cos \varphi)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp \left[ i \Phi_n \frac{2\pi}{l} \times \right. \\ \left. \times (y - h \sin \psi) + i \Gamma_n \frac{2\pi}{l} (z - h \cos \psi) \right] \quad (z \geq h \cos \psi); \quad (1)$$

$$E_{x_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp \left[ i \Phi_n \frac{2\pi}{l} (y + h \sin \psi) - i \Gamma_n \frac{2\pi}{l} (z + h \cos \psi) \right] + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp \left[ i \Gamma_n \frac{4\pi}{l} a + i \Phi_n \frac{2\pi}{l} (y + h \sin \psi) + i \Gamma_n \frac{2\pi}{l} (z + h \cos \psi) \right] \quad (2) \\ (-a - h \cos \psi \leq z \leq -h \cos \psi);$$

$$E_{x_3} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m \exp \left[ i \omega_m \frac{2\pi}{l} (Z + h - l \sin \psi) \right] + d_m \exp \left[ -i \omega_m \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{2\pi}{l} (Z - h) \right] \right\} \sin \frac{\pi m Y}{l \cos \psi} \quad (-h + l \sin \psi \leq Z \leq h, 0 \leq Y \leq l \cos \psi), \quad (3)$$

где  $a_n, b_n, c_m$  и  $d_m$  — неизвестные амплитуды волн искомого поля, а  $\Phi_n = n + x \sin \varphi, \Gamma_n = \sqrt{x^2 - \Phi_n^2}$ ,

$$\omega_m = \sqrt{x^2 - (m/2 \cos \psi)^2}, \quad x = l/\lambda, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Здесь выбраны те ветви корней  $\sqrt{A}$ , для которых  $\operatorname{Im} \sqrt{A} > 0$  при  $A < 0$ . Соотношение (2) удовлетворяет граничному условию на поверхности экрана. Для связи полей над и под решеткой с полем в волноводном районе воспользуемся второй формулой Грина, применяя ее последовательно к контурам  $ABC$  и  $DB'A'$ . В качестве вспомогательных функций возьмем полные системы функций [2]

$$G_q^{\pm} = \sin \frac{\pi q Y}{l \cos \psi} \exp \left( \pm i \frac{2\pi}{l} \omega_q Z \right) \quad (q = 1, 2, 3, \dots).$$

После интегрирования и проведения некоторых преобразований приходим к следующей совместной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода относительно неизвестных, входящих в (1) — (3):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma_n^+ + \omega_q} = -\tilde{d}_q + \frac{\exp(-2\pi i \delta \Gamma_0^-)}{\Gamma_0^- - \omega_q}; \quad (4a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = \tilde{c}_q \exp(4\pi i \omega_q \delta) + \frac{\exp(-2\pi i \delta \Gamma_0^-)}{\Gamma_0^- + \omega_q}; \quad (4b)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma_n^- - \omega_q} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n \exp(i \Gamma_n 4\pi a/l)}{\Gamma_n^+ + \omega_q} = \tilde{d}_q \exp(4\pi i \omega_q \delta); \quad (4b)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma_n^- + \omega_q} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n \exp(i \Gamma_n 4\pi a/l)}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = -\tilde{c}_q \quad (q = 1, 2, 3, \dots). \quad (4f)$$

Здесь введены обозначения

$$\Gamma_n^\pm = \Gamma_n \cos \psi \pm \Phi_n \sin \psi, \quad \tilde{d}_q = d_q V_q^+,$$

$$\tilde{c}_q = c_q V_q^- \exp(-2\pi i \omega_q \sin \psi), \quad \delta = h/l,$$

$$V_q^\pm = \frac{4\pi \omega_q \cos^2 \psi}{q \{ (-1)^q \exp[2\pi i (\pm \omega_q \sin \psi + \Phi_0)] - 1 \}}$$

и в процессе вычислений использовано равенство

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 - (\Phi_n \pm \omega_q \sin \psi)^2 = (\Gamma_n^+ \pm \omega_q)(\Gamma_n^- \mp \omega_q).$$

Особенностью построенного здесь решения задачи является необходимость в численном анализе бесконечной системы алгебраических уравнений первого рода. Применение общей теории приближенных методов к (4) наталкивается на определенные трудности, так как матричный оператор этой системы несимметричен и не обладает ограниченным обратным оператором. Это приводит, в частности, к тому, что при применении метода усечений для нахождения численного решения систем первого рода с матричными элементами вида  $(\Gamma_n^\pm - \omega_q)^{-1}$  наблюдается отсутствие сходимости приближенных решений к точному [3, 4]. В силу этого система (4) требует дополнительных преобразований, которые свели бы ее к виду, удобному для анализа поставленной краевой задачи.

### 3. ПОЛУЧЕНИЕ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Покажем, что бесконечная система первого рода (4) может быть сведена к эквивалентной системе второго рода фредгольмового типа, которая допускает эффективное численное решение. Такое сведение возможно на основе регуляризации, т. е. обращения главной части матричного оператора, элементы которого медленно убывают с ростом индексов.

Главной частью матричного оператора второй и третьей системы (4) является оператор с матричным ядром типа  $(\Gamma_n^\pm - \omega_q)$  в знаменателе. Аппарат аналитического обращения матричных операторов такого вида хорошо развит в теории периодических решеток [1, 2, 4], где метод частичного обращения оператора задачи был применен для построения строгого решения задачи рассеяния волн на решетке типа «жалюзи». Обобщение этого метода на случай более сложных систем продемонстрируем на примере данной задачи.

В нашем случае требуется знать решение следующих бесконечных систем уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{np}^\pm}{\Gamma_n^\pm - \omega_q} = \delta_q^p; \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{ns}^\pm}{\Gamma_n^\pm - \omega_q} = \frac{1}{\Gamma_s^\mp + \omega_q} \quad (q=1, 2, \dots; s=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

Существенным моментом при этом является построение некоторой убывающей на бесконечности мероморфной функции комплексного переменного по заданному распределению нулей и полюсов.

Искомые функции комплексного переменного  $f_p^\pm(w)$  и  $\varphi_s^\pm(w)$  имеют

вид бесконечных произведений, а неизвестные коэффициенты систем (5) и (6) равны соответственно вычетам этих функций в точках  $\Gamma_n^\pm$ :

$$\alpha_{np}^\pm = \operatorname{Res} f_p^\pm(w) \Big|_{w=\Gamma_n^\pm}, \quad \gamma_{ns}^\pm = \operatorname{Res} \varphi_s^\pm(w) \Big|_{w=\Gamma_n^\pm}.$$

Функция  $f_p^\pm(w)$  убывает на бесконечности, имеет простые нули при  $w = \omega_q$  ( $q \neq p$ ,  $q = 1, 2, 3, \dots$ ), простые полюсы в точках  $w = \Gamma_n^\pm$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и нормирована условием

$$f_p^\pm(\omega_p) = -1.$$

Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f_p^\pm(w) = -\exp [i(w - \omega_p)t(\psi)] \frac{\Gamma_0^\pm - \omega_p}{\Gamma_0^\pm - w} \times \\ \times \prod_{m=1}^{\infty(p)} \frac{(\omega_m - w)(\Gamma_m^\pm - \omega_p)(\Gamma_{-m}^\pm - \omega_p)}{(\omega_m - \omega_p)(\Gamma_m^\pm - w)(\Gamma_{-m}^\pm - w)}.$$

Здесь  $t(\psi) = 2 [\cos \psi \ln(2 \cos \psi) + \psi \sin \psi]$ , а индекс ( $p$ ) означает, что сомножитель  $(\omega_m - w)/(\omega_m - \omega_p)$  с  $m = p$  из произведения опущен. Функция  $\varphi_s^\pm(w)$  убывает на бесконечности, имеет простые корни при  $w = \omega_q$ , простые полюсы в точках  $w = \Gamma_n^\pm$  и в точке  $w = -\Gamma_s^\mp$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и нормирована условием  $\operatorname{Res} \varphi_s^\pm(w) \Big|_{w=-\Gamma_s^\mp} = 1$ .

Вид ее аналогичен представлению для  $f_p^\pm(w)$ .

Рассмотрев интегралы

$$\oint_{C_R} \frac{\varphi_s^\pm(w)}{w + \omega_q} dw \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \oint_{C_R} \frac{f_p^\pm(w)}{w + \omega_q} dw \rightarrow 0 \quad (q = 1, 2, 3, \dots),$$

где радиус  $R$  контуров  $C_R$  стремится к бесконечности, приходим к следующим свойствам коэффициентов  $\alpha_{np}^\pm$  и  $\gamma_{ns}^\pm$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{np}^\pm}{\Gamma_n^\pm + \omega_q} = -f_p^\pm(-\omega_q) \quad (q, p = 1, 2, 3, \dots); \quad (7)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{ns}^\pm}{\Gamma_n^\pm + \omega_q} = \frac{1}{\Gamma_s^\mp - \omega_q} - \varphi_s^\pm(-\omega_q) \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (8)$$

т. е. решения систем (5) и (6) обладают свойствами (7) и (8), которые нам понадобятся ниже.

Известный обратный оператор главной части позволяет переписать уравнения (4б) и (4в) с учетом (5) и (6) в виде

$$a_n = \exp(-2\pi i \delta \Gamma_0^-) \gamma_{n0}^+ + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{np}^+ \tilde{c}_p \exp(4\pi i \omega_p \delta); \quad (9)$$

$$b_n = -\sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \gamma_{ns}^- \exp(i \Gamma_s 4\pi a/l) + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{np}^- \tilde{d}_p \times \\ \times \exp(4\pi i \omega_p \delta) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (10)$$

Из (10) приходим к следующему представлению для  $b_n$ :

$$b_n = \sum_{p=1}^{\infty} X_{np} \tilde{d}_p \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (11)$$

где коэффициенты  $X_{np}$  удовлетворяют следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} X_{np} = - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{sp} \gamma_{ns}^- \exp(i \Gamma_s 4\pi a/l) + \alpha_{np}^- \times \\ \times \exp(4\pi i \omega_p \delta) \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

Исходя из оценок матричного оператора системы (12), можно показать вполне непрерывность этого оператора в пространстве бесконечных последовательностей  $\tilde{l}_2$  и правомочность применения метода усечений при аналитическом и численном исследовании задачи [4].

Дальнейшим этапом является определение неизвестных коэффициентов  $\tilde{c}_q$  и  $\tilde{d}_q$ .

Подставляя (9) в (4a) и (10) в (4g) и пользуясь свойствами (7), (8), получаем

$$\tilde{d}_q = \exp(-2\pi i \delta \Gamma_0^-) \varphi_0^+(-\omega_q) + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{c}_p f_p^+(-\omega_q) \exp(4\pi i \omega_p \delta); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_q = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{d}_p f_p^-(-\omega_q) \exp(4\pi i \omega_p \delta) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \varphi_s^-(-\omega_q) \times \\ \times \exp(i \Gamma_s 4\pi a/l) \quad (q = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

Произведем теперь разделение неизвестных, подставив  $\tilde{c}_q$  из (14) в (13). После некоторых несложных преобразований с учетом представления (11) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $\tilde{d}_q$ :

$$\tilde{d}_q = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{d}_t S_{qt} + Q_q \quad (q = 1, 2, 3, \dots), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S_{qt} = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^+(-\omega_q) e_p [f_t^-(-\omega_p) e_t - \sum_{s=-\infty}^{\infty} X_{st} \times \\ \times \exp(i \Gamma_s 4\pi a/l) \varphi_s^-(-\omega_p)], \end{aligned}$$

$$Q_q = \exp(-2\pi i \delta \Gamma_0^-) \varphi_0^+(-\omega_q), \quad e_p, t = \exp(4\pi i \omega_p, t \delta).$$

Экспоненциальные множители в элементах системы (15) обеспечивают быструю сходимость результатов последовательных усечений. В конечном итоге исходная задача свелась к последовательному обращению двух систем уравнений второго рода (12) и (15) и последующему определению коэффициентов отражения с помощью (11), (14) и (9). Отметим также, что, как и в случае решетки типа «жалюзи» без экрана, эквивалентность всех преобразований, а следовательно, и полученное решение могут быть строго обоснованы только лишь при  $2\delta > \sin \psi$ . Соответствующие оценки дают возможность утверждать, что рассеянное поле удовлетворяет условию Майкнера вблизи ребер.

#### 4. АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННЫХ СВОЙСТВ РЕШЕТКИ

С целью исследования влияния экрана на дифракционные свойства решетки типа «жалюзи» с использованием полученного решения были проведены расчеты на ЭВМ.

В [4] показано, что все решетки типа «жалюзи» с разными  $\varphi$  и  $\psi$

целесообразно разбить на три группы: первую ( $\varphi + 2\psi < 90^\circ$ ), состоящую из структур, прозрачных в смысле геометрической оптики, вторую ( $\varphi + 2\psi > 90^\circ$ , но  $\varphi + \psi < 90^\circ$ ) — из полупрозрачных при  $x \rightarrow \infty$  и, наконец, третью ( $\varphi + \psi > 90^\circ$ ) — из решеток, полностью отражающих энергию падающей волны в геометрооптическом случае.

С учетом принятой выше классификации естественно считать, что наличие экрана приведет к существенному влиянию на дифракционные свойства решеток типа «жалюзи» из первой и второй групп. Поэтому в дальнейшем остановимся в основном на исследовании влияния экрана на дифракционные свойства решеток из первой и второй групп, поскольку влияние экрана на дифракционные свойства решеток из третьей группы будет незначительным при достаточно больших  $\delta$ .

На рис. 2а приведены зависимости энергий пространственных гармоник от частотного параметра  $x = l/\lambda$ . Здесь и далее энергиями дифракционных гармоник будем называть величины  $E_{a_n} = |a_n|^2 (\text{Re } \Gamma_n / \Gamma_0)$ .

