

СОДЕРЖАНИЕ

Мосалов И. В., Бахарев Н. В., Дугин Н. А., Цейтлин Н. М. Вантовый радиотелескоп НИРФИ	1293
Дубинина Е. А., Файнштейн С. М. О возможности эффективного преобразования частоты излучения в плазме в поле релятивистски сильной электромагнитной волны	1301
Долин Л. С., Савельев В. А. К теории распространения узкого пучка света в стратифицированной рассеивающей среде	1310
Воронцов М. А., Чесноков С. С. Оптимизация фокусировки световых пучков в движущихся нелинейных средах	1318
Малахов А. Н., Саичев А. И. Представление отраженной от случайно-неоднородного слоя волны в виде ряда, удовлетворяющего условию причинности	1324
Абрамович Б. С., Саичев А. И. Статистическое описание волн в нелинейной среде с одномерными случайными неоднородностями	1334
Борисов В. В. Мультипольное разложение поля источников электрического типа в проводящей среде	1343
Осташёв В. Е. Изменение фазовой геометрии светового пучка при его дифракции на ультразвуке	1356
Маненков А. Б. Распространение и излучение волн в прямоугольных волноводах со слоистыми стенками	1365
Юрков Н. К. К проблеме синтеза оптимальной поляризационной диаграммы зеркальных антенн	1377
Ильинский А. С., Трубников С. В. Исследование резонансных явлений в фазированной антенной решетке с диэлектрическими вставками	1383
Корнилов С. А., Лосев В. Л., Мещеряков А. В. Фликкерный шум СВЧ детекторов на диодах с барьером Шоттки	1392

Краткие сообщения и письма в редакцию

Егорычев В. П., Красиков А. В. Радиометр сантиметрового диапазона с повышенной долговременной стабильностью	1401
Айнбиндер Н. Е., Ажеганов А. С., Ким А. С. Усиление и модуляция квадратурного спинового эха при двухчастотном воздействии	1403
Саичев А. И. Учет некоторых поправок к параболическому приближению квазиоптики при статистическом описании волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах	1405
Цогребняк В. А. Поле точечного источника в одномерной случайно-неоднородной среде с зеркально отражающей стенкой	1408

Хроника

✓ Советско-японский симпозиум по электронике	1411
--	------

Аннотации депонированных статей

Мачехин Ю. П. К теории рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями	1333
Петленко В. А., Хижняк Н. А. Рассеяние H_{10} -волны идеально проводящим наклонным стержнем в прямоугольном волноводе	1382

УДК 621 396 628 · 523 164

ВАНТОВЫЙ РАДИОТЕЛЕСКОП НИРФИ

И. В. Мосалов, Н. В. Бахарев, Н. А. Дугин, Н. М. Цейтлин

Рассматриваются принципы построения, особенности и возможности нового типа зеркальных антенн — легких конструкций с предварительно-напряженной вантово-стержневой пространственной структурой, предложенных в НИРФИ. Приводятся результаты исследований параметров и эксплуатационных характеристик 12-метрового радиотелескопа РТВС-12 — первой принципиально новой антенны

Известно, что зеркальные параболические антенны являются одним из основных инструментов в радиоастрономии, космической связи, некоторых других областях техники и широко используются как самостоятельные инструменты, так и в качестве элементов сложных антенных комплексов. Их конструкции непрерывно совершенствуются в направлении увеличения размеров поверхности и повышения точности зеркал. При этом, как показывает практика, стремление к достижению максимально возможной точности поверхности при заданном диаметре с ростом размеров зеркал приводит к сложным, тяжелым и дорогим конструкциям радиотелескопов.

Чтобы увеличить пределы возможных размеров наземных антенн и снизить их вес, создают специальные конструкции зеркал*. С этой целью в НИРФИ была исследована возможность применения методов «бестяжелостной» архитектуры** для создания отражающей поверхности рефлекторов, в результате чего был предложен новый тип легких зеркальных антенн с предварительно-напряженной вантово-стержневой структурой зеркала с использованием гибких сетей и оболочек [1, 2]. Подобные системы теоретически достаточно полно исследованы в специальной литературе [3, 4].

Было разработано несколько конструктивных схем (более подробно см. [5]), характерной особенностью которых является малый вес и, как следствие этого, необычное соотношение основных расчетных нагрузок: аэродинамические силы 80—90% и силы тяжести 20—10%, в то время как весовые нагрузки обычно преобладают над ветровыми. В процессе работы выяснилось, что особенности и трудности расчета статически неопределимых вантовых систем, недостаточная практическая их проверка и существенное усложнение задачи из-за вращения антенны вокруг осей приводили к многочисленным расчетным допущениям, которые целесообразно было оценить экспериментальной проверкой. Поэтому решено было построить зеркало-макет и экспериментально исследовать особенности его конструкции. С этой целью была создана

* Наиболее совершенными в настоящее время можно считать гомологические системы, не устраняющие, а учитывающие весовые деформации зеркала

** Имеются в виду методы, обеспечивающие необходимую жесткость конструкции без значительного увеличения веса, а именно — применение тонкостенных труб и пустотелых конструкций, блокирование деформаций регулировкой предварительного напряжения, рациональное расположение опор и узлов и т. д.

12-метровая антенна РТВС-12. Исследования этой антенны одновременно использовались также и для общего анализа предварительно-напряженных конструкций, поскольку в дальнейшем на основе полученных данных предполагается разработать общую методику оптимального проектирования вантовых пространственно-стержневых конструкций.

В данной работе описываются конструкция радиотелескопа РТВС-12, принцип формообразования его отражающей поверхности и основные технические данные, приводятся результаты радиоастрономических исследований параметров зеркала и краткие сведения о его эксплуатационных характеристиках.

1. КОНСТРУКЦИЯ РАДИОТЕЛЕСКОПА РТВС-12

Радиотелескоп РТВС-12 (рис. 1) является полноповоротным азимутально-угломестным инструментом для радиоастрономических наблюдений в дециметровом диапазоне волн.

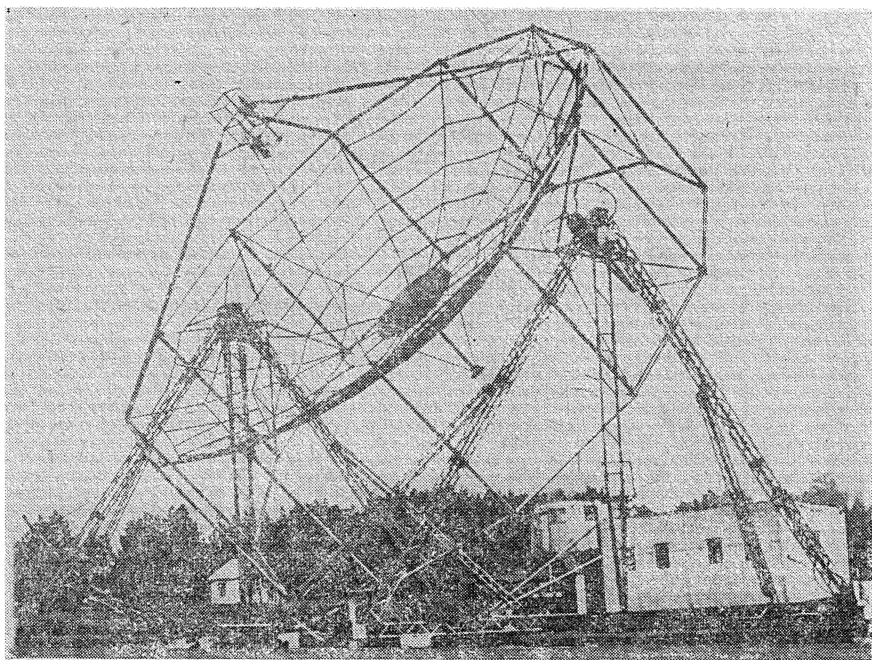


Рис. 1.

Основными элементами конструкции радиотелескопа (рис. 2) являются рефлектор 1, система облучения 2, опорно-поворотное устройство 3, привод по азимуту 4, привод по углу места 5, кабина 6 для размещения аппаратуры и пульта управления.

Особенностью конструктивного решения антенны является необычность формообразования поверхности и наличие предварительного напряжения в элементах всей конструкции.

Рефлектор антенны состоит из каркаса и отражающей поверхности, выполненной из стальной сетки с ячейкой $10 \times 10 \times 1$ мм (подробное описание проекта дано в [1]). Каркас сделан из двух двенадцатигранных ободов, соединенных жесткими стойками, которые крепятся в местах шарнирных соединений стержней ободов, здесь же закреплены гибкие радиальные связи, идущие к центральной части (оси). Радиальные

тросы соединены шестью концентрическими кольцеобразными стержнями. На этой «паутине» с помощью гибких оттяжек растянута отражающая сетка, которая образует многогранную поверхность, аппроксимирующую параболоид вращения, причем вершины многогранника (узлы сети) находятся на одной, а середины граней на другой стороне поверхности двойной кривизны, отстоящей от теоретического параболоида на величину принятого допуска.

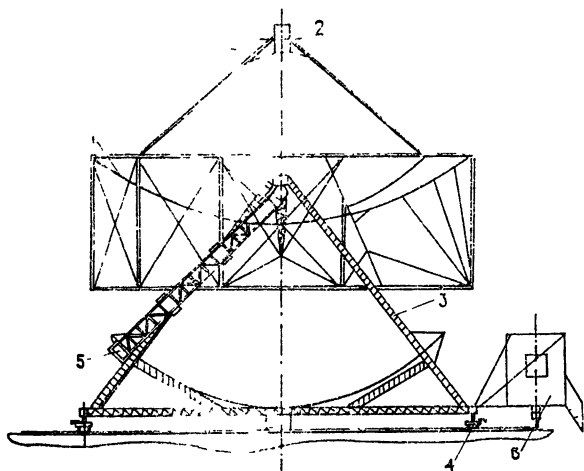


Рис. 2.

Анализ отклонений точек многогранника от параболоида показал, что закон их распределения близок к равномерному. Это позволило оценить необходимое число точек крепления сетки и, следовательно, количество оттяжек. Общее их число равно 120, что по расчетам должно было обеспечить среднеквадратичную погрешность поверхности не хуже 9 мм с учетом возможных конструктивных, технологических и эксплуатационных отклонений. Среднеквадратичная ошибка поверхности, рассчитанная только для дискретных точек крепления оттяжек, составила 5,6 мм и практически совпала с ошибкой, определенной механическими методами отклонений точек после отладки зеркала. Максимальное отклонение сетки от заданного параболоида было взято равным 10 мм, что определило максимальный диаметр элементарной ячейки в 1,24 м.

Все боковые грани каркаса имеют крестовые растяжки. В двух противоположных гранях расположены узлы (полуоси) для крепления зеркала на поворотном устройстве.

Опорный контур и растянутая на нем «паутина» вантовой сети вместе с отражающей сеткой создают единую предварительно-напряженную систему, где основные силовые элементы работают на сжатие или растяжение. Величина предварительного напряжения каркаса подобрана таким образом, что при максимальной ветровой нагрузке это напряжение не падает до нуля ни в одном из гибких элементов, что гарантирует сохранение формы отражающей поверхности. Вся конструкция рассчитана для работы при максимально допустимой скорости ветра 25 м/с.

К переднему ободу каркаса крепятся 4 тяги, несущие контейнер для аппаратуры и систему облучения. Кронштейн для сменных облучателей может смещаться в вертикальной и горизонтальной плоскостях на ± 25 мм от фокальной оси (вручную) и вдоль оси зеркала на 430 мм (дистанционно).

Каркас зеркала подвешен на двух трехстержневых пирамидах, об-

разующих с поперечными фермами квадратное основание. В углах квадрата установлены домкраты системы горизонтирования и приводные тележки С помощью растяжек, соединяющих углы квадрата, основание с приводными тележками центрируется на круговом рельсовом пути диаметром 18,3 м. Узкоколейные рельсы уложены на полушпалах прямо на песчано-гравийный грунт и выставлены по радиусу и в горизонтальной плоскости с точностью ± 1 см.

Подшипник азимутальной оси с сельсин-датчиками азимутальной системы слежения установлен в центре антенной площадки и жестко соединен с фермами основания. Точность индикации положения антенны и по азимуту и по углу места равна 5 угл. мин. Пульс управления и аппаратура размещаются в кабине площадью 12 м². Кабина расположена на отдельной опорной тележке за зеркалом и связана шарнирно с основанием опорно-поворотного устройства. Общий вес телескопа (без кабины) 5 тонн.

Следует заметить, что, поскольку РТВС-12 строился как крупномасштабный макет каркаса зеркала, системы привода и индикации, а также конструкция опорно-поворотного устройства были сделаны по упрощенным схемам и при необходимости могут быть существенно улучшены.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНТЕННЫ РТВС-12

Параметры антенны РТВС-12 измерялись радиоастрономическими методами на шести частотах от 1 до 3 ГГц. Первоначально определялось распределение энергии вдоль фокальной оси, с помощью которого устанавливалось фокальное расстояние и оценивалось качество согласования системы зеркало—облучатель. Далее по радиоизлучению Солнца антенна юстировалась и измерялись диаграммы направленности в *E*- и *H*-плоскостях. По излучению дискретного источника Кассиопея-А и «черного» диска, расположенного в ближней зоне антенны, измерялись эффективная площадь (или КИП) и рассеяние вне главного лепестка. Коэффициент полезного действия определялся по собственным шумам антенны*. При измерениях использовались три однотипных облучателя (круглый волновод, возбуждаемый симметричным вибратором), рассчитанных на оптимальные длины волн 10; 20; 30 см; облучатель на 20 см в процессе измерений перестраивался на 13; 15; 21 см.

Фокусное расстояние определялось механическими замерами расстояния между вершиной зеркала и раскрывом облучателя при максимальном сигнале на выходе приемника. Неопределенность положения фазовых центров, связанная с тем, что облучатели имеют небольшое коническое расширение и края специальной формы, не превышала ошибки измерений положения максимума на волнах 20 и 30 см. В результате измерений на трех основных волнах фокусное расстояние зеркала оказалось равным (4760 ± 25) мм.

Измеренная форма «фокальных пятен» для облучателей, настроенных на оптимальную длину волны, практически не отличалась от расчетной при измерениях по удаленному источнику. Перестройка облучателя по частоте и изменение амплитудно-фазового распределения поля в плоскости фокусировки при перемещении источника в ближнюю зону антенны приводили к возникновению модуляции фокального пятна. Поэтому после указанных операций каждый раз проводился контроль фокусировки и формы фокального пятна для определения поправки к величине измеряемых параметров.

Диаграммы направленности в *E*- и *H*-плоскостях (главный максимум и несколько ближайших боковых лепестков) измерялись по радио-

* О методике измерений см., например, [6]

излучению Солнца. На волнах 20 и 30 см конечные угловые размеры Солнца не приводят к уширению измеренной диаграммы. На волне 10 см из-за сравнимости угловых размеров Солнца (30') с полушириной диаграммы направленности (36') уширение последней составило примерно 4' [6]; поэтому проводились дополнительные измерения по искусственному источнику, удаленному от антенны на 400 м (P400). Данные о полуширине диаграмм и уровне первого бокового лепестка приведены в табл. 1, откуда видно, что главный максимум диаграммы симметричен в E - и H -плоскостях на всех волнах, кроме 13 см, где величина отстройки 20-сантиметрового облучателя превышает 50% от оптимальной частоты. На волне 30 см уровень первых боковых лепестков порядка —24—28 дБ, на волнах короче 20 см начинает сказываться неточность изготовления поверхности зеркала, диаграммы имеют хорошо видимый «пьедестал».

Таблица 1

λ , см	10		13	15	20	21	30
	Солнце	P400					
$\Delta\vartheta_{0,5-E}$ угл. мин	40,5	35	69	56	71	74	111
$\Delta\vartheta_{0,5-H}$ угл. мин	40	36	61	54	69	73	109
$\eta_{бок-E}$ дБ	19	19	20	22,5	22,5	23	24,5
$\eta_{бок-H}$ дБ	14	14,5	15,5	17,5	20	20,5	24
КИП	0,22		0,166 (0,35)	0,33 (0,37)	0,475	0,49	0,55
$1 - \beta_{гд}$	0,315				0,63		0,75
g	0,7				0,75		0,74

Основной задачей при исследовании антенны на нескольких частотах было определение минимальной длины волны, на которой может работать вантовое зеркало, т. е. определение точности изготовления поверхности и соответствия полученной величины расчетному значению и значению, вычисленному по данным механических измерений. Коэффициент использования поверхности (отношение эффективной площади зеркала к геометрической) измерялся по излучению дискретного источника Кассиопея-А и по «черному» диску, расположенному в ближней зоне. Величины потока Кассиопея-А, приведенные к эпохе 1976.8 (с коэффициентами векового хода 1,45; 1,44; 1,4; 1,3; 1,3; 0,4% соответственно на волнах 10; 13; 15; 20; 21 и 30 см), принимались на указанных волнах равными 10,8; 15,2; 17,1; 21,1; 21,8; 29,4 единиц [7]. Средние значения КИП приводятся в табл. 1: для $\lambda = 13$ и 15 см в скобках даны значения КИП для зеркала с диаметром $D_{эфф}$ (см. ниже).

Вычисление среднеквадратичного отклонения поверхности зеркала от параболы проводилось следующим образом. Коэффициент использования поверхности можно записать как [8]

$$\text{КИП} = g \eta_1 \eta_2 \eta_3, \quad (1)$$

где g — апертурный коэффициент использования, учитывающий неравномерность распределения поля в раскрыве, а η_1 , η_2 и η_3 — коэффициенты, учитывающие соответственно рассеяние облучателя вне телесного угла зеркала, рассеяние тягами и системой крепления облучателя и уменьшение КНД из-за погрешности изготовления поверхности. При расчетах принималось, что g , η_1 , η_2 не зависят от длины волны при

идентичных характеристиках облучателей. Коэффициент η_3 , вообще говоря, зависит от λ , точности изготовления поверхности σ и интервала корреляции ошибок C [9]. В вантовой конструкции зеркала за интервал корреляции можно принять среднее расстояние между точками крепления вант к сетке и радиальным тросам. Величины этих расстояний составляют $1 \div 1,3$ м, т. е. с хорошей точностью выполняется условие $C \gg \lambda$. В этом случае η_3 не зависит от C и определяется известным соотношением

$$\eta_3 = \exp \left[- \left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

При принятых предположениях для определения σ достаточно измерить КИП на двух длинах волн. Из (1) и (2) получим

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \ln \frac{\text{КИП}(\lambda_1)}{\text{КИП}(\lambda_2)}}. \quad (3)$$

Относительная погрешность определения σ по формуле (3) пропорциональна $[\ln \text{КИП}(\lambda_1)/\text{КИП}(\lambda_2)]^{-1}$ и при $\text{КИП}(\lambda_1) \approx \text{КИП}(\lambda_2)$ может существенно возрастать; поэтому необходимо подбирать рабочие частоты так, чтобы отношение КИП было больше 1,3—1,5, или увеличить их число.

Из данных табл. 1 и соотношения (3) на волнах 10; 20 и 30 см величины σ равны соответственно 8,0; 8,1; 8,3 мм, т. е. $\bar{\sigma} = 8,15$ мм с погрешностью около 6%. Существенное отличие от $\sigma_m = 5,7$ мм, измеренного механически, объясняется малым числом опорных точек при механических замерах.

На рис. 3 нанесены расчетная кривая (2) и экспериментальные точки с указанием интервала ошибок. Величина $\text{КИП}_0 = \text{КИП}(\eta_3 = 1)$ определялась по результатам измерений на $\lambda = 30$ см как наиболее

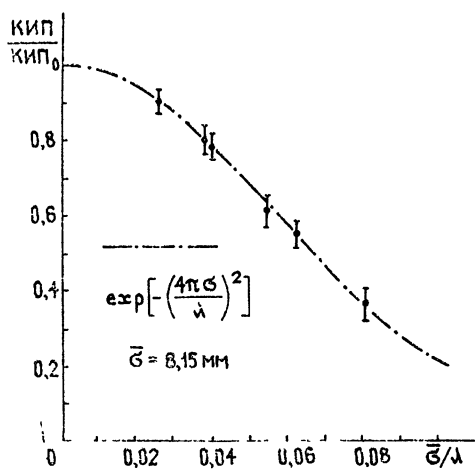


Рис. 3.

точным и получилась равной 0,62. Потери КИП из-за неточности поверхности составили 65,22 и 9% на 10; 20 и 30 см, т. е. был реализован наиболее крутой участок спадания кривой η_3 . Результаты на волнах 13; 15 и 21 см, как говорилось выше, были получены при перестройке одного из сменных облучателей. Очевидно, что при отстройке в сторону более высоких частот диаграмма направленности облучателя сужалась, зеркало недооблучалось, и, следовательно, величину апертурного коэффициента g без дополнительных исследований определить не представлялось возможным. Расчет $\text{КИП}_{\text{эфф}}$ в этом случае проводился

следующим образом. По измеренной полуширине диаграммы направленности с помощью обычного соотношения $\Delta\theta_{0,5} \approx 70\lambda/D$, которое дало хорошее согласие расчетных $\Delta\theta_{0,5}$ с экспериментальными на 10; 20 и 30 см, определялся некий эффективный диаметр зеркала $D_{\text{эфф}}$, причем предполагалось, что апертурный коэффициент g для зеркала с $D_{\text{эфф}}$ равен апертурному коэффициенту всего зеркала на основных

частотах. $KIP_{эфф}$ вычислялся для геометрической площади зеркала, равной $\pi/4 D_{эфф}^2$. На $\lambda = 15$ см $D_{эфф}$ оказался равным 11,4 м, потеря площади зеркала около 9%, на $\lambda = 13$ см $D_{эфф} = 8,43$ м, потеря площади более 50%. Полученные значения $KIP_{эфф}(\lambda)/KIP_0$ достаточно хорошо соответствуют кривой рис. 3, что указывает на правомерность использования подобного метода преобразования измеренного KIP к некоему значению $KIP_{эфф}$.

Коэффициент рассеяния вне главного лепестка диаграммы направленности $\beta_{г.л.}$ измерялся по излучению «черного» диска диаметром 1 м, удаленного от антенны на 110 м (антенна фокусировалась на диск). Угол места диска $7^\circ 40'$, угловые размеры $30' 56''$. Результаты измерения $(1 - \beta_{г.л.})$ приведены в табл. 1, погрешность измерений из-за конечности расстояния до диска и модуляции фокальных пятен равнялась 8—10%. Апертурный коэффициент определялся как $g = KIP/(1 - \beta_{г.л.})$ и в пределах ошибок измерений оказался равным для всех основных λ , что подтвердило правомерность принятого предположения. Рассеяние $\beta_{г.л.}$ вне главного лепестка существенно возрастает на волне 10 см, где сказывается неточность изготовления поверхности.

3. ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Радиоастрономические исследования параметров антенны РТВС-12 проводились дважды с перерывом в полгода, что давало возможность оценить стабильность характеристик радиотелескопа под влиянием различных внешних условий. Особое внимание было уделено собственно рефлектору, а также системе азимутального привода, как наименее исследованным конструкциям.

Отражающая поверхность первоначально была сделана из специальной ткани, имеющей мелкую ячею и небольшой вес. Однако в процессе эксплуатации в полевых условиях ткань быстро потеряла форму и была заменена сеткой из нержавеющей стали. При этом были достигнуты расчетные величины среднеквадратичной ошибки поверхности, но близкие к максимальному пределу. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что точность поверхности можно довести до минимальных расчетных значений ($\sigma_{min} = 5,7$ мм) без увеличения числа вант более тщательным формированием сетки в промежутках между опорными точками, а также приданием соответствующей кривизны элементам кольцевой сети.

Установка антенны на рельсовый путь без специального фундамента потребовала предусмотреть возможность выравнивания плоскости основания. Как показал опыт, после «усадки» грунта отклонений плоскости рельса больше допустимых при повороте антенны не наблюдалось. Наибольшие прогибы рельса возникали под опорной тележкой кабины в периоды распутицы, на волнах больше 30 см этим эффектом можно было пренебречь. Вибрация кабины при сопровождении радиодисточников на работе радиоаппаратуры не сказывалась.

В ходе проведенных исследований влияния тепловых и механических деформаций антенны на ее электрические характеристики замечено не было; антенна обеспечивает круглогодичные (в средней полосе страны) радиоастрономические наблюдения.

Вся антенна, кроме кабины, сравнительно легко собирается и разбирается, для ее перевозки необходимо два-три грузовых автомобиля.

Опыт проектирования, строительства и эксплуатации радиотелескопа РТВС-12 доказал принципиальную возможность использования пред-

варительно-напряженных пространственно-стержневых вантовых конструкций для создания полноповоротных зеркальных антенн.

Одним из основных преимуществ созданной антенны перед антеннами таких же размеров является малый вес зеркала — 1,3 тонны. Насколько нам известно, зеркала обычных ферменных конструкций весят в 2—4 раза больше (к сожалению, данных о зеркалах с небольшими диаметрами очень мало, к тому же разные авторы под весом зеркала подразумевают разные величины).

Радиотелескоп РТВС-12 создавался как инструмент дециметрового диапазона волн, т. е. в проектном задании были заложены невысокие значения точности изготовления поверхности зеркала. Однако при эксплуатации антенны стало ясно, что возможно снижение границы рабочих длин волн.

На антенне РТВС-12 были практически проверены методы расчетов подобных конструкций, определена точность силовых расчетов для подвижной вантовой системы, выявлены основные недостатки и упущения. Полученные данные позволили начать проектирование вантового радиотелескопа с диаметром зеркала 36 метров с более совершенными конструктивными схемами зеркала и опорно-поворотного устройства.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н В Бахарев, В. Н. Глазман, И В Мосалов, Параболический рефлектор, Препринт НИРФИ, № 63, Горький, 1974
- 2 Н В Бахарев, В. Н. Глазман, Д М Козицин, И В. Мосалов, Авт. свид № 402970 от 16.11.71, Булл изобрет № 42, 1973, стр 134.
- 3 Л Г Дмитриев, А В Касилов, Вантовые покрытия, изд Будівельник, Киев 1974
- 4 В. В. Трофимович, В А Пермяков, Проектирование предварительно-напряженных вантовых систем, изд Будівельник, Киев, 1970
- 5 И В Мосалов, Н. В. Бахарев, И А Дугин, Н. М. Цейтлин, Вантовый радиотелескоп НИРФИ РТВС-12, Препринт НИРФИ, № 122, Горький, 1978
- 6 Н. М. Цейтлин, Антенная техника и радиоастрономия, изд Сов радио, М, 1976
- 7 Н. М. Цейтлин, Д А Дмитренко, Л. В. Дмитренко, Е А Миллер, В. В. Снегирева, Г К Титов, Изв вузов — Радиофизика, 19, № 8, 1106 (1976).
- 8 Л Д Бахрах, К. И Могильникова, Изв вузов — Радиофизика, 7, № 4, 585 (1964).
- 9 Сканирующие антенные системы СВЧ, изд Сов радио, М, 1966.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 октября 1978 г

WANT-TYPE RADIO TELESCOPE DEVELOPED AT NIRFI

I. V. Mosalov, N. V. Bakharev, N. A. Dugin, N. M. Tseitlin

Principles of building, peculiarities and capabilities are considered of a new type of mirror antennas (light weight constructions with preliminari stressed want-type rod space structure) suggested by NIRFI. Results of investigation of parameters and operation characteristics of a 12 meter radio telescope (RTWS-12) — the first new antenna are given

УДК 533 951

О ВОЗМОЖНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕ В ПОЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Е. А. Дубинина, С. М. Файнштейн

Рассматривается задача о взаимодействии слабых возмущений в изотропной плазме, помещенной в поле сильной циркулярно поляризованной электромагнитной волны. Выведено соответствующее дисперсионное уравнение, и проанализирован знак энергии возмущений на различных ветвях дисперсионных кривых. Выяснены условия синхронизма для трехволновых взаимодействий, определяющих возникновение взрывной неустойчивости. Исследуется стабилизация указанной неустойчивости за счет нелинейного сдвига частоты. Приведены оценки для лазерной плазмы, показывающие эффективность преобразования энергии излучения вверх по спектру.

В последние годы в связи с проблемой УТС в литературе обсуждаются задачи о взаимодействии сильного электромагнитного излучения с плазмой (см., например, [1–5]). При этом в основном анализировались соответствующие дисперсионные уравнения для малых волновых возмущений и определялись инкременты возбуждаемых параметрических неустойчивостей. Представляет интерес исследование нелинейных неустойчивостей в плазме с сильной накачкой — взрывной и ВЧ неустойчивостей [6–10], которые могут иметь место в неравновесной системе. Плазма, помещенная в сильное электромагнитное поле, по отношению к малым возмущениям является неравновесной системой, так как частицы плазмы под действием сильной накачки имеют направленное движение, т. е. в определенном смысле имеем пучковую плазму. В данной работе рассматривается задача о трехволновом взаимодействии слабых возмущений в холодной изотропной плазме, помещенной в релятивистски сильное циркулярно поляризованное электромагнитное поле. Выведено и проанализировано соответствующее дисперсионное уравнение для малых колебаний. Определены знаки энергии возмущений, и показана возможность возникновения взрывной неустойчивости в плазме. Стабилизация неустойчивости связана с нелинейной отстройкой от синхронизма (см. также [11, 12]). Приведены оценки для лазерной плазмы, показывающие эффективность преобразования энергии излучения вверх по спектру*. Полученные результаты представляют интерес как для лабораторной, так и космической плазмы, поскольку в астрофизических условиях возможны сильные вспышки электромагнитного излучения, энергия которых может трансформироваться в более высокочастотную область спектра [14].

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ, ЭНЕРГИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ, УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗМА

Исходными уравнениями являются уравнения Максвелла и релятивистские уравнения квазигидродинамики:

* В [13] показана возможность преобразования энергии СВЧ излучения вверх по спектру в системе релятивистский пучок — плазма,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= -4\pi e(n - n_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \right\},$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — соответственно напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{v} — скорость электронов, e , m — заряд и масса покоя электрона, n — концентрация электронов, n_0 — концентрация неподвижных компенсирующих ионов.

Точным решением системы (1) является поперечная электромагнитная волна круговой поляризации:

$$\begin{aligned} E_{x_0} &= E_0 \cos \varphi_0, & E_{y_0} &= E_0 \sin \varphi_0, & H_{x_0} &= -\frac{ck_0}{\omega_0} E_0 \sin \varphi_0, \\ H_{y_0} &= \frac{ck_0}{\omega_0} E_0 \cos \varphi_0, & v_{x_0} &= -\frac{c v_0}{\sqrt{1 + v_0^2}} \sin \varphi_0, \\ v_{y_0} &= \frac{c v_0}{\sqrt{1 + v_0^2}} \cos \varphi_0, & E_{z_0} &= H_{z_0} = v_{z_0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $v_0 = \frac{eE_0}{m\omega_0 c}$, $\varphi_0 = \omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{z}$. Частота ω_0 , волновой вектор \mathbf{k}_0 и амплитуда волны E_0 связаны соотношениями

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 \sqrt{1 + v_0^2}}}, \\ \omega_p^2 &= \frac{4\pi e^2 n_0}{m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим малые колебания плазмы на фоне волны накачки (2). Полагая

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad n = n_0 + n',$$

получим уравнения для штрихованных компонент с учетом нелинейных членов второго и третьего порядков малости:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} (n_0 \mathbf{v}' + n' \mathbf{v}_0) &= \mu \mathbf{f}_1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = 0, & \operatorname{div} \mathbf{E}' + 4\pi e n' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}' = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' + \frac{e}{\chi} \left\{ \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}'] + \frac{1}{c} [\mathbf{v}' \mathbf{H}_0] - \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$-\frac{v_0}{c^2} (v_0 E' + v' E_0) \left\} - \frac{e \chi}{mc^2} (v' v_0) \left(E_0 + \frac{1}{c} [v_0 H_0] \right) = \mu (f_2 + f_3).$$

Здесь $f_{1,2,3}$ — квадратичные и кубические по возмущениям нелинейности*, параметр $\mu \ll 1$ введен для обозначения малости правых частей

$$(4), \quad \chi = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \sqrt{1 + v_0^2}, \quad v_0 = \frac{c v_0}{\chi}.$$

Пусть волновые возмущения распространяются вдоль оси z . Сделаем замену

$$e^\pm = E'_x \pm i E'_y, \quad h^\pm = H'_x \pm i H'_y, \quad w^\pm = v'_x \pm i v'_y.$$

Тогда, считая, что

$$e^\pm, h^\pm, w^\pm \sim \exp[i(\omega \pm \omega_0)t - (k \pm k_0)z],$$

$$E'_z, v'_z, n' \sim \exp[i(\omega t - kz)],$$

при $\mu = 0$ (линейная задача) получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и волновой вектор волновых возмущений:

$$(\Omega^2 - 1) [1 - (\Omega + \delta)^2 + (q + \tau)^2] [1 - (\Omega - \delta)^2 + (q - \tau)^2] + \beta^2 (q^2 - \Omega^2) (q^2 - \Omega^2 + 1) = 0, \quad (5)$$

где $\Omega = \frac{\omega}{\omega_L}$, $q = \frac{ck}{\omega_L}$, $\delta = \frac{\omega_0}{\omega_L}$, $\tau = \frac{ck_0}{\omega_L}$, $\omega_L = \frac{\omega_p}{\sqrt{\chi}}$, $\beta = \frac{v_0}{c}$; величины δ и τ связаны соотношением $\delta^2 - \tau^2 = 1$.

