

СОДЕРЖАНИЕ

Ликулин В. Д. О плазменных волнах в движущейся слабо нестационарной плазме . . . . .	1417
Морозов В. Е., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Многократные рассеяния при дальнем тропосферном распространении . . . . .	1421
Кочаровская О. А., Цареградский В. Б. О механизмах уширения спектральной линии квантовых генераторов с пучком влетающих атомов . . . . .	1427
Морозов А. М., Семенов Д. И. Магнитооптическая дифракция света в толстых слоях с регулярной доменной структурой . . . . .	1437
Ляхов Г. А., Макаров В. А. Формирование пространственной когерентности и поляризационных свойств электромагнитного излучения в средах с пространственной дисперсией . . . . .	1453
Галкин В. М., Каныгина И. А., Файнштейн С. М. О возбуждении нелинейной звуковой волны квазимонохроматической альфвеновской накачкой . . . . .	1461
Савёнок А. А., Кижнерова В. Н. Чувствительность фотоприемника с гетеродинамированием сигнала в ФЭУ . . . . .	1467
Крупник А. Б., Молодцов С. Н., Саичев А. И. О флуктуациях фазы, углов прихода и частотной корреляции сферических волн в случайной неоднородной среде . . . . .	1472
Чумаченко В. П. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на ребристых цилиндрических поверхностях . . . . .	1480
Каратыгин В. А., Розов В. А., Константинова А. А. Излучение щели, прорезанной параллельно ребру идеально проводящей полуплоскости, расположенной на границе раздела двух сред . . . . .	1485
Савенко П. А. О синтезе линейных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме . . . . .	1498
Антонов В. А., Векслер Н. В., Ивко Ю. В., Коротков В. С., Семенова Л. Р., Турчин В. И., Фогель А. Л., Фортус И. М. Фазометрические измерения диаграмм направленности линейных антенных решеток . . . . .	1505
Лукин К. А. Теоретический анализ переходных и стационарных режимов в генераторе дифракционного излучения . . . . .	1514
Корнев И. Л., Юдин Л. А., Мустафин Х. Х. Медленные циклотронные волны в волноводе с релятивистским электронным пучком . . . . .	1523

Краткие сообщения и письма в редакцию

Фролов В. Л. О нагреве ионосферы мощным радиоизлучением со случайной модуляцией несущей частоты . . . . .	1534
Пашев Г. П. Математическое описание фликкерных флуктуаций частоты с помощью модифицированных структурных функций . . . . .	1535
Пуговкин А. В. Спектральный анализ случайных процессов с помощью акустооптических устройств . . . . .	1537

Аннотации депонированных статей

Скирта Е. А., Хижняк Н. А. Некоторые вопросы теории искусственно гиротропных сред . . . . .	1436
---	------

Информация

Содержание т XXII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1979 г. . . . .	1539
Именной указатель — т XXII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1979 г. . . . .	1547

УДК 533 951

## О ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНАХ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СЛАБО НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Д. Пикулин

Рассмотрено распространение плазменных волн в слабо неоднородных и слабо нестационарных потоках плазмы. В приближении геометрической оптики найдено выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы с учетом затухания Ландау. Получено локальное дисперсионное уравнение и анализируется структура полей плазменных волн. Приведены уравнения, описывающие рефракцию лучей и изменение частоты вдоль групповых траекторий, а также закон изменения энергии волн.

Известно, что в нестационарной среде возможно существенное преобразование спектральных, энергетических и поляризационных характеристик распространяющихся волн [1, 2]. В литературе подобные вопросы в основном исследованы применительно к электромагнитным («поперечным») волнам. Некоторые особенности поведения плазменных («продольных») волн в холодной слабо нестационарной плазме обсуждались в [3, 4]. Пример кинетического рассмотрения одномерных плазменных волн с учетом затухания Ландау приведен в [5]. Однако в этой работе не был указан конкретный «механизм» нестационарности, от которого, строго говоря, существенно зависит энергетика волн [1, 6]. В частности, в бесстолкновительной плазме, когда невозмущенная функция распределения  $f^{(m)}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial f^{(m)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{r}} = 0$  [2] и временные вариации концентрации электронов обусловлены перераспределением их в пространстве, принципиально необходимым становится учет движения среды, в том числе и в макроскопически неподвижной плазме, что также было упущено в [5].

В связи с этим в настоящей работе, используя аппарат хорошо известного приближения четырехмерной геометрической оптики, исследуются особенности распространения плазменных волн в слабо неоднородной среде с временным изменением параметров, вызванным неоднородной скоростью дрейфа  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .

Как и в [2], рассмотрим линеаризованное кинетическое уравнение для возмущения функции распределения под действием слабого высокочастотного поля волны в пренебрежении вкладом ионов и соударениями. Аналогично формулам (1)–(8) работы [2] можно найти «квазистационарное» значение диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(0)} = & \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} v_i \frac{\partial f^{(m)}}{\partial p_j} d^3 p + \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j k_s \frac{\partial f^{(m)}}{\partial p_s} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{P}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] d^3 p \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $e$  — заряд,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — импульс электрона. Символ  $P$  здесь означает, что интеграл следует понимать в смысле главного значения; соответствующий член в (1) учитывает то обстоятельство, что для плазменных волн возможно затухание Ландау, обусловленное синхронными частицами, для которых  $\omega = k\mathbf{v}$ . Заметим, что полученный тензор (1) при переходе к однородной и стационарной плазме отличается от соответствующих выражений, встречающихся в литературе (см., например, [7]). Указанное отличие связано с учетом действия на электроны магнитного поля волны  $\mathbf{B}$ , что особенно важно в случае движущихся сред, когда плазменные волны, вообще говоря, не являются чисто продольными и  $\mathbf{B} \neq 0$ .

Поправка к квазистационарному значению тензора  $\epsilon_{ij}^{(0)}$  оказывается равной

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_{ij} = & -i \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} v_i \frac{\partial v_s}{\partial p_j} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial r_s} \left[ \frac{P}{\omega - k\mathbf{v}} + i\pi\delta(\omega - k\mathbf{v}) \right] d^3p - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j k_l \frac{\partial v_s}{\partial p_l} \frac{\partial f^{(m)}}{\partial r_s} \left[ \frac{P}{\omega - k\mathbf{v}} + i\pi\delta(\omega - k\mathbf{v}) \right] d^3p - \\ & \left. - \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v_i \left[ \frac{\partial^2 f^{(m)}}{\partial p_j \partial t} + v_j k_s \frac{\partial^2 f^{(m)}}{\partial p_s \partial t} \left( \frac{P}{\omega - k\mathbf{v}} + i\pi\delta(\omega - k\mathbf{v}) \right) \right] d^3p \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим случай плазмы, когда невозмущенная функция распределения имеет вид смещенного максвелловского распределения в слаборелятивистском приближении [2] ( $\xi = \frac{\kappa T}{mc^2} \ll 1$ ,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура электронов). В этом случае интегралы в (1), (2) могут быть выражены через известные интегралы вероятности. Не приводя здесь выражений для тензоров  $\epsilon_{ij}^{(0)}$  и  $\delta\epsilon_{ij}$  в общем виде, ограничимся рассмотрением приближения  $(\omega - k\mathbf{v})/k v_T \gg 1$  ( $v_T = \sqrt{2\kappa T m^{-1}}$  — тепловая скорость электронов), когда затухание Ландау мало. Удерживая в конечном результате квадратичные по скорости движения члены  $\sim \beta^2 = V^2/c^2$ ,  $\sim \xi$ , получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(0)} = & \delta_{ij} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{5}{2} \xi \right) \right] + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \beta_i \beta_j (1 - n^2) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (\beta_i n_j + \\ & + n_i \beta_j) (1 + n\beta) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \xi (n^2 \delta_{ij} + 2n_i n_j) + 2i \sqrt{\pi} (1 - n\beta) \times \\ & \times \frac{\omega_p^2}{\omega k v_T} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{k^2 v_T^2} (1 - n\beta)^2 \right] \left[ \frac{V_i V_j}{v_T^2} + (n_i \beta_j + \beta_i n_j) \times \right. \\ & \left. \times (1 - n\beta) \frac{\omega^2}{k^2 v_T^2} + \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{n_i n_j}{n^2} \right) + \frac{n_i n_j}{n^2} \frac{\omega^2}{k^2 v_T^2} (1 - n\beta)^2 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{n} = k\mathbf{c}/\omega$ . В рассматриваемом приближении в поправке  $\delta\epsilon_{ij}$  можно пренебречь членами, связанными с наличием синхронизма между полем и частицами. Тогда из (2) имеем

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{(0) \text{a}}}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{r}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^{(0) \text{a}}}{\partial \omega \partial t} \right) - i \frac{c}{2\omega^3} \left[ n_i \frac{\partial}{\partial r_j} (\omega_p^2 \xi) - n_j \frac{\partial}{\partial r_i} (\omega_p^2 \xi) \right]. \quad (4)$$

Как следует из полученных выражений (3), (4) тензоры  $\varepsilon_{ij}^{(0)}$  и  $\delta \varepsilon_{ij}$  содержат как эрмитову ( $\varepsilon_{ij}^{(0) \text{a}}$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}^{\text{a}}$ ), так и антиэрмитову ( $\varepsilon_{ij}^{(0) \text{a}}$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$ ) части, причем последняя в (3) полностью определяется затуханием Ландау и в рассматриваемом случае мала по сравнению с эрмитовой частью.

Из условия совместности системы уравнений нулевого приближения

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij}^{(0) \text{a}}) E_j^{(0)} = 0 \quad (5)$$

можно получить локальное дисперсионное уравнение для плазменных волн

$$n^2 = \frac{\frac{\omega'^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{5}{2} \xi \right)}{3\xi \frac{\omega_p^2}{\omega'^2}}, \quad (6)$$

где  $\omega' = (\omega - \mathbf{kV})(1 - \beta^2)^{-1/2}$ . В отличие от «поперечных» (электромагнитных) волн в (6) имеется явная зависимость от скорости движения плазмы, и при  $V \rightarrow 0$  (6) совпадает с результатами, полученными в [8]. Изменения параметров плазмы, в том числе и скорости дрейфа, приводят к рефракции лучей и изменению мгновенной частоты вдоль групповых траекторий. Соответствующие уравнения переноса (см. [1]) для закона дисперсии (6) запишутся следующим образом:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{гp}} \nabla \right) \mathbf{k} = -k_s \frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\frac{\omega'}{c} \beta_s}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\omega'}{2 \left[ 2\omega'^2 - \omega_p^2 \left( 1 - \frac{5}{2} \xi \right) \right]} \left[ (\omega'^2 - \omega_p^2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\ln \xi) + \frac{\omega'^2}{\omega_p^2} \frac{\partial \omega_p^2}{\partial \mathbf{r}} \right], \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{гp}} \nabla \right) \omega = \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\frac{\omega'}{c} \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\omega'}{2 \left[ 2\omega'^2 - \omega_p^2 \left( 1 - \frac{5}{2} \xi \right) \right]} \left[ (\omega'^2 - \omega_p^2) \frac{\partial}{\partial t} (\ln \xi) + \frac{\omega'^2}{\omega_p^2} \frac{\partial \omega_p^2}{\partial t} \right],$$

где  $\mathbf{v}_{\text{гp}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$  — групповая скорость волны.

Как уже отмечалось выше, в движущейся среде плазменные волны в общем случае не являются чисто продольными ( $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}_{\parallel} = n\Phi$ ), а содержат и поперечную к  $\mathbf{k}$  составляющую, которая в соответствии с формулами (3), (5), (6) определяется выражением

$$\mathbf{E}_{\perp} = \beta_{\perp} \Phi \frac{\omega_p^2}{\omega^2} [\beta n (1 - 2n^2) - n^2] \left[ n^2 - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{-1}, \quad (8)$$

где  $\beta_{\perp i} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \beta_j$ . Магнитное поле волны тогда равно  $\mathbf{B} = [n\mathbf{E}_{\perp}]$ .

Используя полученные выражения (3), (4) для тензора диэлектрической проницаемости, нетрудно получить уравнение, описывающее изменение энергии волн\*:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} = E_i E_j^* \left[ 2i \omega \epsilon_{ij}^{(0)a} - \frac{\partial \epsilon^{(0)a}}{\partial t} \right], \quad (9)$$

где  $\omega$  — плотность энергии,  $\mathbf{s} = \omega \mathbf{v}_{\text{гр}}$  — вектор Пойнтинга. Первый член в правой части (9) учитывает затухание Ландау, а второй — параметрический энергообмен волны с нестационарной плазмой. Заметим, что при пренебрежении затуханием Ландау  $\epsilon_{ij}^a = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}^a}{\partial k \partial r} - \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}^a}{\partial \omega \partial t} \right)$ , и из (9) следует, что число квантов в волновом пакете является адиабатическим инвариантом [1].

В заключение автор выражает благодарность Н. С. Степанову за постоянное внимание и обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. A. Kravtsov, L. A. Ostrovskiy, N. S. Stepanov, Proc. IEEE, 62, № 1, 1492 (1974).
2. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 8, 1138 (1973).
3. Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 6, № 1, 112 (1963).
4. Н. С. Степанов, В. Г. Гавриленко, ДАН СССР, 201, № 3, 577 (1971).
5. H. Bloomberg, Phys. Fluids, 11, № 5, 1023 (1967).
6. Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 7, 960 (1976).
7. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
8. P. C. Clemtow, A. J. Willson, Proc. Roy. Soc., A273, 117 (1956).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
27 февраля 1979 г.

## PLASMA WAVES IN A MOVING WEAKLY NONSTATIONARY PLASMA

V. D. Pikulin

Propagation of plasma waves is considered in weakly inhomogeneous and weakly nonstationary plasma fluids. In the geometrical optics approximation an expression for the tensor of the plasma dielectric permittivity has been found taking account of the Landau damping. A local dispersive equation has been derived and the structure of fields of plasma waves are analysed. Equations are given describing the refraction of rays and variation of frequency along the group trajectories as well as the law of the wave energy variation.

\* В работе [5] энергетические соотношения не рассматривались.

УДК 621 371.243

## МНОГОКРАТНЫЕ РАССЕЯНИЯ ПРИ ДАЛЬНОМ ТРОПОСФЕРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

*В. Е. Морозов, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс*

В рамках малоуглового приближения уравнения переноса учтено влияние многократных рассеяний на турбулентностях атмосферы на уровне сигнала при дальнем тропосферном распространении.

Получены формулы для интенсивности, которые в случае сильно вытянутых неоднородностей дают результаты, существенно отличающиеся от результатов классической теории ДТР.

Одним из механизмов дальнего загоризонтного проникновения сигналов является рассеяние радиоволн на турбулентных неоднородностях тропосферы. Начиная с работ Букера и Гордона [1] при расчете возникающих при этом полей рассеяние считается слабым, что позволяет ограничиться приближением однократного переотражения. Полученные результаты (см., например, [2]) в ряде случаев плохо согласуются с экспериментальными данными по дальнему тропосферному распространению, в частности, дают неверные зависимости от частоты, от дальности, а также существенно заниженные значения интенсивности принимаемого сигнала.

Одной из возможных причин проникновения в область тени сигналов более высокой интенсивности могут явиться многократные перерассеяния на флуктуациях диэлектрической проницаемости тропосферы. Действительно, хотя рассеяние является слабым (согласно формулам теории ДТР [2] однократно рассеяное поле определяется спектральной плотностью флуктуаций  $\Phi_\epsilon$ , которая пропорциональна квадрату структурной постоянной  $C_\epsilon^2 \ll 1$ ), результат переотражений более высокой кратности может оказаться не малым за счет того, что для них существенно уменьшается угол рассеяния  $\theta$ , входящий в  $\Phi_\epsilon$  в виде  $(\sin \theta/2)^{-11/3}$ . Кроме того, лучи, испытывающие большее число изломов, распространяются в более низких слоях атмосферы, где интенсивность однократного рассеяния выше, так как в реальной тропосфере  $C_\epsilon$  заметно убывает с высотой.

Учет многократных рассеяний при расчете интенсивности поля, распространяющегося в среде со случайными неоднородностями, может быть проведен приближенно путем решения уравнения переноса лучистой энергии. В случае, когда индикатриса рассеяния в среде сильно вытянута в направлении падающего луча и можно считать, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  имеет компоненты  $\mathbf{k} = \{k, \mathbf{x}\}$ , где  $\mathbf{x}$  — поперечная к этому направлению проекция, уравнение переноса упрощается и имеет вид [3] (малоугловое приближение)

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x, R, \mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \nabla_R J(x, R, \mathbf{x}) + \alpha J(x, R, \mathbf{x}) = \\ = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J(x, R, \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $J(x, \mathbf{R}, \mathbf{x})$  — интенсивность излучения в точке  $(x, \mathbf{R})$ , рас пространяющаяся в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ ,  $\alpha$  — коэффициент экстинкции (показатель полного ослабления),  $f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  — индикатриса рассеяния, которая выражается через спектральную плотность флуктуаций  $\Phi_\varepsilon$ :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\pi k^2}{2} \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{x}),$$

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x, \rho) \exp[i(q_x x + q_\perp \rho)] dx d^2 \rho, \quad (2)$$

$$B_\varepsilon(x, \rho) = \langle \varepsilon_1(x_1, \rho_1) \varepsilon_1(x_1 + x, \rho_1 + \rho) \rangle,$$

$\varepsilon_1(x, \rho)$  — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости среды.

Для случая неограниченного пространства уравнение (1) может быть решено в общем виде для произвольной индикатрисы рассеяния и при произвольном начальном (при  $x = 0$ ) распределении интенсивности [3, 4].

При расчете интенсивностей полей, распространяющихся в реальной тропосфере, необходимо учесть влияние поверхности Земли. Будем считать, что в области, расположенной над этой поверхностью (пусть ее уравнение  $z = \zeta(x, y)$ ), лучевая интенсивность  $J(x, \mathbf{R}, \mathbf{x})$  описывается тем же уравнением (1), что и в свободном пространстве [5]. Это уравнение необходимо теперь дополнить граничным условием для  $J$  при  $z = \zeta(\mathbf{R})$ . Будем также считать, что Земля является идеально отражающей, т. е. что

$$J(x, y, z = \zeta(x, y); \mathbf{x}_{\text{пад}}) = J(x, y, z = \zeta(x, y); \mathbf{x}_{\text{отр}}), \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}_{\text{пад}}$  и  $\mathbf{x}_{\text{отр}}$  — поперечные проекции волновых векторов падающего и зеркально отраженного лучей, связанные условием зеркальности отражения

$$\mathbf{x}_{\text{отр}} = \mathbf{x}_{\text{пад}} - 2N(N \mathbf{x}_{\text{пад}})$$

( $N$  — внешняя нормаль к поверхности  $z = \zeta(x, y)$ ). Тогда задача о вычислении интенсивности поля, распространяющегося в турбулентной атмосфере над поверхностью Земли, сводится к нахождению величины  $J(x, \mathbf{R}, \mathbf{x})$ , которая

- 1) при  $z < \zeta(x, y)$  тождественно равна нулю;
- 2) при  $z > \zeta(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1);
- 3) при  $z = \zeta(x, y)$  удовлетворяет граничному условию (3);
- 4) при  $x = 0$  удовлетворяет начальному условию

$$J(x = 0, \mathbf{R}, \mathbf{x}) = J_0(\mathbf{R}, \mathbf{x}), \quad (4)$$

где  $J_0(\mathbf{R}, \mathbf{x})$  — распределение интенсивности в источнике, расположенном в плоскости  $x = 0$ .

От уравнения (1) с граничным условием (3) и начальным условием (4) можно перейти к следующему интегральному соотношению:

$$J(x, \mathbf{R}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{R}' d\mathbf{x}' J_0(\mathbf{R}', \mathbf{x}') \theta(z') \times \\ \times \tilde{\varphi}\left(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{x}'}{k} x, \mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) + \int_0^x d\xi \int d\mathbf{x}'_z \frac{\mathbf{x}'_z}{k} \times$$

$$\times J(x - \xi, y, z = \xi(x, y), \mathbf{x}') \tilde{\varphi} \left( \xi, R - \frac{\mathbf{x}'}{k} \xi, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right), \quad (5)$$

$$\tilde{\varphi}(x, R, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, q, \rho) \exp(iqR - i\mathbf{x}\rho) dq d\rho,$$

$$\varphi(x, t, \rho) = \exp \left\{ \frac{\pi k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(0, q) dq \int_0^x \left[ \exp \left[ iq \left( \rho + \frac{t}{k} \xi \right) \right] - 1 \right] d\xi, \right.$$

$$\theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ 1 & \text{при } z > 0 \end{cases}.$$

Наиболее просто искомая интенсивность определяется из соотношения (5) при плоской границе раздела  $z = \zeta(x, y) = 0$ . В этом случае использование условия  $J(z < 0) = 0$  позволяет, не решая интегрального уравнения, выразить входящий в правую часть (5) интеграл от неизвестной величины  $J$  через заданные функции, т. е. тем самым найти  $J(x, R, \mathbf{x})$ . Действительно, так как  $J(x, R^*, \mathbf{x}) = 0$  ( $R^* = (y, -z)$ ),

$$\begin{aligned} & \int_0^x d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}'_z \frac{\mathbf{x}'_z}{k} J(x - \xi, y, z = 0, \mathbf{x}') \tilde{\varphi} \left( \xi, R^* - \frac{\mathbf{x}'}{k} \xi, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right) = \\ & = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dR' d\mathbf{x}' J_0(R', \mathbf{x}') \theta(z') \tilde{\varphi} \left( x, R^* - R' - \frac{\mathbf{x}'}{k} x, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right), \end{aligned} \quad (6)$$

то, воспользовавшись четностью функции  $\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(x, R, \mathbf{x}) = \tilde{\varphi}(x, -R, -\mathbf{x}))$ , из (5) и (6) несложно получить

$$\begin{aligned} J(x, R, \mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dR' d\mathbf{x}' J_0(R', \mathbf{x}') \theta(z') \times \\ & \times \left\{ \tilde{\varphi} \left( x, R - R' - \frac{\mathbf{x}'}{k} x, \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right) + \tilde{\varphi} \left( x, -R - R' - \frac{\mathbf{x}'}{k} x, -\mathbf{x} - \mathbf{x}' \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Антенна, расположенная в точке с координатами  $(x, R)$  и имеющая диаграмму направленности  $Y_1(\mathbf{x})$ , принимает энергию

$$I(x, R) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x, R, \mathbf{x}) Y_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Если считать, что источник с диаграммой направленности  $Y_0(\mathbf{x})$  расположен в точке  $(x = 0, R = 0)$ , то на расстоянии  $L$  от него искомая интенсивность имеет вид

$$\begin{aligned} I(L) &= \frac{1}{8\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\rho dt Y_1(\mathbf{x}) Y_0(\mathbf{x}') \exp \left[ -i\mathbf{x}\rho + i\mathbf{x}_1 \left( \rho + \frac{t}{k} L \right) \right] \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{\pi k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_s(0, q) dq \int_0^L \left[ \exp \left[ iq \left( \rho + \frac{t}{k} \xi \right) \right] - 1 \right] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как указывалось выше, при выводе формулы (8) поверхность Земли заменялась плоскостью  $z=0$ . Так как в использованном здесь мало-



угловом приближении уравнения переноса мы с самого начала пренебрегаем дифракционными эффектами, такое упрощение не может привести к существенным отличиям от реальной ситуации (сферическая Земля). Действительно, наиболее серьезный его недостаток носит чисто «геометрический» характер: в плоской модели мы не учитываем тот факт, что заштрихованная на рисунке область находится под поверхностью и не участвует в перерасеянии. Это обстоятельство можно частично учесть путем соответствующего выбора диаграммы направленности источника и приемника. Для этого будем считать, что функции  $Y_0(\mathbf{x})$  и  $Y_1(\mathbf{x})$  симметричны ( $Y_1(\mathbf{x}) = Y_0(-\mathbf{x})$ ) и тождественно равны нулю в интервале углов  $\theta$ , которые бы затенялись сферической поверхностью (см. рисунок)

$$Y_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x_y^2}{k^2 \gamma^2} - \frac{x_z - k \theta_0}{k \gamma}\right) & \text{при } x_z < k \theta_0, \\ 0 & \text{при } x_z > k \theta_0 \end{cases} \quad (9)$$

$\gamma$  — эффективная ширина диаграммы направленности,  $\theta_0 = L/2a$ ,  $L$  — расстояние между источником и точкой наблюдения,  $a$  — радиус Земли.

Для дальнейших вычислений зададим входящий в (8) пространственный спектр неоднородностей  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$  в виде

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{0,033 l_0^{8/3} l_z C_\varepsilon^2 \exp(-l_m^2 x^2)}{[1 + l_0^2(x_x^2 + x_y^2) + l_z^2 x_z^2]^{11/6}}.$$

Здесь  $l_m$  — внутренний, а  $l_0$  и  $l_z$  — соответственно продольный и поперечный внешние масштабы турбулентности. Такая форма спектра учитывает возможную анизотропию атмосферных флуктуаций, а в случае изотропных неоднородностей ( $l_0 = l_z$ ) в инерционном интервале дает для структурной функции хорошо известный закон «двух третей»

$$D(\rho) = 2 [B_\varepsilon(0) - B_\varepsilon(\rho)] = C_\varepsilon^2 \rho^{2/3}.$$

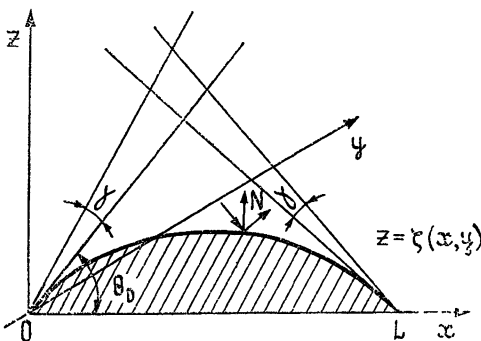


Рис. 1.

Формула (8) является, фактически, результатом приближенного суммирования бесконечного числа рассеяний. Приближение здесь заключается в том, что, во-первых, каждый акт рассеяния учитывается в первом приближении теории возмущений (индикатриса рассеяния пропорциональна спектру неоднородностей), во-вторых, при суммировании отдельные рассеяния считаются полностью некогерентными и складываются по интенсивности без учета интерференции.

Ряд по кратности рассеяния получается из (8) разложением подынтегральной экспоненты по  $C_\varepsilon^2$ . Если  $p = \theta_0/\gamma \gg 1$  и антенная диаграмма направленности является узкой по сравнению с шириной индикатрисы рассеяния на неоднородностях

$$k \gamma l_z \ll 1, \quad k \gamma l_0 \ll 1,$$

то первый член этого разложения  $J_1 \sim C_e^2$  дает результат обычной теории ДТР

$$I_1 = \frac{J_1}{J_{с.п}} = \frac{\pi^{5/2} 0,033 l_0^{8/3} l_z C_e^2 k^4 a \gamma^3}{\sqrt{2} [1 + 2k^2 \theta_0^2 l_z^2]^{11/6}} \quad (12)$$

( $J_{с.п}$  — интенсивность поля свободного пространства,  $I_1$  — функция ослабления).

Требование малости второго, пропорционального  $C_e^4$  члена в указанном разложении по сравнению с  $J_1$  позволяет получить условие применимости приближения однократного рассеяния:

$$\sigma_e^2 k^2 L l_0 \ll 1. \quad (13)$$

В обратном предельном случае, рассчитывая интенсивность полей при дальнем тропосферном распространении, необходимо учитывать многократные рассеяния.

Подставляя (9) и (10) и вычисля асимптотику входящих в (8) интегралов, можно получить

$$I(L) = \frac{3}{2\pi n_z (1 + p/n_z)^2}, \quad (14)$$

$$p = \frac{\theta_0}{\gamma} = \frac{L}{2a\gamma}, \quad n_z = \frac{0,01 \alpha^{5/3} C_e^2 L}{\gamma^2 l_m^{1/3}},$$

$\alpha = l_0/l_z$  — параметр анизотропии.

Пределы применимости формулы (14) ограничиваются неравенством

$$3k^2 LC_e^2 l_m^{5/3} \alpha^{5/3} \gg 1. \quad (15)$$

Если флуктуации диэлектрической проницаемости являются изотропными ( $\alpha = 1$ ), условие (15) в сантиметровом диапазоне радиоволн выполняется, начиная с расстояний  $L = 10^6$  км (при оценках считаем  $C_e = 10^{-6} \text{ см}^{-1/3}$ ,  $l_m \sim 1 \div 3 \text{ см}$ ). Это означает, что в данном случае приближением однократного рассеяния для наземных трасс можно пользоваться практически всегда.

Если же на трассе распространения присутствуют сильно вытянутые неоднородности с параметром анизотропии  $\alpha \sim 10^3$  [6], то из неравенств (13), (15) следует, что уже начиная с  $L = 100$  км результат теории возмущений (приближение однократного рассеяния) оказывается неприменимым и при расчете интенсивности необходимо пользоваться формулой (14), учитывающей многократные переизлучения на тропосферных неоднородностях.

При этом зависимость от расстояния оказывается существенно более медленной, а уровни сигнала значительно выше, чем в приближении однократного рассеяния. Например, для  $\lambda = 3 \text{ см}$ ,  $l_z = 10 \text{ м}$ ,  $\alpha = 10^3$ ,  $C_e = 10^{-6} \text{ см}^{-1/3}$ ,  $\gamma = 10^{-2}$  на расстоянии  $L = 400 \text{ км}$  функция ослабления плазмы, и при  $V \rightarrow 0$  (6) совпадает с результатами, полученными значениях параметров получается  $-70 \text{ дБ}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Букер, W. Gordon, Proc. IRE, 38, № 4, 401 (1959)
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1975.
3. Л. С. Долин, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 2, 380 (1964).

4. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
5. А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 228 (1976).
6. А. А. Стоцкий, Радиотехника и электроника, 17, № 11, 2277 (1972).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
24 апреля 1979 г.

## MULTIPLE SCATTERING IN FAR TROPOSPHERE PROPAGATION

*V. E. Morozov, V. D. Freilikher, I. M. Fuks*

In the frames of small-angular approximation of the transfer equation the effect of multiple scattering by the atmosphere turbulence on the signal levels are taken into account in the far troposphere propagation (FTP). Formulas have been derived for the intensity which for the case of strong prolonged inhomogeneities give result being different from that of the classical FTP theory.

## Аннотации депонированных статей

УДК 539.294

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИСКУССТВЕННО ГИРОТРОПНЫХ СРЕД

*Е. А. Скирта, Н. А. Хижняк*

Рассматривается рассеяние электромагнитных волн в искусственно гиротропных средах, образованных правильными пространственными решетками. В узлах решеток расположены сложные рассеивающие центры, каждый из которых представляет систему трех диэлектрических цилиндров с некопланарными осями. Анизотропия искусственных диэлектриков обусловлена отсутствием у систем рассеивающих элементов центра и плоскости симметрии. Получены выражения для тензоров эффективных диэлектрических и магнитных проницаемостей, векторов гирации, показателя преломления рассматриваемой структуры. Исследуется зависимость гиротропных свойств среды, образованной кубической пространственной решеткой, от симметрии рассеивающих центров. Показано, что такой диэлектрик обладает свойством поворота плоскости поляризации электромагнитной волны на выходе из слоя определенной толщины.

Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 3760-79. Деп. от 31 октября 1979 г.

УДК 621.378.3

## О МЕХАНИЗМАХ УШИРЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КВАНТОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ПУЧКОМ ВЛЕТАЮЩИХ АТОМОВ

*О. А. Кочаровская, В. Б. Цареградский*

Предложен последовательно квантовый подход к теории спектральной ширины линии квантового генератора с пучком влетающих атомов. Найдено выражение для спектральной ширины линии и дана его физическая интерпретация. Показано, что квантовомеханическая неопределенность дипольных моментов влетающих атомов приводит к уширению спектральной линии и определяет предельно возможную стабильность квантового генератора.

Квантовые генераторы с пучком атомов (молекул), влетающих в резонатор, обладают исключительными возможностями для получения спектрально чистых колебаний электромагнитного поля. В качестве примера упомянем водородные квантовые генераторы, стабильность которых достигает  $10^{-14}$  [1]. Проводимые в настоящее время интенсивные исследования по повышению стабильности таких генераторов ставят вопрос о ее предельно достижимой величине.

Предельная стабильность определяется естественными флуктуациями, и для квантовых генераторов корректное выражение ее величины может быть получено только на основе квантового рассмотрения. Для твердотельных и газовых лазеров последовательно квантовый подход к теории флуктуаций был развит в работах [2-4]. Разработка полуклассических методов расчета квантовых флуктуаций и детальное исследование флуктуаций в твердотельных и газовых лазерах в различных режимах генерации проведены в монографии [5]. Однако квантовые флуктуации в пучковых генераторах в этих работах не рассматривались. Выполненные ранее исследования по ширине спектральной линии пучкового генератора носили, скорее всего, оценочный характер, и полученные в них результаты не имели ясной физической интерпретации [6-9]. В связи с этим представляется целесообразным вновь вернуться к анализу данного вопроса.

В предлагаемой заметке изложен последовательно квантовый подход к теории спектральной ширины линии пучкового квантового генератора и впервые отмечен механизм уширения линии из-за квантовомеханической неопределенности дипольных моментов влетающих атомов.

### 1. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСЧЕТ ШИРИНЫ ЛИНИИ

Исследуемая модель квантового генератора описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_m \hbar \varepsilon \hat{a}_{2m}^+ \hat{a}_{2m} + \hbar \omega_c \hat{b}^+ \hat{b} + i \hbar \mu \sum_m (\hat{b}^+ \hat{a}_{1m}^+ \hat{a}_{2m} - \hat{b} \hat{a}_{2m}^+ \hat{a}_{1m}) + \sum_y \hbar \omega_y \hat{q}_y^+ \hat{q}_y + i \hbar \sum_y (\chi_y \hat{b}^+ \hat{q}_y - \chi_y^* \hat{b} \hat{q}_y^+), \quad (1)$$

в котором отдельные слагаемые представляют соответственно двухуровневую атомную систему, резонансную моду резонатора, взаимодействие атомов с резонансной модой поля, стенки резонатора и взаимодействие поля со стенками.

В (1) приняты следующие обозначения:  $\hat{a}_{im}^+$ ,  $\hat{a}_{im}$  — операторы рождения и уничтожения  $m$ -го атома на  $i$ -м энергетическом уровне ( $i=1, 2$ ),  $\hat{b}^+$ ,  $\hat{b}$  — операторы рождения и уничтожения фотона в резонансной моде поля,  $\hat{q}_v^+$ ,  $\hat{q}_v$  — операторы рождения и уничтожения для  $v$ -го осциллятора стенок. Константами  $\varepsilon$ ,  $\omega_c$  обозначены соответственно частоты атома и резонансной моды,  $\mu$  и  $\nu$ , — параметры взаимодействия моды с атомом и  $v$ -м «стеночным» осциллятором,  $\hbar$  — постоянная Планка. Для удобства вычислений стенки резонатора моделируются бесконечной совокупностью не взаимодействующих между собой «стеночных» осцилляторов, которые в момент времени, предшествующий включению взаимодействия поля со стенками, предполагаются находящимися в термодинамическом равновесии при температуре  $T$ . Как уже неоднократно отмечалось [10, 11], подобная модель реалистично описывает потери и тепловое излучение резонатора.

При исследовании флуктуаций в твердотельных и газовых лазерах [2-4] в гамильтониан системы вводилось взаимодействие активных атомов с неким термостатом — континуумом незлазерных мод. Это приводило к появлению в лазерных уравнениях констант релаксации и флуктуационных сил, которые обуславливали, в конечном итоге, принципиально неустранимые шумы, называемые спонтанными или квантовыми. Поскольку в пучковых генераторах отсутствует спонтанное излучение в незлазерные моды поля, в гамильтониан (1) не вошло взаимодействие атомов с термостатом. Следовательно, механизм квантовых флуктуаций здесь иной, чем в твердотельных и газовых лазерах. Он будет выяснен в разд. 2.

Ниже будем использовать в качестве динамических переменных операторы рождения и уничтожения поля  $\hat{b}^+$ ,  $\hat{b}$ , поляризации  $\hat{\alpha}_m^+ = \hat{a}_{2m}^+ \hat{a}_{1m}$ ,  $\hat{\alpha}_m = \hat{a}_{1m} \hat{a}_{2m}^+$  и инверсной разности населенностей  $\hat{\sigma}_m = \hat{a}_{2m}^+ \hat{a}_{2m} - \hat{a}_{1m}^+ \hat{a}_{1m}$ . Для них, исходя из гамильтониана (1), запишем систему гейзенберговских уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{b}^+}{dt} &= i\omega_c \hat{b}^+ + \mu \sum_m \hat{\alpha}_m^+ + \sum_v \nu \hat{q}_v^+, \\ \frac{\partial \hat{\alpha}_m^+}{\partial t} + v_m \frac{\partial \hat{\alpha}_m^+}{\partial z} &= i\varepsilon \hat{\alpha}_m^+ + \mu \hat{b}^+ \hat{\sigma}_m, \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_m^+}{\partial t} + v_m \frac{\partial \hat{\sigma}_m^+}{\partial z} &= -2\mu (\hat{\alpha}_m^+ \hat{b} + \hat{\alpha}_m \hat{b}^+), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z$  — координата вдоль оси резонатора,  $v_m$  — скорость  $m$ -го атома по оси  $z$ .

На входе резонатора при  $z=0$  заданы граничные условия

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_m^+(t, z)|_{z=0} &= \hat{\alpha}_{m0}^+(t), \\ \hat{\sigma}_m(t, z)|_{z=0} &= \hat{\sigma}_{m0}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что зависимость гейзенберговских операторов  $\hat{\alpha}_{m0}^+(t)$  и  $\hat{\sigma}_{m0}$  от времени определяется свободным движением без учета взаимодействия атома с полем резонатора.

Исключая из системы (2) переменные термостата (стенок резонатора) с помощью общего метода, изложенного в [11], и усредняя динамические переменные системы по функции распределения по временам взаимодействия  $f(\tau)^*$  с использованием граничных условий (3), получаем систему последовательно квантовых уравнений генератора с пучком влетающих атомов\*\*:

$$\frac{d\hat{b}^+}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)\hat{b}^+ + \mu N_0 \bar{\tau}_0 \bar{\alpha}^+ + \hat{F}_{b^+}(t); \quad (4a)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}^+}{dt} = (i\varepsilon - 1/\bar{\tau}_0)\bar{\alpha}^+ + \mu \hat{b}^+ \bar{\sigma} + \frac{\hat{\alpha}_0^+(t)}{\bar{\tau}_0}; \quad (4б)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\tau}_0}\bar{\sigma} - 2\mu(\bar{\alpha}^+ \hat{b}^+ + \hat{b}^+ \bar{\alpha}) + \frac{\hat{\sigma}_0(t)}{\bar{\tau}_0}. \quad (4в)$$

Черта над переменными  $\hat{\alpha}^+$  и  $\hat{\sigma}$  обозначает усреднение по  $f(\tau)$ :

$$\bar{\alpha}^+(t) = \frac{1}{N_0 \bar{\tau}_0} \sum_m \hat{\alpha}_m^+ = \int_0^\infty \hat{\alpha}^+(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{N_0 \bar{\tau}_0} \sum_m \hat{\sigma}_m = \int_0^\infty \hat{\sigma}(t, \tau) f(\tau) d\tau^{***}.$$

Здесь  $N_0$  — число атомов, поступающих на вход резонатора в одну секунду;  $\omega_0 = \omega_c + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\gamma$  и  $\hat{F}_{b^+}(t)$  — соответственно смещение резонансной частоты поля, константа затухания поля и флуктуационная сила, обусловленные воздействием термостата.

В работе [11] в результате решения задачи о взаимодействии выделенной моды излучения с бесконечной совокупностью осцилляторов найдены явные выражения для  $\Delta\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\hat{F}_{b^+}(t)$ . В нашем случае задача несколько усложняется наличием взаимодействия резонансной моды поля с двухуровневыми атомами, придающим системе в целом нелиней-

\* В качестве  $f(\tau)$  используется функция  $1/\bar{\tau}_0 \exp(-\tau/\bar{\tau}_0)$ , где  $\tau = z/v_m$  — время взаимодействия поля с  $m$ -м атомом,  $\bar{\tau}_0$  — среднее время пребывания атома в резонаторе.

\*\* Отметим, что в работах [2-4] уравнения аналогичного вида получены для твердотельных и газовых лазеров. Однако причины появления констант затухания и флуктуационных сил в (4б), (4в) иные, нежели в [2-4].

\*\*\* В последних двух формулах учтено, что в фиксированный момент времени  $t$  атомы, взаимодействовавшие с полем в течение времени  $\tau$ , физически не различимы.

Следовательно, операторы  $\hat{\alpha}_m^+(t, z)$  (или  $\hat{\sigma}_m(t, z)$ ) одинаковы для всех этих атомов, независимо от их скорости  $v_m$  и координаты  $z$ , так что можно записать  $\hat{\alpha}_m^+(t, z) = \hat{\alpha}^+(t, \tau)$  (или  $\hat{\sigma}_m(t, z) = \hat{\sigma}(t, \tau)$ ). Тогда сумма операторов тех  $m$ -х атомов, время взаимодействия которых с полем к моменту времени  $t$  принадлежит интервалу от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ , представима в виде  $\hat{\alpha}^+(t, \tau) f(\tau) d\tau$  (или  $\hat{\sigma}(t, \tau) f(\tau) d\tau$ ).

ный характер. Однако выражения для  $\Delta\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\hat{F}_{b+}(t)$  оказываются совпадающими с результатом работы [11], что обусловлено линейностью гамильтониана взаимодействия с термостатом по переменным поля. При определенных условиях на величину и характер взаимодействий [11], заведомо реализуемых в квантовых генераторах, корреляторы флуктуационных сил сводятся к известному виду [3, 4, 11]:

$$\langle \hat{F}_{b+}(t) \hat{F}_b(t') \rangle = 2\gamma n_T \delta(t-t') - \frac{i\gamma}{\pi} \frac{P}{t-t'}, \quad (5)$$

$$\langle \hat{F}_b(t) \hat{F}_{b+}(t') \rangle = 2\gamma (n_T + 1) \delta(t-t') - \frac{i\gamma}{\pi} \frac{P}{t-t'},$$

где  $n_T = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}$  — число квантов теплового излучения в генерируемой моде поля,  $k$  — постоянная Больцмана,  $P$  — символ главного значения интеграла, угловые скобки означают усреднение по матрице плотности всей системы.

В процессе усреднения по временам взаимодействия с учетом граничных условий (3) в уравнениях (4) появились операторы  $\hat{\alpha}_0^+(t)$ ,  $\hat{\alpha}_0(t)$ ,  $\hat{\sigma}_0(t)$ . Поскольку на вход резонатора атомы поступают в инвертированном состоянии, то квантовые средние этих операторов равны  $\langle \hat{\alpha}_0^+(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{\alpha}_0(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{\sigma}_0(t) \rangle = 1$ . В работах [7, 8, 12] усреднение по  $f(\tau)$  проводилось в уравнениях для квантовомеханических ожидаемых. Поэтому члены, аналогичные нашим  $\hat{\alpha}_0^+(t)$ ,  $\hat{\alpha}_0(t)$ , выпали из рассмотрения.

В приближении  $\gamma \gg \tau_0^{-1}$ , отвечающем реальному соотношению констант релаксации в пучковых генераторах, и при условии точного резонанса ( $\omega_0 = \varepsilon$ ) из системы (4) нетрудно найти ширину спектральной линии. Для этого введем медленные переменные  $\tilde{b}^+(t) = \hat{b}^+(t) \times \exp(-i\omega_0 t)$ ,  $\tilde{\alpha}^+(t) = \hat{\alpha}^+(t) \exp(-i\omega_0 t)$ . Тогда, пренебрегая в (4а) членом  $\frac{d\tilde{b}^+}{dt}$  по сравнению с  $\gamma \tilde{b}^+(t)$ , разрешая (4а) относительно  $\tilde{\alpha}^+(t)$  и подставляя результат в (4б), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\tilde{b}^+}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \tilde{b}^+ + \frac{\mu^2 N_0 \tau_0}{\gamma} \tilde{b}^+ \bar{\sigma} + \frac{\mu N_0}{\gamma} \tilde{\alpha}_0^+(t) + \frac{\tilde{F}_{b+}(t)}{\tau_0 \gamma}, \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \bar{\sigma} - \frac{2}{N_0 \tau_0} [\gamma (2\tilde{b}^+ \hat{b} + 1) - \hat{F}_{b+} \hat{b} - \hat{F}_b \hat{b}^+] + \frac{\hat{\sigma}_0}{\tau_0}.$$

Согласно [2, 3, 13], ширина линии определяется фазовыми флуктуациями поля;

$$\Delta\nu t = \frac{1}{2} \langle [\varphi(t) - \varphi(0)]^2 \rangle, \quad (7)$$

поэтому перейдем в уравнениях (6) к переменным амплитуды и фазы поля\*:

$$\tilde{\hat{b}}^+ = (r_0 + \hat{\rho}(t)) \hat{e}^{i\varphi(t)}. \quad (8)$$

Осуществляя далее квантовомеханическую квазилинеаризацию [2, 3] системы (6), находим стационарные значения инверсной разности населенностей и амплитуды поля

$$\sigma_{st} = \frac{\gamma}{\tau_0^2 \mu^2 N_0}, \quad (9)$$

$$r_0 = \frac{1}{2 \tau_0 \mu} \sqrt{\eta - 1}$$

и искомое соотношение для фазы поля

$$\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\gamma r_0 \tau_0} \left[ \int_0^t \text{Im}(\hat{F}_{b^+} e^{-i\hat{\varphi}}) dt + \int_0^t \mu N_0 \tau_0 \times \right. \\ \left. \times \text{Im}(\tilde{\hat{\alpha}}_0^+ e^{-i\hat{\varphi}}) dt \right]. \quad (10)$$

Здесь  $\eta = \sigma_v / \sigma_c$  — параметр генерации ( $\eta > 1$ ),  $\sigma_v = N_0 \tau_0$ ,  $\sigma_c = \gamma / \mu^2 \tau_0$ .