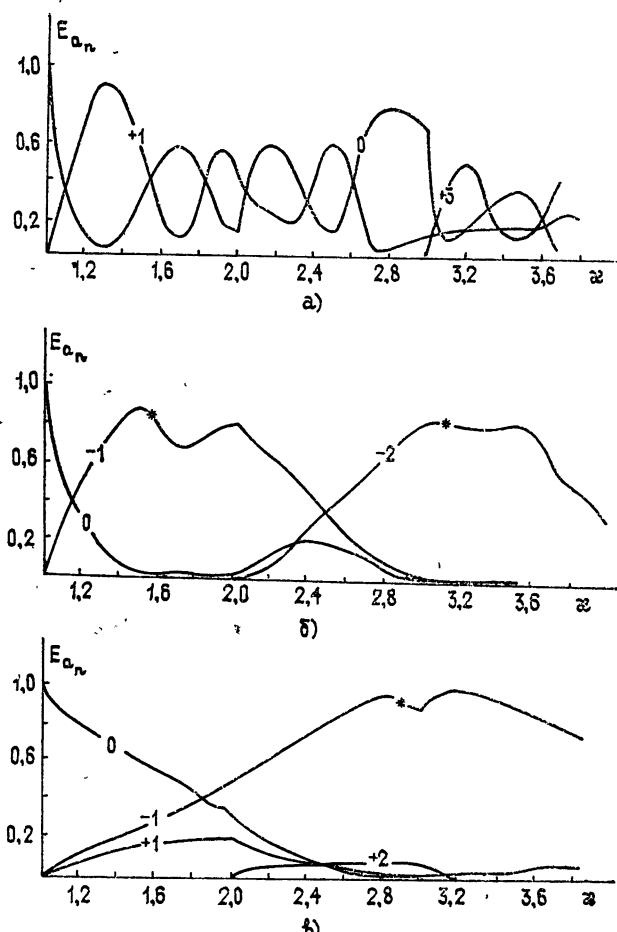


Рис. 2. Зависимость энергий пространственных гармоник от  $x$  при нормальном падении:

а)  $\psi = 40^\circ$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $a/l = 30$ ; б)  $\psi = 70^\circ$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $a/l = 30$ ;  
в)  $\psi = 80^\circ$ ,  $\delta = 2/\pi$ ,  $a/l = 0,5$ .

В данном случае  $\varphi + 2\psi < 90^\circ$ , решетка принадлежит к первой группе, и, таким образом, можно заметить в среднем возрастание с

ростом  $\chi$  энергии нулевой гармоники, отражающейся на источник облучения. Уменьшение энергии нулевой гармоники в районе с целочисленными значениями  $\chi$  обусловлено появлением новых распространяющихся гармоник, которые забирают на себя часть энергии рассеянного поля. В этих точках графики имеют изломы, обусловленные наличием пространственных резонансов.

Несимметрия структуры проявляется в неравенстве энергий, приходящихся на положительные и отрицательные гармоники. Расчеты показывают, что положительные гармоники сразу после их возникновения становятся доминирующими среди высших.

При исследовании дифракционных свойств решеток, относящихся ко второй и третьей группам, большой интерес вызывает перераспределение энергий между отрицательными распространяющимися гармониками. В случае, представленном на рис. 2б, решетка принадлежит ко второй группе ( $\phi + 2\psi > 90^\circ$ ). Как видно из рис. 2б, доминирующими, т. е. переносящими основную долю энергии отраженного поля, уже являются отрицательные гармоники. Как и в случае решетки типа «жалюзи», здесь наблюдается зеркальный резонанс, когда направление распространения одной из гармоник близко к направлению луча, зеркально отраженного от освещенной ленты решетки. Максимум зеркального резонанса по частоте, углу падения или углу наклона лент решетки наблюдается вблизи значений параметров, удовлетворяющих условию

$$\Gamma_{-p}^+ = -\Gamma_0^- = -\omega_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

Точки, определяемые условием (16), на рис. 2—4 обозначены звездочками. В зеркально резонирующей гармонике может быть сконцентрировано более 90% энергии рассеянного поля. Из рис. 2б видно, что максимум зеркального резонанса по частоте тем ближе к значению, определенному соотношением (16), чем больше величина частотного параметра  $\chi$ . Укажем здесь также на возможность подавления нулевой (зеркальной по отношению к плоскости решетки) гармоники рассеянного поля в области значений  $\chi$ , соответствующих максимумам высших распространяющихся волн над решеткой.

Графики зависимостей энергий отраженных от решетки дифракционных волн от  $\chi$  изображены на рис. 2в. Представленные зависимости с графической точностью совпадают с полученными в [2] зависимостями для решетки типа «жалюзи» без экрана. Высшие распространяющиеся волны над структурой появляются при рассмотренных параметрах задолго до появления первой волноводной волны в щелях ( $\chi_1 = 2,9$ ), этим и обусловлено отсутствие влияния экрана на дифракционные свойства решетки типа «жалюзи». Возрастание энергии минус первой пространственной гармоники в диапазоне  $2,5 < \chi < 3,5$  вызвано, как и в случае решетки без экрана, явлением зеркального резонанса.

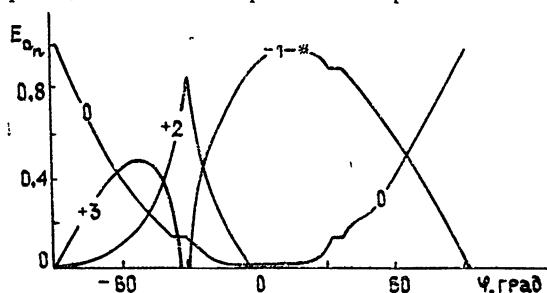


Рис. 3. Зависимость  $E_{a_n}$  от угла падения  $\psi$  при  $\phi = 75^\circ$ ,  $\chi = 1,9$ ,  $\frac{a}{l} = 0,7$ ,  $a/l = 30$ .

На рис. 3 представлены зависимости энергий отраженных пространственных гармоник от угла падения. В области отрицательных значений угла падения наблюдается перераспределение энергии между высшими положительными отраженными волнами, в то время как энергия нулевой гармоники монотонно возрастает при приближении угла падения к скользящему. Резкий излом энергии второй положительной гармоники обусловлен появлением при  $\varphi \approx -30^\circ$  плюс третьей распространяющейся гармоники над решеткой. Возрастание энергии минус первой гармоники при  $\varphi \approx 15^\circ$  обусловлено явлением зеркального резонанса. Далее с ростом  $\varphi$  решетка переходит к разряду третьей группы, что обусловливает увеличение энергии нулевой гармоники.

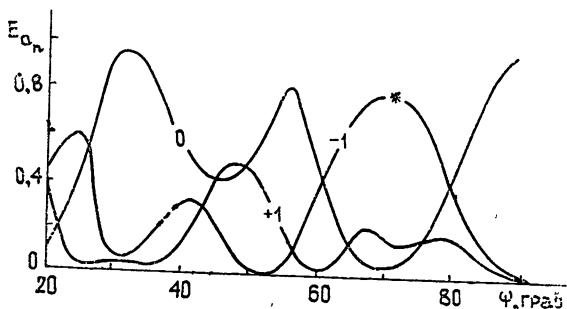


Рис. 4. Зависимость  $E_{a_n}$  от угла наклона лент решетки  $\psi$  при  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\chi = 1,7$ ,  $a/l = 0,5$ .

Далее рассмотрим поведение энергий отраженных пространственных гармоник с изменением угла наклона лент  $\psi$  (рис. 4). Резкое убывание энергий высших пространственных гармоник в районе  $\psi \approx 28^\circ$  вызвано исчезновением третьей волноводной волны в щелях решетки. Последняя распространяющаяся волны в щелях исчезает при  $\psi \approx 73^\circ$ , что влечет за собой почти полное исключение влияния экрана на дифракционные свойства решетки типа «жалюзи». Поэтому представленные зависимости при  $\psi > 73^\circ$  практически не отличаются от аналогичных зависимостей решетки типа «жалюзи» без экрана [2]. Заметим, что резонансное возрастание энергий минус первой отраженной волны в районе  $\psi \approx 70^\circ$  связано с явлением зеркального резонанса.

На рис. 5 представлены зависимости энергий пространственных гармоник от величины отношения расстояния между решеткой и экраном к периоду решетки для решеток первой и второй групп.

Кривая 1 рассчитана при величине частотного параметра, которому соответствует максимум плюс первой гармоники на рис. 2а. Здесь решетка принадлежит к первой группе ( $\varphi + 2\psi < 90^\circ$ ), и поэтому график зависимости энергии плюс первой гармоники имеет очень изрезанный и ярко выраженный резонансный характер. Кривые 2, 3 рассчитаны при величинах частотных параметров, соответствующих условию

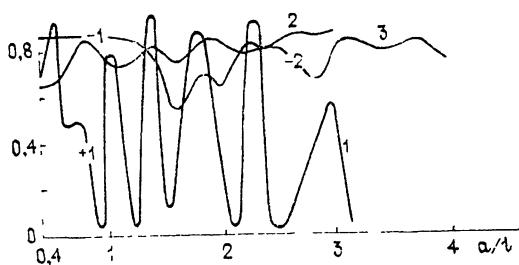


Рис. 5. Зависимость  $E_{a_n}$  от величины расстояния между решеткой и экраном при  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0,7$ :  
1— $\chi = 1,3$ ,  $\psi = 40^\circ$ ; 2— $\chi = 1,5$ ,  $\psi = 70^\circ$ ;  
3— $\chi = 3,1$ ,  $\psi = 70^\circ$ .

зеркального резонанса. Им соответствуют точки, обозначенные на рис. 2б звездочками. В данном случае решетка принадлежит ко второй группе ( $\varphi + 2\psi > 90^\circ$ ), и поэтому графики зависимости энергий минус первой и минус второй гармоник от параметра  $a/l$  имеют нерезонансный характер. Анализ численных расчетов показывает, что влияние экрана на дифракционные свойства решеток из второй группы тем больше, чем больше распространяющихся волноводных волн в щелях решетки.

Таким образом, в работе показано, что наличие экрана оказывает существенное влияние на дифракционные свойства решеток типа «жалюзи», относящихся к первой и второй группам, и путем изменения геометрических параметров решетки и параметра  $a/l$ , характеризующего расстояние между решеткой и экраном, можно гибко управлять энергетическими характеристиками рассеянного поля.

Метод, изложенный в данной работе, без существенных изменений может быть распространен на случай  $H$ -поляризации и перспективен для решения задач дифракции на рассмотренной выше решетке с различными диэлектрическими включениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Журнал вычислительной математики и математической физики, 10, № 3, 693 (1970).
2. А. А. Кириленко, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов, Журнал вычислительной математики и математической физики, 12, № 2, 413 (1972).
3. А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Журнал вычислительной математики и математической физики, 9, № 4, 934 (1969).
4. В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, изд. ХГУ, Харьков, 1973.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
20 марта 1978 г.

#### WAVE DIFFRACTION BY THE «JALOUSIE» TYPE STRIP ARRAY SITUATED ABOVE A PERFECTLY CONDUCTING SCREEN

S. A. Masalov, V. M. Shkil', A. P. Yarygin

A strict method has been developed of solving the problem of plane wave diffraction by the «jalousie» type strip array situated above a perfectly conducting screen. The influence of the screen on diffraction properties of the «jalousie» type array has been investigated.

УДК 538.3

**СИНТЕЗ АНТЕННЫ ВЫТЕКАЮЩЕЙ ВОЛНЫ НА БАЗЕ  
ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ ДВУМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ  
СТРУКТУРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НАД РЕЛЬЕФНОЙ  
ИМПЕДАНСНОЙ ПОДЛОЖКОЙ**

*O. H. Терешин, A. H. Ювко, M. B. Чугунов*

Рассматриваются вопросы расчета характеристик антенны в виде полупрозрачной структуры с периодически включенными реактивными со- противлениями. Полупрозрачная структура размещается над рельефной импедансной подложкой. Получены соотношения, позволяющие определить величины сопротивлений полупрозрачной структуры, рельеф и импеданс импедансной подложки. Приведены результаты экспериментальной проверки макета антенны.

В настоящее время имеется ряд вариантов построения импедансных антенн [1, 2], в которых по заданной структуре ближнего поля определяется функция, характеризующая закон изменения параметра импедансных граничных условий вдоль антенны, затем по значениям этой функции рассчитываются геометрические параметры проводящей поверхности антенны в любой точке (например, рельеф поверхности и глубины канавок в случае реализации антенны в виде ребристой структуры). Для подвода энергии к таким антеннам используются специальные возбуждающие устройства. Как правило, такие устройства имеют значительные размеры в направлении, перпендикулярном импедансной поверхности, что приводит к увеличению габаритов антенн в указанном направлении. Наличие возбуждающих устройств усложняет конструкцию отмеченных антенн, а также ограничивает возможность применения их, в частности, при создании плоских маловыступающих антенн.

Настоящая работа посвящена созданию методики синтеза плоской антенны, имеющей малые размеры в направлении, перпендикулярном к плоскости антенны.

Общая схема рассматриваемой антенны изображена на рис. 1. Антенна представляет собой систему параллельных проводов 1 (рис. 1) с расстоянием между соседними проводами  $T_1$ , в которые включены с периодом  $T$  реактивные нагрузки 2 (система проводов с включенными в них реактивными нагрузками образует полупрозрачную структуру). Полупрозрачная структура размещена над рельефной импедансной поверхностью 3, рельеф которой характеризуется функцией  $Z_0(y)$ . При  $y = 0$  высота подвеса полупрозрачной структуры над рельефной импедансной поверхностью равна  $h$ . Возбуждение антенны осуществляется полосковой линией 4.

В данной антенне, как будет показано ниже, энергия волны питания, подводимая к антенне полосковой линией 4 (рис. 1), трансформируется системой граничных условий на рельефной импедансной поверхности и полупрозрачной структуре в энергию волн излучения, а следо-

вательно, исключается необходимость в применении специального возбуждающего устройства.