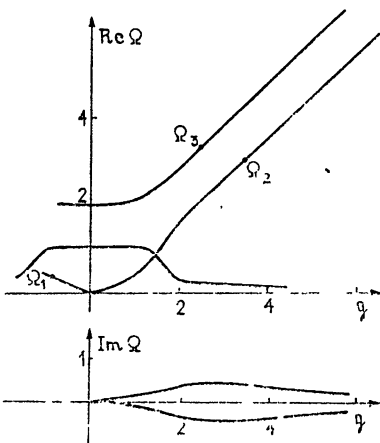


Рис. 1. Зависимость $\Omega(q)$ при $\delta = 1,1$; $\beta = 0,99995$

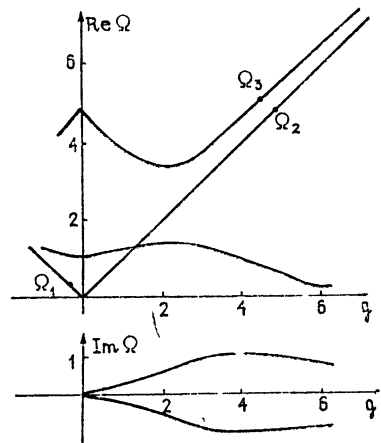


Рис. 2. Зависимость $\Omega(q)$ при $\delta = 2,5$; $\beta = 0,99995$

В работе [4] проведен анализ комплексных корней дисперсионного уравнения (5) в некоторых предельных случаях, нас же интересует полная картина зависимости Ω от q . Поэтому с помощью ЭВМ проводилось решение (5) при $\beta = 0,99995$; 0,8; 0,6; 0,1; $\delta = 1,1$; 2,5; 7, т. е. при слабом, умеренном и сильном релятивизме и различных относительных частотах накачки. Типичные картинки зависимости $\Omega(q)$ приведены на

* Ввиду громоздкости выражения для $f_{1,2,3}$ здесь не приводятся.

рис. 1—3. Заметим, что, как и в потоковых системах, дисперсионные ветви имеют две асимптоты, которые соответствуют медленной и быстрой пучковым волнам. Как будет показано ниже, энергии этих волн противоположны по знаку.

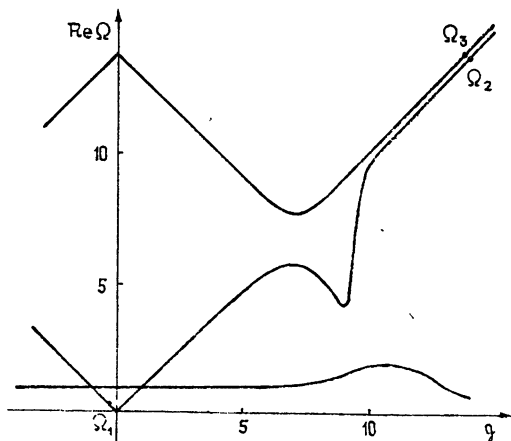


Рис. 3. Зависимость $\Omega(q)$ при $\delta = 7$; $\beta = 0,99995$.

Известно (см. [12]), что характер трехволновых взаимодействий в слабонелинейной системе определяется знаками энергий волновых возмущений. Плотность энергии волны определяется соотношением

$$W = \frac{(E_0 + E')^2}{8\pi} + \frac{(H_0 + H')^2}{18\pi} + \frac{m}{2\sqrt{1 - \frac{(v_0 + v')^2}{c^2}}} (n_0 + n') c^2. \quad (6)$$

Это выражение включает в себя энергию поля накачки, энергию возмущений электрического и магнитного полей, а также кинетическую энергию электронов плазмы в поле волн накачки и пробной волны. Из системы (4) при $\mu = 0$ найдем связи переменных n' , v'_z , e^\pm , h^\pm , ω^\pm и E'_z , затем подставим полученные выражения в (6) и усредним по периоду колебаний. В результате громоздких выкладок получим энергию волнового возмущения (без учета энергии накачки):

$$\tilde{W} = W_{\oplus} + W_{\ominus},$$

где

$$W_{\oplus} = \frac{A_0^2 E_0^2}{64\pi B^2} [A^2 + C^2] + \frac{A_0^2 E_0^2}{64\pi B^2} \left[A^2 \left(\frac{q + \tau}{\Omega + \delta} \right)^2 + C^2 \left(\frac{q - \tau}{\Omega - \delta} \right)^2 \right] + \\ + \frac{A_0^2 E_0^2}{16\pi} + \frac{c^2 m n_0 A_0^2}{16} [J^2 + G^2] + \frac{c^2 m n_0 \Omega^4 \beta^2 A_0^2}{4},$$

$$W_{\ominus} = \frac{A_0^2 E_0^2}{16\pi B} (A + C) + \frac{\tau A_0 E_0^2}{16\pi \beta B} \left[A \left(\frac{q + \tau}{\Omega + \delta} \right) + C \left(\frac{q - \tau}{\Omega - \delta} \right) \right] - \\ - \frac{m n_0 c^2 A_0 \beta}{4} [J - G],$$

$$A = 2\beta (\Omega^3 - \delta) \left[\beta \delta (\beta^2 - 2) + \left(2\Omega - \delta(1 - \beta^2) - \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \Omega \beta \times \right.$$

$$\times \left(\Omega - \delta - \frac{(q - \tau)^2}{\Omega - \delta} \right) \Big] + \left[2\Omega^2 \beta^2 (q + \tau) + 2\beta^2 \Omega q \left(-\Omega + \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \right] \times \\ \times \left[\beta^2 \delta \frac{q - \tau}{\Omega - \delta} + \beta^2 \tau \Omega \left(\Omega - \delta - \frac{(q - \tau)^2}{\Omega - \delta} \right) \right],$$

$$B = \left[\beta^2 \delta \frac{q + \tau}{\Omega + \delta} - \beta^2 \tau \Omega \left(\Omega + \delta - \frac{(q + \tau)^2}{\Omega + \delta} \right) \right] \left[\beta \delta (\beta^2 - 2) + \beta \Omega \times \right. \\ \times \left(2\Omega - \delta (1 - \beta^2) - \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \left(\Omega - \delta - \frac{(q - \tau)^2}{\Omega - \delta} \right) \Big] + \left[-\beta^3 \delta - \beta \Omega \times \right. \\ \times \left(\delta (1 - \beta^2) - \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \left(\Omega + \delta - \frac{(q + \tau)^2}{\Omega + \delta} \right) \Big] \left[\beta^2 \delta \frac{q - \tau}{\Omega - \delta} + \right. \\ \left. + \beta^2 \tau \Omega \left(\Omega - \delta - \frac{(q - \tau)^2}{\Omega - \delta} \right) \right],$$

$$C = \left[\beta^2 \delta \frac{q + \tau}{\Omega + \delta} - \beta^2 \tau \Omega \left(\Omega + \delta - \frac{(q + \tau)^2}{\Omega + \delta} \right) \right] \left[2\Omega^2 \beta^2 (q + \tau) + \right. \\ \left. + 2\beta^2 q \Omega \left(-\Omega + \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \right] - 2\beta (\Omega^3 - \delta) \left[-\beta^3 \delta - \beta \Omega \left(\delta (1 - \beta^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\delta}{1 - \beta^2} \right) \left(\Omega + \delta - \frac{(q + \tau)^2}{\Omega + \delta} \right) \right],$$

$$J = \beta \Omega \left[q \beta - \frac{A}{B} \left(\Omega + \delta - \frac{(q + \tau)^2}{\Omega + \delta} \right) \right],$$

$$G = \beta \Omega \left[-\beta q - \frac{C}{B} \left(\Omega - \delta - \frac{(q - \tau)^2}{\Omega - \delta} \right) \right],$$

$A_0 = E'_z/E_0$ — безразмерная амплитуда пробной волны. Отрицательная часть энергии больше положительной при условии

$$\beta[G - J] > A_0 \left(\frac{J^2 + G^2}{4} + \Omega^4 \beta^2 \right).$$

Физически отрицательный знак энергии обусловлен тем, что сдвиг фаз между возмущениями скорости и концентрации больше $\pi/2$, что обычно бывает в пучковых системах.

В дальнейшем нас интересует возможность возникновения взрывной неустойчивости, характеризующейся резким ростом амплитуд волн. Эта нестабильность имеет место, если энергии волн высшей частоты и двух других частот отличаются по знаку. Такая ситуация, как показывает анализ дисперсионных кривых и энергии возмущений, реализуется, если взять за волну высшей частоты Ω_3 быструю пучковую моду (энергия положительна), за другую волну (Ω_2) — медленную пучковую моду (энергия отрицательна), а за третью волну (Ω_1) — встречную волну отрицательной энергии (см. рис. 1—3). В табл. 1 приведены параметры Ω_j, q_j ($j = 1, 2, 3$) для волн, удовлетворяющих условиям синхронизма:

$$\begin{aligned}\Omega_1 + \Omega_2 &= \Omega_3 \\ q_1 + q_2 &= q_3.\end{aligned}\quad (7)$$

Таблица 1

Параметры волн, удовлетворяющих условиям синхронизма

№	Ω_1	q_1	Ω_2	q_2	Ω_3	q_3	β	δ
1	0,3	-0,95	2,95	3,925	3,275	2,45	0,99995	1,1
2	0,225	-0,25	4,75	4,85	5,0	4,625	0,99995	2,5
3	0,15	-0,15	13,85	13,9	14,0	13,75	0,99995	7,0
4	0,3	-0,95	3,5	4,0	3,8	3,0	0,8	1,1
5	0,3	-0,3	4,7	4,875	5,0	4,625	0,8	2,5
6	0,1	-0,2	14,0	14,15	14,14	14,0	0,8	7,0
7	0,4	-0,975	2,55	3,05	2,95	2,05	0,6	1,1
8	0,1	-0,55	4,95	5,05	5,0	4,6	0,6	2,5
9	0,15	-0,15	13,0	13,1	13,15	13,0	0,6	7,0
10	0,5	-0,8	3,3	3,85	3,85	2,95	0,1	1,1
11	0,3	-0,25	4,86	5,0	5,1	4,7	0,1	2,5
12	0,2	-0,2	13,8	14,0	14,0	13,85	0,1	7,0

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН

При $\mu \ll 1$ решение (4) отыскиваем в виде

$$\frac{E'_z}{E_0} = \sum_{j=1}^3 a_j \exp(i\Omega_j t - iq_j z) + \text{к. с.},$$

где a_j — комплексные амплитуды волн, удовлетворяющих условиям синхронизма (7); остальные переменные $v'_{x,y,z}$; n' ; $E'_{x,y}$; $H'_{x,y,z}$ связаны с E'_z через коэффициенты распределения, которые находятся из линейной системы (4) при $\mu = 0$. Используя стандартную методику [15, 16], получим уравнения для комплексных амплитуд

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{гр\ 1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial z} = -i\sigma_{1,2} a_{2,1}^* a_3 + i\sigma_{1,2} a_{1,2} (|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2), \quad (8)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + v_{гр\ 3} \frac{\partial a_3}{\partial z} = i\sigma_3 a_1 a_2 + i\sigma_3 (|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2) a_3,$$

где v_j ($j=1, 2, 3$) — групповые скорости волновых возмущений, σ_j — коэффициенты нелинейного взаимодействия, a_j — коэффициенты нелинейного фазового сдвига.

Выражения для σ_j и a_j чрезвычайно громоздки, поэтому расчет проведен на ЭВМ, результаты которого представлены в табл. 2, 3 (значения σ_j , a_j соответствуют триплетам, приведенным в табл. 1).

Перейдем к новым переменным $u_j = a_j \sqrt{\sigma_m \sigma_n}$ ($m \neq n \neq j$), тогда в действительной форме система (8) примет вид*

$$\dot{u}_{1,2,3} = u_{2,1,1} u_{3,3,2} \sin \Phi, \quad (9)$$

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{u_1 u_2}{u_3} + \frac{u_1 u_3}{u_2} + \frac{u_2 u_3}{u_1} \right) \cos \Phi + \xi_1 u_1^2 + \xi_2 u_2^2 + \xi_3 u_3^2,$$

где

* Для простоты рассматриваем пространственно-однородный режим, т. е. $\partial/\partial z = 0$.

$$\Phi = \arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1,$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}{\sigma_2 \sigma_3}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}{\sigma_1 \sigma_3}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1}{\sigma_1 \sigma_2},$$

точка означает $\frac{\partial}{\partial t}$.

Таблица 2

Коэффициенты нелинейного взаимодействия

№	σ_1	σ_2	σ_3
1	$2,448 \cdot 10^3$	$1,35 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^5$
2	$5,53 \cdot 10^3$	$1,79 \cdot 10^7$	$1,1 \cdot 10^6$
3	$5,1 \cdot 10^3$	$2,16 \cdot 10^9$	$1,9 \cdot 10^8$
4	$4,34 \cdot 10^1$	$6,46 \cdot 10^2$	$3,2 \cdot 10^1$
5	$1,34 \cdot 10^3$	$1,47 \cdot 10^2$	$1,13 \cdot 10^2$
6	$5,47 \cdot 10^3$	$1,02 \cdot 10^5$	$2,96 \cdot 10^3$
7	$1,6 \cdot 10^1$	$2,21 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^1$
8	$1,85 \cdot 10^2$	$2,03 \cdot 10^3$	$1,23 \cdot 10^2$
9	$2,59 \cdot 10^2$	$4,81 \cdot 10^4$	$4,68 \cdot 10^2$
10	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$2,57 \cdot 10^2$	$1,78 \cdot 10^1$
11	10^1	$4,2 \cdot 10^2$	$3,28 \cdot 10^1$
12	$9,14 \cdot 10^1$	$4,998 \cdot 10^3$	$1,498 \cdot 10^3$

Таблица 3

Коэффициенты нелинейной расстройки от синхронизма

№	α_1	α_2	α_3
1	$-1,5 \cdot 10^7$	$-4,5 \cdot 10^{10}$	$-1,5 \cdot 10^{10}$
2	$-1,6 \cdot 10^7$	-10^{13}	$-1,2 \cdot 10^{11}$
3	$-9,3 \cdot 10^7$	$-1,7 \cdot 10^{19}$	$-1,5 \cdot 10^{14}$
4	$-6,9$	$-2,4 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^2$
5	$1,4 \cdot 10^4$	$9,6 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^4$
6	$-3,4 \cdot 10^2$	$-8,3 \cdot 10^8$	$-2,7 \cdot 10^8$
7	$-1,7$	$2,5 \cdot 10^1$	$-1,2 \cdot 10^{-4}$
8	$-1,8 \cdot 10^1$	$9,98 \cdot 10^3$	$4,4 \cdot 10^4$
9	$-6,18 \cdot 10^1$	$-3,7 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^7$
10	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^1$	$3,4 \cdot 10^2$
11	$8,0 \cdot 10^{-1}$	$-1,1 \cdot 10^3$	$7,3 \cdot 10^2$
12	$-7,0 \cdot 10^{-2}$	$-1,3 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$

При $\xi_{1,2,3} = 0$ решения (9) описывают взрывную неустойчивость, т. е. имеют вид $u = \frac{u_0}{t - t^*}$, где $t^* = \frac{1}{\sqrt{u_0}}$ (u_0 — начальные условия, которые считаются одинаковыми). Для анализа (9) при $\xi_j \neq 0$ удобно ввести новые функции

$$X = u_3 \sin \Phi, \quad Y = u_3 \cos \Phi, \quad Z = u_1 u_2, \tag{10}$$

$$V = u_1 / u_2.$$

Система (9) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z + Y^2 \left(V + \frac{1}{V} \right) + Y \left[\xi_1 ZV + \xi_2 \frac{Z}{V} + \xi_3 (X^2 + Y^2) \right], \\ \dot{Y} &= -XY \left(V + \frac{1}{V} \right) - X \left[\xi_1 ZV + \xi_2 \frac{Z}{V} + \xi_3 (X^2 + Y^2) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

$$Z = ZX \left(V + \frac{1}{V} \right), \quad \dot{V} = X(1 - V^2).$$

В четырехмерном фазовом пространстве система (11) имеет два состояния равновесия: 1) $X_0 = Y_0 = Z_0 = V_0 = 0$, 2) $Z_1 = 0, X_1 = 0, V_1 = 1, Y_1 = -\frac{\xi_3}{2}$. Нетривиальное состояние равновесия является центром при условии

$$2 - \frac{5}{4} \xi_3^2 + \frac{3}{16} \xi_3^3 > 0, \quad (12)$$

при выполнении обратного неравенства это состояние равновесия является седлом-фокусом, т. е. стабилизации «взрыва» не происходит. С помощью ЭВМ определяем, что условие (12) выполняется в следующих случаях: а) $\beta = 0,99995, \delta = 1,1$, б) $\beta = 0,99995, \delta = 2,5$, в) $\beta = 0,99995, \delta = 7$, г) $\beta = 0,8, \delta = 1,1$, д) $\beta = 0,6, \delta = 1,1$, е) $\beta = 0,1, \delta = 7$, т. е. при ультрарелятивизме стабилизация «взрыва» происходит при любой частоте накачки, при умеренном релятивизме — лишь для частот, близких к ленгмюровской частоте плазмы, а при слабом релятивизме — только при высоких частотах накачки. Этот факт связан с соответствующей зависимостью нелинейного сдвига частоты от параметра, характеризующего релятивизм (β) и частоту накачки (δ). Отметим, что аналогичная зависимость нелинейной расстройки от параметра, определяющего релятивизм частиц, также видна из формул, приведенных в [13] для системы релятивистский поток — плазма.

Таким образом, в изотропной плазме, помещенной в поле циркулярно поляризованной электромагнитной волны, возможна взрывная неустойчивость слабых возмущений. Отметим, что в указанной системе при определенных условиях возникает и ВЧ нестабильность [9], однако ее инкремент много меньше обратного времени «взрыва»*. Используя формулы для определения состояния равновесия системы (11), можно оценить амплитуды генерируемых колебаний. При этом отношение мощности колебаний к мощности накачки может быть порядка 0,1. При больших величинах КПД результаты работы неприменимы, так как выходят за рамки пределов применимости теории слабого нелинейного взаимодействия.

В заключение оценим инкременты возбуждения колебаний (время взрыва) и параметр преобразования частоты накачки вверх по спектру

Таблица 4

Оценки для лазерной плазмы ($n_0 \sim 10^{15} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$)

№	β	δ	ω_L	$E_0, \text{ CGSE}$	$P_0, \text{ Вт/см}^2$
1	0,99995	1,1	$1,8 \cdot 10^{10} - 5,7 \cdot 10^{11}$	$1,2 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^{10} - 9,4 \cdot 10^{12}$
2	0,99995	2,5	$1,8 \cdot 10^{10} - 5,7 \cdot 10^{11}$	$2,8 \cdot 10^4 - 8,7 \cdot 10^5$	$6,7 \cdot 10^{10} - 2,1 \cdot 10^{13}$
3	0,99995	7,0	$1,8 \cdot 10^{10} - 5,7 \cdot 10^{11}$	$8,1 \cdot 10^4 - 2,5 \cdot 10^6$	$1,9 \cdot 10^{11} - 6,0 \cdot 10^{14}$
4	0,6	1,1	$1,6 \cdot 10^{12} - 5,1 \cdot 10^{13}$	$6,3 \cdot 10^4 - 2,0 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^{11} - 4,8 \cdot 10^{14}$
5	0,1	1,1	$1,8 \cdot 10^{12} - 5,7 \cdot 10^{13}$	$1,3 \cdot 10^3 - 3,9 \cdot 10^4$	$3,1 \cdot 10^8 - 9,4 \cdot 10^{10}$
6	0,1	2,5	$1,8 \cdot 10^{12} - 5,7 \cdot 10^{13}$	$2,8 \cdot 10^3 - 8,8 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^8 - 2,1 \cdot 10^{11}$
7	0,1	7,0	$1,8 \cdot 10^{12} - 5,7 \cdot 10^{13}$	$8,1 \cdot 10^3 - 2,5 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^9 - 6,0 \cdot 10^{12}$

* В данной работе не учитывались обычные параметрические нестабильности, поскольку их инкремент много меньше обратного времени «взрыва», кроме того, эти нестабильности подавляются при достаточно сильных полях [17].

для лазерной плазмы с концентрацией $n_0 \sim 10^{15} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$; длину волн неодимового лазера примем 1,06 мк. Результаты вычислений сведены в табл. 4, 5. При этом оказывается, что оптимальное по мощности усиление сигнала происходит с коэффициентом преобразования по частоте $\Omega/\omega_0 \sim 3,5$, т. е. возможен переход из инфракрасной в ультрафиолетовую часть спектра излучения.

Таблица 5
Времена «взрыва» для лазерной плазмы ($n_0 \sim 10^{15} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $u_0 \sim 10^{-3}$)

№	β	δ	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$
1	0,99995	1,1	$1,5 \cdot 10^{-12} - 4,7 \cdot 10^{-14}$	$3,5 \cdot 10^{-10} - 1,1 \cdot 10^{-11}$	$9,6 \cdot 10^{-12} - 3,0 \cdot 10^{-13}$
2	0,99995	2,5	$1,3 \cdot 10^{-13} - 4,0 \cdot 10^{-15}$	$10^{-11} - 3,3 \cdot 10^{-13}$	$2,8 \cdot 10^{-12} - 8,2 \cdot 10^{-14}$
3	0,8	1,1	$5,0 \cdot 10^{-10} - 1,6 \cdot 10^{-11}$	$1,9 \cdot 10^{-10} - 6,1 \cdot 10^{-12}$	$4,3 \cdot 10^{-10} - 1,4 \cdot 10^{-11}$
4	0,8	2,5	$5,5 \cdot 10^{-10} - 1,8 \cdot 10^{-11}$	$1,9 \cdot 10^{-11} - 5,9 \cdot 10^{-13}$	$1,6 \cdot 10^{-11} - 5,1 \cdot 10^{-13}$
5	0,8	7,0	$4,1 \cdot 10^{-12} - 1,3 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-12} - 5,6 \cdot 10^{-14}$	$3,0 \cdot 10^{-12} - 9,3 \cdot 10^{-14}$
6	0,6	2,5	$1,2 \cdot 10^{-11} - 3,9 \cdot 10^{-13}$	$4,1 \cdot 10^{-10} - 1,3 \cdot 10^{-11}$	$10^{-11} - 3,1 \cdot 10^{-13}$
7	0,6	7,0	$1,3 \cdot 10^{-12} - 4,1 \cdot 10^{-14}$	$1,8 \cdot 10^{-11} - 5,6 \cdot 10^{-13}$	$1,8 \cdot 10^{-12} - 5,5 \cdot 10^{-14}$
8	0,1	7,0	$1,8 \cdot 10^{-11} - 5,5 \cdot 10^{-13}$	$1,5 \cdot 10^{-11} - 4,7 \cdot 10^{-13}$	$8,1 \cdot 10^{-12} - 2,5 \cdot 10^{-13}$

Авторы признательны А. Г. Литваку за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд Наука, М., 1973.
- 2 С Е Мах, Phys Fluids, 16, 1480 (1973)
- 3 Р. К Shukla, Н. Y. Yu, К. Н. Spatsheer, Phys. Lett, A62, 332 (1977)
- 4 А Н Калмыков, Н Я Коцаренко, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 10, 1481 (1976)
- 5 Н. Л. Цинцадзе, Д Д Цхакая, Е. М Хирсели, сб Физика плазмы, изд МецНереба, Тбилиси, 1975.
- 6 Б Б Кадомцев, А Б Михайловский, А В Тимофеев, ЖЭТФ, 47, 2266 (1964)
- 7 В Н Дикасов, Л. И. Рудаков, Д Д Рютов, ЖЭТФ, 48, 913 (1965).
- 8 Н. Wilhelmsson, Plasma Phys, 3, 215 (1969)
- 9 С М Файнштейн, ЖЭТФ, 71, 1021 (1976); ЖТФ, 45, 1334 (1975); Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 1059 (1975)
- 10 М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 63, 1672 (1972).
- 11 V. N. Oraevskii, V. P. Pavlenko, Н. Wilhelmsson, Е. Ya Kogan, Phys Rev Lett, 30, 163 (1970).
- 12 М. И Рабинович, В П Реутов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 6, 815 (1973).
- 13 С М. Файнштейн, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 754 (1978).
- 14 С. А Каплан, В. Н. Цытович, Плазменная астрофизика, изд Наука, М., 1972.
- 15 В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд Наука, М., 1967.
- 16 А. В. Гапонов, Л А Островский, М. И Рабинович, Изв вузов — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970)
- 17 Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию 17 октября 1978 г.

POSSIBILITY OF EFFECTIVE RADIATION FREQUENCY TRANSFORMATION IN A PLASMA IN THE FIELD OF A RELATIVISTICALLY STRONG ELECTROMAGNETIC WAVE

E A Dubinina, S M. Fainstein

A problem is considered on interaction of weak disturbances in an isotropic plasma placed in the field of a strongly circularly polarized electromagnetic wave. A corresponding dispersive equation is derived and the sign of the disturbing energy at different branches of dispersion curves is analysed. Conditions of synchronism are found out for three-wave interactions defining the occurrence of the burst instability. Stabilization of the given instability is studied due to the nonlinear frequency shift. Estimations are presented for a laser plasma showing the efficiency of the radiation energy transformation upwards the spectrum.

УДК 535.36

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЗКОГО ПУЧКА СВЕТА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Л. С. Долин, В. А. Савельев

На основе решения уравнения переноса в малоугловом приближении проведено исследование структуры узкого пучка света в стратифицированной рассеивающей среде. Проанализировано влияние неоднородности оптических параметров среды на основные характеристики пучка, определяющие его структуру: эффективное поперечное сечение, поперечное распределение освещенности, поток энергии через круглую апертуру, расположенную на оси пучка.

Поле яркости направленного источника излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием (вода, атмосферная турбулентность, туман) на не слишком больших оптических расстояниях от источника ($\tau < 10 \div 20$) с достаточно хорошей точностью рассчитывается на основе решения уравнения переноса в малоугловом приближении [1-4]. Однако это решение найдено в предположении однородности оптических характеристик среды, в то время как оптические характеристики природных рассеивающих сред, как правило, пространственно неоднородны. В данной работе указанное решение обобщается на случай, когда показатели рассеяния σ и поглощения κ среды и ее индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ произвольным образом изменяются вдоль трассы распространения пучка.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Пусть направленный световой пучок падает на слой рассеивающей среды $0 \leq z \leq L$ с неоднородными вдоль z оптическими параметрами σ , κ , $\epsilon = \sigma + \kappa$ и индикатрисой рассеяния $x(z, \gamma)$ (γ — угол рассеяния), удовлетворяющей условиям

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\cdot) \sin \gamma d\gamma = 1, \quad (1)$$

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi \gamma^2 x(\cdot) \sin \gamma d\gamma \ll 1,$$

где γ_0^2 — дисперсия угла отклонения луча при элементарном акте рассеяния. Потребуем также, чтобы во всем слое угловое распределение яркости $B(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ оставалось сильно анизотропным:

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \ll B(\mathbf{r}, \mathbf{z}_0) \quad \text{при} \quad \theta = (\mathbf{n}, \hat{\mathbf{z}}_0) > \theta_m \ll \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

(Следующие из условия (2) ограничения на параметры слоя будут установлены позже.) Тогда для расчета поля яркости $B(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ по за-

данному распределению яркости в плоскости $z = 0$ можно воспользоваться уравнением переноса излучения в малоугловом приближении [1-3],

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_{\perp} \nabla_{\perp} + \varepsilon(z) \right] B(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{n}_{\perp}) =$$

$$= \frac{\sigma(z)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\mathbf{r}'_{\perp}, z, \mathbf{n}'_{\perp}) x(z, |\mathbf{n}_{\perp} - \mathbf{n}'_{\perp}|) d^2 n'_{\perp}, \quad (3)$$

где \mathbf{r}_{\perp} и \mathbf{n}_{\perp} — проекции радиуса-вектора точки наблюдения \mathbf{r} и единичного вектора \mathbf{n} , характеризующего направление луча, на плоскость $z = \text{const}$.

Процедура решения уравнения (3) полностью аналогична той, которая использовалась в случае однородной рассеивающей среды [1-3]. Решение этого уравнения, устанавливающее связь между полем яркости в слое $0 \leq z \leq L$ и распределением яркости на плоскости $z = 0$, имеет вид*

$$B(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{n}_{\perp}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{h}, z, \mathbf{p}) \exp[i(\mathbf{h}\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{p}\mathbf{n}_{\perp})] d^2 h d^2 p; \quad (4)$$

$$F(\mathbf{h}, z, \mathbf{p}) = F(\mathbf{h}, 0, \mathbf{p} + \mathbf{h}z) \exp\left[\int_0^z \Phi(z, \xi, \mathbf{p} + \mathbf{h}\xi) d\xi \right]; \quad (5)$$

$$\Phi(z, \mathbf{p}) = -\varepsilon(z) + \sigma(z) \frac{Q(z, \mathbf{p})}{Q(z, 0)}; \quad (6)$$

$$Q(z, \mathbf{p}) = \int_0^{\infty} x(z, \gamma) J_0(p\gamma) \gamma d\gamma. \quad (7)$$

Ниже формулы (4)–(7) будут применены для анализа влияния стратификации оптических параметров среды на энергетические характеристики узкого светового пучка. Предварительно, однако, заметим, что благодаря существованию простого закона соответствия [6] между теорией поля лучистой энергии и корреляционной теорией случайных волновых полей эти формулы можно также использовать для расчета пространственной корреляционной функции (функции когерентности) волнового пучка, распространяющегося в рассеивающей среде.

Действительно, если пространственная корреляционная функция комплексной амплитуды $U(\mathbf{r})$ случайного монохроматического поля

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \overline{U\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) U^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right)} \quad (8)$$

имеет характерный масштаб неоднородности по переменной \mathbf{r} , существенно превышающий длину волны $\lambda = 2\pi c/\omega \bar{n}_1$ (c — скорость света, ω — частота, \bar{n}_1 — среднее значение действительной части показателя преломления среды), то согласно [6] корреляционную функцию можно представить интегралом

* В работе [5] было получено выражение для яркости точечного изотропного источника, наблюдаемого через слонсто-неоднородную мутную среду. Как нетрудно убедиться, оно эквивалентно выражению для освещенности в сечении элементарного пучка, которое следует из (4), (20). Решения указанных задач связаны оптическим принципом взаимности.)

$$\Gamma(\mathbf{r}, \rho) = \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \rho\right) d\Omega_{\mathbf{n}} \quad (9)$$

(интегрирование ведется по направлениям единичного вектора \mathbf{n} в пределах полного телесного угла), где функция I удовлетворяет уравнению переноса и в этом смысле является электродинамическим аналогом фотометрической величины $B(\mathbf{r}, \mathbf{n})$.

В случае, когда поле E имеет вид волнового пучка, распространяющегося в направлении оси z , функция I отлична от нуля только при значениях $1 - (\mathbf{n}z_0) \ll 1$, и ее можно рассматривать [7] как фурье-трансформанту функции корреляции поля в плоскости $z = \text{const}$:

$$\Gamma(\mathbf{r}_{\perp}, z, \rho_{\perp}) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{n}_{\perp}) \exp(ikn_{\perp} \rho_{\perp}) d^2 n_{\perp}; \quad (10)$$

$$I(\mathbf{r}_{\perp}, z, \mathbf{n}_{\perp}) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_{\perp}, z, \rho_{\perp}) \exp(-ikn_{\perp} \rho_{\perp}) d^2 \rho_{\perp}, \quad (11)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (\rho_{\perp} z_0) = 0, \quad \mathbf{n}_{\perp} = \mathbf{n} - (\mathbf{n}z_0)z_0.$$

Из сказанного ясно, что для нахождения пространственной функции корреляции волнового поля внутри рассеивающего слоя по заданной функции $\Gamma(\mathbf{r}_{\perp}, 0, \rho_{\perp})$ достаточно заменить в (4) $B(\cdot)$ на $I(\cdot)$ и подставить выражение для I в (10). В итоге получаем

$$\Gamma(\mathbf{r}_{\perp}, z, \rho_{\perp}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_s(\mathbf{q}, z, \rho_{\perp}) \exp(ikq r_{\perp}) d^2 q; \quad (12)$$

$$\Gamma_s(\mathbf{q}, z, \rho_{\perp}) = \Gamma_s(\mathbf{q}, 0, \rho_{\perp} - qz) \exp\left[\int_0^z \Phi(z - \xi, -k\rho_{\perp} + kq\xi) d\xi\right]; \quad (13)$$

$$\Gamma_s(\mathbf{q}, 0, \rho_{\perp}) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_{\perp}, 0, \rho_{\perp}) \exp(-ikq r_{\perp}) d^2 r_{\perp}. \quad (14)$$

Если пучок распространяется в среде с комплексным показателем преломления

$$n = n_1(\mathbf{r}) + in_2(z), \quad (15)$$

действительная часть которого флуктуирует в пространстве и описывается корреляционной функцией вида

$$\Gamma_{n_1}(z, \rho) = \overline{\Delta n_1\left(r + \frac{\rho}{2}\right) \Delta n_1\left(r - \frac{\rho}{2}\right)} \quad (16)$$

($\Delta n_1 = n_1 - \bar{n}_1$), то выражения (12)–(14) можно использовать для расчета Γ , полагая

$$\Phi(z, \rho) = -2k_0 n_2(z) - 2k_0^2 \int_0^{\infty} \left[\Gamma_{n_1}(z, x) - \Gamma_{n_1}\left(z, \sqrt{\frac{\rho^2}{k^2} + x^2}\right) \right] dx; \quad (17)$$

при этом должны выполняться следующие условия:

$$a \gg \lambda, \quad 2k_0 a n_2 \ll 1, \quad 2k_0^2 \overline{(\Delta n_1)^2} a^2 \ll 1, \quad (18)$$

a — радиус корреляции флуктуаций показателя преломления. В отсутствие зависимости Γ_n от z и поглощения формулы (13), (14), (17) переходят в соответствующие выражения работы [7].

2. ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ ПУЧКА

Следуя [3, 8], определим эффективное сечение пучка соотношением

$$S = \pi \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} r_{\perp}^2 E(r_{\perp}, z) d^2 r_{\perp}}{\iint_{-\infty}^{\infty} E(r_{\perp}, z) d^2 r_{\perp}}, \quad (19)$$

в котором

$$E(r_{\perp}, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(r_{\perp}, z, n_{\perp}) d^2 n_{\perp} \quad (20)$$

— пространственная освещенность (в рамках волнового описания величине E соответствует $\Gamma(r_{\perp}, z, 0)$). Тогда, используя (4)–(7), получим

$$S(z) = S_0(z) + \pi \int_0^z \gamma_0^2(\xi) \sigma(\xi) (z - \xi)^2 d\xi, \quad (21)$$

где $S_0(z)$ — сечение пучка на расстоянии z от источника в отсутствие рассеяния ($\sigma \equiv 0$), величина γ_0^2 была определена ранее (см. (1)). Аналогичное выражение для однородной трассы ($\sigma = \text{const}$) было получено в [3, 8].

3. СТРУКТУРА ПУЧКА В ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Из (4)–(7) можно получить простое аналитическое выражение для B , если разложить $Q(z, p)$ в степенной ряд по p около точки $p=0$ и ограничиться его первыми двумя отличными от нуля членами:

$$Q(z, p) \approx Q(z, 0) \left[1 - \frac{1}{4} \gamma_0^2(z) p^2 \right]. \quad (22)$$

Использование этой аппроксимации соответствует переходу к так называемому диффузионному приближению [1, 3] уравнения переноса и допустимо в случае, когда начальная ширина падающего на среду пучка ($2r_i$) и угол его расходимости ($2\theta_i$) достаточно велики ($\sigma^2 r_i^2 / \gamma_0^2 \gg 1$, $\sqrt{\gamma_0^2} \ll \theta_i \ll \pi/2$).

Подстановка (22) в (6) и (5) дает:

$$F(h, z, p) = F(h, 0, p + hz) \exp(-\tau_z - \varphi_0 p^2 - 2\varphi_1 p h - \varphi_2 h^2); \quad (23)$$

$$\tau_z = \int_0^z \kappa(\xi) d\xi, \quad \varphi_n = \frac{1}{4} \int_0^z \gamma_0^2(\xi) \sigma(\xi) (z - \xi)^n d\xi. \quad (24)$$

Если яркость падающего пучка, следуя [3], задать в виде

$$B(r_{\perp}, 0, n_{\perp}) = \frac{P_0}{\pi r_i^2 \pi \theta_i^2} \exp\left(-\frac{r_{\perp}^2}{r_i^2} - \frac{n_{\perp}^2}{\theta_i^2}\right), \quad (25)$$

то из (4), (23)–(25) имеем

$$B = \frac{P_0}{16\pi^2(\beta_0\beta_2 - \beta_1^2)} \exp \left[-\tau_x - \frac{\beta_0 r_{\perp}^2 - 2\beta_1 r_{\perp} n_{\perp} + \beta_2 n_{\perp}^2}{4(\beta_0\beta_2 - \beta_1^2)} \right], \quad (26)$$

где P_0 — полная мощность пучка, $\beta_0 = \frac{\theta_i^2}{4} + \varphi_0$, $\beta_1 = \frac{\theta_i^2 z}{4} + \varphi_1$, $\beta_2 = \frac{\theta_i^2 z^2 + r_i^2}{4} + \varphi_2$.

Нетрудно также подсчитать мощность (P_n) на выходе приемной оптической системы, расположенной на оси пучка на расстоянии z от границы слоя. Полагая

$$P_n = \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 n_{\perp} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} B(r_{\perp}, z, n_{\perp}) \Sigma(r_{\perp}) \Omega(n_{\perp}) \quad (27)$$

и задавая коэффициент прозрачности апертуры (Σ) и диаграмму направленности приемника (Ω) в виде

$$\Sigma = \exp \left(-\frac{r_{\perp}^2}{r_n^2} \right), \quad \Omega = \exp \left(-\frac{n_{\perp}^2}{\theta_n^2} \right), \quad (28)$$

получим

$$P_n = \frac{r_n^2 \theta_n^2 P_0 \exp(-\tau_x)}{16(\bar{\beta}_0 \bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1^2)}, \quad (29)$$

где $\bar{\beta}_0 = \frac{1}{4} \theta_n^2 + \beta_0$, $\bar{\beta}_2 = \frac{1}{4} r_n^2 + \beta_2$. В случае изотропного приемника ($\theta_n \rightarrow \infty$) P_n элементарно выражается через эффективное сечение пучка (см. (21)) и площадь входного зрачка приемника $S_n = \pi r_n^2$:

$$P_n = \frac{S_n P_0}{S_n + S} \exp(-\tau_x). \quad (30)$$

4. УТОЧНЕННОЕ ДИФFUЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Если экспоненциальный множитель в формуле (5) преобразовать в соответствии с тождеством

$$\exp \left[\int_0^z f(x) dx \right] \equiv 1 + \int_0^z f(\xi) \exp \left[\int_{\xi}^z f(x) dx \right] d\xi,$$

то она примет вид

$$F(h, z, p) = F^0(h, z, p) + F^s(h, z, p); \quad (31)$$

$$F^0(h, z, p) = F(h, 0, p + hz) \exp \left[-\int_0^z \varepsilon(\xi) d\xi \right]; \quad (32)$$

$$F^s(h, z, p) = F^0(h, z, p) \int_0^z d\eta \sigma(\eta) \frac{Q(\eta, p + h(z - \eta))}{Q(\eta, 0)} \times \\ \times \exp \left[\int_{\eta}^z d\xi \sigma(\xi) \frac{Q(\xi, p + h(z - \xi))}{Q(\xi, 0)} \right], \quad (33)$$

где F^0 и F^s — спектры соответственно нерассеянной и рассеянной компонент поля яркости.

Упростим теперь правую часть выражения (33), положив

$$Q(\eta, p) \approx Q(\eta, 0) \left[1 - \frac{1}{4} \gamma_0^2(\eta) p^2 \right] \approx Q(\eta, 0) \exp \left[-\frac{\gamma_0^2(\eta) p^2}{4} \right],$$

$$Q(\xi, p) \approx Q(\xi, 0) \left[1 - \frac{1}{4} \gamma_0^2(\xi) p^2 \right].$$

Тогда вместо (33) получим

$$F^s(h, z, p) = F(h, 0, p + hz) \exp(-\tau_z) \int_0^z d\eta \sigma(\eta) \times \\ \times \exp[-\tau_s(\eta) - \varphi_0(z, \eta) p^2 - 2\varphi_1(z, \eta) ph - \varphi_2(z, \eta) h^2]; \quad (34)$$

$$\tau_s(\eta) = \int_0^\eta d\xi \sigma(\xi), \quad (35)$$

$$\varphi_n(z, \eta) = \frac{1}{4} \gamma_0^2(\eta) (z - \eta)^n + \frac{1}{4} \int_\eta^z d\xi \sigma(\xi) (z - \xi)^n \gamma_0^2(\xi).$$

Использованная выше процедура упрощения формулы (33) эквивалентна переходу к решению уравнения переноса в так называемом уточненном диффузионном приближении [3]. Соотношения (31), (32), (34) несколько менее точны по сравнению с (5), но существенно упрощают вычисление параметров пучка.

Исходя из (31), (32), (34), (25), (20) и (4), нетрудно получить выражение для яркости поля $B(r_\perp, z, n_\perp)$ гауссова пучка:

$$B(r_\perp, z, n_\perp) = B^0(r_\perp, z, n_\perp) + B^s(r_\perp, z, n_\perp); \quad (36)$$

$$B^0(r_\perp, z, n_\perp) = \frac{P_0}{\pi r_i^2 \pi \theta_i^2} \exp \left[-\tau_x(z) - \tau_s(z) - \right. \\ \left. - \frac{(r_\perp - zn_\perp)^2}{r_i^2} - \frac{n_\perp^2}{\theta_i^2} \right]; \quad (37)$$

$$B^s(r_\perp, z, n_\perp) = \frac{P_0}{16 \pi^2} \exp[-\tau_x(z)] \int_0^z d\eta \sigma(\eta) \times \\ \times \frac{\exp \left[-\tau_s(\eta) - \frac{\beta_0 r_\perp^2 - 2\beta_1 r_\perp n_\perp + \beta_2 n_\perp^2}{4(\beta_0 \beta_2 - \beta_1^2)} \right]}{\beta_0 \beta_2 - \beta_1^2}, \quad (38)$$

где

$$\beta_n = \frac{\theta_i^2 z^n}{4} + \frac{r_i^2 n(n-1)}{8} + \varphi_n(z, \eta).$$

При этом распределение освещенности в его поперечном сечении

$$E(r_\perp, z) = \frac{P_0}{\pi} \exp[-\tau_x(z)] \left\{ \frac{1}{r_i^2 + \theta_i^2 z^2} \exp \left[-\tau_s(z) - \frac{r_\perp^2}{r_i^2 + \theta_i^2 z^2} \right] + \right.$$

$$+ \int_0^z d\eta \sigma(\eta) \exp[-\tau_\sigma(\eta)] \frac{\exp\left[-\frac{r_\perp^2}{4\beta_2(z, \eta)}\right]}{4\beta_2(z, \eta)} \Bigg\}. \quad (39)$$

Поток энергии P_Σ через круглую площадку Σ , расположенную на оси пучка, определяется выражением

$$P_\Sigma(z) = \iint_\Sigma d^2 r_\perp E(r_\perp, z) = P_0 \exp[-\tau_x(z)] \left\{ 1 - \exp\left[-\tau_\sigma(z) - \frac{R^2}{r_i^2 + \theta_i^2 z^2}\right] - \int_0^z d\eta \sigma(\eta) \exp\left[-\tau_\sigma(\eta) - \frac{R^2}{4\beta_2(z, \eta)}\right] \right\}, \quad (40)$$

где R — радиус площадки. На рис. 1, 2 представлены результаты расчета освещенности (рис. 1) и потока энергии (рис. 2), выполненные по формулам (39), (40), для случая, когда $\gamma_0^2(z) = \text{const}$, а показатель рассеяния в слое $0 \leq z \leq L$ изменяется по линейному закону

$$\sigma(z) = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{L} \left(z - \frac{L}{2} \right) \quad (|\Delta\sigma| \leq 2\sigma_0). \quad (41)$$

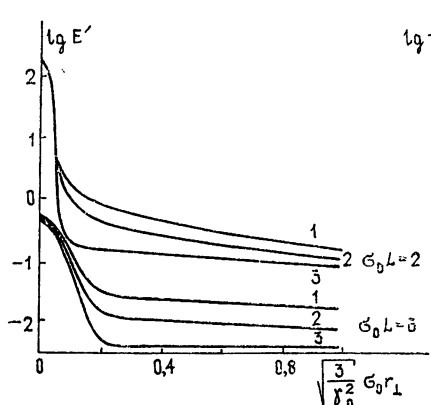


Рис. 1.

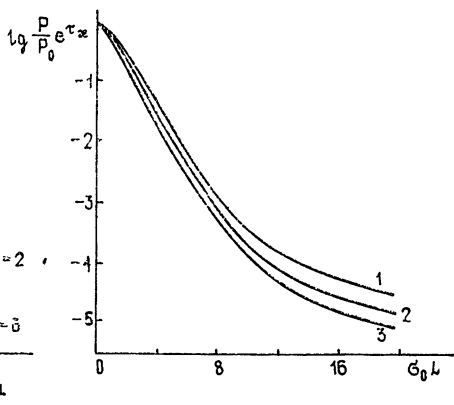


Рис. 2.

Рис. 1. $E = E' \frac{P_0}{\pi} \frac{3\sigma_0^2}{\gamma_0^2} \exp(-\tau_x)$, $\frac{3\theta_i^2}{\gamma_0^2} = 1,6 \cdot 10^{-4}$,

$\frac{3\sigma_0^2 r_i^2}{\gamma_0^2} = 10^{-5}$, $1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 2$, $2 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 0$, $3 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = -2$.

Рис. 2. $\frac{3\sigma_0^2 r_i^2}{\gamma_0^2} = 10^{-2}$, $\frac{3\sigma_0^2 R^2}{\gamma_0^2} = 10^{-1}$, $\theta_i = 0$,

$1 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 2$, $2 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = 0$, $3 - \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = -2$.

Как следует из рис. 1, 2, увеличение σ в области среды, примыкающей к источнику ($\Delta\sigma/\sigma_0 = -2$), при постоянной оптической толщине слоя $\tau_x(L)$ приводит по сравнению со случаем $\Delta\sigma = 0$ к уменьшению потока энергии и более четкому выделению ядра пучка (нерассеянной компоненты пучка) на фоне рассеянного излучения. В случае $\Delta\sigma/\sigma_0 = 2$ ситуация изменяется на противоположную. Эти эффекты связаны с перераспределением энергии рассеянной компоненты пучка в плоскости $z = L$ при сохранении ее полной энергии.

5. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ СЛОЯ

Границы применимости полученных выше формул определяются условием малости угловой ширины тела яркости пучка. Если последнюю характеризовать параметром

$$\overline{\theta^2(L)} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 n_{\perp} n_{\perp}^2 B(r_{\perp}, L, n_{\perp})}{\iint_{-\infty}^{\infty} d^2 r_{\perp} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 n_{\perp} B(r_{\perp}, L, n_{\perp})}$$

(дисперсией углов отклонения лучей от оси пучка), то это условие (с учетом формул (4)–(6), (25)) будет иметь вид

$$\overline{\theta^2(L)} = \theta_i^2 + \int_0^L d\xi \sigma(\xi) \gamma_0^2(\xi) \ll 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н Веггер, Radio Sci, 68D, № 9 (1964).
- 2 Л С Долин, Изв вузов — Радиофизика, 7, № 2, 380 (1964).
- 3 Л С Долин, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 1, 61 (1966).
- 4 Д. М Браво-Животовский, Л С Долин, А. Г. Лучинин, В. А Савельев, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 5, № 2 (1969).
- 5 Л. С. Долин, В. А Савельев, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана (в печати).
- 6 Л. С. Долин, Изв вузов — Радиофизика, 7, № 3, 471 (1964).
- 7 Л. С Долин, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
- 8 З И Фейзулин, Ю А. Кравцов, Изв вузов — Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
21 ноября 1978 г.

TO THE THEORY OF PROPAGATION OF A NARROW LIGHT BEAM
IN A STRATIFIED SCATTERING MEDIUM

L. S. Dolin, V. A. Savel'ev

Based upon the solution of the transfer equation in the small-angular approximation the investigation has been made of the structure of a narrow light beam propagating in a stratified scattering medium. The influence has been analyzed of the inhomogeneity of the optical medium parameters on the main characteristics of the beam which define its structure: effective cross-section, transverse illumination distribution, energy flowing through a circular aperture located on the beam axis.

УДК 535.416.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОКУСИРОВКИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ДВИЖУЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

М. А. Воронцов, С. С. Чесноков

Проводится численное исследование градиентного метода оптимизации процесса распространения светового пучка в нелинейной среде. Обсуждаются особенности использования градиентного метода, найдены интегральные соотношения для сопряженной системы уравнений. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности алгоритма оптимальной коррекции начального фазового профиля пучка.

Тепловое самовоздействие световых пучков является одним из основных факторов, затрудняющих передачу энергии на большие расстояния. Это обстоятельство стимулирует значительный интерес к исследованиям, связанным с поиском эффективных методов уменьшения влияния тепловой дефокусировки. Для компенсации нелинейных искажений светового пучка в условиях теплового самовоздействия в настоящее время используются алгоритмы адаптивного и программного управления начальной фазой пучка.

Непосредственное применение систем когерентной оптической адаптивной техники (КОАТ), разработанных для компенсации линейных искажений пучка, позволяет в некоторой степени уменьшить и тепловую дефокусировку. В [1] предложен алгоритм адаптивной коррекции, учитывающий, в грубом приближении, нелинейные свойства среды. Численное моделирование алгоритма показало его пригодность лишь при слабой нелинейности среды. Присутствие сильного теплового самовоздействия делает такую коррекцию малоэффективной.

Известные в настоящее время способы априорной фазовой коррекции [2, 3] основаны на вычислении оптической силы распределенной тепловой линзы, наведенной пучком в среде, и последующей компенсации ее дефокусирующего действия эквивалентной тонкой линзой на входе в среду. Параметры этой линзы определяются по некоторому фиксированному распределению интенсивности световой волны вдоль трассы, которое выбирается из тех или иных физических соображений. При этом необходимо априорное знание характеристик среды распространения. В ряде случаев предварительная коррекция позволяет уменьшить тепловую дефокусировку, однако предположения, на которых основан метод, и известный произвол в способах расчета тепловой линзы ограничивают область ее применимости.

Более перспективным представляется определение начального фазового профиля пучка в процессе численного решения задачи оптимизации фокусировки с использованием градиентных методов [4]. При этом решение проводится в полном объеме, без привлечения каких-либо физических приближений (безабберационного, тонкой линзы и т. п.) или ограничений на силу нелинейности.

Настоящая работа посвящена развитию данного подхода. Проводится численная реализация алгоритма оптимального управления фа-

зовым профилем светового пучка, распространяющегося в движущейся нелинейной среде. На основе полученных результатов анализируется эффективность алгоритма. Получены интегральные соотношения для сопряженной системы уравнений, удобные для усредненного описания решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим стационарную задачу о распространении светового пучка в движущейся нелинейной среде. Изменение комплексной амплитуды электрического поля волны $E(x, y, z)$, распространяющейся вдоль оси z , описывается уравнением квазиоптики:

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = \Delta_{\perp} E + RTE, \quad (1)$$

здесь $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. При достаточно больших скоростях движения среды температурный профиль в канале пучка определяется вынужденным теплопереносом. В этом случае для температуры $T(x, y)$ в каждом сечении z справедливо уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial x} = EE^*. \quad (2)$$

В системе безразмерных уравнений (1), (2) переменные x, y нормированы на начальный радиус пучка a_0 , переменная z — на дифракционную длину $z_d = 2\pi a_0^2/\lambda$ (λ — длина волны), амплитуда E отнесена к модулю максимума амплитуды $|E_0|$ при $z = 0$, температура T — к характерному значению $\frac{\alpha c n a_0 E_0 E_0^*}{8\pi \rho C_p V}$. Параметр нелинейности $R =$

$= \frac{\pi a_0^3 \alpha c (\partial n / \partial T)}{\lambda^2 V \rho C_p} E_0 E_0^*$ пропорционален интенсивности на входе в среду,

c — скорость света, α, ρ, C_p — коэффициент поглощения, плотность и теплоемкость среды соответственно, V — скорость движения среды (направлена вдоль оси x слева направо). Производная $\partial n / \partial T$ характеризует зависимость показателя преломления среды от температуры (здесь рассматривается случай дефокусирующих сред, когда $\partial n / \partial T < 0$).

На входе в среду (при $z = 0$) задано начальное условие

$$E(x, y, 0) = E_0(x, y) e^{iU(x, y)}. \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\lim_{x, y \rightarrow \pm\infty} E(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Сформулируем задачу оптимальной фокусировки. Начальный фазовый профиль пучка $U(x, y)$ является управлением и выбирается из условия максимума мощности световой волны J_0 , падающей в пределы выходной апертуры, описываемой функцией $\rho(x, y)$ и расположенной на заданном расстоянии $z = z_0$ от источника, т. е.

$$J_0 = \max_U \{J(U)\} = \max_U \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} \rho E_U E_U^* \Big|_{z=z_0} dx dy \right\}, \quad (5)$$

где $E_U|_{z=z_0} = E_U(x, y, z_0)$ — распределение амплитуды в сечении $z = z_0$, полученное при начальном фазовом профиле $U(x, y)$.

Для решения поставленной задачи максимизации функционала воспользуемся итерационной процедурой [4, 5]. Пусть найдено некоторое

n -е приближение начального фазового профиля $U = U_n(x, y)$. Для определения следующего $(n + 1)$ -го приближения фазы необходимо решить две краевые задачи: исходную (1) — (4) с $U(x, y) = U_n(x, y)$ от $z = 0$ до $z = z_0$ и сопряженную [5] относительно функций $\psi(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ от $z = z_0$ до $z = 0$:

$$-2i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \Delta_{\perp} \psi + RT(EE^*)\psi + 2iRE^*G; \quad (6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\text{Im}(E\psi), \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\psi(x, y, z_0) = \rho(x, y)E^*(x, y, z_0), \quad G(x, y, z_0) = 0.$$

Скорректированный начальный профиль $U_{n+1}(x, y)$ определяется из решения сопряженной задачи, взятого в точке $z = 0$:

$$U_{n+1}(x, y) = -\arg \psi(x, y, 0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Начальное приближение $U_1(x, y)$ считается заданным.

Рассмотренный итерационный процесс определения оптимального корректирующего фазового профиля является реализацией метода условного градиента для оптимизации процесса фокусировки излучения в нелинейной среде.

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Решение системы нелинейных уравнений (1), (2) в настоящей работе производится посредством быстрого преобразования Фурье [6] с пошаговой линеаризацией [7]. Пусть на j -м шаге по z амплитуда $E_j = E(x, y, j\Delta z)$ известна. При помощи прямого и обратного преобразования Фурье на следующем шаге решается уравнение линейной дифракции. Найденная амплитуда $E_{j+1/2}^d$ используется для вычисления температуры среды

$$T_{j+1/2} = \int_{-\infty}^x E_{j+1/2}^d E_{j+1/2}^{d*} dx.$$

Затем на этом же шаге по z решается уравнение распространения волны в наведенной тепловой линзе, т. е.

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} = RT_{j+1/2}E,$$

с начальным условием $E = E_{j+1/2}^d$. В результате мы получаем амплитуду волны на $(j + 1)$ -м шаге:

$$E_{,j+1} = E_{j+1/2}^d \exp\left(-\frac{i}{2} RT_{j+1/2} \Delta z\right).$$

Рассмотренная расчетная схема является устойчивой при любом шаге по z . Единственное ограничение, накладываемое на величину Δz , определяется тепловым набегом фазы, который вычисляется по амплитуде волны, дифрагирующей на отрезке Δz . Условие для верхней оценки шага по z можно сформулировать в виде

$$\Delta z \ll \pi / (R \max_{x, y} |T(x, y)|).$$

Для получения аналитических оценок и контроля точности решения удобно использовать интегральные соотношения (интегралы движения), характеризующие поведение решения в целом [8]. В частности, интегралом движения уравнения (1) является полная энергия в поперечном сечении пучка. Для нахождения интегральных соотношений, характеризующих сопряженную систему (6), (7), умножим (1) и (6) на ψ и E соответственно и вычтем из первого равенства второе. Интегрируя полученное выражение по поперечным координатам x, y , имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint_{-\infty}^{\infty} E \psi \, dx dy = -R \iint_{-\infty}^{\infty} EE^* G \, dx dy.$$

Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$\text{Im} \iint_{-\infty}^{\infty} E \psi \, dx dy = 0, \quad 0 \leq z \leq z_0; \tag{9}$$

$$J = \iint_{-\infty}^{\infty} E \psi |_{z=0} \, dx dy - R \int_0^{z_0} dz \iint_{-\infty}^{\infty} EE^* G \, dx dy. \tag{10}$$

Контроль точности решения сопряженной задачи осуществлялся по найденным соотношениям (9), (10).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Предварительные исследования алгоритма, проведенные для случая дифракции гауссова пучка в линейной среде, показали, что через два—три приближения оптимизируемый фазовый фронт сходится к параболическому, соответствующему оптимальной фокусировке на заданное расстояние z_0 (в настоящей работе z_0 выбрано одним и тем же для всех случаев и равным $0,5 z_d$; для апертурной функции $\rho(x, y)$ использовано выражение $\rho = \exp[-(x^2 + y^2)]$).

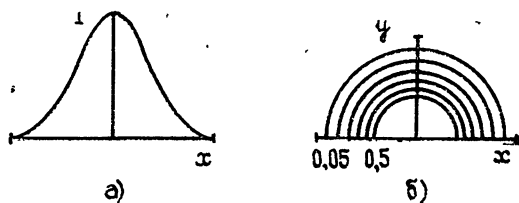


Рис. 1. а) Профиль интенсивности в сечении $y=0$; б) линии равной интенсивности для уровней 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

На рис. 1, 2 представлены результаты численного эксперимента по оптимизации фокусировки в движущейся среде со слабой нелинейностью ($R = -14$). Начальное распределение интенсивности выбиралось одинаковым для всех приближений ($E_0 E_0^* = \exp[-(x^2 + y^2)]$) и изображено на рис. 1. Рис. 2 отражает динамику итерационного процесса оптимизации фазы. На рис. 2 а изображено распределение фазы на входе в среду для первых трех приближений. Номера приближений указаны цифрами слева. В качестве начального приближения (верхняя строка рис. 2) выбрано распределение фазы, оптимальное в линейном

случае. На рис. 2 б, в показано распределение интенсивности при $z = 0,5$, полученное с соответствующими начальными фазами (рис. 2 а).

Из рисунка видно, что предварительная фокусировка (первое приближение) обеспечивает некоторый рост пиковой интенсивности и сжатие пучка, но максимум интенсивности смещен в наветренную сторону. В итерационном процессе максимум интенсивности от приближения к приближению перемещается к началу координат, одновременно усиливается сжатие приосевой области пучка.

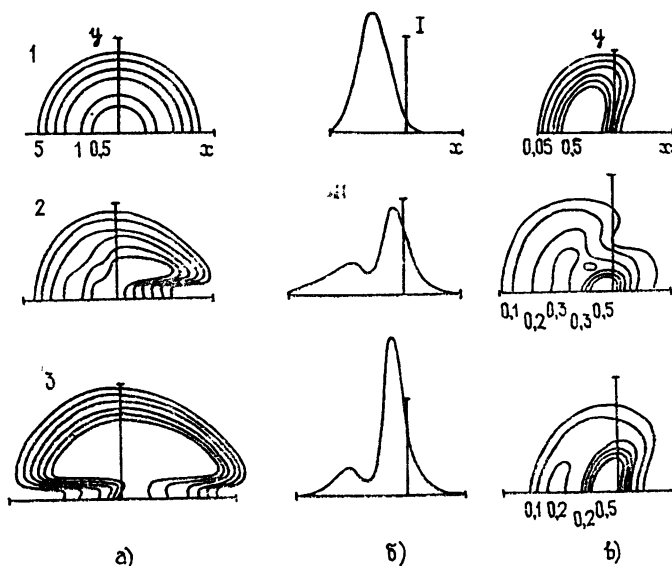


Рис. 2. а) Линии равных фаз для уровней 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; б) профили интенсивности в сечении $y = 0$ при $z = 0,5$; в) линии равной интенсивности для уровней 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Интересно проследить эволюцию фазы. Из параболоида вращения (приближение 1) фазовая поверхность превращается в совокупность двух фокусирующих «квазипараболоидов», расположенных симметрично относительно продольной оси и разделенных узкой дефокусирующей областью (приближение 3). Видно, что оптимальное распределение фазы приводит к дефокусировке центральной области и фокусировке периферии в сочетании с отклонением пучка как целого для упреждения ветрового смещения.

Проведенное численное исследование показывает, что алгоритм оптимизации фазы чувствителен к виду начального приближения. При неудачном его выборе процесс оптимизации имеет немонотонный характер. На рис. 3 изображена зависимость критерия J от номера приближения. Кривая 1 относится к рассмотренному выше случаю предварительной фокусировки. Кривая 2 иллюстрирует динамику итерационного процесса для случая, когда начальный фазовый профиль вычислен согласно алгоритму предварительной коррекции [3]. Видно, что данное начальное приближение является более удачным, так как значение критерия J практически сразу выходит на стационарный уровень.

Представляет интерес исследовать эффективность алгоритма оптимизации при других значениях нелинейного параметра R . На рис. 4 с помощью кривой 1 изображена зависимость J от номера приближения при $R = -20$, кривая 2 соответствует $R = -28$. Видно, что с ростом нелинейного параметра R устойчивость алгоритма ухудшается.

В случае сред с сильной нелинейностью сходимость алгоритма улучшается, если смягчить требование к условиям передачи энергии. В частности, можно сохранить требование максимальности энергии, попадающей в пределы выходной апертуры, но помещать ее центр каждый раз в точку с пиковой интенсивностью. Соответствующие результаты при $R = -28$ изображены на рис. 4, кривая 3.

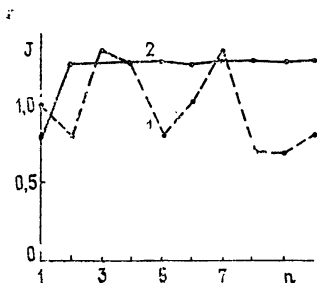


Рис. 3.

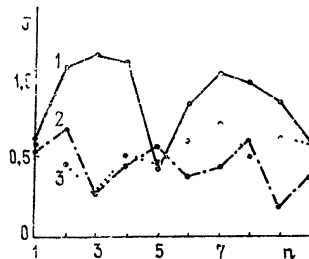


Рис. 4.

Приведенные результаты свидетельствуют об эффективности предлагаемого алгоритма оптимальной фокусировки.

В заключение отметим, что метод не гарантирует, вообще говоря, достижения глобального максимума введенного здесь функционала. Эффективность алгоритма может быть повышена, по-видимому, с помощью удачного выбора итерационной процедуры коррекции фазового фронта.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Herrmann, J. Opt Soc Am, **67**, 290 (1977).
2. L. S. Bradley, J. Herrmann, Appl. Opt., **13**, 331 (1974)
3. К Д Егоров, В П Кандидов, I Всесоюзная конференция «Проблемы управления параметрами лазерного излучения», Тезисы докладов, ч I, Ташкент, 1978, стр 170
4. М А Воронцов, I Всесоюзная конференция «Проблемы управления параметрами лазерного излучения», Тезисы докладов, ч II, Ташкент, 1978, стр 157
5. Ф П Васильев, М А Воронцов, О. А. Литвинова, ЖВМ и МФ, № 4, 57 (1979)
6. Л Рабинер, Б Гоулд, Теория и применение цифровой обработки сигналов, изд Мир, М., 1978
7. J. A. Fleck, J. R. Morris, M D Feit, Appl Phys, **10**, 129 (1976).
8. В. Е Захаров, В. В. Соболев, В С. Сынах, ЖЭТФ, вып 1, 136 (1970)

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
22 января 1979 г.

OPTIMIZATION OF LIGHT BEAM FOCUSING IN MOVING NONLINEAR MEDIA

M A Vorontsov, S S Chesnokov

A numerical investigation of the gradient optimization method of a light beam propagating in a nonlinear medium is carried out. Peculiarities of utilization of the gradient method are discussed. Integral relations have been found for the conjugated system of equations. Results obtained testify to the efficiency of the algorithm of the optimal correction of the beam initial phase profile.

УДК 538.574.4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ОТ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ВОЛНЫ В ВИДЕ РЯДА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЮ ПРИЧИННОСТИ

А. Н. Малахов, А. И. Саичев

Получены точные интегродифференциальные уравнения для прошедшей и отраженной от случайно-неоднородного слоя волн В пренебрежении обратным рассеянием из них следует уравнение для проходящей слой волны, пределы применимости которого не ограничены френелевским приближением, характерным для параболического уравнения квазиоптики Показано, что решение уравнений для прошедшей и отраженной от случайно-неоднородного слоя волн может быть записано в виде ряда по кратности обратного рассеяния, каждое слагаемое которого учитывает многократное рассеяние вдоль распространения волны и удовлетворяет условию причинности. В приближении однократного обратного рассеяния и крупномасштабных неоднородностей среды получены и проанализированы уравнения для первых двух моментов рассеянной назад волны.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих физических приложениях важно знать статистические характеристики волны, отраженной от слоя случайно-неоднородной среды. До последнего времени обратное рассеяние от неплоскостной случайно-неоднородной среды удавалось достаточно строго рассчитать только в борновском приближении. В то же время за последние годы была развита статистическая теория многократно рассеянных волн в пренебрежении обратным рассеянием (см., например, [1, 2]), существенно использующая то обстоятельство, что при этом волна удовлетворяет принципу причинности. Для применения этой теории к задачам обратного рассеяния необходимо выразить рассеянную назад волну через вспомогательные волны, удовлетворяющие условию причинности. В данной работе получены точные уравнения для прошедшей и отраженной от слоя случайно-неоднородной среды волн, решения которых представлены в виде ряда по кратности обратного рассеяния. Причем каждый член этого ряда учитывает многократное рассеяние вперед и выражается через функции, удовлетворяющие условию причинности. Это позволило применить для статистического анализа обратного рассеяния методы, развитые для статистического описания волн, удовлетворяющих условию причинности. Кроме того, полученный ряд используется для определения пределов применимости параболического уравнения квазиоптики в неоднородной среде. Отметим, что аналогичный ряд по кратности обратного рассеяния был получен в работе [3].