Из соотношения (10) (см. также (4)) следует, что член  $\tilde{\hat{\alpha}}_0^+(t) / \tau_0$  эквивалентен некоторой флуктуационной силе. Для расчета ширины линии необходимо знание коррелятора этой силы, вычисление которого приведено в Приложении. Используя (5), (7), (10) и (13) (см. Приложение), находим спектральную ширину линии квантового генератора с пучком влетающих атомов

$$\Delta \nu = \frac{\hbar \omega}{P \tau_0^2} \left[ n_T + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta \right], \quad (11)$$

где  $P = 2r_0^2 \gamma \hbar \omega$  — мощность генерации. Первые два члена в выражении (11) обусловлены флуктуационной силой  $\hat{F}_{b^+}$ . Последнее слагаемое определяется вторым членом формулы (10).

Отметим, что решение системы (4) легко найти и в случае произвольного соотношения между константами релаксации методом, аналогичным изложенному в [12]. Причем, операторы амплитуды и фазы поляризации могут быть введены по аналогии с введением дираковских операторов амплитуды и фазы электромагнитного поля, т. е. следующим образом:  $\hat{\alpha}^+(t) = \hat{A}(t) e^{i\hat{\theta}(t)}$ ,  $\hat{\alpha}(t) = e^{-i\hat{\theta}(t)} \hat{A}(t)$ . Введенные операторы  $e^{i\hat{\theta}}$ ,  $e^{-i\hat{\theta}}$  оказываются унитарными, поскольку в режиме стационарной генерации двухуровневая система находится в состоянии, близком к собственному состоянию оператора действительной поляризации  $\hat{P}$  (где  $\hat{P} = d(\hat{\alpha}^+ + \hat{\alpha})$ ,  $d$  — дипольный момент атома).

\* Использование дираковских операторов амплитуды и фазы оправдано при решении нашей задачи, поскольку число фотонов в поле излучения даже на пороге генерации много больше единицы, т. е. примесь электромагнитного вакуума в данном состоянии незначительна, что и обеспечивает унитарность операторов  $e^{i\hat{\varphi}}$ ,  $e^{-i\hat{\varphi}}$  [14].



В итоге получается следующее выражение для спектральной ширины линии:

$$\Delta\nu = \frac{\hbar \omega}{P \tau_0^2} \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1/\tau_0)^2} \left[ n_T + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \eta \right]. \quad (12)$$

При условии  $\gamma \gg \tau_0^{-1}$ , т. е. для пучкового генератора, формула (12) переходит в выражение (11). При обратном соотношении констант релаксации ( $\tau_0^{-1} \gg \gamma$ ), выражение (12) формально сводится к известному результату для ширины линии газового лазера [2, 3, 5].

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Природа первых двух членов в (11), (12) достаточно очевидна. Их появление обусловлено взаимодействием резонансной моды поля с бесконечным числом степеней свободы стенок резонатора. Первое слагаемое — тепловой шум стенок — может быть сколь угодно уменьшено понижением эффективной температуры термостата. Второе слагаемое обязано взаимодействию с нулевыми колебаниями «стеночных» осцилляторов и представляет собой тот шум, который существовал бы в результате взаимодействия со стенками, находящимися при нулевой температуре.

Наибольший интерес вызывает интерпретация последнего слагаемого. Его появление обязано учету операторов  $\hat{\alpha}_0^+(t)$ ,  $\hat{\alpha}_0(t)$ , фактически, учету того обстоятельства, что среднее значение квадрата дипольного момента атома на входе резонатора не равно нулю (см. Приложение). Таким образом, последнее слагаемое обусловлено квантовой неопределенностью дипольных моментов атомов на входе резонатора. Утверждение является парадоксальным. Действительно, квантовая неопределенность и флуктуации — два разных механизма статистики (квантовая неопределенность отражает корпускулярно-волновой дуализм микрообъектов; флуктуации обусловлены воздействием на динамическую систему другой системы — с бесконечным числом степеней свободы). В связи с этим, они по-разному проявляют себя в эксперименте; в частности, если флуктуации проявляются при длительном наблюдении характеристик одной частицы, находящейся в контакте с термостатом (например, броуновская частица), то для обнаружения квантовой неопределенности необходим ансамбль частиц в одинаковом состоянии. Поэтому, казалось бы, естественно, что в работах Хакена и других по твердотельным и газовым лазерам ширина линии определялась лишь флуктуациями (см. ниже).

Объяснение полученного выше результата состоит в том, что в генераторах с пучком влетающих атомов мы действительно имеем ансамбль квантовых систем. В самом деле, использование пучка приводит к непрерывной сменяемости атомов, участвующих в генерации. Благодаря этому начальная квантовая неопределенность дипольных моментов атомов реализуется как дополнительное уширение линии. Физический смысл среднего времени взаимодействия  $\tau_0$  состоит в том, что оно является временем полной замены ансамбля атомов, участвующих в генерации.

Сопоставим полученные результаты с результатами предыдущих работ [6–9]. В этих работах также ставился вопрос о влиянии квантовых эффектов на ширину линии излучения; при этом предполагалось, что действие квантовых эффектов проявляется через спонтанное излучение. Для учета таких эффектов в работе [8] в уравнение для поля

вводилась сторонняя флуктуационная сила\*, и оценка ширины линии проводилась на основе флуктуационно-диссипационной теоремы, применимость которой к исследуемой системе оставалась не доказанной. Как справедливо отмечалось в работах [7, 9], влияние квантовых флуктуаций на ширину линии должно учитываться автоматически в процессе решения квантовых уравнений и не требует введения сторонних флуктуационных сил. Вместе с тем результат работы [8] совпадает с (11). Причина этого совпадения теперь может быть легко прослежена. Действительно, рассмотрим классический аналог нашей системы, считая, что диполи, вошедшие в резонатор в разные моменты времени, имеют случайную фазу. Тогда процесс выхода атомов из резонатора и влета новых атомов, излучающих с другой фазой, будет эквивалентен процессу упругих соударений, приводящих к сбою фазы излучения атомов с характерным временем  $\tau_0$ . Такие соударения можно было бы учесть в рамках полуфеноменологической теории введением атомного резервуара в модель квантового генератора. Тогда в уравнении для усредненных по квантовому ансамблю поляризаций следовало бы ввести флуктуационные силы с корреляторами вида (ср. (13), см. Приложение)

$$\langle \hat{F}_{\alpha+}(t) \hat{F}_{\alpha}(t') \rangle = \frac{\sigma V}{\tau_0} \delta(t - t').$$

В результате мы получили бы то же самое выражение для ширины линии. Выполнимость флуктуационно-диссипационной теоремы для такой эквивалентной системы очевидна.

Нельзя не отметить формальное сходство формулы (11) с выражением для ширины спектральной линии твердотельных и газовых лазеров, полученным в [2, 3, 5]. Отличие, казалось бы, состоит лишь в том, что в работе [3] ширина линии определялась не константой затухания поляризации  $T_{\alpha}^{-1}$ , а константой затухания поля  $\gamma$ , как и следовало ожидать (поскольку в газовых лазерах соотношение между константами релаксации имеет вид  $\gamma \ll T_{\alpha}^{-1}, T_{\sigma}^{-1}$ , тогда как в пучковых генераторах  $\gamma \gg \tau_0^{-1} = T_{\alpha}^{-1} = T_{\sigma}^{-1}$ ). Однако последний член в выражении (11) имеет разное происхождение для генераторов с пучком влетающих атомов и для лазеров. Если для генераторов с пучком влетающих атомов его появление вызвано учетом операторного вида граничных условий (т. е. квантовой неопределенностью дипольных моментов атомов на входе системы), то в лазерах он обусловлен введением в гамильтониан (1) взаимодействия двухуровневой системы с атомными резервуарами, учитывающими спонтанное излучение в нелазерные моды поля, столкновения атомов, некогерентность накачки и т. д. Вместе с тем, сходство результатов указывает на возможность их одинаковой интерпретации. Казалось бы, тот факт, что в излучении твердотельных и газовых лазеров участвуют всегда одни и те же атомы, исключает возможность использования для них интерпретации, предложенной для пучковых генераторов. Однако совместное действие накачки (даже при условии ее когерентности) и некоторого некогерентного процесса излучения, по существу, эквивалентно смене ансамбля атомов, участвующих в генерации. В связи с этим универсальность соотношения (11) становится более очевидной.

Фактически наше теоретическое рассмотрение основывается на модели пучкового генератора протонного типа. С точки же зрения прак-

\* В нашей работе член  $\frac{\hat{\alpha}_0^+(t)}{\tau_0}$ , по существу представляющий собой флуктуационную силу, вошел в уравнение для поляризации через граничные условия.

тического использования в качестве стандарта частоты наибольший интерес представляет водородный генератор.

Для увеличения эффективного времени пролета атомов в таком генераторе используется накопительная колба с тефлоновым покрытием. Столкновение атома со стенкой колбы приводит к небольшому сбою фазы излучения атома  $\delta\varphi \ll \pi$ . Поэтому время смены ансамбля по поляризации увеличивается в  $\pi/\delta\varphi$  раз. С учетом этого замечания полученный выше результат применим для водородного генератора.

Интересно сопоставить вклады в ширину линии, обусловленные каждым из трех слагаемых формулы (11). При обычных условиях генерации ( $T \approx 300^\circ\text{K}$ ) основной вклад в ширину линии дает тепловой шум (например, для аммиачного мазера и водородного генератора  $n_T \sim \sim 10^2 \div 10^3$ ), так что параметр генерации  $\eta \ll 2n_T$ , и, в соответствии с формулой (11), стабильность растет с ростом  $\eta$  по закону  $\Delta\nu \sim \sim (\eta - 1)^{-1}$ . Однако, в принципе, тепловой шум может быть сколь угодно уменьшен понижением температуры резонатора, тогда как нулевые колебания «стеночных» осцилляторов и квантовая неопределенность дипольных моментов обуславливают принципиально неустраняемое уширение линии. При  $\eta$  порядка единицы оба этих квантовых эффекта играют примерно одинаковую роль. При дальнейшем превышении порога основной вклад вносится квантовой неопределенностью дипольных моментов, поэтому ширина линии перестает уменьшаться с ростом  $\eta$  и не зависит ни от превышения порога генерации, ни от среднего времени пролета  $\tau_0$ :

$$\Delta\nu_{\text{lim}} = \mu^2 \gamma^{-1}.$$

Таким образом, предельная ширина линии квантового генератора с пучком влетающих атомов определяется действием квантово-статистических законов и оказывается (для аммиачного мазера и водородного генератора) на два-три порядка меньшей, чем ширина линии, обусловленная тепловым шумом.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В процессе вывода системы уравнений (4) при замене суммирования по отдельным атомам на интегрирование по длине резонатора, был опущен атомный индекс  $m$ . Фактически, в выражении (10) вместо члена

$$N_0 \tau_0 \text{Im} \tilde{\alpha}_0^+(t) \quad \text{должен стоять член} \quad \sum_m \text{Im} \tilde{\alpha}_{0m}^+(t),$$

где суммирование производится по всем атомам, находящимся в момент времени  $t$  в резонаторе. Как следует из (7), (10), для определения ширины линии требуется подсчитать следующий коррелятор:

$$K(\tau) = \left\langle \sum_k \tilde{\alpha}_{0k}^+(t) \sum_m \tilde{\alpha}_{0m}^+(t') \right\rangle, \quad \tau = t' - t.$$

Поскольку  $\langle \tilde{\alpha}_{0k}^+(t) \rangle = 0$ , то вклад в  $K(\tau)$  дадут лишь члены с  $k = m$ ,

т. е.  $K(\tau) = \sum_m \langle \tilde{\alpha}_{0m}^+(t) \tilde{\alpha}_{0m}^+(t') \rangle$ . При  $t = t'$  это есть сумма начальных населенностей всех атомов, находящихся в момент времени  $t$  в резонаторе, т. е.  $K(0) = \sigma_V$ .

В связи с тем, что вклад в  $K(\tau)$  дают лишь атомы, не успевшие покинуть резонатор за время  $\tau$  (см. рис. 1), а число их убывает с ростом  $\tau$  по линейному закону (так как атомы движутся в резонаторе

с постоянной скоростью), ясно, что  $K(\tau)$  будет линейно убывать.  $K(\tau) = 0$  при  $\tau = \tau_0$ , что соответствует полной смене атомов, участвующих в генерации. Поэтому корреляционная функция имеет следующий вид (см.: рис. 2):

$$K(\tau) = \sigma_V \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \quad \text{при } |\tau| < \tau_0,$$

$$K(\tau) = 0 \quad \text{при } |\tau| > \tau_0. \quad (13)$$

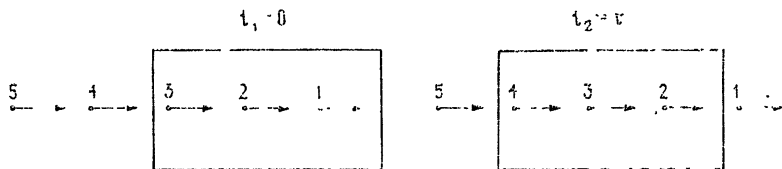


Рис. 1. Вклад в коррелятор  $K(\tau)$  дают только второй и третий атомы.

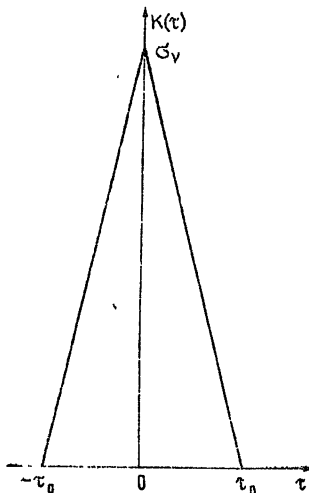


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по лазерам, т. 1, под ред. А. М. Прохорова, изд. Сов. радио, М., 1978.
2. Н. Накен, Zeitschrift für Physik, 190, № 3, 327 (1966).
3. Г. Хакен, В. Вайдлих, сб. Квантовые флуктуации излучения лазера, изд. Мир, М., 1974, стр. 143
4. М. Лэкс, Флуктуации и когерентные явления, изд. Мир, М., 1974.
5. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, под ред. Ю. Л. Климонтовича, изд. Наука, М., 1974.
6. В. С. Троицкий, Изв. вузов — Радиофизика, 2, 374 (1959).
7. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
8. В. Б. Цареградский, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 6, 1134 (1966).
9. А. Н. Ораевский, А. А. Сокова, Тр. ВНИИФТРИ, 3, № 33, 200 (1970).
10. Р. Глаубер, сб. Когерентные состояния в квантовой теории, изд. Мир, М., 1972, стр. 26.
11. С. А. Дягилев, В. Б. Цареградский, Изв. вузов — Радиофизика (в печати); Тезисы докладов на IX Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, ч. 2, Л., 1978.

- 12 В. Б. Цареградский, Изв. вузов — Радиофизика, 7, 1075 (1964).
13. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, изд. Наука, М., 1976.
14. H. Paul, Fortschritte der Physik, 22, № 11, 657 (1974).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
25 декабря 1978 г.

## MECHANISMS OF SPECTRAL LINE BROADENING OF QUANTUM OSCILLATORS WITH A BEAM OF INFLYING ATOMS

*O. A. Kocharovskaya, V. B. Tsaregradskij*

A successive quantum approach is suggested to the theory of spectral line width of a quantum oscillator with a beam of inflying atoms. An expression has been derived for the spectral line width and its physical interpretation is given. It is shown that quantum-mechanical indefiniteness of dipole moments of inflying atoms leads to broadening of the spectral line and defines the limiting possible stability of the quantum oscillator.

---

Институтом прикладной физики АН СССР издан сборник статей «Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах» (отв. редактор В. И. Беспалов). В сборнике дан краткий обзор проблемы обращения волнового фронта в нелинейных оптических процессах и возможностей использования этого явления. Изложены новые результаты по исследованию методов обращения волнового фронта, работе лазерных систем с зеркалами, обращающими волновой фронт. Приведен библиографический перечень литературы по методам обращения волнового фронта в нелинейных оптических процессах и возможностям использования этого явления.

Желающие приобрести сборник могут заказать его по назначенному платежом по адресу: 603600, Горький, ГСП-120, ул. Ульянова, д. 46, ИПФ АН СССР, Городецкой Н. А.

УДК 538.61

## МАГНИТООПТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА В ТОЛСТЫХ СЛОЯХ С РЕГУЛЯРНОЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

*А. М. Морозов, Д. И. Семенцов*

Получены уравнения, описывающие магнитооптическую дифракцию света в толстых слоях с полосовой доменной структурой. Исследован характер дифракционного спектра для «косинусоидального» и «трапецеидального» законов распределения  $M_z$ -составляющей намагниченности в различных областях дифракции Рамана — Ната и Брэгга. Рассмотрено влияние на характер спектра магнитооптической многолучевой интерференции, подтверждаемое данными эксперимента на кристаллах висмут-содержащего граната.

Одним из интереснейших явлений, имеющих место при распространении света в магнитоупорядоченных кристаллах с регулярной доменной структурой, является магнитооптическая дифракция (МОД) света, изучение которой в значительной мере стимулировалось работами по записи и восстановлению магнитных голограмм [1, 2]. В этих работах, а также в [3, 4] на основе интеграла Френеля — Кирхгофа были рассчитаны дифракционные спектры для полосовой доменной структуры (ПДС) с «косинусоидальным» и «бинарным» распределением намагниченности в доменах. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными [5, 6] указывает на имеющиеся расхождения, которые возникают не только из-за упрощений, используемых в теории (в частности, реальное распределение намагниченности, как правило, отличается от рассматриваемых моделей). Пренебрежение взаимодействием дифрагировавших волн между собой и магнитооптической интерференцией [7, 8], имеющих место при распространении света в среде, позволяет представить пленку с ПДС как транспарант с амплитудно-фазовой функцией пропускания. Однако на световую отдачу магнитной решетки существенное влияние оказывает не только магнитооптическая активность кристалла и распределение намагниченности, но и его толщина, которая не может быть в полной мере учтена в функции пропускания. Это очевидно, поскольку для тонких образцов все направления плоских волн, на которые можно разложить волну внутри среды, равноправны, в то время как в толстых образцах эффективная длина пути, проходимая световой волной, зависит от направления ее распространения. При этом толщина кристалла и период ПДС существенным образом влияют на интерференцию дифрагировавших волн внутри кристалла. Однако эти вопросы в литературе изучались только применительно к задачам голографии в немагнитных средах [9, 10].

В настоящей работе на основе метода связанных волн рассмотрены особенности МОД в толстых слоях с ПДС. Получен и исследован характер дифракционного спектра для различных законов распределения намагниченности в доменах, показана существенная его зависимость от трех параметров — толщины слоя  $l$ , периода ПДС  $D$  и длины волны  $\lambda$ .

## 1. УРАВНЕНИЯ МОД В ТОЛСТЫХ СЛОЯХ С ПДС

Взаимодействие электромагнитных волн с кристаллом в оптическом диапазоне описывается с помощью тензора диэлектрической проницаемости, который в предположении кубической симметрии кристаллической решетки имеет следующие компоненты [11]:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon + \Delta \epsilon \sin^2 \theta, & \epsilon_{yy} &= \epsilon, \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_0 - \Delta \epsilon \sin^2 \theta, & \epsilon_{yx} &= -\epsilon_{xy} = i \epsilon Q \cos \theta, \\ \epsilon_{zy} &= -\epsilon_{yz} = i \epsilon Q \sin \theta, & \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \Delta \epsilon \sin 2\theta,\end{aligned}$$

где  $\Delta \epsilon = \epsilon_0 - \epsilon$ ,  $Q$  — первый магнитооптический параметр, пропорциональный намагниченности ( $Q = bM$ , где  $b \ll 1$ ),  $\theta$  — угол между магнитным моментом  $M \equiv \{0, M \sin \theta, M \cos \theta\}$  и осью  $Oz$ , совпадающей с нормалью к поверхности пластинки. Рассматривая плоскую волну с произвольной ориентацией плоскости поляризации и волновым вектором  $\sigma \equiv \{k \sin \psi, 0, k \cos \psi\}$ , распространяющуюся под углом  $\psi$  к нормали, и обычным образом вводя  $E_s$ - и  $E_p$ -компоненты электрического поля волны, получим следующее волновое уравнение для циркулярно поляризованных компонент  $E^\pm = (E_s \pm iE_p) e^\pm$ , где  $e^\pm = s \mp ip$  — вектор поляризации циркулярных волн:

$$\begin{aligned}\nabla^2 E^\pm + k_\pm^2 E^\pm \mp i \delta E^\mp &= 0, \\ k_\pm^2 &= k^2 (1 \pm Q \cos \theta \cos \psi), \\ \delta &= \frac{\Delta \epsilon}{2} \sin 2\theta \sin \psi,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda} N$ ,  $N = \epsilon^{1/2}$  — показатель преломления среды в размагниченном состоянии. Параметр  $\delta$  определяет связь между  $E^+$ - и  $E^-$ -волнами, однако ввиду его малости ( $\Delta \epsilon \sim 10^{-4}$ ) этой связью можно пренебречь (эффекты связи будут обсуждены позднее). В указанном приближении циркулярные волны  $E^\pm$  являются собственными волнами, а  $e^\pm$  — собственными векторами поляризации магнитогиrotропной среды. Воспользовавшись связью магнитооптического параметра с намагниченностью в выражении для константы распространения  $k_\pm$ , можно произвести замену  $Q \cos \theta = bM \cos \theta = bM_z$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении ( $\delta = 0$ ) особенности МОД будут определяться характером распределения нормальной к поверхности слоя компоненты магнитного момента. Распределение  $M_z$ -составляющей намагниченности в ПДС в общем случае может быть представлено в виде ряда Фурье:

$$M_z(x) = M_{0z} \left( a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos q_n x \right),$$

где  $q_n = nq$ , а  $q \equiv \left\{ \frac{2\pi}{D}, 0, 0 \right\}$  — вектор обратной решетки,  $D$  — период ПДС. С учетом этого постоянная распространения для право- и левополяризованных волн принимает вид

$$k_\pm^2 = k \left\{ 1 \pm \nu_0 \left[ 1 + \frac{1}{2a_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{iq_n x} + e^{-iq_n x}) \right] \right\}, \quad (2)$$

где  $\mu_0 = a_0 Q_0 \cos \psi$ , а  $Q_0 = bM_{0z}$ . Применяя метод связанных волн [10], будем искать решение уравнения (1) в виде ряда

$$E^\pm = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m^\pm(z) e^{i\beta_m r},$$

$$\beta_m = \sigma + m q, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом того, что в процессе МОД поляризация собственных волн не меняется, введем векторы поляризации  $e_m^\pm = s_m \mp i p_m$ , не зависящие от  $z$  и удовлетворяющие соотношениям  $|e_m^\pm| = 2$ ,  $e_m^\pm \beta_m = 0$ , а  $E_m^\pm(z) = e_m^\pm E_m^\pm(z)$ . С учетом всех приведенных соотношений получаем для  $E_m^\pm$  следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_m^\pm}{dt^2} + 2i\eta \frac{d E_m^\pm}{dt} - (\gamma_m \mp \mu_0) E_m^\pm \pm \\ \pm \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_{m, m\pm n} E_{m\pm n}^\pm + x_{m, m-n} E_{m-n}^\pm) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\eta = \cos \psi$ ,  $t = kz$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{2} a_n Q_0 \cos \psi$ ,  $x_{m, m\pm n} = \frac{1}{2} (1 + p_m p_{m\pm n})$ ,

$\gamma_m = m \frac{\lambda}{D} \left( 2 \sin \psi + m \frac{\lambda}{D} \right)$ . Параметр  $\alpha_n$  в теории связанных волн имеет особое значение. Он описывает взаимодействие между падающей и дифрагирующими волнами одной поляризации. В процессе дифракции энергия передается от волны нулевого порядка  $E_0^\pm$ , которая одна только и существует в среде непосредственно после пересечения светом границы раздела, к волнам высших порядков. По чисто формальным признакам (3) можно интерпретировать как систему уравнений, описывающую колебательные процессы в системе связанных квазирезонаторов (СК), колебания которых, однако, являются не временными, а пространственными. Как известно, в системе связанных резонаторов способность передачи энергии от одного резонатора к другому зависит от синхронизма колебаний на парциальных частотах, которые найдем, положив в (3)  $\alpha_n = 0$ , и, записывая корни характеристического уравнения, получаем

$$(\omega_m^\pm)_{1,2} = -\cos \psi \pm \sqrt{\cos^2 \psi - m \frac{\lambda}{D} \left( 2 \sin \psi + m \frac{\lambda}{D} \right) \pm \mu_0}. \quad (4)$$

Анализ этого выражения показывает, что при малой пространственной частоте магнитной структуры ( $D \gg \lambda$ ) парциальные частоты всех квазирезонаторов близки друг к другу и, следовательно, условия для перехода энергии в высшие порядки дифракции благоприятны. Если же пространственная частота велика ( $D \sim \lambda$ ), то энергия будет переходить в основном от волны нулевого порядка к волне с номером  $m$  (при  $m \lambda = 2D \sin \psi$ ). Именно это условие, обеспечивающее существование волн только двух порядков, и необходимо для получения большого значения дифракционной эффективности.

Знание парциальных частот, однако, дает возможность получить только качественную картину распределения энергии по порядкам дифракции. Собственные частоты  $\omega_k^\pm$  системы СК (при  $\alpha \neq 0$ ) могут быть найдены из равенства нулю детерминанта следующей системы уравнений:



$$W_m^\pm E_{mk}^\pm \mp \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\chi_{m, m+n} E_{m+n, k}^\pm + \chi_{m, m-n} E_{m-n, k}^\pm) = 0, \quad (5)$$

где

$$W_m^\pm = (\omega^\pm)^2 + 2\eta\omega^\pm + (\gamma_m \mp \mu_0), \quad \text{а } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Полное решение системы (3) для падающего излучения линейной поляризации может быть представлено в виде всех дифрагированных волн:

$$\mathbf{E} = \sum_{l=+, -} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_m^l E_{mk}^l \exp(i\sigma r + i q m r + i\omega_k^l t). \quad (6)$$

Коэффициенты  $E_{mk}^l$  находятся из (5) с учетом граничных условий, которые могут быть выбраны, исходя из предположения, что при отсутствии связи ( $\alpha_n = 0$ ) никакой дифракции не будет, амплитуды всех мод, кроме  $E_0^\pm$ , равны нулю, а для  $E_0^\pm$  имеется только постоянная составляющая, амплитуда которой равна половине амплитуды исходной волны, принимаемой за единицу, т. е. при  $t = 0$   $E_m^\pm = \frac{\delta_{m0}}{2}$  и

$\frac{dE_m^\pm}{dt} = 0$ , где  $\delta_{m0}$  — символ Кронекера. Поскольку дифрагированные волны возникают только благодаря связи волн между собой, граничные условия при  $\alpha_n \neq 0$  не должны отличаться от указанных.

Как видно из структуры общего решения (6), имеется два ряда дифрагировавших волн каждой поляризации. Первый ряд представляет собой распределение по отдельным каналам, в каждом из которых распространяется целая группа волн. Таким образом, каждая волна  $m$ -го порядка  $E_m^\pm(z)$  состоит в свою очередь из ряда (в общем случае бесконечного) близко расположенных волн. Распространяясь почти в одном направлении, эти волны интерферируют, в результате чего интенсивность дифрагировавших волн при распространении их внутри среды будет изменяться по сложному закону. Проведем анализ полученного решения для некоторых конкретных типов распределения намагниченности в ПДС.

## 2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $M_z(r)$

Пусть  $\alpha_{n \neq 1} = 0$ , а  $\alpha_1 = 1$ , т. е.  $M_z = M_{0z} \cos qr$ . Такой «косинусоидальный» закон в первом приближении описывает распределение намагниченности в ПДС в области ее зарождения. Полученные решения справедливы и для рассматриваемого случая, однако с помощью ряда упрощающих предположений вместо кратных бесконечных рядов (6) можно получить аналитическое решение уравнений (3) для двух предельных случаев дифракции, которые ниже будут рассмотрены. Поскольку  $p_m p_{m+1} \approx p_m p_{m-1}$ , введем в уравнение (3) новую переменную  $\xi = \frac{t \alpha_0}{\cos \psi}$ , где  $\alpha_0 = \alpha_1 \chi_{m, m \pm 1}$ :

$$\frac{\alpha_0^2}{\cos^2 \psi} \frac{d^2 E_m^\pm}{d\xi^2} + 2i\alpha_0 \frac{dE_m^\pm}{d\xi} - \gamma_m E_m^\pm \pm \alpha_0 (E_{m+1}^\pm + E_{m-1}^\pm) = 0. \quad (7)$$

Параметр  $\alpha$ , пропорциональный магнитооптическому параметру  $Q$ , является малым параметром уравнений (7), поэтому первым членом, пропорциональным  $\alpha_0^2$ , можно пренебречь, после чего система уравнений значительно упрощается:

$$2i \frac{dE_m^\pm}{d\xi} \pm E_{m-1}^\pm + E_{m+1}^\pm = 2 \frac{\Delta_m \cos \psi}{\alpha_0 kl} E_m^\pm, \quad (8)$$

где  $\Delta_m = \gamma_m kl/2\cos \psi$ . Колебания квазирезонаторов в достаточной степени являются синхронными, если на всем пути светового луча в среде фаза колебаний с частотой, равной парциальной, изменяется мало, т. е.  $\Delta_m$  мало. При этом условии передача энергии от одного квазирезонатора к другому облегчена и максимальные значения интенсивностей большого числа порядков дифракции будут мало отличаться друг от друга. Количественную оценку малости параметра  $\Delta_m$  можно сделать на основе сравнения теории с экспериментом, проводившимся при изучении дифракции света на ультразвуке и показавшем, что возбуждение большого числа симметрично расположенных порядков дифракции имеет место при значениях  $\Delta_1 \leq \frac{\pi}{12}$ . Отсюда имеем  $l/\lambda \leq \frac{\cos \psi}{12 \gamma_1}$ . Эта область значений величины  $l/\lambda$  называется областью дифракции Рамана — Ната.

Возвращаясь к системе (8), описывающей колебания СК ( $\alpha = 0$ ), и полагая  $\Delta_m = 0$ , получаем уравнение, которому удовлетворяют функции Бесселя [10]. С учетом поляризации дифрагировавших волн, задаваемой векторами  $e_m^\pm$ , общее решение поставленной задачи имеет вид (в указанном приближении)

$$E^\pm(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m^\pm (\pm i)^m J_m(\xi) e^{i\sigma r + imqr}. \quad (9)$$

Для падающего излучения линейной поляризации общее решение задачи о МОД света на косинусоидальной решетке имеет вид

$$E(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m [s_{2m} J_{2m}(\xi) e^{i2mqr} + p_{2m-1} J_{2m-1}(\xi) e^{i(2m-1)qr}] e^{i\sigma r}. \quad (10)$$

Характер изменения амплитуд дифрагировавших волн указывает на то, что в области дифракции Рамана — Ната происходит постепенная передача энергии от волны нулевого порядка симметрично ко всем волнам высших порядков при незначительном обратном возврате к волне нулевого порядка. В результате такого процесса энергия в конце концов переходит к волнам высокого порядка и амплитуда волны нулевого порядка значительно уменьшается. Из (10) также следует, что поле четных порядков имеет поляризацию  $s$ , тогда как поле нечетных порядков поляризовано в направлении вектора  $p$ . При переходе от  $m$ -го к  $m+1$ -му дифракционному порядку поляризация меняется на угол  $-\frac{\pi}{2}$ . Такая картина, однако, представляет собой идеализацию и предполагает синхронизм колебаний парциальных систем. В действительности с увеличением толщины ферромагнитного слоя синхронизм дифрагирующих волн все больше и больше нарушается, что затрудняет передачу энергии в высшие порядки дифракции.

Дифракцию Рамана — Ната можно наблюдать и при нормальном падении света, т. е. при  $\psi = 0$ . В этом случае  $\Delta_1 = 2\pi l\lambda/D^2$ , а условия дифракции Рамана — Ната выполняются при  $l/D \leq D/24\lambda$ . Выражение (10) будет справедливо и для случая нормального падения при замене переменной  $\xi$  на  $\xi_0 = t\alpha_0$ .

Особый интерес представляет другой предельный случай, когда  $\Delta_m$  велико. Синхронизма парциальных систем теперь не будет, и передача энергии в высшие порядки дифракции затрудняется. Однако из (4) легко видеть, что парциальные частоты квазирезонаторов с индексами 0 и  $m$  равны, в то время как парциальные частоты всех остальных квазирезонаторов теперь значительно отличаются друг от друга. Это дает основание рассматривать колебания в системе, состоящей только из двух СК, считая ее изолированной, т. е. полагая, что энергия другим квазирезонаторам не передается. Такая ситуация возникает в результате выполнения условия Брэгга  $2D \sin \psi = m\lambda$ . Мы имеем теперь систему в двухволновом приближении

$$2i \frac{dE_{0,m}^{\pm}}{d\xi} \pm E_{m,0}^{\pm} = 0. \quad (11)$$

Решение ее для циркулярных волн имеет вид  $E_0^{\pm} = \frac{1}{2} e_0^{\pm} \cos \frac{\xi}{2}$

и  $E_m^{\pm} = \pm \frac{i}{2} e_m^{\pm} \sin \frac{\xi}{2}$ , а суммарное поле в дифракционных порядках

при линейной поляризации падающего излучения  $E_0 = s_0 \cos \frac{\xi}{2}$  и

$E_m = p_m \sin \frac{\xi}{2}$ . Таким образом, в случае линейной поляризации па-

дающего излучения линейная поляризация в дифракционных порядках сохраняется; при этом нулевой и  $m$ -й порядки имеют взаимно ортогональную поляризацию.

Экспериментальное изучение дифракции света на ультразвуковых волнах для нулевого и первого порядков показывает, что волны  $E_0$  и  $E_1$  можно считать изолированными от других при  $\Delta_1 \geq 4\pi$ , т. е. при  $l/\lambda \geq$

$\geq 4 \cos \frac{\psi}{\gamma_1}$ . Область значений  $l/\lambda$ , удовлетворяющих этому неравен-

ству, носит название области дифракции Брэгга. Область значений  $l/\lambda$ , находящихся в пределах  $\cos \frac{\psi}{12\gamma_1} \leq \frac{l}{\lambda} \leq 4 \cos \frac{\psi}{\gamma_1}$ , можно считать про-

межуточной областью.

Рассмотренные приближения дают правильную картину МОД, если коэффициент при второй производной в уравнении (7) много меньше коэффициента при первой производной, т. е. при  $\alpha \ll \cos^2 \psi$ . Это неравенство всегда выполняется при малых углах  $\psi$ , однако при уменьшении  $\psi$  величина  $\Delta_1$  также уменьшается и дифракция из области Брэгга переходит в промежуточную область. При больших углах  $\psi$  рассмотренные приближения законны, только если  $\alpha$  очень мало.

Разделение МОД в толстых слоях на три области иллюстрируется рис. 1а, на котором представлена зависимость величины  $kl$  от угла  $\psi$  на границах областей. Как видно из этого рисунка, при изменении угла от  $10^\circ$  до  $30^\circ$  толщина кристалла может быть уменьшена на порядок, но при этом условия наблюдения дифракции Брэгга будут сохраняться. Зависимостью дифракционных свойств магнитной структуры от угла  $\psi$  можно объяснить возможность наблюдения на кристалле одной и той же толщины магнитооптической дифракции как в области Рамана — Нага, так и в области Брэгга в зависимости от угла падения оптического излучения на кристалл.

При малых углах  $\psi$  для наблюдения МОД Брэгга требуется весьма большая толщина кристалла. Если при этом учесть зависимость

периода магнитной структуры от толщины, нетрудно видеть, что дифракция Брэгга не может быть практически наблюдаема при углах падения лучей меньше  $10^\circ$ . При углах  $\psi$ , близких к  $90^\circ$ , требуемая для дифракции Брэгга величина  $kl$  становится малой и в пределе  $\psi \rightarrow 90^\circ$  обращается в нуль. Это нетрудно понять из схемы падения лучей, представленной на рисунке. При падении луча на кристалл под большим углом (пунктирная линия) путь света в среде намного превышает толщину слоя, и поэтому область, в которой происходит дифракция, значительно увеличивается. Таким образом, при разделении кристаллов с регулярной доменной структурой на тонкие и толстые совершенно недостаточно сравнивать с длиной волны только толщину кристалла; и на кристалле одной толщины могут быть получены дифракционные спектры с различными свойствами.

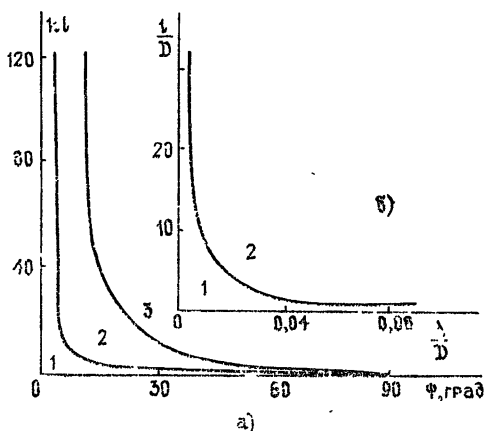


Рис. 1. Области МОД при косом (а) и нормальном (б) падении света на ПДС: 1 — Рамана — Ната, 2 — промежуточная, 3 — Брэгга.

При  $\psi = 0^\circ$  и  $l/D \leq D/24\lambda$  реализуются только условия наблюдения МОД Рамана — Ната (рис. 1б). Видно, что при  $\lambda \ll D$  дифракция Рамана — Ната реализуется в широком диапазоне значений для толщины кристалла и периода магнитной структуры. Если  $\lambda \approx D$ , то область допустимых значений этих параметров резко сужается.

Учет связи между право- и левополяризованными волнами ( $\delta \neq 0$ ) приводит, как показано в работе [11], к резонансным эффектам, обусловленным возникновением в спектре узкой области запрещенных волновых векторов вблизи границы зоны Бриллюэна обратной решетки ПДС  $q = 2\pi/D$ . В рассмотренной геометрии эти эффекты будут тем слабее, чем меньше угол  $\psi$ , а при нормальном падении света совсем отсутствуют, что следует также из (1).

### 3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ПДС

Более общий характер распределения намагниченности в ПДС может быть описан «трапецидальным» законом с несколькими параметрами доменной структуры. Коэффициенты фурье-разложения такой «магнитной» дифракционной решетки имеют вид

$$a_0 = \frac{2s - D}{D}, \quad a_n = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi ns}{D} \frac{D}{\pi n \delta} \sin \frac{\pi n \delta}{D}, \quad (12)$$

где  $D$  — период ПДС,  $s$  — ширина домена с преимущественным направ-

лением намагниченности,  $\delta$  — ширина доменной стенки. Выделим два случая:  $D \gg \delta$ , реализуемый в толстых ( $l \gg l_{\text{кр}}$ ) слоях ортоферрита и феррит-граната, и  $D \gtrsim \delta$ , имеющий место вблизи критических толщин  $l_{\text{кр}}$  [12].

а) Получим аналитическое решение системы уравнений (3) в приближении Рамана — Ната. Вначале рассмотрим случай несимметричной ПДС с  $s \neq D/2$ , реализуемой в полях  $H_{\perp} \neq 0$  в образцах с  $D \gg \delta$ , когда шириной доменной стенки можно пренебречь и коэффициенты  $a_n$  не содержат сомножителей, зависящих от  $\delta$ : Система уравнений, описывающая колебания СК, имеет следующий вид:

$$2i \frac{d E_m^{\pm}}{d \tau} \pm \mu_0 E_m^{\pm} \pm \sum'_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_{m, m+n} E_{m+n}^{\pm} = 0, \quad (13)$$

где  $\tau = t/\cos \psi$ , а штрих у суммы означает отсутствие члена с  $n = 0$ . Здесь каждой паре взаимодействующих волн соответствует свой параметр связи  $a_n = a_{-n}$ . Этот параметр связывает волны  $n$ -го порядка напрямую с волной нулевого порядка, исключая взаимодействие между соседними волнами. Поэтому решение (13) для циркулярно поляризованных волн с учетом граничных условий можно записать следующим образом:

$$E_0^{\pm} = \frac{1}{2} e_0^{\pm} \cos(C_0 \omega_0 \tau) e^{\pm i \nu_0 \tau/2}, \quad (14)$$

$$E_n^{\pm} = \pm i e_n^{\pm} \frac{a_n x_{0n}}{4 C_0} \sin(C_0 \omega_0 \tau) e^{\pm i \nu_0 \tau/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $C_0 = \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 x_{0k}^2 \right)^{1/2}$ ,  $\omega_0 = \frac{\alpha_0}{a_0}$ , а коэффициент  $x_{0n}$  при нормальном падении ( $\psi = 0$ ) определяется выражением  $2x_{0n} = 1 + (1 + n^2 \lambda^2 / D^2)^{-1/2}$ . Из (14) следует, что в несимметричной ПДС в дифракционном спектре имеются как четные, так и нечетные порядки, а также фазовый сдвиг между право- и левополяризованными волнами одного порядка, величина которого тем больше, чем больше разница между  $s$  и  $D/2$ .

Полное решение системы уравнений (13) для линейно-поляризованного падающего излучения запишется в виде

$$E_0 = \left( s_0 \cos \frac{\mu_0 \tau}{2} + p_0 \sin \frac{\mu_0 \tau}{2} \right) \cos(C_0 \omega_0 \tau), \quad (15)$$

$$E_n = \frac{a_n x_{0n}}{2 C_0} \left( p_n \cos \frac{\mu_0 \tau}{2} - s_n \sin \frac{\mu_0 \tau}{2} \right) \sin(C_0 \omega_0 \tau).$$

Из полученных соотношений видно, что линейная поляризация дифрагировавших волн сохраняется как в нулевом, так и в высших порядках дифракционного спектра. При этом во всех порядках, включая и нулевой, происходит поворот плоскости поляризации дифрагировавших волн на угол  $\vartheta$ , величина которого растет с увеличением разности  $2s - D$  и в пределе достигает значения угла фарадеевского вращения для данной толщины образца. Величина поворота определяется выражением  $\vartheta = k Q_0 z (2s - D) / 2D$ , и в момент насыщения, когда  $H_{\perp} = H_{\text{кр}}$  и ПДС исчезает ( $s = D$ ),  $\vartheta = \vartheta_{\text{ф}} = k Q_0 z / 2$ . Отметим также, что из (12) и (15) следует исчезновение в дифракционном спектре  $m$ -го порядка, когда  $ms/D = k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  Для симметричной ПДС типа «меандр», реализуемой обычно в полях  $H_{\perp} = 0$ , коэффициенты  $a_{2n} = 0$ , так как

$2s=D$ , а следовательно, и  $\mu_0=0$ . Энергия от волны нулевого порядка передается волнам с нечетными индексами, а волны с четными отсутствуют. В этом случае в соотношениях (13)—(15) необходимо положить  $\mu_0=0$  и считать все  $n=2k-1$ . Приведем выражения для интенсивности света в соответствующих дифракционных порядках в случае линейной поляризации падающего излучения:

$$I_0 = \cos^2(C_0\omega_0\tau), \quad I_n = \frac{a_n^2 x_{0n}^2}{4C_0} \sin^2(C_0\omega_0\tau). \quad (16)$$

При  $C_0\omega_0\tau \rightarrow 0$ , что имеет место при малых углах фарадеевского вращения в образцах (тонкие пленки), интенсивность дифракционных максимумов может быть вычислена по приближенной формуле  $I_n = (a_n x_{0n} \omega_0 \tau / 2)^2$ . Из (15) следует, что в случае симметричной ПДС все нечетные порядки дифракции имеют  $p$ -поляризацию, а нулевой —  $s$ -поляризацию; при этом  $\vartheta = 0$ .

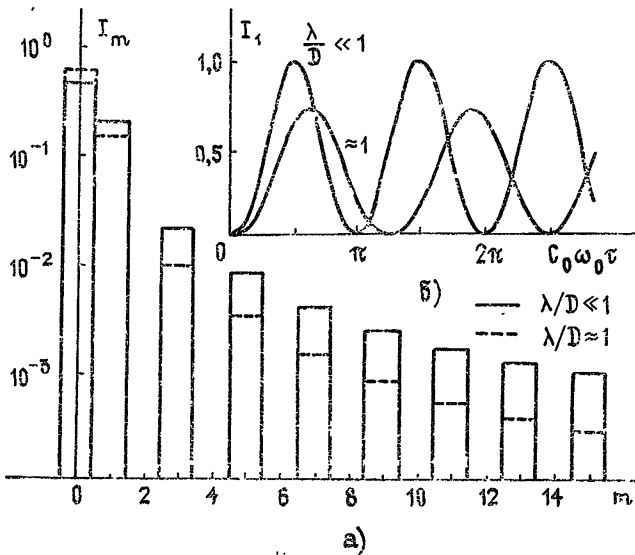


Рис. 2. Распределение интенсивности света по дифракционным порядкам (а) и по толщине образца (б) для  $m=1$ .

На рис. 2а в логарифмическом масштабе представлена диаграмма распределения интенсивности света по дифракционным максимумам, а на рис. 2б показано колебание интенсивности света в первом максимуме от толщины образца, рассчитанные на основе полученных выражений для двух случаев —  $\lambda/D \ll 1$  и  $\lambda/D \approx 1$ . Анализ зависимостей, приведенных на рис. 1, 2, указывает, что для расчетов спектра МОД в толстых слоях методы, развитые в работах [1–4] на основе теории дифракции Френеля — Кирхгофа, недостаточны. Прежде всего это связано с тем, что при одном и том же соотношении  $\lambda/D$  (от которого в теории Френеля — Кирхгофа только и зависит характер дифракционного спектра) спектр МОД имеет различный характер в зависимости от значения параметра  $l/D$ .