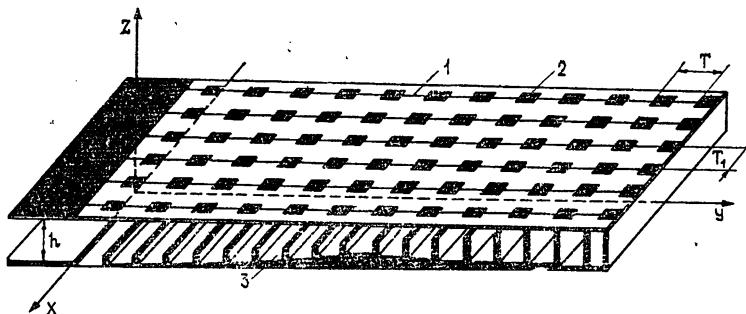


Рис. 1.

Рассмотрим основные соотношения, связывающие геометрию системы рис. 1, величину нагрузок в полупрозрачной структуре, величину поверхностного импеданса и рельефа с параметрами поля излучения. При анализе этой связи будем предполагать, что вариации поля, величин нагрузок и поверхностного импеданса по оси  $X$  отсутствуют, т. е. выполняется условие вида  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$  (двумерная задача). Для этого слу-  
чая при структуре ТМ-волн в областях I ( $z \geq h$ ) и II ( $0 \leq z \leq h$ ) рис. 1 все компоненты полей могут быть выражены через составляющую магнитного поля  $H_x$ , а именно:

$$H_x, E_y = -\frac{i}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость сред соответственно в областях I и II.

Задание поля в виде ТМ-волн позволяет наиболее просто реализовать поверхностный импеданс подложки 3 рис. 1 в виде ребристой металлической поверхности.

Рассмотрим систему граничных условий для анализируемой модели. При  $z = h$  (рис. 1) расположена полупрозрачная структура, на которой, в соответствии с [3], должны выполняться граничные условия вида

$$E_{y1} = E_{y2} \quad \text{при } z = h; \quad (2)$$

$$Z_H = \frac{T}{T_1} \frac{E_{y1}}{H_{x1} - H_{x2}} \quad \text{при } z = h, \quad (3)$$

где  $E_{y1}, H_{x1}, E_{y2}, H_{x2}$  — составляющие электромагнитного поля соответственно в областях I и II.

Закон изменения импеданса на поверхности 3 рис. 1, как и в [4], будем характеризовать функцией  $Z[Z_0(y)]$ , где  $y$  и  $Z_0(y)$  — координаты точек на рельефной поверхности, в которых рассматривается значение импеданса:

$$Z[Z_0(y)] = \frac{E_\tau}{H_{x2}} = \frac{E_{y2} \cos(\alpha) + E_{z2} \sin(\alpha)}{H_{x2}} \quad (4)$$

при  $z = Z_0(y)$ . Здесь  $E_\tau$  — тангенциальная к поверхности  $z = Z_0(y)$  составляющая электрического поля,  $\alpha$  — угол наклона касательной к поверхности  $z = Z_0(y)$ .

В соответствии с [4], при условии чистой реактивности функции импеданса  $Z[Z_0(y)]$ , уравнение (4) распадается на два уравнения:

$$z'_0 = \frac{\operatorname{Im} \left( \frac{\partial H_{x2}}{\partial z} H_{x2}^* \right)}{\operatorname{Im} \left( \frac{\partial H_{x2}}{\partial y} H_{x2}^* \right)}; \quad (5)$$

$$Z[Z_0(y)] = \frac{i}{\omega \epsilon_2} \frac{z'_0 \operatorname{Re} \left( \frac{\partial H_{x2}}{\partial y} H_{x2}^* \right) - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial H_{x2}}{\partial z} H_{x2}^* \right)}{|H_{x2}|^2 \sqrt{1 + z'^2_0}}, \quad (6)$$

где  $H_{x2}^*$  — комплексно-сопряженная величина  $H_{x2}$ ,  $z'_0$  — касательная к поверхности  $Z_0(y)$ .

Перейдем к заданию поля вблизи рассматриваемой модели рис. 1. Положим, что поле в области I имеет вид плоской волны, распространяющейся под углом  $\theta_1$  к оси  $y$ , т. е.

$$H_{x1} = A_1 \exp(-i\alpha_1 z) e^{-i\beta y}; \quad (7)$$

$$E_{y1} = -\frac{\alpha_1}{\omega \epsilon_1} A_1 \exp(-i\alpha_1 z) e^{-i\beta y}; \quad (8)$$

$$E_{z1} = \frac{\beta}{\omega \epsilon_1} A_1 \exp(-i\alpha_1 z) e^{-i\beta y}, \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = k_1 \sin \theta_1,$$

$$\beta = k_1 \cos \theta_1, \quad (10)$$

$$\alpha_1^2 + \beta^2 = k_1^2 = 0,$$

$\theta_1$  — направление распространения волны излучения в области I,  $k_1$  — постоянная распространения в области I,  $A_1$  — амплитудный коэффициент.

В области II поле зададим в виде суммы двух волн: волны излучения и волны питания:

$$H_{x2} = A_2 \exp(-i\alpha_2 z) e^{-i\beta y} + B_2 \cos \alpha_2(z - h) e^{-i\beta y}; \quad (11)$$

$$E_{y2} = \frac{i\alpha_2}{\omega \epsilon_2} [iA_2 \exp(-i\alpha_2 z) + B_2 \sin \alpha_2(z - h)] e^{-i\beta y}; \quad (12)$$

$$E_{z2} = \frac{\beta}{\omega \epsilon_2} [A_2 \exp(-i\alpha_2 z) + B_2 \cos \alpha_2(z - h)] e^{-i\beta y}, \quad (13)$$

где

$$\alpha_2^2 + \beta^2 = k_2^2 = 0,$$

$$\alpha_2 = k_2 \sin \theta_2,$$

$k_2$  — волновое число в среде II,  $A_2$ ,  $B_2$  — амплитудные коэффициенты,  $\theta_2$  — направление распространения волны в области II.

Вернемся теперь к граничным условиям (2), (3). Подставляя (8), (12) в (2), получим, что

$$A_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_1 \exp[i(\alpha_2 - \alpha_1)h]. \quad (14)$$

С учетом (7), (8), (11), (14) выражение (3) примет вид

$$Z_H = -\frac{\alpha_1}{\omega\varepsilon_1} \frac{T}{T_1} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{B_2}{A_1} e^{i\alpha_1 h}}. \quad (15)$$

Для того, чтобы коэффициент усиления антенны был высоким, сопротивления полупрозрачной структуры должны быть чисто реактивными. В этом случае необходимо, чтобы выполнялось условие вида (условие рактивности)

$$iC = -\frac{B_2}{A_1} \exp(i\alpha_1 h) + 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

где  $C$  — произвольная действительная постоянная, откуда

$$B_2 = A_1 \exp(-i\alpha_1 h) \left( 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - iC \right). \quad (16)$$

С учетом (16) уравнение (15) преобразуется к виду

$$Z_H = i \frac{T}{T_1} \frac{\alpha_1}{\omega\varepsilon_1 C}. \quad (17)$$

Рассмотрим граничные условия (5), (6).

Подставляя (11) с учетом (14), (16) в (5), получим

$$z'_0 = \frac{\alpha_1}{\beta} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left\{ [\cos \alpha_2(h - z)]^2 + \left[ C \cos \alpha_2(h - z) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2(h - z) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (18)$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (18) и производя интегрирование, получим

$$\int_0^z \left\{ [\cos \alpha_2(h - z)]^2 + \left[ C \cos \alpha_2(z - h) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2(z - h) \right]^2 \right\} dz = \\ = \int_0^y \frac{\alpha_1}{\beta} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} dy,$$

или

$$(1 + C^2) \left\{ \frac{z}{2} + \frac{1}{4\alpha_2} [\sin 2\alpha_2(z - h) + \sin 2\alpha_2 h] \right\} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{C}{\alpha_2} \times \\ \times [\sin^2 \alpha_2(z - h) - \sin^2 \alpha_2 h] + \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \left\{ \frac{z}{2} - \frac{1}{4\alpha_2} \times \right. \\ \left. \times [\sin 2\alpha_2(z - h) + \sin 2\alpha_2 h] \right\} = \frac{\alpha_1}{\beta} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} y. \quad (19)$$

С учетом (11), (14), (16) уравнение (6) примет вид

$$Z[Z_0(y)] = \frac{-i\alpha_2}{\omega\varepsilon_2} \times$$

$$\times \frac{\left[1+C^2-\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_1}{\varepsilon_1 \alpha_2}\right)^2\right] \frac{\sin 2 \alpha_2(h-z)}{2}+C \frac{\varepsilon_2 \alpha_1}{\varepsilon_1 \alpha_2} \cos 2 \alpha_2(h-z)}{\sqrt{1+z_0'^2}\left\{\left[\cos \alpha_2(h-z)\right]^2+\left[C \cos \alpha_2(h-z)-\frac{\varepsilon_2 \alpha_1}{\varepsilon_1 \alpha_2} \sin \alpha_2(h-z)\right]^2\right\}} . \quad (20)$$

Потребуем, чтобы при  $y = L$  ( $L$  — длина антенны) выполнялось условие  $z = h$ . Тогда уравнение (19) может быть преобразовано к виду

$$C^2\left(\frac{h}{2}+\frac{1}{4 \alpha_2} \sin 2 \alpha_2 h\right)-C \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2}\left(\sin \alpha_2 h\right)^2+\frac{h}{2}+\frac{\sin 2 \alpha_2 h}{4 \alpha_2}+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(\frac{h}{2}-\frac{\sin 2 \alpha_2 h}{4 \alpha_2}\right)-\frac{\alpha_1}{\beta} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} L=0,$$

откуда

$$C=\frac{-Q \pm \sqrt{Q^2-4 F S}}{2 F}, \quad (21)$$

где

$$F=\frac{h}{2}+\frac{\sin 2 \alpha_2 h}{4 \alpha_2},$$

$$Q=-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2} \sin ^2 \alpha_2 h,$$

$$S=\frac{h}{2}+\frac{\sin 2 \alpha_2 h}{4 \alpha_2}+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2\left(\frac{h}{2}-\frac{\sin 2 \alpha_2 h}{4 \alpha_2}\right)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\alpha_1}{\beta} L.$$

Таким образом, уравнения (17), (19), (20) с учетом (18), (21) решают поставленную задачу.

Уравнение (17) позволяет определить величины сопротивлений, включаемых в полуопрозрачную структуру, а уравнение (19), (20) — рельеф и импеданс импедансной подложки.

Рассмотрим частный случай. Пусть  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $h \ll \lambda$ , а  $L/h \gg 1$ . Тогда  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\alpha_1/\beta = \operatorname{tg} \theta$ . Для этого случая, пренебрегая слагаемыми порядка  $h^2$  и принимая знак минус перед квадратным корнем в (21), уравнения (17), (19), (20), (21) могут быть значительно упрощены и принимают вид

$$Z_H=i \frac{T}{T_1} \frac{\alpha_1}{\omega \varepsilon C} ; \quad (22)$$

$$C \approx-\sqrt{\operatorname{tg} \theta \frac{L}{h}-1} ; \quad (23)$$

$$Z_0(y)=\frac{h}{L} y ; \quad (24)$$

$$Z[Z_0(y), y]=-\frac{i \alpha_1 C}{\omega \varepsilon} \times$$

$$(25)$$

$$\times \frac{\frac{C}{2} \sin 2 \alpha_1(h-z)+\cos 2 \alpha_1(h-z)}{\sqrt{1+(h / L)^2}\left\{\left[\cos \alpha_1(h-z)\right]^2+\left[C \cos \alpha_1(h-z)-\sin \alpha_1(h-z)\right]^2\right\}} .$$

Для экспериментальной проверки предложенной методики синтеза по формулам (22)–(25) с учетом (10) была рассчитана антенна со следующими параметрами:  $\theta = 60^\circ$ ,  $L = 1\lambda_0$ ,  $h = 0,03\lambda_0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ ,  $T = T_1 = 0,1\lambda_0$ . Здесь  $\lambda_0$  — расчетная длина волны.

Закон изменения величин сопротивлений полупрозрачной структуры показан на рис. 2. На рис. 3 показаны законы изменения рельефа и импеданса импедансной подложки. В экспериментальном макете антенны полупрозрачная структура была реализована в виде системы проводов с включенными в них реактивными сопротивлениями (безындукционными конденсаторами), а импедансная подложка в виде рельефной ребристой структуры.

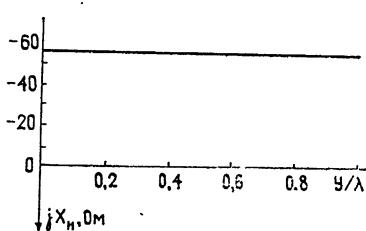


Рис. 2.

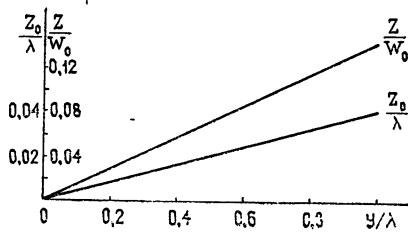


Рис. 3.

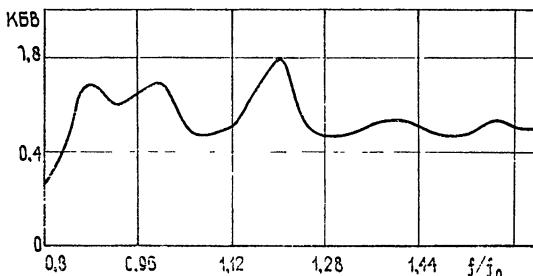


Рис. 4.

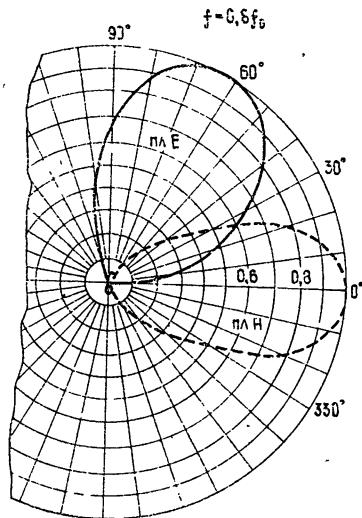


Рис. 5.