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОШЕДШЕЙ И ОТРАЖЕННОЙ ОТ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ВОЛН

1) За исходное возьмем стохастическое уравнение Гельмгольца:

$$\Delta E + k^2 E = k^2 \varepsilon(x, \rho) E. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon(x, \rho)$ — случайные неоднородности среды ($\langle \varepsilon \rangle \equiv 0$), не равные нулю только внутри слоя $0 \leq x \leq L$.

Перейдем от уравнения (1) к системе уравнений для функций $P(x, \rho)$ и $T(x, \rho)$, связанных с $E(x, \rho)$ равенствами

$$\begin{aligned} E(x, \rho) &= T(x, \rho) + P(x, \rho), \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \hat{M}T(x, \rho) - \hat{M}P(x, \rho). \end{aligned} \quad (2)$$

Оператор \hat{M} и обратный ему \hat{N} равны

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (\dots) (\Delta_q + k^2) \frac{e^{ikR}}{R} dq, \\ \hat{N} &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (\dots) \frac{e^{ikR}}{R} dq, \quad R = \sqrt{(\rho - q)^2}. \end{aligned}$$

Ниже нам понадобятся следующие свойства этих операторов:

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{M} &= \hat{M}\hat{N} = 1, \quad \hat{M}^2 = (\hat{M}^*)^2, \\ \iint_{-\infty}^{\infty} f(\rho) \left\{ \begin{array}{c} \hat{M} \\ \hat{N} \end{array} \right\} \varphi(\rho) d\rho &= \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\rho) \left\{ \begin{array}{c} \hat{M} \\ \hat{N} \end{array} \right\} f(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1) с учетом (2), (3) переходит в систему интегродифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \hat{M}T + \frac{k^2}{2} \hat{N}\varepsilon T + \nu \frac{k^2}{2} \hat{N}\varepsilon P, \\ -\frac{\partial P}{\partial x} &= \hat{M}P + \frac{k^2}{2} \hat{N}\varepsilon P + \nu \frac{k^2}{2} \hat{N}\varepsilon T. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь введен формальный параметр $\nu = 1$.

Чтобы найти граничные условия уравнений (4), заметим, что волну на границах слоя можно записать в виде

$$E(0, \rho) = \mathcal{E}(\rho) + P_L(\rho), \quad E(L, \rho) = T_L(\rho). \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{E}(\rho)$ — падающая волна на границе слоя, $P_L(\rho)$ — отраженная за счет обратного рассеяния в слое волна, $T_L(\rho)$ — прошедшая волна. Согласно условию излучения в пустом пространстве нормальные к слою производные волны равны

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=0} &= \hat{M}\mathcal{E}(\rho) - \hat{M}P_L(\rho), \\ \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=L} &= \hat{M}T_L(\rho). \end{aligned} \quad (6)$$

Сопоставляя (5), (6) с (2), найдём граничные условия уравнений (4):

$$T(0, \rho) = \mathcal{E}(\rho), \quad P(L, \rho) = 0. \quad (7)$$

Из (2), (5), (7) виден физический смысл полей $T(x, \rho)$, $P(x, \rho)$: $T(L, \rho) = T_L(\rho)$, $P(0, \rho) = P_L(\rho)$.

2) Введем еще поля $\tilde{T} = \hat{M}T$, $\tilde{P} = \hat{M}P$. Они удовлетворяют следующей из (4) системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} &= \hat{M}\tilde{T} + \frac{k^2}{2} \varepsilon \hat{N}\tilde{T} + \nu \frac{k^2}{2} \varepsilon \hat{N}\tilde{P}, \\ -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} &= \hat{M}\tilde{P} + \frac{k^2}{2} \varepsilon \hat{N}\tilde{P} + \nu \frac{k^2}{2} \varepsilon \hat{N}\tilde{T}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (4), (8) следует очевидный инвариант

$$\begin{aligned} \frac{i}{2k} \iint_{-\infty}^{\infty} \{ [T(x, \rho) + P(x, \rho)] [\tilde{T}^*(x, \rho)] - \tilde{P}^*(x, \rho) \} - [T^*(x, \rho) + \\ + P^*(x, \rho)] [\tilde{T}(x, \rho) - \tilde{P}(x, \rho)] \} d\rho = \text{const}, \end{aligned} \quad (9)$$

выражающий баланс энергии, протекающей через случайно-неоднородный слой. Если характерный масштаб полей T , P , \tilde{T} , \tilde{P} по поперечным координатам $\rho - l_0 \gg \lambda = 2\pi/k$, то в нулевом приближении по λ/l_0 можно записать $\tilde{T} = ikT$, $\tilde{P} = ikP$, и (9) переходит в

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |T(x, \rho)|^2 d\rho - \iint_{-\infty}^{\infty} |P(x, \rho)|^2 d\rho = \iint_{-\infty}^{\infty} |T_L(\rho)|^2 d\rho. \quad (10)$$

3) Пренебрежению обратным рассеянием соответствует отбрасывание в уравнении для $T(x, \rho)$ (4) последнего слагаемого:

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} = \hat{M}T_0 + \frac{k^2}{2} \hat{N}\varepsilon T_0, \quad T_0(0, \rho) = \mathcal{E}(\rho). \quad (11)$$

Данное уравнение имеет гораздо большую область применимости, чем известное параболическое уравнение квазиоптики (см., например, [1, 2]). Действительно, в отсутствие неоднородностей уравнение (11) дает точное значение волны $E = T(x, \rho)$, удовлетворяющее условию излучения. Таким образом, справедливость уравнения (11) ограничена только условием малости обратного рассеяния, в то время как применимость параболического уравнения связана также с приближением Френеля.

Уравнение (11) дает возможность оценить пределы применимости параболического уравнения квазиоптики, связанные с нарушением применимости приближения Френеля в случайно-неоднородной среде. Будем для простоты считать, что на границу слоя $x=0$ падает плоская волна ($\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{E}$), а неоднородности среды крупномасштабны. При этом в уравнении (11) и в уравнении для $\tilde{T}_0(x, \rho)$ можно с достаточной степенью точности заменить интегральные операторы \hat{M} и \hat{N} на дифференциальные:

$$\hat{M} = i \sqrt{k^2 + \Delta_\rho} \approx ik + \frac{i}{2k} \Delta_\rho - \frac{i}{8k^3} \Delta_\rho^2,$$

$$\hat{N} = -\frac{i}{\sqrt{k^2 + \Delta_\rho}} \approx -\frac{i}{k} + \frac{i}{2k^3} \Delta_\rho.$$

Представив, кроме того, T_0 и \tilde{T}_0 в виде

$$T_0(x, \rho) = u(x, \rho) e^{ikx}, \quad \tilde{T}_0(x, \rho) = ik\tilde{u}(x, \rho) e^{ikx},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta_\rho u - \frac{1}{4k^2} \Delta_\rho^2 u &= k^2 \varepsilon u - \frac{1}{2} \Delta_\rho \varepsilon u, \\ 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \Delta_\rho \tilde{u} - \frac{1}{4k^2} \Delta_\rho^2 \tilde{u} &= k^2 \varepsilon \tilde{u} - \frac{1}{2} \varepsilon \Delta_\rho \tilde{u}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u(0, \rho) = \tilde{u}(0, \rho) = \mathcal{E}.$$

От уравнений (12) — в диффузионном приближении — нетрудно перейти к уравнению для функции когерентности

$$\Gamma(x, s) = \langle u^*(x, \rho) \tilde{u}(x, \rho + s) \rangle,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= -\frac{1}{4} \left(k^2 - \frac{\Delta_\rho}{2} \right) \left[D(s) \left(1 - \frac{\Delta_s}{2k^2} \right) + \frac{a}{2k^2} \right] \Gamma, \\ \Gamma(0, s) &= |\mathcal{E}|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и ниже предполагается, что $\varepsilon(x, \rho)$ — гауссово случайное поле,

$$A(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon(x, \rho) \varepsilon(x + \tau, \rho + s) \rangle d\tau, \quad A = A(0),$$

$$D(s) = A - A(s), \quad a = \Delta_s D(s)|_{s=0}.$$

Решение уравнения (13) неизвестно. Однако, решая его методом последовательных приближений и выбрав за нулевое приближение функцию когерентности в рамках параболического уравнения квазиоптики,

$$\Gamma_0(x, s) = |\mathcal{E}|^2 \exp \left[-\frac{k^2}{4} D(s) x \right],$$

получим, что отношение $\Gamma(x, s)/\Gamma_0(x, s)$ при данном x и при произвольных s мало отличается от единицы лишь на расстояниях

$$(x \langle \varepsilon^2 \rangle k)^3 kl \ll 1,$$

где l — масштаб случайных неоднородностей $\varepsilon(x, \rho)$, которые для простоты предполагаются изотропными и одномасштабными. Из последнего неравенства видно, например, что при $(\langle \varepsilon^2 \rangle k^2 l^2)^3 kl \sim 1$ параболическое уравнение квазиоптики «не работает» в области $x/kl^2 \sim 1$.

2. РЯД ПО КРАТНОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

1) Найдем решение уравнений (4), (8) в виде ряда по кратности обратного рассеяния. Перед этим введем функции Грина $G(y, q; x, \rho)$, $\tilde{G}(y, q; x, \rho)$, $x > y$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \hat{M}G + \frac{k^2}{2} \hat{N} \varepsilon G, \quad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} = \hat{M}G + \frac{k^2}{2} \varepsilon \hat{N} G, \quad (14)$$

$$G(y, q; x, \rho) = G(y, q; y, \rho) = \delta(\rho - q).$$

Из (14), (4) с учетом (3) нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(y, q; x, \rho) P(x, \rho) d\rho = \\ & = -v \frac{k^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(y, q; x, \rho) \hat{N} \varepsilon(x, \rho) T(x, \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по x от y до L и учтя (14), (5), получим

$$P(x, \rho) = v \frac{k^2}{2} \int_x^L dy \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(x, \rho; y, q) \hat{N} \varepsilon(y, q) T(y, q) dq. \quad (15)$$

Подставив (15) в первое уравнение (4), придем к интегродифференциальному уравнению для $T(x, \rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \hat{M}T + \frac{k^2}{2} \hat{N} \varepsilon T + v^2 \frac{k^4}{4} \hat{N} \varepsilon(x, \rho) \int_x^L dy \times \\ & \times \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(x, \rho; y, q) \hat{N} \varepsilon(y, q) T(y, q) dq. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение этого уравнения запишем в виде ряда по степеням v^2 :

$$\begin{aligned} T(x, \rho) &= T_0 + v^2 T_1 + \dots = T_0(x, \rho) + v^2 \frac{k^4}{4} \int_0^x dz \times \\ & \times \iint_{-\infty}^{\infty} dp G(z, p; x, \rho) \hat{N} \varepsilon(z, p) \int_z^L dy \iint_{-\infty}^{\infty} dq \tilde{G}(z, p; y, q) \times \\ & \times \hat{N} \varepsilon(y, q) T_0(y, q) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Этот ряд замечателен тем, что каждое его слагаемое является интегральной комбинацией функций T_0 , G , \tilde{G} , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями Коши и, следовательно, условию причинности. В результате при статистическом анализе любого отрезка этого ряда можно пользоваться методами, развитыми для статистического анализа случайных процессов и волн, удовлетворяющих условию причинности. Подставив (17) в (15), получим ряд по кратности обратного рассеяния для отраженной от слоя волны $P(0, \rho) = P_L(\rho)$, выраженный через функции, удовлетворяющие условию причинности. Приведем здесь только первое слагаемое этого ряда:

$$P_L(\rho) = \nu P_1 + \nu^3 P_3 + \dots = \frac{k^2}{2} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(0, \rho; x, q) \times \\ \times \hat{N} \varepsilon(x, q) T_0(x, q) dq + \dots, \quad (18)$$

описывающее рассеянное назад поле в приближении однократного обратного рассеяния.

Выражение (18) учитывает эффекты многократного рассеяния по направлению распространения волны, т. е. суммирует бесконечную подпоследовательность обычного ряда теории возмущений. Однако учет многократного рассеяния в (18) эффективен, если только неоднородности среды крупномасштабны вдоль x . Лишь в этом случае существенно многократное рассеяние вперед сопровождается малым рассеянием назад и при малом рассеянии назад последующие слагаемые в рядах (17), (18) много меньше предыдущих.

2) Подробно исследуем малое рассеяние назад в крупномасштабной среде, считая, что входящие в (18) функции T_0 и G с достаточной степенью точности описываются квазиоптическим приближением. Представим $T(x, \rho) = u(x, \rho) e^{ikx}$, $G(y, q; x, \rho) = g(y, q; x, \rho) e^{ik(x-y)}$, где u и g удовлетворяют параболическим уравнениям квазиоптики:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta_\rho u = k^2 \varepsilon u, \quad u(0, \rho) = \mathcal{E}(\rho), \quad (19)$$

$$2ik \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta_\rho g = k^2 \varepsilon g, \quad g(y, q; y, \rho) = \delta(q - \rho).$$

В данном приближении выражение для $P_L(\rho)$ (18) может быть записано в более удобной при усреднении форме

$$P_L(\rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} B(L, q) g(0, \rho; L, q) dq, \quad (20)$$

где $B(x, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$-2ik \frac{\partial B}{\partial x} + \Delta_\rho B = k^2 \varepsilon B + k^2 \varepsilon u e^{2ikx}, \\ B(0, \rho) \equiv 0. \quad (21)$$

В свою очередь, из (20) следует полезная формула для полной интенсивности рассеянной назад волны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P_L(\rho)|^2 d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |B(L, \rho)|^2 d\rho. \quad (22)$$

3) Приведем уравнения, определяющие среднюю отраженную назад волну. Усреднив равенство (20), учтя уравнения (19), (21) и замыкая средние, содержащие $\varepsilon(x, \rho)$, в диффузионном приближении, получим следующее уравнение для средней отраженной волны:

$$\frac{\partial \langle P_L(\rho) \rangle}{\partial L} = - \frac{k^2 A}{4} \Phi(L, 0, \rho) e^{2ikL}, \quad \langle P_0(\rho) \rangle = 0, \quad (23)$$

где

$$\Phi(L, s, \rho) = \iint_{-\infty}^{\infty} \left\langle u_0 \left(L, q + \frac{s}{2} \right) g \left(0, \rho; L, q - \frac{s}{2} \right) \right\rangle dq$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = \frac{i}{k} \Delta_s \Phi - \frac{k^2}{4} [A + A(s)] \Phi, \quad (24)$$

$$\Phi(0, s, \rho) = \mathcal{E}(\rho + s).$$

Перейдем от уравнений (23), (24) к уравнению для функции

$$Q(L, s, \rho) = -\frac{k^2 A}{4} \int_0^L \Phi(x, s, \rho) e^{2ikx} dx,$$

такой, что $Q(L, 0, \rho) = \langle P_L(\rho) \rangle$:

$$kA [\mathcal{E}(\rho + s) - e^{2ikL} \Phi(L, s, \rho)] = \left\{ 8i + \frac{4i}{k^2} \Delta_s - k[A + A(s)] \right\} Q.$$

Последние два слагаемых в правой части этого уравнения малы по сравнению с первым. Решая уравнение методом последовательных приближений, в первом приближении получим

$$\langle P_L(\rho) \rangle = \left\{ -\frac{kA}{8} \left[i + \frac{kA}{4} \right] + \frac{iA}{16k} \Delta_s \right\} [\mathcal{E}(\rho + s) e^{2ikL} \Phi(L, s, \rho)]|_{s=0}.$$

При достаточно больших L $\Phi(L, s, \rho) \rightarrow 0$ и средняя отраженная волна стремится к установившемуся значению, обусловленному корреляцией отраженной волны с неоднородностями среды, которые волна прошла до отражения. Аналогичный результат для средней волны, отраженной от плоскостной среды, был получен в [3].

4) Нетрудно получить также систему четырех уравнений, определяющих функцию когерентности рассеянной назад волны. Однако чтобы избежать громоздких выкладок, приведем вначале уравнения для полной интенсивности обратного рассеяния. Согласно (22), (21)

$$\frac{d}{dL} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle |P_L(\rho)|^2 \rangle d\rho = \operatorname{Re} i k e^{2ikL} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon(L, \rho) B^*(L, \rho) u(L, \rho) \rangle d\rho.$$

Замыкая последнее среднее локальным методом [2], получим

$$\frac{d}{dL} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle |P_L(\rho)|^2 \rangle d\rho = -\frac{k^2}{2} \operatorname{Re} d \Gamma_0(L, 0) + \frac{k^2 A}{2} \operatorname{Re} e^{2ikL} \psi(L, 0), \quad (25)$$

где

$$\psi(L, s) = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle B^*(L, \rho) u(L, \rho + s) \rangle d\rho$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial L} = \frac{i}{k} \Delta_s \psi - \frac{k^2}{4} [A + A(s)] \psi - \frac{k^2}{4} [d + d(s)] \Gamma_0(L, s). \quad (26)$$

Здесь введены обозначения:

$$d(s) = \int_{-\infty}^0 \langle \varepsilon(x, \rho) \varepsilon(x + \tau, \rho + s) \rangle e^{-2ik\tau} d\tau, \quad d = d(0),$$

$$\Gamma_0(L, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\rho) \mathcal{E}^*(\rho + s) d\rho \exp \left[-\frac{k^2}{4} D(s) L \right].$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части (25) обусловлено корреляцией элементарных рассеивателей. Это слагаемое присутствует и в обычном борновском приближении. Второе слагаемое в (25) описывает корреляцию рассеянных волн за счет того, что до и после отражения они распространялись по одним и тем же неоднородностям.

Решение уравнения (26) неизвестно. Поэтому мы оценим вклад второго слагаемого в (25) в интенсивность в предельном случае плоско-слоистой среды. В этом случае

$$\psi(L) = \frac{d\Gamma_0}{A} \left[\exp \left(-\frac{k^2 A}{2} L \right) - 1 \right],$$

а интенсивность, согласно (25), равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle |P_L(\rho)|^2 \rangle d\rho = \frac{k^2 \Gamma_0}{2} L \operatorname{Re} d + \frac{k \Gamma_0}{4} \times \\ \times \operatorname{Re} i d e^{2ikL} \left[1 - \exp \left(-\frac{k^2 A}{2} L \right) \right].$$

Таким образом, хотя оба слагаемых в правой части (25) одного порядка, наличие перед вторым слагаемым осциллирующего множителя приводит к тому, что вклад от него в интенсивность пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от первого. Очевидно, этот вывод справедлив и в случае неплоскослоистой среды. Поэтому, пренебрегая в (25) вторым слагаемым, получим для интенсивности рассеянной волны выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle |P_L(\rho)|^2 \rangle d\rho = \frac{k^2}{2} L \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(\rho)|^2 d\rho \operatorname{Re} d, \quad (27)$$

соответствующее обычному борновскому приближению.

5) Отметим, что эффекты многократного рассеяния вперед существенно влияют на вид функции когерентности рассеянной назад волны. Чтобы показать это, выпишем здесь «усеченную» систему уравнений для функции когерентности рассеянной назад волны, опустив в них, как и выше, слагаемые с осциллирующими множителями.

Рассмотрим функции

$$F(L, y, s, z, \rho, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle B \left(L, R + \frac{y}{2} - \frac{s}{2} - \frac{z}{2} \right) \times \right. \\ \times B^* \left(L, R - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - \frac{s}{2} \right) g \left(0, \rho; L, R + \frac{y}{2} + \frac{s}{2} + \frac{z}{2} \right) \times \\ \left. \times g^* \left(0, \rho + \gamma; L, R - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{s}{2} \right) \right\rangle dR,$$

$$\begin{aligned}
 H(L, y, s, z, \rho, \gamma) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle u \left(L, R + \frac{y}{2} - \frac{s}{2} - \frac{z}{2} \right) \times \right. \\
 & \times u^* \left(L, R - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - \frac{s}{2} \right) g \left(0, \rho; L, R + \frac{y}{2} + \frac{s}{2} + \frac{z}{2} \right) \times \\
 & \left. \times g^* \left(0, \rho + \gamma; L, R - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{s}{2} \right) \right\rangle dR.
 \end{aligned}$$

Искомая функция когерентности рассеянной назад волны равна

$$\langle P_L(\rho) P_L^*(\rho + \gamma) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(L, y, 0, 0, \rho, \gamma) dy.$$

Уравнения для F и H , в которых опущены осциллирующие слагаемые, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial L} = & \frac{i}{k} (\nabla_y \nabla_s) F - \frac{k^2}{4} [D(y+z) + D(y-z) + D(z+s) + \\
 & + D(z-s) - D(y+s) - D(y-s)] F + \frac{k^2}{4} H[d(y-z) + d^*(y-z)], \\
 \frac{\partial H}{\partial L} = & \frac{i}{k} (\nabla_z \nabla_s) H - \frac{k^2}{4} [D(y+z) + D(y-z) + D(y+s) + \\
 & + D(y-s) - D(z+s) - D(z-s)] H, \\
 & F(0, y, s, z, \gamma) = 0, \\
 & H(0, y, s, z, \gamma) = |\mathcal{E}|^2 \delta(\gamma - y - z).
 \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь принято для простоты, что на слой падает плоская волна ($\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{E}$).

Найдем функцию когерентности рассеянной назад волны, положив $D(\rho) = D\rho^2$, что соответствует пренебрежению эффектами случайной фокусировки и учету только флуктуаций углов распространения волны. В этом случае уравнения (28) переходят в

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial L} = & \frac{i}{k} (\nabla_y \nabla_s) F - k^2 D z^2 F + \frac{k^2}{4} H[d(y-z) + d^*(y-z)], \\
 \frac{\partial H}{\partial L} = & \frac{i}{k} (\nabla_z \nabla_s) H - k^2 D y^2 H.
 \end{aligned}$$

Решая их, получим для функции когерентности выражение

$$\langle P_L(\rho) P_L^*(\rho + \gamma) \rangle = \frac{\text{Re } d(\gamma)}{2D\gamma^2} [1 - \exp(-k^2 D \gamma^2 L)].$$

При $\gamma = 0$ оно переходит в (27), а при $\gamma \neq 0$ и достаточно больших L — стремится к уровню $\text{Re } d(\gamma)/2D\gamma^2$. По-видимому, эффект насыщения функции когерентности рассеянной назад волны, обусловленный многократным рассеянием в направлении распространения волны, имеет место и в реальном случайно-неоднородном слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
3. В. Е. Осташев, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 714 (1978).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
9 октября 1978 г.

REPRESENTATION OF A WAVE REFLECTED FROM RANDOMLY
INHOMOGENEOUS LAYER IN THE FORM OF A SERIES SATISFYING THE
CAUSALITY CONDITION

A. N. Malakhov, A. I. Saichev

Exact integro-differential equations have been obtained for waves passing a randomly inhomogeneous layer and reflected from it. If the back scattering is neglected an equation follows for a wave passing the layer the applicability limits of which are not restricted by the Fresnel approximation which is typical of a parabolic quasi-optical equation. It is shown that the solution of equation for waves passing a randomly inhomogeneous layer and reflected from it may be written in the form of back scattering multiple series. Each addend of this series takes into account the multiple scattering along the wave propagation and satisfies the causality condition. In the approximation of single back scattering and large-scale inhomogeneities of the medium equations have been obtained and analyzed for first two moments of a wave scattered backwards.

Аннотации депонированных статей

Ю. П. Мачехин

УДК 537.87; 621.371

**К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН В СРЕДАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Представлены результаты теоретического исследования рассеяния плоской волны на случайных неоднородностях плотности диэлектрического слоя. Показано, что существуют условия, при которых возможна фокусировка рассеянных волн. Эта фокусировка приводит к появлению резонансной волны с амплитудой, превышающей амплитуду падающей волны. Найдены зависимости между корреляционными функциями случайных неоднородностей плотности в среде и параметрами резонансной волны.

Статья депонирована в ВИНТИ,

рег. № 3523—79. Деп. от 8 октября 1979 г.

УДК 538.56 · 519.25

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ОДНОМЕРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Б. С. Абрамович, А. И. Саичев

Исследуются статистические характеристики плоской электромагнитной волны, многократно рассеянной в слое среды с кубичной нелинейностью и мелкомасштабными случайными неоднородностями, ограниченно идеально отражающим зеркалом. Развита метод сведения данной краевой задачи к задаче Коши, позволяющей использовать диффузионное описание. Найден коэффициент отражения волны от слоя. Показано, что совместное влияние нелинейности и неоднородности среды может приводить к многозначности стационарного коэффициента отражения от слоя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблеме описания многократного рассеяния волн в одномерных неупорядоченных линейных системах посвящено достаточное количество работ (см., например, [1-4]). Специфической особенностью рассматриваемых в них задач является наличие двухточечных граничных условий, связанных с необходимостью учета рассеяния назад. При этом нарушается принцип причинности, необходимый для описания статистики подобных волн в диффузионном приближении [5]. Последнюю трудность для волн, распространяющихся в линейных средах, удается обойти, сформулировав вспомогательную одноточечную граничную задачу — задачу Коши, решения которой обычно в достаточной мере определяют статистику исходной двухточечной граничной задачи. На этом пути нетривиальные результаты были получены при изучении статистических свойств локального коэффициента отражения волны в неупорядоченном слое [1-5]. Однако при рассеянии волн в случайно-неоднородной нелинейной среде методы постановки вспомогательной задачи Коши, используемые для волн, распространяющихся в линейных средах, становятся неприемлемыми. Поэтому возникает потребность выработки более общих рецептов сведения двухточечных граничных задач к задачам Коши, применимых и к анализу рассеяния волн в нелинейных случайно-неоднородных средах. Недавно подобные достаточно общие способы постановки вспомогательной задачи Коши были предложены в работах [6, 7].

Отметим, что нелинейность случайно-неоднородной среды приводит к появлению качественно новых эффектов. В частности, при некоторых реализациях флуктуирующей части диэлектрической проницаемости нелинейной среды существует несколько стационарных режимов распределения энергии волны внутри слоя, соответствующих одной и той же интенсивности падающей на слой волны. Последнее отражает тот факт, что в нелинейном случайно-неоднородном слое вид стационарного профиля энергии волны зависит от характера установления стационарного режима, например, от формы переднего фронта падающей волны. Таким образом, в нелинейной случайно-неоднородной среде, в отличие от линейной, математически корректный анализ стационарного режима требует рассмотрения нестационарных процессов установления.

Однако, по-видимому, в первом приближении можно отвлечься от возможности появления неоднозначных решений нестационарной задачи и исследовать статистику волн, многократно рассеянных в нелинейной случайно-неоднородной среде, в стационарной постановке, принятой при анализе рассеяния в линейных средах.

В данной работе, в пренебрежении возможной неоднозначностью стационарных режимов, исследуется статистика многократно рассеянной волны в слое среды с кубической нелинейностью и мелкомасштабными случайными неоднородностями, ограниченном идеально отражающим зеркалом. При этом используется вариант сведения к задаче Коши, не менее общий, чем предложенные в работах [6, 7], но, на наш взгляд, более адекватный рассматриваемой задаче. Выбор упомянутой задачи многократного рассеяния в слое, ограниченном зеркалом, связан со сравнительной простотой получения в данном случае аналитических результатов. Однако использованный здесь метод нетрудно использовать и при решении более сложных задач многократного рассеяния, например, при анализе коэффициента отражения от нелинейного случайно-неоднородного слоя.

В конце статьи на модельном примере, допускающем точное аналитическое решение, показана возможность существования нескольких решений стационарной задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Пусть плоская гармоническая волна $E_0 = E_{00} e^{ikh}$, $k = \omega/c$, падает слева на слой $[0, L]$ среды с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z) = 1 - \Delta\epsilon(z) + \epsilon' |E|^2$, где $\Delta\epsilon(z)$ — случайные неоднородности линейной части диэлектрической проницаемости среды ($\langle \Delta\epsilon \rangle = 0$), ϵ' — постоянный детерминированный параметр, характеризующий степень нелинейности среды. Будем считать также, что при $z = L$ слой ограничен идеальным полностью отражающим зеркалом. При этом, как легко показать (см. также [8]), поведение волны внутри слоя $z \in [0, L]$ описывается следующей системой уравнений:

$$I'_z = k \Delta\epsilon I \sin \psi + 2k\epsilon' I^2 \sin \psi \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad (1)$$

$$\varphi'_z = 2k \Delta\epsilon \cos^2 \frac{\psi}{2} + 4k\epsilon' I \cos^4 \frac{\psi}{2}, \quad \psi = \varphi - 2kz.$$

Введенные здесь функции $I(z)$ и $\varphi(z)$ полностью определяют распределение интенсивности волны внутри слоя

$$|E(z)|^2 = 2I(z) \cos^2 \frac{\psi(z)}{2} \quad (2)$$

и удовлетворяет двухточечным граничным условиям

$$I(0) = I_0 = 2|E_{00}|^2, \quad \varphi(L) = \pi + 2kL, \quad (3)$$

первое из которых вытекает из того факта, что ограниченный зеркалом слой полностью отражает падающую на него волну, а второе есть условие равенства нулю интенсивности волны на зеркале (при $z = L$). Обозначим решения уравнений (1) вместе с (3) следующим образом: $I = I(I_0, z)$, $\varphi = \varphi(I_0, z)$.