Рассмотрим теперь случай  $\delta \leq D$ , т. е. когда шириной доменной стенки пренебречь нельзя и ПДС аппроксимируется трапецеидальной решеткой. При этом все полученные ранее выражения, описывающие распределение поля в дифракционных порядках, будут справедливы,

если коэффициенты фурье-разложения  $a_n$  записывать в виде (12), учитывая конечную толщину доменной стенки. Поскольку теперь  $2s < D$  даже для симметричного распределения намагниченности в ПДС, когда  $D = 2(s + \delta)$ , в спектре МОД должны присутствовать как нечетные, так и четные дифракционные порядки. Условием отсутствия  $m$ -го дифракционного максимума являются теперь соотношения  $ms/D = k$  и  $m\delta/D = l$ , второе из которых может быть положено в основу определения ширины доменной стенки (при  $ms/D \neq k$ , что можно определять визуально с помощью эффекта Фарадея).

Таким образом, изменение между шириной домена с преимущественным направлением намагниченности и периодом ПДС должно приводить к существенному изменению интенсивности и состояния поляризации в дифракционных порядках. Увеличение магнитного поля  $H_{\perp}$  приводит к увеличению  $s$  и росту интенсивности нулевого максимума. Интенсивность максимумов с  $m \geq 1$  падает, так как величина  $C_0$  с ростом отношения уменьшается. При этом с ростом  $m$  должен увеличиваться осцилляционный характер зависимости  $I_m$  от внешнего магнитного поля. Анализ полученных результатов показывает, что каждый максимум в спектре МОД Рамана — Ната является откликом соответствующей гармоники фурье-образа функции распределения намагниченности в ПДС.

б) Рассмотрим теперь другой случай, когда параметры образца (толщина и период ПДС) и длина волны удовлетворяют условиям наблюдения дифракции Брэгга. Синхронизма парциальных систем теперь не будет, и передача энергии в высшие порядки дифракции затрудняется. Это дает основание рассматривать колебания в системе, состоящей только из двух связанных квазирезонаторов с индексами 0 и  $m$ , считая ее изолпорованной, а уравнения дифракции — в двухволновом приближении:

$$2i \frac{dE_{0,m}^{\pm}}{d\xi} \pm (2a_0 E_{0,m}^{\pm} + a_m \chi_{0m} E_{m,0}^{\pm}) = 0. \quad (17)$$

Решение этой системы имеет вид

$$E_0^{\pm} = \frac{e_0^{\pm}}{2} e^{\pm i a_0 \xi} \cos \tau_{0m}, \quad E_m^{\pm} = \pm i \frac{e_m^{\pm}}{2} e^{\pm i a_0 \xi} \sin \tau_{0m}, \quad (18)$$

где  $\tau_{0m} = \xi a_m \chi_{0m}/2$ . В случае падающей волны с линейной поляризацией распределение световых полей в дифракционной картине будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} E_0 &= (s \cos \alpha_0 \xi + p_0 \sin \alpha_0 \xi) \cos \tau_{0m}, \\ E_m &= (p_m \cos \alpha_0 \xi - s_m \sin \alpha_0 \xi) \sin \tau_{0m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Зная амплитуды полей, легко найти интенсивность дифракционных максимумов нулевого и  $m$ -го порядков:

$$I_{0,m} = |E_{0,m}|^2 = \frac{1}{2} (1 \mp \tau_{0m}^2 \cos 2\tau_{0m}). \quad (20)$$

Таким образом, в отличие от дифракции в области Рамана — Ната при дифракции света в брэгговской области изменяется как пространственная частота колебания интенсивности, так и амплитуда интенсивности  $m$ -го порядка. Практическое применение может иметь реализация условий дифракции Брэгга на первой гармонике в фурье-разложении ПДС — как наиболее интенсивной. Периодическая перекачка световой энер-

гии между волнами с индексами 0 и  $m = -1$  позволяет при дифракции Брэгга в толстых слоях ( $\xi a_1 \kappa_0, -1 \rightarrow \pi/2$ ) с ПДС получать дифракционную эффективность в  $\pi^2/4$  раз больше, чем в области Рамана — Ната.

#### 4. МАГНИТООПТИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

При падении пучка света на слой магнетодиэлектрика, прозрачного в данной области спектра, на его поверхностях происходит многократное отражение дифрагировавших волн, в результате чего с каждой стороны образца выходит ряд пучков с убывающей амплитудой для каждого дифракционного максимума. Рассматривая дифракционные явления, возникающие в слоях магнитных кристаллов, мы пренебрегали вкладом в результирующую интенсивность дифрагировавших волн, испытывающих отражение на границе слоя. Такое допущение оправдано при малой отражательной способности поверхности, большой толщине образца и большой поглощательной способности в данной области спектра. В случае же большой отражательной способности поверхностей кристалла и высокой магнитооптической добротности необходим учет многолучевой интерференции [7].

Рассмотрим плоскопараллельный слой магнитного кристалла с ПДС, с одной стороны которого находится подложка с показателем преломления  $N_1$ , а с другой — среда с показателем  $N_2$ . Предположим, что на образец под углом  $\psi$  падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды. На первой поверхности эта волна разделится на три плоские волны: одну отраженную и две дифрагировавшие на ПДС и прошедшие в образец. Прошедшие волны, представляющие собой волны нулевого и минус первого порядков, падают на вторую поверхность под углом  $\psi$  и здесь снова разделяются каждая на две волны: одну прошедшую и другую, отраженную обратно в образец. Такой процесс деления волн, остающихся в образце, многократно повторяется. Будем считать, что падающая волна линейно поляризована либо параллельно, либо перпендикулярно плоскости падения. Для каждого члена совокупности отраженных или прошедших волн переменная часть фазы волновой функции отличается от такой же части фазы предыдущего члена на величину, соответствующую двукратному прохождению дифрагировавшей волны в кристалле. При этом разность фаз  $\Delta = 2\theta_{Fl} - \frac{4\pi}{\lambda_0} Nl \cos \psi$ , где  $\theta_{Fl}$  — угол фарадеевского вращения плоскости поляризации в кристалле толщиной  $l$ , а  $\psi$  — угол дифракции света в среде с показателем преломления  $N$ ; этот угол связан с периодом ПДС и длиной волны  $\lambda_0$  падающего излучения соотношением  $D(\sin \varphi - N \sin \psi) = m \lambda_0$  (для первого дифракционного порядка  $m=1$ ). Суммируя волны, дифрагировавшие на ПДС, находим выражение для эффективных коэффициентов пропускания  $T_{\text{эфф}}$  и отражения  $R_{\text{эфф}}$  интенсивности света, распространяющегося в направлении первого дифракционного максимума с учетом многолучевой интерференции:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{T^2(1 - 2R \cos 2k_1 l + R^2)}{(1 - R^2)^2 + 4R^2(\cos^2 2\nu + \cos^2 2k_1 l) - 4R(1 + R^2) \cos 2\nu l \cos 2k_1 l}; \quad (21a)$$

$$R_{\text{эфф}} = \frac{(T'r')^2}{(1 - R^2) + 4R^2(\cos^2 2\nu + \cos^2 2k_1 l) - 4R(1 + R^2) \cos 2\nu l \cos 2k_1 l}; \quad (21б)$$

где  $T = \tau \tau' \exp(-k_2 l)$ ,  $R = rr' \exp(-2k_2 l)$ ,  $T' = \tau^2 \exp(-2k_2 l)$ .  
Здесь  $r$  — амплитудный коэффициент отражения,  $\tau$  — амплитудный



коэффициент пропускания для волны, идущей из окружающей среды в кристалл, а  $r'$  и  $\tau'$  — соответствующие коэффициенты для волны, идущей из кристалла в окружающую среду;  $k = k_1 - ik_2$  — постоянная распространения световой волны в среде, причем  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} N \cos \psi$ ,

а  $k_2 = \alpha/2$ , где  $\alpha$  — удельный коэффициент поглощения магнитного кристалла на длине волны  $\lambda_0$ . Вывод формул (21а), (21б) приведен в Приложении, где получены также выражения для коэффициента отражения интенсивности света, распространяющегося в направлении нулевого максимума с учетом многолучевой интерференции.

Анализ полученных выражений показывает, что прозрачность магнитных кристаллов с ПДС (или отражательная способность) в направлении первого дифракционного максимума в значительной степени определяется периодом доменной структуры и углом фарадеевского вращения плоскости поляризации, величина которых задает разность фаз между интерферирующими лучами. Таким образом, осуществляя перестройку доменной структуры внешним магнитным полем, можно изменять светоотдачу магнитной решетки. При этом эффективность изменения светоотдачи должна возрастать с увеличением толщины и магнитооптической добротности кристалла. Это подтверждает расчет изменения коэффициентов  $T_{эфф}$  и  $R_{эфф}$  при уменьшении периода ПДС, проведенный для оптического излучения ( $\lambda_0 = 0,6328 \text{ мк}$ ), падающего на висмут-содержащую гранатовую пленку ( $N=2,35$ ) толщиной 1,7 и 8,4 мк. Результаты расчета, сведенные в таблицу, показывают, что с помощью многолучевой интерференции света можно увеличить светоотдачу магнитооптических доменных устройств (например, увеличить дифракционную эффективность магнитных голограмм). Этот эффект позволяет также улучшить свойства магнитных регистраторов оптической информации: снижение дифракционной эффективности магнитных пленок при уменьшении их толщины, необходимое для повышения энергетической чувствительности и разрешающей способности, может быть компенсировано повышением светоотдачи пленки с ПДС за счет интерференционного эффекта. Однако имеются и отрицательные стороны рассмотренного эффекта, заключающиеся в том, что зависимость светоотдачи магнитной решетки от ее периода будет приводить к искажению распределения контраста в восстановленном изображении магнитной голограммы.

		$D, \text{ мк}$					
		18,6	7,6	6,2	5	3,8	2,6
$l, \text{ мк}$							
$T_{эфф}$	1,7	0,346	0,338	0,032	0,325	0,305	0,285
	8,4	0,307	0,336	0,365	0,410	0,537	0,904
$R_{эфф}$	1,7	0,065	0,064	0,063	0,062	0,060	0,058
	8,4	0,041	0,043	0,046	0,049	0,058	0,084

## 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В работах [4, 12] приведены результаты экспериментального наблюдения и исследования особенностей МОД в пластинках  $Dy$ -ортоферрита с совершенной ПДС, во многом подтверждающие выводы предлагаемой теории. В частности, поляризационные эффекты, исчезновение и ослабление соответствующих дифракционных порядков, наблюдаемые в эксперименте при перестройке доменной структуры магнитным

полем, полностью описываются соотношениями (12)–(15). При этом отмечалось несоответствие с теорией Френеля — Кирхгофа в вопросе об интенсивности дифракционных максимумов высших порядков ( $n \geq 3$ ), связанное с отсутствием правильного учета толщины образца и интерференционных эффектов.

В настоящей работе мы укажем лишь на некоторые закономерности, полученные на образцах висмут-содержащего граната, которые в отличие от ортоферритовых образцов обладают малым периодом доменной структуры.

В случае симметричной ПДС, согласно (16), отношение интенсивностей  $m$ -го и первого дифракционных максимумов имеет вид  $\left(\frac{I_m}{I_1}\right)^{1/2} = a_m x_{0m} / a_1 x_{01}$ . С учетом конечной ширины доменной стенки фурье-коэффициенты  $a_m$  необходимо записывать в виде (12), но поскольку  $\delta/D \ll 1$  и с высокой степенью точности  $D/s \approx 2$ , отношение интенсивностей для больших  $m$  (когда  $m\delta \leq D$ ) принимает вид

$$\left(\frac{I_m}{I_1}\right)^{1/2} = \frac{1}{m} \frac{D}{\pi m \delta} \sin \frac{\pi m \delta}{D}, \quad (22)$$

где учтено, что при  $\lambda/D \ll 1$  коэффициент  $x_{0m}/x_{01} \approx 1$ . С помощью этого соотношения была проведена оценка ширины доменных стенок для исследуемых пленок. На рис. 3 показано изменение интенсивностей первого и высших дифракционных максимумов ( $I_9, I_{11}, I_{13}$ ) при симметричном уменьшении ширины полосовых доменов. Перестройка доменной структуры осуществляется внешним магнитным полем, не изменяющим симметрию распределения намагниченности в ней (поле ориентировано под углом  $4^\circ - 5^\circ$  к плоскости образца). Результаты измерений приведены для образца толщиной  $8,4 \text{ мк}$ . С целью исключения влияния интерференционных эффектов в качестве источника излучения применялся аргоновый лазер ( $\lambda = 0,488 \text{ мк}$ ). Согласно результатам измерений отношения  $I_m/I_1$  для трех дифракционных максимумов ширина доменных стенок в исследуемом образце составляет  $\delta \sim 0,12 \text{ мк}$ , что примерно вдвое превышает теоретическую ширину блоховской доменной стенки.

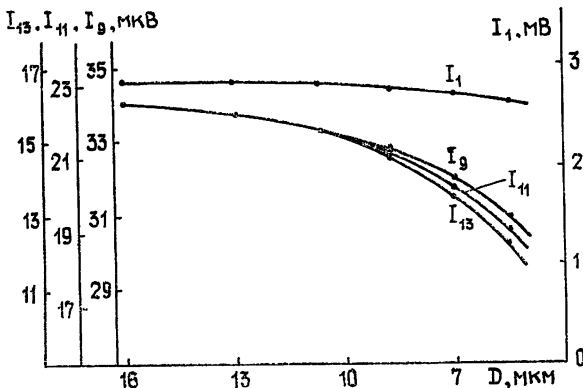


Рис. 3. Изменение интенсивности света при симметричной перестройке ПДС в дифракционных максимумах с  $m = 1; 9; 11; 13$ .

Высокая магнитооптическая добротность висмут-содержащих гранатов в видимой области приводит к многолучевой интерференции света из-за переотражения и преломления на границах образца, спо-

собной значительным образом изменить величину дифракционной эффективности магнитной решетки. На рис. 4 представлены результаты измерений на двух образцах толщиной 1,7 мк и 8,4 мк относительно изменения интенсивности света ( $\lambda = 0,6328$  мк) в дифракционном максимуме первого порядка (по отношению к интенсивности при  $D = 16,2$  мк) при уменьшении периода ПДС. Измеренные интенсивности имеют ярко выраженную зависимость от толщины образца и периода ПДС. Следует также отметить синхронизм колебаний интенсивности как прошедшего, так и отраженного света при изменении периода, которое сопровождалось перекачкой световой энергии из нулевого максимума в отраженном свете в максимумы первого порядка. Перестройкой доменной структуры можно было осуществлять модуляцию интенсивности света, отраженного в направлении нулевого максимума. При этом эффективность перекачки световой энергии (изменение интенсивности света на единицу магнитного поля) в области высокой магнитооптической добротности увеличивалась с ростом толщины пленок и уменьшалась при смещении длины волны падающего излучения в область поглощения висмут-содержащего граната. При  $\lambda = 0,488$  мк изменение

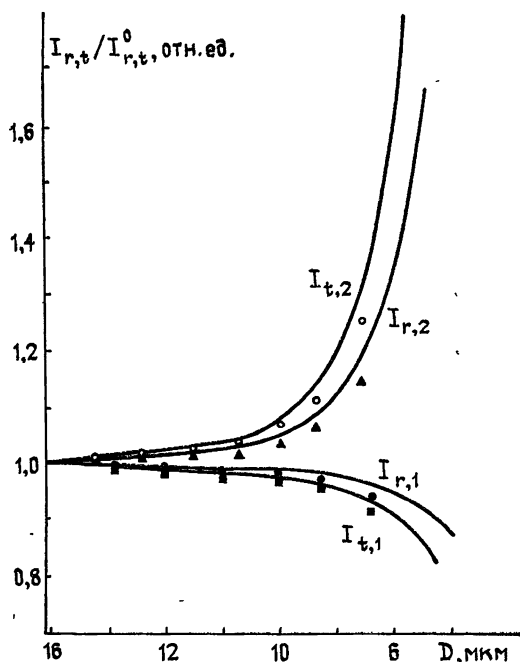


Рис. 4. Относительное изменение интенсивности света при симметричной перестройке ПДС ( $m = 1$ );  $I_{r,t}^0$  соответствует  $D = 16,2$  мк; индексы « $r$ » и « $t$ » соответствуют измерениям в отраженном и прошедшем свете; индексы «1» и «2» соответствуют толщинам 1,7 мк и 8,4 мк.

интенсивности света не превышало порога чувствительности фотоэлектронной системы регистрации  $\sim 10^{-5}$  отн. ед. Наблюдаемый эффект изменения интенсивности света в дифракционном максимуме первого порядка при изменении периода ПДС и толщины образца находит свое объяснение при учете многолучевой интерференции дифрагированных волн, описываемой соотношениями (21). Результаты расчета по этим формулам представлены на рисунке сплошными линиями. Имеющееся некоторое несоответствие между теорией и экспериментом может быть объяснено тем, что при расчете не было учтено уменьшение дифракци-

онной эффективности из-за увеличения пространственной частоты ПДС и относительной ширины доменных границ  $\delta/D$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ

а) Рассмотрим вначале образование интерферирующих лучей в проходящем свете для волны минус первого порядка. Амплитуда и фаза этой волны после прохождения кристалла толщиной  $l$  определяется выражением  $E_{-1} \sim p \sin \nu l e^{-ik_1 l}$ , где  $\nu = \alpha_0 k_1 / 2 \cos \psi$ . Световое поле в соответствующих лучах выразится следующим образом:

$$e_n \sim p T R^{n-1} \sin(2n - 1) \nu l \exp[-i(2n - 1) k_1 l], \quad (\text{П.1})$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Вычисление суммарного поля, получающегося в результате интерференции всех  $n \rightarrow \infty$  лучей,

$$E_{-1}^{\Sigma} = T[E_{-1}(l) + R E_{-1}(3l) + R^2 E_{-1}(5l) + \dots], \quad (\text{П.2})$$

приводит к следующему выражению:

$$E_{-1}^{\Sigma} \sim p T \frac{\sin \nu l e^{ik_1 l} (R + e^{2ik_1 l})}{e^{2ik_1 l} - 2R \cos \nu l + R^2 e^{-2ik_1 l}}. \quad (\text{П.3})$$

Соответствующее значение интенсивности можно найти умножением (П.3) на комплексно-сопряженную величину. Коэффициент пропускания кристалла с ПДС для дифрагировавшей волны минус первого порядка вводим следующим образом:  $E_{-1}^{\Sigma} E_{-1}^{\Sigma*} = T_{\text{эфф}} E_{-1} E_{-1}^*$ , где  $T_{\text{эфф}}$  определяется выражением (21а). Если падающая волна имела  $s$ -поляризацию, то [13]

$$\tau = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \tau' = \frac{2 \sin \varphi \cos \psi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)},$$

$$r = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi)}, \quad r' = \frac{\text{tg}(\psi - \varphi)}{\text{tg}(\psi + \varphi)}.$$

б) Для отраженных световых лучей имеем последовательность

$$e'_n \sim p T' R^{n-1} r' \sin 2n \nu l e^{-i2nk_1 l}. \quad (\text{П.4})$$

Результирующее световое поле после интерференции всех отраженных лучей выразится суммой

$$E_{-1}^{\Sigma} \sim p \sin 2\nu l \frac{T' r'}{e^{2ik_1 l} - 2R \cos 2\nu l + R^2 e^{-2ik_1 l}}. \quad (\text{П.5})$$

Используя соотношение  $E_{-1}^{\Sigma} E_{-1}^{\Sigma*} = R_{\text{эфф}} E_{-1} E_{-1}^*$ , находим выражение для эффективного коэффициента отражения в направлении минус первого порядка, определяемое соотношением (21б).

в) Амплитуда и фаза световых волн, распространяющихся в направлении нулевого порядка, после прохождения кристалла имеет вид  $E_0 \sim s \cos \nu l e^{-ihl}$ . Следовательно, для отраженных лучей нулевого порядка световые поля составляют последовательность

$$e'_0 \sim sr,$$

$$e'_{n0} \sim s T' R^{n-1} r' \cos 2\nu l e^{-2ink_1 l}. \quad (\text{П.6})$$

Результирующее световое поле после интерференции всех отраженных лучей выразится суммой

$$E_0^{\text{в}} \sim -sr \left\{ 1 - T \frac{r'}{r} \frac{\cos 2\nu l - Re^{-2ik_1 l}}{e^{2ik_1 l} - 2R \cos 2\nu l + R^2 e^{-2ik_1 l}} \right\}. \quad (\text{П.7})$$

Интенсивность отраженного в нулевой порядок света запишем в виде  $I_0^{\text{в}} = E_0^{\text{в}} E_0^{\text{в}*} = R_0 R'_{\text{эфф}} E_0 E_0^*$ , где  $R_0 = r^2$  — коэффициент отражения света по интенсивности от размагниченного кристалла, а  $R'_{\text{эфф}}$  — коэффициент, показывающий, во сколько раз изменяется интенсивность света, отраженного в направлении нулевого порядка при магнитооптической интерференции дифрагировавших волн в кристалле. Значение этого коэффициента определяется выражением

$$R'_{\text{эфф}} = \frac{a - b \cos 2\nu l \cos 2k_1 l + c \cos 4k_1 l + d^2 \cos 2\nu l}{(1 - R^2)^2 + 4R^2 (\cos^2 2\nu l + \cos^2 2k_1 l) - 4R(1 + R^2) \cos 2\nu l \cos 2k_1 l}, \quad (\text{П.8})$$

где

$$a = 1 + c^2/4, \quad c = 2R(R + T' r'/r), \\ b = 2d(1 + R^2 + RT' r'/r), \quad d = 2R + T' r'/r.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Наскал, IEEE Trans. Magn., 6, 542 (1970).
2. R. S. Mezrich, IEEE Trans. Magn., 6, 537 (1970).
3. А. А. Соломко, В. И. Микитюк, Оптика и спектроскопия, 36, 996 (1974).
4. Д. И. Семенов, А. М. Морозов, Изв. вузов — Физика, 2, 67; 5, 64 (1975).
5. А. А. Ахуткина, М. В. Четкин, Микроэлектроника, 3, 358 (1974).
6. Д. И. Семенов, А. М. Морозов, Изв. СКНЦВШ, серия естественных наук, 2, 63 (1974); 2, 110 (1975).
7. Г. С. Криничик, О. Б. Есикова, А. Я. Червоненкис, ФТТ, 18, 2079 (1976).
8. А. М. Морозов, Экспресс-информация «Межотраслевые вопросы науки и техники», ГОСИНТИ, М., вып. 315 (1978).
9. H. Kogelnik, Bell Syst. Tech. J., 48, 2909 (1969).
10. Н. М. Померанцев, УФН, 111, 507 (1973).
11. Д. И. Семенов, А. М. Морозов, ФТТ, 20, 2591 (1978).
12. А. М. Морозов, Д. И. Семенов, ФТТ, 21, 686 (1979).
13. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.

Северо-Осетинский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
28 ноября 1978 г.

#### MAGNETO-OPTIC DIFFRACTION OF LIGHT IN THICK LAYERS WITH REGULAR DOMAIN STRUCTURE

*A. M. Morozov, D. I. Sementsov*

Equations have been obtained describing magneto-optic diffraction of light in thick layers with a band domain structure. The character of the diffraction spectrum is investigated for «cosinusoidal» and «trapezoidal» laws of distribution of  $M_z$  component of magnetization in different regions of Raman—Nat and Bragg diffraction. The effect on the character of the spectrum of magneto-optic multi-ray interference is confirmed by the experimental data with crystals Bi containing garnet.

УДК 538.573

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Г. А. Ляхов, В. А. Макаров

Проведен анализ преобразования пространственной когерентности и поляризационных свойств излучения в оптически активных средах (ОАС), твердых кристаллах и холестерических жидких кристаллах (ХЖК). Предсказаны эффекты приобретения светом конечной степени поляризации в ОАС и ХЖК, увеличения радиуса когерентности рентгеновских пучков при брэгговском рассеянии в совершенных кристаллах.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования пространственной когерентности (ПК) и поляризационных свойств (ПС) электромагнитного излучения [1] резко интенсифицировались с появлением когерентных (лазерных) источников [2]. Развития этих исследований требуют многочисленные приложения — голография, спектроскопия высокого разрешения в видимом и инфракрасном диапазонах, структурный анализ и дефектоскопия рентгеновского диапазона.

В настоящей работе исследуются эффекты преобразования ПК и ПС электромагнитного излучения в средах с пространственной дисперсией (ПД). Основное внимание обращено на новые эффекты: увеличение степени поляризации излучения при распространении в оптически активной среде, увеличение радиуса пространственной когерентности в процессе «экстинкционной дифракции» при брэгговском рассеянии в среде с сильной ПД.

Основные характеристики ПК и ПС монохроматического излучения — это матрица поперечной когерентности\*, составленная из корреляционных функций отдельных компонент поля:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z) = \langle E_i(\mathbf{r}, z) E_j^*(\mathbf{r}', z) \rangle, \quad i, j = x, y. \quad (1)$$

Здесь  $z$  — координата распространения,  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $P$  — степень поляризации, определяемая соотношением

$$P^2 = 1 - 4 \det \Gamma_{ij} \times (\text{Sp } \Gamma_{ij})^{-2}. \quad (2)$$

Значение  $P$  равно нулю для неполяризованного излучения ( $\Gamma_{ij} = \delta_{ij} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z)$ ) и отлично от нуля ( $0 < P < 1$ ) для частично поляризованного излучения. Степень ПК характеризуется радиусом поперечной когерентности (вообще говоря, матрицей радиусов когерентности)

\* Учет взаимного влияния поперечной и продольной (временной) когерентности — предмет отдельной работы (см. [3]).

$$r_{k,ij}^2 = 2 \frac{\int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 |\Gamma_{ij}|^2}{\int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Gamma_{ij}|^2}. \quad (3)$$

Для того, чтобы выявить основные эффекты, будем считать падающее на границу среды ( $z = 0$ ) излучение неполяризованным, с гауссовым профилем амплитуды и гауссовой же зависимостью от корреляционной координаты  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ :

$$\Gamma_{ij}(z = 0) = I_0 \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r} + \mathbf{r}')^2}{4r_0^2} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{r_k^2} \right] \delta_{ij}, \quad (4)$$

$I_0$  — средняя интенсивность на оси падающего пучка,  $r_0$  — ширина пучка.

Параметром ПД служит отношение характерного масштаба  $\Lambda$  пространственной нелокальности отклика среды к длине волны  $\lambda$  распространяющегося излучения. Мы рассмотрим предельные случаи слабой ( $\Lambda/\lambda \ll 1$  — оптически активные в видимом и ИК диапазонах среды,  $\Lambda$  — размер молекул) и сильной ПД ( $\Lambda/\lambda \sim 1$  — кристаллические решетки с периодом  $\Lambda$  для рентгеновского диапазона, холестерические жидкие кристаллы (ХЖК) для ИК и видимого диапазона,  $\Lambda$  — шаг холестерической спирали).

## 2. СЛАБАЯ ПД — ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫЕ СРЕДЫ (ОАС)

Распространение электромагнитного излучения в ОАС описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (5)$$

с материальным уравнением

$$\mathbf{D} = \overset{\wedge}{\epsilon}_0 \mathbf{E} - \overset{\wedge}{\alpha} \text{rot } \mathbf{E}, \quad (6)$$

где  $\overset{\wedge}{\epsilon}_0$  — тензор диэлектрической проницаемости,  $\overset{\wedge}{\alpha}$  — псевдотензор оптической активности. Качественно новый поляризационный эффект проявляется уже в изотропной ОАС ( $\epsilon_0$  — скаляр,  $\alpha$  — псевдоскаляр).

С помощью стандартной процедуры укорочения [4] из (5), (6) выводятся уравнения для медленных амплитуд  $A_{\pm}$  волн круговых поляризацій:

$$2ik_{\pm} \frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} = \Delta_{\perp} A_{\pm}, \quad (7)$$

где

$$k_{\pm} = k(1 \pm \nu), \quad \nu = \frac{k\alpha}{2\epsilon_0}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Амплитуды  $A_{\pm}$  находятся с помощью известной функции Грина уравнения (7); усредняя их произведения с учетом граничного условия (4), получаем, что составляющие светового пучка с противоположными круговыми поляризациями дифрагируют по-разному (из-за зависимости эффективной длины волны от поляризации); это приводит к смешению компонент с ортогональными линейными поляризациями и, как следствие, к изменению ПС пучка. С учетом (4) (полностью неполяризованное излучение) находим, что увеличение  $r_k(z)$  происходит так же, как и в среде без ПД:

$$\left[ \frac{r_k(z)}{r_k(0)} \right]^2 = 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi r_0 r_k(0)} \right)^2, \quad (8)$$

$\lambda$  — длина волны. Для дельта-коррелированного на границе излучения ( $r_k(0) \rightarrow 0$ ) получаем известный результат [1]:

$$r_k(z) = \lambda z / \pi r_0.$$

Новым для ОАС является приобретение в ней пучком частичной поляризации

$$P(z) = 2\rho z^2 / k(L^2 + z^2),$$

где  $\rho = \nu k$  — удельное вращение плоскости поляризации,  $L = kr_0 r_k / 2$ . В обычных оптических активных жидкостях  $\rho = 10^{-1} \div 10^1 \text{ см}^{-1}$ , поэтому отмеченный эффект трудно наблюдаем. Благоприятней ситуация в ХЖК, вблизи полос кругового дихроизма которых величина  $\rho = 10^2 \div 10^3 \text{ см}^{-1}$ ; при типичных значениях параметров ( $z = 10^{-1} \text{ см}$ ,  $r_0 = 10^{-2} \text{ см}$ ,  $r_k = 10^{-3} \text{ см}$ ,  $\lambda = 10^{-4} \text{ см}$ )  $P(z)$  может достигать десятков процентов.

### 3. СИЛЬНАЯ ПД — БРЭГГОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНЫХ РЕНТГЕНОВСКИХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

В ОАС малость эффектов ПД для оптического диапазона связана с малостью параметра  $\Lambda_{\text{ОАС}} / \lambda_{\text{опт}} \sim 10^{-3}$ , где  $\Lambda_{\text{ОАС}} \sim 10^{-7} \text{ см}$  — размер молекул. Противоположная ситуация реализуется при рассеянии рентгеновских лучей в кристаллах, параметр ПД  $\Lambda_{\text{реш}} / \lambda_{\text{рент}}$  здесь порядка 1. Поляризационные эффекты в этом случае малы из-за слабой анизотропии кристаллов в рентгеновском диапазоне, и поэтому будем рассматривать только одну из компонент поля; однако же изменения пространственной когерентности здесь существенны.

Материальное уравнение теперь имеет вид

$$D = \left[ 1 + \chi_0 + \sum_{k_h \neq 0} \chi_h (\exp(i\mathbf{k}_h \mathbf{r}) + \text{к. с.}) \right] E, \quad (9)$$

суммирование проводится по векторам обратной решетки.

В условиях брэгговского резонанса для одного из  $k_h$ ,

$$\Delta = 1 - (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_h)^2 / k_0^2, \quad k_0 = \omega / c, \quad (10)$$

с падающей на кристалл волной  $E^0$  эффективно взаимодействует одна рассеянная под брэгговским углом волна  $E^h$ . Представляя поле в кристалле в виде суперпозиции

$$E = [E^0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + E^h \exp[-i(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_h) \mathbf{r}]] \exp(i\omega t) + \text{к. с.},$$

в предположении  $r_0, r_h \gg \lambda$  получаем уравнения двухволнового приближения [5]:

$$\begin{aligned} \frac{2i}{k_0^2} (\mathbf{k}_0 \nabla) E^0 &= \chi_0 E^0 + \chi_h E^h, \\ \frac{2i}{k_0^2} ((\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_h) \nabla) E^h &= \chi_h E^0 + (\chi_0 + \Delta) E^h. \end{aligned} \quad (11)$$

Зависимость эффективности брэгговского рассеяния от параметров когерентности рентгеновских пучков и связанные с ней возможности измерения этих параметров для различных рентгеновских источников



проанализированы в [3]; здесь мы обращаем внимание на изменение  $r_k$  в функции параметров кристалла.

Уравнения (11) не учитывают эффектов обычной дифракции (толщина кристалла  $L < kr_0 r_k$  — это условие легко выполняется при разумных значениях  $L$ ); интерференционные эффекты, тем не менее, имеют место благодаря взаимодействию проходящего и рассеянного пучков.

Уравнения (11) с граничными условиями (4) для волны  $E^0$  и  $\Gamma^{hh}(z=0) = 0$  для рассеянной волны будем решать в предположении  $r_0, r_k > L_0$ , где экстинкционная длина  $L_0 = 2(k_0 \operatorname{Re} \chi_h)^{-1}$ , допускающем их вторичное укорочение\*. Предполагаем, что рассеяние происходит в геометрии Лауэ [7], векторы падающего и рассеянного полей параллельны оси  $y$ , кристалл является «тонким», т. е.  $L < (k_0 \operatorname{Im} \chi_0, h)^{-1}$ . Комбинируем (11) с комплексно-сопряженными уравнениями, домножая их на амплитуды в смещенных точках и попарно складывая. Проинтегрировав полученные уравнения по поперечной координате  $(x+x')$  и усреднив, получаем четыре уравнения для корреляционных функций

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \int d(x+x') \langle E^\alpha E^{\beta*} \rangle, \quad \alpha, \beta = 0, h,$$

в безразмерных координатах  $\rho = k_0 \chi_h z / 2 \cos \theta$ ,  $\xi = k_0 \chi_h (x-x') \times (4 \sin \theta)^{-1}$ ,  $\theta$  — угол падения:

$$\frac{\partial \Gamma^{00, hh}}{\partial \rho} = \pm i(\Gamma^{0h} - \Gamma^{h0}), \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho} \pm \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Gamma^{0h, h0} = \pm i(\Gamma^{00} - \Gamma^{hh}).$$

Система (12) имеет первый интеграл

$$\Gamma^{00} + \Gamma^{hh} = \Gamma^{00}(0, \xi). \quad (13)$$

Используя его, приведем (12) к виду

$$\frac{\partial \Gamma^{hh}}{\partial \rho} = i(\Gamma^{h0} - \Gamma^{0h}), \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 4 \right) (\Gamma^{h0} - \Gamma^{0h}) = 0. \quad (14)$$

Если излучение полностью когерентно  $\left( \frac{\partial}{\partial \xi} = 0 \right)$ , решение (14) есть

$$\begin{aligned} \Gamma^{hh} &= F_C \cos 2\rho + F_S \sin 2\rho + \Gamma^{00}(0, \xi)/2, \\ \Gamma^{h0} - \Gamma^{0h} &= 2i[F_C \sin 2\rho - F_S \cos 2\rho], \end{aligned} \quad (15)$$

$F_C, S$  — константы, зависящие от граничных условий.

Для анализа рассеяния частично когерентного излучения поступаем аналогично тому, как это делается при переходе к параболическому приближению в задачах дифракции [8], именно, отыскиваем решение (14) в виде (15), считая  $F_C, S = F_C, S(\mu\rho, \sqrt{\mu} \xi)$  функциями, медленно меняющимися на периоде тригонометрических функций в (15), т. е. на расстояниях порядка  $L_0$ . Здесь  $\mu$  — малый параметр порядка  $L_0/r_k$ ; предполагается, что корреляционные функции спадают при больших  $\xi$  (аналогия в задачах дифракции — переход в область тени по поперечной координате пучка [8]).

\* Брэгговское рассеяние когерентных пучков исследовалось аналогичным способом в [8].

Подставляя теперь функции вида (15) во второе уравнение системы (14), домножая его последовательно на  $\cos 2\rho$ ,  $\sin 2\rho$  и интегрируя по периоду  $Z = \pi$ , приходим к системе уравнений

$$4 \frac{\partial F_{c,s}}{\partial \rho} = \mp \frac{\partial^2 F_{s,c}}{\partial \xi^2}, \quad (16)$$

которые описывают расширяющиеся с координатой распространения в кристалле косинус—синус амплитуды корреляционных функций. Диффузионный тип уравнений (16) дает указание на аналогичный обычному дифракционный механизм увеличения  $r_k$  при динамическом рассеянии в кристаллах: интерференционное перемешивание проходящей и рассеянной волн из-за переотражений от кристаллических плоскостей. Для диагональных корреляционных функций, в частности, имеем

$$\frac{2\Gamma^{hh,00}(z=L)}{I_0} = \exp \left[ -\frac{(x-x')^2}{r_k'^2} \right] \mp (1+A^2/r_k'^4)^{-1/4} \cos \left( \frac{2L}{L_0} - \frac{A(x-x')}{r_k'^4(1+A^2/r_k'^4)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{r_k'^2} \right) \right) \exp \left[ -\frac{(x-x')^2}{r_k'^2(1+A^2/r_k'^4)} \right], \quad (17)$$

где  $A = 4LL_0 \operatorname{tg}^2 \theta$ ,  $r_k' = r_k/\cos \theta$ . На рис. 1 изображена нормированная корреляционная функция  $\Gamma^{hh}$ . Кривые 1—4 соответствуют  $L/L_0 = 2, 4; 8; \infty$ ,  $L_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta / r_k'^2 = 0,5$ . Смешанные корреляционные функции также отличны от нуля:

$$\frac{2\Gamma^{0h,h0}(z=L)}{I_0} = \pm i \exp \left[ -\frac{(x-x')^2}{r_k'^2(1+A^2/r_k'^4)} \right] \left( 1 + \frac{A^2}{r_k'^4} \right)^{-1/4} \times \sin \left( \frac{2L}{L_0} - \frac{A(x-x')^2}{r_k'^4(1+A^2/r_k'^4)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{r_k'^2} \right) \right). \quad (18)$$

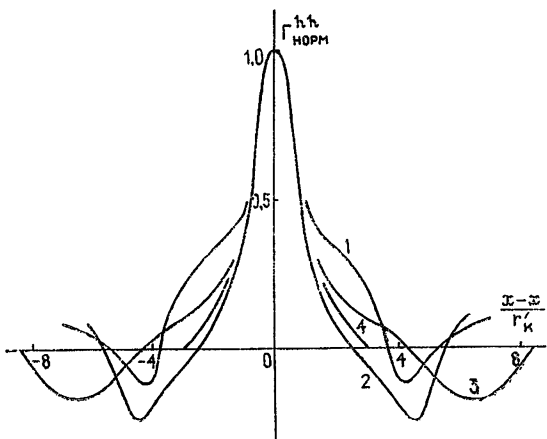


Рис. 1.

Пользуясь определением (3), из (17) можно получить довольно громоздкое выражение для  $r_k(L)$ , в пределе  $r_k \rightarrow 0$  (некогерентное излучение) из которого следует результат, близкий теореме Ван-Циттерта—Цернике:

$$r_k(L) = (L_0 L)^{1/2} \operatorname{tg} \theta; \quad (19)$$

рентгеновское излучение становится частично когерентным из-за «экстинкционной дифракции» (ср. (16) и (7)). Эффект, описываемый (19), существен при типичных значениях параметров рентгеновских интерферометров:  $L_0 \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$  см,  $L \sim (10^1 \div 10^2) L_0$ .

#### 4. СИЛЬНАЯ ПД — БРЭГГОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ХЖК

ХЖК обладают периодической спиральной структурой (типичный период которой  $\Delta_{\text{ХЖК}} \sim 10^{-1} \div 1$  мк лежит в ИК или видимом диапазоне); их оптические свойства характеризуются как пространственной периодичностью, так и циркулярной анизотропией, следовательно, при распространении в них частично когерентного, частично поляризованного света должны проявляться как эффекты, присущие обычным кристаллам, так и эффекты ОАС.

Материальное уравнение ХЖК имеет вид  $\hat{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$  с тензором [9]

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 - \delta & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 + \delta \cos 2qx & -\delta \sin 2qx \\ 0 & -\delta \sin 2qx & \epsilon_0 - \delta \cos 2qx \end{pmatrix} \quad (20)$$

(ось холестерической спирали с шагом  $\pi/q$  совпадает с осью  $x$ ), где константы  $\epsilon_0$  и  $\delta$  выражаются через продольную  $\epsilon_{\parallel}$  и поперечную  $\epsilon_{\perp}$  проницаемость:  $\epsilon_0 = (\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp})/2$ ,  $\delta = (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})/2$ .

При точном выполнении брэгговского условия  $2k \sin \theta = q$  первое укорочение волнового уравнения, для достаточно больших углов падения  $\theta$  ( $\pi/2 - \theta \gg 0,3$ , рис. 2), приводит к системе уравнений

$$2i \left( \pm \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \right) A_{\pm}^{0,h} = \frac{k_0 \delta}{2\epsilon_0} (1 + \sin^2 \theta) A_{\pm}^{h,0}; \quad (21)$$

$$2i \left( \pm \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \right) A_{\pm}^{0,h} = 0. \quad (21a)$$

Здесь

$$A_{\pm}^{\alpha} = E_{\eta_{\alpha}}^{\alpha} \sin \theta + i E_y^{\alpha}, \quad A_{\pm}^{\alpha} = E_{\eta_{\alpha}}^{\alpha} / \sin \theta - i E_y^{\alpha}, \quad \alpha = 0, h \quad (22)$$

— эллиптически поляризованные составляющие проходящей ( $\alpha = 0$ ) и рассеянной ( $\alpha = h$ ) волн. Ось  $\eta_{\alpha}$ ; перпендикулярна  $y$  и  $k_{\alpha}$  (рис. 2).

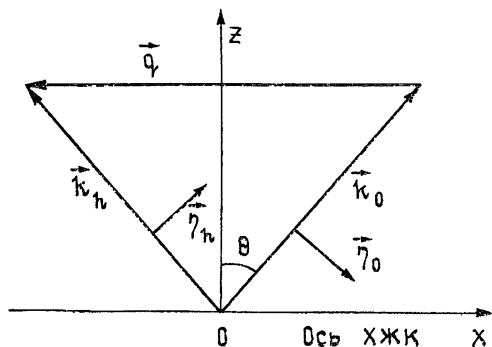


Рис. 2.

Взаимодействует в среде лишь одна пара из этих волн, вторая пара (см. (21a)) распространяется без изменений. Из уравнений (21) и (21a) (и комплексно-сопряженных им) так же, как это проделывалось

в разд. 3, выводятся 16 уравнений для интегральных корреляционных функций  $\Gamma_{ij}^{\alpha\beta} = \langle A_i^\alpha A_j^{\beta*} \rangle$  ( $i, j = +, -; \alpha, \beta = 0, h$ ), существенно связанными из которых являются четыре, составленные из амплитуд  $A_+^\alpha$ . В безразмерных координатах  $\xi = k_0 \delta(1 + \sin^2 \theta)(x - x') (8\epsilon_0 \sin \theta)^{-1}$ ,  $\rho = k_0 \delta(1 + \sin^2 \theta) z / 4\epsilon_0 \cos \theta$  эти уравнения имеют вид (12).

Решение этой системы находим аналогично проведенному в разд. 3; для неполяризованного при  $z=0$  излучения ( $\langle E_y^0 E_{\eta_0}^{0*} \rangle = \langle E_{\eta_0}^0 E_y^0 \rangle = 0$ ,  $I_0 = \langle |A_+^0|^2 \rangle$ ) оно совпадает с (17) и (18); роль экстинкционной длины играет теперь величина  $L_0 = 4 \cos \theta \epsilon_0 / \delta k_0 (1 + \sin^2 \theta)$ . Изменение  $r_h(L)$ , поэтому, происходит так же, как в обычных кристаллах; увеличение  $r_h(L)$ , некоррелированного на границе среды излучения, описывает формула (19).

Элементы матрицы поперечной когерентности в собственных декартовых координатах каждого пучка представляют собой линейные комбинации  $\Gamma_{ij}^{\alpha\beta}$ . Проходящая и рассеянная волны существенно отличаются по степени поляризации — в этом заключается самый существенный эффект брэгговского рассеяния частично поляризованного света в ХЖК. Матрица когерентности  $\hat{J}_h$  рассеянного пучка (ради простоты выписываем значения ее элементов в точке  $x - x' = 0$ ) имеет вид

$$\frac{2\hat{J}_h(L)}{I} = \frac{[1 - G(L)]}{1 + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & i \sin \theta \\ -i \sin \theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$I = \langle |E_y^0|^2 \rangle = \langle |E_{\eta_0}^0|^2 \rangle, \quad G(L) = (1 + A^2/r_k'^4)^{-1/4} \times \\ \times \cos \left( 2L/L_0 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{A}{r_k'^2} \right),$$

откуда следует сразу, что  $P^h = 1$ , т. е. рассеянный под брэгговским углом пучок полностью поляризован.

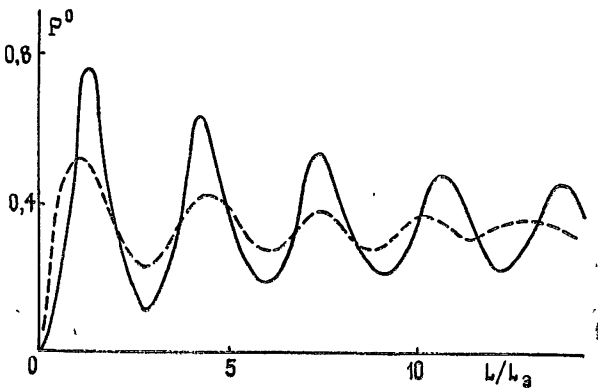


Рис. 3.