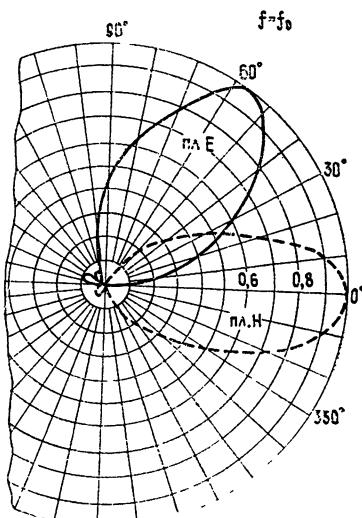


Рис. 6.

Результаты экспериментальной проверки показаны на рис. 4—9. На рис. 4 показана зависимость коэффициента бегущей волны (КБВ) от частоты. На рис. 5—9 показаны диаграммы направленности по мощности в полосе частот.

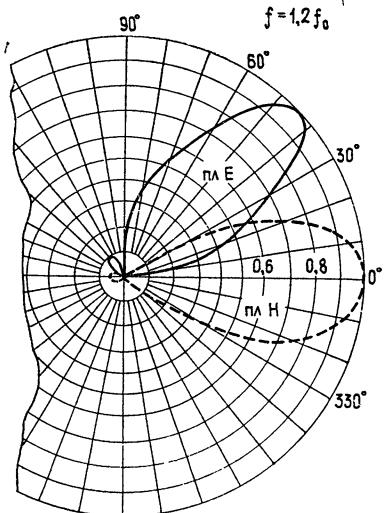


Рис. 7.

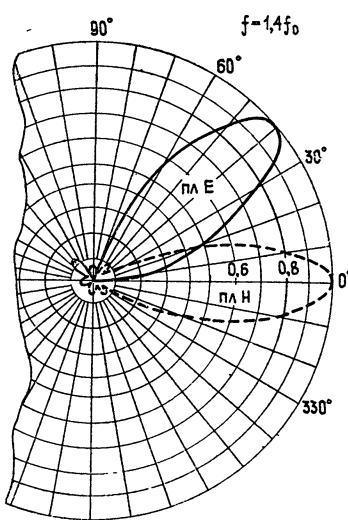


Рис. 8.

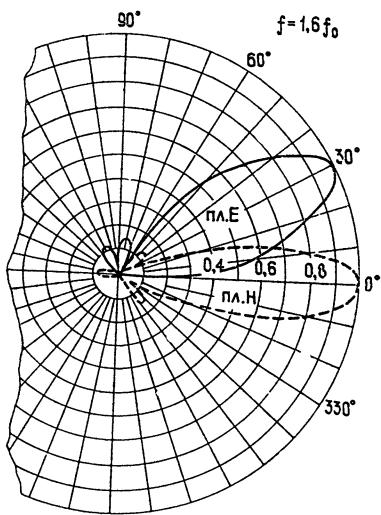


Рис. 9.

В заключение перечислим основные выводы работы.

1) Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показывают возможность построения антенн на основе полупрозрачной структуры с рельефной импедансной подложкой.

2) Применение рельефной импедансной подложки позволяет снять ограничения на высоту подвеса и класс реализуемых диаграмм направленности при задании структуры ближнего поля около антенны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Терешин, В. М. Седов, Радиотехника, 24, № 9 (1969).
2. О. Н. Терешин, В. Г. Гофман, Радиотехника, 24, № 8 (1969).
3. О. Н. Терешин, Р. С. Азоян, Радиотехника, 31, № 1 (1976).
4. О. Н. Терешин, Радиотехника и электроника, 8, № 4 (1963).

Поступила в редакцию  
25 апреля 1977 г.,  
после переработки  
14 августа 1978 г.

## THE ANTENNA SYNTHESIS OF AN OUTGOING WAVE ON THE BASIS OF A HALF-TRANSPARENT TWO-DIMENSIONAL PERIODIC STRUCTURE SITUATED ABOVE THE RELIEF IMPEDANCE SUBLAYER

*O. N. Tereshin, A. N. Yuvko, M. V. Chugunov*

The problems of calculating the characteristics of the antenna in the form of a half-transparent structure with periodically on-switched reactive resistors are considered. The half-transparent structure is placed above the relief impedance sublayer. The relations are obtained which permit to determine the values of resistors of the half-transparent structure, the relief and impedance of the impedance sublayer. The results of experimental test of the antenna model are given.

УДК 621.396.67.012.12

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ КОРРЕКЦИИ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ, ИЗМЕРЕННОЙ ПО ПРОТЯЖЕННОМУ ИСТОЧНИКУ ИЗЛУЧЕНИЯ

*В. Т. Ермолаев, А. Г. Флаксман*

Показано, что применение метода регуляризации дает возможность оптимального (в смысле минимума ошибки) восстановления диаграммы направленности (ДН) произвольной формы, искаженной при измерении по протяженному источнику излучения. Предложена схема определения параметра регуляризации  $\alpha$ . Для ДН интерферометра получены зависимости  $\alpha$  от параметров источника, антенной системы и величины случайной ошибки в исходных данных. Дано сравнение результатов коррекции ДН, полученных методом регуляризации и известными приближенными методами. Приведен численный пример восстановления ДН.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Регистрируемая при радиоастрономических измерениях температура антенны  $T_a$  связана с ДН  $F$  и функцией источника  $T$  уравнением свертки

$$T_a = T * F \quad (1)$$

(знак  $*$  обозначает операцию свертки).

Непосредственный интерес представляют либо характеристика источника  $T$ , либо характеристика антенны  $F$  [1, 2]. Нетрудно видеть, что  $T_a$  точно совпадает с одной из указанных функций только тогда, когда другая выражается в виде  $\delta$ -функции. Поэтому для получения функций  $T$  или  $F$ , строго говоря, недостаточно ограничиваться измерением функции  $T_a$ . Необходима дополнительная обработка данных с целью устранения возникающих искажений.

Будем считать, что искомой функцией является ДН  $F$ , а функция источника  $T$  представляет собой ядро преобразования (1). Естественно, что стараются выбрать источник с малыми угловыми размерами так, чтобы различие между  $T_a$  и  $F$  было бы незначительным (не более чем на величину случайной ошибки измерения функции  $T_a$ ). Однако удовлетворить этому требованию удается далеко не всегда. В тех случаях, когда возникают искажения ДН, их устранение достигается одним из двух способов. В первом из них делается предположение о форме ДН  $F$  и ядра  $T$ , и затем путем подстановки в (1) находится связь между параметрами функций  $T_a$ ,  $T$  и  $F$ . Эта связь и позволяет решить обратную задачу, когда по виду функции  $T_a$  определяется функция  $F$ . Именно таким образом, например, в [3] найден коэффициент расширения главного луча ДН антенны.

Второй путь определения ДН  $F$  заключается в отыскании решения уравнения (1) при заданной (по результатам измерений) функции  $T_a$  и некоторой выбранной модели источника (функция  $T$ ). Такой подход использован в [4, 5], где рассмотрены некоторые приближенные методы восстановления истинной ДН. Этот подход по сравнению с первым

имеет то преимущество, что позволяет восстанавливать ДН достаточно произвольной формы. Ограничения накладываются только на протяженность пространственного спектра ДН. В частности, необходимо, чтобы его граничная частота  $s_g < 1/\varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — угловой размер источника.

Однако, как отмечалось в [4], приближенные методы имеют существенный недостаток, который заключается в возрастании случайной ошибки, неизбежно присутствующей в исходных данных (функция  $T_a$ ). Это связано с тем, что задача о восстановлении ДН  $F$  по результатам измерений  $T_a$  относится к классу некорректно поставленных задач [6]. Суть некорректности заключается в следующем. На основании свойства преобразования Фурье уравнения свертки вместо (1) будем иметь

$$\Phi_a = L \cdot \Phi, \quad (2)$$

где  $\Phi_a$ ,  $L$  и  $\Phi$  — соответственно спектры функций  $T_a$ ,  $T$  и  $F$ . Функцию  $L$  следует рассматривать как характеристику фильтра нижних частот. Его недостаточно широкая полоса пропускания приводит кискажению ДН антенны. Для восстановления истинной ДН необходимо усилить высокие частоты, поэтому восстанавливающий оператор должен быть равен  $L^{-1}$ . Но при этом усиливается и измерительный шум, и его энергия значительно возрастает [7].

Для решения некорректных задач разработан и используется метод регуляризации [6]. В данной работе, являющейся естественным продолжением [4, 5], этот метод применяется при коррекции ДН антенны, измеренной по протяженному источнику. Если в [4, 5] задача решалась без учета случайных ошибок в исходных данных и полученные результаты практически можно применять только при малых случайных ошибках измерения, то в данном случае учитывается влияние аддитивной случайной ошибки и отыскивается решение, оптимальное в смысле минимума суммы случайной и систематической ошибок.

## 2. МЕТОД КОРРЕКЦИИ

Согласно общей схеме регуляризации необходимо отыскать такое решение  $F_a(\theta)$  уравнения (1), которое минимизирует функционал [6]

$$M_{F_a} = \| T * F_a - T_a \|^2 + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left\| \frac{d^k F_a}{d \theta^k} \right\|^2, \quad (3)$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации. Первое слагаемое в (3) дает хорошо известное среднеквадратичное отклонение функций  $T * F_a$  и  $T_a$ . Из-за сглаживающего действия ядра  $T$  интегрального уравнения (1) минимум этого отклонения может достигаться при различных функциях  $F_a$ , значительно отличающихся друг от друга высокочастотными частями спектра. Для уменьшения неопределенности в выборе  $F_a$  в (3) существует в виде второго слагаемого стабилизирующий функционал. Выбирая в качестве решения функцию  $F_a$  с минимальной энергией, получим регуляризацию нулевого порядка. Минимизируя также и энергию первой производной функции  $F_a(\theta)$ , получим регуляризацию первого порядка и т. д.

Ограничиваясь регуляризацией первого порядка, для спектра регуляризованного решения будем иметь следующее выражение ( $q_0 = 1$ ,  $q_1 = 1$ ) [6]:

$$\Phi_a = W(s) \Phi_a(s) = \frac{L(-s)}{L(s)L(-s) + \alpha [(2\pi s)^2 + 1]} \Phi_a(s). \quad (4)$$

Регуляризующий оператор  $W(s)$  в (4) отличается от восстанавливавшего  $L^{-1}(s)$  и совпадает с ним только при  $\alpha = 0$ . Систематическая ошибка  $\Delta F_\alpha = |F_\alpha(\theta) - F(\theta)|$  и дисперсия случайной ошибки  $\sigma_\alpha^2$  регуляризованного решения равны

$$\Delta F_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s) \frac{\alpha [(2\pi s)^2 + 1] \exp(2\pi i s \theta)}{L(s)L(-s) + \alpha[(2\pi s)^2 + 1]} ds; \quad (5)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(s)L(-s)N(s)}{\{L(s)L(-s) + \alpha[(2\pi s)^2 + 1]\}^2} ds, \quad (6)$$

где  $N(s)$  — спектральная плотность мощности измерительного шума (случайной ошибки в исходных данных).

Из (5) и (6) видно, что при малых  $\alpha$  систематическая ошибка  $\Delta F_\alpha$  уменьшается, а дисперсия случайной ошибки возрастает, и наоборот, при больших  $\alpha$   $\sigma_\alpha^2$  за счет фильтрации шума уменьшается, а  $\Delta F_\alpha$  возрастает из-за сильного отклонения оператора  $W(s)$  от  $L^{-1}(s)$ . Таким образом, существует некоторое оптимальное значение параметра регуляризации  $\alpha = \alpha_0$ , которое минимизирует суммарную ошибку.

Отыскание  $\alpha_0$  в методе регуляризации является одним из сложных вопросов. Для этого используются различные способы [6]. В частности, если известна ошибка  $\Delta = \|F - T_\alpha\|$ , то параметр  $\alpha_0$  находят из уравнения  $\|F_\alpha - T_\alpha\| = \Delta$ . Если известно, что класс рассматриваемых функций удовлетворяет условию  $\|F\| \leq R$ , то  $\alpha_0$  определяют из условия  $\|F_\alpha\| = R$ . В [8] показано, что  $\alpha_0$  может быть получено путем анализа чувствительности регуляризованного решения  $F_\alpha$  к относительному изменению  $\alpha$  ( $\min_{\alpha} \|\alpha(dF_\alpha/d\alpha)\|$ ).

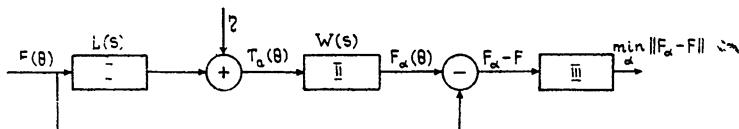


Рис. 1.

В настоящей работе поиск оптимального параметра регуляризации  $\alpha_0$  осуществляется путем математического моделирования реального процесса измерений и обработки данных. Структурная схема вычислений приведена на рис. 1. Данная схема позволяет в каждом конкретном случае найти  $\alpha_0$  и проанализировать его зависимость от параметров ДН  $F$ , источника излучения и измерительного шума  $\eta$ .

В качестве исходной функции в этой схеме выберем, например, ДН интерферометра, которую зададим в виде

$$F(\theta) = 2 \frac{\sin^2 \frac{kD\theta}{2}}{\left(\frac{kD\theta}{2}\right)^2} [1 + \cos \theta k d], \quad (7)$$

где  $d$  — база интерферометра,  $D$  — диаметр антенны,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны. Будем предполагать также, что случайная ошибка измерений является аддитивной и может иметь разные радиусы корреляции. Поэтому представим ее следующим образом:

$$\eta \sim \sum_j \frac{\sin [2\pi s_1(\theta_i - \theta_j)]}{2\pi s_1(\theta_i - \theta_j)} n(\theta_j), \quad (8)$$

где  $n(\theta_j)$  — случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $(-1,1)$ ,  $s_1$  — граничная частота спектра измерительного шума. На рис. 2—4 приведены результаты расчетов, в которых предполагалось, что база интерферометра  $d$  не очень велика по сравнению с диаметром антенны  $D$ . В этом случае ДН имеет достаточно сложный вид, и поэтому трудно устранить возникающие искажения.