2. Чтобы воспользоваться при анализе статистики волны в диффузионном приближении аппаратом уравнений Эйнштейна — Фоккера —

Планка — Колмогорова, необходимо сформулировать вспомогательную задачу Коши. Для этого рассмотрим решения уравнений (1) с граничными условиями Коши:

$$I(0) = I_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (4)$$

Решения уравнений (1) вместе с (4) обозначим $I(I_0, \varphi_0, z)$, $\varphi(I_0, \varphi_0, z)$. Для восстановления по статистике задачи Коши искомым статистическим характеристикам двухточечной граничной задачи необходимо, как будет видно из дальнейшего, ввести вспомогательные функции

$$u(I_0, \varphi_0, z) = \frac{\partial \varphi(I_0, \varphi_0, z)}{\partial \varphi_0}, \quad v(I_0, \varphi_0, z) = \frac{\partial I(I_0, \varphi_0, z)}{\partial \varphi_0},$$

удовлетворяющие согласно (1) уравнениям

$$v'_z = k \Delta \varepsilon v \sin \psi + k \Delta \varepsilon I u \cos \psi + 4k \varepsilon' I \sin \psi \cos^2 \frac{\psi}{2} + \\ + 2k \varepsilon' I^2 u \left(\cos^2 \psi - \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (5)$$

$$u'_z = -k \Delta \varepsilon u \sin \psi + 4k \varepsilon' v \cos^4 \frac{\psi}{2} - 4k \varepsilon' I u \sin \psi \cos^2 \frac{\psi}{2}$$

и следующим из (4) граничным условиям

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0. \quad (6)$$

3. Пусть, для определенности, $\Delta \varepsilon(z)$ — гауссов случайный процесс с функцией корреляции

$$\langle \Delta \varepsilon(z) \Delta \varepsilon(z') \rangle = D \delta(z - z').$$

Предположим далее, что среда является слабонеоднородной ($\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle \ll \ll 1$) и слабонелинейной ($\varepsilon' |E|^2 \ll 1$), так что функции $I(z)$ и $\varphi(z)$ мало меняются на масштабах порядка длины волны $\Delta z \sim k^{-1}$. В этом случае, аналогично тому, как это делается в [8], можно перейти от уравнений (1), (5) к укороченным, статистически эквивалентным уравнениям:

$$I'_\tau = [1 + \zeta_1(\tau)] I, \quad I(0) = I_0, \\ \varphi'_\tau = \zeta_0(\tau) + \zeta_2(\tau) + \beta I, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \\ v'_\tau = [1 + \zeta_1(\tau)] v + I u \zeta_2(\tau), \quad v(0) = 0, \\ u'_\tau = -[1 + \zeta_1(\tau)] u + \beta v, \quad u(0) = 1. \quad (7)$$

Здесь $\tau = \frac{k^2 D}{4} z$, $\tau_L = \frac{k^2 D}{4} L$, $\beta = \frac{6\varepsilon'}{kD}$, а статистически эквивалентные реальным флуктуациям гауссовы функции $\zeta_i(\tau)$ обладают корреляционными свойствами ($\langle \zeta_i \rangle = 0$):

$$\langle \zeta_0(\tau) \zeta_0(\tau + \eta) \rangle = 4 \delta(\eta), \\ \langle \zeta_1(\tau) \zeta_1(\tau + \eta) \rangle = \langle \zeta_2(\tau) \zeta_2(\tau + \eta) \rangle = 2 \delta(\eta), \\ \langle \zeta_i(\tau) \zeta_j(\tau + \eta) \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

4. Будем для простоты интересоваться только статистическими свойствами $I(I_0, L)$, $\varphi(I_0, L)$. Отметим, что эти величины определяют интенсивность волны (2) на выходе из слоя и в окрестности зеркала. Действительно, на левой границе слоя интенсивность волны равна

$$\langle |E(0)|^2 \rangle = 2 I_0 \cos^2 \frac{\varphi(I_0, 0)}{2}$$

и полностью определяется статистикой $\varphi(I_0, 0)$. С другой стороны, в окрестности зеркала можно пренебречь флуктуациями фазы и записать:

$$\langle |E(z)|^2 \rangle = 2 \langle I(I_0, L) \rangle \sin^2 k(z - L).$$

Укажем вначале динамическую процедуру отыскания решений нашей двухточечной граничной задачи по вспомогательной задаче Коши. Решение уравнений (1) вместе с (4)

$$\pi + 2kL = \varphi(I_0, \varphi_0, L) \quad (8)$$

можно рассматривать как уравнение относительно φ_0 , разрешив которое найдем одно из искомых решений сформулированной выше двухточечной граничной задачи $\varphi_0^* = \varphi(I_0, 0)$. Очевидно, второе интересующее нас решение — $I(I_0, L) = I(I_0, \varphi_0^*, L)$. Если $\varphi(I_0, \varphi_0, L)$ — монотонная функция φ_0 ($u(I_0, \varphi_0, L)$ — знакопеременная), то решений нашей двухточечной граничной задачи (1), (3) может быть несколько. Нетрудно, однако, показать, что в линейной случайно-неоднородной среде (как, впрочем, и в нелинейно-однородной среде) $\varphi(I_0, \varphi_0, L)$ — монотонная функция φ_0 , $u(I_0, \varphi_0, L) > 0$, и уравнение (8), как и следовало ожидать, для каждой реализации $\Delta \varepsilon(z)$ имеет единственное решение. В конце статьи мы на модельном примере подробно обсудим возможную неоднозначность стационарных профилей волны в нелинейной неоднородной среде, а пока будем полагать, что, как и в линейном случае, уравнение (8) имеет единственное решение и, следовательно, $u(I_0, \varphi_0, L) > 0$. Если это так, то вероятностное распределение нашей граничной задачи (1), (3) при $z = 0$ и $z = L$ можно, очевидно, записать в виде

$$\begin{aligned} W(I, \varphi_0; L | I_0) &= \langle \delta [I - I(I_0, L)] \delta [\varphi_0 - \varphi(I_0, 0)] \rangle = \\ &= \langle \varphi(I_0, \varphi_0, L) \delta [I - I(I_0, \varphi_0, L)] \delta [\pi + 2kL - \varphi(I_0, \varphi_0, L)] \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее среднее полностью определяется вероятностным распределением четырехмерного марковского процесса $\{I(I_0, \varphi_0, z), \varphi(I_0, \varphi_0, z), v(I_0, \varphi_0, z), u(I_0, \varphi_0, z)\}$:

$$\begin{aligned} f(I, \varphi - \varphi_0, v, u; z | I_0) &= \langle \delta [I - I(I_0, \varphi_0, z)] \delta [\varphi - \\ &- \varphi(I_0, \varphi_0, z)] \delta [v - v(I_0, \varphi_0, z)] \delta [u - u(I_0, \varphi_0, z)] \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

при $z = L$. Действительно, из (9) и (10) легко видеть, что

$$W(I, \varphi_0; L | I_0) = \int_{-\infty}^{\infty} du dv u f(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; L | I_0). \quad (11)$$

Уравнение ЭФПК для $f(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; L | I_0)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial I} I f + \frac{\partial}{\partial v} v f - \frac{\partial}{\partial u} u f - \beta I \frac{\partial f}{\partial \varphi_0} + \beta v \frac{\partial f}{\partial u} =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I f + \frac{\partial}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial v} v f + \frac{\partial}{\partial u} u \frac{\partial}{\partial u} u f + \\
&+ I^2 u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2I u \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial \varphi_0} + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial v} v f - \\
&- 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial u} u f - 2 \frac{\partial}{\partial v} v \frac{\partial}{\partial u} u f,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$f(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; 0 | I_0) = \delta(I - I_0) \delta(\pi + 2kL - \varphi_0) \delta(v) \delta(u - 1).$$

Ниже, используя уравнение (12), соотношение (11) и подобные ему, исследуем некоторые статистические свойства волны в нелинейном случайно-неоднородном слое.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

1. Перейдем от уравнения (12) к уравнению для функции $W(I, \varphi_0; z | I_0)$. Умножив обе части уравнения (12) на u и проинтегрировав его почленно в бесконечных пределах по u и v , получим искомое уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial I} I W - \beta I \frac{\partial W}{\partial \varphi_0} - \beta \Phi = 3 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I W, \tag{13}$$

где функция

$$\Phi(I, \varphi_0; z | I_0) = \int_{-\infty}^{\infty} du dv v f(I, \pi + kL - \varphi_0, v, u; z | I_0)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + I \frac{\partial \Phi}{\partial I} - \beta I \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_0} - 2I \frac{\partial W}{\partial \varphi_0} = 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_0^2} + I \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial \Phi}{\partial I}. \tag{14}$$

Система уравнений (13), (14) вместе с граничными условиями

$$W(I, \varphi_0; 0 | I_0) = \delta(I - I_0) \delta(\pi + 2kL - \varphi_0), \quad \Phi(I, \varphi_0; 0 | I_0) = 0$$

замкнута и полностью определяет искомое вероятностное распределение.

2. Покажем вначале, что при $\beta=0$ (13) и (14) приводят к результатам линейной теории. Действительно, в этом случае уравнение (13) не зависит от Φ и переходит в уравнение ЭФПК, впервые полученное в [8]:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial I} I W = 3 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I W.$$

Решением его является известное в линейной теории гауссово распределение для $\varphi(I_0, 0)$ и логарифмически нормальное для $I(I_0, L)$ [8].

Проинтегрировав уравнение (13) по φ_0 в бесконечных пределах с учетом следующего из (14) равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_0 \Phi(I, \varphi_0; z | I_0) = 0,$$

получим замкнутое уравнение для $\omega_I(I; L|I_0)$ — вероятностного распределения $I(I_0, L)$:

$$\frac{\partial \omega_I}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial I} I \omega_I = \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I \omega_I,$$

$$\omega_I(I; 0|I_0) = \delta(I - I_0).$$

Это уравнение не зависит от β . Поэтому решением его является, как и в линейной среде, логарифмически нормальное распределение

$$\omega_I(I; L|I_0) = \frac{1}{2I \sqrt{\pi \tau_L}} \exp \left[- \frac{\left(\ln \frac{I}{I_0} + \tau_L \right)^2}{4\tau_L} \right],$$

означающее, что для оптически достаточно толстых слоев усредненная по периоду π/k интенсивность волны вблизи зеркала с вероятностью, близкой к единице, принимает значения $I(I_0, L) \ll I_0$. В то же время в отдельных реализациях в окрестности зеркала может сосредоточиваться относительно большая энергия $I(I_0, L) \gg I_0$, в результате чего $\langle I(I_0, L) \rangle = I_0$, т. е. средняя интенсивность волны в окрестности зеркала равна удвоенной интенсивности падающей волны. Более подробный анализ статистики интенсивности волны применительно к линейно-случайно-неоднородному слою проведен в [8].

Не приводя громоздких выкладок, отметим, что статистика $I(I_0, z)$ внутри рассматриваемого случайно-неоднородного слоя также совпадает со статистикой усредненной интенсивности в линейной случайно-неоднородной среде. Последний результат согласуется с интуитивным выводом о том, что дополнительные — за счет нелинейности — медленные изменения $\varphi(I_0, z)$ не должны влиять на поведение усредненной интенсивности внутри слоя.

3. Перейдем к анализу статистики $\varphi(I_0, 0)$, определяющей статистические свойства интенсивности волны на выходе из слоя ($z = 0$). В отличие от $I(I_0, z)$ поведение $\varphi(I_0, z)$ существенно определяется нелинейностью среды. Чтобы найти вероятностное распределение $\varphi(I_0, 0)$, воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \langle u \delta[\varphi - \varphi(I_0, \varphi_0, L)] \rangle = - \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \langle \delta[\varphi - \varphi(I_0, \varphi_0, L)] \rangle.$$

Учитывая, что полностью определяющая обе части этого равенства функция $f(I, \varphi - \varphi_0, v, u, L|I_0)$ зависит от разности $\varphi - \varphi_0$, получаем следующее выражение для вероятностного распределения фазы ω_φ :

$$\omega_\varphi(\varphi_0; L|I_0) = \int_0^\infty dI F(I, \varphi_0; L|I_0). \quad (15)$$

Входящая в (15) функция F равна

$$F(I, \varphi_0; z|I_0) = \int_{-\infty}^\infty dudvf(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; z|I_0)$$

и удовлетворяет согласно (12) уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial I} I F - \beta I \frac{\partial F}{\partial \varphi_0} = 3 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_0^2} + \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I F,$$

$$F(I, \varphi_0; 0|I_0) = \delta(I - I_0) \delta(\varphi_0 - \pi - 2kL).$$

Представим решение этого уравнения в виде свертки:

$$F(I, \varphi_0; z|I_0) = \frac{1}{\sqrt{12\tau}} \int_0^\infty ds P(I, s; z|I_0) \exp\left[-\frac{(s + \varphi_0 - \pi - 2kL)^2}{12\tau}\right], \quad (16)$$

где $P(I, s; z|I_0)$, в свою очередь, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial}{\partial I} IP + \beta I \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial I^2} I^2 P, \quad (17)$$

$$P(I, s; 0|I_0) = \delta(I - I_0) \delta(s).$$

Из (15), (16) следует, что вероятностное распределение $\varphi(I_0, 0)$ имеет вид

$$w_\varphi(\varphi_0; L|I_0) = \frac{1}{\sqrt{12\tau}} \int_0^\infty ds Q(s; L|I_0) \exp\left[-\frac{(s + \varphi_0 - \pi - 2kL)^2}{12\tau}\right], \quad (18)$$

где $Q(s; L|I_0)$ следующим образом связана с введенной выше функцией P :

$$Q(s; L|I_0) = \int_0^\infty dI P(I, s; L|I_0).$$

Функция $Q(s; L|I_0)$ описывает влияние нелинейности среды на статистику $\varphi(I_0, 0)$. При $\beta = 0$ с очевидностью имеем

$$Q(s; L|I_0) = \delta(s),$$

что приводит к известному гауссову распределению $\varphi(0)$ в линейной случайно-неоднородной среде [8]. При $\beta \neq 0$, решая уравнение (17) с помощью преобразования Канторовича — Лебедева [9], получаем

$$Q(s; L|I_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi^3 \beta I_0 s}} \exp\left(-\frac{\tau L}{4} - \frac{\beta I_0}{2s}\right) \int_0^\infty dt t \operatorname{sh} \pi t e^{-\tau L t^2} K_{it}\left(\frac{\beta I_0}{2s}\right), \quad (19)$$

где $K_{it}(x)$ — функция Макдональда мнимого индекса. Таким образом, из (18) и (19) видно, что за счет нелинейности среды вероятностное распределение $\varphi(I_0, 0)$ перестает быть гауссовым и существенно зависит от интенсивности падающей волны.

Приведенное выше выражение для $Q(s; L|I_0)$ довольно сложно для анализа. Поэтому приведем здесь еще простые выражения для $\langle \varphi(I_0, 0) \rangle$ и $\langle \varphi^2(I_0, 0) \rangle$. Эти средние, как и другие моменты $\varphi(I_0, 0)$, удовлетворяют следующим из (15) — (17) замкнутым дифференциальным уравнениям конечного порядка. Решая их, в частности, получим

$$\langle \varphi(I_0, 0) \rangle = \frac{\beta I_0}{2} (e^{2\tau L} - 1),$$

$$\langle \varphi^2(I_0, 0) \rangle = 6\tau L + \frac{\beta^2 I_0^2}{24} (e^{6\tau L} - 3e^{2\tau L} + 2),$$

$$\sigma_\varphi^2 = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = 6\tau L + \frac{\beta^2 I_0^2}{24} (e^{6\tau L} - 9e^{2\tau L} + 8).$$

Таким образом, дисперсия $\varphi(I_0, 0)$ за счет нелинейности экспоненциально растет, что приводит к быстрой рассинхронизации встречных волн на выходе даже оптически не слишком толстых слоев.

4. О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В НЕЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

1. Как уже говорилось, для нелинейной случайно-неоднородной среды возможно появление неоднозначных решений двухточечной граничной задачи (1), (3). При этом количественной мерой неоднозначности служит их среднее число $\langle N(I_0, \beta, L) \rangle$ [7]. Покажем, как это среднее выражается через решение уравнения (12). Для этого заметим, что если система (1), (3) имеет случайное число N решений, то можно записать равенство

$$\begin{aligned} & \langle |u(I_0, \varphi_0, L)| \delta[I - I(I_0, \varphi_0, L)] \delta[\pi + 2kL - \varphi(I_0, \varphi_0, L)] \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} du dv |u| f(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; L|I_0) = \sum_{N=1}^{\infty} \Psi(N, I_0, \beta, L) \times \\ & \quad \times \sum_{n=1}^N W_n(I, \varphi_0; L|I_0, N), \end{aligned} \quad (20)$$

переходящее в равенства (9), (11), если для каждой реализации $\Delta\epsilon(z)$ решение граничной задачи (1), (3) единственно. В (20) введены следующие обозначения: $\Psi(N, I_0, \beta, L)$ — вероятность того, что граничная задача (1), (3) имеет N решений, $W_n(I, \varphi_0; L|I_0, N)$ — вероятностное распределение n -го решения, при условии, что всего решений N .

Проинтегрировав (20) по φ_0 и I , получим следующее выражение для среднего числа решений граничной задачи (1), (3):

$$\langle N(I_0, \beta, L) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dudv |u| R(v, u; L|I_0). \quad (21)$$

Здесь

$$R(v, u; L|I_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_0 dI f(I, \pi + 2kL - \varphi_0, v, u; L|I_0).$$

2. Поскольку решение уравнения (12) неизвестно, найти $\langle N \rangle$ из формулы (21) в нашем случае не удастся. Поэтому рассмотрим здесь более простой случай, когда случайные неоднородности присутствуют только в слое $z \in [-l, 0]$ ($\lambda \ll l \ll L$), таком, что рассеяние волны на этом слое достаточно мало. При этом эволюция $R(v, u; z|I_0)$ в однородном нелинейном слое $z \in [0, L]$ описывается следующим из (12) уравнением

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} + \beta v \frac{\partial R}{\partial u} = 0, \quad (22)$$

а случайно-неоднородный слой $[-l, 0]$ приводит к тому, что граничное условие этого уравнения уже не дельта-образно, как условия уравнения (12). С достаточной степенью точности их можно записать так:

$$R(v, u; 0|I_0) = \delta(u - 1) \frac{\exp(-v^2/2I_0^2 \tau_L)}{I_0 \sqrt{2\pi\tau_L}}. \quad (23)$$

Решая уравнение (22) вместе с (23) и подставляя полученное решение в (21), получим следующее выражение для среднего числа решений двухточечной граничной задачи в данном случае:

$$\langle N(I_0, \beta, L) \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{1/\sqrt{2}\alpha} dx e^{-x^2/2} + \alpha e^{-1/2 \alpha^2} \right],$$

где $\alpha = \beta I_0 \tau_L \tau_l^{1/2}$. Отсюда видно, что при $\alpha \ll 1$ $\langle N \rangle$ близко к единице и неоднозначных решений практически нет. При больших α среднее число решений растет как α и может быть много больше единицы.

Авторы благодарны С. Н. Гурбатову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, 1856 (1969).
2. G. Paranicolaou, SIAM J. Appl. Math., 21, 13 (1971); R. H. Lang, J Math Phys, 14, 1921 (1973).
3. Yu A Ryzhov, Radio Sci, 11, 121 (1976).
4. Б. С. Абрамович, Ю. А. Рыжов, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г. Ростов-на-Дону), Краткие тексты докладов, 1, 311, 1977.
5. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 7, 1040 (1977).
6. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1165 (1977).
7. А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 996 (1978).
8. Б. С. Абрамович, С. Н. Гурбатов, Ю. А. Рыжов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 5, 566 (1979).
9. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их применение, Физматгиз, М.—Л, 1963.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 октября 1978 г.

STATISTIC DESCRIPTION OF WAVES IN A NONLINEAR MEDIUM WITH ONEDIMENSIONAL RANDOM INHOMOGENEITIES

B. S. Abramovich, A. I. Saichev

Statistical characteristics of a plane electromagnetic wave, multiple scattering in a layer of medium with cubic nonlinearity and small-scale random inhomogeneities limited by an ideally reflected mirror are investigated. A method is developed when the given boundary-value problem is reduced to the initial value one which permits to use the diffusive description. The coefficient of the wave reflection from the layer has been found. It is shown that the mutual influence of the nonlinearity and inhomogeneity of the medium makes the stationary coefficient of reflection from the layer multiple-valued.

УДК 530.1

МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

В. В. Борисов

Построено мультипольное разложение составляющих векторов поля при произвольной временной зависимости источника. Общие соотношения применяются при вычислении поля точечного источника, источников, распределенных на сфере, поля движущихся источников в проводящей среде.

Один из методов решения электродинамических задач при непериодической зависимости составляющих электромагнитного поля от времени — неполное разделение переменных [1] с последующим решением уравнения, зависящего от времени и одной пространственной переменной, методом Римана [2]. Подобный подход особенно успешен при анализе электромагнитного поля источников в свободном пространстве [3]. Решение строится непосредственно как функция времени при произвольной временной зависимости источника. Конечный результат — мультипольное разложение составляющих поля.

В настоящей работе, следуя [1, 2], построим мультипольное разложение поля источников электрического типа в проводящей среде при азимутальной симметрии задачи. Дисперсия среды (проводимость) усложняет процедуру построения решения, делает конечные выражения более громоздкими. Использование общих соотношений работы показано на примере электромагнитного поля источников, распределенных на сфере, а также поля движущихся источников. Полученные решения представляют интерес в задачах излучения импульсов и при анализе искажения электромагнитных сигналов в проводящей среде. К непериодическим решениям (источник распределен на расширяющейся сфере) сводится задача описания поля, сопровождающего разлет первоначально покоящейся заряженной оболочки, или поля заряда, движущегося с изменяющейся скоростью.

Из известных в литературе результатов наиболее близко к содержанию настоящей работы изложенное в [4, 5]. Радиально-симметричное решение n -мерного уравнения Клейна — Гордона с источником, сосредоточенным в начале координат, зависимость от времени которого δ -функция Дирака, построено в [4] (скалярная задача). Первое слагаемое мультипольного разложения поля источника электрического типа, сосредоточенного в начале координат в среде — бесстолкновительной плазме, получено в [5]. Временная зависимость — включение гармонических колебаний. Решение в [4, 5] построено с помощью прямого-обратного преобразования Лапласа.

1. *Постановка задачи, построение решения.* Составляющие вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} источников электрического типа при азимутальной симметрии задачи определим из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_{\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial \tau} E_r + \frac{4\pi}{c} (j_r + j_r^{\text{ср}}), \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial \tau} E_{\vartheta} + \frac{4\pi}{c} j_{\vartheta}, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} E_r \right) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} B_{\varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь выбрана сферическая система координат, ϑ — полярный угол, $\tau = ct$, c — скорость света, система единиц Гаусса, среда — проводник, $\varepsilon = \mu = 1$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ — вектор плотности индуцированного в среде тока проводимости, σ не зависит от координат и времени, $\mathbf{j}^{\text{ср}}$ — вектор плотности стороннего тока. Ограничимся случаем радиального тока, $\mathbf{j}^{\text{ср}} = \mathbf{e}_r j_r^{\text{ср}}(\vartheta, r, \tau)$.

Из системы (1) следует уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r B_{\varphi}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta r B_{\varphi}) \right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (r B_{\varphi}) - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} (r B_{\varphi}) = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial \vartheta} j_r^{\text{ср}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем составляющую вектора магнитной индукции B_{φ} . Начальные данные $B_{\varphi} \equiv 0$, $\tau < 0$.

Отделяя угловую переменную, ищем решение в виде $r B_{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau, r) P_n^1(\cos \vartheta)$, $P_n(\cos \vartheta)$ — полином Лежандра, $-\frac{d}{d\vartheta} \times \times P_n(\cos \vartheta) = P_n^1(\cos \vartheta)$. Источник представим в виде $j_r^{\text{ср}}(\tau, r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(\tau, r) P_n(\cos \vartheta)$, $j_n(\tau, r) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 dx P_n(x) j_r^{\text{ср}}(\tau, r, x)$, $x = \cos \vartheta$.

Если плотность радиального тока — произведение углового множителя $F(\vartheta)$ на функцию координат и времени, то $\int_{-1}^1 dx F(x) P_n(x) = F_n$ — число, зависящее от номера n , $x = \cos \vartheta$. Перейдем к новой неизвестной функции $W_n(\tau, r)$ соотношением $V_n(\tau, r) = W_n(\tau, r) \times \times \exp\left(-\frac{2\pi}{c} \sigma \tau\right)$. Тогда

$$r B_{\varphi} = \exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c} \tau\right) \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\tau, r) P_n^1(\cos \vartheta). \quad (3)$$

Коэффициенты $W_n(\tau, r)$ определим из задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} W_n(\tau, r) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} W_n(\tau, r) + \frac{n(n+1)}{r^2} W_n(\tau, r) - \left(\frac{2\pi}{c} \sigma\right)^2 \times \\ \times W_n(\tau, r) = \frac{4\pi}{c} j_n(\tau, r) \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau\right); \quad W_n(\tau, r) \equiv 0, \quad \tau < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение (4) найдем методом Римана. Функция Римана уравнения задачи (4) строится по предложенному в [6] методу (см. также [7]):

$$R_n = P_n \left(\frac{r^2 + r'^2 - (\tau - \tau')^2}{2rr'} \right) + \int_{\tau - \tau'}^{\tau - r'} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + r'^2 - \xi^2}{2rr'} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - \xi^2} \right), \quad (5)$$

$P_n(x)$ — функция Лежандра, $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. При $\sigma = 0$ $R_n(\sigma = 0) = P_n \left(\frac{r^2 + r'^2 - (\tau - \tau')^2}{2rr'} \right)$ — функция Римана уравнения задачи излучения источников в свободном пространстве. Интегрируя (5) по частям, получим другую запись:

$$R_n = I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - (r - r')^2} \right) - \int_{\tau - \tau'}^{\tau - r'} d\xi I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - \xi^2} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \xi} P_n \left(\frac{r'^2 + r^2 - \xi^2}{2rr'} \right).$$

Если $n = 0$, то $R_0(\tau', r', \tau, r) = I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - (r - r')^2} \right)$ — функция Римана телеграфного уравнения. При известной функции $R_n(\tau', r', \tau, r)$ решение задачи (4) согласно [1] —

$$W_n(\tau, r) = \frac{2\pi}{c} \iint_{\Delta} d\tau' dr' R_n(\tau', r', \tau, r) \exp \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau' \right) j_n(\tau', r'). \quad (6)$$

Область интегрирования на плоскости τ', r' — треугольник, ограниченный характеристиками, проходящими через точку $\tau' = \tau, r' = r$, и прямой $\tau' = 0$ [1]. Источник следует продолжить в область отрицательных значений r' . Таким образом, составляющая вектора магнитной индукции

$$B_\varphi = \frac{2\pi}{c} \frac{\exp \left(-\frac{2\pi\sigma}{c} \tau \right)}{r} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\cos \vartheta) \left(n + \frac{1}{2} \right) \iint_{\Delta} d\tau' dr' \times \\ \times \exp \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau \right) \int_{-1}^1 dx P_n(x) j_r^{cr}(\tau, r, x) \left\{ P_n \left(\frac{r^2 + r'^2 - (\tau - \tau')^2}{2rr'} \right) + \right. \\ \left. + \int_{\tau - \tau'}^{\tau - r'} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + r'^2 - \xi^2}{2rr'} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - \xi^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

Составляющие вектора напряженности электрического поля E_r, E_ϑ при известной функции B_φ определяются системой (1). Так, согласно второму из уравнений (1) при нулевых начальных данных $E_\vartheta \equiv 0, \tau < 0$ находим

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \exp \left(-\frac{4\pi\sigma}{c} \tau \right) \sum_{n=1}^{\infty} P_n^1(\cos \vartheta) \int_r^{\tau} d\tau' \exp \left(\frac{4\pi\sigma}{c} \tau' \right) \frac{\partial}{\partial r} W_n(\tau', r).$$

Промежуток интегрирования включает фронт сигнала.

Вычисление E_r по найденным B_φ , E_ϑ согласно последнему уравнению системы (1) сводится к операции дифференцирования. Мультипольное разложение E_r — ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$.

2. *Мультипольное разложение поля источников на сфере.* Рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое источниками, распределенными на поверхности сферы радиуса r_0 . Тогда $j_r^{\text{ст}} = \tilde{j}(r_0, \tau, \vartheta) \delta(r - r_0)$ и $j_n(\tau, r) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 dx P_n(x) \tilde{j}(r_0, \tau, x) \delta(r - r_0) = f_n(\tau, r) \delta(r - r_0)$, $r_0 > 0$. В области отрицательных значений r' $j_n(\tau', r') = f_n(\tau', -r_0) \times \delta(r' + r_0)$, $r' < 0$. Требование $r B_\varphi(\tau, r, \vartheta) \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ и соответственно $W_n(\tau, r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ приводит к условию

$$(-1)^n f_n(\tau', -r_0) = -f_n(\tau', r_0). \quad (8)$$

Для доказательства утверждения (8) подставим в формулу (6), определяющую $W_n(\tau, r)$, $\delta(r' - r_0) f_n(\tau, r_0)$ при $r' > 0$ и $\delta(r' + r_0) \times f_n(\tau, -r_0)$ при $r' < 0$. Для точки наблюдения, расположенной внутри сферы радиуса r_0 , согласно условию (8) получим

$$\begin{aligned} W_n = & \frac{2\pi}{c} \left\{ \int_{\varphi(\tau, r, r_0)}^{\tau+r-r_0} d\tau' \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) f_n(\tau', r_0) P_n\left[\frac{r^2 + r_0^2 - (\tau - \tau')^2}{2rr_0}\right] + \right. \\ & + \int_0^{\tau+r-r_0} d\tau' \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) f_n(\tau', r_0) \int_{\tau-\tau'}^{\tau-r_0} d\xi P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \times \\ & \times I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - \xi^2}\right) + (-1)^n \int_0^{\tau-r-r_0} d\tau' \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) f_n(\tau', r_0) \times \\ & \left. \times \int_{\tau-\tau'}^{\tau+r_0} d\xi P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - \xi^2}\right) \right\}, \\ \varphi = & \begin{cases} 0, & r_0 - r < \tau < r + r_0 \\ \tau - (r + r_0), & \tau > r + r_0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (9)$$

Интеграл с коэффициентом $(-1)^n$ отличен от нуля при $\tau > r + r_0$.

Слагаемые полинома $P_n(x)$, входящего в подынтегральные выражения, $a_{kn}(r^2 + r_0^2 - \xi^2)^k \frac{1}{(2rr_0)^k}$, $k \leq n$, a_{kn} — число, зависящее от k, n , можно представить $W_n(\tau, r) = \sum_k W_{nk}(\tau, r)$. Пусть $f_n(\tau, r_0)$ — функция, ограниченная и непрерывно дифференцируемая по параметру r_0 . Разложим $W_{nk}(\tau, r)$ по степеням r . После вычислений, которые опускаем, можно убедиться в справедливости результата $W_{nk} \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ и, следовательно, $r B_\varphi \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$. Последнее условие выполняется также, если временная зависимость источника — δ -функция, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Таким образом, (9) определяет коэффициенты мультипольного разложения поля источников на сфере радиуса r_0 в проводящей среде, $r < r_0$. В области $r > r_0$ верхний предел первых двух слагаемых (9)

$\tau + r - r_0$ следует заменить на $\tau - r + r_0$, нижний предел интеграла первого слагаемого $\varphi = \begin{cases} 0, & r - r_0 < \tau < r + r_0. \\ \tau - (r + r_0), & \tau > r + r_0. \end{cases}$ Последний из интегралов отличен от нуля, если $\tau > r + r_0$.

Интегрируя по частям (9) или аналогичное ему соотношение при $r > r_0$, получим другую запись решения. Приведем формулу, справедливую при $r > r_0$:

$$\begin{aligned}
 W_n(\tau, r) = & \frac{2\pi}{c} \left\{ \int_0^{\tau-r+r_0} d\tau' f_n(\tau', r_0) \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) \left[I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \times \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \sqrt{(\tau-\tau')^2 - (r-r_0)^2} \right) - \int_{\tau-\tau'}^{r-r_0} d\xi I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-\tau')^2 - \xi^2}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \times \right. \\
 & \times \left. P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \right] + (-1) \int_0^{\tau-r-r_0} d\tau' f_n(\tau', r_0) \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) \left[(-1)^n I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \sqrt{(\tau-\tau')^2 - \xi^2} \right) - \int_{\tau-\tau'}^{r+r_0} d\xi I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-\tau')^2 - \xi^2}\right) \times \right. \\
 & \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \xi} P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \right] \right\}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Слагаемое с коэффициентом (-1) отлично от нуля при $\tau > r + r_0$. В области изменения переменной $r < r_0$ предел первого из интегралов (10) $\tau - r + r_0$ следует заменить на $\tau + r - r_0$. Формулы (3), (9), (10) и определяют мультипольное разложение составляющей вектора магнитной индукции поля источника, распределенного на сфере, в проводящей среде.

Если величина вектора плотности стороннего тока — произведение функций, зависящих от времени, угла и координаты r , т. е. $j_r^{\text{ст}} = j(\tau) F(\vartheta) \frac{\delta(r-r_0)}{r^2}$, то $f_n(\tau, r_0) = (n+1/2) j(\tau) F_n \frac{1}{r_0^2}$. Интерпретация слагаемых коэффициента $W_n(\tau, r)$ и, следовательно, n -го слагаемого мультипольного разложения $B_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\varphi n}$ наглядна при $j(\tau) = \delta(\tau)$. Согласно (3), (9) внутри сферы r_0

$$\begin{aligned}
 B_{\varphi} = & \frac{2\pi}{c} \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c} \tau\right)}{r_0^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) F_n P_n^1(\cos \vartheta) \left\{ h(\tau + r - r_0) \times \right. \\
 & \times \left[P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \tau^2}{2rr_0}\right) + \int_{\tau}^{r-r_0} d\xi P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) \right] - h(\tau - r - r_0) \left[P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \tau^2}{2rr_0}\right) + \right. \\
 & \left. \left. \int_{\tau}^{r+r_0} d\xi P_n\left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \times \right. \right. \right. \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{r-r_0}^{r+r_0} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \Bigg\}.$$

Здесь $h(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$ — единичная функция Хэвисайда. Первое слагаемое n -го члена ряда (11) при $r_0 > r$ связано со сходящейся волной, которая, пройдя начало координат, трансформируется в расходящуюся, что соответствует слагаемым формулы (11), пропорциональным $h(\tau - r - r_0)$. Время прихода фронта второй волны задержано относительно первой на $\Delta t = 2r/c$. Волна, прошедшая начало координат, определяет второе слагаемое и в решении при $r > r_0$. Задержка в этом случае определяется радиусом сферы, на которой распределены источники, и равна $\frac{2r_0}{c}$. Изложенное справедливо для каждого слагаемого мультипольного разложения. В среде без дисперсии ($\sigma = 0$) слагаемые мультипольного разложения равны нулю при $\tau > r + r_0$. Конечное значение проводимости приводит к появлению «следа» — отличному от нуля решению при $\tau > r + r_0$.

Для точечного источника $F(\vartheta) = \delta(\cos \vartheta - 1)$ и ряд (11) суммируется. Если время наблюдения $\tau > r + r_0$, то согласно приведенным выше соотношениям

$$W_n(\tau, r) = - \frac{n + 1/2}{r_0^2} \int_{r-r_0}^{r+r_0} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right).$$

Подстановка в (3) дает

$$B_\varphi = - \left(\frac{2\pi}{c} \right)^2 \sigma \frac{\exp \left(- \frac{2\pi\sigma}{c} \tau \right)}{rr_0^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \vartheta) \times \\ \times \int_{r-r_0}^{r+r_0} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + r_0^2 - \xi^2}{2rr_0} \right) I_1 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) \frac{\xi}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}}.$$

Разложение $\delta(\cos \vartheta - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(\cos \vartheta)$ приводит к результату

$$B_\varphi = \frac{2\pi}{c} \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \right)^2 \exp \left(- \frac{2\pi\sigma}{c} \tau \right) \times \\ \times r \sin \vartheta \frac{I_2 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta)} \right)}{\tau^2 - (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta)}. \quad (12)$$

Выражение (12) — полное поле. Уравнение фронта сигнала $\tau^2 - r^2 + 2rr_0 \cos \vartheta - r_0^2 = 0$ — сфера радиуса τ с центром в точке расположения источника. Результат (12) ограничен временем наблюдения $\tau > r + r_0$, при этом сфера радиуса r освещена при любых углах наблюдения ϑ . Приведенный пример показывает недостаточность описания поля с помощью одного или нескольких слагаемых мультипольного

разложения. Время прихода фронта сигнала зависит от угла наблюдения ϑ , тогда как у каждого слагаемого мультипольного разложения уравнение фронта $\tau - r + r_0 = 0$ ($r > r_0$). Только суммирование ряда $B_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\varphi n}$ приводит к верному результату.

3. Дипольное слагаемое разложения поля источника, сосредоточенного в начале координат. В п. 2 построено мультипольное разложение поля источников электрического типа в проводящей среде по общим формулам (3), (6), (7) при условии, наложенном на составляющую вектора индукции магнитного поля $rB_\varphi(\tau, r, \vartheta) \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$. Рассмотрим поле, создаваемое источником, сосредоточенным в начале координат, когда зависимость от r плотности радиального тока $\frac{\delta(r)}{r^2}$. Построим первое (дипольное) слагаемое мультипольного разложения поля источника $J_r^{\text{ст}} = \frac{\delta(r)}{r^2} j(\tau) F(\vartheta)$ и сравним с дипольным слагаемым поля источников, распределенных на сфере (п. 2).