Матрица когерентности  $\hat{J}_0$  проходящего пучка

$$\frac{2\hat{J}_0(L)}{I} = [1 + G(L)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{[1 - G(L)]}{1 + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (24)$$

степень его поляризации изменяется с толщиной ХЖК по закону

$$P^0(L) = \frac{1 - G(L)}{3 + G(L)}; \quad P^0(L \rightarrow \infty) \rightarrow 1/3, \quad (25)$$

ее значение достигает заметной величины (порядка  $10^{-1}$ ) при толщине ХЖК порядка  $L_0$ . Для типичных холестериков  $\delta \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$  и в оптическом диапазоне  $L_0 \sim 10^{-2}$  см. На рис. 3 сплошная кривая соответствует  $4L_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta / r_k'^2 = 1$ , пунктирная — 5.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показывает, что при распространении излучения в средах с ПД его когерентные и поляризационные свойства могут заметно улучшаться. Основные качественные результаты состоят в следующем: 1) при распространении света в ОАС степень его поляризации повышается; 2) брэгговское рассеяние электромагнитного излучения в кристаллах сопровождается не зависящим от эффектов обычной дифракции (и для рентгеновских пучков в типичных кристаллах гораздо более резким) ростом радиуса ПК; 3) степень поляризации света также повышается при рассеянии на решетке ХЖК, причем под брэгговским углом распространяется полностью поляризованная волна.

Два последних эффекта, в силу большой, по оценкам, их величины, вполне наблюдаемы; они могут существенно влиять на протекание различных процессов преобразования излучения в твердых и ЖК кристаллах, таких, как монохроматизация рентгеновского излучения в многокристалльных интерферометрах, генерация гармоник, самофокусировка и вынужденные рассеяния света в ХЖК, лазерная генерация красителей в ЖК матрицах.

Авторы глубоко благодарны С. А. Ахманову за поддержку работы и ценные критические замечания; Б. А. Гришанину, В. И. Жарикову, Ю. В. Пономареву за полезные обсуждения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
2. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1971.
3. С. А. Ахманов, Б. А. Гришанин, Г. А. Ляхов, Ю. В. Пономарев, Доклад на V Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, 1977.
4. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНТИ, М., 1964.
5. S. Takagi, Acta Gryst., 15, 1311 (1962).
6. А. В. Андреев, Ю. А. Ильинский, Письма в ЖЭТФ, 22, 462 (1975).
7. З. Г. Пинскер, Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в идеальных кристаллах, изд. Наука, М., 1974.
8. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
9. П. де Жен, Физика жидких кристаллов, изд. Мир, М., 1977.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
4 июля 1978 г

### FORMATION OF SPACE COHERENCY AND POLARIZATION PROPERTIES OF ELECTROMAGNETIC RADIATION IN MEDIA WITH SPACE DISPERSION

G. A. Lyakhov, V. A. Makarov

An analysis is carried out of conversion of the space coherency and polarization properties of radiation in optically active media (OAM), solid crystals and cholesteric fluid crystals (CFC). Effects of light finite degree polarization in OAM and CFC as well as increase of the radius of X-ray beam coherency in Bragg scattering in perfect crystals, are presented.

УДК 534.222.2

## О ВОЗБУЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ АЛЬФВЕНОВСКОЙ НАКАЧКОЙ

*В. М. Галкин, И. А. Каныгина, С. М. Файнштейн*

Рассмотрена задача о генерации нелинейной периодической звуковой волны альфвеновской накачкой. Выведены уравнения для амплитуды  $k$ -й гармоники звука. Получено и проанализировано уравнение, описывающее форму стационарной нелинейной звуковой волны. Исследованы некоторые предельные случаи решений дифференциального уравнения, определяющего спектр возбуждаемых волн.

Известно (см., например, [1-3]), что под действием двух высокочастотных (ВЧ) волн может генерироваться низкочастотная (НЧ) нелинейная периодическая волна, если характер дисперсии НЧ волн линейный. В работах [1-3] определена приближенная форма песинусоидальных НЧ волн, когда при достаточной диссипации можно учитывать лишь три гармоники НЧ волны. Однако представляет интерес полное исследование формы НЧ волны, спектр которой может содержать достаточно много гармоник основной части. Эта задача имеет смысл при достаточно малом затухании и слабой дисперсии НЧ волн, когда под действием накачки возбуждается целый набор гармоник основной частоты.

В данной работе на примере взаимодействия двух встречных альфвеновских и звуковой волн выведено дифференциальное уравнение, описывающее стационарную форму нелинейной НЧ волны. Проанализированы предельные случаи решений указанного уравнения. Полученные в работе результаты представляют интерес для описания генерации НЧ сигналов различной природы (ионного и магнитного звука, волн на поверхности воды и т. д.), когда дисперсия и затухание колебаний достаточно малы. Кроме того, данная задача может быть полезна для диагностики плазменных систем — определения параметров плазмы по характеру возбуждаемых колебаний, а также для интерпретации эффектов в космической плазме, например, возбуждения зebra-структур в атмосфере Солнца [4].

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходная одномерная система уравнений магнитной гидродинамики (постоянное магнитное поле  $H_0 \parallel Oz$ ) имеет вид\*

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \mu \left( -\frac{1}{4\pi\rho_0} H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{c_s^2}{\rho_0^2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x), \quad (1)$$

\* Предполагаем, что частоты волн Альфвена достаточно велики, так что их затуханием можно пренебречь

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} - H_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} (v_x H_y),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{c_A^2}{H_0} \frac{\partial H_y}{\partial x} = \mu \left( -v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{c_A^2}{H_0} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right),$$

где  $v_x, v_y, H_y, \rho$  — отклонения скорости, напряженности магнитного поля и плотности от равновесных значений  $0, H_0, \rho_0$ ;  $c_s$  — скорость изотермического звука;  $c_A = H_0(4\pi\rho_0)^{-1/2}$  — альфвеновская скорость;  $\eta$  — коэффициент вязкости; параметр  $\mu \ll 1$  введен для обозначения малости правых частей (1).

Рассмотрим взаимодействие двух встречных альфвеновских волн частот  $\omega_{1,2}$  и волновых векторов  $k_{1,2}$  со звуковой волной частоты  $\Omega$  и волнового вектора  $q$ . Поскольку для обычных условий  $c_s \ll c_A$ , то условия синхронизма

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + \Omega, \\ k_2 &= k_1 + q \end{aligned} \quad (2)$$

могут быть выполнены, если  $k_2 \sim -k_1 = k, q \sim 2k$ ,

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_{1,2}.$$

При  $\mu \ll 1$  решение (1) ищем в виде

$$\rho = \sum_{m=1}^M b_m e^{i\Omega m t - i q m x} + \text{к. с.},$$

$$H_y = \sum_{n=1}^2 a_n e^{i\omega_n t - i k_n x} + \text{к. с.}$$

Заметим, что максимальное число гармоник звукового поля определяется из условия, что расстройка от синхронизма, связанная с учетом поглощения в дисперсионном уравнении для звука, должна быть достаточно мала. Для соответствующей оценки числа гармоник запишем дисперсионное уравнение с учетом поглощения для  $M$ -й гармоники звука

$$\Omega(\Omega - i\nu) = c_s^2 M^2 q^2,$$

отсюда

$$\Omega = \frac{i\nu}{2} \pm \sqrt{c_s^2 M^2 q^2 - \frac{\nu^2}{4}}, \quad (3)$$

$\nu$  — коэффициент поглощения, связанный с вязкостью; он равен  $\eta M^2 q^2$ ,  $\eta \sim c_s^2/\nu_{\text{эфф}}$  ( $\nu_{\text{эфф}}$  — эффективная частота соударений ионов плазмы). Поглощение не изменяет существенным образом дисперсионное уравнение бесстолкновительного звука

$$\Omega = c_s q,$$

если  $\nu^2/4 \ll c_s^2 M^2 q^2$ , т. е.

$$M \ll \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\Omega}.$$

(Здесь использовалось приведенное выше выражение  $\nu$  через скорость звука и значение  $\nu_{\text{эфф}}$ .) При этом  $\nu_{\text{эфф}}/\Omega \gg 1$ , иначе нарушаются пределы применимости уравнений гидродинамики. Отметим также, что

поглощение  $M$ -й гармоники при том же условии достаточно мало, и его можно не учитывать в дисперсионном уравнении. Используя стандартную методику [5, 6], получим уравнения для безразмерных комплексных амплитуд взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1^{(\delta)}}{\partial t} - \beta \frac{\partial a_1^{(\delta)}}{\partial x} &= \frac{i}{4} a_2^{(\delta)} b_1^{(\delta)*}, \\ \frac{\partial a_2^{(\delta)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial a_2^{(\delta)}}{\partial x} &= \frac{i}{4} a_1^{(\delta)} b_1^{(\delta)}, \\ \frac{\partial b_1^{(\delta)}}{\partial t} + \frac{\partial b_1^{(\delta)}}{\partial x} &= i \frac{\beta^2}{2} a_1^{(\delta)*} a_2^{(\delta)} + i (b_2^{(\delta)} b_1^{(\delta)*} + \\ &+ b_3^{(\delta)} b_2^{(\delta)*} + \dots + b_n^{(\delta)} b_{n-1}^{(\delta)*}) - \nu b_1^{(\delta)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial b_2^{(\delta)}}{\partial t^{(\delta)}} + \frac{\partial b_2^{(\delta)}}{\partial x^{(\delta)}} = 2i (b_3^{(\delta)} b_1^{(\delta)*} + b_4^{(\delta)} b_2^{(\delta)*} + \dots + b_n^{(\delta)} b_{n-2}^{(\delta)*} + b_1^{(\delta)2}) - 4\nu b_2^{(\delta)},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_3^{(\delta)}}{\partial t^{(\delta)}} + \frac{\partial b_3^{(\delta)}}{\partial x^{(\delta)}} &= 3i (b_4^{(\delta)} b_1^{(\delta)*} + b_5^{(\delta)} b_2^{(\delta)*} + \dots + b_n^{(\delta)} b_{n-3}^{(\delta)*} + \\ &+ b_2^{(\delta)} b_1^{(\delta)}) - 9\nu b_3^{(\delta)} \end{aligned}$$

и т. д., где

$$a_{1,2}^{(\delta)} = \frac{a_{1,2}}{H_0}, \quad b_m^{(\delta)} = \frac{b_m}{\rho_0}, \quad x_\delta = qx,$$

$$t_\delta = t\Omega, \quad \beta^2 = \frac{c_A^2}{c_s^2}, \quad \nu = \eta q^2 = \frac{\Omega}{\nu_{эфф}}$$

(индекс „ $\delta$ “ будем в дальнейшем опускать).

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН

Для исследования генерации стационарной звуковой волны в заданном поле квазистоячей альфвеновской накачки ( $|a_2| \approx |a_1| = a$ ,  $\arg a_2 - \arg a_1 = \pi$ ) необходимо решить алгебраическую систему  $n$  уравнений для  $n$  амплитуд волн (для рассматриваемой модели считаем, что  $n \rightarrow \infty$ ). Запишем уравнение для  $k$ -й амплитуды в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2(b_{k+1} b_1^* + b_{k+2} b_2^* + \dots) \mp_n (b_1 b_{k-1} + b_2 b_{k-2} + \dots + \\ + b_{k-1} b_1) = 2\bar{\nu} b_k k \quad (\bar{\nu} = i\nu, \quad k > 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку  $b_k$  —  $k$ -я гармоника звука, то удобно ввести производящую функцию, которая является суммой бесконечного числа гармоник звука, т. е. определяет форму стационарного сигнала в системе координат, бегающей со скоростью  $c_s$ :

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{ikx}, \quad (6)$$

где  $b_0 = 0$ ,  $b_{-k} = b_k^*$ . Используя (5) и уравнение для  $b_1$ , легко получить дифференциальное уравнение, определяющее  $\varphi(x)$ :



$$2\nu \varphi'(x) = -C_0 + 4|a|^2 \cos x + \varphi^2(x). \quad (7)$$

Здесь  $C_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} b_s b_s^*$  — величина, характеризующая полную энергию звуковых гармоник; полагая  $\varphi(x) = \nu F(x)$ ,  $\delta^2 = |a|^2 \beta^2 / \nu^2$ ,  $C = C_0 / 2\nu^2$ , получим

$$F'(x) = -C + \delta^2 \cos x + \frac{1}{2} F^2(x). \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет профиль стационарной периодической волны при заданном  $\delta$  (величине накачки и затухания). Если положить  $u(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x F(x) dx\right)$ , то для определения функции  $u(x)$  из (8) получим уравнение Матье

$$u'' + \frac{1}{2} (-C + \delta^2 \cos x) u = 0. \quad (9)$$

Поскольку  $u(x)$  — положительная и периодическая функция, то  $C < \delta^2$ . Физически это соответствует закону сохранения энергии — энергия звука не может превышать энергию накачки. Легко показать, что функция  $F(x)$  нечетная и не содержит нулей на интервале  $(0, \pi)$ , т. е. на этом интервале имеет единственный экстремум, равный

$$F_{\max} = \sqrt{2(C - \delta^2 \cos x_{\max})}.$$

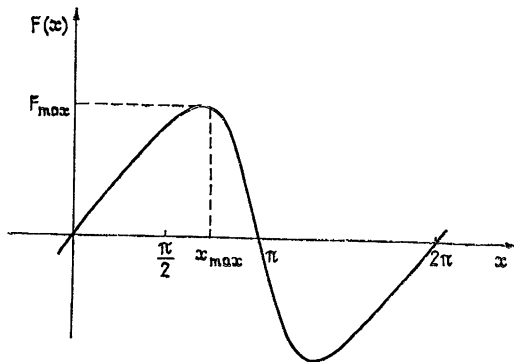


Рис. 1. Качественный профиль нелинейной волны.

Качественный вид функции  $F(x)$  изображен на рис. 1. Из единственности решения уравнения (9) следует, что  $C = C(\delta^2)$ . Таким образом, мы имеем задачу о собственных значениях — необходимо найти вид зависимости  $C(\delta^2)$ , а затем определить вид функций  $F(x)$  или  $u(x)$ . Оценим асимптотику  $C(\delta^2)$  при  $\delta^2 \gg 1$  и  $\delta^2 \ll 1$ . Для этого представим  $C(\delta^2)$  и  $u(x)$  в виде рядов по соответствующим степеням  $\delta$ . Затем подставим эти выражения в (8) и (9) и приравняем члены с одинаковыми степенями  $\delta$ . В результате получим

$$\frac{C}{\delta^2} = \frac{1}{4} \delta^2 + \frac{3}{128} \delta^6 + O(\delta^6) \quad (\delta^2 \ll 1),$$

$$\frac{C}{\delta^2} = 1 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{8\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \quad (\delta^2 \gg 1).$$

Значит при  $\delta \gg 1$   $C \sim \delta^2$ , т. е. при малом затухании энергия накачки почти полностью переходит в энергию звуковых волн. При этом профиль стационарной волны близок к «пиле». С помощью ЭВМ проводился счет формы волны звука при произвольных значениях параметра  $\delta$ . Некоторые результаты численного решения (8), (9) представлены на рис. 2; видно, что с ростом  $\delta$  профиль волны становится круче, что связано с обогащением спектра возбуждаемых колебаний (спектр нелинейной звуковой волны изображен на рис. 3). Из анализа (5) следует, что  $|b_k| \sim 1/k^3$  при  $k \gg 1$  (см. Приложение).

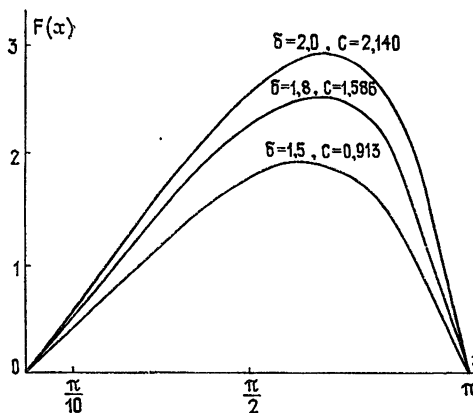


Рис. 2.

Рис. 2. Численный счет профиля звуковой волны.

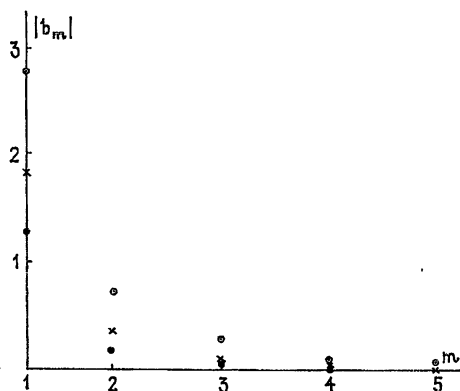


Рис. 3.

Рис. 3. Спектр звуковой волны: светлые кружки —  $\delta = 2$ , крестики —  $\delta = 1,5$ , темные кружки —  $\delta = 1,2$ .

В заключение заметим, что рассмотренная задача может быть решена другим способом: можно вывести модифицированное уравнение Бюргерса, описывающее эволюцию звука под действием квазимонохроматической накачки, а затем исследовать стационарные решения указанного уравнения. Однако спектральный подход, использованный в данной работе, нам представляется более предпочтительным, так как позволяет проследить динамику образования нелинейной волны без значительных математических трудностей.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Зависимость  $b_k$  от волнового числа выведем путем последовательных уточнений. Поскольку

$$|b_{k+1}b_1^* + b_{k+2}b_2^* + \dots| \leq \frac{1}{2} (|b_{k+1}|^2 + |b_1|^2 + |b_{k+2}|^2 + \dots + |b_2|^2 + \dots) = O(1),$$

$$|b_1b_{k-1} + b_2b_{k-2} + \dots + b_{k-1}b_1| \leq \frac{1}{2} (|b_1|^2 + |b_{k-1}|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_1|^2) = O(1),$$

то из (5) следует, что  $b_k = O(1/k)$ . Это обстоятельство позволяет более точно оценить правую часть (5):

$$b_{k+1} b_1^* + b_{k+2} b_2^* + \dots = O\left(\frac{1}{k+1} \frac{1}{1} + \frac{1}{k+2} \frac{1}{2} + \dots\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{k} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}\right]\right) = O\left(\frac{\ln k}{k}\right),$$

аналогично

$$b_1 b_{k-1} + b_2 b_{k-2} + \dots = O\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Следовательно,  $b_k = O(\ln k/k^2)$  (см. (5)). Проведем дальнейшее уточнение:

$$b_{k+1} b_1^* + b_{k+2} b_2^* + \dots = O\left(\sum_1^{\infty} \frac{\ln(k+s) \ln s}{(k+s)^2 s^2}\right) =$$

$$= O\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{(k+s)^{2-\varepsilon} s^{2-\varepsilon}}\right) = O\left(\frac{1}{k^{2-\varepsilon}}\right)$$

( $\varepsilon \rightarrow$  бесконечно малая). Вторая сумма имеет вид

$$b_1 b_{k-1} + b_2 b_{k-2} + \dots = O\left(\frac{\ln 1}{0} + \frac{\ln(k-1)}{2} + \dots\right) =$$

$$= O\left(\ln^2 k \left[\frac{1}{1^2(k-1)^2} + \frac{1}{2^2(k-2)^2} + \dots\right]\right),$$

но

$$\frac{1}{1^2(k-1)^2} + \frac{1}{2^2(k-2)^2} + \dots =$$

$$= \sum_{s=1}^{k-1} \left[\frac{1}{s(k-s)}\right]^2 = \frac{1}{k^3} \sum_{s=1}^{k-1} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{k-s}\right]^2 = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Отсюда окончательно имеем, что асимптотически ( $k \rightarrow \infty$ )  $b_k \sim 1/k^3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, **60**, 1696 (1971).
2. Н. С. Петрухин, С. М. Файнштейн, ЖТФ, **45**, 151 (1975).
3. С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, **71**, 1021 (1976); Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 10, 1405 (1978).
4. В. В. Фомичев, И. М. Черток, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 9, 1255 (1977).
5. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, **13**, 163 (1970).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
17 октября 1978 г.

#### EXCITATION OF A NONLINEAR SOUND WAVE BY QUASI-MONOCHROMATIC ALFVEN PUMPING

V. M. Galkin, I. A. Kanygina, S. M. Fainshtein

A problem is considered on generation of a nonlinear periodic sound wave by Alfvén pumping. Equations are derived for the amplitude of a  $k$ -th sound harmonic. An equation has been obtained and analysed which describes the form of a stationary nonlinear sound wave. Some limiting cases of solutions of the differential equation defining the spectrum of exciting waves are analysed.

УДК 621 396 621.324

## ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ФОТОПРИЕМНИКА С ГЕТЕРОДИНИРОВАНИЕМ СИГНАЛА В ФЭУ

А. А. Савенок, В. Н. Кижнерова

Рассматривается чувствительность приемника модулированного оптического излучения на основе схемы с гетеродинированием сигнала в ФЭУ по сравнению со схемой с прямым детектированием. Учитываются нелинейные искажения электрооптического модулятора.

Известно, что в видимой и ближней инфракрасной областях спектра электромагнитных волн самым чувствительным приемником является фотоэлектронный умножитель (ФЭУ). При большом количестве диодов коэффициент усиления ФЭУ достигает  $10^5 - 10^7$ . Дополнительным достоинством ФЭУ является низкий уровень внутренних шумов. Однако полоса пропускания стандартного фотоэлектронного умножителя ограничена частотой порядка нескольких десятков мегагерц.

В оптических каналах связи для приема амплитудно-модулированного света может быть применен гетеродинный принцип, который широко применяется в радиочастотных приемных системах.

В случае гетеродинирования сигнала в ФЭУ фототок модулируется сигналом опорного радиочастотного генератора. В итоге на сопротивлении нагрузки ФЭУ выделяется составляющая с частотой, равной разности между частотой гетеродина и частотой электрооптического модулятора. Функциональная схема приемника приведена на рисунке (1 — фотоприемник (ФЭУ-модулятор), 2 — усилитель, 3 — спектр-анализатор, 4 — гетеродин).

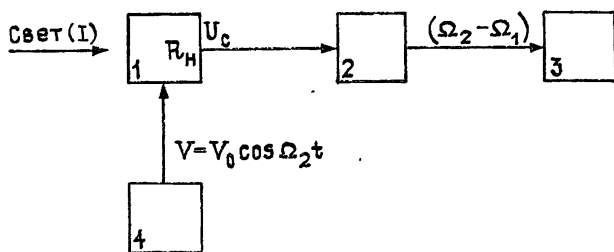


Рис. 1.

Когда осуществляется прием оптического излучения амплитудно-модулированного в СВЧ диапазоне, для эффективного гетеродинирования, фотокатодная камера ФЭУ помещается в емкостный зазор специального резонатора [3, 4]. Интенсивность оптического излучения на выходе электрооптического модулятора равна

$$I = I_0 \sin(\Gamma_0 \sin \Omega_1 t),$$

$\Gamma_0$  — разность фаз,  $I_0$  — интенсивность падающего света на электро-

оптический модулятор. При модулирующем сигнале  $U$  на выходе модулятора сигнал содержит ряд гармоник [1]. Следовательно, электрическое поле  $E$  оптического излучения может быть представлено как амплитудно-модулированное колебание с частотами  $\Omega_1$  и  $3\Omega_1$ .

$$E = E_0 (1 + m_1 \sin \Omega_1 t + m_3 \sin 3\Omega_1 t) \cos \nu t,$$

$\nu$  — частота оптического излучения,  $m_1$  — коэффициент модуляции 1-й гармоники по амплитуде поля,  $m_3$  — коэффициент модуляции 3-й гармоники по амплитуде поля. В анализе будем считать, что частота  $\Omega_1$  находится вне полосы пропускания ФЭУ  $\Delta f$ . Пусть на поверхность фотокатода ФЭУ падает световой поток  $I \equiv E^2$ , а модуляция чувствительности ФЭУ осуществляется на частоте  $\Omega_2$ , близкой к частоте  $\Omega_1$  таким образом, чтобы разница между частотами ( $\Omega_2 - \Omega_1$ ) находилась внутри полосы пропускания  $\Delta f$ . Тогда выражение для анодного тока ФЭУ имеет следующий вид:

$$i = I \beta(V_0) M_2^{-1}, \quad (1)$$

где  $M_2$  — коэффициент усиления фотоэлектронного умножителя. Число электронов, покидающих поверхность фотокатода ФЭУ, пропорционально числу фотонов оптического излучения.

Из уравнения (1) видно, что полезный сигнал разностной частоты ( $\Omega_2 - \Omega_1$ ) пропорционален  $\beta(V_0)$ . Зависимость  $\beta(V_0)$  определяет чувствительность ФЭУ, которая изменяется под действием сигнала гетеродина. Она была определена экспериментально в работе [2] и рассчитана теоретически.

В общем случае выражение для  $\beta(V_0)$  имеет следующий вид:

$$\beta(V_0) = \beta_0 [M_0(V_0) + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(V_0) \cos n \Omega_2 t]. \quad (2)$$

При  $V_0 = 0$  величина  $M_0$  равна единице. Она характеризует изменение постоянной составляющей анодного тока при действии во входной камере ФЭУ переменного напряжения с амплитудой  $V_0$ . Коэффициент  $M_n$  равен нулю при величине  $V_0 = 0$ . Он определяет эффективность вторичной модуляции фотоэлектронов на частоте  $n\Omega_2$ . Коэффициент  $\beta_0$  (имеющий размерность  $A/Lm$ ) относится к случаю, когда не подается сигнала от гетеродина во входную камеру ФЭУ.

Таким образом, когда  $V_0 = 0$ , соотношение (1) имеет вид

$$i = I \beta_0 M_2^{-1}. \quad (3)$$

При приеме амплитудно-модулированного света на основе принципа гетеродинирования сигнала в ФЭУ экспериментально доказано, что основную роль играют коэффициенты  $M_0(V_0)$  и  $M_1(V_0)$ . Следовательно, чувствительность ФЭУ определяется соотношением

$$\beta(V_0) = \beta_0 [M_0(V_0) + M_1(V_0) \cos \Omega_2 t]. \quad (4)$$

Анализируя прохождение оптического сигнала через фотоприемник для случая прямого детектирования и для фотоприемника с гетеродинированием сигнала в ФЭУ, получим выражение для полезного сигнала на выходе системы. Результаты вычислений приведены в таблицах.

В табл. 1 показаны аналитические выражения для прямого детектирования, а также для фотоприемника с гетеродинированием сигнала в ФЭУ в том случае, когда учитываются нелинейные искажения электрооптического модулятора света.

Таблица 1

Типы шума	Фотоприемник прямого детектирования		Фотоприемник при гетеродировании в ФЭУ	
	Полезный сигнал на выходе $R_H$	Чувствительность	Полезный сигнал на выходе $R_H$	Чувствительность
Дробовой шум	$U_c = \beta'_0 I_0 (m_1 + m_3) M_\Sigma R_H$	$I_0 = e \Delta f R^2 (1 + A) \times \frac{(2 + m_1^2 + m_3^2)}{2 \beta'_0 (m_1 + m_3)^2}$	$U_c = \frac{I_0}{2} \beta'_0 m_1 M_1 (V_0) R_H M_\Sigma$	$I_0 = 2e \Delta f R^2 (1 + A) \times \frac{M_0(V_0)}{\beta'_0} \left( \frac{R}{M_1(V_0)} \right)^2 \times \left[ 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{m_1} \right)^2 + \left( \frac{m_3}{m_1} \right)^2 \right]$
Тепловой шум	$U_c = \beta'_0 I_0 (m_1 + m_3) M_\Sigma R_H$	$I_0 = \frac{2R}{\beta'_0 (m_1 + m_3) M_\Sigma} \times \sqrt{\frac{k_1 T \Delta f}{R_H}}$	$U_c = \frac{I_0}{2} \beta'_0 m_1 M_1 (V_0) R_H M_\Sigma$	$I_0 = \frac{2R \sqrt{\frac{k_1 T \Delta f}{R_H}}}{\beta'_0 m_1 M_1 (V_0) M_\Sigma}$

Таблица 2

Тип шума	Чувствительность фотоприемника прямого детектирования		Чувствительность фотоприемника при гетеродировании в ФЭУ	
	Чувствительность фотоприемника прямого детектирования		Чувствительность фотоприемника при гетеродировании в ФЭУ	
Дробовой шум	$I_0 = \left( \frac{R}{2m_1} \right)^2 \frac{e}{\beta'_0} (m_1^2 + 2) (1 + A) \Delta f$	$I_0 = 6,6 \cdot 10^{-10} \text{ Вт}$	$I_0 = \left( \frac{R}{M_1(V_0) m_1} \right)^2 \frac{e \Delta f}{\beta'_0} M_0(V_0) (1 + A) (m_1^2 + 2)$	$I_0 = 2,7 \cdot 10^{-9} \text{ Вт}$
Тепловой шум	$I_0 = \frac{R}{m_1 \beta'_0} \sqrt{\frac{k_1 T \Delta f}{M_\Sigma^2 R_H}}$	$I_0 = 4,5 \cdot 10^{-11} \text{ Вт}$	$I_0 = \frac{2R}{\beta'_0 m_1 M_1(V_0)} \sqrt{\frac{k_1 T \Delta f}{M_\Sigma^2 R_H}}$	$I_0 = 3 \cdot 10^{-15} \text{ Вт}$

В табл. 2 показаны аналитические выражения для прямого детектирования и для фотоприемника с гетеродинированием сигнала в ФЭУ в том случае, когда коэффициент  $m_1 = 0,5$  (нелинейными искажениями пренебрегается). При анализе предполагалось, что отношение напряжения сигнала к шумовому напряжению на выходе ФЭУ  $R=1$ ; постоянная величина, характеризующая шум усилительной камеры ФЭУ, равна  $(1+A) = 3$ , эффективная шумовая температура  $T = 300 \text{ K}$  ( $k_1$  — постоянная Больцмана), коэффициенты  $M_0(V_0) = 0,44$  и  $M_1(V_0) = 0,63$  при напряжении гетеродина  $V_0 = 6 \text{ В}$ , сопротивление нагрузки фотоумножителя равно  $R_{\text{н}} = 100 \text{ Ом}$  (на этом сопротивлении выделяется напряжение полезного сигнала  $U_c$ ). Величина  $\beta'_0$  равна  $(\beta_0/M_2)$ .

Сравнивая формулу (1) и фототок ФЭУ  $i_0 = I \frac{\gamma e}{h\nu}$ , получим, что

$$\beta'_0 = \gamma e/h\nu,$$

где квантовый выход  $\gamma = 0,1$ ,  $e$  — заряд электрона,  $h$  — постоянная Планка,  $\nu$  — частота излучения He-Ne лазера с длиной волны  $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ , полоса пропускания  $\Delta f = 30 \text{ МГц}$ , коэффициент усиления  $M_2 = 10^7$ .

В рассматриваемом случае пренебрегается шумом оптического излучения. Величина тока входного сигнала намного больше величины фонового тока и собственно темнового тока ФЭУ.

Из табл. 2 видно, что в обоих методах приема модулированного оптического излучения дробовой шум преобладает над тепловым, кроме того, для современных стандартных ФЭУ коэффициент усиления  $M_2 = 10^7$ , что позволяет исключить радиоусилительную аппаратуру на выходе фотоприемника.

Количественный расчет показывает, что система приема с гетеродинированием сигнала в ФЭУ менее чувствительна, чем с прямым детектированием. Величина минимального потока света  $I_0$ , которая еще обеспечивает нормальное воспроизведение полезного сигнала, при гетеродинировании сигнала в ФЭУ выше в 10 раз. Однако такой проигрыш компенсируется значительным расширением диапазона принимаемых частот с помощью стандартного фотоэлектронного умножителя. При прямом детектировании, например, можно принимать оптическое излучение, модулированное на частоте 20—30 МГц, в зависимости от полосы пропускания ФЭУ. В то же время при методе гетеродинирования сигнала в ФЭУ можно принимать оптическое излучение, модулированное на частоте 800 МГц, несмотря на то, что полоса пропускания ФЭУ ограничена частотой порядка нескольких десятков мегагерц.

По сравнению с методом оптического супергетеродинирования метод гетеродинирования сигнала в ФЭУ значительно упрощает всю систему приемника. Отпадает необходимость применения высококачественного лазера-гетеродина и точной юстировки систем [5], кроме того, снижение чувствительности при переходе к гетеродинированию сигнала в ФЭУ незначительно.

Преимуществом этого метода приема является также и то, что из-за малой инерционности фотоэффекта (меньшей или порядка  $10^{-12} \text{ с}$ ) гетеродинный принцип приема СВЧ модулированного оптического излучения может быть использован до сравнительно высоких частот (порядка  $10^{11} \text{ Гц}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин, Методы модуляции и сканирования света, изд. Наука, М., 1970.
2. В. А. Дианова, В. Н. Парыгин, А. Савенок, Вестник МГУ, Физика, Астрономия, № 6, 746 (1975).

3. В. А. Дианова, В. Н. Парыгин, А. Савенок, Вестник МГУ, Физика, Астрономия, № 2, 229 (1976).
4. К. А. Гулгазарян, Ю. Н. Бароян, Изв. АН Арм. ССР, Серия технических наук, № 4, 25 (1972).
5. М. Росс, Лазерные приемники, изд. Мир, М., 1969.

Гомельский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
23 июня 1978 г.

SENSITIVITY OF A PHOTORECEIVER WITH THE SIGNAL HETERODYNING  
IN PHOTOELECTRON AMPLIFIER

*A. A. Savenok, V. N. Kizhnerova*

On the basis of a diagram with the signal heterodyning in photoelectron amplifier the sensitivity of a receiver of modulated optic radiation is considered in comparison with the diagram with direct detecting. Nonlinear distortions of an electrooptical modulator is taken into account.

---



УДК 535.31

**О ФЛУКТУАЦИЯХ ФАЗЫ, УГЛОВ ПРИХОДА И ЧАСТОТНОЙ  
КОРРЕЛЯЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-  
НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

*А. Б. Крупник, С. Н. Молодцов, А. И. Саичев*

В малоугловом приближении геометрической оптики найдена статистика фазы и углов прихода, а также частотная корреляция сферических световых волн в случайно-неоднородной среде. Обсуждается влияние сферичности фазового фронта волны на исследуемые статистические характеристики. Показано, в частности, что, как и в случае плоских волн, дифракционные эффекты не оказывают влияния на вид частотной корреляции двух сферических световых волн.

1. Теоретическое исследование флуктуаций параметров и частотной корреляции первоначально плоских световых волн в малоугловом приближении геометрической оптики проводилось в работах [1-3]. В настоящей работе в том же приближении найдена статистика фазы и углов прихода, а также частотная корреляция сферических световых волн. Обсуждается влияние сферической расходимости лучей на статистические характеристики исследуемых параметров.

Показано, в частности, что, как и в случае плоских волн, дифракционные эффекты не оказывают влияния на вид частотной корреляции сферических волн.

2. Пусть на полупространство  $x > 0$ , заполненное средой с крупномасштабными случайными неоднородностями, падает сферическая световая волна, источник которой находится в точке с координатами  $(-F, 0, 0)$ . Распространение волны в такой среде будем описывать с помощью уравнений малоуглового приближения геометрической оптики [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{k} (\nabla_{\perp} (I V)) &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{k}{2} \theta &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) \theta &= \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) \varepsilon, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) V &= \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon, \\ \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) L + L^2 - 2F &= \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) F + LF = \frac{1}{2} L_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{2} L_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} - M \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp}) M + LM = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial z}.$$

Здесь  $x$  — продольная,  $\rho = \{y, z\}$  — поперечная координаты,  $\nabla_{\perp} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ ,  $I(x, \rho)$  — интенсивность,  $S(x, \rho)$  — фаза волны,  $V(x, \rho) \equiv \nabla_{\perp} S(x, \rho)$  — поперечные компоненты волнового вектора,  $\theta(x, \rho) \equiv V^2(x, \rho)/k^2$ ,  $L_1 \equiv \frac{1}{k} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ ,  $L_2 \equiv \frac{1}{k} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ ,  $M \equiv \frac{1}{k} \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z}$ ,  $L \equiv L_1 + L_2$ ,  $F \equiv L_1 L_2 - M^2$ ;  $L$  и  $F$  — соответственно средняя и гауссова кривизна фазового фронта волны,  $M$  характеризует ориентацию главных направлений фазового фронта волны в точке наблюдения  $(x, \rho)$  относительно декартовых координат  $\{y, z\}$  [4].

Как обычно, флуктуации диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon(x, \rho)$  считаем гауссовыми с  $\langle \varepsilon \rangle = 0$  и корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1) \varepsilon(x_1 + x, \rho_1 + \rho) \rangle = A^{\varepsilon}[\rho] \delta(x),$$

$$A[\rho] = A - D \rho^2 + \frac{B}{4} \rho^4 - \dots$$

3. Рассмотрим сначала флуктуации фазы вдоль фиксированного луча. Изменение фазы и углов прихода фиксированного луча описывается следующими характеристическими уравнениями:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \varepsilon, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{k} (V \nabla_{\perp} \varepsilon),$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon, \quad \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{k} V.$$

Граничными условиями к (2) в случае сферической при  $x \leq 0$  волны, источник которой находится в точке  $(-F, 0, 0)$ , являются следующие:

$$\rho|_{x=0} = \rho_0, \quad S|_{x=0} = \frac{k}{2F} \rho_0^2, \quad V|_{x=0} = \frac{k}{F} \rho_0, \quad \theta|_{x=0} = \rho_0^2/F^2,$$

где  $\rho_0$  — поперечные координаты выбранного луча в плоскости  $x = 0$ . Используя стандартную процедуру получения уравнений для средних (см., например, [4, 5]), от (2) переходим к уравнению для производящей функции фазы и квадрата угла прихода фиксированного луча  $\Psi_2(\Omega, \omega; x, \rho_0) \equiv \langle e^{-\Omega S + \omega \theta} \rangle_x$ :

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \left( \frac{k}{2} \Omega - D \omega^2 \right) \frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega} = \left( \frac{k^2}{8} A \Omega^2 + D \omega \right) \Psi_2,$$

$$\Psi_2|_{x=0} = \exp \left( - \frac{k \Omega}{2F} \rho_0^2 + \frac{\omega}{F^2} \rho_0^2 \right).$$

Решая (3) с соответствующим граничным условием методом характеристик и полагая в решении  $\omega = 0$ , находим производящую функцию фазы фиксированного луча

$$\langle e^{-\alpha S} \rangle_n = \exp \left( \frac{k^2}{8} A \Omega^2 x - \frac{k \Omega}{2F} \rho_0^2 - \frac{\rho_0^2}{F^2} \sqrt{\frac{k \Omega}{2D}} \operatorname{th} z \right) (\operatorname{ch} z)^{-1}, \quad (4)$$

$$z^2 \equiv \frac{k}{2} D \Omega x^2.$$

В случае  $F \rightarrow \infty$  (4) переходит в соответствующий результат работы [2]. Производящей функции (4) соответствует следующий набор кумулянтов фазы фиксированного луча:

$$x_n^{S_n} = \frac{(2^{2n} - 1) |B_{2n}|}{(2n - 1)!!} k^n D^{n-1} x^{2n-1} \left( \frac{\rho_0^2}{F^2} + \frac{Dx}{2n} \right) + \frac{k \rho_0^2}{2F} \delta_{n,1} + \frac{k^2}{4} Ax \delta_{n,2}, \quad (5)$$

$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases}$ ,  $B_n$  — числа Бернулли [6]. Следующие из (5) выражения для среднего и дисперсии фазы вдоль фиксированного луча таковы:

$$\langle S_n \rangle = \frac{k \rho_0^2}{2F} + \frac{k \rho_0^2}{2F^2} x + \frac{D}{4} k x^2, \quad (6)$$

$$x_2^{S_n} = \frac{k^2}{4} Ax + \frac{k^2}{24} D^2 x^4 + \frac{1}{6} \frac{k^2 \rho_0^2}{F^2} D x^3.$$

Для нормального к плоскости  $x = 0$  луча ( $\rho_0 = 0$ ) (4) и (5) переходят в соответствующие результаты работы [2]. Как следует из (6), в случае наклонно падающего на плоскость  $x = 0$  луча ( $\rho_0 \neq 0$ ) его случайное искривление приводит к большим флуктуациям фазы по сравнению с нормальным лучом. Это связано с тем, что флуктуации геометрической длины луча [2] в промежутке  $[0, x]$  в случае наклонного падения на плоскость  $x = 0$  больше, чем для нормального луча.

Из (4), (5) легко видеть, что вероятностное распределение фазы с ростом  $x$  денормализуется, степень денормализации можно охарактеризовать кумулянтными коэффициентами [7]:

$$\gamma_n^{S_n} \equiv \frac{x_n^{S_n}}{(x_2^{S_n})^{n/2}} = \frac{(2^{2n} - 1) |B_{2n}| k^n D^{n-1} x^{2n-1} \left( \rho_0^2 F^{-2} + \frac{Dx}{2n} \right)}{(2n - 1)!! \left( \frac{k^2}{4} Ax + \frac{1}{6} \frac{k^2 \rho_0^2}{F^2} D x^3 + \frac{k^2}{24} D^2 x^4 \right)^{n/2}}.$$

4. Исследуем в малоугловом приближении геометрической оптики частотную корреляцию двух сферических волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , источники которых расположены в точке с координатами  $(-F, 0, 0)$ . Как показано в [3], корреляция комплексных амплитуд двух оптических частот в рассматриваемом приближении определяется средним

$$\langle E_1(x, \rho) E_2^*(x, \rho) \rangle = \langle I(x, \rho) \exp(i \Omega_0 s(x, \rho)) \rangle, \quad (7)$$

где  $I(x, \rho)$  — интенсивность,  $s(x, \rho)$  — эйконал в точке наблюдения  $(x, \rho)$ , общий для обеих волн,  $\Omega_0 \equiv (\omega_1 - \omega_2)/c$ . Уравнение для  $s(x, \rho)$  получается из второго уравнения (1), если положить  $k = 1$ . Переходя, как обычно (см., например, [5]), от (1) к уравнению для среднего  $\varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) \equiv \langle I(x, \rho) \exp[-\Omega S(x, \rho) + \omega \theta(x, \rho) + i\rho V(x, \rho)] \rangle$  определяющего частотную корреляцию световых волн (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{i}{k} (\nabla_{\perp} \nabla_{\rho}) \varphi + \left( \frac{k}{2} \Omega - D \omega^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \\ - D \omega (\rho \nabla_{\rho}) \varphi = \left( \frac{k^2}{8} A \Omega^2 - \frac{k^2}{4} D \rho^2 + D \omega \right) \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничное условие для  $\varphi$  в случае сферически расходящейся из точки  $(-F, 0, 0)$  волны имеет вид

$$\varphi(\Omega, \omega, \rho; 0, \rho) = (F^2 + \rho^2)^{-1} \exp \left( -\frac{k \Omega}{2F} \rho^2 + \frac{\omega}{F^2} \rho^2 + \frac{ik}{F} \rho \right). \quad (9)$$

Для фурье-образа по поперечной координате  $\rho$  от  $\varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho)$  из (8) получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Решая это уравнение с учетом (9) методом характеристик и совершая обратное фурье-преобразование, находим следующее выражение для  $\varphi(\Omega, 0, 0; x, \rho)$ :

$$\begin{aligned} \langle I(x, \rho) \exp[-\Omega S(x, \rho)] \rangle = \exp \left( \frac{k^2}{8} A \Omega^2 x \right) (\text{ch } z)^{-1} \times \\ \times \frac{1}{F^2} [(1 + Rz)(1 + R \text{th } z)]^{-1} \frac{(x + F)^2}{(x + F)^2 + \rho^2} \exp \left[ -\frac{k \Omega}{2F} \rho^2 (1 + Rz)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } z^2 \equiv \frac{k}{2} D \Omega x^2, \quad R^2 \equiv \frac{2}{k D \Omega F^2}.$$

Частотная корреляция двух сферических волн получается из (10) заменой  $k \Omega \rightarrow -i \Omega_0$ . Однако обычно [8] интересуются не средним  $\langle E_1 E_2^* \rangle$ , а квадратом модуля этой функции, который характеризует ковариацию интенсивностей оптических частот в области насыщенных мерцаний. Для нее из (10) получаем

$$\begin{aligned} |\langle E_1(x, \rho) E_2^*(x, \rho) \rangle|^2 = \exp \left( -\frac{A}{4} \Omega_0^2 x \right) D \Omega_0 (x + F)^2 \times \\ \times [(x + F)^2 + \rho^2]^{-2} \left\{ [\text{ch}(\sqrt{D \Omega_0} x) - \cos(\sqrt{D \Omega_0} x)] + \right. \\ \left. + F^2 D \Omega_0 \frac{1}{2} [\text{ch}(\sqrt{D \Omega_0} x) + \cos(\sqrt{D \Omega_0} x)] + F \sqrt{D \Omega_0} \times \right. \\ \left. [\text{sh}(\sqrt{D \Omega_0} x) + \sin(\sqrt{D \Omega_0} x)] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

В случае совпадающих частот ( $\Omega_0 = 0$ ) (11) описывает среднюю интенсивность сферической волны:

$$\langle I(x, \rho) \rangle = [(x + F)^2 + \rho^2]^{-1}.$$

Переходя в (11) к пределу  $F \rightarrow \infty$  и учитывая связь амплитуд плоской и сферической волн на границе случайно-неоднородной среды:  $E_{пл} = \sqrt{F^2 + \rho^2} E_{сф}$ , получаем из (11) корреляцию комплексных амплитуд первоначально плоских волн, найденную в работах [3, 8].

Рассмотрим случай, когда источники сферических волн находятся на границе случайно-неоднородной среды. Положив в (11)  $F=0$  и нормируя полученное выражение на произведение  $\langle I_1(x, \rho) \rangle \langle I_2(x, \rho) \rangle$ , для коэффициента корреляции интенсивностей сферических волн в области насыщенных мерцаний находим

$$R_{I_1, I_2}(\Omega_0, x) \equiv \frac{\langle I_1(x, \rho) I_2(x, \rho) \rangle - \langle I_1(x, \rho) \rangle \langle I_2(x, \rho) \rangle}{\langle I_1(x, \rho) \rangle \langle I_2(x, \rho) \rangle} = \\ = D \Omega_0 x^2 [\text{ch}(\sqrt{D \Omega_0} x) - \cos(\sqrt{D \Omega_0} x)]^{-1}. \quad (12)$$

Выражение (12) в точности совпадает с соответствующим результатом работы [8], в которой для нахождения частотной корреляции используется параболическое уравнение квазиоптики.

Таким образом, как и в случае плоских волн ([3]), дифракционные эффекты не оказывают влияния на частотную корреляцию сферических волн.