Так, в данном численном примере  $D/\lambda = 10$ ,  $d/\lambda = 35$ . На рис. 2 изображены графики ошибки восстановления ДН  $J[F_\alpha] = \|F_\alpha - F\|^2 \cdot \|F\|^{-2}$  в зависимости от параметра  $\alpha$  при различных значениях дисперсии измерительного шума  $\sigma_0^2$  и величины  $s_1/s_r$ :  $\sigma_0 = 0,04; 0,17; 0,34$  (соответственно кривые 1, 2, 3);  $s_1/s_r = 3; 15$  (соответственно сплошные и пунктирные линии). При этом  $\varphi_0 s_r = 0,45$ , а ДН восстанавливается в интервале  $|\theta| \leqslant 1,1 \lambda/D$ . Как и следовало ожидать, ошибка  $J[F_\alpha]$  имеет минимум в точке  $\alpha = \alpha_0$ . Из рис. 2 видно, что  $\alpha_0$  увеличивается с ростом дисперсии измерительного шума и практически не зависит от его радиуса корреляции.

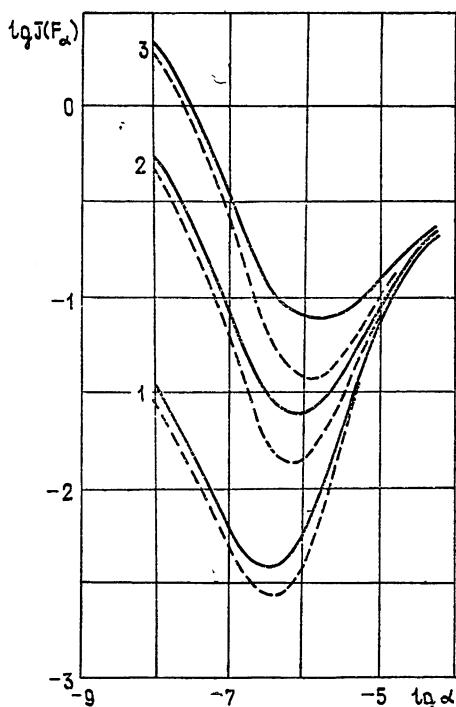


Рис. 2.

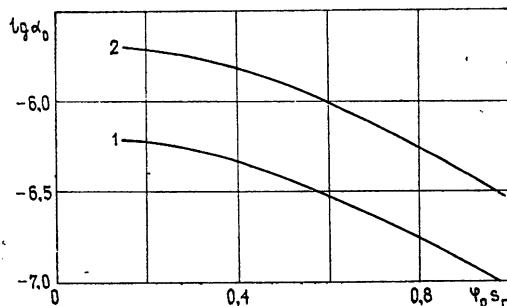


Рис. 3.

На рис. 3 приведены графики  $\alpha_0$  в зависимости от величины  $\varphi_0 s_r$ . При этом  $\sigma_0 = 0,04; 0,17$  (соответственно кривые 1, 2);  $s_1/s_r = 3$ . На рис. 4 показан пример восстановления ДН интерферометра при  $\sigma_0 = 0,17$ ;  $\varphi_0 s_r = 0,45$ ;  $s_1/s_r = 15$ . Регуляризованная, измеренная и истинная ДН изображены соответственно сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линиями.

На этом же рисунке крестиками показано восстановление ДН приближенным методом ([<sup>4</sup>], формула (17)).

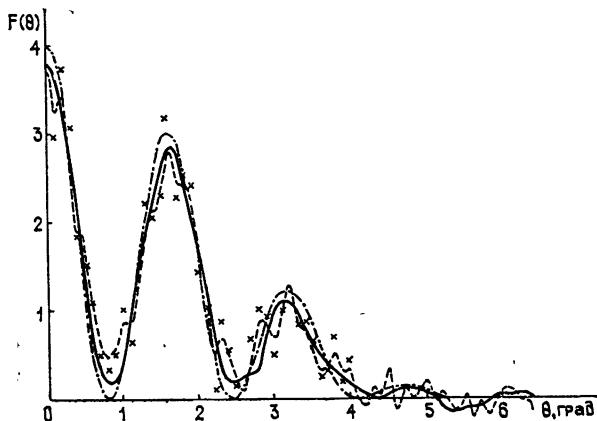


Рис. 4.

В табл. 1 приведены ошибки восстановления ДН интерферометра с указанными выше параметрами как методом регуляризации ( $J[F_\alpha]$ ), так и приближенным методом равноотстоящих точек ( $J_1[F_\alpha]$ ) [<sup>5</sup>]. Сравнивая эти данные, можно сделать вывод, что если случайные ошибки измерения достаточно малы (в данном примере  $\sigma_0 \leq 0,1$ ), то удобнее пользоваться приближенными методами, которые просты в практическом применении и дают хорошую точность восстановления ДН. При большем измерительном шуме для коррекции ДН следует применять метод регуляризации.

Таблица 1

	$J(F_\alpha)$			$J_1(F_\alpha)$		
$\sigma_0$	0,04	0,17	0,34	0,04	0,17	0,34
0,45	0,004	0,03	0,08	0,008	0,14	0,56
0,65	0,006	0,04	0,10	0,008	0,14	0,56

При выборе параметра  $\alpha_0$  для практического использования необходимо иметь в виду следующее. ДН  $F(\theta)$  является неизвестной функцией и подлежит экспериментальному определению. Поэтому, строго говоря, точное значение  $\alpha_0$  является неизвестным. Однако основные параметры антенной системы, такие, как диаметр антенны, база интерферометра и т. д., обычно известны. На основании этих данных расчетным путем можно построить приближенную ДН. Она будет отличаться от истинной, но характерные угловые размеры и протяженность углового спектра обеих ДН будут близкими. Для рассчитанной таким образом ДН и известной величины случайной ошибки параметр регуляризации можно найти по схеме, приведенной на рис. 1. Этот параметр, являясь оптимальным для расчетной ДН, одновременно будет квазиоптимальным для реальной (искомой) ДН. Действительно, как следует из рис. 2, при изменении  $\alpha_0$  в 2—3 раза ошибка восстановления

изменяется незначительно. В то же время таким изменениям  $\alpha_0$  соответствуют достаточно большие изменения параметров антенной системы и измерительного шума (рис. 2, 3). Поэтому  $\alpha_0$  не является критическим к изменениям этих параметров и для практических целей его можно определять указанным путем.

В заключение приведем основные выводы.

1) Использование метода регуляризации для коррекции ДН, иска-  
женной при изменении по источнику с конечными угловыми размерами, поз-  
воляет добиться оптимального (в смысле минимума ошибки) вос-  
становления ДН.

2) Параметр регуляризации может быть определен по приведенной  
схеме (рис. 1), исходя из приближенно известных основных параметров  
антенны системы.

3) Метод регуляризации имеет смысл использовать при достаточно  
больших случайных ошибках (сравнимых или больших величины систе-  
матического искажения). При малых случайных ошибках в исходных  
данных целесообразно использовать более простые приближенные  
методы.

Авторы выражают благодарность С. А. Сmekаловой за помощь в  
проведении расчетов на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. Н. М. Цейтлин, Антennaя техника и радиоастрономия, изд. Сов. радио, М., 1976.
3. О. А. Богуславцев, А. П. Молчанов, И. В. Олянюк, Л. М. Пономаренко, Радиотехника и электроника, 1, № 6, 873 (1956).
4. В. Т. Ермоляев, А. Г. Флаксман, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 3, 410 (1975).
5. В. Т. Ермоляев, А. Г. Флаксман, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 1067 (1975).
6. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, изд. Наука, М., 1974.
7. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Финитные функции в физике и технике, изд. Наука, М., 1971.
8. Р. Д. Баглай, Журнал вычислительной математики и математической физики, 15, № 2, 305 (1975).

Поступила в редакцию  
23 января 1978 г.

#### APPLICATION OF REGULARIZATION METHOD WHEN THE ANTENNA RADIATION PATTERN MEASURED ACCORDING TO THE EXTENDED RADIATION SOURCE IS CORRECTED

V. T. Ermolayev, A. G. Flaksman

It is shown that the use of the regularization method gives the possibility of optimal (in the sense of the error minimum) restoration of the arbitrary radiation pattern which is distorted when measuring by the extended radiation source. The scheme of determination of the regularization parameter  $\alpha$  is suggested. For the interferometer radiation pattern the dependences of  $\alpha$  versus the source parameter, antenna system and random error of original data are obtained. The results of the radiation pattern correction obtained by the regularization method are compared with those obtained by the known approximate methods. A numerical example of the radiation pattern restoration is given.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 535.8 · 535.124.4

**АВТОМАТИЧЕСКИЙ НУЛЕВОЙ РАДИОМЕТР ДЛИН ВОЛН 3—4 мм**

*В. Г. Геворкян, А. Г. Кисляков, Э. Г. Мирзабекян, В. Н. Воронов, Ю. В. Лебский*

Исследование флюктуаций теплового радиосигнала атмосферы представляет интерес с точки зрения выяснения условий реализации предельной чувствительности наземных радиотелескопов и решения некоторых задач физики атмосферы (например, изучения пространственно-временных характеристик вертикального распределения поглощающего газа). Коэффициент поглощения радиоволн миллиметрового диапазона при их распространении в облачной атмосфере может изменяться в широких пределах, и регистрация флюктуаций излучения атмосферы обычно не представляет существенных трудностей. Флюктуации оптической толщины безоблачной атмосферы сравнительно слабы, и поэтому их надежные измерения можно осуществить только с помощью достаточно стабильной аппаратуры. Например, в 8-миллиметровом диапазоне длин волн относительные флюктуации яркостной температуры атмосферы составляют [1]

$$\frac{\delta T_a}{T_a} = (0.2 - 1.0) \cdot 10^{-2} (\cos \theta)^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $\delta T_a$  — флюктуации яркостной температуры атмосферы,  $T_a$  — яркостная температура атмосферы, а  $\theta$  — зенитный угол. Таким образом, даже при сравнительно больших значениях  $\theta$  (формула (1) справедлива при  $\theta \lesssim 85^\circ$ ) величина  $\delta T_a/T_a \sim 10^{-2}$ . При этом следует учесть, что в величину  $\delta T_a$  входят и флюктуации оптической толщины атмосферы, и изменения температурного поля в атмосфере, которые, вообще говоря, необходимо разделить. В связи со сказанным очевидна необходимость измерений величины  $\delta T_a/T_a \sim 10^{-3}$ . Флюктуации коэффициента усиления в модуляционных радиометрах не позволяют достичь такой точности. Но нулевой метод приема [2, 3] вместе с чувствительностью современных радиометров дает возможность реализовать выше-приведенную величину. Ниже приводится описание перестраиваемого по частоте автоматического нулевого радиометра (АНР) 3—4 мм диапазона длин волн. Выбор диапазона длин волн обусловлен недостатком экспериментальных данных по временным и угловым зависимостям флюктуаций яркостной температуры безоблачной атмосферы при  $\lambda < 8$  мм, где  $\lambda$  — длина волны принимаемого излучения. Возможность широкой перестройки радиометра полезна для выяснения спектральных особенностей атмосферных флюктуаций, что облегчает понимание их природы.

### Описание блок-схемы

Радиометр собран по супергетеродинной схеме [4] с учетом специфики решаемых задач (рис. 1). Высокочастотный тракт выполнен на сверхразмерных волноводах сечением  $23 \times 10$  мм<sup>2</sup>. Принимаемое излучение модулируется с частотой 360 Гц в модуляторе-переключателе (МП) [5]. С помощью интерферометра Цендера—Маха (ИЦМ) колебания сигнала и гетеродина ( $\Gamma$  — лампа обратной волны ОВ-14) подводятся к смесителю (СМ) с малыми потерями. ИЦМ выполняет также функции подавления паразитного сигнала и шумов гетеродина. Дополнительное подавление гетеродинных шумов осуществляется интерферометром Майклсона (ИМ). Потери преобразования смесителя, выполненного на арсенид-галлиевом диоде с барьером Шоттки, составляют 5,5—6 дБ. В качестве УПЧ использованы транзисторные усилители с полосой  $\Delta f \approx 500$  МГц, коэффициентом усиления  $K \approx 50$  дБ и коэффициентом шума  $F \approx 4,5$  дБ. Гетеродинный фильтр (ГФ) [6] имеет большой диапазон постоянных времени и обеспечивает питание УПЧ и подачу постоянного напряжения смещения на смеситель Нулевой прием осуществляется с помощью устройства сравнения (УС), собранного на операционном усилителе К284УД1А и полевых транзисторах КП302Б, и управляющего элемента (УЭ) на ферритовом вентиле [7], работающем на эффекте Фарадея. Прямые потери УЭ в диапазоне перестройки радиометра составляют 0,8 ± 2 дБ.

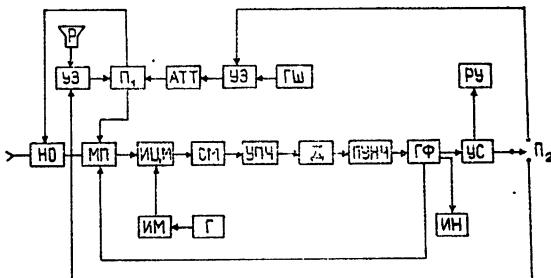


Рис. 1. Блок-схема автоматического нулевого радиометра:

НО—направленный ответвитель, МП—модулятор-переключатель, ИЦМ—интерферометр Цендер—Маха, СМ—смеситель, УПЧ—усилитель промежуточной частоты, Д—квадратичный детектор, ПУНЧ—предварительный усилитель низкой частоты, ГФ—гетеродиновый фильтр, УС—устройство сравнения, П<sub>2</sub>—переключатель режима работы, РУ—регистрирующее устройство, П<sub>1</sub>—крановый переключатель, АТТ—аттенюатор, ГШ—генератор шума, ИМ—интерферометр Майкельсона, Г—гетеродин, ИН—индикатор нуля, УЭ—управляющий элемент.