Согласно (5), (6)

$$W_1 = \frac{3\pi}{c} F_1 \int_{r-\tau}^r dr' \frac{\delta(r')}{r'^2} \int_0^{\tau-r} d\tau' j(\tau') \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) \times \\ \times \left\{ I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - (r - r')^2} \right) - \frac{\sqrt{(\tau - \tau')^2 - (r - r')^2}}{\left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right) r r'} \times \right. \\ \left. \times I_1 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - (r - r')^2} \right) \right\}.$$

С помощью соотношений $\frac{\delta(r')}{r'^m} = (-1)^m \frac{\delta^{(m)}(r')}{m!}$ и $\int_a^b dr' \delta^{(m)}(r' - r) \times \times \Phi(r') = (-1)^m \Phi^{(m)}(r)$, взятых из [4], получим

$$B_\varphi^{(1)} = \frac{\pi}{c} F_1 \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c} \tau\right)}{r} \sin \vartheta \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[h(\tau - r) j(\tau - r) \times \right. \right. \\ \times \exp\left(\left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)(\tau - r)\right) \left. \right] + h(\tau - r) j(\tau - r) \exp\left(\left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)(\tau - r)\right) \times \\ \times \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2 r \right] + \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2 r^2 \int_0^{\tau-r} d\tau' j(\tau') \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \tau'\right) \times \\ \times \frac{I_2\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - \tau')^2 - r^2}\right)}{(\tau - \tau')^2 - r^2} \right\}. \quad (13)$$

В частном случае временной зависимости $\delta(\tau)$ соотношение (13) примет вид

$$B_{\varphi}^{(1)} = \frac{\pi}{c} F_1 \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c}\tau\right) \sin\vartheta}{r} \left\{ \delta'(\tau-r) + \delta(\tau-r) \left[\frac{1}{r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2 r \right] + \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2 r^2 h(\tau-r) \frac{I_2\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2}\right)}{\tau^2 - r^2} \right\}. \quad (14)$$

Дипольное слагаемое (14) при $\tau - r > 0$ (вне фронта сигнала) совпадает с точностью до коэффициента с полем точечного источника (11) при $r_0 \rightarrow 0$.

Приведем дипольное слагаемое разложения поля распределенного источника $j_r^{\text{ср}} = \delta(\tau) F(\vartheta) \frac{\delta(r-r_0)}{r_0^2}$ (11) при $r > r_0$:

$$B_{\varphi}^{(1)} = \frac{3\pi}{c} F_1 \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c}\tau\right) \sin\vartheta}{rr_0^2} \left\{ h(\tau-r+r_0) \left[I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{\tau^2 - (r-r_0)^2}\right) - \frac{\sqrt{\tau^2 - (r-r_0)^2}}{\frac{2\pi\sigma}{c} rr_0} I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - (r-r_0)^2}\right) \right] + \right. \\ \left. + h(\tau-r-r_0) \left[I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - (r+r_0)^2}\right) + \frac{\sqrt{\tau^2 - (r+r_0)^2}}{\frac{2\pi\sigma}{c} rr_0} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - (r+r_0)^2}\right) \right] \right\}.$$

Структура решения в этом случае более сложная. Слагаемое $B_{\varphi}^{(1)}$ — результат интерференции поля источника, расположенного при $r=r_0$ и зеркального с ним — при $r=-r_0$. В окрестности фронта сигнала другая особенность — разрыв первого рода.

При временной зависимости $j(\tau) = h(\tau) \exp\left(i\frac{\omega}{c}\tau\right)$ (включение гармонических колебаний с частотой ω) решение (13) сводится к функциям Ломмеля двух переменных $U_n(\omega, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\omega}{z}\right)^{n+2m} \times$ $\times J_{n+2m}(z)$, $J_{n+2m}(z)$ — функция Бесселя. Преобразуем два последних слагаемых формулы (13) к виду $(-1)^{\frac{\pi}{c}} F_1 \sin\vartheta \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c}\tau\right)}{r} \left(\frac{2\pi\sigma}{c}\right)^2 \times$ $\times r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\tau-r} d\tau' j(\tau') \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c}\tau'\right) \frac{I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-\tau')^2 - r^2}\right)}{\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-\tau')^2 - r^2}}$.

С помощью соотношений, приведенных в [8], получим

$$\begin{aligned}
B_{\varphi}^{(1)} = & \frac{\pi}{c} F_1 \frac{\sin \vartheta \exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c} \tau\right)}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[h(\tau - r) \exp \left[\left(i \frac{\omega}{c} + \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \frac{2\pi\sigma}{c} \right) (\tau - r) \right] \right] + \frac{h(\tau - r)}{r} \exp \left[\left(i \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi\sigma}{c} \right) (\tau - r) \right] + \right. \\
& + (-1) h(\tau - r) r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left[- \exp \left[\left(i \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi\sigma}{c} \right) (\tau - r) \right] + \right. \\
& + I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) + Y_1 \left(m^2 \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau - r), \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) + \\
& + Y_2 \left(m^2 \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau - r), \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) + Y_1 \left(n^2 \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau - r), \right. \\
& \left. \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) + Y_2 \left(n^2 \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau - r), \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - r^2} \right) \left. \right\}, \\
\left(\frac{m^2}{n^2} \right) = & \left(i \frac{\omega}{2\pi\sigma} + 1 \right) \pm \sqrt{\left(i \frac{\omega}{2\pi\sigma} + 1 \right)^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Функции $Y_n(\omega, z)$ связаны с функциями Ломмеля соотношением $Y_n(\omega, z) = i^{-n} U_n(i\omega, iz)$ [8]. Если гармонические колебания модулированы по экспоненциальному закону, $j(\tau) = h(\tau) \exp\left(i \frac{\omega}{c} \tau - \frac{\gamma}{c} \tau\right)$, то в приведенной формуле $i\omega$ следует заменить на $i\omega - \gamma$. Наиболее прост для анализа случай $\omega = 0$, $\gamma \neq 0$, при этом приходим к функциям $U_n(\omega, z)$, зависящим от двух мнимых аргументов.

К функциям Ломмеля сводится также дипольное слагаемое поля источника, распределенного на сфере. Суммарное поле двух источников приводит к более громоздким конечным выражениям.

4. Поле источника, распределенного на расширяющейся сфере. Построим мультипольное разложение составляющей вектора магнитной индукции поля источника, распределенного на сфере, расширяющейся с постоянной скоростью v . Уравнение сферической поверхности $r_0(\tau) = r_0 + h(\tau) \beta \tau$, $\beta = v/c$, r_0 — радиус сферы в момент начала движения. Начальные условия — $B_z(\tau, r, \vartheta) \equiv 0$, $\tau < 0$. Рассматриваемый пример — модель для анализа полей, возникающих при разлете заряженной оболочки, покоящейся до момента $\tau = 0$. Радиальная составляющая вектора плотности тока

$$j_r^* = c \beta h(\tau) \frac{Q}{2\pi} \frac{F(\vartheta)}{\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta F(\vartheta)} \frac{\delta(r - r_0(\tau))}{r^2}. \quad (15)$$

Полный заряд сферы Q , множитель $F(\vartheta)$ характеризует угловое распределение, $F(\vartheta)$ и Q не зависят от координаты r и времени.

К решению задачи излучения точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью поступательно вдоль оси z , придем, если

$$j_r = ec\beta h(\tau) \frac{\delta(r - r_0(\tau))}{r^2} \frac{\delta(\cos \vartheta - 1)}{2\pi}, \quad (16)$$

e — заряд частицы.

Соотношения (15), (16) определяют подынтегральные выражения в формулах п. 1 (6), (7). Продолжение источника в область отрицательных значений r' рассмотрено в п. 2. Используя свойства δ -функции, получим

$$\begin{aligned} W_n(\tau, r) = & \frac{2\pi}{c} F_n j_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \left\{ \int_0^{\frac{\tau - (r - r_0)}{1 - \beta}} ds \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c}s\right)}{(r_0 + \beta s)^2} \times \right. \\ & \times \left[P_n \left(\frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - (\tau - s)^2}{2r(r_0 + \beta s)} \right) + \int_{\tau - s}^{r - (r_0 + \beta s)} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - \xi^2}{2r(r_0 + \beta s)} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left. \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - s)^2 - \xi^2} \right) \right] - \int_0^{\frac{\tau - (r + r_0)}{1 + \beta}} ds \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c}s\right)}{(r_0 + \beta s)^2} \times \right. \\ & \times \left[P_n \left(\frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - (\tau - s)^2}{2r(r_0 + \beta s)} \right) + \int_{\tau - s}^{r + r_0 + \beta s} d\xi P_n \left(\frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - \xi^2}{2r(r_0 + \beta s)} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left. \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - s)^2 - \xi^2} \right) \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

При $\tau < r + r_0$ отличен от нуля только первый из интегралов; $j_0 = \frac{c\beta Q}{2\pi} \left(\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta F(\vartheta) \right)^{-1}$ в задаче о разлете заряженной оболочки и $j_0 = \frac{1}{2\pi} c\beta e$ — при вычислении поля движущегося заряда.

Если, начиная с некоторого момента времени $r < r_0(\tau)$, заряд прошел сферу, на которой находится точка наблюдения, то в формуле (17) верхний предел первого из интегралов $\frac{\tau - (r - r_0)}{1 - \beta}$ следует заменить на $\frac{\tau + r - r_0}{1 + \beta}$. Последнее связано с появлением сходящихся волн в выражении для n -го слагаемого мультипольного разложения. Формулы (3), (17) определяют разложение составляющей вектора магнитной индукции.

В частном случае свободного пространства, $\sigma = 0$, из (3), (17) следует известный результат. В области изменения переменных $r_0(\tau) \leq r$, $\tau > r + r_0$ для источника (16) — движущегося заряда —

$$B_\varphi = \frac{e\beta}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n^1(\cos \vartheta) \int_{\frac{\tau - r - r_0}{1 + \beta}}^{\frac{\tau - r + r_0}{1 - \beta}} ds \frac{P_n \left(\frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - (\tau - s)^2}{2r(r_0 + \beta s)} \right)}{(r_0 + \beta s)^2}.$$

С помощью разложения $\delta(\cos \vartheta - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) P_n(\cos \vartheta)$, $x = \frac{r^2 + (r_0 + \beta s)^2 - (\tau - s)^2}{2r(r_0 + \beta s)}$, суммируя ряд $B_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\varphi n}$, получим

$$B_\varphi \rightarrow r+r_0 = \frac{e\beta^4(1-\beta^2)r \sin \vartheta}{\{(\tau\beta + r_0 - r\beta^2 \cos \vartheta)^2 - (1-\beta^2)[(\beta\tau + r_0)^2 - r^2\beta^2]\}^{3/2}}.$$

Можно убедиться, что формула справедлива и при $r_0(\tau) > r$. Если время наблюдения $\tau < r + r_0$, то приходим к условию $\frac{1}{2rr_0}(r^2 + r_0^2 - \tau^2) < \cos \vartheta < 1$. Уравнение $r^2 + r_0^2 - \tau^2 = 2rr_0 \cos \vartheta$ в цилиндрической системе координат $\rho = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$ $\rho^2 + (z - r_0)^2 = \tau^2$. Следовательно, до момента $\tau = r + r_0$ освещена только часть сферы радиуса r .

Азимутальная составляющая вектора магнитной индукции в переменных ρ , $z_1 = z - r_0$ $B_\varphi = \frac{e\beta(1-\beta^2)\rho}{\{(\tau\beta - z_1)^2 + (1-\beta^2)\rho^2\}^{3/2}}$. Таким образом, исходя из мультипольного разложения, пришли к известному выражению для поля движущегося заряда (см. [9]).

Рассмотрим дипольное слагаемое мультипольного разложения $B_\varphi^{(1)}$, $\sigma \neq 0$. Из (17) при $n = 1$ получим

$$\begin{aligned} B_\varphi^{(1)} = & \frac{3\pi}{c} F_1 j_0 \frac{\exp\left(-\frac{2\pi\sigma}{c}\tau\right) \sin \vartheta}{r} \left\{ \int_0^{\frac{\tau-r+r_0}{1-\beta}} ds \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c}s\right)}{(r_0 + \beta s)^2} \times \right. \\ & \times \left[I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-s)^2 - (r-r_0-\beta s)^2}\right) - \frac{\sqrt{(\tau-s)^2 - (r-r_0-\beta s)^2}}{\frac{2\pi\sigma}{c} r (r_0 + \beta s)} \times \right. \\ & \times \left. I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-s)^2 - (r-r_0-\beta s)^2}\right) \right] + \int_0^{\frac{\tau-r-r_0}{1+\beta}} ds \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c}s\right)}{(r_0 + \beta s)^2} \times \quad (18) \\ & \times \left[I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-s)^2 - (r+r_0+\beta s)^2}\right) + \frac{\sqrt{(\tau-s)^2 - (r+r_0+\beta s)^2}}{\frac{2\pi\sigma}{c} r (r_0 + \beta s)} \times \right. \\ & \left. \left. \times I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau-s)^2 - (r+r_0+\beta s)^2}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуем аргументы цилиндрических функций $(\tau-s)^2 - (r-r_0-\beta s)^2 = \left(s\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\tau-\beta(r-r_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{r-r_0-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$, $(\tau-s)^2 - (r+r_0+\beta s)^2 = \left(s\sqrt{1-\beta^2} - \frac{\tau+\beta(r+r_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{r+r_0+\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$. Здесь $\tau_1 = \frac{\tau-\beta(r-r_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $r_1 - r_{01} = \frac{r-r_0-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — преобразование τ и $r-r_0$ в си-

стему отсчета, движущуюся со скоростью источника v . Преобразование τ и $r + r_0$ — в систему, движущуюся со скоростью зеркального источника — v : $\tau_2 = \frac{\tau + \beta(r + r_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $r_1 + r_{01} = \frac{r + r_0 + \beta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Введение $\tau_1, \tau_2, r_1 \pm r_{01}$ упрощает структуру решения. Интегралы, составляющие первое слагаемое (18),

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^{\tau_1 - r_1 + r_{01}} ds_1 \exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \frac{s_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) \frac{I_0\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(s_1 - \tau_1)^2 - (r_1 - r_{01})^2}\right)}{\left(r_0 + \beta s_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^{\tau_1 - r_1 + r_{01}} ds_1 \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \frac{s_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)}{\left(r_0 + \beta s_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^3} \sqrt{(s_1 - \tau_1)^2 - (r_1 - r_{01})^2} \times$$

$$\times I_1\left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(s_1 - \tau_1)^2 - (r_1 - r_{01})^2}\right)$$

— переменная интегрирования $s_1 = s \sqrt{1 - \beta^2}$. В обозначениях движущейся системы отсчета аргументы цилиндрических функций и пределы интегрирования совпадают с результатами для поля источника на неподвижной сфере. В частных случаях $\beta \ll 1$, $\beta \approx 1$ и $r_0 + \frac{\beta s_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx r_0$ выражения (18) упрощаются. Интегралы сводятся к функциям $Y_n(\omega, z)$

$$[8] \text{ (см. п. 3), } \omega_{\pm} = \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau_1 - r_1 + r_{01}) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \\ \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \end{pmatrix} = \frac{2\pi\sigma}{c} (\tau - r +$$

$$+ r_0) \begin{pmatrix} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{\tau^2 - (r - r_0)^2}.$$

Формулы п. 1 позволяют построить решение и при произвольной зависимости скорости β от времени. Так, при поступательном движении точечного заряда вдоль оси z уравнение движения $\vartheta_0 = 0$, $r_0(\tau) = r_0 + \int_0^{\tau} ds \beta(s)$, скорость $\beta(\tau) = \frac{v(\tau)}{c} = \frac{dr_0(\tau)}{d\tau}$, в области переменных $r_0(\tau) < r$, $r - r_0 < \tau < r + r_0$ согласно (3), (6), (7)

$$B_{\varphi} = \frac{e}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n^1(\cos \vartheta) \int_0^{\tau} ds \frac{\beta(s)}{\left(r_0 + \int_0^s \beta(s) ds\right)^2} \times$$

$$\times \left[P_n \left(\frac{r^2 + \left(\int_0^s ds \beta(s) + r_0 \right)^2 - (\tau - s)^2}{2r \left(r_0 + \int_0^s ds \beta(s) \right)} \right)^{r - \left(r_0 + \int_0^s ds \beta(s) \right)} + \int_{\tau-s}^{\tau} d\xi \times \right. \\ \left. \times P_n \left(\frac{r^2 + \left(\int_0^s ds \beta(s) + r_0 \right)^2 - \xi^2}{2r \left(r_0 + \int_0^s ds \beta(s) \right)} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\frac{2\pi\sigma}{c} \sqrt{(\tau - s)^2 - \xi^2} \right) \right].$$

Здесь предел интегрирования $\hat{\tau}$ — функция аргумента $\tau - r + r_0$ — определяется соотношением $\tau - r + r_0 = \int_0^{\hat{\tau}} ds \frac{1}{1 + \beta(s)}$. Ряд суммируется. Анализ решения требует отдельного рассмотрения в каждом случае явно заданной зависимости $r_0(\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, Физматгиз, М., 1957; ДАН СССР, 14, № 1, 13 (1937); 14, № 2, 59 (1937).
2. А. В. Мананкова, И. И. Кононов, Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, Ленинград, № 12, 208 (1973).
3. В. В. Борисов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 12, 1862 (1976).
4. Б. Поль Ван-Дер, Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, М., 1952.
5. G. Ching-Lin-Jian, IEEE Trans. Ant. and Propag., AP-23, № 1, 83 (1975).
6. М. Н. Олевский, ДАН СССР, 37, № 3, 337 (1952).
7. П. М. Колесников, Введение в нелинейную электродинамику, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
8. П. И. Кузнецов, Р. А. Стратонович, Распространение электромагнитных сигналов в многопроводных системах, ВЦ АН СССР, М., 1958.
9. Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд. Мир, М., 1965.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
22 декабря 1978 г.

MULTIPLE EXPANSION OF ELECTRIC TYPE SOURCE FIELD IN A CONDUCTING MEDIUM

V. V. Borisov

The multiple expansion of components of the field vectors has been built for an arbitrary time dependence of the source. General relations are used when calculating the field of the point source, sources distributed by the sphere, the field of sources in a conducting medium.

УДК 535.42

ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗОВОЙ ГЕОМЕТРИИ СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ ЕГО ДИФРАКЦИИ НА УЛЬТРАЗВУКЕ

В. Е. Осташев

Дифракция света на ультразвуке рассматривается на основе уравнения, описывающего многократно рассеянные вперед волны. Задача сводится к системе уравнений для амплитудно-фазовых множителей спектров разных порядков. Рассматриваются приближенные решения этой системы, когда интенсивность однократного рассеяния достаточно мала, а условие Брегга не выполняется. В этом режиме изменением амплитуды спектра нулевого порядка можно пренебречь. Приращение же в фазе в спектре нулевого порядка позволяет изменять фазовую геометрию светового пучка. Учет изменения амплитуды спектра нулевого порядка осуществляется в трехволновом приближении.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ СПЕКТРОВ РАЗНЫХ ПОРЯДКОВ

Системы уравнений для амплитуд спектров разных порядков, возникающих при дифракции плоской световой волны на ультразвуке, получены в целом ряде работ (см., например, [1-3]). Поскольку для случая светового пучка как эти системы, так и самое сведение к ним рассматриваемой задачи требуют некоторой модификации, в разд. 1 мы укажем еще на один вывод подобной системы уравнений, в котором на невозмущенное световое поле E^0 заранее не наложено никаких ограничений. При этом полученная ниже система уравнений (1.4) оказывается справедливой не только при $K \ll k$, но и при $K \lesssim k$, где K и k — волновые числа ультразвука и света.

Итак, пусть ультразвуковая волна, ограниченная плоскостями $x = 0$, $x = L$, распространяется вдоль оси y . Пусть также из области $x < 0$ на эту волну в плоскости x, y под углом θ_0 к оси x падает световое поле $E^0(x, y)$. В этом случае, как хорошо известно [4, 5], дифракция света на ультразвуке адекватно описывается двумерным волновым уравнением для светового поля E^* :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E(x, y) + k^2 [1 + \Delta n \cos(Ky + \varphi)] E(x, y) = 0$$

$$(0 < x < L).$$
(1.1)

Решение уравнения (1.1) содержит как рассеянные вперед, так и рассеянные назад волны. Последними можно пренебречь [4, 5], так как величина Δn , пропорциональная максимальному изменению показателя преломления среды, очень мала. В результате от уравнения (1.1) переходим к интегральному уравнению, описывающему все многократно рассеянные вперед волны [6, 7]:

* Мы считаем, что показатель преломления среды в отсутствие звука $n_0 = 1$. Для того, чтобы рассмотреть случай с $n_0 \neq 1$, k следует заменить на kn_0 , а Δn — на $\Delta n/n_0$.

$$E(x, y) = E^0(x, y) + k^2 \Delta n \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 H_0^{(1)}(x - x_1, y - y_1) \times \\ \times \cos(Ky_1 + \varphi) E(x_1, y_1), \quad (1.2)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля.

Уравнение (1.2) будет исходным для дальнейшего анализа. Заметим, что пренебрежение рассеянными назад волнами обычно осуществляется переходом от (1.1) к параболическому уравнению (см., например, [1, 5]). В (1.2) переход к параболическому приближению означает замену функции Грина (в данном случае $H_0^{(1)}$) на ее френелевское приближение, а поля E^0 — на подчиняющееся параболическому уравнению поле, совпадающее с E^0 при $x = 0$ [8]. Поэтому там, где справедливо малоугловое приближение, решение уравнения (1.2) дает уточненные, по сравнению с решением параболического уравнения, выражения для E . Если же малоугловое приближение несправедливо (K сравнимо с k), то дифракционные спектры должны находиться как решение (1.2).

Представим поле E в виде суммы дифракционных спектров, которые, в свою очередь, разложим по плоским волнам:

$$E(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[i \sqrt{k^2 - (p + Kn)^2} x + \right. \\ \left. + i(p + Kn)y + i\varphi n + i \frac{\pi}{2} n \right] e_n(x, p) e^0(p - p_0). \quad (1.3)$$

В (1.3) $p_0 = k \sin \theta_0$, а $e^0(p)$ — амплитуды плоских волн, входящих в спектральное разложение E^0 . Подставляя (1.3) в (1.2), получаем искомую систему уравнений для определения амплитудно-фазовых множителей e_n спектров разных порядков*:

$$\frac{\partial e_n(x, p)}{\partial x} = \alpha(p + Kn) \{ \exp[-ixf(p + K(n-1))] e_{n-1}(x, p) - \\ - \exp[ixf(p + Kn)] e_{n+1}(x, p) \}, \quad e_0(0, p) = 1, \quad (1.4) \\ e_n(0, p) = 0 \text{ при } n \neq 0.$$

В (1.4)

$$\alpha(p) = \frac{k^2 \Delta n}{4 \sqrt{k^2 - p^2}}, \quad f(p) = \sqrt{k^2 - (p + K)^2} - \sqrt{k^2 - p^2}. \quad (1.5)$$

Произведение $2\alpha(p=0)x$ является параметром Рамана — Ната (см., например, [9]), а $f(p)$ — разностью проекций волновых векторов двух соседних спектров на ось x .

2. ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА e_0 ПРИ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Мы будем рассматривать приближенные решения системы (1.4), когда интенсивность однократного рассеяния невелика, а условие Брегга** не выполняется. При этом главным образом нас будут интересовать

* Для того, чтобы из (1.4) получить цепочку уравнений Рамана — Ната [1], в этой системе уравнений надо перейти к координатному представлению и малоугловому приближению

** Условие Брегга имеет вид $|\Delta p| \ll k/Kx$ [5], где Δp — отклонение p от плюс или минус $K/2$.

выражения для амплитудно-фазового множителя спектра нулевого порядка e_0 . При достаточно малой интенсивности однократного рассеяния изменением амплитуды e_0 под действием ультразвука можно пренебречь, т. е. считать, что в e_0 изменяется лишь фаза. Этот случай мы рассмотрим в данном и следующем разделах. В разд. 4 будет учтено влияние изменения амплитуды e_0 .

Обратимся к системе (1.4). Введем обозначения

$$\alpha_n = \alpha(p + Kn), \quad h_n = \sqrt{k^2 - (p + Kn)^2} - \sqrt{k^2 - p^2}.$$

Система (1.4) заменой $e_n = V_n e^{-ixh_n}$ сводится к системе линейных дифференциальных уравнений для V_n с постоянными коэффициентами. (Отметим, что $V_0 \equiv e_0$.) Характеристическое уравнение полученной таким образом системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -i\lambda & -\alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & i(h_1 - \lambda) & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_{-1} & 0 & i(h_{-1} - \lambda) & 0 & \alpha_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & i(h_2 - \lambda) & 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\alpha_{-2} & 0 & i(h_{-2} - \lambda) & 0 & \alpha_{-2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

Если $\Delta n = 0$ ($\alpha_n = 0$), то корни уравнения (2.1) $\lambda_l = h_l$. При этом, конечно, все $V_n = e_n = 0$, кроме $e_0 = 1$. (Амплитуде 1 соответствует $\lambda_0 = 1$.) При $\Delta n \neq 0$ λ_l определить не удастся. Заметим, что при достаточно малых Δn (малые α_n) амплитуды всех волн, входящих в e_0 , за исключением волны, соответствующей λ_0 , малы. В этом случае можно считать, что $e_0 = \exp(i\lambda_0 x)$. Для вычисления λ_0 учтем, что $\lambda_0 \sim \alpha^2$ (см. (2.2)).

Представим также определитель в (2.1) в виде суммы произведений его членов. В этой сумме оставим только члены, пропорциональные α^2 (их три), а остальными членами $O(\alpha^2)$ пренебрежем. В результате (2.1) сводится к уравнению

$$\left[\lambda_0 + \alpha_0 \left(\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_{-1}}{h_{-1}} \right) \right] \prod_{l=1}^{\infty} h_l h_{-l} = 0,$$

откуда с учетом определения α_n и h_n получаем следующее выражение для e_0 в рассматриваемом режиме:

$$e_0(x, p) = \exp \left\{ ix \alpha(p) \left[\frac{\alpha(p - K)}{f(p - K)} - \frac{\alpha(p + K)}{f(p)} \right] \right\}. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) справедливо при $|p|, K \leq k$.

В дальнейшем ограничимся случаем $|p|, K \ll k$. В этом случае из (2.2) и (1.5) получаем

$$e_0(x, p) = \exp \left[- \frac{ixk^3 \Delta n^2}{4(4p^2 - K^2)} \right]. \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что для плоской световой волны приращение в фазе, вызванное ультразвуком, зависит от направления распространения этой волны. Если же на ультразвук падает пучок, то плоские волны, входящие в его спектральное разложение, получают разные приращения в фазе. Поэтому в рассматриваемом режиме малой интенсивности одно-

кратного рассеяния ультразвук может изменять фазовую геометрию пучка.

При $|p| \ll K$, разлагая знаменатель в (2.3) с точностью до членов $O(p^2)$, получаем

$$\epsilon_0(x, p) = \exp\left(iu\eta + \frac{ixp^2}{k}\eta\right), \quad (2.4)$$

где $u = \frac{xK^2}{4k}$ — волновой параметр, $\eta_0 = \frac{k^4 \Delta n^2}{K^4}$ — максимальная интенсивность однократного рассеяния при нормальном падении. Первое слагаемое под знаком экспоненты в (2.4) приводит к одинаковому приращению в фазе под действием ультразвука для всех плоских волн, входящих в спектральное разложение пучка, второе — к квадратичному изменению фазы в зависимости от направления.

При $|p| \gg K$ положим $p = p_0 + q$, где $|q| \ll |p_0|$, а $|p_0|$ характеризует направление распространения пучка. Разлагая знаменатель в (2.3) с точностью до членов $O(q^2)$, получаем

$$e_0(x, p_0, q) = \exp\left(-iuv + iu\frac{2q}{p_0}v - iu\frac{3q^2}{p_0^2}v\right), \quad (2.5)$$

где $v = \frac{k^4 \Delta n^2}{4K^2 p_0^2}$ — максимальная интенсивность однократного рассеяния при наклонном падении. Первое и третье слагаемые под знаком экспоненты в (2.5) приводят к уже рассмотренному изменению в фазе e_0 (см. (2.4)). Второе же слагаемое приводит к повороту фазового фронта пучка.

При выводе (2.4), (2.5) мы пренебрегли изменением амплитуды e_0 , что правомочно при малых интенсивностях однократного рассеяния η и v . С определенным произволом будем считать, что изменением амплитуды e_0 можно пренебречь, если $1 \geq e_0^2 \geq 0,9$. Это накладывает на η и v ограничения $2\eta, 2v \leq 1/9$ (см. (4.3), (4.4)), которые мы и будем считать условиями применимости (2.4), (2.5).

Для стоячей ультразвуковой волны $\Delta n = \Delta n_0 \cos \Omega t$ (Ω — частота ультразвука, t — время). В этом случае из (2.3) следует, что спектр нулевого порядка модулирован частотой 2Ω и ее гармониками:

$$e_0(x, p) = \exp\left[-\frac{ixk^3 \Delta n^2}{8(4p^2 - K^2)}\right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i2\Omega mt - i\frac{\pi}{2}m\right) \times \\ \times \operatorname{Im}\left(\frac{xk^3 \Delta n^2}{8(4p^2 - K^2)}\right). \quad (2.6)$$

Для бегущей ультразвуковой волны $\Delta n = \operatorname{const}$ и частота спектра нулевого порядка совпадает с частотой падающего света.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ФАЗОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ГАУССОВА СВЕТОВОГО ПУЧКА

В этом разделе рассмотрим изменение фазовой геометрии сфокусированного гауссова светового пучка

$$e^0(p) = \frac{\exp\left[-\frac{p^2}{2(1/a^2 + ik/F)}\right]}{\sqrt{2\pi(1/a^2 + ik/F)}} \quad (3.1)$$

под действием ультразвука, когда интенсивность однократного рассеяния мала и e_0 дается выражением (2.3). В (3.1) a — диаметр пучка при $x = 0$ ($a \gg 1/K$), $F > 0$ — фокусное расстояние. Сначала рассмотрим случай $|p| \ll K$. Подставляя (3.1) и (2.4) в (1.3) и производя интегрирование, получаем следующее выражение для спектра нулевого порядка:

$$E_0(x, y) = \left[\frac{(1-ig) \left(1 - \frac{ika^{21}}{F}\right)}{1+g^2} \right]^{1/2} \exp \left[ikx + iu\eta - \frac{y^2(1-ig)}{2d_0^2(1+g^2)} \right], \quad (3.2)$$

где $d_0 = \frac{Fa}{\sqrt{F^2 + k^2 a^4}}$ — минимальный диаметр пучка, $g = g(\eta) = -\frac{ka^2}{F} + \frac{x(1-2\eta)}{kd_0^2}$. Из (3.2) следует, что диаметр пучка $d = d_0 \sqrt{1+g^2}$, а радиус кривизны фазового фронта* $R = -\frac{kd_0^2(1+g^2)}{g}$.

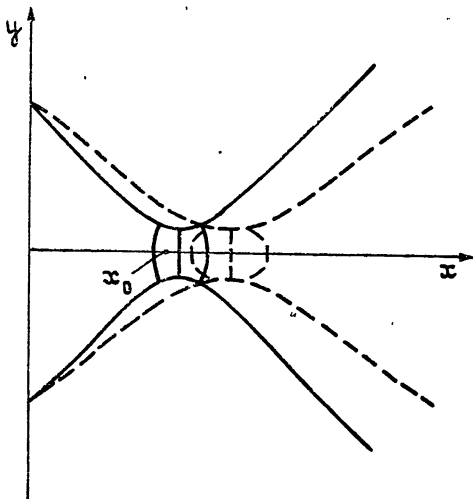


Рис. 1.

Изменение d и R при включении ультразвука показано на рис. 1, где сплошным кривым соответствует случай $\eta = 0$ ($\Delta n = 0$), пунктирным — $\eta > 0$. На рис. 1 изображены максимально вогнутые ($g(0) = g(\eta) = -1$), плоские ($g(0) = g(\eta) = 0$) и максимально выпуклые ($g(0) = g(\eta) = 1$) фазовые фронты. Из рис. 1, а также из выражений для d и R видно, что включение ультразвука эквивалентно увеличению масштаба по оси x в $1/(1-2\eta)$ раз. При различных значениях $g(0)$ и $g(\eta)$ возможны различные изменения R . Пусть, например, $-1 < g(0) < 0$, т. е. в отсутствие ультразвука мы рассматриваем R в точке x_0 , положение которой изображено на рис. 1. При включении ультразвука плоский фазовый фронт смещается вправо по оси x , так что в точке x_0 фазовый фронт пучка всегда остается вогнутым. Если при этом $\eta = \eta_0 = \frac{kd_0^2}{2L} \left(g(0) - \frac{1}{g(0)} \right)$, то R на выходе из ультразвука не изменяется. При $\eta < \eta_0$ R уменьшается, при $\eta > \eta_0$ — увеличивается.

* В выражении для R пренебрегаем несущественным при $K \ll k$ изменением волнового числа света.

Другие возможные случаи положения x_0 рассматриваются аналогично.