5. Рассмотрим теперь флуктуации фазы и углов прихода первоначально сферической волны в произвольной точке случайно-неоднородной среды. Получим уравнение для среднего

$$\Psi_3(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) \equiv \langle \exp[-\Omega S(x, \rho) + \omega \theta(x, \rho) + i\rho V(x, \rho)] \rangle,$$

содержащего исчерпывающую информацию о статистике исследуемых параметров. Используя стандартную методику получения подобных уравнений [5], легко показать, что  $\Psi_3(\Omega, \omega, \rho; x, \rho)$  удовлетворяет следующей системе трех уравнений:

$$\hat{L} \Psi_3 = \Phi_1, \\ \hat{L} \Phi_1 = k D \Omega \Psi_3 + 2\Psi_2, \\ \hat{L} \Phi_2 = \frac{k}{2} D \Omega \Psi_1, \quad (13)$$

где

$$\Phi_1(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) \equiv \langle L(x, \rho) \exp[-\Omega S(x, \rho) + \omega \theta(x, \rho) + i\rho V(x, \rho)] \rangle,$$

$$\Phi_2(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) \equiv \langle F(x, \rho) \exp[-\Omega S(x, \rho) + \omega \theta(x, \rho) + i\rho V(x, \rho)] \rangle,$$

$$\hat{L} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} (\nabla_{\perp} \nabla_{\rho}) - D \omega (\rho \nabla_{\rho}) + \left( \frac{k}{2} \Omega - D \omega^2 \right) \frac{\partial}{\partial \omega} - \\ - \left( \frac{k^2}{8} A \Omega^2 + D \omega - \frac{k^2}{4} D \rho^2 \right).$$

Решение системы (13) будем искать в следующем виде:

$$\Psi_3(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) = \varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) f_3(x, \Omega),$$

$$\Phi_i(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) = \varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho) f_i(x, \Omega)$$

$$(i = 1, 2).$$

Входящие сюда функции  $\varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho)$  и  $f_i(x, \Omega)$  ( $i = 1 \div 3$ ) удовлетворяют уравнениям и граничным условиям:

$$\hat{L}\varphi = 0, \quad \varphi(\Omega, \omega, \rho; 0, \rho) = \exp\left(-\frac{k\Omega}{2F}\rho^2 + \frac{\omega}{F^2}\rho^2 + \frac{ik}{F}\rho\rho\right); \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = kD\Omega f_3 + 2f_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{k}{2}D\Omega f_1, \quad (15)$$

$$f_3(0, \Omega) = 1, \quad f_1(0, \Omega) = \frac{2}{F}, \quad f_2(0, \Omega) = \frac{1}{F^2}.$$

Как легко видеть из сравнения (14) с (8), (9), функция  $\varphi(\Omega, \omega, \rho; x, \rho)$  определяется тем же уравнением, что и рассмотренная выше частотная корреляция световых волн. Решая уравнения (14), (15) с соответствующими граничными условиями, получаем следующее выражение для производящей функции фазы сферической (при  $x = 0$ ) волны:

$$\langle e^{-\Omega S(x, \rho)} \rangle = \exp\left(\frac{k^2}{8}A\Omega^2 x\right) \operatorname{ch} z \frac{(1 + R \operatorname{th} z)}{(1 + Rz)} \exp\left[-\frac{k\Omega\rho^2}{2F(1 + Rz)}\right], \quad (16)$$

где  $R, z$  — введенные в пункте 4 безразмерные параметры. Положив в (16)  $F = \infty$  ( $R = 0$ ), получим производящую функцию фазы первоначально плоской волны (см. [2]).

Следующие из (16) выражения для первых четырех кумулянтов фазы волны в произвольной точке  $(x, \rho)$  случайно-неоднородной среды таковы:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-1} \left[ \frac{k\rho^2}{2F} - \frac{k}{4}Dx^2 \left(1 + \frac{1}{3}\frac{x}{F}\right) \right], \\ x_2^S &= \frac{k^2}{4}Ax - \frac{k^2}{24}D^2x^4 \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-2} \left(1 + \frac{2}{5}\frac{x}{F} + \frac{1}{15}\frac{x^2}{F^2}\right), \\ x_3^S &= -\frac{1}{60}k^3D^3x^6 \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-3} \left(1 + \frac{4}{7}\frac{x}{F} + \frac{1}{7}\frac{x^2}{F^2} + \frac{1}{63}\frac{x^3}{F^3}\right), \\ x_4^S &= -\frac{17}{1680}k^4D^4x^8 \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-4} \left(1 + \frac{116}{153}\frac{x}{F} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{22}{85}\frac{x^2}{F^2} + \frac{4}{85}\frac{x^3}{F^3} + \frac{128}{255}\frac{x^4}{F^4}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

В области коротких трасс ( $x/F \ll 1$ ) сферичность фазового фронта волны не сказывается на статистике фазы и (17) переходят в выражения первых кумулянтов фазы плоской волны ([2]).

Для  $x/F \gg 1$ , как следует из (17), дисперсия фазы сферической волны определена следующим выражением:

$$x_2^S \approx \frac{k^2}{4}Ax - \frac{k^2}{360}D^2x^4. \quad (18)$$

Механизм замедления роста дисперсии фазы сферической волны в области сильных мерцаний такой же, как и в случае плоских волн ([2]). Однако сферическая расходимость лучей приводит, как и следовало ожидать, к уменьшению влияния эффектов случайной фокусировки

волны на статистику фазы по сравнению с плоской волной.

Заметим, что, как и в случае плоской волны, начиная с некоторых расстояний ( $x \geq x_0 \equiv \sqrt[3]{90 A/D^2}$ ), функция, определенная выражением (18), теряет смысл дисперсии вероятностного распределения, что подробно обсуждалось в работах [2, 9].

В заключение рассмотрим флуктуации угла прихода волны в точку наблюдения  $(x, \rho)$ . Положив в (13)  $\Omega = \omega = 0$ , находим систему уравнений, определяющих характеристическую функцию поперечного волнового вектора  $\Psi_1(\rho; x, \rho) \equiv \langle e^{i\rho V(x, \rho)} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{i}{k} (\nabla_{\perp} \nabla_{\rho}) \Psi_1 + \frac{k^2}{4} D \rho^2 \Psi_1 &= \Phi_1(0, 0, \rho; x, \rho), \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{i}{k} (\nabla_{\perp} \nabla_{\rho}) \Phi_1 + \frac{k^2}{4} D \rho^2 \Phi_1 &= 2\Phi_2(0, 0, \rho; x, \rho), \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{i}{k} (\nabla_{\perp} \nabla_{\rho}) \Phi_2 + \frac{k^2}{4} D \rho^2 \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Граничными условиями к (19) являются следующие:

$$\begin{aligned} \Psi_1|_{x=0} &= \exp\left(\frac{ik}{F} \rho \rho\right), & \Phi_1|_{x=0} &= \frac{2}{F} \exp\left(\frac{ik}{F} \rho \rho\right), \\ \Phi_2|_{x=0} &= \frac{1}{F^2} \exp\left(\frac{ik}{F} \rho \rho\right). \end{aligned}$$

Решая (19) аналогично тому, как это сделано выше для  $\Psi_3$ , получаем следующее выражение для искомой функции:

$$\begin{aligned} \langle e^{i\rho V} \rangle &= \exp\left[\frac{ik}{F} \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-1} (\rho \rho) - \frac{k^2}{4} \times \right. \\ &\times \left. Dx \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-2} \rho^2 \left(1 + \frac{x}{F} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{F^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (20)$$

(20) определяет характеристическую функцию гауссовой совокупности случайных полей  $\{V_y(x, \rho), V_z(x, \rho)\}$  с

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{F} \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-1} \rho, \\ \frac{\sigma_{V_y}^2}{k^2} &= \frac{\sigma_{V_z}^2}{k^2} = \frac{Dx}{2} \left(1 + \frac{x}{F}\right)^{-2} \left(1 + \frac{x}{F} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{F^2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Как следует из (21), дисперсия углов прихода сферической волны в области  $x/F \gg 1$  в 3 раза меньше соответствующей характеристики плоской волны. Последний результат был получен ранее в [10]. При  $x/F \ll 1$  формула (21) переходит, как и следовало ожидать, в дисперсию флуктуаций углов первоначально плоской волны.

Авторы признательны А. Н. Малахову за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, С. Н. Молодцов, А. И. Санчев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 250 (1977).
2. С. Н. Молодцов, А. И. Санчев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 5, 726 (1977).
3. С. Н. Молодцов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1244 (1977).
4. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).
5. В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974).
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.
7. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ случайных процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978.
8. В. И. Шишов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 3, 423 (1973).
9. А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 418 (1976).
10. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26 октября 1978 г.

FLUCTUATIONS OF PHASE, ARRIVAL ANGLES AND FREQUENCY CORRELATION  
OF SPHERIC WAVES IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

*A. B. Krupnik, S. N. Molodtsov, A. I. Saichev*

In small angular geometrical optics approximation the statistics of the phase and arrival angles has been found, as well as the frequency correlation of spheric light waves in randomly inhomogeneous medium. The effect of sphericity of the wave phase front on the statistic characteristics is discussed. It is shown, in particular, that as in the case of plane waves, diffraction effects do not influence on the form of frequency correlation of two spheric light waves.

---



УДК 538.574.6

## К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

*В. П. Чумаченко*

Рассматривается задача дифракции электромагнитных волн на цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой является ломаной линией. Описан алгоритм численного решения этой задачи в случае дифракции  $E$ -волн. Приведены численные результаты для различных поверхностей.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с рассеянием электромагнитных волн на замкнутых или незамкнутых металлических экранах сложной формы, размеры которых соизмеримы с длиной волны дифрагирующего поля, имеют в настоящее время не только теоретическое, но и важное прикладное значение. В связи с этим проблема создания универсальных эффективных методов решения задач дифракции для сложных поверхностей является весьма актуальной.

В работах [1-3] дан общий метод численного решения указанного класса задач, который основывается на представлении плотности поверхностного тока в виде ряда сходящегося по норме некоторого пространства  $L^2_R$ .

В [4] изложен другой возможный подход к решению плоских задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых цилиндрических поверхностях. Проблема сведена к решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно плотности тока методом саморегуляризации. Эффективность применения обоих методов определяется в общем случае формой поверхности.

В настоящей работе на основании предложенного ранее метода [5] рассматриваются двумерные задачи дифракции электромагнитных волн на цилиндрических поверхностях, поперечное сечение которых является ломаной линией. Вид полученного решения не зависит от формы поверхности, что позволяет построить единый алгоритм для рассмотренного класса задач. Путем аппроксимации контура поперечного сечения ломаной алгоритм применяется также к решению задач дифракции  $E$ -волн на гладких поверхностях. Приводятся численные результаты для поверхностей различной формы.

### 2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задачи дифракции  $E$ - или  $H$ -волн на идеально проводящей цилиндрической поверхности  $S$  сводятся, как известно, к решению скалярного уравнения Гельмгольца для вторичного поля  $u$ :

$$\Delta_{\perp} u + k^2 u = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1)$$

где  $u$  удовлетворяет условиям излучения, граничным условиям типа

Дирихле или Неймана на  $S$ , а также условиям типа Майкснера [6].

Пусть контур поперечного сечения поверхности  $S$  представляет собой ломаную, часть которой изображена на рис. 1. Опишем около каждого  $i$ -го ее звена длиной  $2f_i$  эллипс, фокусы которого находятся на концах отрезка. Уравнение такого эллипса в эллиптической системе координат, связанной с прямоугольной системой координат  $i$ -го звена соотношениями

$$x_i = f_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \quad y_i = f_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i, \quad (2)$$

будет иметь вид

$$\xi_i = a_i = \operatorname{const}. \quad (3)$$

При  $a_i \rightarrow 0$  каждый эллипс стягивается в соответствующее звено ломаной. Приближим рассматриваемую поверхность  $S$  поверхностью  $\bigcup_{i=1}^N S_i$ , если она

замкнута, и  $(\bigcup_{i=1}^N S_i) \cup (\bigcup_{i=1}^N S_i^*)$ , если

она не замкнута, где  $N$  — число звеньев ломаной. В обоих случаях все пространство определения поля можно рассматривать как общую часть внешних областей эллипсов, что позволяет применить для решения задачи метод, описанный в [5].

Рассмотрим задачу дифракции  $E$ -волн. Тогда

$$u(r) + u_0(r) = 0 \quad \forall r \in S, \quad (4)$$

где  $u_0$  — первичное поле. Представим искомую функцию  $u$  в виде

$$u = \sum_{i=1}^N u_i, \quad (5)$$

где  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) удовлетворяет уравнению (1) для  $\xi_i > a_i$ .

Граничные условия для функций  $u_i$  должны быть выбраны таким образом, чтобы на части поверхности  $\xi_i = a_i$ , совпадающей с  $S$ , выполнялось условие (4). На других частях поверхности  $\xi_i = a_i$  выбор граничных условий произволен. В силу этого можно взять

$$u_i(r) = \begin{cases} -\sum_{j \neq i} u_j(r) - u_0(r) & \forall r \in S_i \cup S_i^* \\ 0 & \forall r \in S_i^1 \cup S_i^2 \end{cases}, \quad (6)$$

как для замкнутых, так и для незамкнутых поверхностей. Тогда, согласно [5], для определения  $u_i$  можно получить систему интегральных уравнений

$$u_i(r) = \int_{S_i \cup S_i^*} \left( \sum_{j \neq i} u_j(r') + u_0(r') \right) \frac{\partial G_i \left( \frac{r}{r'} \right)}{\partial n'} dS' \quad (7)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N),$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе  $i$ -й области (направлена внутрь  $i$ -го эллипса),  $G_i$  — функция Грина уравнения (1), удовлетворяющая однородным граничным условиям Дирихле при  $\xi_i = a_i$  и условиям излучения.

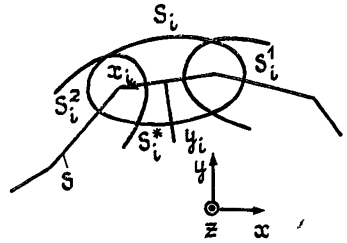


Рис. 1.

Положим  $a_i = 0$ . В таком случае функция Грина  $G_i$ , построенная согласно общей методике, изложенной в [7], будет иметь вид

$$G_i = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2(-1)^n \text{Me}_n^{(2)}(0, q_i)} \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{se}_n(\eta'_i, q_i) \times \\ \times [\text{Ce}_n(\xi'_i, q_i) \text{Fe}_n(0, q_i) - \text{Fe}_n(\xi'_i, q_i) \text{Ce}_n(0, q_i)] \times \\ \times \text{Me}_n^{(2)}(\xi_i, q_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{2(-1)^n \text{Ne}_n^{(2)}(0, q_i)} \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{se}_n(\eta'_i, q_i) \times \\ \times [\text{Se}_n(\xi'_i, q_i) \text{Ge}_n(0, q_i) - \text{Ge}_n(\xi'_i, q_i) \text{Se}_n(0, q_i)] \text{Ne}_n^{(2)}(\xi_i, q_i) \quad \forall \xi_i > \xi'_i, \quad (8)$$

где  $\text{se}_n, \text{se}_n, \text{Ce}_n, \text{Se}_n, \text{Fe}_n, \text{Ge}_n, \text{Me}_n^{(2)}, \text{Ne}_n^{(2)}$  — функции и модифицированные функции Матье [8, 9],  $q_i = (f_i k/2)^2$ ,  $c_n, d_n$  — известные постоянные [10].

Подставляя (8) в (7) и учитывая соотношения симметрии для функций  $\text{se}_n, \text{se}_n$ , после преобразований получим

$$u_i = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \left( \sum_{j \neq i} u_j + u_0 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Me}_n^{(2)}(\xi_i, q_i)}{\text{Me}_n^{(2)}(0, q_i)} \times \right. \\ \left. \times \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{se}_n(\eta'_i, q_i) \right] d\eta'_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что  $u_i$  следует искать в виде

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^i \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{Me}_n^{(2)}(\xi_i, q_i). \quad (10)$$

Такой выбор  $u_i$  обеспечивает выполнение условий Майкснера.

Функция  $\sum_{j \neq i} u_j + u_0$ , стоящая под знаком интеграла, представляет собой суперпозицию эллиптических  $u_j$  ( $j \neq i$ ) волн и первичного поля  $u_0$ . Для оценки коэффициентов  $D_n^i$  вместо выражения  $\sum_{j \neq i} u_j + u_0$  в (9) подставлялись функции, описывающие различные виды волн. Было установлено, что независимо от типа волны и местоположения ее источника  $\frac{D_1^i}{D_0^i} < 0,07$  при  $\frac{2f_i}{\lambda} \leq 0,2$ ,  $\frac{D_1^i}{D_0^i} < 0,04$  при  $\frac{2f_i}{\lambda} \leq 0,15$ ,  $\frac{D_1^i}{D_0^i} < 0,015$  при  $\frac{2f_i}{\lambda} \leq 0,1$ . Во всех случаях  $D_n^i \ll D_1^i \quad \forall n > 1$ . Считая  $\frac{2f_i}{\lambda}$  малым (если это не так, то разобьем каждое звено ломаной еще на несколько), пренебрежем в (10) всеми высшими слагаемыми, тогда

$$u_i = D_0^i \text{se}_0(\eta_i, q_i) \text{Me}_0^{(2)}(\xi_i, q_i). \quad (11)$$

Такое представление  $u_i$  эквивалентно учету в ряде, входящем в (9), лишь нулевого слагаемого. Подставив (11) в (9), мы получим для определения коэффициентов  $D_0^i$  систему алгебраических уравнений порядка  $N$ , которая решает рассматриваемую задачу:

$$D_0^i + \sum_{j \neq i} a_{ij} D_0^j = b_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$a_{ij} = \frac{2}{\pi \text{Me}_0^{(2)}(0, q_i)} \int_0^{\pi} \text{Me}_0^{(2)}(\xi_j \in S_i^*, q_j) \text{ce}_0(\eta_j \in S_i^*, q_j) \text{ce}_0(\eta_i, q_i) d\eta_i,$$

$$b_i = -\frac{2}{\pi \text{Me}_0^{(2)}(0, q_i)} \int_0^{\pi} u_0(r' \in S_i^*) \text{ce}_0(\eta_i, q_i) d\eta_i.$$

Отметим, что алгоритм не изменится, если рассеивающая поверхность состоит из нескольких частей.

Подобным образом может быть рассмотрена и задача дифракции  $H$ -волн.

Контур поперечного сечения цилиндрической поверхности всегда можно приближенно или точно аппроксимировать ломаной. Так как возникающие при этом ребра не искажают продольных поверхностных токов, то описанный алгоритм может служить и для решения задач дифракции  $E$ -волн на произвольных гладких цилиндрических поверхностях.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанный алгоритм был реализован в виде программы для ЭВМ. С целью упрощения вычислений, длины всех звеньев аппроксимирующей ломаной выбиралась одинаковыми, равными  $2f$ .

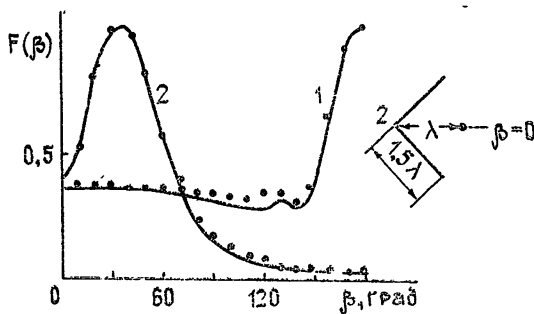


Рис. 2.

На рис. 2 приведено сравнение некоторых результатов счета (помечены точками) с известными решениями. Кривая 1 является диаграммой направленности рассеянного поля при дифракции плоской волны типа  $E$  на цилиндре радиуса  $R = 0,636 \lambda$  ( $kR = 4$ ) [11]. При счете контур поперечного сечения цилиндра приближался правильным вписанным 40-угольником. Кривая 2 соответствует диаграмме направ-

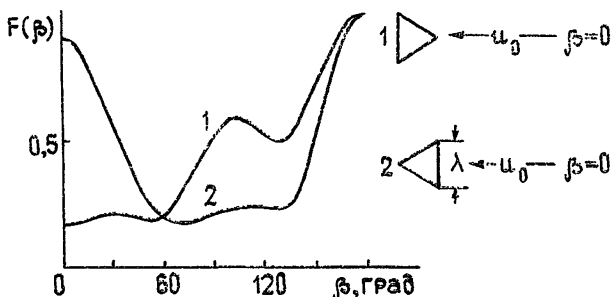


Рис. 3.

ленности уголкового зеркала, изображенного на поле рисунка, которое возбуждается линейным источником [12]. При счете каждая сторона зеркала разбивалась на 10 звеньев. Видно, что полученные результаты хорошо согласуются с известными. Худшее соответствие в случае цилиндра объясняется приближенностью аппроксимации окружности ломаной.

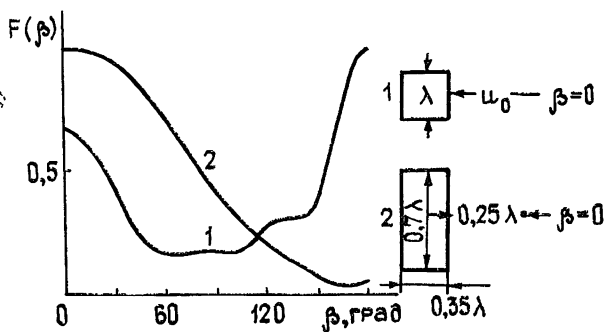


Рис. 4.

Были рассмотрены также некоторые задачи дифракции плоских и цилиндрических волн на незамкнутых круговых и параболических цилиндрах. Полученные результаты соответствуют известным [2, 3].

На рис. 3, 4 приведены некоторые результаты счета для различных поверхностей, иллюстрирующие возможности алгоритма. На рис. 3 изображены диаграммы направленности рассеянного поля при дифракции плоской волны на цилиндре с треугольным поперечным сечением. Кривая 1 на рис. 4 представляет аналогичный результат для цилиндра с поперечным сечением в виде квадрата. Кривая 2 изображает диаграмму направленности линейного источника, расположенного вблизи цилиндра с прямоугольным поперечным сечением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 206, № 6, 1321 (1972).
2. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1785 (1973)
3. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 20, № 1, 28 (1975).
4. Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Радиотехника и электроника, 22, № 4, 679 (1977).
5. В. П. Чумаченко, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 1004 (1978).
6. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, ИЛ, М., 1964.
7. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, М., 1958.
8. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.
9. Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, изд. Наука, М., 1967.
10. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968
11. А. И. Потехин, Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1948.
12. Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 3, 418 (1975).

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редакцию  
13 февраля 1979 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY RIBBED  
CYLINDRICAL SURFACES

V. P. Chumachenko

A problem is discussed of electromagnetic wave diffraction by a cylindrical surface the transverse section of which is a broken line. The algorithm of numerical solution of this problem is described for the case of  $E$ -wave diffraction. Numerical results are given for different surfaces.

УДК 538.56

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЩЕЛИ, ПРОРЕЗАННОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНО РЕБРУ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

*В. А. Каратыгин, В. А. Розов, А. А. Константинова*

С помощью метода факторизации получено решение задачи об излучении односторонней щели, прорезанной параллельно ребру идеально проводящей полуплоскости, расположенной на границе раздела двух сред. Подробно исследуется распределение тока на поверхности полуплоскости. Получено выражение для мощности, излучаемой на единицу длины щели, с учетом влияния края полуплоскости.

Как известно, реальная (полупроводящая) земля оказывает существенное влияние на электрические параметры антенн, расположенных вблизи ее поверхности. Распространенным методом уменьшения этого влияния является металлизация поверхности земли у антенны. На практике размеры металлизации конечны, и для их выбора необходим расчет характеристик антенны с учетом ограниченности металлизации.

В настоящей работе сделана попытка рассчитать параметры щелевой антенны, представляющей собой бесконечно узкую одностороннюю щель в металлической полуплоскости, лежащей на земле, прорезанную параллельно краю полуплоскости. Анализируется распределение тока на полуплоскости и входная погонная проводимость щели с учетом влияния края полуплоскости.

Поле линейного магнитного тока, параллельного краю идеально проводящей полуплоскости, лежащей на земле, рассматривалось в [1] в связи с проблемой распространения радиоволн над плоской земной поверхностью, содержащей границу суша — море. Однако окончательные результаты [1] получены в предположении, что как источник, так и точка наблюдения существенно удалены от края полуплоскости, на котором происходит дифракция, и непосредственно в настоящей работе применены быть не могут. Метод решения, предложенный в [1], является достаточно громоздким. Сущность метода, используемого в настоящей работе, состоит в следующем: на основании свойств аналитических функций устанавливаются соотношения, связывающие касательные составляющие электрического и магнитного полей на поверхности раздела. С помощью этих соотношений записывается уравнение задачи, которое решается методом факторизации. Искомые величины находятся в результате обратного преобразования Фурье. Результаты исследования могут быть использованы при анализе излучения щелевых антенн с металлизацией более сложных конфигураций.

### 1. ВЫВОД ОБЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть на плоской границе раздела земля — воздух лежит идеально проводящая бесконечно тонкая полуплоскость. Параллельно ее краю, на расстоянии от него  $x_0$ , прорезана односторонняя бесконечно узкая щель (рис. 1). Напряженность поля на щели задана в виде

$$\mathbf{E}_{\text{ст}} = \mathbf{E}_0 = U_0 \delta(x - x_0) \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , возбужденное щелью в полупространстве  $y \geq 0$ , с параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$  удовлетворяет однородным уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{E} = -ik \sqrt{\mu/\epsilon} \mathbf{H}; \quad (2a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = ik \sqrt{\epsilon/\mu} \mathbf{E}, \quad (2б)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ ,  $\text{Im } k < 0$ . Зависимость от времени взята в виде  $e^{i\omega t}$ . Поле  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  в нижнем полупространстве с параметрами  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  удовлетворяет таким же уравнениям, в которых  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $k$  заменены на  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $k_1$ , причем решение не зависит от координаты  $z$ : компоненты  $E_z$ ,  $E_{1z}$ ,  $H_x$ ,  $H_{1x}$ ,  $H_y$ ,  $H_{1y}$  тождественно равны нулю;  $\mathbf{H} = H_z \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{H}_1 = H_{1z} \mathbf{z}_0$ .

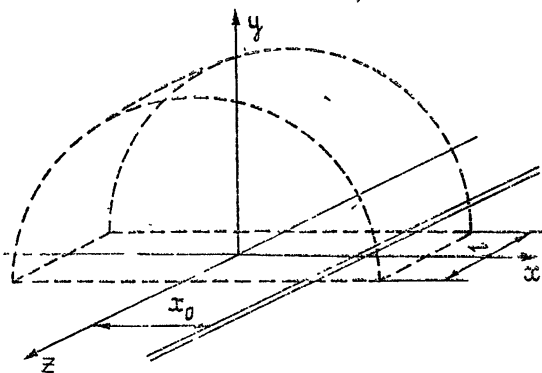


Рис. 1.

Умножим обе части (2a) на  $e^{i(\gamma r)}$ , где  $\gamma = \gamma_x \mathbf{x}_0 + \gamma_y \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{r} = x \mathbf{x}_0 + y \mathbf{y}_0$ , и проинтегрируем по объему  $V$ , представляющему собой полуцилиндр бесконечно большого радиуса и конечной длины  $l$ , опирающийся плоскостью сечения на плоскость  $xz$  (рис. 1). Учитывая векторные тождества  $\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{rot } \mathbf{A} + [\text{grad } \varphi, \mathbf{A}]$ ,  $\int_V \text{rot } \mathbf{B} dV = \int_{S_0} [\mathbf{n}, \mathbf{B}] dS$ , где  $S_0$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $S_0$ , вводя обозначения

$$\bar{\mathbf{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\gamma_x x} dx, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}} e^{i\gamma_y y} dy = \int_S \mathbf{E} e^{i(\gamma r)} dS, \quad (3)$$

где  $S$  — полуплоскость  $z = 0$ ,  $y > 0$ , и аналогичные для  $\mathbf{H}$ , найдем

$$[\gamma \tilde{\mathbf{E}}] = k \sqrt{\mu/\epsilon} \tilde{\mathbf{H}} + i [y_0 \bar{\mathbf{E}}_z]. \quad (4a)$$

Аналогично из (2б) —

$$[\gamma \tilde{\mathbf{H}}] = -k \sqrt{\epsilon/\mu} \tilde{\mathbf{E}} + i [y_0 \bar{\mathbf{H}}_z], \quad (4б)$$

где  $\mathbf{E}_z$ ,  $\mathbf{H}_z$  — касательные составляющие полей к плоскости  $y = 0$ . Умножая (4б) на  $\gamma$  векторно и подставляя в полученное выражение  $[\gamma \tilde{\mathbf{E}}]$  из (4a), получим

$$(k^2 - \gamma^2) \tilde{\mathbf{H}} = -ik \sqrt{\epsilon/\mu} [y_0 \bar{\mathbf{E}}_z] - i\gamma_y \bar{\mathbf{H}}_z. \quad (5)$$

При заданном возбуждении  $\tilde{E}$  и  $\tilde{H}$  являются аналитическими функциями  $\gamma_y$  в области  $\text{Im } \gamma_y > 0$ . Поэтому нужно потребовать обращения в нуль правой части (5) при  $\gamma_y = -\alpha$ , где  $\alpha = \sqrt{k^2 - \gamma_x^2}$ ,  $\text{Im } \alpha < 0$ .

Тогда из правой части (5) вытекает соотношение для касательных составляющих поля на верхней стороне границы раздела:

$$[y_0 \bar{H}_\tau] = - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k}{\alpha} \bar{E}_\tau. \quad (6)$$

Аналогично для поля на нижней стороне границы раздела имеем

$$[y_0 \bar{H}_{1\tau}] = \frac{1}{k_1^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_1^2}{\alpha_1} \bar{E}_{1\tau}, \quad (7)$$

где  $\alpha_1 = \sqrt{k_1^2 - \gamma_x^2}$ ,  $\text{Im } \alpha_1 < 0$ . Плотность электрического тока  $I_{\text{в}}$ , введенного в полуплоскости, определяется скачком тангенциальной компоненты магнитного поля, т. е. согласно (6), (7)

$$\bar{I}_{\text{в}} = \bar{I}_{\text{в.в}} + \bar{I}_{\text{в.н}} = - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ \frac{k^2}{\alpha} \bar{E}_\tau + \frac{k_1^2}{\alpha_1} \bar{E}_{1\tau} \right\}, \quad (8)$$

причем  $I_{\text{в.в}} = [y_0 H_\tau]$ ,  $I_{\text{в.н}} = - [y_0 H_{1\tau}]$  — поверхностные токи на верхней и нижней стороне полуплоскости соответственно, и  $\bar{I}_{\text{в}}$ ,  $\bar{I}_{\text{в.в}}$ ,  $\bar{I}_{\text{в.н}}$  введены аналогично  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ .

Используя условие непрерывности касательных составляющих поля на границе раздела земля — воздух и граничные условия на поверхности идеального проводника, принимая во внимание, что все векторы в (8) параллельны оси  $x$ , преобразуем (8) к виду

$$\bar{I}^+ = - \frac{k^2}{\alpha} \bar{E}_0 - \frac{\bar{E}^-}{R \alpha_1} (k^2 + k_1^2). \quad (9)$$

В полученном соотношении и ниже «+» и «-» означают аналитичность функций при  $\text{Im } \gamma_x > 0$  и  $\text{Im } \gamma_x < 0$  соответственно. Кроме того, в (9) введены обозначения:  $E^-$  — касательная к границе раздела составляющая вторичного поля, возбужденного в верхнем полупространстве,  $E^- = 0$ ,  $x > 0$ ,  $\bar{I}^+ = k \sqrt{\mu/\varepsilon} \bar{I}_{\text{в}}$ ,  $I^+ = 0$ ,  $x < 0$ ,

$$R = \frac{k^2 + k_1^2}{k^2 \alpha_1 + k_1^2 \alpha} \alpha, \quad (10)$$

и использовано соотношение

$$E_\tau = E_0 + E^-, \quad (11)$$

причем

$$\bar{E}_0 = U_0 e^{i\gamma x_0}. \quad (11a)$$

Итак, задача сводится к нахождению функций  $\bar{I}^+$  и  $\bar{E}^-$ , предельные значения которых на действительной оси  $-\infty < \gamma_x < \infty$  удовлетворяют краевому условию (9), т. е. к решению неоднородной задачи Римана. Согласно [2] (9) можно переписать в виде (в дальнейшем будем опускать индекс « $x$ » у  $\gamma_x$ )

$$\bar{I}^+ R + \sqrt{k_1^2 - \gamma} F^+ = - F^- - (k^2 + k_1^2) \frac{R^-}{\sqrt{k_1^2 + \gamma}} \bar{E}^-, \quad (9a)$$



где функции  $R^\pm$ ,  $F^\pm$  определяются соотношениями

$$\ln R^\pm(\gamma_\pm) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln R(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma - \gamma_\pm},$$

$$F^\pm(\gamma_\pm) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma - \gamma_\pm}, \quad \text{Im } \gamma_+ > 0, \quad \text{Im } \gamma_- < 0, \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= R^+(\gamma)/R^-(\gamma), \quad F(\gamma) = F^+(\gamma) - F^-(\gamma) = -\frac{k^2}{\alpha} R^+ \times \\ &\times \sqrt{k_1 - \gamma} \bar{E}_0, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \ln R^+(\infty) = -\ln R^-(\infty) = \\ &= \frac{1}{2} \ln R(\infty) = 0, \quad F^+(\infty) = -F^-(\infty) = \frac{1}{2} F(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что функции  $I$  и  $E$  являются абсолютно интегрируемыми. Тогда при  $\gamma \rightarrow \infty$   $\bar{E}^- = O(\gamma^{-\varepsilon_1})$ ,  $\bar{I}^+ = O(\gamma^{-\varepsilon_2})$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ,  $O(x)$  обозначает величину порядка  $x$ , и по теореме Лиувилля решение (9) имеет вид

$$\bar{I}^+ = \frac{F^+}{R^+ \sqrt{k_1 - \gamma}}, \quad \bar{E}^- = -\frac{F^- \sqrt{k_1 + \gamma}}{(k^2 + k_1^2) R^-}. \quad (14)$$

## 2. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТОКА

Подставляя  $E^-$  (14) в (9) и выполняя обратное преобразование Фурье, найдем плотность тока, возбужденного в полуплоскости. Согласно (8), (9), (11) полный ток можно представить в виде суммы

$$I_a = I_p + I_{к.в} + I_{к.н},$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{I}_p &= -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k^2}{\alpha} \bar{E}_0, \\ \bar{I}_{к.в} &= -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k^2}{\alpha} \bar{E}^-, \quad \bar{I}_{к.н} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k_1^2}{\alpha_1} \bar{E}^-. \end{aligned} \quad (15)$$

Первое слагаемое (15) определяет «равномерную» часть тока  $I_p$ . Второе вызвано ограниченностью металлизации и характеризует часть неравномерного тока, текущую по верхней стороне полуплоскости (верхний краевой ток  $I_{к.в}$ ), третье слагаемое определяет ток на нижней стороне полуплоскости, также обусловленный наличием края (нижний краевой ток  $I_{к.н}$ ).

Из (14), используя (12), (13) и формулу  $1/(\xi - \gamma_-) = -i \int_0^\infty e^{-t(\gamma_- - \xi)t} dt$ , найдем

$$\bar{E}^- = -\frac{\sqrt{k_1 + \gamma}}{R^-} \frac{k^2}{k_1^2 + k^2} \int_0^\infty e^{-i\gamma t} X(t) dt, \quad (16)$$

где

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}_0 e^{i\xi t} R^+ \sqrt{k_1 - \xi}}{\alpha} d\xi. \quad (17)$$

Подставляя (16) в (15) и выполняя обратное преобразование Фурье, приходим к соотношениям

$$I_{к.в} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k^3}{k_1^2 + k^2} \int_0^{\infty} X(t) X_1(x+t) dt, \quad (18)$$

$$I_{к.н} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k k_1^2}{k_1^2 + k^2} \int_0^{\infty} X(t) X_2(x+t) dt,$$

где

$$X_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma u} \sqrt{k_1 + \gamma}}{\alpha R^-} d\gamma, \quad (19)$$

$$X_2(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma u} d\gamma}{R^- \sqrt{k_1 - \gamma}}.$$

Очевидно, при  $k = k_1$   $X_1(u) = X_2(u)$  и  $I_{к.в} = I_{к.н}$ . Выражение для равномерного тока, согласно (15), имеет вид

$$I_p = -\frac{k}{2\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}_0}{\alpha} e^{-i\gamma x} d\gamma. \quad (20)$$

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ $R^+$ , $R^-$ , $X_1$ , $X_2$ , $X$

Будем считать, что комплексная диэлектрическая проницаемость земли достаточно велика:  $|k_1| \gg k$ . Используя результаты работы [3], где проведена факторизация функции  $h$ , связанной с  $R(\gamma)$ , (10) соотношением

$h = \frac{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{R \sqrt{k_1^2 - \gamma^2}}$ , находим приближенно

$$R^+ = \begin{cases} \frac{k_1^2 \sqrt{k^2 - \gamma^2}}{k^2 \sqrt{k_1^2 - \gamma^2} + k_1^2 \sqrt{k^2 - \gamma^2}} & (\operatorname{Re} \gamma > 0) \\ 1 & (\operatorname{Re} \gamma < 0) \end{cases}, \quad (21)$$

$$R^- = \begin{cases} 1 & (\operatorname{Re} \gamma > 0) \\ \frac{k^2 \sqrt{k_1^2 - \gamma^2} + k_1^2 \sqrt{k^2 - \gamma^2}}{k_1^2 \sqrt{k^2 - \gamma^2}} & (\operatorname{Re} \gamma < 0) \end{cases},$$

где отброшены слагаемые порядка  $k/|k_1|$ . При действительных  $\gamma$   $R^+$  и  $R^-$  можно вычислить более точно, используя интерполяционную формулу для множителей  $h$ , полученную в [4]. Однако окончательные выражения при этом оказались бы значительно более сложными.

Рассмотрим  $X_1(u)$ , (19). Замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости  $\gamma$ , как показано на рис. 2, и учитывая (21), имеем

$$X_1(u) = \frac{e^{i(\pi/4)} e^{-iku}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u\sigma} \sqrt{k_1 + k - i\sigma}}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma} R^-} d\sigma \approx$$

$$\approx \frac{e^{i(\pi/4)} e^{-iku}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u\sigma} \sqrt{k_1 - i\sigma}}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} d\sigma. \quad (22)$$

Интеграл (22) подробно анализируется в Приложении, где показано: при  $\frac{|k_1|}{k} \gg 1$ ,  $|k_1| u \gg 1$

$$X_1(u) \approx \frac{\sqrt{k_1}}{2} H_0^{(2)}(ku). \quad (23)$$

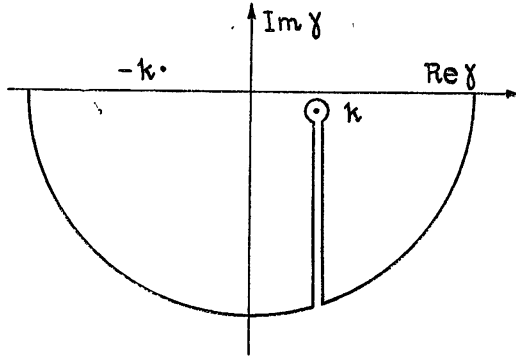


Рис. 2.

Рассуждая аналогично и учитывая (21), (17), (19), (11а), найдем

$$X(u) = U_0 X_1(x_0 + u), \quad X_2(u) = \frac{e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-ik_1 u}}{\sqrt{u}}, \quad (24)$$

откуда следуют выражения для верхнего и нижнего краевого токов:

$$\begin{aligned} I_{\text{к.в}} &= U_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} k \frac{k^2}{k_1^2} \int_0^\infty X_1(x_0 + t) X_1(x + t) dt \approx \\ &\approx U_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{k^3}{k_1} \int_0^\infty H_0^{(2)}[k(x_0 + t)] H_0^{(2)}[k(x + t)] dt, \end{aligned} \quad (25)$$

$$|k_1| x_0 \gg 1, \quad |k_1| x \gg 1;$$

$$\begin{aligned} I_{\text{к.н}} &\approx U_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} k \int_0^\infty X_1(x_0 + t) X_2(x + t) dt \approx \\ &\approx U_0 \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{k_1} \frac{e^{i(\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty H_0^{(2)}[k(x_0 + t)] \frac{e^{-ik_1(x+t)}}{\sqrt{x+t}} dt, \end{aligned} \quad (26)$$

$$|k_1| x \gg 1.$$

Кроме того, согласно (20), (11а), (П.5)

$$I_{\text{р}}(x) = -U_0 \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} H_0^{(2)}(k|x_0 - x|). \quad (27)$$

#### 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Согласно (26), (27) при  $|k_1|/k \gg 1$  и достаточно больших  $x_0$  запишем

$$I_{к.н} = -I_p|_{x=0} \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi}} e^{i(\pi/4)} e^{ikx} \int_x^\infty \frac{e^{-i(k_1+k)\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad (28)$$

откуда следует  $I_{к.н}|_{x=0} \approx -I_p|_{x=0}$ . Таким образом, равномерный ток полностью (с точностью до  $k/|k_1|$ ) затекает на нижнюю сторону полуплоскости, образуя  $I_{к.н}$ . На рис. 3 представлены графики зависимости модуля и фазы нормированного нижнего краевого тока  $I_{к.н}/(I_p|_{x=0})$  (28) от расстояния  $x$  точки наблюдения до ребра полуплоскости при различных  $\epsilon_1 = \epsilon_1' - i\epsilon_1''$ .

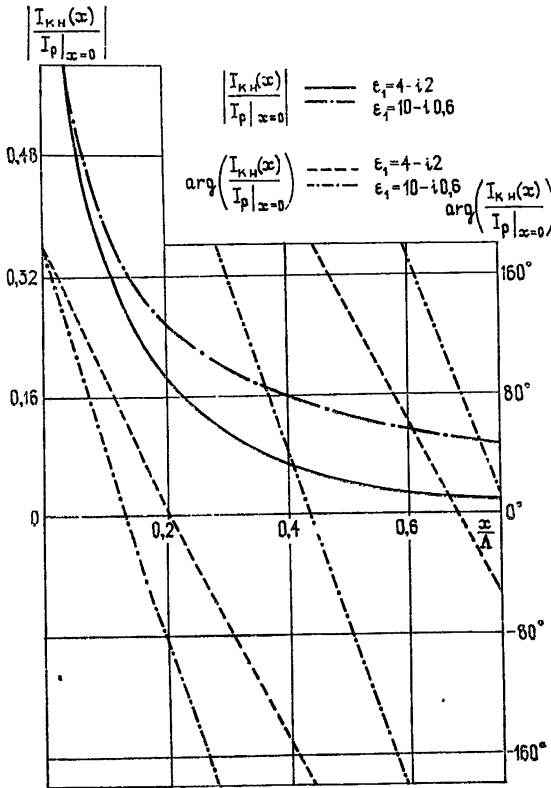


Рис. 3.

Из (25) следует, что верхний краевой ток имеет величину порядка  $k/|k_1|$  по отношению к равномерному, что согласуется с выводами работы [3]. Графики зависимости верхнего краевого тока  $I_{к.в}/\text{Re}I_p(x_0)$  от расстояния  $x$  приведены на рис. 4. Следует отметить, что верхний краевой ток оказался вычисленным с большей точностью (до порядка  $k/|k_1|$  включительно), чем нижний. При  $x=x_0$  сумма соотношений (25) и (27) определяет полный входной ток на единицу длины щели, а при  $U_0 = 1$  — также полную входную погонную проводимость щели:

$$g = g_0 + g_k, \quad (29)$$

где

$$g_0 = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} H_0^{(2)}(k|x_0 - x|)|_{x=x_0} \quad (30)$$

— проводимость щели в бесконечно протяженном экране,

$$g_k = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{k^3}{k_1} \int_0^{\infty} \{H_0^{(2)}[k(x_0+t)]\}^2 dt \quad (31)$$

— поправка за счет конечности металлизации.

Активная часть входной погонной проводимости щели при единичном напряжении  $U_0$  равна полной мощности  $M$ , излучаемой щелью на единицу длины. При отсутствии потерь в материале самой антенны она складывается из мощности, излученной в верхнее полупространство и теряемой в полупроводящей почве. Согласно (30), (31)  $M = M_0 + M_k$ , где

$M_0 = \text{Re } g_0 = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$  — мощность излучения щели в бесконечном

экране при том же возбуждении;  $M_k = \text{Re } g_k$  — поправка за счет края. Графики зависимости  $\text{Re } g_k / \text{Re } g_0 = M_k / M_0$  и  $\text{Im } g_k / \text{Re } g_0$  от расстояния  $x_0 / \lambda$  приведены на рис. 5. При реальных параметрах почвы и достаточно малых расстояниях между краем полуплоскости и щелью ( $|k_1| x_0 \gg 1$ ) полная мощность, излучаемая антенной, отличается от мощности при бесконечном экране на единицы процентов, причем поправка может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует результатам исследования вертикального диполя над землей с круговым экраном в [4].

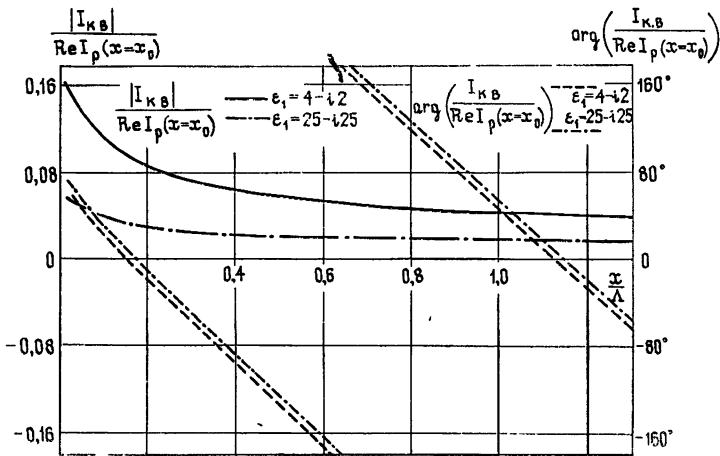


Рис. 4.