Контроль компенсации постоянной составляющей сигнала источником опорного сигнала осуществляется индикатором нуля (ИН) (самописец). Для перехода с одного режима наблюдений на другой используется крановый переключатель (П<sub>1</sub>) на сверхразмерном волноводе и переключатель (П<sub>2</sub>), служащий для переключения управляющего сигнала с одного УЭ на другой. Предусмотрена возможность регистрации сигнала на самописец и электронно-цифровой регистратор.

### Результаты испытаний радиометра

Радиометр может быть использован в режимах: 1) наблюдений Солнца и 2) приема теплового излучения атмосферы.

В первом случае температура антенны, наведенной на Солнце, сравнивается с эффективной температурой источника опорного сигнала (ГШ)-эталона радиоизлучения. Во втором случае возможны две разновидности рабочего режима, когда радиоизлучение атмосферы сравнивается с излучением эталона либо с эффективной температурой опорной антенны. Как видно из соотношения (1), при достаточно большой разнице в направлениях основной и вспомогательной антенн флуктуации яркостной температуры атмосферы будут максимальны в направлении, отвечающем большему  $\theta$ . Выбор определенных значений  $\theta$  для обеих антенн зависит от состояния атмосферы и конкретной задачи. Одним из наиболее привлекательных представляется вариант, когда обе антенны имеют одинаковый угол  $\theta$  и развернуты по азимуту. При этом удается избежать ошибок измерений, связанных с нестабильностью эталонов излучения, и, по крайней мере частично, неточностей, связанных с флуктуациями температуры входного тракта радиометра. Детальный анализ показывает, что для реализации предельной чувствительности радиометра при измерениях флуктуаций яркостной температуры атмосферы необходимо выполнение неравенства

$$\delta T_{\text{эфф}} + (1 - \eta) \delta T_0 < 0,3 \text{ K},$$

где  $\delta T_{\text{эфф}}$  — флуктуация эффективной температуры эталона,  $\delta T_0$  — флуктуация температуры входного тракта радиометра, а  $\eta$  — коэффициент передачи тракта. Исключение эталона из схемы радиометра облегчает выполнение неравенства. При достаточно симметрии плеч входного тракта изменения их температур также частично компенсируют друг друга.

В режиме солнечных наблюдений, как показывает анализ, для реализации измерений необходимо выполнение условия  $\frac{1}{\eta} \delta T_{\text{эфф}} + \frac{1}{\eta} (1 - \eta) \delta T_0 + \delta T_a + \frac{\Delta T}{\eta} \ll \delta T_{A\odot}$ , где  $\delta T_{A\odot}$  — измеряемая величина,  $\delta T_a$  — флуктуация атмосферного излучения и  $\Delta T$  — чувствительность радиометра. При достаточной направленности антенны величина  $\delta T_a \ll \delta T_{A\odot}$ , поэтому основными источниками ошибок становятся флуктуации величин  $T_{\text{эфф}}$  и  $T_0$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае необходима термостабилизация входного тракта радиометра. Оценки показывают, что реализация предельной чувствительности возможна при условии  $\delta T_0 < 1 \text{ K}$ .

Стабильность использовавшихся в радиометре эталонов излучения проверялась путем записи шумов на его выходе при включении в оба плача двух ГШ. Эффективные температуры обоих источников составляют около 3000 К. При этом шумы на выходе радиометра не превышали 2,5 К. Флуктуационная чувствительность определялась по излучению черного тела, охлажденного до температуры кипящего азота, и равна 0,3—0,5 К при постоянной времени 1 с. Точность регистрации относительных флуктуаций яркостной температуры атмосферы автоматическим нулевым радиометром составляет  $\sim 0,1\%$ .

Авторы пользуются случаем поблагодарить А. Б. Бурова и В. П. Мезенцева за практическую помощь в разработке отдельных узлов радиометра.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ананов, А. Е. Башаринов, К. П. Кирдяшев, Б. Г. Кутузов, Радиотехника и электроника, 10, № 11, 1941 (1965).
2. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, № 25, 430; 733 (1965).
3. Э. В. Бороздич, Р. Л. Сороченко, Изв. вузов — Радиофизика, 6, № 6, 1167 (1963).
4. В. И. Каилинченко, Ю. В. Лебский, В. П. Мезенцев, В. М. Тевелевич, Л. И. Федосеев, А. М. Штанюк, Тезисы II Всесоюзной школы-семинара по радиоприемным устройствам СВЧ, Ереван, 1974, стр. 125.
5. В. Н. Воронов, Р. А. Кираоксян, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 9, 1439 (1973).
6. В. С. Аблазов, В. В. Абрамов, В. П. Быданцев, Л. В. Ефимова, А. Ф. Рукавицын, В. П. Соснин, Тезисы II Всесоюзной школы-семинара по радиоприемным устройствам СВЧ, Ереван, 1974, стр. 147.
7. А. Л. Микаэлян, Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах, Госэнергоиздат, М.—Л., 1963.

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
24 мая 1978 г.

УДК 523.164 : 551.510 535

## УРОВЕНЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

B. B. Петров

В полубесконечной электронной плазме под действием наклонно падающего интенсивного электромагнитного поля становится возможным параметрическое возбуждение встречных поверхностных волн за счет их комбинационного взаимодействия с полем накачки [1]. Этот процесс был исследован в [1] в линейном приближении для гидродинамической модели плазмы\*.

В настоящей работе рассмотрена стабилизация неустойчивости [1] за счет фазового рассогласования возбуждаемых волн и волны накачки, возникающего в результате нелинейного процесса четырехвольнового взаимодействия параметрически возбуждаемых волн вида\*\*

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + \omega_2, \quad (1)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты поверхностных волн, причем, если  $\omega_0$  — частота накачки, а  $k_{1,2}$  и  $k_0$  — тангенциальные компоненты соответствующих волновых векторов, то

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_0, \quad k_1 - k_2 = k_0 \quad (2)$$

$$(k_{1,2}, k_0 > 0).$$

Рассматриваемый процесс представляет собой, таким образом, вырожденный случай четырехвольнового взаимодействия

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \omega_0,$$

в котором  $\omega_3 = \omega_1$ ,  $\omega_4 = \omega_2$ .

\* Напомним, что в нормально падающем электромагнитном поле плазма устойчива относительно возбуждения высокочастотных поверхностных возмущений [2].

\*\* Впервые такой механизм стабилизации обсуждался в работе [3].

Воспользуемся для описания плазмы, как и в [1], гидродинамическим приближением. Тогда нелинейные усредненные уравнения для комплексных амплитуд параметрически связанных встречных поверхностных волн  $a_1$  и  $a_2$  записутся в виде

$$\dot{a}_{1,2} = -\gamma_{1,2} a_{1,2} + V_{1,2} A_0 a_{2,1}^* + (W_{1,2}^{(1)} |a_1|^2 + W_{1,2}^{(2)} |a_2|^2) a_{1,2}. \quad (3)$$

Здесь

$$V_{1,2} = \mp \frac{2e \omega_L^2 k_{1,2}}{m \omega_1 \omega_2 \omega_0} \operatorname{sign} \epsilon_{1,2} \left( 1 \pm \frac{k_{2,1} \delta_0}{\delta_{2,1} \delta_0} \pm \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \frac{k_0 \delta_{1,2}}{k_{1,2} \delta_0} - \frac{\omega_{1,2}}{\omega_{2,1}} \frac{k_{2,1} \delta_{1,2}}{k_{1,2} \delta_{2,1}} \right)$$

— коэффициенты взаимодействия поля накачки  $A_0$  с поверхностными волнами,

$$W_{1,2}^{(1), (2)} = \frac{2e^2 \omega_L^2 \delta_{1,2}}{m^2} \operatorname{sign} \epsilon_{1,2} G_{1,2}^{(1), (2)}$$

— коэффициенты нелинейного взаимодействия (1);  $\gamma_{1,2}$  — линейные декременты затухания электронных поверхностных волн (их величина оценивается из кинетической теории и существенно зависит от характера переходного слоя плазмы и механизма взаимодействия электронов с ее поверхностью [4, 5]);  $\epsilon_{1,2} = 1 - \omega_L^2 / \omega_{1,2}^2$ , где  $\omega_L = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$  — электронная ленгмюровская частота плазмы с равновесной электронной плотностью  $N$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Наконец,  $\delta_{1,2}$  и  $\delta_0$  — экспоненциальные показатели затухания полей поверхностных волн и волны накачки с глубиной их проникновения в плазму\*.

Коэффициенты  $G_{1,2}^{(1), (2)}$  в общем случае даются очень громоздкими выражениями, поэтому здесь мы ограничимся практически важным случаем  $(k_{1,2} / \delta_{1,2})^2 \ll 1$ , для которого

$$G_{1,2}^{(1)} = \frac{3\delta_{1,2}}{\omega_L^2 \omega_{1,2}^3} \left( 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_{1,2}^2} \frac{1}{\epsilon (2\omega_{1,2})} \right),$$

$$G_{1,2}^{(2)} = \frac{2}{\omega_L^2 \omega_{1,2} \omega_{2,1}^2} \left[ \delta_{2,1} - \frac{3}{4} (\delta_1 + \delta_2) \left( \frac{\omega_L^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 \epsilon (\omega_1 + \omega_2)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\omega_L^2}{(\omega_1 + \omega_2)^2 \epsilon (\omega_1 + \omega_2)} \right) \right].$$

Заметим, что полученные уравнения описывают нелинейный процесс, относящийся к эффектам второго приближения, а именно, нерезонансное взаимодействие волн с нераспадным спектром на квадратичной нелинейности за счет последовательных процессов, т. е. процессов взаимодействия исходных волн  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с нелинейно-индукционными волнами, образующимися за счет взаимодействия волн  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  между собой. Построение второго приближения существенно упрощается, если до применения асимптотической процедуры перейти в исходных уравнениях к нормальным переменным линейной подсистемы, в которых ее уравнения имеют наиболее простой вид. При этом нелинейные эффекты выделяются в «чистом» виде, что существенно облегчает последующие вычисления.

Дальнейший анализ полученных уравнений (3) удобно производить, перейдя в них к действительным амплитудам и фазам подстановкой  $a_{1,2} = A_{1,2} \exp(-i\varphi_{1,2})$ . Соответствующие им уравнения будут

$$A_{1,2} = -\gamma_{1,2} A_{1,2} + V_{1,2} A_0 A_{2,1} \cos \Phi, \quad (4)$$

$$\dot{\Phi} = - (W_1^{(1)} + W_2^{(2)}) A_1^2 - (W_1^{(2)} + W_2^{(2)}) A_2^2 - \left( V_1 \frac{A_2}{A_1} + V_2 \frac{A_1}{A_2} \right) A_0 \sin \Phi,$$

где  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Отсюда следует, что в стационарном режиме ( $\partial/\partial t = 0$ ) между амплитудами взаимодействующих волн  $A_1$  и  $A_2$  устанавливается связь

\* Для определенности полагаем, что частота накачки лежит в полосе непрозрачности плазмы, т. е.  $\omega_0 (1 - k_0^2 c^2 / \omega_0^2)^{1/2} < \omega_L$ .

$$A_2^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{V_2}{V_1} A_1^2.$$

При  $A_0 > A_{\text{пор}} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 / V_1 V_2}$  это состояние равновесия устойчиво и характеризуется суммарной фазой  $\Phi$ , определяемой условием баланса энергии

$$\sqrt{V_1 V_2} A_0 \cos \Phi = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}.$$

Данному состоянию отвечает стационарный уровень возбуждения поверхностных волн

$$(A_1^0)^2 = \frac{\gamma_2 V_1}{\gamma_1 V_2} (A_2^0)^2 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{A_0^2 / A_{\text{пор}}^2 - 1}}{\left| (W_1^{(1)} + W_2^{(1)}) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{V_2}{V_1} (W_1^{(2)} + W_2^{(2)}) \right|},$$

на котором, таким образом, и ограничивается их амплитуда за счет нелинейного процесса (1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, В. В. Петров, Изв. вузов—Радиофизика, 19, № 10, 1475 (1976).
2. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
3. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ФТТ, 11, 2047 (1969).
4. К. Н. Степанов, ЖТФ, 35, 1349 (1965).
5. Ю. А. Романов, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 2, 242 (1964).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 сентября 1977 г.,  
после переработки  
7 июня 1978 г.

УДК 550.338.2

## ОДНОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В D- И F-ОБЛАСТЯХ ИОНОСФЕРЫ

*В. И. Дробжев, В. М. Краснов, Н. М. Салихов*

Для выяснения механизма образования и условий распространения внутренних акустико-гравитационных волн (ВАГВ) существенный интерес представляет исследование параметров среднемасштабных волновых возмущений (связываемых с распространением ВАГВ) на разных высотах верхней атмосферы.

По результатам измерения спектрально-временных свойств волновых возмущений (ВВ) опубликовано несколько десятков работ (относящихся в основном к F-области), список которых можно найти в ряде обзоров, появившихся за последние годы [1, 2]. Однако до настоящего времени очень мало сведений о спектральном составе ВВ в нижней части ионосферы [3].

В данном сообщении приводятся результаты одновременных наблюдений спектрального состава ВВ в D- и F-слоях ионосферы, полученных при регистрации доплеровского сдвига частоты  $f_g(t)$  при наклонном (трасса Ташкент — Алма-Ата) и вертикальном зондировании (Алма-Атинская КМИС). Аппаратура и методика обработки записей описаны в [4, 5].

На рис. 1 представлены типичные записи  $f_g(t)$  для наклонного (НЗ) и вертикального (ВЗ) зондирования ионосферы. Частота наклонного зондирования во всех сеансах равнялась 2,5 МГц, что соответствует отражению радиоволны от высоты  $\sim 70 \div 80$  км. Частота вертикального зондирования равнялась 5 МГц (отражение от высот 200—250 км).