Интересен случай $g(0) = 1$, $g(\eta) = -1$, когда максимально выпуклый фазовый фронт на выходе из ультразвука при включении последнего становится максимально вогнутым. При этом $L = F \left(1 + \frac{F}{ka^2}\right)$,

$$\eta = \frac{F}{ka^2 + F}. \quad \text{Видно, что этот случай реализуется только для пучка,}$$

заметно меняющего свой диаметр, когда F/ka^2 мало. Заметим, что для коллимированного пучка ($F = \infty$) кривизну фазового фронта при включении ультразвука можно существенно менять лишь там, где началось дифракционное уширение пучка. При этом ультразвук не может полностью компенсировать дифракционную расходимость пучка.

Пусть теперь световой пучок (3.1) падает под углом θ_0 на ультразвук $\left(\frac{\pi}{2} \gg |\theta_0| \gg \frac{K}{2k}\right)$. В этом случае, используя (2.5) и (1.3), получаем следующее выражение для спектра нулевого порядка:

$$E_0(x, y) = \sqrt{\frac{(1-iG)\left(1 - \frac{ika^2}{F}\right)}{1+G^2}} \exp \left[ik(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) - \right. \\ \left. - iuv - \frac{\left(y - x \left(\operatorname{tg} \theta_0 - \frac{K^2}{2p_0} \frac{v}{k}\right)\right)^2 (1-iG)}{2d_0^2(1+G^2)} \right], \quad (3.3)$$

$$G = G(v) = -\frac{ka^2}{F} + \frac{x \left(1 + \frac{3}{4} \frac{K^2}{p_0^2} v\right)}{kd_0^2}.$$

Из (3.3) следует, что ультразвук в этом случае изменяет кривизну фазового фронта пучка и направление его распространения. Изменение кривизны фазового фронта рассматривается здесь так же, как и в случае $|p| \ll K$. Пусть θ — угол, характеризующий направление распространения пучка после ультразвука. Выражение для изменения направления распространения пучка $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ легко получить из (3.3):

$$\Delta\theta = -\frac{\theta_0}{2} \left(\frac{K}{p_0}\right)^2 v.$$

Описанные в этом разделе явления изменения кривизны фазового фронта и направления распространения светового пучка могут быть использованы для управления им.

4. ТРЕХВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В разд. 2, 3 мы пренебрегали изменением амплитуды e_0 . Учесть это изменение в амплитуде e_0 при небольших значениях η и v можно в трехволновом приближении системы (1.4), когда $e_n = 0$, при $|n| \geq 2$. Действительно, когда η и v невелики, основная часть энергии содержится в спектрах нулевого и первых порядков, поэтому влиянием на e_0 спектров более высоких порядков можно пренебречь.

Итак, рассмотрим трехволновое приближение системы (1.4):

$$\frac{\partial e_0}{\partial x} = \alpha(p) [e^{-ixf(p-K)} e_{-1} - e^{ixf(p)} e_1], \quad e_0(0, p) = 1,$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial x} = \alpha (p + K) e^{-ixf(p)} e_0, \quad e_1(0, p) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial e_{-1}}{\partial x} = -\alpha (p - K) e^{ixf(p-K)} e_0, \quad e_{-1}(0, p) = 0.$$

Частный случай такой системы при $p=0$ (нормальное падение плоской световой волны на ультразвук) рассмотрен в работе [10]. При этом (4.1) сводится к системе двух уравнений, так как при $p=0$ $e_1 = -e_{-1}$. В трехволновом приближении (4.1) обмен энергией происходит между спектрами нулевого и первых порядков. При этом однократно рассеянное поле содержится в спектрах первых порядков. При двукратном рассеянии свет снова возвращается в нулевой порядок и т. д.

Систему (4.1) можно свести к дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами для e_0^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 e_0}{\partial x^3} + i[f(p-K) - f(p)] \frac{\partial^2 e_0}{\partial x^2} + [\alpha(p)(\alpha(p+K) + \alpha(p-K)) + \\ + f(p-K)f(p)] \frac{\partial e_0}{\partial x} + i\alpha(p)[f(p-K)\alpha(p+K) - f(p)\alpha(p-K)] e_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

с начальными условиями

$$\left(e_0; \frac{\partial e_0}{\partial x}; \frac{\partial^2 e_0}{\partial x^2} \right) = (1; 0; -\alpha(p)[\alpha(p+K) + \alpha(p-K)]).$$

Целесообразно сравнивать решение (4.2) с полученными ранее выражениями (2.4), (2.5) для e_0 . При $|p| \ll K \ll k$ из (4.2) с точностью до членов $O(p^2)$ получаем

$$\begin{aligned} e_0(x, p) = \sqrt{1 - \frac{2\eta \sin^2 \psi}{1 + 2\eta}} \exp \left\{ iu(V\sqrt{1 + 2\eta} - 1) + \frac{ixp^2}{k} \times \right. \\ \left. \times \frac{2(1 + \eta - \sqrt{1 + 2\eta})}{\eta \sqrt{1 + 2\eta}} - i \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \psi (\sqrt{1 + 2\eta} - 1)}{\operatorname{tg}^2 \psi + \sqrt{1 + 2\eta}} \right] \right\}, \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$\psi = u \sqrt{1 + 2\eta} + \frac{xp^2}{k} \frac{2(1 + \eta)}{\eta \sqrt{1 + 2\eta}}.$$

При $p=0$ (4.3) совпадает с аналогичным выражением работы [10]. Из (4.3) видно, что e_0 модулировано при интенсивности (пространственная модуляция) с глубиной модуляции, равной $\sigma = \frac{2\eta}{1 + 2\eta}$.

Рассмотрим границы применимости (4.3) по η . Для этого сравним пятиволновое приближение (1.4) с рассматриваемым трехволновым приближением. При $p=0$ эти приближения приводят к дифференциальным уравнениям третьего и второго порядков с постоянными коэффициентами для e_0 . В первом случае e_0 является суммой трех волн; во втором — двух. При $\eta \leq 1/3$ с точностью, большей либо равной 2,5%, одной из трех волн в пятиволновом приближении можно пренебречь, а две другие совпадают с волнами, получающимися в трехволновом приближении. С определенным произволом условие $\eta \leq 1/3$ ($\sigma \leq 0,4$) мы будем считать условием применимости трехволнового приближения.

* Заметим, что в (4.1), (4.2) $|p|, K \ll k$.

Из (4.3) видно, что амплитуда e_0 зависит не только от η , но и от x , k , K и p^2 . Пусть все эти параметры, за исключением p , фиксированы. Тогда амплитуды плоских световых волн, падающих на ультразвук под разными углами (разные p), будут изменяться от 1 до $\sqrt{1-\sigma}$. Если же на ультразвук падает световой пучок, то в его разложении по плоским волнам могут найтись волны как с максимальной, так и с минимальной амплитудами. Это приведет к тому, что в поперечном сечении пучок будет модулирован по интенсивности. Глубина этой модуляции пропорциональна σ , а период по оси y равен $\left(\frac{k\eta\sqrt{1+2\eta}}{2x(1+\eta)}\right)^{-1/2}$.

В фазовом множителе в (4.3) при $\eta \leq 1/3$ арктангенс не превосходит $0,13$ ($7^\circ,3$), и им можно пренебречь. В этом случае фазовый множитель в (4.3) подобен (при малых η равен) выражению (2.4) и отличается от него только более сложной зависимостью от η . Итак, (4.3) является обобщением (2.4), учитывающим амплитудную модуляцию и более точно определяющим фазу e_0 .

Рассмотрим теперь, исходя из (4.2), случай наклонного падения света на ультразвук $K \ll |p| \ll k$. Пусть, как и раньше, $p = p_0 + q$. Тогда с точностью до членов $O(q^2)$ из (4.2) получаем

$$e_0(x, p_0, q) = \frac{\left(1 + \nu \cos \xi \cos \gamma + \frac{\nu^2}{4} \cos^2 \xi\right)^{1/2}}{1 + \nu/2} \exp \left[-iu \frac{\nu}{1 + \nu/2} + \right. \\ \left. + iu \frac{2q}{p_0} \frac{\nu}{(1 + \nu/2)^2} - iu \nu \frac{3q^2}{p_0^2} \frac{(1 - \nu/6)}{(1 + \nu/2)^3} \right], \quad (4.4)$$

$$\xi = \frac{4u p_0 \sqrt{1 + \nu/2}}{K} \left[1 + \frac{q}{p_0(1 + \nu/2)} + \frac{q^2 \nu}{4p_0^2(1 + \nu/2)^2} \right],$$

$$\gamma = \frac{2u(1 - \nu/4)}{1 + \nu/2} \left[1 + \frac{3q\nu}{2p_0(1 + \nu/4 - \nu^2/8)} - \frac{q^2}{p_0^2} \frac{9\nu(1 - \nu/6)}{4(1 - \nu/4)(1 + \nu/2)^2} \right].$$

По аналогии с (4.3) будем считать, что (4.4) правильно описывает амплитудную модуляцию и изменение в фазе e_0 при $\nu \leq 1/3^*$. В экспоненте в (4.4) мы не выписали осцилляторный член, аналогичный арктангенсу в (4.3), так как при $\nu \leq 1/3$ он менее $0,17$ ($9^\circ,6$) и им можно пренебречь. Амплитудная модуляция в (4.4) аналогична амплитудной модуляции в (4.3). Фазовый же множитель в (4.4) подобен (при малых ν равен) выражению (2.5). Итак, в случае наклонного падения (4.4) является обобщением (2.5), учитывающим амплитудную модуляцию и более точно определяющим фазу e_0 .

Автор благодарит В. И. Татарского за постоянное внимание к работе и полезные советы и А. М. Мартынова, заинтересовавшего автора дифракцией света на ультразвуке и принявшего участие в обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. V. Raman, N. S. N. Nath, Proc. Ind. Acad. Sci., 3A, 119, 459 (1936).
2. P. H. Cittert, Physica, 4, 590 (1937).
3. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 19, № 1, 38 (1974), Справочник по лазерам, т. 2, изд. Сов. радио, М., 1978, стр. 191.

* В (4.4) ν соответствует η в (4.3) (см. определения η и ν после (2.5) и (2.4)).

- 4 L. Brillouin, La diffraction de la lumiere par des ultrasons, Hermann, Paris, 1933.
5. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физическая, 2, 223 (1937).
6. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Введение в статистическую радиофизику, ч. 2, Случайные поля, изд. Наука, М., 1978, § 38.
7. В. Е. Осташев, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 714 (1978).
8. В. Е. Осташев, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 2, 170 (1979).
9. А. М. Мартынов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1378 (1976).
- 10 N. S. N. Nath, Proc. Ind. Acad. Sci., 8A, 499 (1938).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
26 февраля 1979 г.

PHASE GEOMETRY VARIATION OF A LIGHT BEAM IN ITS DIFFRACTION BY ULTRASOUND

V. E. Ostashev

Light diffraction by ultrasound is considered on the basis of an equation describing waves manifold scattered forward. The problem is reduced to the system of equations for amplitude-phase multipliers of spectra of different orders. Approximate solutions of this system are considered, when the intensity of a single scattering is not great and Bragg's condition is not fulfilled. In this regime the variation of the spectrum amplitude of zero order may be neglected. Phase increment in the zero order spectrum permits to variate the geometry of a phase light beam. Variations of the amplitude of the zero order spectrum is taken into account in tree-wave approximation.

УДК 621.372.822.09

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ СО СЛОИСТЫМИ СТЕНКАМИ

А. Б. Маненков

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с двумя (параллельными) металлическими стенками и двумя слоистыми диэлектрическими. Рассчитаны следующие характеристики волн: фазовая скорость, затухание и диаграмма направленности излучения из открытых краев. Полученные результаты могут представлять интерес для систем телеуправления и связи.

Открытые волноводы, в которых распространение волн сопровождается излучением, перспективны для систем одномерной радиолокации [1, 2], в частности для телеуправления и связи. Общие свойства таких систем подробно обсуждались ранее [1]. Отметим только, что применение волноводов с излучающими (вытекающими) волнами позволяет определить координаты и скорость объектов, находящихся вблизи волноводов, и осуществить связь с этими объектами. Как указывалось в работе автора [3], для указанных выше целей могут быть использованы круглые волноводы со стенкой из слоистого диэлектрика [4]. Однако такие структуры имеют ненаправленное поле излучения, что в ряде случаев нежелательно [1]. В настоящей статье исследованы линии передачи прямоугольного сечения, две стенки которой — металлические, а две другие — диэлектрические. Такие волноводы имеют необходимую направленность радиационного поля.

1. ПОЛЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ ВОЛН

На рис. 1а изображено поперечное сечение исследуемого волновода: горизонтальные стенки выполнены из металла, а вертикальные (полупрозрачные стенки) — из слоистого диэлектрика. Как обычно, поля любой волны, распространяющейся в такой линии, можно представить в виде суперпозиции плоских волн (парциальных лучей), попеременно отражающихся от границ раздела сред [4]. Исходя из такого представления, можно показать, что при антирезонансных диэлектрических слоях [3, 4] рассматриваемая структура эффективно направляет вытекающие волны, поля которых в основном локализованы между диэлектрическими стенками. Поэтому ниже основное внимание мы будем уделять расчету этих волн.

Для данной геометрии волновода нетрудно рассчитать все характеристики волн, если считать металлические стенки идеально проводящими и бесконечными ($l = \infty$, см. рис. 1а); в дальнейшем мы оценим влияние дифракции на краю металлической стенки. При сделанных предположениях поля вытекающих волн (мы будем отмечать их индексом q) можно выразить через электрический или магнитный вектор Герца, имеющий единственную компоненту вдоль оси x . По аналогии с волнами в прямоугольном металлическом волноводе эти моды будем

обозначать как $LM_{mn}^{(q)}$ и $LE_{mn}^{(q)}$. Обозначим далее через g_x, g_y декартовы компоненты поперечного волнового числа внутри волновода, а через $R^{(e)}, R^{(m)}$ — коэффициенты отражения парциальных лучей, падающих изнутри на диэлектрическую стенку под углом скольжения ϑ_x (для волн с составляющими E_x и H_x соответственно). Для волновода, изображенного на рис. 1а, векторы Герца при $|x| < a, |y| < b$ пропорциональны тригонометрическим функциям. Например, для моды $LM_{mn}^{(q)}$ имеем [5, 6]

$$\Pi_x^{(e)} = \cos(g_x x) \cos(g_y y) \exp(ihz), \quad \Pi_y^{(e)} = \Pi_z^{(e)} = 0; \quad (1)$$

$$E = \text{grad}(\text{div} \Pi^{(e)}) + k^2 \epsilon \Pi^{(e)}, \quad H = -ik\epsilon \text{rot} \Pi^{(e)}/\eta_0; \quad (2)$$

$$\exp(2ig_x a) R^{(e)}(\vartheta_x) = \pm 1, \quad \sin \vartheta_x = \frac{g_x}{k \sqrt{\epsilon}}, \quad g^2 = g_x^2 + g_y^2, \quad (3)$$

$$h^2 = k^2 \epsilon - g^2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad \eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}, \quad g_y = \frac{\pi n}{2b}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ — относительная диэлектрическая проницаемость среды внутри волновода. Аналогичные соотношения справедливы и для $LE_{mn}^{(q)}$ -волн (для них индекс n может принимать нулевое значение). В дальнейшем будем предполагать, что угол скольжения ϑ_x мал. Выражая коэффициенты отражения через адмитанс $Y_s^{(e)}$ и импеданс $Z_s^{(m)}$ диэлектрической стенки [3, 6], из (3) можно получить приближенные выражения для g_x ; например, для мод $LM_{mn}^{(q)}$ имеем

$$g_x a = \frac{\pi m}{2} - i \vartheta_x Y_s^{(e)}(\vartheta_x) \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \vartheta_x \approx \frac{\pi m}{2ka \sqrt{\epsilon}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

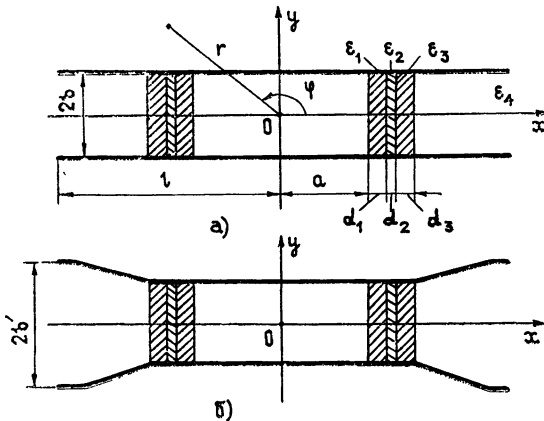


Рис. 1. Поперечное сечение волновода.

Используя связь между g и h , можно затем определить продольное волновое число h . Если параметры диэлектрических слоев близки к антирезонансным значениям [4], то импеданс (или адмитанс) стенки можно вычислить в аналитической форме [3, 4]; в общем случае импедансы легко вычислить на ЭВМ, используя рекуррентные формулы для пересчета импеданса от внешней границы диэлектрических слоев к внутренней [3, 5].

При условии $\vartheta_x \ll 1$ поля низших мод близки к линейно-поляризованным плоским волнам, причем осевые компоненты полей существенно меньше поперечных. Для волны $LM_{11}^{(q)}$ в первом приближении имеем

$$E_x = (k^2 \epsilon - g_x^2) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right),$$

$$H_y = kh \epsilon \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right).$$
(5)

На рис. 2 схематически изображены картины силовых линий низших волн в поперечном сечении волновода; отношение b/λ взято небольшим, чтобы показать искривление силовых линий вблизи стенок.

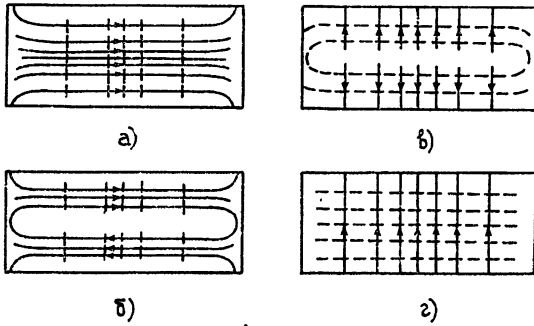


Рис. 2. Структура электрического (сплошные линии) и магнитного (пунктирные линии) полей волн $LM_{11}^{(q)}$ а), $LM_{12}^{(q)}$ б), $LE_{11}^{(q)}$ в) и $LE_{10}^{(q)}$ г).

Проанализируем теперь характеристики квазисобственных волн низших типов для нескольких случаев. Параметры диэлектрических слоев (рис. 1а) обозначим через ϵ_p, d_p ($p = 1, 2, \dots, N$; индекс N относится к внешней среде). В дальнейшем будем считать, что $\text{Im} \epsilon = 0$ и $\text{Re} \epsilon_p \geq \epsilon$. Из (4) следует, что коэффициенты затухания волн $LM_{mn}^{(q)}$ приближенно равны

$$h'' = \frac{g_x^2 \eta_0}{k^2 a \sqrt{\epsilon^3}} \text{Re} Y_s^{(e)}(\vartheta_x) + \frac{g_y^2 R_{sm}}{k^2 b \eta_0 \epsilon}, \quad g_x \approx \frac{\pi m}{2a}, \quad g_y \approx \frac{\pi n}{2b}.$$
(6)

При выводе этой формулы мы учли также потери в металлических стенках (R_{sm} — поверхностное сопротивление металла). Аналогично для мод $LE_{mn}^{(q)}$ ($n \neq 0$) имеем

$$h'' = \frac{g_x^2}{k^2 a \eta_0 \epsilon} \text{Re} Z_s^{(m)}(\vartheta_x) + \frac{R_{sm} \sqrt{\epsilon}}{b \eta_0}.$$
(7)

Таблица 1

	Внутренняя область				1-й слой			2-й слой			3-й слой			Окружающая среда		
	a	b	ϵ'	ϵ''	d_1	ϵ'_1	ϵ''_1	d_2	ϵ'_2	ϵ''_2	d_3	ϵ'_3	ϵ''_3	d_4	ϵ'_4	ϵ''_4
1	3,5	1,5	1,0	0	0,72	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	3,5	1,0	0	0,72	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	∞	1,0	0
2	3,5	1,5	1,0	0	0,72	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	0,041	38	0,015	0,72	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$	∞	1,0	0

Рассмотрим волновод, параметры которого приведены в первой строке табл. 1 (все размеры даны в сантиметрах). На рис. 3 представлена зависимость затухания h'' от длины волны λ (сплошные кривые) для нескольких волн. Проводимость стенок принята равной $\sigma = 5,8 \cdot 10^5$ мс/см (медь). Величины $Y_s^{(e)}$ и $Z_s^{(m)}$ вычислялись по приближенным аналитическим формулам, а также численно методом пересчета импедансов [3]. Формулы для $Y_s^{(e)}$ и $Z_s^{(m)}$ получены при условии $\vartheta_x \ll 1$ и в предположении, что диэлектрическими потерями во всех слоях, кроме первого, можно пренебречь. Для четырехслойной стенки ($N = 4$), у которой $\epsilon_1 = \epsilon_3$ и $\epsilon = \epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$, соответствующие выражения имеют вид

$$Y_s^{(e)} \eta_0 = \frac{i \epsilon_1' \operatorname{ctg} \psi_1}{\nu_1} + \frac{k d_1 \epsilon_1' \epsilon_1''}{2 \nu_1^2 \sin^2 \psi_1} \left(1 + \frac{2 - \epsilon_1'}{\epsilon_1'} \frac{\sin 2\psi_1}{2\psi_1} \right) + \frac{\vartheta_x^3 \epsilon_1'^4}{\nu_1^2 \sin^4 \psi_1 \sin^2(\psi_2 - \xi_e)}, \quad \xi_e = \frac{2\vartheta_x \epsilon_1' \operatorname{ctg} \psi_1}{\nu_1}; \quad (8)$$

$$\psi_1 = k d_1 \nu_1, \quad \psi_2 = g_x d_2, \quad \vartheta_x = \frac{g_x}{k}, \quad \nu_1 = \sqrt{\epsilon_1' - 1},$$

$$\frac{Z_s^{(m)}}{\eta_0} = \frac{i \operatorname{ctg} \psi_1}{\nu_1} + \frac{k d_1 \epsilon_1''}{2 \nu_1^2 \sin^2 \psi_1} \left(1 + \frac{\sin 2\psi_1}{2\psi_1} \right) + \frac{\vartheta_x^3}{\nu_1^2 \sin^4 \psi_1 \sin^2(\psi_2 - \xi_m)}, \quad \xi_m = \frac{2\vartheta_x \operatorname{ctg} \psi_1}{\nu_1}. \quad (9)$$

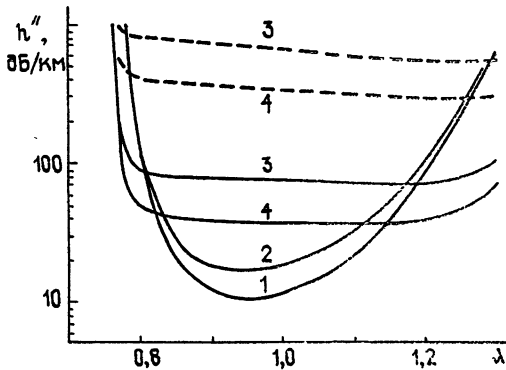


Рис. 3 Зависимость коэффициента затухания от длины волны для мод $LM_{11}^{(q)}$ (кривая 1), $LM_{12}^{(q)}$ (2), $LE_{11}^{(q)}$ (3) и $LE_{10}^{(q)}$ (4).

Хотя диэлектрическая стенка отражает парциальные лучи селективно [3, 4], тем не менее спектр низших волн рассматриваемой структуры сравнительно густой; например, затухание волн $LM_{11}^{(q)}$ и $LE_{11}^{(q)}$ отличается меньше чем на порядок. Кроме того, в первом приближении фазовые скорости этих двух волн совпадают. Можно существенно улучшить фильтрующие свойства рассматриваемого волновода, если на металлические стенки нанести тонкую поглощающую пленку. Для иллюстрации влияния такой пленки на рис. 3 изображены зависимости

$h''(\lambda)$ для мод низшего типа в таком волноводе (пунктирные кривые). Размеры волновода приняты теми же, что и выше. Толщина пленки $d_i = 0,01$ см, а ее диэлектрическая проницаемость $\epsilon_i = 2,5 + i0,1$. Отметим, что для волн $LE_{mn}^{(q)}$ дополнительное затухание, обусловленное потерями в пленке, линейно растет с ее толщиной [$\Delta h'' \approx \epsilon_i' kd_i / (b \epsilon_i'^2)$], а для мод $LM_{mn}^{(q)}$ — по кубическому закону [$\Delta h'' \approx g_y^2 \epsilon_i' kd_i^3 / (3b)$], поэтому при нанесении тонкого диэлектрического слоя на металл потери мод $LM_{mn}^{(q)}$ практически не изменяются. Заметим также, что в такой модифицированной структуре разность постоянных распространения мод $LE_{11}^{(q)}$ и $LM_{11}^{(q)}$ при $kd_i \ll 1$ приближенно равна

$$h'(LE_{11}^{(q)}) - h'(LM_{11}^{(q)}) = \frac{\partial_x^2}{a} v_1 \operatorname{ctg} \psi_1 + \frac{R_{sm}}{b \eta_0} + \frac{\epsilon_i' - 1}{\epsilon_i'} \frac{kd_i}{b}. \quad (10)$$

В рассматриваемой передающей линии могут распространяться также поверхностные (медленные) волны, поля которых в основном локализованы в стенках. Для волновода с размерами, указанными выше, поверхностные волны низших типов сильно замедлены и их затухание достаточно велико. Например, для волновода без поглощающей пленки при $\lambda = 0,8 \div 1,2$ см потери этих волн изменяются в пределах $(0,5 \div 1,0) \cdot 10^3$ дБ/см. Отметим, что дисперсионное уравнение для поверхностных мод также удобно решать с помощью пересчета импеданса (или адмитанса) от одной внешней границы диэлектрической стенки к другой.

Рассмотрим теперь другую возможную структуру диэлектрической стенки, в которой нет воздушных промежутков; ее параметры приведены во второй строке табл. 1. При такой геометрии волновод имеет меньшие поперечные размеры вдоль оси x , чем рассмотренный выше. На рис. 4 изображены зависимости $h''(\lambda)$ для низших мод с диэлектрической пленкой на металле и без нее; потери волн $LM_{1n}^{(q)}$ в обоих случаях практически одинаковы.

В рассмотренных выше волноводах для волны $LM_{11}^{(q)}$ основными являются радиационные потери; затухание, обусловленное потерями в металле, имеет порядок $2 \div 3$ дБ/см. Для систем управления транспортом уровень излучения, соответствующий потерям в несколько десятков дБ/см, обычно является оптимальным [1]. Отметим, что, увеличивая размер a волновода, можно существенно уменьшить радиационное затухание [3].

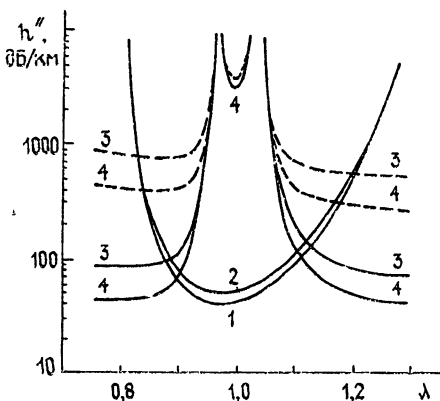


Рис. 4. Потери волн $LM_{11}^{(q)}$ (1), $LM_{12}^{(q)}$ (2), $LE_{11}^{(q)}$ (3) и $LE_{10}^{(q)}$ (4) в волноводе без диэлектрической пленки (сплошные кривые) и с пленкой (пунктирные кривые).

2. УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНОК

Приведенные выше результаты получены при условии $l = \infty$. В этом разделе мы применим приближенный метод расчета [3, 4], который позволяет оценить радиационные потери при конечных l , а также определить, как изменяются комплексные волновые числа волн при небольших однородных вдоль оси z деформациях стенки,

Как было показано [4], при $\vartheta_x \ll 1$ ($ka \gg 1$) поперечные к оси z компоненты полей \mathbf{E}_\perp и \mathbf{H}_\perp на диэлектрической стенке близки к нулю. Для однозначного определения полей достаточно считать две составляющие равными нулю точно, например, $E_n = H_n = 0$ (\mathbf{n} — нормаль к стенке). С помощью этих граничных условий и обычных условий на металле нетрудно рассчитать структуру полей и фазовые постоянные h_0 [4]. Заметим, что такие граничные условия можно получить, если считать проницаемости стенок равными нулю (т. е. $\epsilon = \mu \equiv 0$ при $|x| > a$), так как в этом случае $R^{(e)} = R^{(m)} = -1$.

Поля первого приближения $\mathbf{E}_\perp^{(0)}$, $\mathbf{H}_\perp^{(0)}$ имеют вид «квазиплоских» волн одной из двух поляризацій:

$$E_x^{(0)} = \Phi, \quad E_y^{(0)} = 0 \quad \text{или} \quad E_x^{(0)} = 0, \quad E_y^{(0)} = \Phi, \quad (11)$$

где скалярная функция Φ удовлетворяет во внутренней области волновода уравнению

$$\Delta_\perp \Phi + g^2 \Phi = 0, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad g^2 = k^2 \epsilon - h^2 \quad (12)$$

с граничным условием $\Phi = 0$ на диэлектрической стенке (при этом $H_\perp^{(0)} \approx \frac{\sqrt{\epsilon}}{\eta_0} E_\perp^{(0)}$). Зная поля $\mathbf{E}_\perp^{(0)}$, $\mathbf{H}_\perp^{(0)}$, можно затем методом возмущения определить коэффициенты затухания и поправки к фазовой скорости, учитывая связь полей на границе через адмитанс и импеданс стенки [3].

Применяя такую методику расчета к волне $LM_{11}^{(q)}$, мы сталкиваемся с трудностью, которая вызвана тем, что в первом приближении эта волна оказывается вырожденной (аналогичная ситуация для некоторых мод возникает, как известно, и в прямоугольном металлическом волноводе). Поэтому необходим более подробный анализ, который мы проведем, предполагая, что выполнены следующие неравенства:

$$\left| \frac{Y_s^{(e)} \eta_0}{ka \epsilon} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{Z_s^{(m)}}{ka \eta_0} \right| \ll 1. \quad (13)$$

Поперечная компонента электрического поля \mathbf{E}_\perp внутри волновода удовлетворяет двумерному волновому уравнению (12). Разлагая поля на плоские волны, можно показать, что при $ka \gg 1$ (асимптотические) граничные условия для \mathbf{E}_\perp на диэлектрической стенке имеют следующий вид:

$$E_n = \frac{Y_s^{(e)} \eta_0}{ik \epsilon} \frac{\partial E_n}{\partial n}, \quad E_s = \frac{Z_s^{(m)}}{ik \eta_0} \frac{\partial E_s}{\partial n}, \quad (14)$$

где \mathbf{s} и \mathbf{n} — касательный и нормальный орты к стенке $x = \pm a$ в поперечной плоскости. Отметим, что соотношения (14) применимы и к полям на металлической стенке (в этом случае $Y_s^{(e)} = \infty$, $Z_s^{(m)} = 0$, так что $E_s = \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0$). Граничные условия (14) содержат малые параметры, поэтому задачу будем решать методом последовательных приближений. В первом приближении из уравнения (12) и граничного условия $\mathbf{E}_\perp = 0$ при $x = \pm a$ определяем два решения $E_{1\perp}^{(0)}$ и $E_{2\perp}^{(0)}$, соответствующие модам $LM_{11}^{(q)}$ и $LE_{11}^{(q)}$ (волновое число g_0).

Далее применим обычную методику теории возмущений. Поперечное волновое число g , как можно показать, является корнем характеристического уравнения

$$\det ||\alpha_{ij}|| = 0 \quad (i, j = 1, 2); \quad (15)$$

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}(g^2 - g_0^2) \iint E_{i\perp}^{(0)2} dS + \\ + \frac{i}{k} \int \left[\frac{\eta_0 Y_s^{(e)}}{\epsilon} \frac{\partial E_{in}^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial E_{in}^{(0)}}{\partial n} + \frac{Z_s^{(m)}}{\eta_0} \frac{\partial E_{is}^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial E_{js}^{(0)}}{\partial n} \right] dl \quad (16)$$

(δ_{ij} — единичный тензор). В последней формуле интегрирование проводится по внутренней области волновода и вдоль контура границы диэлектрической стенки. Отметим, что приведенные соотношения применимы к волноводу с произвольной формой поперечного сечения при условии, что радиус кривизны диэлектрической стенки много больше λ .

Для рассматриваемого волновода прямоугольной формы оказывается, что недиагональные члены в (15) равны нулю. Следовательно, волны $LM_{11}^{(q)}$ и $LE_{11}^{(q)}$ не связаны друг с другом, и из (15) получаем

$$g^2 - g_0^2 = \frac{\int \left\{ \frac{Y_s^{(e)} \eta_0}{\epsilon} \left[\frac{\partial E_{1n}^{(0)}}{\partial n} \right]^2 + \frac{Z_s^{(m)}}{\eta_0} \left[\frac{\partial E_{1s}^{(0)}}{\partial n} \right]^2 \right\} dl}{ik \iint E_{1\perp}^{(0)2} dS}. \quad (17)$$

Из последнего соотношения нетрудно получить выражение для h'' . Заметим, что при $\vartheta_x, \vartheta_y \ll 1$ условия (14) можно записать в иной форме: $H_s = -Y_s^{(e)} E_z$, $E_s = Z_s^{(m)} H_z$.