Итак, в настоящей работе исследовано распределение тока, индуцированного на поверхности полуплоскости, лежащей на земле, возбужденной с помощью линейной односторонней щели, параллельной краю полуплоскости. Получено приближенное выражение для неравномерной части тока как на верхней, так и на нижней стороне полуплоскости. Верхний краевой ток имеет величину порядка  $k/|k_1|$  по отношению к равномерному, нижний краевой ток у края полуплоскости порядка равномерного, но быстро затухает с расстоянием от ребра, причем скорость изменения его фазы определяется постоянной распространения в почве  $k_1$ . Получено выражение для суммарной мощности, расходуемой на излучение и потери в земле на единицу длины щели. При реальных параметрах почвы и достаточно малом расстоянии между краем полуплоскости и щелью ( $|k_1| x_0 \gg 1$ ) эта мощность отличается от мощности, излучаемой щелью в бесконечном плоском экране с тем же возбуждением на единицы процентов.

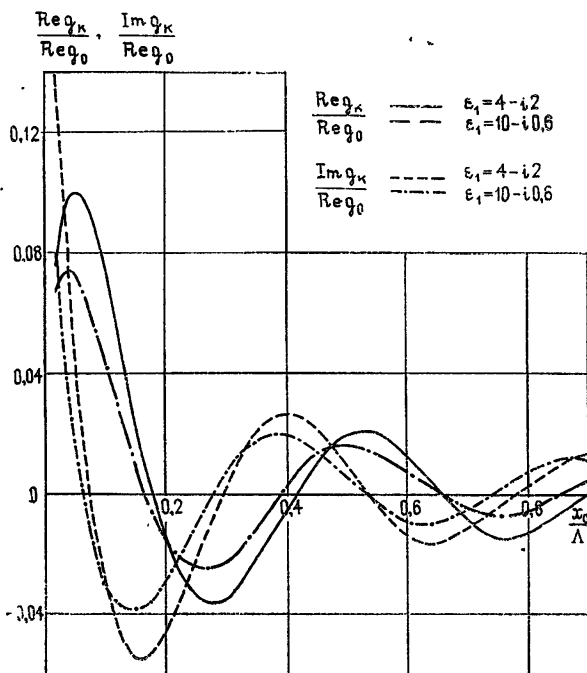


Рис. 5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-u\sigma} \sqrt{k_1 + k - i\sigma}}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} d\sigma. \tag{П.1}$$

Представим его в виде суммы:

$$I = (k_1 + k) \int_0^\infty \frac{e^{-u\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma} \sqrt{k_1 + k - i\sigma}} - i \int_0^\infty \frac{e^{-u\sigma} \sqrt{\sigma} d\sigma}{\sqrt{2k - i\sigma} \sqrt{k_1 + k - i\sigma}} = \\ = (k_1 + k) I_1 - i I_2, \tag{П.2}$$

причем

$$I_2(u) = - \frac{\partial I_1(u)}{\partial u}. \tag{П.3}$$

Принимая во внимание значение интеграла Пуассона  $\int_0^\infty \frac{e^{-u\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{u}}$ , преобразуем  $I_1$  к виду

$$I_1 = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-i(k_1+k)t}}{\sqrt{t}} dt \int_0^\infty \frac{e^{-(u+t)\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}}. \tag{П.4}$$

Проинтегрируем (2) по частям с учетом (П.3) и (П.4), используя интегральное представление функции Ханкеля [5]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} = \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(ku) e^{i(ku - \pi/4)} \quad (\text{П.5})$$

и соотношение  $\frac{\partial H_0^{(2)}(x)}{\partial x} = -H_1^{(2)}(x)$ . Получим

$$I = \sqrt{k_1 + k} \frac{\pi}{2} e^{-i(\pi/4)} e^{iku} \left\{ H_0^{(2)}(ku) - \frac{i}{2} \frac{k}{k_1 + k} H_1^{(2)}(ku) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{k}{k_1 + k} H_0^{(2)}(ku) \right\} + R, \quad (\text{П.6})$$

где

$$R = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} [(k_1 + k)R_1 + iR_2],$$

$$R_1 = \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\infty} \frac{e^{-i(k_1+k)\xi} d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+t)\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} \right] dt, \quad (\text{П.7})$$

$$R_2 = \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} \frac{e^{-i(k_1+k)\xi} d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+t)\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} \right] dt.$$

Оценим величину  $R$ . Введем обозначения

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+t)\sigma}}{\sqrt{\sigma} \sqrt{2k - i\sigma}} d\sigma = N(t) = N_1(t) + iN_2(t),$$

где

$$N_1(t) = \text{Re } N(t), \quad N_2(t) = \text{Im } N(t),$$

$$T_n(t) = \int_t^{\infty} T_{n-1}(\xi) d\xi,$$

причем

$$T_0(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-i(k_1+k)\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi. \quad (\text{П.8})$$

Тогда

$$R_1 = S_1 + iS_2 = \int_0^{\infty} T_1(t)N_1'(t)dt + i \int_0^{\infty} T_1(t)N_2'(t)dt,$$

$$R_2 = M_1 + iM_2 = \int_0^{\infty} T_0(t)N_1''(t)dt + i \int_0^{\infty} T_0(t)N_2''(t)dt.$$

Нетрудно убедиться в том, что вещественная и мнимая части функции  $N(t)$  и их производные четного порядка положительны, производные нечетного порядка отрицательны и по модулю убывают в промежутке  $[0, \infty)$ . Следовательно,

$$|S_{1,2}| = \left| \int_0^{\infty} T_1(t)N_{1,2}'(t)dt \right| = \int_0^{\infty} |T_1(t)| |N_{1,2}'(t)|dt. \quad (\text{П.9})$$

Аналогично

$$|M_{1,2}| = \int_0^\infty |T_0(t)| |N'_{1,2}(t)| dt. \tag{П.10}$$

Установим, что функции  $|T_0(t)|$  и  $|T_1(t)|$  являются убывающими. Функция  $T_n(t)$  может быть представлена интегралом (см. [6])

$$T_n(t) = \frac{1}{n!} \int_t^\infty (\xi - t)^n \frac{e^{-i(k_1+k)\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi. \tag{П.11}$$

Рассмотрим функцию  $n! T_n(t)$ . Обозначая  $k_2 = k_1 + k$  и применяя подстановку  $\xi = (\sigma + 1)t$ , перепишем (П.11):

$$n! T_n(t) = t^{n+1/2} e^{-ik_2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-ik_2 t \sigma}}{\sqrt{\sigma + 1}} \sigma^n d\sigma. \tag{П.12}$$

После замены переменной по формуле  $\sigma = -i\rho e^{i\theta}$ , где  $\theta = -\arg k_2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $k_2 = |k_2| e^{-i\theta}$ , (П.12) приобретает вид

$$n! T_n(t) = t^{n+1/2} (-i)^{n+1} e^{i(n+1)\theta} e^{-ik_2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-|k_2| t \rho}}{\sqrt{1 - i\rho e^{i\theta}}} \rho^n d\rho. \tag{П.13}$$

Чтобы избавиться от корня под интегралом (П.13), положим  $\sqrt{1 - i\rho e^{i\theta}} = x - iy$ , затем  $y = \cos \theta \operatorname{sh} u$ ,  $x = \operatorname{sh} u \sin \theta + \operatorname{ch} u$ , в результате  $\rho = 2 \operatorname{sh} u (\operatorname{sh} u \sin \theta + \operatorname{ch} u)$ . Тогда

$$\begin{aligned} n! T_n(t) &= t^{n+1/2} (-i)^n e^{-ik_2 t} e^{in\theta} 2^{n+1} \times \\ &\times \int_0^\infty e^{-2|k_2| t \operatorname{sh} u (\operatorname{sh} u \sin \theta + \operatorname{ch} u)} \operatorname{sh}^n u (\operatorname{sh} u \sin \theta + \operatorname{ch} u)^n \times \\ &\times [\operatorname{ch} u \sin \theta + \operatorname{sh} u - i \cos \theta \operatorname{ch} u] du. \end{aligned}$$

Найдем производную функции  $|T_0|^2 = T_0 T_0^*$ . Согласно (П.8)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T_0 T_0^*) &= -\frac{2}{\sqrt{t}} \operatorname{Re}(e^{ik_2^* t} T_0) = -4e^{-2|k_2| t \sin \theta} \int_0^\infty e^{-2|k_2| t \operatorname{sh} u (\operatorname{sh} u \sin \theta + \operatorname{ch} u)} \times \\ &\times (\operatorname{ch} u \sin \theta + \operatorname{sh} u) du. \end{aligned} \tag{П.14}$$

Правая часть (П.14) отрицательна, следовательно,  $|T_0|^2$  и  $|T_0|$  — убывающие функции. Можно показать также, что  $|T_1|$  — убывающая функция. Это позволяет записать вместо (П.9), (П.10)

$$\begin{aligned} |S_{1,2}| &\leq |T_1(0)| \int_0^\infty N'_{1,2}(t) dt = |T_1(0)| |N'_{1,2}(0)|, \\ |M_{1,2}| &\leq |T_0(0)| \int_0^\infty N'_{1,2}(t) dt = |T_0(0)| |N'_{1,2}(0)|. \end{aligned}$$

Используя неравенство  $\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ , получим



$$|R_1| \leq |S_1| + |S_2| \leq \sqrt{2} |T_1(0)| |N'(0)|,$$

$$|R_2| \leq |M_1| + |M_2| = \sqrt{2} |T_0(0)| |N'(0)|$$

и, согласно (П.7), принимая во внимание значения интегралов

$$T_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i(k_1 + k)}}, \quad T_1(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2[i(k_1 + k)]^{3/2}},$$

$$N'(0) = -\frac{\pi}{2} e^{-i\pi/4} \{-kH_1^{(2)}(ku) + ikH_0^{(2)}(ku)\} e^{iku},$$

имеем

$$|R| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{k\pi}{V|k_1 + k|} |H_0^{(2)}(ku) + iH_1^{(2)}(ku)|. \quad (\text{П.15})$$

В результате можно записать для  $X_1(u)$ , учитывая (П.6), (П.15) и отбрасывая слагаемые порядка  $k^2/|k_1|^2$  по отношению к главным,

$$X_1 = \frac{e^{i\pi/4} e^{-iku}}{\pi} I = \frac{\sqrt{k_1 + k}}{2} \left\{ H_0^{(2)}(ku) + \frac{k}{2ik_1} [H_1^{(2)}(ku) - iH_0^{(2)}(ku)] + R' \right\}, \quad (\text{П.16})$$

где

$$|R'| \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{k}{|k_1|} |H_1^{(2)}(ku) - iH_0^{(2)}(ku)|,$$

т. е. порядка второго слагаемого в выражении (П.15). Отметим, что при  $ku \gg 1$   $H_1^{(2)}(ku) \approx iH_0^{(2)}(ku)$  и в (П.16) остается только первое слагаемое. Из (П.16) следует при  $\frac{|k_1|}{k} \gg 1$ ,  $|k_1|u \gg 1$

$$X_1(u) \approx \frac{\sqrt{k_1}}{2} H_0^{(2)}(ku). \quad (\text{П.17})$$

Действительно, если  $\frac{|k_1|}{k} \gg 1$ ,  $|k_1|u \approx 1$ , то  $ku = (k/|k_1|) \ll 1$  и можно записать [7]:

$$H_0^{(2)}(ku) = O\left(1 + \left|\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{1,78ku}\right|\right) = O\left(1 + \ln \left|\frac{k_1}{k}\right|\right) \gg 1,$$

$$\left|\frac{k}{2ik_1} H_1^{(2)}(ku) + R'\right| = O\left(\frac{1}{|k_1|u}\right) = O(1),$$

откуда вытекает (П.17).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. C. Clemmow, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **246**, № 905, 1 (1953).
2. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.
3. R. F. Millar, Radio Science, **2**, № 3, 261 (1967).

4. Л. Г. Содни, Радиотехника и электроника, 15, № 2, 233 (1970).
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 2, изд. Наука, М., 1974.
6. В. А. Каратыгин, В. А. Розов, ЖВМ и МФ, 10, № 2, 300 (1970).
7. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967.

Ленинградский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
23 января 1979 г.

RADIATION OF A SLOT MADE PARALLEL TO THE EDGE OF AN IDEALLY  
CONDUCTING HALF-PLANE LOCATED AT THE BOUNDARY BETWEEN TWO  
MEDIA

*V. A. Karatygin, V. A. Rozov, A. A. Konstantinova*

By the factorization method the solution of a problem has been obtained on radiation of a single-sided slot made parallel to the edge of an ideally conducting half-plane located at the boundary between two media. The current distribution on the surface of the half-plane is studied in detail. An expression has been derived for the power obtained per unit of the slot length with allowance for the half-plane edge effect.

---

УДК 621.396.677

## О СИНТЕЗЕ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЕ

П. А. Савенко

Анализируется нелинейное интегральное уравнение, возникающее в задаче синтеза линейных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме. Количество и характер решений определяются аналитически, что позволяет находить глобальный экстремум. Получены трансцендентные уравнения для первых точек ветвления. Приводятся численные результаты для двух заданных амплитудных диаграмм.

В работах [1-3] подробно исследована задача синтеза линейной антенны по заданной амплитудной диаграмме. Использование некоторой модификации принятого там критерия в задаче синтеза линейной решетки приводит к решению нелинейных уравнений, подобных соответствующим уравнениям для линейной антенны. Ниже приводятся результаты аналитического и численного исследования задачи синтеза линейной эквидистантной решетки. Предполагается заданной только амплитудная диаграмма  $F(\vartheta)$ , к фазовой диаграмме никаких требований не предъявляется.

1. Известно [4], что функция, описывающая диаграмму направленности (множитель решетки) эквидистантной линейной системы излучателей, имеет вид

$$f(\xi) = \sum_{n=-M}^M I_n e^{-in c \xi}, \quad (1)$$

где  $\xi = \sin \vartheta / \sin \alpha$ ,  $I_n$  — ток на  $n$ -м излучателе,

$$c = kd \sin \alpha, \quad (2)$$

$k$  — волновое число в пустоте,  $d$  — расстояние между соседними излучателями,  $[-\alpha, \alpha]$  — интервал углов  $\vartheta$ , в котором задана амплитудная диаграмма  $F$ . Функция  $f(\xi)$  — периодическая с периодом  $2\pi/c$ . В качестве критерия оптимизации будем использовать функционал

$$\sigma = \int_{-1}^1 [F(\xi) - |f(\xi)|]^2 d\xi + \left( \int_{-\pi/c}^{-1} + \int_1^{\pi/c} \right) |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (3)$$

т. е. рассматривать задачу синтеза заданной диаграммы  $F(\xi)$  на одном периоде [5], полагая при этом  $F(\xi) = 0$  для  $1 < |\xi| \leq \pi/c$ . Такой критерий накладывает ограничение на расстояние между соседними излучателями\*  $d < \lambda/(2\sin \alpha)$ , где  $\lambda$  — длина волны.

Условие стационарности функционала (3) приводит к нелинейному интегральному уравнению

\* В конце работы будет приведена эквивалентная (3) постановка задачи, свободная от этого ограничения.

$$f(\xi') = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi) K(c, \xi', \xi) e^{i \arg f(\xi)} d\xi \quad (4)$$

для оптимальной диаграммы  $f(\xi)$ . Ядро  $K(c, \xi', \xi)$ , в отличие от линейной антенны, является вырожденным и принимает вид

$$K(c, \xi', \xi) = \sum_{n=-M}^M e^{inc(\xi' - \xi)} = \frac{\sin N \frac{c}{2} (\xi' - \xi)}{\sin \frac{c}{2} (\xi' - \xi)}, \quad (5)$$

где  $N = 2M + 1$  — количество излучателей в решетке. По найденной из этого уравнения диаграмме  $f(\xi)$  оптимальные токи на излучателях определяются по формуле

$$I_n = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi) e^{i[\arg f(\xi) + nc\xi]} d\xi \quad (n = -\overline{M}, \overline{M}). \quad (6)$$

Укажем на некоторую аналогию между задачами синтеза линейных антенн и линейных эквидистантных решеток. Если устремить  $N \rightarrow \infty$ , а  $d \rightarrow 0$ , так чтобы произведение  $Nd$  оставалось постоянным и равным  $2a$ , то период  $f(\xi)$  станет бесконечным. При этом функционал (3) и уравнение (4) преобразуются соответственно в критерий оптимизации и интегральное уравнение, применяющиеся в [3] для синтеза линейной антенны. Оказывается, что и при конечных  $N$  решения обеих задач обладают сходными свойствами. Сохраняется также методика для исследования уравнения (4), вследствие чего опускаются промежуточные преобразования.

Отметим, что каждое из решений уравнения (4) определяется с точностью до постоянного фазового множителя.

2. Рассмотрим свойства решений уравнения (4) в зависимости от параметра  $c$ . Для всех  $c \in (0, \pi)$  этому уравнению удовлетворяет функция

$$f_0(\xi', c) = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi) K(c, \xi', \xi) d\xi. \quad (7)$$

Такое решение (которое в дальнейшем мы будем называть тривиальным) доставляет минимум функционалу  $\sigma$  лишь при значениях  $c$ , меньших некоторого  $c_0$ . При  $c > c_0$  от  $f_0(\xi, c)$  отщепляются другие решения, доставляющие минимум  $\sigma$ , а  $f_0(\xi, c)$  остается лишь стационарной точкой (типа седловой).

Точками ветвления [6, 3] могут быть лишь такие значения параметра  $c = c_i$ , для которых собственное значение  $\nu = 1$  линейного однородного уравнения

$$\nu v(\xi') = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 F(\xi) K(c, \xi', \xi) \frac{v(\xi)}{f_0(\xi, c)} d\xi. \quad (8)$$

имеет кратность не меньше двух, поскольку одно из собственных значений этого уравнения, а именно  $\nu_0$ , соответствующее собственной функции  $v_0(\xi, c_i) = f_0(\xi, c_i)$ , равно единице при произвольном  $c_i$ .

Уравнение (4) имеет точки ветвления двух типов, в зависимости от того, какая кратность собственного значения  $\nu = 1$ . Мы будем рас-

смаивривать лишь по одной точке каждого типа:  $c_1$  — первая точка с кратностью два и  $c_2$  — первая точка с кратностью три.

В  $c_1$  при произвольной  $F(\xi)$  собственные функции, отвечающие  $\nu = 1$ , имеют вид

$$v_0(\xi, c_1) = f_0(\xi, c_1), \quad v_1(\xi, c_1) = \frac{\operatorname{tg} \frac{c_1}{2} \xi f_0(\xi, c_1)}{1 + \eta_1 \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} \xi}, \quad (9)$$

где  $\eta_1$  — некоторый параметр, зависящий от  $F$ . Этот параметр и точка  $c = c_1$  связаны между собой системой трансцендентных уравнений

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\xi) \cos N \frac{c}{2} \xi d\xi}{\cos \frac{c}{2} \xi + \eta_1 \sin \frac{c}{2} \xi} = 0, \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\xi) \sin N \frac{c}{2} \xi d\xi}{\cos \frac{c}{2} \xi + \eta_1 \sin \frac{c}{2} \xi} = 0.$$

Для четных  $F(\xi)$   $\eta_1 = 0$ , а  $c_1$  определяется из уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\xi) \cos N \frac{c}{2} \xi d\xi}{\cos \frac{c}{2} \xi} = 0. \quad (11)$$

Применение методики теории ветвления [6] позволяет установить, что в точке  $c_1$  от тривиального ответвляются два комплексно-сопряженных между собой решения, имеющие в первом приближении вид

$$f(\xi, c) = f_0(\xi, c) \pm ih_1 v_1(\xi, c_1) \zeta^{1/2} + O(\zeta). \quad (12)$$

Здесь  $h_1$  — некоторый нормировочный коэффициент, зависящий от  $F$  и  $c_1$ , а  $\zeta = c - c_1$ . Полученные решения доставляют  $\sigma$  глобальный экстремум в интервале  $c_1 \leq c \leq c_2$ .

В случае, когда  $F(\xi)$  — четная функция, ответвляющиеся в  $c_1$  решения имеют нечетную фазовую диаграмму, которой соответствуют вещественные, но не симметричные относительно центра решетки распределения токов на излучателях.

3. Точки ветвления второго типа существуют только для четных  $F(\xi)$ . Собственные функции уравнения (8), отвечающие  $\nu = 1$ , в точке  $c = c_2$  имеют вид

$$v_0(\xi, c_2) = f_0(\xi, c_2),$$

$$v_1(\xi, c_2) = \frac{\operatorname{tg} \frac{c_2}{2} \xi f_0(\xi, c_2)}{1 + \eta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{c_2}{2} \xi}, \quad (13)$$

$$v_2(\xi, c_2) = \frac{f_0(\xi, c_2)}{1 + \eta_2 \operatorname{tg}^2 \frac{c_2}{2} \xi}$$

Параметр  $\eta_2$  и точка  $c_2$  определяются из системы трансцендентных уравнений

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\xi) \cos N \frac{c}{2} \xi \cos \frac{c}{2} \xi d\xi}{\cos^2 \frac{c}{2} \xi + \eta_2 \sin^2 \frac{c}{2} \xi} = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{F(\xi) \sin N \frac{c}{2} \xi \sin \frac{c}{2} \xi d\xi}{\cos^2 \frac{c}{2} \xi + \eta_2 \sin^2 \frac{c}{2} \xi} = 0. \tag{14}$$

Общее количество ответвляющихся решений равно четырем. Раздельное рассмотрение решений в классе четных и в классе нечетных фазовых диаграмм показывает, что в каждом из этих классов существуют по два комплексно-сопряженных между собой решения. Для решений в классе нечетных фаз получается та же формула (12), в которой нужно заменить соответственно собственную функцию  $v_1$  и точку  $c_1$  на  $c_2$ . Если же вместо  $v_1$  подставить  $v_2$ , то получим решение в классе четных фаз.

Отметим, что решению с нечетной фазовой диаграммой (как и в первой точке ветвления) отвечает несимметричное, но вещественное распределение токов на излучателях, а решению с четной фазовой диаграммой — симметричное, но уже комплексное.

Решения обоих типов порождают диаграмму с одной и той же амплитудой  $|f(\xi)|$ , поэтому функционал  $\sigma$  принимает на них одно и то же значение.

4. Уравнение (4) можно решать методом последовательных приближений, предварительно определив точки ветвления, количество и характер решений при заданном  $c$ . При выборе начального приближения следует учитывать четность искомых решений или использовать формулы (12).

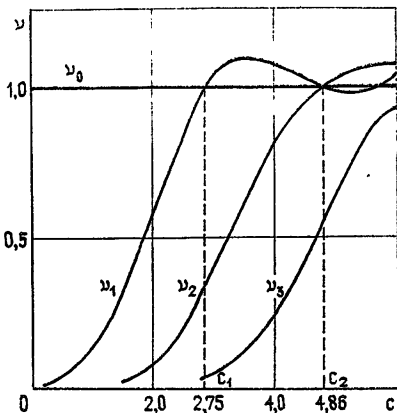


Рис. 1.

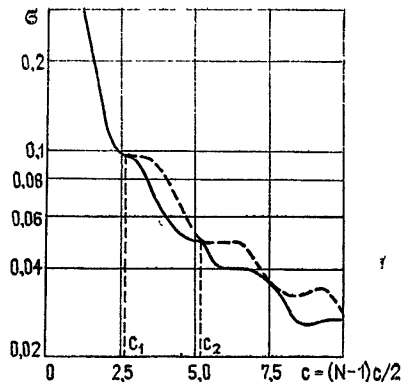


Рис. 2.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов. На рис. 1 приведена зависимость первых четырех собственных значений уравнения (8) от параметра  $C=Mc$  при  $F(\xi) \equiv \text{const}$  и  $N=11$ . Минимальные значения  $\sigma$  в зависимости от  $C$  для этой диаграммы приведены на

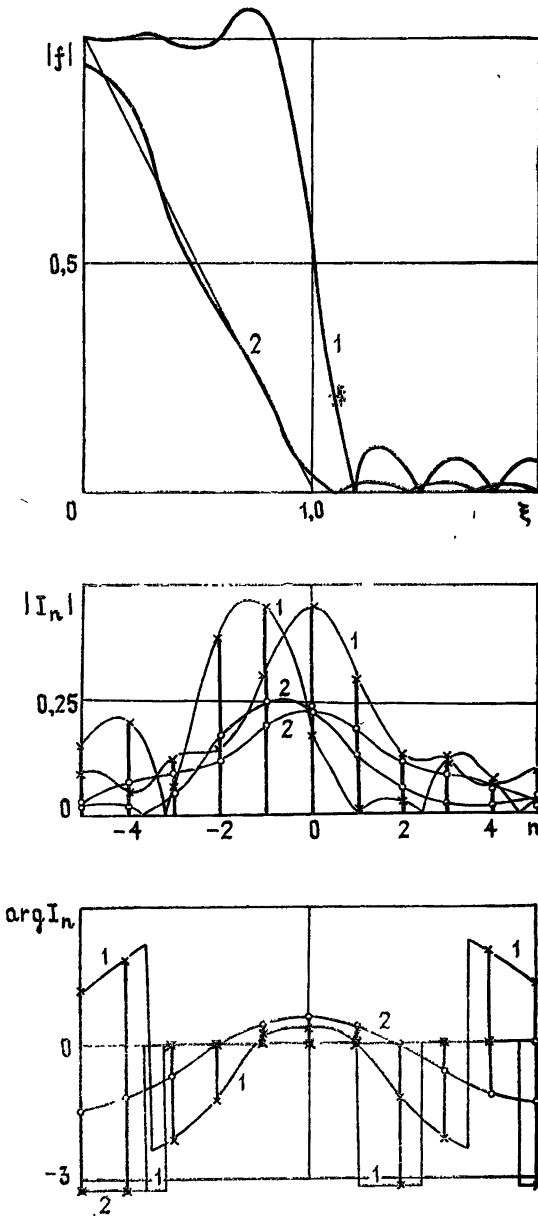


Рис. 3.

рис. 2. Сплошные кривые отвечают оптимальным решениям, а пунктирные — тривиальному. На рис. 3 в качестве примера приведены оптимальные амплитудные диаграммы и порождающие их оптимальные распределения токов, отвечающие нечетным и четным фазовым диаграммам ( $N=11$ ,  $C=8$ ). Кривые 1 отвечают  $F(\xi) = 1$ , кривые 2 —  $F(\xi) = 1 - |\xi|$ .

5. В заключение рассмотрим другую, близкую в математическом плане к принятой выше постановку задачи. А именно, выберем в качестве критерия оптимизации функционал

$$\chi = \frac{(F, |f|)}{\|I\|} = \frac{\int_{-1}^1 F(\xi) |f(\xi)| d\xi}{\sqrt{\sum_{n=-M}^M |I_n|^2}}. \quad (15)$$

По-видимому, впервые подобный функционал был использован [7] в задачах синтеза квазиоптических систем, а в работе [8] — для смешанной антенной задачи.

Условие стационарности  $\chi$  приводит к выражению

$$I_n = \frac{\|I\|^2}{(F, |f|)} \int_{-1}^1 F(\xi) e^{i[\arg f(\xi) + n c \xi]} d\xi \quad (n = -\overline{M}, \overline{M}), \quad (16)$$

которое совместно с (1) можно рассматривать как систему  $N + 1$  нелинейных уравнений относительно  $I_n$  и  $f(\xi)$ . Используя равенство

$$(F, |f|) = \frac{2\pi}{c} \|I\|^2, \quad (17)$$

в котором  $f(\xi)$  — решение уравнения (4), а  $I_n$  определено по (6), нетрудно показать, что решение системы (1), (16) включает в себя все решения уравнения (4). Из этого следует, что функции, минимизирующие функционал (3), доставляют максимум функционалу (16).

В такой постановке (как и в предыдущей) задачу нахождения оптимальных токов можно свести к нахождению решений подобного (4) интегрального уравнения

$$\hat{f}(\xi') = \frac{1}{(F, |\hat{f}|)} \int_{-1}^1 F(\xi) K(c, \xi', \xi) e^{i \arg \hat{f}(\xi)} d\xi, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{f(\xi)}{\|I\|}, \\ \hat{I}_n &= \frac{I_n}{\|I\|}. \end{aligned} \quad (18)$$

По решению этого уравнения оптимальные токи восстанавливаются по формуле (16) с учетом (18).

Отметим, что функционал (15) не содержит никаких ограничений на расстояния между излучателями и может использоваться при синтезе как эквидистантных, так и неэквидистантных решеток.

Автор благодарен Б. З. Каценеленбауму и Н. Н. Войтовичу за постоянный интерес к работе и стимулирующие дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Войтович, Радиотехника и электроника, 17, № 12, 2491 (1972)
2. Н. Н. Войтович, П. А. Савенко, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1794 (1973).
3. Н. Н. Войтович, П. А. Савенко, Радиотехника и электроника, 21, № 4, 723 (1976).



4. Е. Г. Зелкин, Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности, Госэнергоиздат, М., 1963.
5. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев, Теория синтеза антенны, изд. Сов. радио, М., 1969.
6. М. М. Вайпберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, изд. Наука, М., 1969.
7. Б. З. Каценеленбаум, В. В. Семенов, Радиотехника и электроника, 12, № 2, 244 (1967).
8. В. В. Семенов, Радиотехника и электроника, 17, № 1, 23 (1972).

Вычислительный центр института  
прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редакцию  
11 января 1979 г.

## SYNTHESIS OF LINEAR ANTENNA LATTICES OVER THE GIVEN AMPLITUDE DIAGRAM

*P. A. Savenko*

A nonlinear integral equation is analysed in the problem of synthesis of linear antenna lattices over the given amplitude diagram. The amount and the character of solutions are defined analytically, that permits to find the global extremum. Transcendence equations have been obtained for the first two points of branching. Numerical results for the first two given amplitude diagrams are presented.

---

УДК 621.396.77

## ФАЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

*В. А. Антонов, Н. В. Векслер, Ю. В. Ивко, В. С. Коротков,  
Л. Р. Семенова, В. И. Турчин, А. Л. Фогель, И. М. Фортус*

Рассматриваются результаты измерения диаграмм направленности (ДН) линейных антенных решеток фазометрическим методом. Обсуждаются вопросы аппаратуры и методики измерений. Проводится анализ погрешностей восстанавливаемых ДН.

Применение фазометрического метода для измерения параметров антенных решеток (в том числе и ФАР) представляется в настоящее время целесообразным, так как позволяет сравнительно простыми средствами определить характеристики направленности решетки в дальней зоне, а также амплитудно-фазовое распределение поля в раскрыве [1, 2]. Суть метода, как известно, состоит в восстановлении диаграммы направленности (ДН) по результатам измерения распределения амплитуды и фазы поля излучения на участке некоторой поверхности, окружающей исследуемую антенну [3, 4]. Для расчета ДН ФАР наиболее разработана методика, включающая в себя измерения амплитудно-фазового распределения поля на плоскости, расположенной вблизи от раскрыва антенны (так называемый зондовый метод) [5, 6]. Однако в ряде случаев более удобно, а иногда и единственно возможно проводить измерения поля на участке цилиндрической или сферической поверхности в зоне Френеля исследуемой антенны. В этом случае несколько более сложные математические соотношения позволяют также восстанавливать как ДН, так и амплитудно-фазовое распределение поля в раскрыве исследуемой антенны [4].

Для линейных антенн\*, образующих в пространстве «ножевую» ДН, основной интерес обычно представляет определение наиболее узкого сечения их ДН. В отличие от измерений, использующих источник излучения, расположенный в дальней зоне антенны, при использовании фазометрического метода встает вопрос о выборе размеров области, в которой надо измерить ближнее поле (БП) для восстановления требуемого сечения ДН исследуемой антенны [4]. Как показано в [8], для восстановления одного сечения область измерения БП можно существенно ограничить по поперечной координате и в пределе для линейной антенны свести к участку кривой, окружающей исследуемую антенну. Значительное сокращение числа измеряемых значений БП, особенно в случае измерений на участке линии, уменьшает время вычислений ДН, а также ускоряет и упрощает процедуру измерений.

Исследовались два макета антенных решеток, состоящих из равномерно отстоящих друг от друга полуволновых вибраторов с общим отражателем, формирующих в пространстве многолепестковую «ноже-

\* Сюда можно отнести резко несимметричные антенны, поперечные размеры которых много меньше продольных.

вую» ДН. Обе антенны последовательно устанавливались горизонтально на опорно-поворотное устройство, которое осуществляло их вращение относительно вертикальной оси (см. рис. 1). «Ножевая» ДН с наиболее узким сечением в горизонтальной плоскости сканировалась относительно излучателя, расположенного на вышке в ближней зоне исследуемой антенны\*.

Используемые в качестве излучателей полуволновые вибраторы с отражателем устанавливались на 20-метровой измерительной вышке и запитывались от генератора стандартных сигналов. Опорный сигнал от генератора к измерительному приемнику передавался с помощью кабеля. Сигнал от исследуемой антенны и опорный сигнал поступали на два входа измерительного приемника, в качестве которого использовался серийный амплифазометр ФК2-12. Измерения на его выходах, соответствующие амплитуде и фазе измеряемого сигнала, преобразовывались в код и регистрировались на перфоленду.

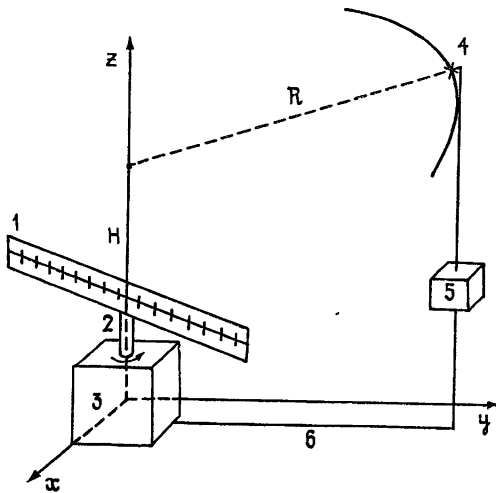


Рис. 1. Блок-схема измерительной установки:

1 — исследуемая антенная решетка; 2 — опорно-поворотное устройство; 3 — измерительная аппаратура; 4 — излучатель; 5 — генератор, 6 — линия передачи опорного сигнала.

Для обеспечения соответствия между моментами измерения значений ближнего поля и угловыми положениями исследуемой антенны система регистрации синхронизировалась импульсами управления вращением антенны. Это позволяло реализовать многократное автоматическое измерение ближнего поля антенны в выбранном угловом секторе с заданным шагом дискретизации. Такая методика давала возможность последовательно измерять ближние поля, соответствующие различным лучам ДН, а затем восстанавливать полную многолучевую ДН исследуемой антенны. Упрощался также статистический анализ результатов.

Обработка измеренных данных проводилась на ЭВМ М-222 в два этапа. Первоначально осуществлялся ввод перфолент, перекодирование данных, их коррекция и запись на магнитную ленту. Затем вычислялись ДН с помощью алгоритма, реализующего скалярный интеграл Кирхгофа и производился вывод полученной информации в виде графиков или таблиц.

\* Расстояние до излучателя  $R$  соответствовало условию ближней зоны для продольного размера антенной решетки и условию дальней зоны для ее поперечных размеров.

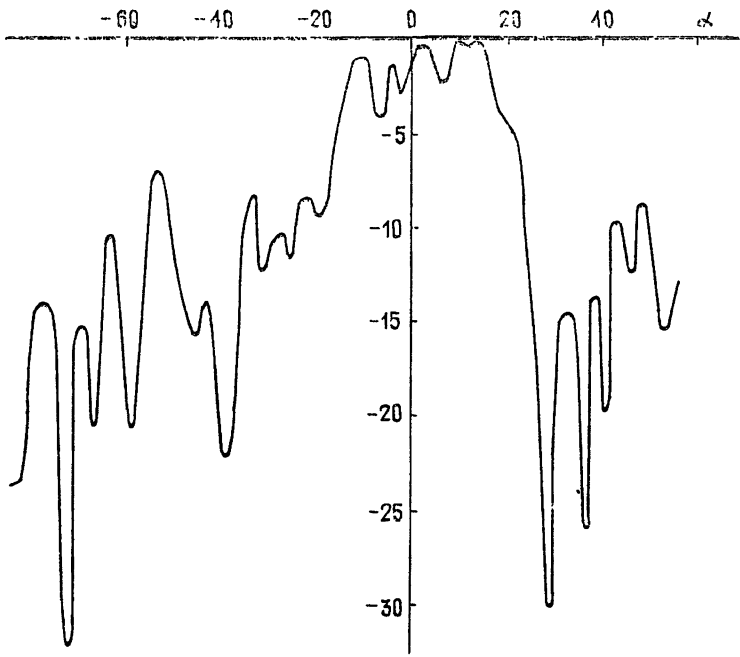


Рис. 2. Распределение амплитуды БП.

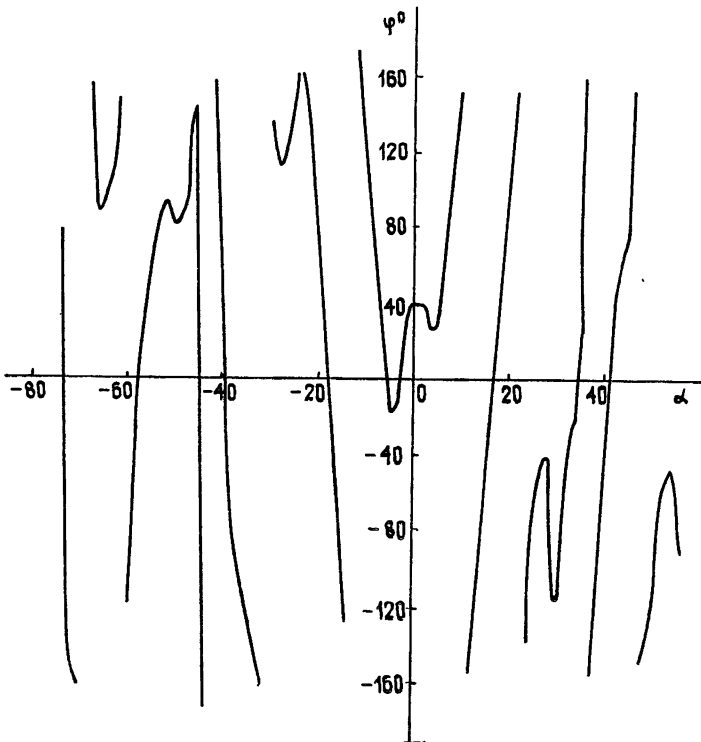


Рис. 3. Распределение фазы БП.

На рис. 2 и 3 изображены примеры измеренных распределений амплитуды и фазы ближнего поля первого макета антенной решетки. Выбранный угловой сектор измерения включил в себя примерно 20 боковых лепестков ДН в каждую сторону от главного максимума. Восстановленные ДН (ВДН) сравнивались с соответствующими ДН, измеренными по источнику, расположенному в дальней зоне (ДЗ), и вычисленными по результатам измерения амплитуд и фаз токов в вибраторах (АФР). Примеры таких ДН для двух лучей изображены на рис. 4 и 5. На рис. 6 приведена полная 8-лучевая ДН макета антенной решетки, восстановленная по результатам измерения БП. Масштаб угловой координаты по оси абсцисс на рис. 4 и 5 составляет: 1 дел. =  $0,25 \Delta \theta_{0,5}$ , на рис. 6 — 1 дел. =  $0,4 \Delta \theta_{0,5}$ , где  $\Delta \theta_{0,5}$  — полуширина главного лепестка ДН по уровню половинной мощности.

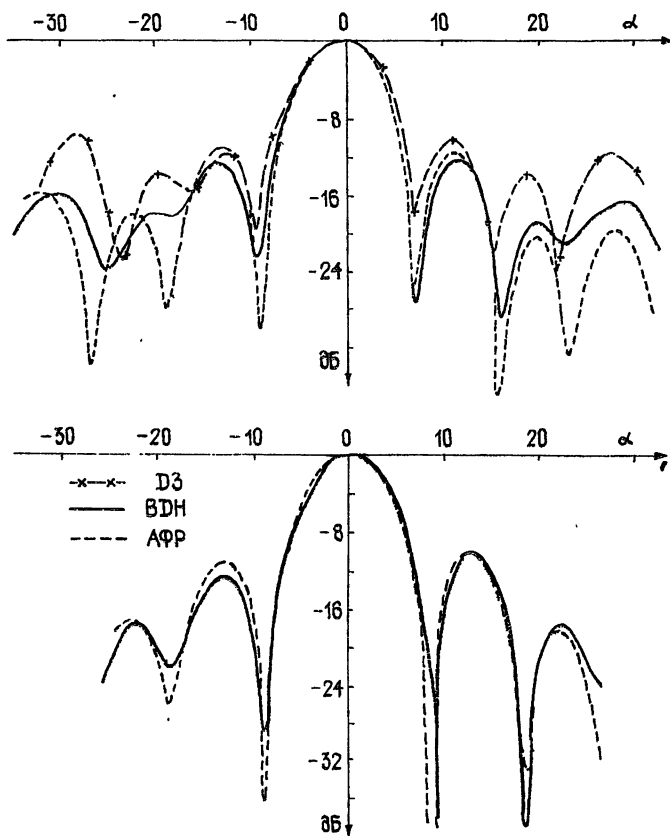


Рис. 4. Азимутальные сечения 2-го луча ДН, измеренные различными способами.

Рис. 5. Азимутальные сечения 4-го луча ДН.

Для второго макета антенной решетки в результате многократного повторения измерений был проведен частичный статистический анализ получаемых результатов.

На рис. 7 и 8 изображены распределения амплитуды ближнего поля и дисперсий его реальной и мнимой частей. Как видно из этих графиков, точность измерения существенно снижается при удалении от направления максимума излучения, что связано, в первую очередь, с уменьшением уровня измеряемого сигнала. На рис. 9, 10 показаны несколько реализаций ДН, измеренных по источнику, расположенному в дальней зоне антенны (рис. 9), и восстановленных по результатам измерения ближнего поля (рис. 10).

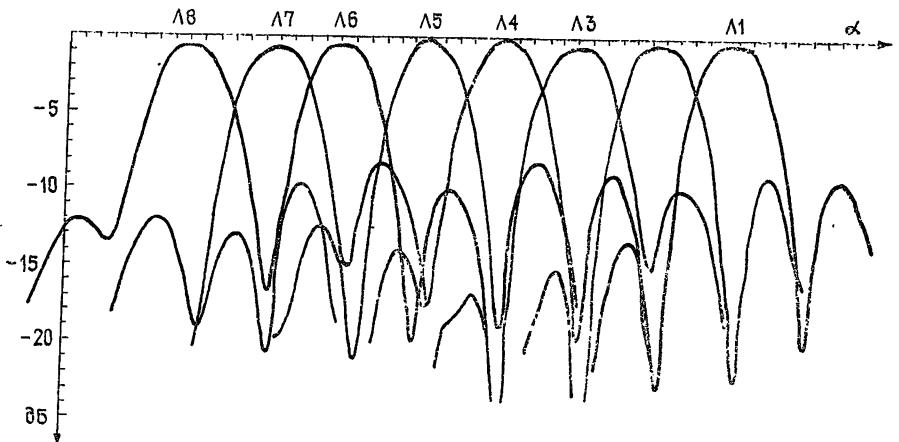


Рис. 6 Азимутальное сечение полной многолучевой ДН, восстановленное по БП.

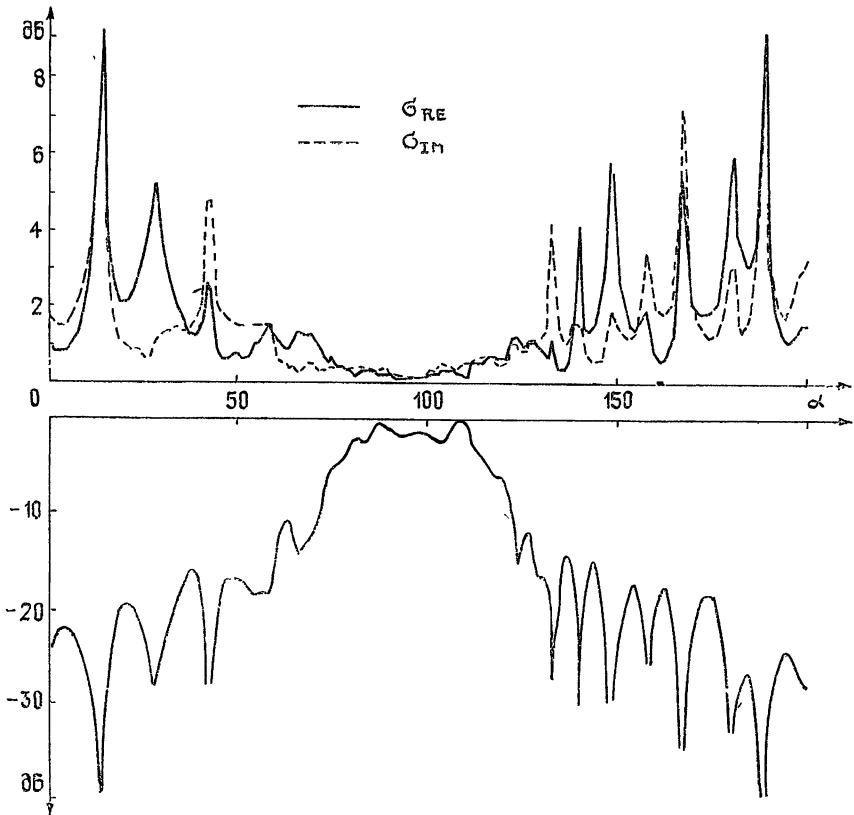


Рис. 7. Угловое распределение дисперсий реальной и мнимой частей БП.  
Рис. 8. Распределение амплитуды БП.