При спектральном анализе записей  $f_g(t)$  длительность корреляционного окна выбиралась много меньше длины анализируемой реализации (4—5 часов) и равнялась

50 мин. Перед обработкой устранился низкочастотный тренд с периодами более одного часа. Частота дискретизации процессов  $f_g(t)$  — 1 мин для данных ВЗ и 2 мин для данных НЗ, при этом значения  $f_g(t)$  усреднялись за период дискретизации. Следует отметить, что для обработки отбирались только случаи однолучевого сигнала [4, 5].

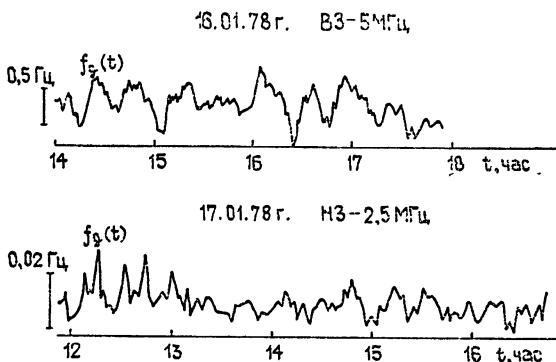


Рис. 1.

Расчет спектров мощности прежде всего показал, что в  $D$ - и  $F$ -областях ионосферы отмечаются четко выраженные пики спектральной плотности флуктуаций электронной концентрации. На рис. 2 представлены усредненные графики спектральной плотности для  $D$ - (рис. 2а, 45 сеансов) и  $F$ -области (рис. 2б, 40 сеансов), полученные примерно в один и тот же промежуток времени (1977—1978 гг.). Из рис. 2а, б видно, для  $D$ -области характерны частотные составляющие волновых возмущений со средними значениями периодов  $\sim 24, 12$  и  $6$  мин, для  $F$  —  $27$  и  $12,5$  мин.

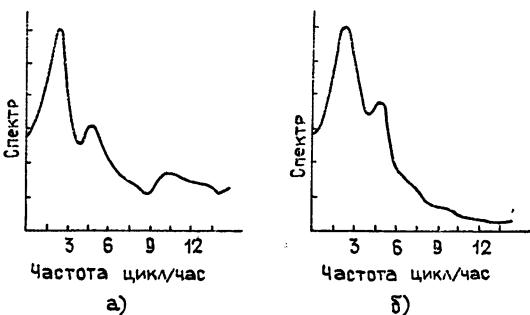


Рис. 2.

Наряду с этим спектральный анализ отфильтрованной низкочастотной составляющей  $f_g(t)$  показал наличие четко выраженного пика в области полутора часов как для  $D$ -, так и  $F$ -слоев ионосферы.

При сопоставлении экспериментальных данных по отдельным дням оказалось, что пики спектральной мощности для  $D$ - и  $F$ -слоев могут как совпадать по частотам, так и отличаться. Например, из рис. 3 видно, что 26 августа 1977 года в  $D$ - и  $F$ -областях максимумы спектра плотности приходятся на  $\sim 30$  и  $12$  мин. В то же время 12 октября 1977 года для  $F$ -области имеют место периоды  $\sim 40$  и  $12$  мин, для  $D$ -области  $\sim 22$  и  $12$  мин.

На рис. 4 представлены графики зависимости положения пиков спектральной мощности на частотной оси от времени года для  $D$ - (рис. 4а) и  $F$ -области (рис. 4б) за 1977—1978 гг. Каждая точка на графике получена при осреднении спектров не менее чем за 5 дней. Среднеквадратичный разброс периодов равнялся  $\sim 2,5$  мин. Сезонный ход для  $D$ -области показывает, что в течение всего анализируемого периода в спектрах колебаний  $f_g(t)$  присутствуют пики примерно на одних и тех же периодах ( $\sim 24, 12$  и  $6$  мин). Следует отметить, что в период осеннего равноденствия отмечается тенденция к увеличению низкочастотных периодов (24 и 12 мин). В частности, в октябре 1977 г. 24-минутная компонента трансформировалась в 40-минутную. При-

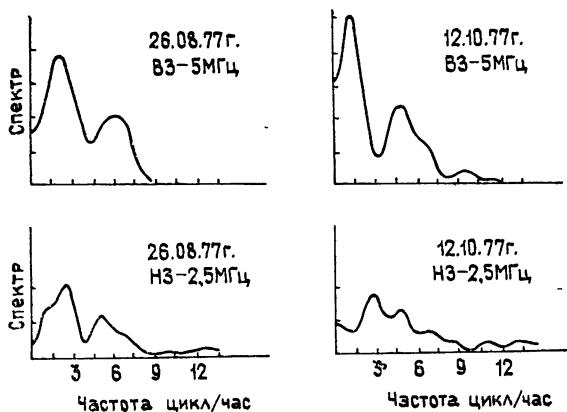


Рис. 3.

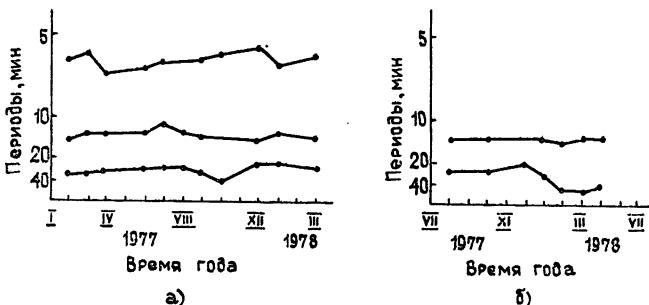


Рис. 4.

мерно аналогичная картина в смысле стабильности вариаций спектральных пиков с периодами  $\sim 27$  и  $12,5$  мин отмечается в  $F$ -области. Исключение составляет весенне равноденствие, когда величина низкочастотного пика имеет период  $\sim 50$  мин.

Регистрация и спектральный анализ записей  $f_g(t)$ , полученных на разных частотах (высотах), дают возможность оценить экспериментальные значения наивысшей частоты обрезания ( $\omega_g$ ) ВАГВ. Как видно из предыдущего, минимальный наблюдаемый период ВВ для  $D$ -области равен  $\sim 6$  мин, а для  $F$ -области —  $13$  мин. Данные результаты находятся в хорошем согласии с теоретическими оценками величины  $\omega_g$ , рассчитанной для средних широт и модели стандартной атмосферы. Это является убедительным аргументом в пользу того, что волновые возмущения, наблюдавшиеся в ионосфере, вызываются атмосферными гравитационными волнами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. C. Yeh and C. H. Liu, Rev. Geophys. Space Phys., 12, 193 (1974).
2. S. H. Francis, J. Atm. Terr. Phys., 37, 1011 (1975).
3. J. Tolstoy and H. Montes, J. Atm. Terr. Phys., 33, 775 (1971).
4. В. И. Дробежев, В. М. Краснов, Н. М. Салихов, в сб. Ионосфера и солнечно-земные связи, изд. Наука, Алма-Ата, 1977, стр. 33
5. В. М. Краснов, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 40 (1976).

## О СВЯЗИ СДВИГОВ ОТ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА И ШТАРКОВСКОГО СМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРОВ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ

А. Ф. Крупнов

В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на неотмечавшуюся, по-видимому, ранее связь экспериментальных значений сдвигов линий молекул давлением газа с расчетными значениями штарковских смещений центров этих же линий. Экспериментальные значения сдвигов, приводимые ниже, получены для однокомпонентного газа в различное время Калякиным ([<sup>1,2</sup>] и данные по OCS), Беловым, Герштейном и Масловским ([<sup>3</sup>]) и данные по переходам (1,1) и (2,2) аммиака в  $v_2 = 1$  состоянии).

Так, сдвиги от давления субмиллиметровых вращательных линий линейных молекул N<sub>2</sub>O и OCS оказались весьма малыми (порядка  $\text{kГц}/\text{Tor}$ , что находится на пределе точности эксперимента). Это коррелирует с малыми штарковскими сдвигами этих линий, обусловленными как небольшими дипольными моментами, так и, в основном, большими значениями вращательного квантового числа  $J$  в субмиллиметровом диапазоне (штарковское смещение пропорционально  $J^{-2}$  [<sup>4</sup>]).

Значения измеренного сдвига линий нижних вращательных переходов  $J = 0 \rightarrow 1$  молекулы типа симметричного волюка PH<sub>3</sub> в основном и возбужденном ( $v_2 = 1$ ) состояниях оказались равными +0,56  $\text{МГц}/\text{Tor}$ , что по знаку эффекта совпадает со сдвигом центров этих линий эффектом Штарка [<sup>4</sup>].

Рассмотренные выше линии обладают эффектом Штарка второго порядка. Отметим в этой связи, что намного более сильный эффект Штарка первого порядка не смещает центров линий.

Измеренные сдвиги переходов  $J = 0 \rightarrow 1$  состояния  $v_2 = 1$  молекул <sup>14</sup>NH<sub>3</sub> и <sup>15</sup>NH<sub>3</sub> положительны [<sup>2</sup>] (в [<sup>2</sup>] измерялось не абсолютное значение сдвига, а отношение сдвига к уширению, равное +0,65); это также совпадает со знаком штарковского смещения центров этих линий, определяющегося в первом приближении как расталкивание пары близких уровней (см. [<sup>4</sup>] и схему [<sup>2</sup>]).

Интересный случай для сравнения представляют собой инверсионные переходы ( $J = 1, K = 1$ ) и ( $J = 2, K = 2$ ) аммиака <sup>14</sup>NH<sub>3</sub> в состоянии  $v_2 = 1$ . В то время как штарковский сдвиг перехода ( $J = 2, K = 2$ ) положителен (так же, как пары близких уровней), штарковский сдвиг перехода ( $J = 1, K = 1$ ) отрицателен, что обусловлено преобладанием расталкивания близких (из-за случайного совпадения) верхнего уровня этого перехода ( $J = 1, K = 1, a$ ) и нижнего уровня следующего перехода ( $J = 2, K = 1, s$ ). Соответствующая схема уровней приведена в [<sup>5</sup>]. В согласии с этим сдвиг частоты давлением оказался положительным (+1,5  $\text{МГц}/\text{Tor}$ ) для перехода ( $J = 2, K = 2$ ) и отрицательным (-2,4  $\text{МГц}/\text{Tor}$ ) для перехода ( $J = 1, K = 1$ ). Эти примеры можно продолжить.

В литературе наряду с данными, подтверждающими приведенные зависимости (сдвиг +1  $\text{МГц}/\text{Tor}$  для перехода  $J = 0 \rightarrow 1$  CH<sub>3</sub>Cl в [<sup>6</sup>]), имеются данные, по-видимому, противоречащие излагаемым в настоящей заметке. Так, сдвиги от давления линий  $J = 1 \rightarrow 2$  и  $J = 2 \rightarrow 3$  OCS, измеренные в [<sup>6-8</sup>], оказались отрицательными и равными соответственно -35  $\text{кГц}/\text{Tor}$  и -113  $\text{кГц}/\text{Tor}$  по данным [<sup>6</sup>] и -(2÷4)  $\text{кГц}/\text{Tor}$  и -10(10)  $\text{кГц}/\text{Tor}$  — по данным [<sup>7,8</sup>]. Такие расхождения делают затруднительной оценку этих результатов; однако возможно, что наличие малого отрицательного сдвига частоты существует и обусловлено другим механизмом, не связанным со штарк-эффектом.

Возможно, что высказанные в настоящей заметке соображения могут быть полезны для выработки простого критерия оценки сдвигов молекулярных линий давлением, важного для молекулярной спектроскопии высокого разрешения, особенно если надеяться на возможность существования единого для линий определенной молекулы коэффициента, связывающего штарковский сдвиг и сдвиг от давления спектральных линий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Андреев, А. В. Биренин, Е. Н. Калякин, А. Ф. Крупнов и С. М. Шапин, J. Mol. Spectr., **62**, 125 (1976).
2. Е. Н. Калякин, А. Ф. Крупнов, Д. Рапусек, Ю. М. Шчурин и С. М. Ургаш, J. Mol. Spectr., **66**, 171 (1977).
3. Б. А. Андреев, С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, А. В. Масловский, С. М. Шапин, Оптика и спектроскопия, **44**, 620 (1978).
4. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
5. F. Y. Chu and S. M. Freund, J. Mol. Spectr., **48**, 183 (1973).

6. S. C. M. Luijendijk, Temperature Dependence of Self-Broadening and Self-Shift of Microwave Absorption Lines, Thesis, Univ. Utrecht, 1972.  
 7. M. Cattani, An. Acad. Brasil. Ciéncia, 43, 51 (1971).  
 8 I. C. Story, V. I. Metchnik and R. W. Parsons, J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., 4, 593 (1971).

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
10 мая 1978 г.

УДК 621.371.13 : 621.372.822

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ С ТОНКОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ФЕРРИТОВОЙ ПЛЕНКОЙ

E. P. Курушин, T. A. Часовникова

Данная работа является продолжением работы [1], где приведены результаты расчета постоянных распространения LE- и LM-волн в прямоугольном волноводе с тонкой поликристаллической ферритовой пленкой, лежащей на одной из стенок волновода и намагниченной нормально или по касательной в области значений параметра  $\zeta = \omega_0/\omega$ , где мнимыми частями диагональной  $\mu$ - и пеdiagональной  $\mu_a$ -компонент тензора магнитной проницаемости можно пренебречь, если мала ширина кривой ферромагнитного резонанса  $2\Delta H$  ферритовой пленки.