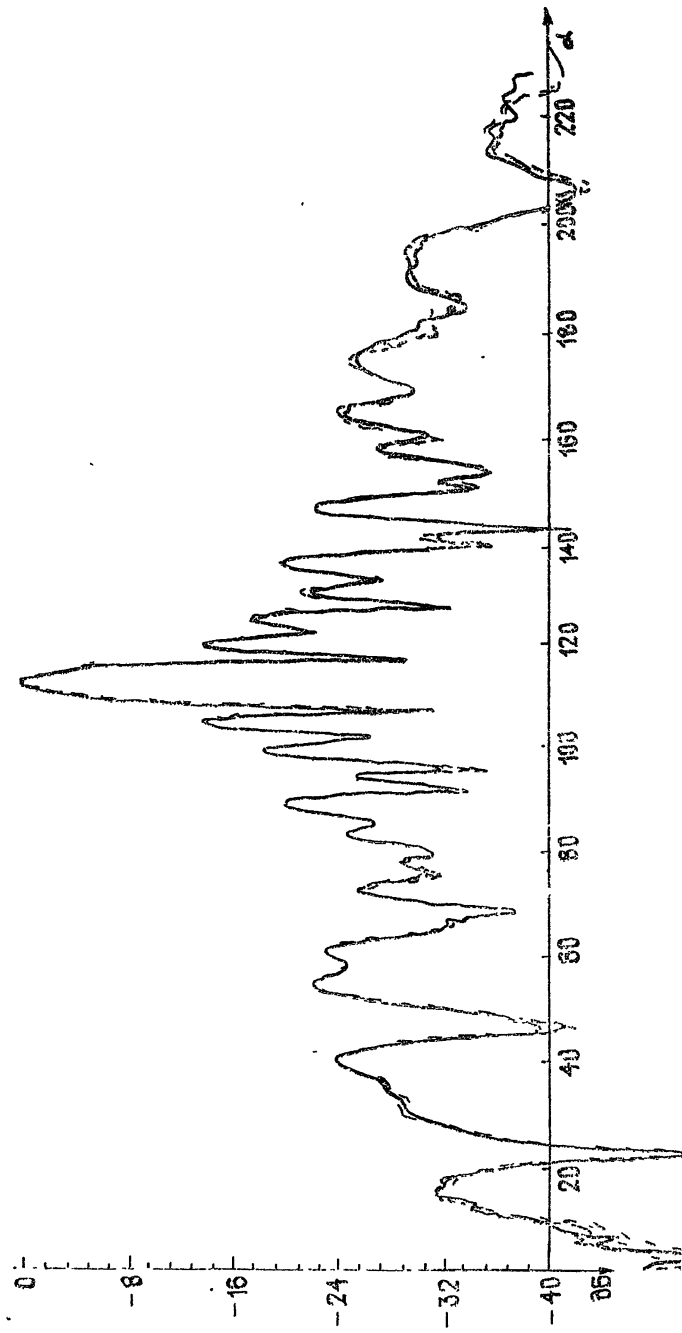


Рис. 9. 4 реализации азимутального сечения ДН, измеренного по источнику в дальней зоне.

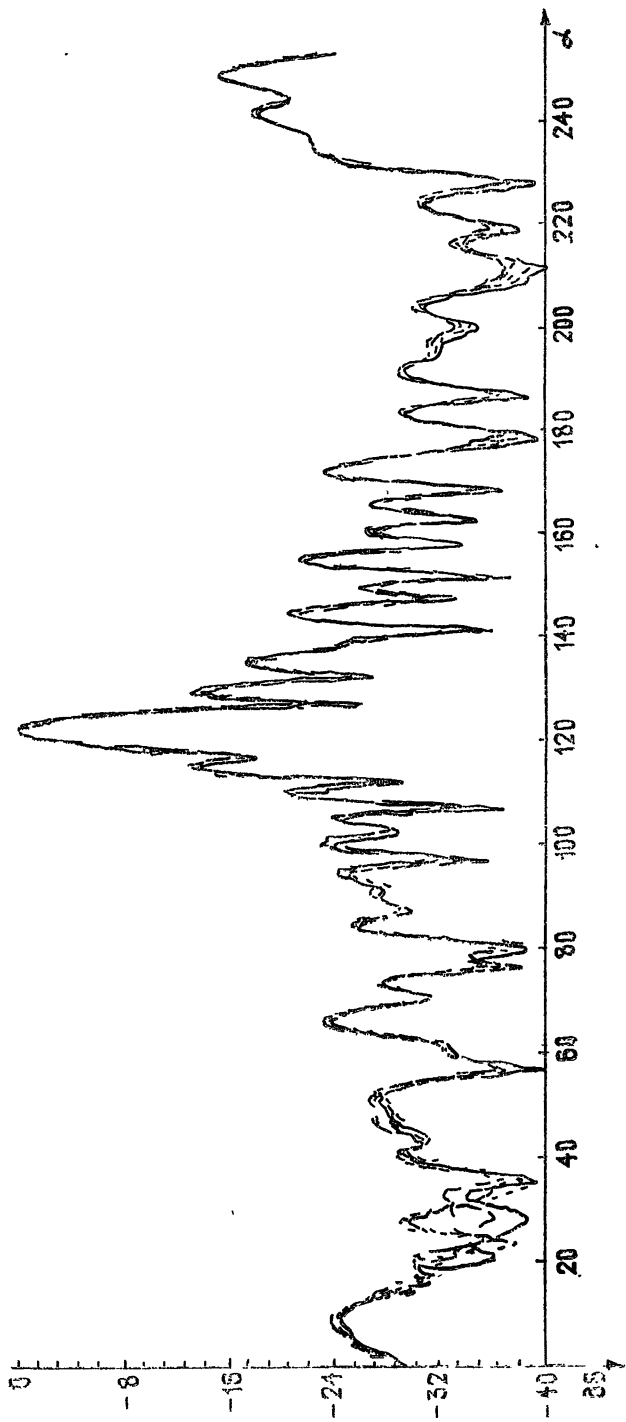


Рис. 10. 5 реализаций азимутального сечения ДН, восстановленных по БП.



На рис. 11 изображены зависимости дисперсий реальной и мнимой частей ближнего поля, а также восстановленной ДН от уровня измеряемого сигнала. Как видно из рис. 11, отношение сигнал/шум после обработки увеличивается, что свидетельствует о независимости шумов в измеряемых значениях ближнего поля.

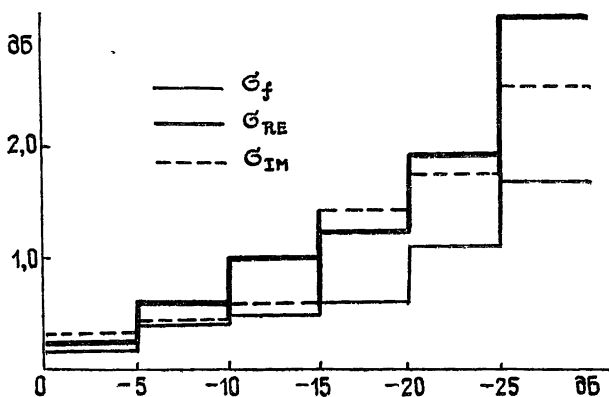


Рис. 11. Зависимости дисперсий реальной ( $\sigma_{Re}$ ) и мнимой ( $\sigma_{Im}$ ) частей БП, а также дисперсии ( $\sigma_f$ ) ДН от уровня измеряемого сигнала.

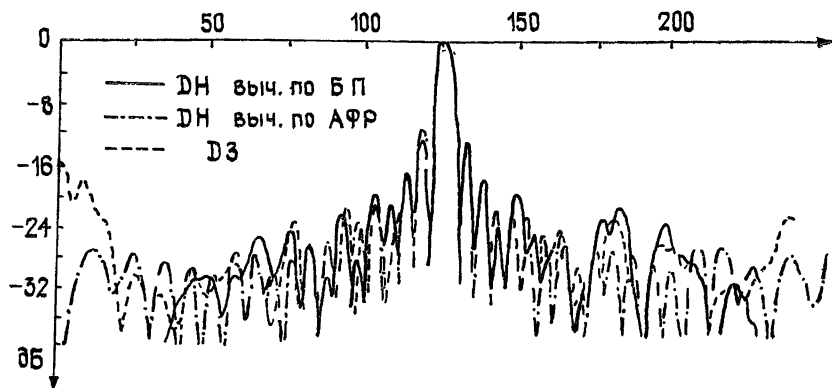


Рис. 12. Азимутальное сечение ДН второго макета антенной решетки.

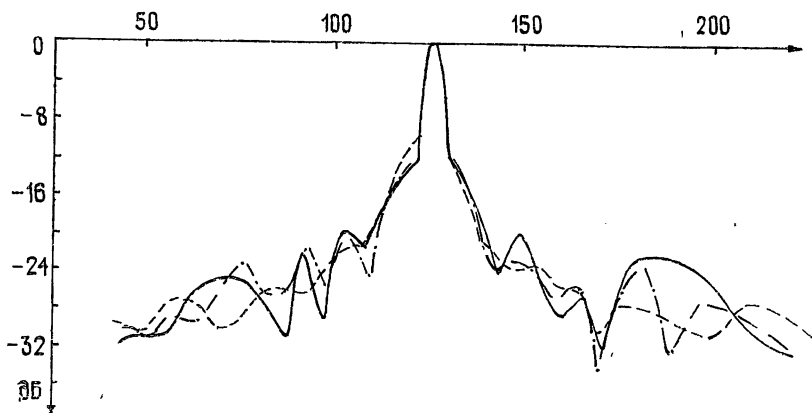


Рис. 13. Огибающие ДН, изображенных на рис. 12.

Сравнение ДН, измеренных различными методами, приводится на рис. 12, 13, 14. На рис. 13 изображены огибающие соответствующих ДН, показанных на рис. 12. На рис. 14 приведены огибающие графиков, изображенных на рис. 13. Как видно из этих рисунков, несмотря на различие в тонкой структуре бокового излучения (особенно для дальних боковых лепестков), измеренного различными методами\*, имеется достаточно хорошее соответствие общего уровня бокового излучения, ширины главного максимума, что позволяет использовать фазометрический метод измерения ДН для многих практических приложений.

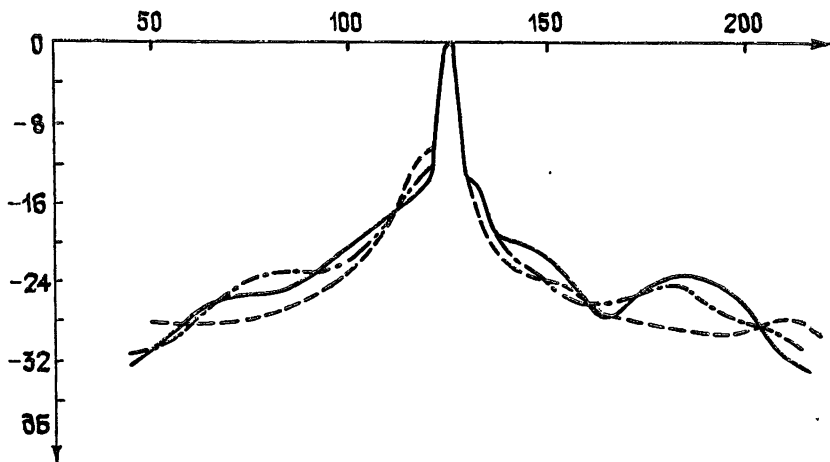


Рис. 14. Огибающие ДН, изображенных на рис. 13.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон, Экер, Холлис, ТИИЭР, 61, № 12, 5 (1973).
2. А. С. Newell, M. L. Grawford, International IEEE, AP-S Symposium, Atlanta, 1974.
3. Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, ДАН СССР, 171, № 6, 1309 (1966).
4. В. И. Турчин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1071 (1977).
5. А. А. Арутюнян, Д. С. Арутюнян, П. М. Геруни, А. А. Татавоян, Б. Е. Хайкин, сб. Проблемы голографии, вып. 4, М., 1974, стр. 144.
6. Д. Б. Зимин, Е. Г. Седенков, сб. Антенны, вып. 23, изд. Связь, М., 1976, стр. 72.
7. В. Ю. Петрунькин, Тр. ЛПИ, Радиофизика, № 181, 75 (1955).
8. А. Л. Фогель, Радиотехника и электроника (в печати).

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
11 июня 1979 г.

#### PHASOMETRIC MEASUREMENTS OF DIRECTIVITY PATTERNS OF LINEAR ANTENNA LATTICES

V. A. Antonov, N. V. Veksler, Yu. V. Ivko, V. S. Korotkov, L. R. Semenova,  
V. I. Turchin, A. L. Fogel', I. M. Fortus

Measurement results of directivity patterns (DP) of linear antenna lattices by phasometric method is considered. Problems of equipment and methodics of measurements are discussed. An analysis of errors regenerated by DP is given.

\* Эти различия обуславливаются систематическими ошибками методов, заключающимися, в основном, во влиянии рельефа местности и местных предметов, отличии реальной геометрии установки от используемой в расчетах и т. д.

УДК 621 373 001.24

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ГЕНЕРАТОРЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

К. А. Лукин

Приведено приближенное решение полученного в [1] уравнения для стационарной амплитуды, дающее надежные оценки амплитуды и мощности колебаний, а также электронного КПД и напряжения срыва колебаний. Проведен анализ переходных и стационарных процессов в ГДИ на основе численной модели. Показана возможность управления фронтами выходного импульса ГДИ с помощью модулирующих импульсов напряжения ступенчатой формы, объяснены асимметрия зоны генерации и срыв автоколебаний, исследована динамика движения частиц в поле синхронной волны с гауссовым распределением амплитуды вдоль длины взаимодействия и обсуждается вопрос повышения КПД. Проведен анализ устойчивости автоколебаний по зоне генерации.

Настоящая работа посвящена анализу переходных и стационарных режимов в генераторах дифракционного излучения (ГДИ), основанному на развиваемой в [1] нелинейной нестационарной теории рассматриваемых приборов. В первом разделе проведен качественный анализ стационарных режимов и их устойчивости на основе приближенного решения полученного в [1] уравнения для стационарной амплитуды. Второй раздел посвящен численному анализу переходных и стационарных процессов в ГДИ.

### 1. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ

Полученное в [1] уравнение для стационарной амплитуды решить в элементарных функциях не представляется возможным. Решение, дающее зависимость амплитуды и КПД от параметров задачи в явном виде, удастся получить лишь с привлечением дополнительных физических соображений, позволяющих упростить уравнение.

Для удобства перепишем его в следующем виде\*:

$$\gamma A^2 - \delta \eta = 0, \quad (1)$$

где

$$\eta = \frac{2b}{\pi(1+b)^2} n_{tr} \sin^2 \Phi(\alpha_0) [1 + b \cos^2 \Phi(\alpha_0)] \quad (2)$$

— электронный КПД,  $\Phi(\alpha_0) = \pi \bar{\Omega}(\alpha_0) D / \omega l$ ,  $\bar{\Omega}$  — усредненная по начальным фазам влета частота осцилляций частиц в яме синхронной волны, зависящая от амплитуды  $A$  волны и расстройки  $b$  начальной скорости электронов и фазовой скорости  $v_{ph}$  волны через параметр  $\alpha_0 = b/2 \sqrt{A \gamma}$  [1, 2],  $D$  — длина взаимодействия,  $\gamma = 1/Q$  — безразмерное затухание поля колебательной системы,  $\delta$  — безразмерный параметр нарастания, пропорциональный постоянной мощности пучка электронов  $\delta \sim I_0 U_0$ ,  $n_{tr} = 2 [\pi - 2 \arcsin |\alpha_0|]$  — нормированное число захваченных частиц.

\* В работе используются обозначения, принятые в [1].

Анализ динамики движения частиц показал, что в стационарном режиме число захваченных частиц равно примерно половине всех частиц, поступающих в систему за период высокочастотных колебаний, и что захваченные частицы совершают примерно пол-оборота на фазовой плоскости. Поэтому выражение для количества захваченных частиц можно заменить первыми двумя членами его разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $\alpha_0^2 = 1/2$  и считать, что  $\Phi(\alpha_0) = \pi/2$ . В результате для стационарной амплитуды получим кубическое уравнение

$$A^3 - 3\alpha^2 A - 2\beta^2 = 0, \quad (3)$$

где

$$\beta^2 = 1,5\alpha^2 b^2, \quad \alpha^2 = 2(\pi + 2) Q \delta b / 3\pi(1 + b)^3.$$

Решения, удовлетворяющие условию  $A > 0$ , имеют вид [3]

$$A_1 = 2\alpha \cos \frac{\theta}{3}, \quad A_2 = -2\alpha \cos \frac{1}{3}(\theta + \pi), \quad (4)$$

где

$$\cos \theta = -\alpha^{-3} \beta^2, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условия существования решений (4),  $\alpha^3 > \beta^2$ , первое из них всегда устойчиво, а второе — неустойчиво. При  $b \ll 1$  из равенства  $\alpha^3 = \beta^2$  следует значение параметра  $b$ , при котором оба решения совпадают, а система переходит в устойчивое состояние равновесия:

$$b_3 \approx \beta_1 \left( \frac{Q \delta}{\pi} \right)^{1/3}, \quad \beta_1 = \frac{2(\pi + 2)}{3}. \quad (5)$$

Амплитуда в точке срыва колебаний  $b = b_3$  будет равна

$$A_{bd} \approx \beta_1 \left( \frac{Q \delta}{\pi} \right)^{2/3}.$$

Зависимость решений  $A_1$  и  $A_2$  от расстройки скоростей  $b$  показана на рис. 1 (кривые 1 и 1'). Там же приведено точное решение уравнения (1) (кривые 2 и 2') и решение, полученное с помощью численной модели [1], при числе крупных частиц, равном 48 (кривая 3). Как видно, приближенное решение (4) при сравнении с результатами численной модели дает относительную погрешность, не превышающую 13% — при определении точки срыва колебаний, 15% — при определении максимальной амплитуды и 20% — при определении максимального КПД. При сравнении с точным решением уравнения (1) соответствующие погрешности принимают значения 4, 9 и 8%. Такая точность позволяет использовать (4) в качестве надежных оценок амплитуды колебаний и электронного КПД. Кроме того, выражения (4) служат хорошим начальным приближением при отыскании точных решений уравнения (1).

Степень устойчивости автоколебаний характеризуется прочностью предельного цикла, определяющего скорость затухания возмущений автогенератора. Согласно определению [4] приближенное выражение для прочности предельного цикла запишется следующим образом:

$$P = \omega \left( \gamma - \frac{\delta}{2A} \frac{d\eta}{dA} \right) \Big|_{A=A_{st}}, \quad (6)$$

где  $A_{st}$  — стационарная амплитуда. Подставляя в это выражение значения стационарных амплитуд, находим величину  $P$  в зависимости от

различных параметров генератора. На рис. 2 штрихпунктирной линией показана нормированная зависимость прочности цикла от расстройки скоростей, рассчитанная по формуле (6). В эксперименте [5] на краях зоны генерации наблюдается ухудшение спектральных и флуктуационных характеристик ГДИ. Как видно из рис. 2, оно связано не только с уменьшением амплитуды колебаний, но и с уменьшением прочности цикла [4]. Причем в окрестности точки срыва колебаний уменьшение прочности цикла сказывается на упомянутых характеристиках в большей степени, чем уменьшение амплитуды. Из (6) и (4) видно, что с ростом  $Q$  и  $\delta$  прочность цикла увеличивается.

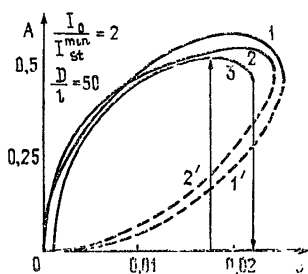


Рис. 1.

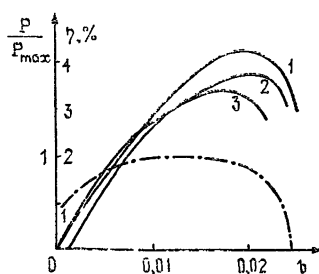


Рис. 2.

Полагая  $n_{tr} = 2\pi$  и  $\Phi(\alpha_0) = \pi/2$ , из (2) получаем значение максимально возможного КПД взаимодействия пучка электронов с бегущей волной при заданной расстройке скоростей:

$$\eta < \eta_{\max} = \frac{4b}{(1+b)^2}. \quad (7)$$

Ограничение (7) обусловлено только самим механизмом энергообмена между пучком и волной и имеет место в любом СВЧ приборе с длительным взаимодействием типа  $O$ .

Упрощая выражение (2) согласно принятым приближениям и подставляя в полученное выражение  $A_1$ , получаем приближенную формулу для электронного КПД:

$$\eta = \frac{2b}{\pi(1+b)^2} \left( \pi + 2 - \frac{b^2}{4\alpha \cos \frac{\theta}{3}} \right). \quad (8)$$

КПД, рассчитанный по этой формуле, а также полученный в результате численного решения уравнения (1), и результат интегрирования уравнений многочастичной модели показаны на рис. 2. Из (4) следует, что при выполнении условия

$$|\beta^2 \alpha^{-3}| \ll 1, \quad (9)$$

т. е. при работе генератора вдали от точки срыва колебаний, энергия колебаний  $\mathcal{E}$  пропорциональна добротности резонатора мощности пучка и расстройке скоростей

$$\mathcal{E} \sim A_1^2 \sim Q\delta b. \quad (10)$$

В то же время из (8) видно, что при выполнении условия (9) электронный КПД стремится к предельному значению с ростом тока и добротности. Несмотря на приближенный характер проведенного анализа

такое поведение энергетических характеристик генератора хорошо согласуется с экспериментальными данными [6]. Однако, как видно из более строгого выражения (2), с ростом амплитуды колебаний (что достигается увеличением тока или добротности) электронный КПД будет уменьшаться после достижения своего максимального значения, т. е. после того, как будет выполняться условие  $\Phi(\alpha_0) = \pi/2$ . С физической точки зрения это означает, что при фиксированной длине взаимодействия существует оптимальное значение амплитуды, при превышении которого макрочастица на фазовой плоскости делает больше, чем пол-оборота (перегруппировка электронов), что и приводит к уменьшению КПД. Таким образом, в реальных ГДИ сильная перегруппировка электронов не наблюдается. Это объясняется, с одной стороны, сравнительно небольшим уровнем генерируемых мощностей, а с другой — действием сил пространственного заряда, которые препятствуют перегруппировке электронов, нарастая с увеличением тока пучка.

## 2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖИМОВ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

В настоящем разделе на основе уравнений численной модели, полученных в [1], проведено исследование переходных и стационарных нелинейных режимов ГДИ. Все расчеты сделаны для основного типа колебаний (распределение поля аппроксимируется гауссовой функцией) без учета кулоновских сил.

### Переходные процессы

При моделировании переходных процессов задавалась начальная амплитуда, соответствующая линейному режиму. После интегрирования уравнений численной модели при начальных условиях, соответствующих немодулированному потоку электронов, получаем зависимость амплитуды колебаний от времени (в масштабе времен пролета), а также скорости и координаты частиц в любой момент времени. Результаты интегрирования представлены на рис. 3, где показаны зависимости амплитуды и ее приращения от времени для различных значений расстройек  $b$  скорости электронов и фазовой скорости синхронной гармоникки.

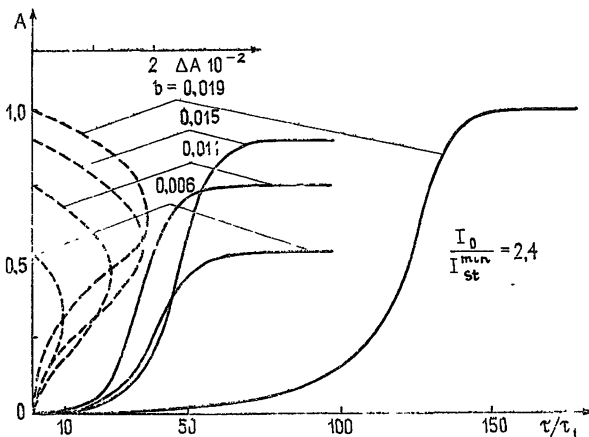


Рис. 3.

Видно, что от величины  $b$  зависит как время установления колебаний, так и амплитуда стационарных колебаний. На стадии экспоненциаль-

ного роста максимальный инкремент нарастания наблюдается при  $b = 0,011$ . Этот результат согласуется с линейной теорией ГДИ [6] — при этих значениях  $b$  функция расстройности имеет максимум. Проведенное моделирование переходных процессов для различных значений отношения  $\delta/\delta_{st} = I_0/I_{st}$  показало, что скорость установления колебаний и их амплитуда увеличиваются с ростом тока пучка. Поэтому увеличение отношения рабочего тока к пусковому позволит генерировать импульсы с лучшими характеристиками.

Зависимость инкрементов от расстройки скоростей (т. е. от ускоряющего напряжения) позволяет сделать вывод о возможности управления передним и задним фронтами импульсов, генерируемых в ГДИ, путем подачи модулирующего импульса ступенчатой формы. На рис. 4 пунктирными линиями показаны огибающие двух выходных импульсов при модулировании импульсами напряжения прямоугольной формы: 1 —  $b_1 = 0,011$  и 2 —  $b_2 = 0,019$ . Энергетически наиболее выгодна амплитуда импульса напряжения, соответствующая максимальным значениям КПД стационарного режима. При этом, как видно из рис. 3, время установления колебаний увеличивается более чем в два раза по сравнению с его наименьшим по зоне генерации значением. Кроме ухудшения параметров самого импульса, это ограничивает уменьшение скважности импульсов. Отмеченные недостатки можно устранить, если подать модулирующий импульс напряжения ступенчатой формы\* (рис. 4) таким образом, чтобы на линейной стадии нарастания амплитуда напряжения соответствовала максимальным инкрементам ( $b = b_1$ ), а на нелинейной стадии — максимальным КПД генерации ( $b = b_2$ ). При этом длительность переднего фронта импульса уменьшается более чем в два раза.

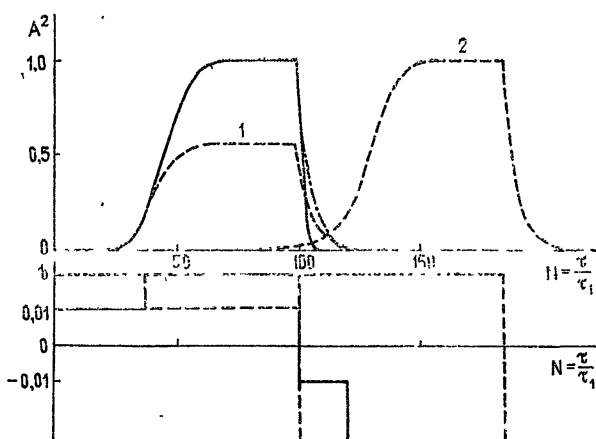


Рис. 4.

Длительность заднего фронта импульса определяется всеми потерями в колебательной системе генератора. Из теории взаимодействия пучка электронов с полем бегущей волны хорошо известно, что при небольшом превышении ее фазовой скорости над скоростью электронов происходит перекачка энергии от волны к пучку. Таким образом, если организовать ступеньку напряжения на уровне, соответствующем максимальному поглощению энергии поля, то в генераторе появятся дополнительные потери и затухание поля усилится. Для линейной стадии необходимый уровень определяется значением расстройки скоростей  $b = -b_1$ . На рис. 4 сплошными линиями показан окончательный вид

\* Возможность управления фронтами импульсов отмечалась в работах [7-9].

модулирующего и генерируемого импульсов. Штрихпунктирной линией показан задний фронт импульса без внесения дополнительных потерь. Как видно, длительность заднего фронта также уменьшена более чем в два раза. Для каждого прибора с увеличением рабочего тока величина  $b_1$  остается постоянной, а  $b_2$  — увеличивается.

Таким образом, приготавливая модулирующие импульсы напряжения рекомендуемым способом, можно улучшить параметры выходных импульсов ГДИ, равно как и других автогенераторов с длительным взаимодействием.

### Стационарные колебания

Результаты моделирования адиабатической перестройки ГДИ ускоряющим напряжением приведены на рис. 5. Зоны генерации 1, 2, 3 получены при значении параметра  $\delta$ , превышающем соответственно в 1,6; 2 и 2,4 раза его минимальное по зоне стартовое значение (при  $b = 0,011$ ). Как видно, с ростом отношения  $I/I_{st}^{min}$  зона генерации расширяется, амплитуда поля и КПД увеличиваются, а их максимум смещается в сторону больших  $b$ . Ширина области гистерезиса также увеличивается. Такое изменение зоны генерации хорошо согласуется с экспериментальными данными [6, 10]. Для зон генерации 1 и 3 тонкими линиями показана область гистерезиса, а пунктирной линией — неустойчивое решение, полученное как устойчивое при замене  $t \rightarrow -t$ . Природа явления гистерезиса генерации изучена и объяснена в [2, 12].

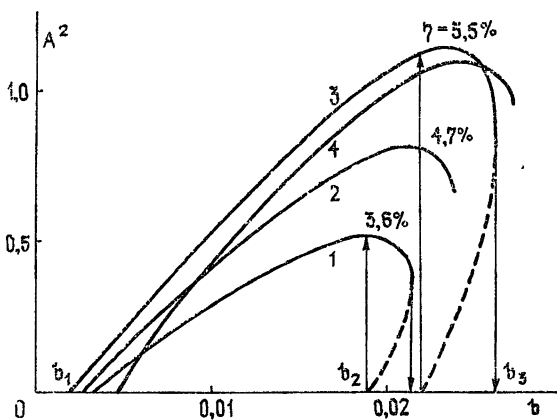


Рис. 5.

Согласно теории колебаний рис. 5 представляет собой бифуркационную диаграмму, на которой отмечены три бифуркационных значения параметра  $b$ :  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ . Два первых значения  $b_1$  и  $b_2$  определяются линейными процессами и находятся из уравнений линейной теории либо аналитически [6, 9, 11], либо численно [12]. Третье значение можно определить только на основе нелинейной теории, поскольку срыв колебаний является сильно нелинейным эффектом, связанным с явлением захвата частиц полем синхронной волны [1]. Оценка дается формулой (5). Из условия захвата частиц [1] следует более грубая оценка  $b_3 < 2\sqrt{A_{max}}$ , где  $A_{max}$  — максимальная по зоне генерации амплитуда. В общем случае  $b_3$  определяется численно.

Динамика движения частиц в процессе взаимодействия исследовалась с помощью фазовых портретов системы частиц (рис. 6). Были проанализированы фазовые портреты для зоны 3 в точке срыва колебаний



(рис. 6а), в точке оптимального взаимодействия (рис. 6б) и в промежуточной точке ( $b=0,01$ ) [12, 13]. Анализ обнаружил качественно идентичный характер движения частиц на фазовой плоскости: захваченные частицы совершают примерно полколебания в яме синхронной волны, существенно уменьшив свою энергию, а пролетные — почти не изменили ее. Отличие состоит в том, что в точке оптимального взаимодействия  $b=0,023$  число захваченных частиц максимально, а в точке срыва колебаний их число существенно уменьшается. Кроме того, уменьшается энергия, отдаваемая полю каждой частицей. После достижения максимума взаимодействия число захваченных частиц уменьшается не только за счет увеличения  $b$ , но и за счет одновременного уменьшения амплитуды. Это приводит к тому, что с ростом  $b$  энергия, отдаваемая пучком полю, уменьшается гораздо быстрее, чем нарастала до достижения максимума амплитуды. Следствием этого является асимметрия зоны генерации и срыв колебаний. Наличие именно срыва колебаний, а не плавного уменьшения амплитуды до нулевого значения объясняется тем, что из-за резких темпов снижения числа захваченных частиц при  $b \gtrsim b_3$ , несмотря на конечное значение амплитуды (когда захваченные частицы эффективно тормозятся), энергии, отбираемой от пучка, не хватает на компенсацию потерь в электродинамической системе генератора. Таким образом, при  $b > b_3$  возбуждение автоколебаний невозможно при любой начальной амплитуде поля, хотя взаимодействие с полем внешнего источника колебаний может быть достаточно эффективным.

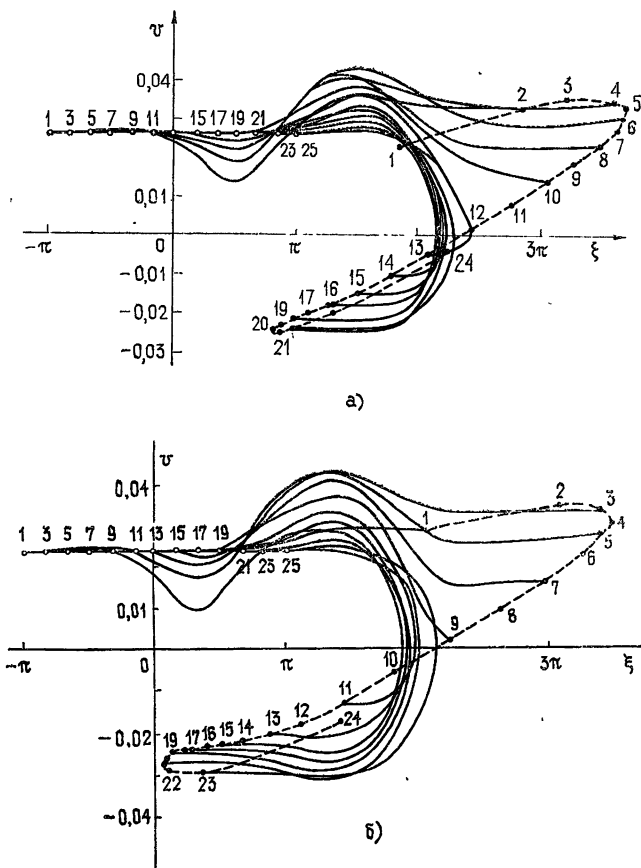


Рис. 6.

Из (2), (7) видно, что КПД в первом приближении пропорционален расстройке скоростей  $b$ . Поэтому повышение КПД в ГДИ (и других генераторах с длительным взаимодействием) достижимо за счет расширения диапазона расстроек скоростей (увеличения  $b_3$ ). В свою очередь, увеличение  $b_3$  связано с увеличением максимальной амплитуды поля, которая согласно оценкам (4), (10) возрастает с увеличением добротности резонатора, тока пучка, его связи с дифракционной решеткой, а также с уменьшением объема, занимаемого полем. Повышение КПД при увеличении мощности пучка и его связи с решеткой наблюдается в эксперименте [6]. При этом рост КПД ограничивается перегруппировкой электронов. Дальнейший его рост возможен за счет уменьшения эффективной длины взаимодействия, что следует из условия оптимального взаимодействия, вытекающего из уравнений одночастичной модели [1]:

$$A = \left( \frac{l}{2D} \right)^2.$$

Другим путем повышения КПД может быть использование специальных амплитудно-фазовых распределений поля в пространстве взаимодействия. Распределение должно обеспечивать группировку электронов в поле слабой амплитуды, а торможение компактного сгустка — в поле большой амплитуды [14]. Моделирование электронной перестройки ГДИ с максимумом поля, смещенным к коллекторному концу, показало, что максимальный КПД в такой модели превышает максимальный КПД обычной модели более чем в полтора раза.

Проведенный анализ показал:

1) При работе генератора вдали от точки срыва автоколебаний для небольших отношений  $I_0/I_{st}$  выходная мощность генератора пропорциональна добротности колебательной системы, постоянной мощности пучка и величине рассинхронизма. С дальнейшим ростом отношения  $I_0/I_{st}$  электронный КПД уменьшается, а мощность стремится к предельному значению.

2) При самых оптимальных условиях взаимодействия пучка электронов с полем бегущей волны электронный КПД ограничен величиной

$$\eta_{\max} = \frac{4b}{(1+b)^2}.$$

3) Для улучшения параметров выходных импульсов в ГДИ можно использовать модулирующие импульсы напряжения ступенчатой формы и увеличивать отношение рабочего тока к его стартовому значению.

4) Для повышения КПД необходимо увеличивать рабочий диапазон расстроек скоростей и оптимизировать амплитудно-фазовое распределение поля в пространстве взаимодействия. Повышение КПД может быть достигнуто и за счет уменьшения отношения периода решетки к эффективной длине взаимодействия при одновременном увеличении рабочих токов.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность В. П. Шестопалову за руководство работой, А. С. Бакаю за полезные замечания и обсуждение результатов, а также С. Д. Андренко, В. Г. Курипу, Ю. В. Майстренко, И. Д. Ревину, Ю. Б. Сидоренко, Б. К. Скрыннику и А. И. Цвыку за многочисленные и плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Бакай, К. А. Лукин, В. П. Шестопалов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 9, 1117 (1979).
2. А. С. Бакай, К. А. Лукин, В. П. Шестопалов, Письма в ЖТФ, 26, № 13, 789 (1978).

3. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1977.
4. А. М. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
5. И. М. Балаклицкий, Г. С. Воробьев, Ю. В. Майстренко, А. И. Цвык, Препринт № 108, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1978.
6. В. П. Шестопапов, Дифракционная электроника, изд. Вища школа, Харьков, 1976.
7. К. А. Лукин, В. П. Шестопапов, II Всесоюзный симпозиум по миллиметровым и субмиллиметровым волнам, Тезисы докладов, ч. 1, 1978, стр. 60.
8. Д. М. Ваврив, А. А. Шматько, О. А. Третьяков, II Всесоюзный симпозиум по миллиметровым и субмиллиметровым волнам, Тезисы докладов, ч. 1, 1978, стр. 62.
9. Д. М. Ваврив, А. А. Шматько, О. А. Третьяков, Препринт, Физико-технический институт низких температур АН УССР, Харьков, 1978.
10. И. Д. Ревин, II Всесоюзный симпозиум по миллиметровым и субмиллиметровым волнам, Тезисы докладов, ч. 1, 1978, стр. 21.
11. В. А. Исаев, Вопросы электроники СВЧ, Межвузовский научный сборник, вып. 10, 65 (1977).
12. А. С. Бакай, К. А. Лукин, В. П. Шестопапов, Препринт № 94, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1978.
13. К. А. Лукин, В. П. Шестопапов, ДАН УССР, серия А, № 4, 335 (1978).
14. Д. В. Кисель и др., Радиотехника и электроника, 19, № 4, 782 (1974).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
8 января 1979 г.

#### THEORETICAL ANALYSIS OF TRANSIENT AND STATIONARY REGIMES IN A DIFFRACTOIN RADIATION GENERATOR

*K. A. Lukin*

An approximate solution is presented of an equation obtained in [1] for a stationary amplitude which gives reliable estimations of the amplitude and power of oscillations as well as the electron efficiency and voltage of oscillation stopping. On the basis of a numerical model the analysis of transient and stationary processes in DRG is given. It is shown that fronts of an output pulse of DRG may be controlled by modelling voltage pulses of the stage form. The assymetry of the generation zone and stopping of auto-oscillations are explained, the dynamics of particle motion in the field of a synchronous wave with Gaussian distribution of the amplitude along the interaction length is investigated, the problem of the efficiency increase is discussed. An analysis of auto-oscillation stability in the generation zone is carried out.

---

УДК 537.533 : 621.384.64

## МЕДЛЕННЫЕ ЦИКЛОТРОННЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

*И. Л. Корнев, Л. А. Юдин, Х. Х. Мустафин*

Рассмотрены дисперсионные характеристики и структура полей медленных циклотронных волн, распространяющихся в релятивистском электронном пучке, движущемся вдоль оси идеально проводящего волновода. Обсуждаются вопросы, связанные с использованием этих волн для ускорения ионов.

В области теории и техники ускорителей в настоящее время проявляется заметный интерес к методу коллективного резонансного ускорения ионов в прямом электронном пучке, предложенному Слоаном и Драммондом [1, 2]. В этом методе ускорение должно обеспечиваться медленной циклотронной волной с отрицательной энергией, возбуждаемой в интенсивном замагниченном электронном пучке. Фазовая скорость такой волны регулируется величиной продольного магнитного поля, что позволяет поддерживать синхронизм волны с ускоряемыми ионами в течение достаточно длительного времени.

В работах [1, 2] проведен предварительный анализ возможностей этого метода ускорения. В работе [3] рассмотрение выполнено в условиях резонанса между циклотронной модой неограниченного электронного пучка и плазменной модой ионного пучка, а также приводятся результаты численного моделирования процесса ускорения с учетом нелинейного характера поля волны. Однако ни в одной из этих работ не было осуществлено последовательное и теоретически достаточно строгое исследование основных характеристик предложенной в [1, 2] ускоряющей системы. Подобное исследование должно включать в себя решение задач распространения волн в пучке, возбуждения этих волн, влияния нагрузки ионами на эти процессы, причем на первом этапе можно ограничиться лишь волнами малой амплитуды, т. е. линейной теорией.

Попытка решения перечисленных задач с учетом нелинейных эффектов методами численного моделирования на ЭВМ была предпринята в работе [4]. Однако, как и при любом численном моделировании, полученные результаты относятся лишь к достаточно узкой области выбранных параметров, и, кроме того, интерпретация этих результатов затруднена из-за их недостаточной полноты.

В данной работе аналитическими методами рассматривается задача о распространении волн малой амплитуды в электронном пучке (без ионов), движущемся вдоль оси гладкого волновода в продольном магнитном поле. При этом основное внимание уделяется дисперсионным характеристикам и структуре медленных циклотронных волн, предназначенных для ускорения ионов. Плотность электронов предполагается равномерной по сечению пучка.

Как и в работе [1], считаем выполненными условия

$$\left(\frac{\omega_p a}{c}\right)^2 \ll 1; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\gamma}\right)^2 \ll \Omega^2; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\omega_p}{\gamma}\right)^2 \ll \frac{\Omega c}{a}, \quad (3)$$

где  $a$  — радиус пучка,  $\omega_p = (4\pi n e^2 / m \gamma)^{1/2}$  — плазменная частота,  $n$  — плотность электронов,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $u$  — скорость пучка,  $\Omega = eB_0/m\gamma c$ ,  $B_0$  — внешнее магнитное поле.

Условие (1) позволяет пренебречь поперечным «провисанием» потенциала, при выполнении условия (2) можно не учитывать влияние собственного поля пучка на поперечное движение частиц, а поперечные скорости частиц будут нерелятивистскими, если выполнено условие (3).

### 1. ПОЛЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПУЧКЕ

Как известно [5], пучок, движущийся вдоль магнитного поля со скоростью  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_z$ , можно описать тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2(\Delta\omega^2 - \Omega^2)}, \\ g &= \frac{\omega_p^2}{\gamma^2(\Delta\omega^2 - \Omega^2)} \frac{\Omega}{\Delta\omega}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \left(\frac{\omega_p}{\gamma\Delta\omega}\right)^2, \\ \Delta\omega &= \omega - hu, \end{aligned} \quad (5)$$

а зависимость полей от времени и координаты  $z$  вдоль пучка  $\sim e^{i(hz - \omega t)}$ . Здесь и ниже скорость света  $c$  принята за единицу.

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}$$

в сочетании с материальными уравнениями для движущейся среды [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + [\mathbf{u} \times \mathbf{H}] &= \hat{\varepsilon}(\mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]), \\ \mathbf{H} - [\mathbf{u} \times \mathbf{D}] &= \mathbf{B} - [\mathbf{u} \times \mathbf{E}] \end{aligned} \quad (6)$$

позволяют получить следующую систему для продольных компонент полей  $E_z$  и  $B_z$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} \Delta_{\perp} E_z + \gamma^2 (\varepsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2) \varepsilon_{\parallel} E_z + i\gamma^2 g \Delta\omega \Delta h B_z &= 0, \\ \Delta_{\perp} B_z + \gamma^2 \left( \varepsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2 - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}} \Delta\omega^2 \right) B_z - i\gamma^2 \frac{g \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \Delta\omega \Delta h E_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Delta h = h - u \omega$ ,  $\Delta_{\perp}$  — оператор Лапласа в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Уравнения (7) для пучка, движущегося в произвольной гиротропной среде, были исследованы в работе [7] в применении к плазменным модам. Заметим, что при  $g \neq 0$  в волне отличны от нуля обе компоненты  $E_z$  и  $B_z$ , т. е. волны гибридные.

Остальные компоненты полей выражаются через  $E_z$  и  $B_z$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
 KE_{\perp} = & i [u \Delta \omega^3 (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) - \varepsilon_{\perp} u \Delta \omega \Delta h^2 + \Delta h (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2)] \times \\
 & \times \nabla_{\perp} E_z + \frac{g}{\gamma^2} \omega \Delta \omega \Delta h [e_z \times \nabla_{\perp} E_z] + \frac{g}{\gamma^2} \omega \Delta \omega^3 \nabla_{\perp} B_z - \\
 & - \frac{i \omega}{\gamma^2} (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2) [e_z \times \nabla_{\perp} B_z];
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 KB_{\perp} = & i [\Delta \omega^3 (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) - \varepsilon_{\perp} \Delta \omega \Delta h^2 + u \Delta h (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2)] \times \\
 & \times [e_z \times \nabla_{\perp} E_z] - \frac{g}{\gamma^2} h \Delta \omega \Delta h \nabla_{\perp} E_z + \frac{g}{\gamma^2} h \Delta \omega^3 [e_z \times \nabla_{\perp} B_z] + \\
 & + (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2) \frac{ih}{\gamma^2} \nabla_{\perp} B_z;
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 KD_{\perp} = & -i [\Delta \omega^3 (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) - \varepsilon_{\perp} \Delta \omega \Delta h^2 + u \Delta h (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \\
 & - \Delta h^2)] [e_z \times \nabla_{\perp} B_z] + \frac{g}{\gamma^2} h \Delta h (\Delta \omega \nabla_{\perp} B_z + \Delta h [e_z \times \nabla_{\perp} E_z]) + \\
 & + \frac{ih}{\gamma^2} [(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \Delta \omega^2 - \varepsilon_{\perp} \Delta h^2] \nabla_{\perp} E_z;
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 KH_{\perp} = & i [u \Delta \omega^3 (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) - \varepsilon_{\perp} u \Delta \omega \Delta h^2 + \Delta h (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2)] \times \\
 & \times \nabla_{\perp} B_z + \frac{g}{\gamma^2} \omega \Delta h (\Delta \omega [e_z \times \nabla_{\perp} B_z] - \Delta h \nabla_{\perp} E_z) + \\
 & + \frac{i \omega}{\gamma^2} [(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \Delta \omega^2 - \varepsilon_{\perp} \Delta h^2] [e_z \times \nabla_{\perp} E_z];
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$D_z = \varepsilon_{\parallel} E_z, \quad H_z = B_z, \quad (12)$$

где  $K = (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta h^2)^2 - g^2 \Delta \omega^4$ ,  $\nabla_{\perp}$  — векторный оператор градиента в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ .

Возмущение плотности заряда в пучке  $\rho = -\text{div}(D - E)/4\pi$  с учетом формул (8), (10), (12) может быть представлено в виде

$$\rho = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\perp}} \{ i [\gamma^2 (\varepsilon_{\perp} - 1) \varepsilon_{\parallel} \Delta h + (\varepsilon_{\parallel} - 1) \varepsilon_{\perp} h] E_z + \gamma^2 g \Delta \omega B_z \}. \quad (13)$$

Аналогично, исходя из соотношения

$$4\pi \mathbf{j} = \text{rot}(B - H) - i \omega (D - E),$$

нетрудно найти выражения для возмущения плотности тока:

$$J_{\perp} = \frac{\Delta\omega^2}{4\pi K} \{ |(\epsilon_{\perp} - 1)(\epsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2) - g^2 \Delta\omega^2| \mathbf{f} + \\ + ig(\Delta\omega^2 - \Delta h^2) [\mathbf{e}_z \times \mathbf{f}] \},$$

$$j_z = - \frac{\gamma^2 u}{4\pi \epsilon_{\perp}} [i(\epsilon_{\perp} - 1) \epsilon_{\parallel} \Delta h E_z - g \Delta\omega B_z] + i \frac{\omega}{4\pi} (\epsilon_{\parallel} - 1) E_z, \quad (14)$$

$$\mathbf{f} = \Delta h \nabla_{\perp} E_z - \Delta\omega [\mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} B_z].$$

Таким образом, все описывающие волну величины выражаются через компоненты  $E_z$  и  $B_z$ , и задача сводится к решению уравнений (7) с соответствующими граничными условиями.

Если собственные значения оператора  $\Delta_{\perp}$  в системе (7) обозначить  $-\kappa^2$ , то для их определения получим характеристическое уравнение

$$\epsilon_{\parallel} \left[ (\epsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2) \left( \epsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2 - \frac{\kappa^2}{\gamma^2} \right) - g^2 \Delta\omega^4 \right] - \\ - \frac{\kappa^2}{\gamma^2} \left[ \epsilon_{\perp} \left( \epsilon_{\perp} \Delta\omega^2 - \Delta h^2 - \frac{\kappa^2}{\gamma^2} \right) - g^2 \Delta\omega^2 \right] = 0. \quad (15)$$

Учитывая, что величины  $\omega' = \gamma\Delta\omega$  и  $h' = \gamma\Delta h$  являются частотой и продольной компонентой волнового вектора в системе отсчета, связанной с пучком, нетрудно видеть, что уравнение (15) совпадает с пересчитанным в движущуюся систему соответствующим уравнением для холодной покоящейся магнитоактивной электронной плазмы. Как отмечалось в [1], при заданном  $\kappa$  и  $\omega_p^2 \rightarrow 0$  среди решений этого уравнения можно выделить ветви электромагнитных волн с частотой  $\omega \approx \sqrt{h^2 + \kappa^2}$ , плазменных  $\omega \approx hu \pm (\omega_p/\gamma) f(\kappa, h)$  и циклотронных  $\omega \approx hu \pm \Omega$ .

В дальнейшем нас будут интересовать лишь медленные циклотронные волны с  $\Delta\omega = -\Omega$ , которые могут быть использованы для ускорения ионов. В соответствии с условием (2) для этих волн

$$\Delta\omega^2 \gg \frac{\omega_p^2}{\gamma^2}, \quad (16)$$

потому  $\epsilon_{\parallel} = 1$ . Мы ограничимся рассмотрением сильно замедленных волн, когда  $(\omega/h)^2 \ll 1$ . В этом случае при  $\gamma^2 \gg 1$  величины  $|\Delta\omega|$  и  $|\Delta h|$  весьма близки друг к другу, а решение уравнения (15) относительно  $\kappa^2$  может быть представлено в виде\*

$$\kappa_1^2 \approx -h^2 - \frac{\omega_p^2 \Delta\omega}{\Delta\omega + \Omega}; \quad (17)$$

$$\kappa_2^2 \approx -h^2 - \frac{\omega_p^2 \Delta\omega}{\Delta\omega - \Omega}. \quad (18)$$

Отметим, что, положив  $\epsilon_{\parallel} = 1$ , мы полностью исключили из рассмотрения плазменные моды.

\* Более корректно  $\kappa_{1,2}^2 \approx -h^2 - \frac{\Delta\omega(\Delta\omega \mp \Omega)\omega_p^2}{\Delta\omega^2 - (\Omega^*)^2}$ , где  $(\Omega^*)^2 = \Omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma^2}$ . Однако исследование показывает, что такое отличие не меняет существенно результатов.

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Цилиндрическая геометрия задачи естественно позволяет искать поле в пучке в виде

$$\begin{aligned} E_z &= [e_1 J_n(x_1 r) + e_2 J_n(x_2 r)] e^{in\theta}, \\ B_z &= i [b_1 J_n(x_1 r) + b_2 J_n(x_2 r)] e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (19)$$

где связь между  $e_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  определяется равенствами

$$\frac{b_{1,2}}{e_{1,2}} = \frac{g \varepsilon_{\parallel} \Delta \omega \Delta \hbar}{\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} \Delta \omega^2 - \Delta \hbar^2) - g^2 \Delta \omega^2 - \varepsilon_{\perp} \frac{x_{1,2}^2}{\gamma^2}}, \quad (20)$$

причем  $-\pi/2 < \arg x_{1,2} \leq \pi/2$ ,  $x_{1,2}$  — решения уравнения (15).

Вне пучка поля  $E_z$  и  $B_z$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} E_z - \Lambda^2 E_z &= 0, \\ \Delta_{\perp} B_z - \Lambda^2 B_z &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\Lambda^2 = h^2 - \omega^2 \quad \text{и} \quad -\pi/2 < \arg \Lambda < \pi/2.$$

Решение уравнений (21), удовлетворяющее граничным условиям на идеальном проводнике при  $r=b$  и условиям непрерывности на границе пучка при  $r=a$ , имеет вид

$$E_z = g \frac{K_n(\Lambda b) I_n(\Lambda r) - I_n(\Lambda b) K_n(\Lambda r)}{K_n(\Lambda b) I_n(\Lambda a) - I_n(\Lambda b) K_n(\Lambda a)} e^{in\theta}; \quad (22)$$

$$B_z = i B \frac{K'_n(\Lambda b) I_n(\Lambda r) - I'_n(\Lambda b) K_n(\Lambda r)}{K'_n(\Lambda b) I_n(\Lambda a) - I'_n(\Lambda b) K_n(\Lambda a)} e^{in\theta}, \quad (23)$$

где

$$g = e_1 J_n(x_1 a) + e_2 J_n(x_2 a),$$

$$B = b_1 J_n(x_1 a) + b_2 J_n(x_2 a).$$

На границе пучка следует потребовать непрерывности компонент  $E_{\theta}$  и  $D_r^*$ . Эти условия совместно с соотношениями (20) приводят к однородной системе уравнений относительно  $e_1$  и  $e_2$ . Приравняв определитель этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение для волн в волноводе с замагниченным пучком. При выполнении условия (16) оно представляется в виде

$$\begin{aligned} &\left[ F_n(x_1 a) + \frac{n}{(\Delta a)^2} \right] \left[ F_{-n}(x_2 a) - \frac{n}{(\Delta a)^2} \right] + \frac{1}{2} \left( Z_H + \frac{1}{Z_E} \right) \times \\ &\times [F_n(x_1 a) + F_{-n}(x_2 a)] + \frac{Z_H}{Z_E} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$F_n(x) = \frac{1}{x} \frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)}; \quad (25)$$

\* Непрерывность  $B_r$  и  $H_{\theta}$ , как нетрудно видеть, является следствием непрерывности соответственно  $E_{\theta}$  и  $D_r$ .



$$Z_E = \frac{iE_z}{B_0} \Big|_{r=a} = -\Delta a \frac{I_n(\Delta a) K_n(\Delta b) - I_n(\Delta b) K_n(\Delta a)}{I'_n(\Delta a) K_n(\Delta b) - I_n(\Delta b) K'_n(\Delta a)}; \quad (26a)$$

$$Z_H = \frac{-iE_\theta}{B_z} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\Delta a} \frac{I'_n(\Delta a) K'_n(\Delta b) - I'_n(\Delta b) K'_n(\Delta a)}{I_n(\Delta a) K'_n(\Delta b) - I'_n(\Delta b) K_n(\Delta a)}. \quad (26б)$$

Величины  $Z_E$  и  $Z_H$  являются импедансами волн на границе пучка. При  $|b - a| \ll a$  дисперсионное уравнение (24) упрощается:

$$F_n(x_1 a) + F_{-n}(x_2 a) = 0. \quad (27)$$

Для ускорения ионов наибольший интерес представляет азимутально-симметричные моды ( $n=0$ ), к исследованию которых мы переходим.

### 3. МЕДЛЕННЫЕ ЦИКЛОТРОННЫЕ АЗИМУТАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ

Дисперсионное уравнение при  $n = 0$  можно переписать в виде

$$-\frac{1}{x_1 a} \frac{J_1(x_1 a)}{J_0(x_1 a)} = \frac{2Z_H + \frac{1 + Z_E Z_H}{|x_2| a} \frac{I_1(|x_2| a)}{I_0(|x_2| a)}}{1 + Z_E Z_H + \frac{2Z_E}{|x_2| a} \frac{I_1(|x_2| a)}{I_0(|x_2| a)}}, \quad (28)$$

причем для медленных мод, когда  $\Delta^2 > 0$ ,

$$Z_E = \Delta a \frac{\frac{K_0(\Delta a)}{K_0(\Delta b)} - \frac{I_0(\Delta a)}{I_0(\Delta b)}}{\frac{K_1(\Delta a)}{K_0(\Delta b)} + \frac{I_1(\Delta a)}{I_0(\Delta b)}} > 0; \quad (29a)$$

$$Z_H = \frac{1}{\Delta a} \frac{\frac{K_1(\Delta a)}{K_1(\Delta b)} - \frac{I_1(\Delta a)}{I_1(\Delta b)}}{\frac{K_0(\Delta a)}{K_1(\Delta b)} + \frac{I_0(\Delta a)}{I_1(\Delta b)}} > 0. \quad (29б)$$

Нетрудно видеть из формулы (18), что при  $\Delta\omega < 0$  величина  $x_2^2 < 0$ . Это позволило заменить  $i x_2$  в аргументах бесселевых функций в правой части уравнения (28) на  $|x_2|$ .

Поскольку правая часть уравнения (28) отрицательна, то его решение может лежать лишь в области действительных  $x_1$  и, как нетрудно видеть,

$$v_{0k} < x_{1k} a < v_{1k}, \quad (30)$$

где  $v_{nk}$  —  $k$ -й корень уравнения  $J_n(x) = 0$ . Если  $\omega < \Omega$  и  $\omega < x_{1k}^2/\Omega$ , то из уравнения (17) следует, что

$$h_{ku} \approx \omega + \Omega \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{x_{1k}^2 + \Omega^2 + \omega_p^2} \right]. \quad (31)$$

Различным значениям  $k$  отвечает различная радиальная структура волн. При этом внутри области  $\omega + \Omega > hu > \Omega [1 - (\omega_p a)^2 / (v_{01}^2 + \Omega^2 a^2)] + \omega$  расположено бесчисленное множество собственных волн,

образующих квазинепрерывный спектр (ср. с рис. 1 в работе [4]). Длины волн соседних мод различаются на величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq \frac{(\omega_p a)^2}{\pi^2 k^3} \ll 1, \quad (32)$$

малую при выполнении условия (1).

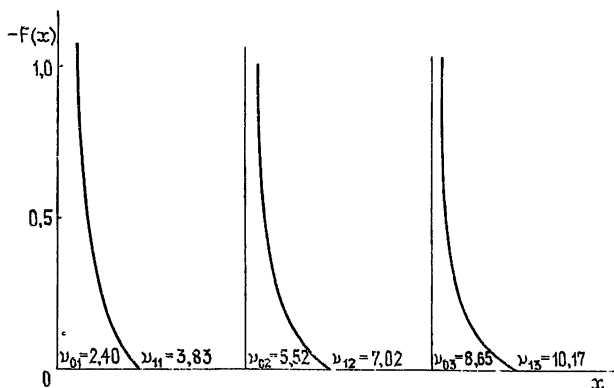


Рис 1. Зависимость левой части дисперсионного уравнения (28) от своего аргумента  $x = x_1 a/c$

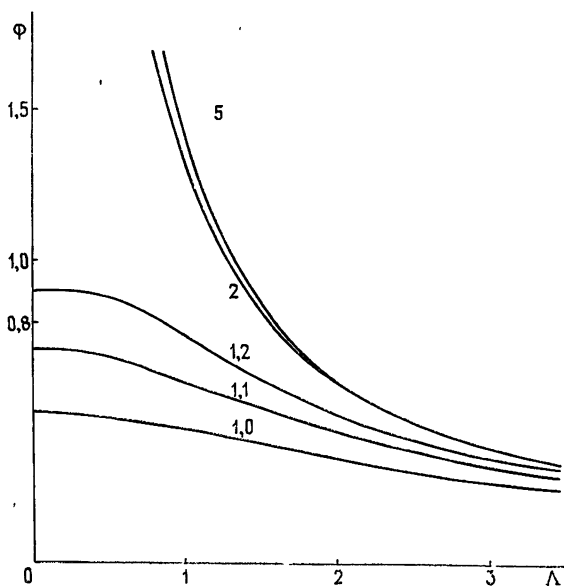


Рис 2. Графики функции  $\Phi(\Lambda)$  для различных  $b/a$ .

Фазовая скорость циклотронной моды

$$v_{k\phi} = u \frac{\omega}{\omega + \Omega} \left[ 1 + \frac{\Omega}{\omega + \Omega} \frac{\omega_p^2}{x_{1k}^2 + \Omega^2} \right], \quad (33)$$

а относительная разница между соседними модами такая же, как и для длин волн (32). Для азимутально-симметричных мод связь между коэффициентами  $e_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  определяется выражениями

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{b_2}{b_1} = \frac{J_0(\kappa_1 a)}{I_0(|\kappa_2| a)} \frac{Z_E Z_H - 1}{1 + Z_E Z_H + \frac{2Z_E}{|\kappa_2| a} \frac{I_1(|\kappa_2| a)}{I_0(|\kappa_2| a)}}. \quad (34)$$

Точное решение уравнения (28) и нахождение из него значений  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  может быть реализовано только численными методами. При этом условие (2) позволяет произвести некоторые упрощения. Как нетрудно видеть из формул (17) и (18), для медленной циклотронной моды с  $\Delta\omega \approx -\Omega$  величина  $\kappa_1$  весьма чувствительна к малым изменениям  $\omega$  и  $h$ , в то время как  $\kappa_2$  меняется незначительно. Поэтому при вычислении  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  можно положить  $hu = \omega + \Omega$  в правых частях выражений (18) и (28), в результате чего  $|\kappa_2|^2 = \Lambda^2 + (\omega_p^2/2)$ ,  $\Lambda^2 = \Omega(\Omega + 2\omega)$ .

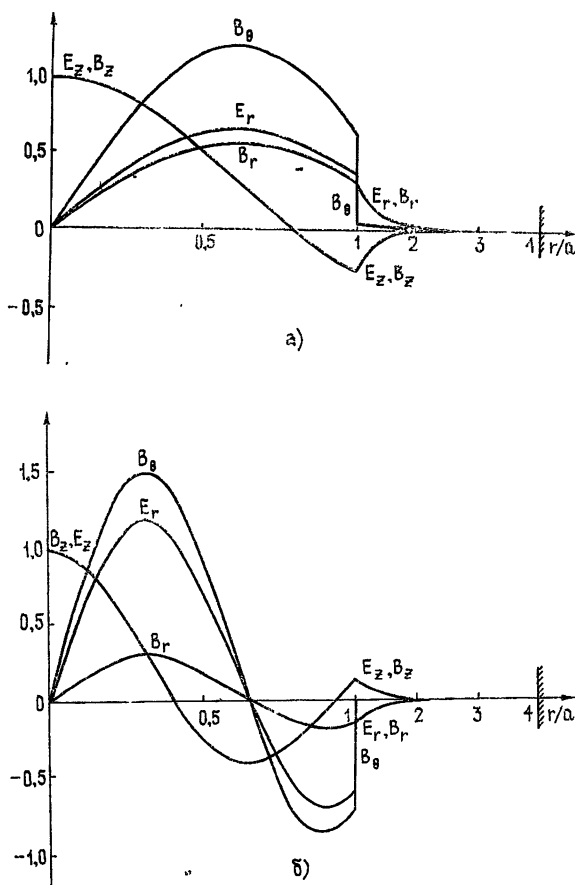


Рис. 3а. Компоненты полей в 1-й азимутально-симметричной моде при  $b/a = 4$ ,  $(\omega_p a/c)^2 = 0,61$ ,  $\omega a/c = 0,1$ ,  $\Omega a/c = 2,35$ ,  $E_\theta = 0,034 B_r$ .

Рис. 3б. Компоненты полей во 2-й азимутально-симметричной моде. Параметры те же, что и на рис. 3а,  $E_\theta = 0,033 B_r$ .

На рис. 1 показана функция  $F(x) = J_1(x)/[xJ_0(x)]$ , где  $x = \kappa_1 a$ , а на рис. 2 приведены зависимости  $\Phi(\Lambda)$ , представляющие собой правую часть уравнения (28) для различных значений отношения  $b/a$ . Отметим, что  $\Phi(\Lambda)$  слабо зависит от  $\omega_p^2$  по крайней мере для  $\Lambda^2 > \omega_p^2$ . Следовательно, как собственные значения, так и структура поля практически не меняются при изменении тока пучка. На рис. 3 и 4 изобра-

жены радиальные зависимости компонент электромагнитного поля в волне для 1-й и 2-й циклотронных мод. Как видно из этих графиков, энергия поля сосредоточена в основном внутри пучка. Скачки компонент  $E_r$  и  $B_\theta$  обусловлены поверхностными токами и зарядами, появление которых связано с моделью неизменного радиуса пучка. В предельных случаях больших и малых значений величины  $\Lambda$  ( $b - a$ ) результаты могут быть представлены в аналитической форме.

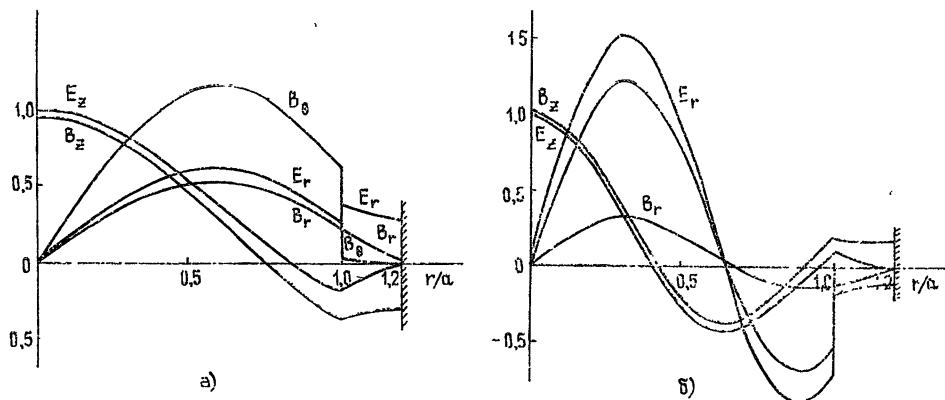


Рис. 4а. Компоненты полей в 1-й азимутально-симметричной моде для  $b/a=1,2$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 3а.

Рис. 4б. Компоненты полей во 2-й азимутально-симметричной моде для  $b/a=1,2$ ,  $E_\theta = 0,033 B_r$ .

Если  $\Lambda(b - a) \gg 1$ , то из формул (29) найдем

$$Z_E \approx \frac{1}{Z_H} \approx \Lambda a \frac{K_0(\Lambda a)}{K_1(\Lambda a)}, \quad (35)$$

а правая часть дисперсионного уравнения (28) приводится к виду

$$\Phi(\Lambda) \approx -Z_H \approx -\frac{K_1(\Lambda a)}{\Lambda a K_0(\Lambda a)}, \quad (36)$$

в результате чего

$$x_{1k} a \approx \begin{cases} \nu_{1k} \left( 1 - \frac{1}{\Lambda a} + \frac{1}{2\Lambda^2 a^2} \right) & \text{при } \Lambda a \gg 1 \\ \nu_{0k} \left[ 1 - \left( \frac{\Lambda a}{\nu_{0k}} \right)^2 \ln \Lambda a \right] & \text{при } \Lambda a \ll 1 \end{cases} \quad (37)$$

Согласно формуле (34) получим

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{2} \frac{J_0(x_1 a) J_0(\Lambda a)}{I_0(|x_2| a) K_0(\Lambda a)} e^{-2\Lambda b}. \quad (38)$$

Поле внутри пучка с точностью до экспоненциально малых величин определяется следующими зависимостями компонент от радиуса:

$$\mathbf{E} = \left[ -i \left( \frac{x_1}{\Omega} + \frac{\omega}{x_1} \right) \mathbf{e}_r + \frac{\omega}{x_1} \mathbf{e}_\theta \right] J_1(x_1 r) + e_z J_0(x_1 r), \quad (39)$$

$$\mathbf{B} = \left[ -\frac{\omega + \Omega}{\kappa_1} \mathbf{e}_r - i \left( \frac{\kappa_1}{\Omega} + \frac{\omega + \Omega}{\kappa_1} \right) \mathbf{e}_\theta \right] J_1(\kappa_1 r) + i \mathbf{e}_z J_0(\kappa_1 r),$$

где  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$  — орты цилиндрической системы координат. Для мод с большим числом радиальных вариаций  $\kappa_1 \gg \Omega + \omega$  наибольшими компонентами становятся  $E_r$  и  $B_\theta$ .

Найденные результаты оказываются независимыми от радиуса волновода  $b$ . Это связано с экспоненциальным убыванием по радиусу полей медленных волн вне пучка: поскольку в рассмотренном предельном случае  $\Lambda(b-a) \gg 1$  стенки волновода достаточно удалены от пучка, то влияние отраженных полей экспоненциально мало, и наличием стенок можно пренебречь.

В другом предельном случае, когда  $\Lambda(b-a) \ll 1$ , т. е. когда стенки волновода близки к границе пучка, правая часть уравнения (28) принимает вид

$$\Phi(\Lambda) \approx -\frac{1}{|\kappa_2| a} \frac{I_1(|\kappa_2| a) + |\kappa_2| (b-a) I_0(|\kappa_2| a)}{\Lambda^2 a (b-a) I_1(|\kappa_2| a) + I_0(|\kappa_2| a)}. \quad (40)$$

Аналитические выражения для  $\kappa_1$  оказываются здесь громоздкими, и потому проще, найдя величину  $\Phi(\Lambda)$ , воспользоваться графиком на рис. 1. Продольные компоненты полей определяются выражениями

$$E_z \approx J_0(\kappa_1 r) - \frac{J_0(\kappa_1 a)}{I_0(|\kappa_2| a)} I_0(|\kappa_2| r), \quad (41)$$

$$B_z \approx i \left[ J_0(\kappa_1 r) + \frac{J_0(\kappa_1 a)}{I_0(|\kappa_2| a)} I_0(|\kappa_2| r) \right].$$

При  $|\kappa_2| a \gg 1$  вторые слагаемые в (41) экспоненциально уменьшаются внутрь пучка  $\sim \exp[-|\kappa_2|(a-r)]$ , и в приосевой области компоненты полей хорошо описываются формулами (38). При  $|\kappa_2| a \ll 1$  вторые слагаемые практически не зависят от радиуса, и поперечные компоненты полей в пучке с хорошей точностью определяются теми же формулами (38).

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Один из важных результатов проведенного рассмотрения содержится в формуле (32), характеризующей различие в длинах волн (фазовых скоростях) двух соседних  $k$ -й и  $(k+1)$ -й мод. Оценим расстояние, на котором набегают существенная разность фаз для 1-й и 2-й мод. Для этого используем случай  $(\omega_p a)^2 = 0,6$ , графически показанный на рис. 2 и 3. Будем рассматривать случай малых фазовых скоростей, что соответствует, согласно формуле (33), неравенству  $\Omega \gg \omega$ . Для величины продольного поля  $B_0 = 20 \text{ кГс}$ , например, найдем для первой моды  $h_1 a = 2,94$  и для второй моды  $h_2 a = 3,0$  или соответственно длины волн  $\lambda_1 = 2,14 a$  и  $\lambda_2 = 2,09 a$ . Если обе эти волны в каком-то месте находятся в фазе, то по прошествии расстояния  $L = 70 a$  они окажутся в противофазе. В случае, когда амплитуды поля  $E_z$  этих волн сравнимы по величине, такое фазовое перемешивание будет существенно сказываться на динамике ионов, ускоряемых в рассматриваемой системе. Вопрос о величинах амплитуд различных мод относится к задаче возбуждения, которая здесь не рассматривалась. Однако произведенная оценка говорит о том, что если система возбуждения ускоряющей волны является широкополосной, т. е. возбуждается сразу большой набор медленных циклотронных мод, то на расстоянии в несколько десятков радиусов пучка структура ускоряющего поля будет существенно

меняться, и поддержание синхронизма между волной и ускоряющими ионами станет практически невыполнимой задачей. Поэтому представляется необходимым иметь узкополосную систему возбуждения, чтобы возбуждалась лишь одна мода. Для приведенного примера полоса пропускания системы возбуждения по фазовой скорости должна составить  $\Delta v_{\phi}/v_{\phi} \leq 0,02$ . Способ возбуждения волн с помощью резистивного лайнера, предложенный в [2], не обладает такой избирательностью и примерно с одинаковым инкрементом будет, по-видимому, возбуждаться достаточно большое число различных циклотронных мод. Этот вопрос требует, конечно, более детального анализа и выходит за рамки данной работы. Заметим, только, что эффективное использование резистивного лайнера возможно при достаточно близком его расположении к пучку:  $\Delta = b - a < (1/|k_z|) \sim (1/\Omega)$ . Для пучка радиусом в 1 см при магнитном поле  $B_0 = 20$  кГс и энергии частиц 2 МэВ получим  $\Delta < 0,3$  см. Что касается использования резонанса между циклотронными модами электронного пучка и продольными ионными модами, то представляется необходимым более детально исследовать структуру такого резонанса, чем это сделано в работе [3].

В заключение отметим, что использованная здесь модель равномерной по сечению плотности пучка является идеализацией, позволяющей упростить аналитическое рассмотрение. Наличие радиального изменения плотности в невозмущенном пучке приведет, конечно, к несколько другой структуре полей циклотронных волн. Однако нет оснований полагать, что такое изменение даст какие-либо качественные отличия по сравнению с результатами, полученными в данной работе.

Авторы благодарят Э. Л. Бурштейна, М. Л. Левина и В. Н. Курдюмова за полезные дискуссии и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. L. Sloan, W. E. Drummond, Phys. Rev. Lett., **31**, 1234 (1973).
2. M. L. Sloan, W. E. Drummond, Proc. of IX Int. Conf. on High-En. Acc., Stanford, 1974, p. 283.
3. В. П. Индыкул и др., Физика плазмы, **2**, вып. 5, 775 (1976).
4. R. J. Faehl et al., IEEE Trans on Nucl. Sci., **NS-24**, № 3, 1637 (1977)
5. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН, **103**, 609 (1971).
6. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
7. В. И. Курнелко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, Препринт ХФТИ АН УССР № 73—38, Харьков, 1973

Поступила в редакцию  
31 июля 1978 г.

#### SLOW CYCLOTRON WAVES IN A WAVEGUIDE WITH A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

*I. L. Korenev, L. A. Yudin, Kh. Kh. Mustafin*

Dispersive characteristics and the field structure are considered of slow cyclotron waves propagating in a relativistic electron beam moving along the axis of a waveguide with ideal conductivity. Problems are discussed associated with these wave utilization for the ion acceleration

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 551.510.535

### О НАГРЕВЕ ИОНОСФЕРЫ МОЩНЫМ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ НЕСУЩЕЙ ЧАСТОТЫ

В. Л. Фролов

В настоящей работе приводятся экспериментальные результаты по воздействию на  $F$ -слой ионосферы мощным радиоизлучением со случайной модуляцией несущей частоты с целью определения зависимости уровня возбуждаемой искусственной турбулентности (ИТ) от степени когерентности волны накачки.

Исследования в этом направлении (с частотной модуляцией и псевдослучайной модуляцией фазы несущей волны накачки) ранее проводились в США [1]. Полоса излучаемого сигнала в этих экспериментах изменялась в широком диапазоне: от 100 Гц до 100 кГц. Проведенные измерения показали, что уровень возбуждения ИТ зависит только от полной мощности излучения и не зависит от формы модуляции частоты. Однако отсутствие в работе [1] подробного описания проводимых экспериментов не позволяет судить о спектральных характеристиках излучаемой волны накачки. Следует заметить, что при случайной модуляции фазы волны спектр сигнала содержит монохроматическую линию излучения, присутствие которой может существенным образом повлиять на результаты измерений. Кроме того, в указанной работе не исследовался вопрос о зависимости порога возбуждения ИТ от ширины спектра мощного сигнала.

В связи с этим нам представилось целесообразным повторить эти эксперименты, расширив область исследуемых параметров и используя такую форму модуляции волны накачки, при которой в спектре излучения должна полностью отсутствовать монохроматическая часть сигнала. В настоящей работе была использована схема модуляции несущей частоты задающего генератора шумовым сигналом. Для этой цели на каркас контурной катушки генератора, выполненного по схеме емкостной трехточки, наматывалось несколько витков катушки подмагничивания, на которую через согласующее устройство подавался сигнал с шумового генератора (Г2-47), имеющий равномерный спектр («белый» шум) в диапазоне 20—20000 Гц. Режим подмагничивания выбирался таким образом, что имела место линейная связь девиации частоты с амплитудой тока подмагничивания. При этом ток шумового сигнала катушки подмагничивания, меняя параметры индуктивности колебательного контура, варьировал случайным образом частоту колебаний.

Анализ спектра излучения с флуктуирующей частотой приведен в [2], где показано, что при малых и быстрых флуктуациях несущей, которые реализуются в нашей схеме, спектр результирующего колебания имеет резонансную форму вблизи частоты  $f_0$  с полосой  $\Delta f = \frac{\pi}{2} S_y(0)$ , где  $S_y(0)$  — спектральная плотность флуктуаций частоты при нулевой отстройке, определяется статистическими характеристиками модулирующего сигнала.

Перед измерениями спектр колебаний задающего генератора был откалиброван на спектре-анализаторе С4-54, и для проведения экспериментов были выбраны три значения полосы:

$$2\Delta f_{1,2,3} = 100, 300; 1000 \text{ Гц}.$$

Диагностика ИТ осуществлялась путем вертикального зондирования возмущенной области ионосферы пробными волнами [3] и с помощью метода ракурсного рассеяния [4]. В первом случае исследовался эффект аномального ослабления пробных волн, который определяется интегральными (по поперечным масштабам неоднородностей с  $l_{\perp} < 100 \text{ м}$ ) характеристиками ИТ. При использовании второго метода имелись воз-

\* В настоящей работе верхнее значение полосы было выбрано порядка частоты соударений электронов  $\nu_e$ . В дальнейшем предполагается проведение измерений с более широкой полосой сигнала.

возможность изучать возбуждение искусственных неоднородностей определенных масштабов с  $l_{\perp} \approx 3$  и  $12$  м. Во всех экспериментах нагрев ионосферной плазмы производился обыкновенной волной на частоте  $5,75$  МГц (эквивалентная мощность излучения передатчика  $P_0 = PC \approx 25$  МВт) в условиях, когда  $f_{\text{оФ}_2} \approx 7-8$  МГц.

Измерения показали, что порог возбуждения мелкомаштабных искусственных неоднородностей ионосферной плазмы при шумовом частотном спектре несущей с полосой излучения до  $1$  кГц не отличается существенным образом от величины порога в случае воздействия на ионосферную плазму монохроматическим излучением, а уровень возбуждаемой ИТ, как и отмечалось в [1], не зависит в исследуемом диапазоне от полосы сигнала.

Проведенные измерения показали, что время когерентного взаимодействия мощной волны накачки с ионосферной плазмой, по крайней мере, меньше  $10^{-3}$  с, т. е. меньше времени затухания плазменных волн:  $\tau_{\text{зат}} \approx v_e^{-1} \approx (3 \div 5) \cdot 10^{-3}$  с. Поэтому естественно предположить, что время взаимодействия мощного излучения с плазменными волнами определяется не затуханием последних из-за соударений, а выносом их энергии из области взаимодействия, как это, например, принималось в теории тепловой параметрической неустойчивости [4, 5]. В этом случае размер области когерентного взаимодействия вдоль магнитного поля  $H_0$  можно оценить как

$$l_{\text{вз}} \approx \frac{V_{\parallel \text{гр}}^{\text{пл}}}{\Delta f_{\text{ког}}} < 100 \text{ м,}$$

где  $V_{\parallel \text{гр}}^{\text{пл}}$  — продольная (относительно  $H_0$ ) групповая скорость плазменных волн, имеющая значение  $\sim 10^6$  м/с ( $\Delta f_{\text{ког}}^{-1} < 10^{-3}$  с — время когерентного взаимодействия). Таким образом, можно считать, что протяженность области когерентного взаимодействия по высоте не превосходит пространственного периода поля стоячей волны мощного радиоизлучения вблизи точки его отражения в ионосфере и, по всей видимости, определяется масштабом синхронизма взаимодействующих волн в неоднородной среде.

В заключение автор приносит благодарность Л. М. Ерухимову, Н. А. Митякову, В. О. Рапопорту и С. М. Грачу за обсуждение полученных результатов, а также Н. А. Зуйкову и Ю. С. Голубу за обеспечение работы мощного передатчика.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Фалер, *Radio Science*, **9**, № 11, 923 (1974).
2. А. Н. Малахов, *Флуктуации в автоколебательных системах*, изд. Наука, М., 1968.
3. В. В. Белкович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., *Изв. вузов — Радиофизика*, **18**, № 4, 516 (1975).
4. С. М. Грач, А. Н. Караштин, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, *Препринты НИРФИ* № 114, 115, Горький, 1978.
5. С. М. Грач, А. Н. Караштин, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, *Физика плазмы*, **4**, № 6, 1321 (1978).

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 марта 1979 г.

УДК 530.1:519.2

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФЛИККЕРНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННЫХ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Г. П. Пашев

Флуктуации частоты сигнала кварцевых и квантовомеханических генераторов содержат ярко выраженные фликкерные компоненты со спектральной плотностью мощности вида  $\omega^{-\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 2$ ,  $0 < \omega < \infty$ . Наиболее удобной характеристикой таких флуктуаций во временной области является структурная функция (СФ) [1]. С помощью СФ можно провести спектрально-корреляционный анализ флуктуаций частоты в автоколебательных системах и линейных четырехполосниках при фликкерных воздействиях [2]. Однако метод СФ предполагает знание мгновенных значений флуктуаций частоты



$\nu(t)$ , тогда как все частотноизмерительные устройства дают усредненную величину. Кроме того, СФ нельзя ввести путем преобразования Фурье спектра мощности при  $0 < \gamma \leq 1$  — диапазона параметров, типичного для частотных флуктуаций сигнала квантовых и кварцевых стандартов частоты. Наконец, не ясна применимость СФ для исследования влияния нестабильности частоты в современных устройствах и системах, действие которых основано на точных измерениях частоты и времени. Эти недостатки метода СФ можно устранить, применяя модифицированную структурную функцию (МСФ)

$$d(\tau, T) = \frac{1}{2} \langle [x(t+T) - x(t)]^2 \rangle, \quad (1)$$

где  $x(t)$  является средним за время  $\tau$  значением частоты

$$x(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \nu(s) ds. \quad (2)$$

Использование в (1) среднего значения частоты вместо мгновенного упрощает измерение МСФ, поскольку современные устройства для измерения частоты (электронно-счетные частотомеры, фазовые компараторы) действуют в соответствии с функционалом (2). Квадратный корень из МСФ с точностью до постоянного коэффициента совпадает со среднеквадратической вариацией частоты, которая принята в качестве метрологической характеристики нестабильности частоты. Из работы [3], где исследовались свойства среднеквадратической вариации частоты, следует, что МСФ можно ввести как преобразование Фурье от спектра мощности для всех фликкерных флуктуаций, включая и случай  $0 < \gamma \leq 1$ .

Исследование и оптимизация современных частотно-временных устройств и систем предполагает решение задач линейной экстраполяции и интерполяции последовательности  $x(i)$  дискретных отсчетов процесса (2). Эти задачи удобно решать с помощью МСФ. Пусть необходимо найти некоторый линейный функционал  $B$  от значений последовательности  $x(i)$ , определенных на множестве  $J$  номеров  $i$

$$B = \sum_{i \in J} b_i x(i),$$

с помощью оценки

$$A = \sum_{i \in I} a_i x(i),$$

где  $b_i$  и  $a_i$  — постоянные коэффициенты вычисленной по значениям той же последовательности, определенным на множестве номеров  $I$ , не пересекающемся с  $J$ .

При условии неискаженного определения постоянного отклонения частоты

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in J} b_i = 1$$

дисперсия погрешности  $B - A$  выражается через МСФ в виде формулы

$$\begin{aligned} \langle (B - A)^2 \rangle = & \sum_{l \in I} \sum_{k \in I} a_l a_k d[\tau, (l-k)] + \sum_{l \in J} \sum_{k \in J} b_l b_k d[\tau, (l-k)] - \\ & - 2 \sum_{l \in I} \sum_{k \in J} a_l b_k d[\tau, (l-k)], \end{aligned} \quad (3)$$

где разность  $l - k$  соответствует величине  $T$  в (1), равной разности моментов времени  $l$ -го и  $k$ -го отсчетов. Дисперсия (3) минимизируется известными методами путем выбора оптимальных коэффициентов  $a_i$ . Это позволяет провести синтез алгоритмов работы и структуры частотно-временных систем по минимуму погрешности, вносимой фликкерными флуктуациями частоты [4].

Таким образом, МСФ (1) дает наиболее полное описание фликкерных флуктуаций частоты, сочетающее в себе все достоинства метода структурных функций с простотой измерения и возможностью решения задач спектрально-корреляционного анализа современных частотно-временных устройств и систем.

Автор благодарит А. Н. Малахова за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом, Математический сб (новая серия), 37, вып. 1, 141 (1955)
2. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.

3. О В Музычук, Л Г Шепелевич, Изв вузов — Радиофизика, 17, № 6, 855 (1974)  
 4 Г П. Пашев, Л Б. Садовский, Метрология, № 11, 13 (1976)

Поступила в редакцию  
 18 мая 1978 г.,  
 после переработки  
 10 июля 1979 г

УДК 538.56.519.25

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ АКУСТООПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

А В Пуговкин

Успешное применение акустооптических устройств при анализе спектров детерминированных радиосигналов позволяет также проводить измерения таких характеристик случайных процессов, как спектральные плотности мощности и взаимные спектральные плотности мощности

Рассмотрим одноканальный акустооптический анализатор спектра (АОАС) с апертурой  $D$  [1], на вход которого подается реализация случайного процесса  $n(t)$ . На выходе безынерционного квадратичного фотоприемника, помещенного в области пространственных частот  $\omega_x$  (в фокальной плоскости линзы), будем иметь сигнал, пропорциональный пространственному спектру мощности, являющийся оценкой энергетического спектра:

$$\mathcal{E}(\omega_x, t) = aD^2 \int_{-\infty}^{\infty} |N(\omega)|^2 \frac{\sin\left(\omega_x + \frac{\omega}{v}\right) \frac{D}{2}}{\left(\omega_x + \frac{\omega}{v}\right) \frac{D}{2}} d\omega, \quad (1)$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности,  $v$  — скорость акустической волны,  $N(\omega)$  — фурье-компонента процесса  $n(t)$ . Получим соотношения для математического ожидания и дисперсии оценки

$$\lim_{D \rightarrow \infty} M[\mathcal{E}(\omega_x, t)] = aD^2 |N(\omega)|^2 = aD^2 S(\omega); \quad (2)$$

$$D[\mathcal{E}(\omega_x, t)] = \mathcal{E}^2(\omega_x, t) \left[ 1 + \frac{\sin^2 \omega_x D}{(\omega_x D)^2} \right]. \quad (3)$$

При  $D \rightarrow \infty$  дисперсия оценки стремится к  $\mathcal{E}^2(\omega_x, t)$ , т. е. оценка является несостоятельной

Таким образом, мгновенный спектральный анализ случайных процессов с помощью одноканального АОАС аналогичен классическому способу спектрального анализа, осуществляемого преобразованием Фурье «усеченной реализации» или «периодограммы» [2]. Для увеличения достоверности анализа и получения состоятельной оценки в АОАС необходимо применить дополнительное усреднение полученной оценки

В [3] для этого предлагается использовать инерционный фотоприемник и импульсный лазер, что эквивалентно усреднению по ряду независимых периодограмм. Следует заметить, что это далеко не единственный и самый простой в аппаратном аспекте способ усреднения, так как он требует применения импульсного светового источника.

Нетрудно показать, что даже при использовании в схеме АОАС непрерывного лазера и инерционного фотоприемника необходимый эффект усреднения будет достигнут и оценка  $\mathcal{E}(\omega_x)$  станет состоятельной. Действительно, каждый разрешимый элемент фотоприемника эквивалентен электрическому фильтру, настроенному на определенный спектральный участок. Частотная характеристика фильтра  $U(\omega)$  определяется свойствами входного окна АОАС и размерами элемента разрешения фотоприемника  $\Delta\omega_x$ . Интегрируя фотоэлектрический сигнал на выходе каждого элемента фотоприемника, получим оценку

$$\mathcal{E}(\omega_x) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(\omega_x, t) dt = \frac{aD^2}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |N(\omega)|^2 U^2(\omega) d\omega dt, \quad (4)$$

Эта оценка получается усреднением во времени квадрата фильтрованной реализации при любых отношениях между  $\Delta\omega_x$  и  $1/D$  и является состоятельной [2].

Состоятельную оценку спектральной плотности мощности можно получить, и не прибегая к усреднению во времени. Для этого нужно применить усреднение по некоторому интервалу пространственных частот, что осуществляется путем применения безынерционного позиционно-чувствительного фотоприемника, на каждый элемент разрешения которого попадает несколько некоррелированных составляющих пространственного спектра. При этом необходимо выполнение условия  $\Delta\omega_x \gg 1/D$ .

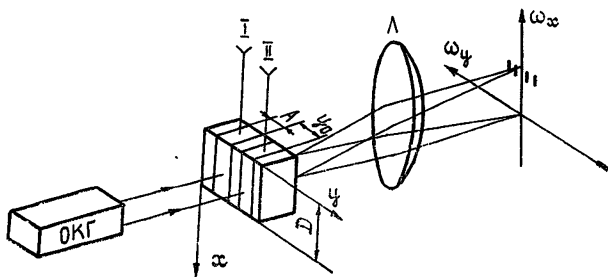


Рис. 1. Двухканальный акустооптический анализатор спектра: ОКГ — оптический квантовый генератор, Л — линза.

Для получения взаимной спектральной плотности мощности можно применить в АОАС двухканальную акустооптическую ячейку (рис. 1), на входы I и II которой подаются исследуемые случайные процессы  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$ . Тогда на выходе двумерного позиционно-чувствительного фотоприемника будем иметь сигнал

$$\mathcal{E}(\omega_x, \omega_y, t) = aD^2 \frac{\sin^2 \omega_y A/2}{(\omega_y A/2)^2} | e^{i\omega_y y_0/2} N_1(\omega_x, t) + e^{-i\omega_y y_0/2} N_2(\omega_x, t) |^2. \quad (4')$$

Находя математическое ожидание полученной оценки при  $D \rightarrow \infty$ , получим

$$M[\mathcal{E}(\omega_x, \omega_y, t)]|_{D \rightarrow \infty} = aD^2 \frac{\sin^2 \omega_y A/2}{(\omega_y A/2)^2} \{ S_1(\omega) + S_2(\omega) + 2[C_{12}(\omega) \cos \omega_y y_0 + S_{12}(\omega) \sin \omega_y y_0] \},$$

где  $C_{12}(\omega)$  и  $S_{12}(\omega)$  — квадратурные компоненты взаимной спектральной плотности мощности. Помещая один или несколько точечных фотоприемников вдоль пространственной координаты  $\omega_y$  и проводя обработку информации об интенсивности дифрагированного света, можно выделить величины  $C_{12}(\omega)$  и  $S_{12}(\omega)$ . Относительно дисперсии оценки  $\mathcal{E}(\omega_x, \omega_y, t)$  можно сделать те же выводы, что и для оценки  $\mathcal{E}(\omega_x, t)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Кондратенков, Обработка информации когерентными оптическими системами, изд. Сов. радио, М., 1972.
2. Ю. И. Гриванов, В. П. Мальков, Спектральный анализ случайных процессов, изд. Энергия, М., 1974.
3. Ю. В. Егоров, И. А. Круглов, К. П. Шаумов, Изв. ЛЭТИ, вып. 178, 25 (1975).

Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию  
26 марта 1979 г.