Как следует из [1-3], постоянные распространения  $h$  волн LM<sub>mn</sub> и LE<sub>mn</sub> можно определить из уравнений

$$qb \operatorname{tg} qb = -\frac{ikb}{2} \left[ a_{12} + a_{21} \pm \sqrt{(a_{12} - a_{21})^2 + 4a_{11}a_{22}} \right] \quad (1)$$

для волн типа LM<sub>mn</sub> и

$$\frac{\operatorname{tg} qb}{qb} = -\frac{i}{2kb} \left[ a_{12} + a_{21} \pm \sqrt{(a_{12} - a_{21})^2 + 4a_{11}a_{22}} \right] \quad (2)$$

— для волн типа LE<sub>mn</sub>

$$(h = \left[ k^2 - q^2 - \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^{1/2}).$$

Здесь  $a_{ij}$  — компоненты нормированного к волновому сопротивлению вакуума  $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  тензора входного импеданса слоя  $z_{ij} = -\rho_0 a_{ij}$ , связывающие тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей на поверхности ферритовой пленки [2].

С учетом значений компонент  $a_{ij}$  для тонкой ферритовой пленки ( $kd \ll 1$ ) [3] уравнения (1) и (2) принимают вид (с точностью  $O(kd)^2$ )

$$q_{n1} b \operatorname{tg} q_{n1} b = k^2 bd, \quad (3)$$

$$q_{n2} b \operatorname{tg} q_{n2} b = k^2 bd \mu_{\perp}$$

— для LM<sub>mn</sub>-волн при касательном намагничивании,

$$q_{n1} b \operatorname{tg} q_{n1} b = k^2 bd (\mu + \mu_a), \quad (4)$$

$$q_{n2} b \operatorname{tg} q_{n2} b = k^2 bd (\mu - \mu_a)$$

— для LM<sub>mn</sub>-волн при нормальном намагничивании,

$$\frac{\operatorname{tg} q_{n1} b}{q_{n1} b} = \frac{d}{b},$$

$$\frac{\operatorname{tg} q_{n2} b}{q_{n2} b} = \frac{d}{b} \mu_{\perp} \quad (5)$$

— для  $LE_{mn}$ -волн при касательном намагничивании,

$$\frac{\operatorname{tg} q_{n1} b}{q_{n1} b} = \frac{d}{b} (\mu + \mu_a), \quad (6)$$

$$\frac{\operatorname{tg} q_{n2} b}{q_{n2} b} = \frac{d}{b} (\mu - \mu_a)$$

для  $LM_{mn}$ -волн при нормальном намагничивании и описывают в каждом случае распространение двух групп волн, одна из которых отличается резким изменением фазы с изменением поля и резонансным характером потерь, рис. 1, 3.

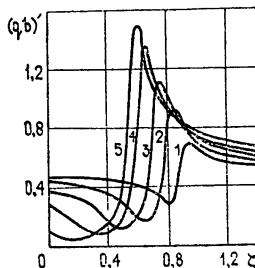


Рис. 1.

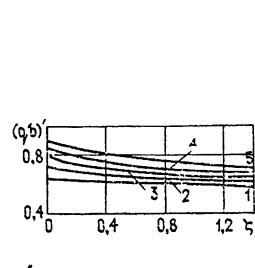


Рис. 2.

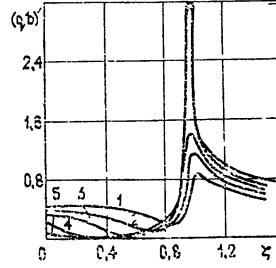


Рис. 3.

Рис. 1. Постоянные распространения  $q_{02}$  волн  $LM_{m0}$  при касательном намагничивании:  
 $1-A=0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8; 5-1,0$ .

Рис. 2. Постоянные распространения  $q_{01}$  волн  $LM_{m0}$  при нормальном намагничивании и различных значениях параметра  $A$  (см. рис. 1).

Рис. 3. Постоянные распространения  $q_{02}$  волн  $LM_{m0}$  при нормальном намагничивании и различных значениях параметра  $A$  пленки (см. рис. 1).

Вычисления поперечных волновых чисел  $q$  для волн типа  $LM_{mn}$  проведены на ЭВМ ЕС-1030 для ферритовых пленок с фактором потерь  $\delta = 0,05$  с различной намагнченностью  $4\pi M_s$ , характеризуемой параметром  $A = \omega_m/\omega$ , где  $\omega_m = \gamma 4\pi M_s$ ,  $\gamma$  — гиromагнитное отношение. На рис. 1—3 представлены значения постоянных  $q$  для волн  $LM_{m0}$  в зависимости от  $\zeta = \frac{\omega_0}{\omega}$ , где  $\omega_0 = \gamma H_0$ ,  $H_0$  — величина приложенного

постоянного поля,  $\omega_0$  — резонансная частота для пленки толщиной  $d = b/10$  и  $kb = \pi/2$ . Аналогичные вычисления могут быть проведены и для волн типа  $LE_{mn}$ .

В области малых значений параметра  $\zeta$ , где мнимыми частями диагональной и недиагональной компонент тензора магнитной проницаемости  $\mu_a''$  и  $\mu''$  можно пренебречь, результаты вычислений постоянных  $q$  для ферритовой пленки с малой шириной  $2\Delta H$  без учета  $\mu_a''$  и  $\mu''$  (формулы (10), (12), рис. 4, 5 [1]) и с учетом  $\mu_a''$  и  $\mu''$  (рис. 1—3) практически совпадают.

Оценка затухания волны в прямоугольном волноводе с тонкой касательно или нормально намагниченной ферритовой пленкой показывает возможность создания аттенюаторов, изменяющих затухание волны при изменении внешнего поля.

В заключение выражаем благодарность Ю. А. Уклейн за проведение численных расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Куршин, Т. А. Часовникова, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2. (1977).
2. Е. П. Куршин, Е. И. Недедов, А. Т. Фиалковский, Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах, изд. Наука, М., 1975.
3. А. Г. Глущенко, Е. П. Куршин, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 18, № 3 (1975).
4. А. Г. Глущенко, Е. П. Куршин, Е. И. Недедов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 1032 (1975).

Куйбышевский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
4 мая 1978 г.

УДК 621.371.25

## О НЕЛИНЕЙНОМ СДВИГЕ ЧАСТОТЫ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

В. П. Рейтова

Стационарные колебания электронного потока рассматривались неоднократно [1–4]. Однако здесь, в основном, выделяют класс волн, частота которых не зависит от амплитуды. В настоящем сообщении показано, что в определенных условиях возможно нелинейное смещение частоты стационарной волны.

Исходные уравнения запишем в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{e}{m} E, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -4\pi e(n - N_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая, что все переменные зависят лишь от  $\xi = \omega t - kx$ , получим из уравнения непрерывности связь

$$(\omega - kv)n = N_0 \omega_p p, \quad (2)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / m}$ ,  $p = \text{const}$ . В безразмерных переменных  $a = (kv - \omega) / \omega_p$ ,  $\psi = e k E / m \omega_p^2$  уравнения стационарных колебаний примут вид

$$a'_\xi = \psi/a, \quad \psi'_\xi = -\left(\frac{p}{a} + 1\right). \quad (3)$$

Фазовая плоскость системы (3), построенная с учетом интеграла  $(a + p)^2 + \psi^2 = c^2$ , показана на рис. 1. Далее ограничимся рассмотрением периодических волн, в которых  $n < \infty$  ( $c < |p|$ ). Амплитуда колебаний поля в таких волнах  $\Delta E = \frac{1}{2} (E_{\max} - E_{\min}) = \frac{m \omega_p^2}{ke} c$ ; скорость частиц больше фазовой скорости волны при  $p < 0$  (медленные волны) и меньше — при  $p > 0$  (быстрые волны) [1, 4].

Потребуем, как обычно, чтобы период волны по переменной  $\xi$  равнялся  $2\pi$ , определяя тем самым  $\omega$  и  $k$  как частоту и волновое число:

$$\int_{-p \mp c}^{-p \pm c} \frac{ada}{\sqrt{c^2 - (a + p)^2}} = \pi \quad (4)$$

(здесь и далее первый знак относится к медленным волнам, а второй — к быстрым). При заданном  $k$ , наложив ограничения, устранившие произвол в определении постоянных, можно построить класс стационарных волн, содержащий в качестве про-

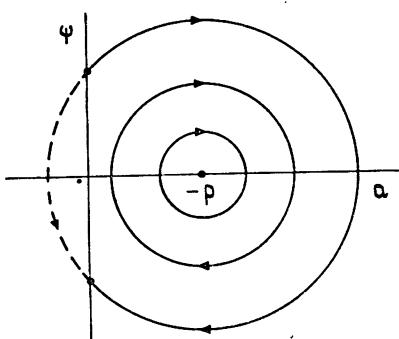


Рис. 1.

извольных параметров, только амплитуду и фазу волны. Рассмотрим это на конкретных примерах.

а) Выделим совокупность стационарных волн, распространяющихся в условиях постоянства плотности ионного фона  $N_0$  и характеризующихся одинаковой средней плотностью потока массы  $\langle nv \rangle = \text{const} = N_0 v_0$  (здесь  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по периоду,  $v_0$  — скорость частиц в невозмущенном потоке, и, кроме того, учтено, что  $\langle n \rangle = N_0$ ). Согласно (4),  $p = \mp 1$ ; при этом из (2) следует известный результат:  $\omega = kv_0 \mp \omega_p$  [4]. Частота волны в данном случае не зависит от ее амплитуды.

б) Допустим теперь, что параметры стационарной волны с волновым числом  $k$  медленно изменяются во времени за счет действия резонансных с волной внешних источников, которые учтем, добавляя в правые части (1) малые члены  $f_i(\xi, t)^*$ . Таким способом можно учесть возбуждение стационарных волн в потоке при нелинейном резонанском взаимодействии волн (при этом  $f_i$  описывают резонансную с нелинейной волной комбинационную ВЧ силу) либо их возбуждение резонансным сторонним током. Построим совокупность стационарных решений, позволяющих описать данный квазистационарный процесс\*\*.

Усредняя уравнения (1) с внешними источниками  $f_i$  по пространственному периоду и учитывая нейтральность потока в среднем ( $\langle E \rangle = 0$ ), получим следующие законы сохранения:

$$\langle n \rangle = \text{const} \equiv \bar{N}_0, \quad \langle v \rangle = \text{const} \equiv v_0. \quad (5)$$

Совокупность стационарных решений  $v(\xi)$ ,  $n(\xi)$ , которые содержат средние и осцилляторные составляющие, следует построить таким образом, чтобы выполнялись условия (5); среднюю скорость нетрудно определить из (3):

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-p \mp c}^{-p \pm c} \frac{a^2 da}{\sqrt{c^2 - (a + p)^2}} = \pm \left( \frac{c^2}{2} + p^2 \right), \\ \langle v \rangle &= \frac{1}{k} \left[ \pm \omega_p \left( \frac{1}{2} c^2 + 1 \right) + \omega \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая также, что  $\langle n \rangle = N_0$  (т. е.  $N_0 = \bar{N}_0$ ), получим из (5) дисперсионное соотношение в явной форме:

$$\omega = kv_0 \mp \omega_p \left( 1 + \frac{1}{2} c^2 \right). \quad (7)$$

Зависимость частоты от амплитуды в данном классе стационарных волн объясняется наличием средней скорости сноса индивидуальных осцилляторов, которая различна для волн с разной амплитудой.

в) Рассмотрим теперь адиабатическое изменение стационарной волны с частотой  $\omega$  в пространстве под действием внешних источников  $f_i(\xi, x)$ . Учитывая условие  $\langle E \rangle = 0$ , получим следующие законы сохранения:

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2, \quad \langle nv \rangle = \bar{N}_0 v_0, \quad (8)$$

где  $\bar{N}_0$ ,  $v_0$  — плотность и скорость частиц невозмущенного потока. Поскольку  $\langle n \rangle = N_0$ ,  $p = \mp 1$ ,  $\langle a^2 \rangle = \frac{3}{2} c^2 + 1$ , из (8) находим

$$\begin{aligned} \left( \frac{3}{2} \pm \frac{\omega}{\omega_p} \right) \omega_p^2 c^2 &= k^2 v_0^2 - (\omega_p \pm \omega)^2, \\ \omega \pm \omega_p &= kv_0 \omega_p^2 / \omega_p^2 \quad (\omega_{p0} \equiv \omega_p (\bar{N}_0)). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) определяют зависимость  $k$  и  $N_0$  от частоты и амплитуды (в присутствии источников  $f_i(\xi, x)$ , определяющих профиль  $c(x)$ , соответствующее распределение плотности ионов  $N_0(x)$  возникает в силу условия нейтральности системы). Дисперсионное уравнение можно записать в явном виде, когда  $\omega_{p0}/\omega \ll 1$ . Полагая при этом  $\omega = kv_0 + \omega^{(1)}$ ,  $\omega_p = \omega_{p0} + \omega_p^{(1)}$ , находим

\* Функции  $f_i$  имеют пространственный период, совпадающий с периодом волны, и приводят к изменению амплитуды на характерных временах  $\Delta t \gg \omega_p^{-1}$ , считаем также выполненным условие  $\langle f_i \rangle = 0$ .

\*\* Заметим, что приближение пространственно-однородных волновых полей оправдано, когда изменение амплитуд волны и средних происходит достаточно быстро и в уравнениях можно пренебречь производными этих величин по  $x$ .

$$\omega_p = \omega_{p0} \left( 1 \pm \frac{\omega_{p0}}{4\omega} c^2 \right), \quad k = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\omega_{p0}}{v_0} \left( 1 + \frac{1}{2} c^2 \right). \quad (10)$$

В данном случае имеет место нелинейное смещение волнового числа волны с частотой  $\omega$ .

Таким образом, совокупность стационарных решений, построенная с учетом законов сохранения, выполненных при квазистационарном изменении волны под действием внешних источников, характеризуется зависимостью частоты или волнового числа от амплитуды. Наличие нелинейного частотного сдвига существенно, например, для резонансных волновых взаимодействий, при которых он приводит к выходу волн из резонанса.

Автор благодарен М. И. Рабиновичу за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ДАН СССР, 80, 193 (1951).
2. P. A. Staggok, Proc. Roy. Soc. (London), A242, 277 (1957).
3. E. A. Jackson, Phys. Fluids, 3, № 5, 831 (1960).
4. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, ТМФ, 12, № 3, 407 (1972).

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 февраля 1978 г.