При конечных l значения радиационных потерь определяются как отражением парциальных лучей от границ раздела всех диэлектрических слоев, так и дифракцией на краях металлических стенок. Если эти области пространства находятся далеко друг от друга, от отражения волн в плоскостях $x = \pm l$ происходит так же, как на открытом конце двумерного полубесконечного металлического волновода [7]. Решение последней задачи (см. разд. 3) позволяет ввести при $x = \pm l$ адмитанс $Y^{(e)}(l)$ и импеданс $Z^{(m)}(l)$, а затем пересчитать их к внутренней поверхности слоев $x = \pm a$. Мы не будем здесь подробнее рассматривать дифракцию на открытой стенке волновода, а вернемся к этому вопросу в следующем разделе, так как он тесно связан с расчетом поля излучения вытекающих волн. Отметим только, что для волновода, изображенного на рис. 1а, отражение парциальных лучей в плоскостях $x = \pm l$ приводит к существенному различию значений h'' , вычисленных в случае конечных и бесконечных l . Например, для рассмотренных выше систем коэффициент затухания волны $LM_{11}^{(q)}$ в зависимости от значения l может изменяться на порядок по сравнению со случаем $l = \infty$.

Как уже отмечалось выше, приближенный метод расчета позволяет оценить, как меняется затухание волн при однородных деформациях диэлектрических стенок. В этом случае адмитанс $Y_s^{(e)}$ и импеданс $Z_s^{(m)}$ будут зависеть от координаты y , поэтому в формуле (17) их нельзя выносить за знак интеграла. Если деформации пологие, то можно вычислить $Y_s^{(e)}$ и $Z_s^{(m)}$, сшивая поля локально (при каждом значении y) и пренебрегая искривлением границы раздела сред. Функции $Y_s^{(e)}(y)$ и $Z_s^{(m)}(y)$ вычисляются по формулам пересчета импедансов [3], в которые надо подставлять переменные параметры $d_p(y)$. Анализ различных случаев показал, что наличие деформаций диэлектрических стенок при-

водит к сужению рабочей полосы частот рассматриваемой передающей линии (ср. [3]). Например, если толщина первого слоя изменяется в пределах $d_{1 \min}$ и $d_{1 \max}$, то рабочий диапазон длин волн, в котором затухание моды $LM_{11}^{(q)}$ достаточно мало, уменьшается на величину $\Delta \lambda \sim (d_{1 \max} - d_{1 \min}) \sqrt{\epsilon_1 - 1}$.

Сделаем несколько замечаний. Приведенные выше соотношения (12)—(17) можно использовать для расчета не только вытекающих, но и поверхностных волн (в рассматриваемом случае эти моды распространяются в стенках). Для поверхностных мод условие применимости импедансных граничных условий (14) сводится к требованию, чтобы поля этих волн были сосредоточены в диэлектрике. Эти же граничные условия могут быть использованы и для исследования асимптотики волн в различных квазиоптических системах с диэлектрическими границами, в частности в диэлектрических волноводах (волокнах) со сложным профилем поперечного сечения. В зависимости от структуры границы волновода изменяется лишь задача вычисления поверхностного адмитанса $Y_s^{(e)}$ и импеданса $Z_s^{(m)}$, а остальная методика расчета остается той же, что и выше. Например, используя результаты работы [18], с помощью формул (14)—(17) можно рассчитать фазовые скорости волн в волокнах эллиптического сечения (при $k \rightarrow \infty$). Заметим, что для однослойного волокна адмитанс и импеданс равны

$$Y_s^{(e)} = \frac{\epsilon_1}{i \eta_0 \sqrt{\epsilon - \epsilon_1}}, \quad Z_s^{(m)} = \frac{\eta_0}{i \sqrt{\epsilon - \epsilon_1}} \quad (18)$$

(ϵ и ϵ_1 — диэлектрические проницаемости внутри и снаружи волновода).

Интересно отметить, что для диэлектрического волновода прямоугольного сечения (с изломами контура границы) формула (17) приводит к выражению для фазовой скорости поверхностных волн, совпадающему с асимптотическим значением [8]. Отметим также, что во всех таких передающих линиях в первом приближении поля имеют вид линейно-поляризованных волн (11), (12). Используя полученные выражения для полей внутри волновода, можно затем методами «комплексной» геометрической оптики приближенно рассчитать поля во внешней области. Дальнейшее упрощение всех соотношений возможно в том случае, когда диэлектрические проницаемости всех сред имеют близкие значения. Для таких систем отражение парциальных лучей слабо зависит от их поляризации, и поэтому задача сводится к скалярной. Заметим также, что в случае сложной формы поперечного сечения волновода постоянные распространения мод можно рассчитать с помощью (14), привлекая вариационные методы.

3. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

При исследовании систем телеуправления важное значение имеют характеристики излучения, которые мы и рассмотрим ниже. Будем рассчитывать поля в дальней зоне при условии $gr \gg 1$ (r, φ, z — цилиндрические координаты). Ограничимся исследованием волны $LM_{11}^{(q)}$. Предположим, что края металлических стенок находятся далеко от диэлектрических слоев, так что последние мало влияют на радиационные поля. Рассмотрим сначала излучение только из одной (например, левой) открытой стенки волновода. Для расчета удобно выразить поля через составляющие E_z и H_z , которые удовлетворяют двумерным волновым уравнениям вида (12) с граничными условиями $E_z = \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ на

металлической стенке. Будем считать, что на открытую стенку волновода $x = -l$ набегаёт справа (рис. 1а) электромагнитная волна, распространяющаяся между двумя идеально проводящими полуплоскостями: $y = \pm b$, $x > -l$. Поле этой волны образовано парциальными лучами, прошедшими через диэлектрические слои в направлении к открытой стенке. Обе осевые компоненты этого поля E_z и H_z отличны от нуля и могут быть определены из формул (2). Рассматриваемая волна испытывает дифракцию на «острых» краях металлических стенок. Дифракция волны приводит не только к отражению, но и к трансформации волн (в частности, к изменению поляризации). В большинстве случаев [7] последним эффектом можно пренебречь; это и позволило нам выше ввести в плоскостях $x = \pm l$ эффективные адмитанс $Y^{(e)}(l)$ и импеданс $Z^{(m)}(l)$.

Решение рассматриваемой системы уравнений можно получить методом факторизации [7]. Для радиального потока мощности при условии $gb < \frac{3\pi}{2}$ окончательно получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 |\bar{S}_r(\varphi)| &= \frac{k}{2\eta_0 g} [|H_z \eta_0|^2 + |E_z|^2] = \\
 &= \frac{P_0}{r} \frac{\exp(-gb \cos \varphi)}{(g_y^2 - g^2 \sin^2 \varphi)} \cos(gb \sin \varphi) \left[k^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{h^2 g_x^2}{(g + g_x)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

(P_0 — несущественная для дальнейшего константа). Отметим, что фазы радиационных полей определяются медленно сходящимися рядами; их сходимости можно улучшить, если выделить в них медленно сходящуюся часть, используя степенное разложение логарифмической функции (ср. [7], стр. 44).

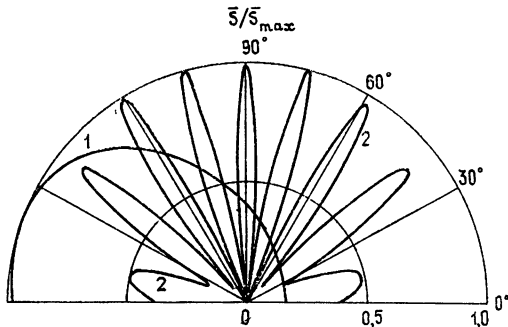


Рис. 5. Диаграмма направленности излучения волны $LM_{11}^{(q)}$ из левой половины волновода (кривая 1) и с двух сторон (кривая 2).

На рис. 5 приведена диаграмма направленности поля излучения моды $LM_{11}^{(q)}$ (кривая 1) из левой половины волновода, вычисленная по формуле (19). Параметры волновода взяты теми же, что и ранее (см. табл. 1), $l = 10$ см. В некоторых системах телеуправления предпочтению отдается линиям передачи, излучающим в одну сторону [1]. В рассматриваемых волноводах излучение через вторую стенку можно сделать малым, если увеличить в ней число слоев или покрыть ее снаружи поглощающим материалом.

Для волновода, изображенного на рис. 1а, направленность излучения сравнительно низка. Можно улучшить направленность радиационного поля, если увеличить апертуру (рис. 1б). Для иллюстрации на

рис. 6 приведена характеристика излучения из одной (левой) половины волновода, когда размер апертуры увеличен до значения $b' = 2,5$ см (остальные размеры те же, что и выше). Кривая 1 построена по формуле (19), т. е. для параллельных металлических стенок при $x = \pm l$. Отметим, что в первом случае (рис. 1а) излучение «назад» сравнительно велико и расчет радиационного поля с помощью принципа Гюйгенса приводит к большой ошибке, поэтому нам и пришлось обратиться к строгому решению задачи. Во втором случае (рис. 1б) при $gb' \gg 1$ приближение физической оптики достаточно хорошо передает поле излучения [7].

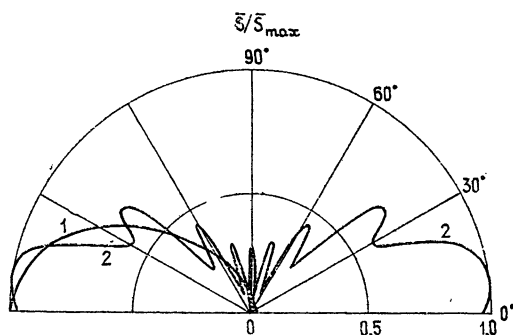


Рис. 6. Диаграмма направленности излучения волновода с изогнутыми стенками. Кривая 1 построена для случая, когда излучение происходит с одной стороны, а кривая 2 — с двух сторон.

Точное решение рассматриваемой задачи позволяет также вычислить коэффициенты отражения парциальных лучей в плоскостях $x = \pm l$, а также коэффициенты трансформации, т. е. определить степень изменения поляризации лучей при дифракции на краях металлических стенок [7]. Мы не будем здесь приводить соответствующие выражения (их нетрудно получить на основании книги [7]), а лишь отметим, что при расширении апертуры (рис. 1б) все указанные выше эффекты уменьшаются. В частности, в такой системе коэффициенты затухания волн практически совпадают с теми значениями h'' , которые мы привели в разд. 1 для $l = \infty$.

Учтем теперь влияние противоположной открытой стенки на радиационные характеристики волны $LM_{11}^{(q)}$. Если $gl \gg 1$, то можно считать, что в такой системе излучение происходит в первом приближении, как от двух независимых источников с учетом фазовых множителей (см. выше). На рис. 5 и 6 (кривые 2) показаны диаграммы направленности, полученные в этом приближении. Из-за сильного излучения «назад» в первом случае (для рис. 1а) общая диаграмма направленности оказывается сильно осциллирующей. При увеличении апертуры b' (рис. 1б) излучение «назад» каждой из сторон волновода уменьшается, поэтому для расчета радиационных полей (при $gb' \gg 1$) в каждом полупространстве достаточно учитывать излучение только из одной апертуры. Решение рассматриваемой задачи можно, по-видимому, уточнить с помощью геометрической теории дифракции [9].

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН

Расчет возбуждения рассматриваемого волновода может быть проведен методом разложения по собственным волнам непрерывного и дискретного спектра, которые вводятся с помощью \hat{S} -оператора [10]. Этот оператор связывает сходящиеся (E_x^-, H_x^-) и расходящиеся

(E_x^+, H_x^+) конические волны, рассеиваемые на исследуемой структуре: $\hat{S}(E_x^-, H_x^-) = (E_x^+, H_x^+)$, где x — поперечное волновое число конических волн [10, 11]. С помощью уравнений Максвелла можно придать предыдущему равенству вид интегродифференциального [12] или интегрального [13] уравнения для полей рассеивающихся волн (в этих уравнениях в качестве «падающих» волн надо брать собственные волны свободного пространства). Поля вытекающих (квазисобственных) волн не являются собственными модами открытого волновода, поэтому они не входят явно в спектральное разложение [10]. Их можно выделить из интегралов по непрерывному спектру после деформации контура интегрирования в комплексной плоскости x . Кроме вытекающих волн полное поле внутри волновода содержит также пространственную волну (фон) [14]. В этой области основной вклад в поле пространственной волны дают волны непрерывного спектра, у которых $x \approx 0$. Используя указанное выше представление для оператора \hat{S} , можно показать, что поле фона в поперечной плоскости волновода близко к статическому (ср. [7]), а вдоль оси при $z \rightarrow \infty$ убывает по закону $e^{ikhz}/(z \ln^2 z)$.

Мы не будем здесь подробно рассматривать отмеченные выше вопросы, а оценим только эффективность возбуждения волны $LM_{11}^{(q)}$ волной H_{01} металлического волновода. Поскольку радиационные поля вытекающей волны малы, то при вычислении всех интегралов по поперечному сечению можно ограничиться интегрированием только по внутренней области волновода; при этом мы совершаем ошибку порядка $kh'' a^2$ или меньше [11]. Будем предполагать, что оси волноводов совпадают, а размеры вдоль оси y равны. Размер металлического волновода вдоль оси x обозначим через $2a_m$. На рис. 7 приведена зависимость эффективности возбуждения η_e моды $LM_{11}^{(q)}$ от параметра a_m/a , рассчитанная в приближении физической оптики. Величина η_e определялась как отношение мощности, переносимой вытекающей волной через внутреннюю область, к мощности, переносимой волной H_{01} . Отметим, что эффективность возбуждения можно увеличить, применяя плавные преобразователи волн или ответвители с сильной связью.

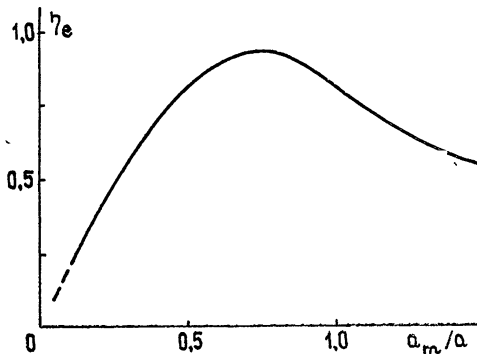


Рис. 7. Эффективность возбуждения волны $LM_{11}^{(q)}$ металлическим волноводом.

Хорошо известно и широко используется на практике свойство диэлектрических слоистых структур в зависимости от параметров слоев (либо частоты) хорошо отражать или почти полностью пропускать падающие на них волны. Такими же свойствами обладают эти структуры

(при постоянных значениях параметров и частоты) в случае наклонного падения лучей, когда их угол скольжения изменяется. Эта особенность слоистых диэлектриков [4] может быть использована для разрезания спектра волн в передающих линиях. В настоящей работе исследован открытый волновод прямоугольного сечения, в котором применен такой слоистый диэлектрик. Подобные линии могут быть использованы в системах телеуправления. Заметим, что область применения таких передающих линий может быть, конечно, шире. Увеличивая поперечные размеры, нетрудно достичь весьма малых потерь волн низших типов (порядка 1 дБ/км и меньше), а уменьшая толщину диэлектрических слоев, можно расширить рабочую полосу частот. В этом случае такие волноводы перспективны в качестве линий передачи с малыми потерями и редким спектром, они могут представлять интерес и в оптическом диапазоне волн [15, 16].

Автор признателен П. Л. Капице, Л. А. Вайнштейну, В. Н. Мелехину за ценные замечания, Б. З. Каценеленбауму и Е. Л. Косареву за обсуждение вопросов, связанных с этой работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Nakahara, N. Kugauchi, In: *Advances in Microwaves*, v. 4, Academic Press, N. Y., 1969, p. 191.
2. K. Mikoshiba, M. Kamimura, *IEEE Trans*, **МТТ-17**, № 1, 15 (1969)
3. А. Б. Маненков, *Радиотехника и электроника*, **22**, № 10, 2043 (1977).
4. В. Н. Мелехин, А. Б. Маненков, в сб. *Электроника больших мощностей*, 6, изд. Наука, М., 1969, стр. 161
5. Л. А. Вайнштейн, Н. И. Леснк, *Краткий курс квазиоптики*, ХГУ, Харьков, 1973.
6. С. Рамо, Дж. Уиннери, *Поля и волны в современной радиотехнике*, Гостехиздат, М., 1950.
7. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*, изд. Сов. радио, М., 1966
8. E. A. J. Marcatili, *Bell Syst Techn J.*, **48**, № 7, 2071 (1969).
9. H. Y. Yee, L. B. Felsen, J. B. Keller, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**, № 2, 268 (1968).
10. А. Б. Маненков, *Изв. вузов — Радиофизика*, **13**, № 5, 739 (1970).
11. А. Б. Маненков, *Изв. вузов — Радиофизика*, **19**, № 2, 263 (1976)
12. A. Nelson, L. Eyges, *J. Opt. Soc. Am.*, **66**, № 3, 254 (1976).
13. *Вычислительные методы в электродинамике*, изд. Наука, М., 1977.
14. А. Б. Маненков, *Изв. вузов — Радиофизика*, **18**, № 7, 1025 (1975).
15. E. Garmire, T. Mc. Mahon, M. Bass, *Appl Opt.*, **15**, № 1, 145 (1976)
16. Ю. Н. Казанцев, О. А. Харлашкин, *Радиотехника и электроника*, **23**, № 10, 2060 (1978)
17. Б. З. Каценеленбаум, *ДАН СССР*, **63**, № 7, 1317 (1947).
18. J. G. Kretzschmar, *IEEE Trans*, **МТТ-18**, № 9, 547 (1970).

Институт физических проблем
АН СССР

Поступила в редакцию
24 января 1979 г.

PROPAGATION AND RADIATION OF WAVES IN RECTANGULAR WAVEGUIDES WITH STRATIFIED WALLS

A. B. Manenkov

Propagation of electromagnetic waves is considered in a rectangular waveguide with two (parallel) metal walls and two stratified dielectric ones. The following wave characteristics have been calculated: phase velocity, attenuation and radiation pattern from open edges. Results obtained may be of interest for system of telecontrol and communication.

УДК 621 396 677 861

К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ДИАГРАММЫ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

Н. К. Юрков

Применяются матричные методы анализа к исследованию характеристик излучения зеркальных антенных систем. Выводится условие синтеза однородной поляризационной диаграммы зеркальной антенны при согласовании последней с окружающим пространством. Приводится пример синтеза однозеркальной параболической антенны, удовлетворяющей полученному требованию.

Эффективность поляризационной селекции сигналов объектов радиоастрономического наблюдения на фоне сильных поляризованных помех значительно снижается при наличии паразитной связи между ортогонально поляризованными каналами, возникающей в зеркальных антеннах радиотелескопов за счет явления перекрестной поляризации. Кросс-поляризация в излучении антенной системы отрицательно сказывается на коэффициенте направленного действия апертурной антенны, снижает точность угломерных радиотехнических устройств, ухудшает энергетические показатели системы.

Анализу кросс-поляризационных явлений в зеркальных антеннах в настоящее время уделяется достаточное внимание. Из библиографий, включающих в себя работы последних лет в области антенных систем с пониженным уровнем кросс-поляризованного излучения, наиболее полной следует считать приведенную в [1].

В предлагаемой работе обосновывается метод синтеза оптимальной апертурной антенны с использованием матричного анализа работы антенных систем, причем критерием оптимальности выбрано условие однородности поляризационной диаграммы зеркальных антенн. Поэтому в дальнейшем под оптимальностью поляризационной диаграммы апертурной антенны следует понимать ее однородность.

В работе [2] на основе существующих матричных методов анализа работы антенных систем получено выражение для матрицы рассеяния $[\hat{S}]$ однозеркальной антенны, представленной эквивалентным шестиполюсником, образованным каскадным соединением шестиполюсника $[S_2]$ облучателя и восьмиполюсника $[S_1]$ рефлектора. Таким образом, однозеркальная антенная система представлена волноводным многополюсником $[\hat{S}]$, имеющим один входной канал — на основной поляризации сигнала — и два выходных — на основной и перекрестной поляризациях. Матрица рассеяния такой антенны имеет вид

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} \\ \hat{S}_{13} & \hat{S}_{23} & \hat{S}_{33} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Условием однородности поляризационной диаграммы антенной системы является равенство нулю элемента \hat{S}_{13} матрицы рассеяния (1), характеризующего передачу энергии в кросс-поляризованный канал. Иными словами, нулевая величина элемента \hat{S}_{13} определяет принятое нами условие оптимальности поляризационной характеристики зеркальной антенной системы.

В работе [2] для матрицы рассеяния $[\hat{S}]$ получены выражения ее элементов \hat{S}_{12} и \hat{S}_{13} , причем симметрические и унитарные матрицы $[S_1]$ и $[S_2]$ имеют вид [2]

$$[S_1] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} S_{110} & S_{120} & S_{130} \\ S_{120} & S_{220} & S_{230} \\ S_{130} & S_{230} & S_{330} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Остановимся более подробно на свойствах матрицы рассеяния восьмиполюсника рефлектора $[S_1]$.

Принятое условие унитарности симметрической матрицы $[S_1]$ справедливо при определенной нормировке падающих и отраженных волн, ортогональности каналов (поляризационной развязке) и отсутствии потерь энергии на поглощение в материале рефлектора. Для условий согласования рефлектора с питающими каналами и отсутствия взаимосвязи между этими каналами ($S_{11} = S_{22} = S_{12} = 0$) из унитарности $[S_1]$ следует $S_{33} = S_{44} = S_{34} = 0$. Поэтому в отличие от [2]* выражения для элементов \hat{S}_{12} и \hat{S}_{13} матрицы рассеяния (1) несколько видоизменяются:

$$\hat{S}_{12} = \frac{E_r}{P} [S_{120} S_{13} (1 - S_{330} S_{24}^2 \Gamma_4) + S_{130} S_{23} (1 - S_{220} S_{14}^2 \Gamma_4)], \quad (4)$$

$$\hat{S}_{13} = \frac{E_r}{P} [S_{120} S_{14} (1 - S_{330} S_{23}^2 \Gamma_3) + S_{130} S_{24} (1 - S_{220} S_{13}^2 \Gamma_3)],$$

где $P = 1 - S_{330} S_{24}^2 \Gamma_4 - S_{220} S_{13} \Gamma_3 - S_{220} S_{14}^2 \Gamma_4 - S_{330} S_{23}^2 \Gamma_3 + S_{330} S_{24}^2 S_{220} S_{13}^2 \Gamma_3 \Gamma_4$, $E_r = 1 - \text{ЭДС генератора}$, Γ_3, Γ_4 — коэффициенты отражения от окружающего пространства по каждому каналу.

Принимая условие полного согласования антенной системы с окружающим пространством ($\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$), из (4) получим условие отсутствия кросс-поляризации в поле излучения зеркальной антенной системы:

$$\hat{S}_{13} = S_{120} S_{14} + S_{130} S_{24} = 0.$$

Учитывая то, что элементы S_{120}, S_{130} и S_{14}, S_{24} матриц рассеяния (2) и (3) суть диаграммы направленности (ДН) облучателя зеркальной антенны на основной и перекрестной поляризациях и ДН самой антен-

* Автор приносит свои извинения за допущенную в [2] неточность.

ны на ортогональных поляризациях, имеем условие синтеза оптимальной поляризационной диаграммы в виде

$$f_{0x} f_{yx} + f_{0xy} f_y = 0. \quad (5)$$

Выражение (5) показывает, что в условиях полного согласования антенны с пространством для уничтожения перекрестной поляризации в излучении зеркальной антенны необходимо создать такой облучатель, который имел бы ДН на перекрестной поляризации, определяемому из условия

$$f_{0xy} = - \frac{f_{0x} f_{xy}}{f_y}. \quad (6)$$

Для осесимметричных зеркальных антенн выполняется $f_{yx} = f_{xy}$. Отсюда нетрудно получить

$$E_\psi = E_\Phi \frac{A(\theta, \varphi) \cos \Phi + \sin \Phi \cos \psi}{\cos \Phi - A(\theta, \varphi) \sin \Phi \cos \psi}, \quad (7)$$

где

$$A(\theta, \varphi) = f_{xy}(\theta, \varphi) / f_y(\theta, \varphi).$$

Равенство (7) определяет наиболее общие требования к составляющим ДН облучателя для обеспечения однородности поляризационной диаграммы зеркальной антенны при согласовании ее с окружающим пространством. Используемые системы координат приведены на рис. 1. Таким образом, одним из возможных путей ликвидации кросс-поляризации в изучении антенной системы является создание у облучателя такого амплитудно-фазового распределения, которое формировало бы ДН на перекрестной составляющей, удовлетворяющую выражению (6) или (7).

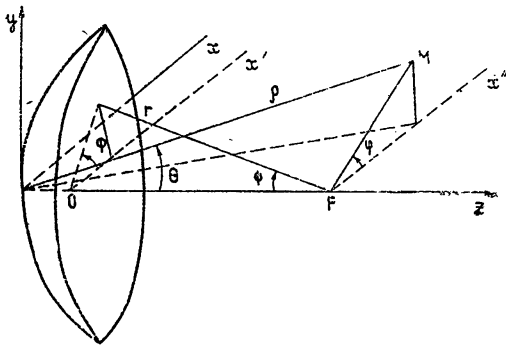


Рис. 1. Системы координат, применяемые для анализа.

Рассмотрим однозеркальную антенную систему, выполненную в виде параболического зеркала с облучением из открытого конца прямоугольного волновода, в котором распространяется основной тип волны. При изучении поляризационных характеристик антенных систем поле в дальней зоне удобно записывать в таких координатах, чтобы в главном направлении орты, по которым раскладывается выходное поле, совпадали бы с ортами входного поля [3]. Для остронаправленных антенных систем, каковыми являются зеркальные антенны радиотелескопов, в этом случае с достаточной точностью можно считать, что орты выходного излучения совпадают с ортами входного в пределах всей

интересующей нас области ДН, расположенной вблизи оси зеркала (главный лепесток и ближние боковые лепестки).

Используя результаты работы [4], для параболического зеркала с фокусным расстоянием 10λ и углом раскрытия 120° при облучении из открытого конца прямоугольного волновода с волной типа H_{10} были получены ДН E_x и E_y на основной и перекрестной поляризациях антенны. На рис. 2 приведены эти ДН для плоскости $\varphi = 45^\circ$, где наблюдается максимум перекрестной поляризации.

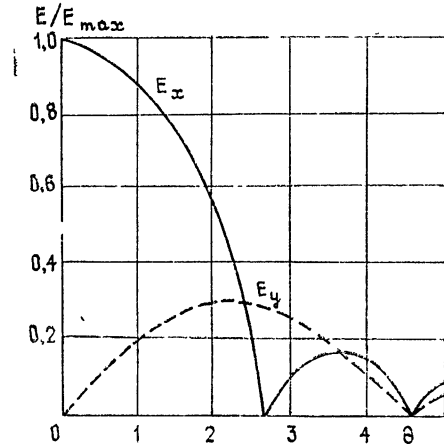


Рис. 2.

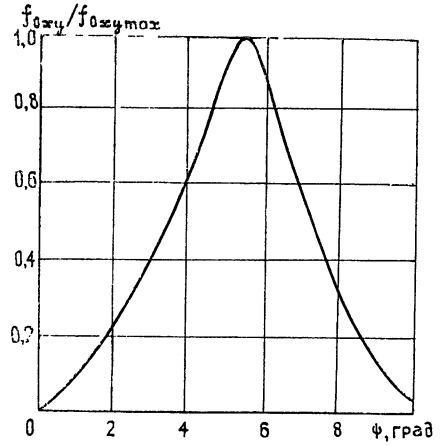


Рис. 3.

Рис. 2. Диаграммы направленности на основной и перекрестной поляризациях параболического зеркала с облучением из открытого конца прямоугольного волновода.

Рис. 3. Результирующая диаграмма направленности облучателя f_{0xy} .

В соответствии с условием синтеза однородной поляризационной диаграммы (6) рассчитывается требуемая ДН облучателя на кросс-поляризации. Результирующая ДН облучателя $F_{зад} = f_{0xy}$ дана на рис. 3.

Скалярная ДН — это зависимость одной из поперечных составляющих поля от угловых координат:

$$F_{зад}(\psi, \Phi) = \int_{S_1} I_y(\rho) \exp[ik(\rho, r_0)] ds,$$

где ρ — радиус-вектор точки интегрирования области S_1 , r_0 — единичный орт сферической системы координат (r, ψ, Φ) , направленный в точку интегрирования, $I_y(\rho)$ — вектор плотности электрического тока, причем считается, что токи области S_1 изменяются во времени t по закону $\exp(i\omega t)$.

Линейная задача синтеза излучающей системы решена вариационным методом, поскольку геометрия антенны полностью известна и задача синтеза состоит в нахождении апертурных функций по заданной ДН [5]. Результаты численного расчета, проведенного на ЭВМ «Раздан-3», даны на рис. 4, где пунктиром нанесено фазовое распределение вдоль линейного излучателя и t — параметрическая функция, описывающая геометрию линейного излучателя. Таким образом, в случае полностью известной геометрии излучающей системы задача синтеза однородной поляризационной диаграммы однозеркальной антенны сводится к синтезу облучателя с амплитудно-фазовым распределением перекрестного тока, приведенным на рис. 4. Данная задача может быть решена, например, с помощью многоволнового облучателя [6].

Синтез оптимальной поляризационной диаграммы двухзеркальной антенной системы легко провести, пользуясь полученными в [2] соотношениями. Для этого система облучатель — контррефлектор рассматривается как одноканальная антенна, формирующая на своем выходе ДН на основной и перекрестной поляризациях. Такое устройство представляется эквивалентным шестиполосником с матрицей рассеяния (3). Система контррефлектор — рефлектор описывается матрицей рассеяния (4) эквивалентного восьмиполосника, осуществляющего двухканальную обработку сигналов.

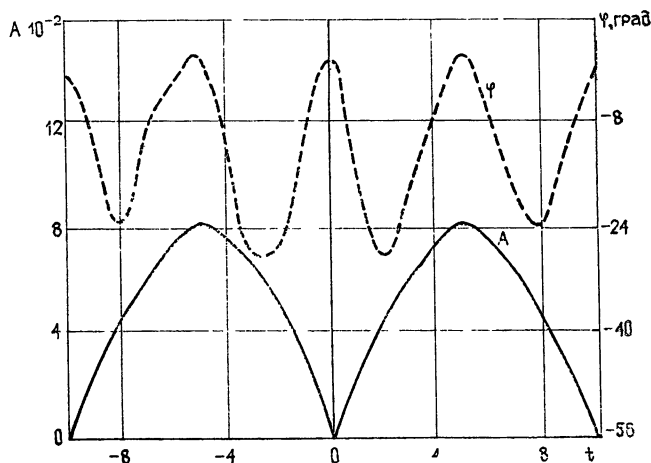


Рис. 4. Результаты численного расчета амплитудно-фазового распределения перекрестного тока в апертуре облучателя.

Ход дальнейших рассуждений аналогичен приведенному в [2]. Для двухзеркальной антенной системы условие синтеза однородной поляризационной диаграммы при согласовании антенны с пространством принимает вид

$$F_{1xy} = - \frac{F_{1r} \Phi_{xy}}{\Phi_y}, \quad (8)$$

где F_{1x} , F_{1xy} — ДН контррефлектора на основной и перекрестной поляризациях соответственно, Φ_y , Φ_{xy} — ДН антенны на основной и перекрестной поляризациях.

Пользуясь методикой работы [5], с помощью (8) легко синтезировать такое амплитудно-фазовое распределение y -составляющей поверхностного тока контррефлектора, которое уничтожает перекрестную составляющую в излучении двухзеркальной антенной системы. Тем самым, появляется возможность синтеза однородной поляризационной диаграммы с помощью как изменения профиля контррефлектора, так и созданием специальной формы ДН облучателя. Таким образом, выражение (6) является наиболее общим условием синтеза однородной поляризационной диаграммы произвольной зеркальной антенной системы при согласовании последней с пространством.

Автор выражает глубочайшую признательность Д. М. Сазонову за интерес к работе и ценные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Нарбут, В. Ф. Хмель, Поляризация излучения зеркальных антенн, изд. Вища школа, Киев, 1978
- 2 Н. К. Юрков, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 4, 551 (1978)

3. В. А. Потехин, В. Н. Татаринев, Теория когерентности электромагнитного поля, Связьиздат, М., 1978
4. Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких волн, Связьиздат, М., 1957.
5. Л. Д. Бахрах, С. Д. Кременецкий, Синтез излучающих систем, изд. Сов. радио, М., 1974.
6. В. А. Ермолаев, Труды, вып. 92, изд. Ленинградского ин-та авиац. приборостроения, Л., 1974, стр. 79.

Пензенский политехнический
институт

Поступила в редакцию
20 ноября 1978 г.

TO THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF OPTIMAL POLARIZED RADIATION PATTERN OF MIRROR ANTENNAS

N. K. Yurkov

Matrix methods of analysis are used to investigate radiation characteristics of mirror antenna system. The synthesis condition of a homogeneous polarized radiation pattern of a mirror antenna is derived when the latter is correlated with the surrounding space. An example of synthesis of one-mirror parabolic antenna satisfying the requirement obtained is given.

Аннотации депонированных статей

В. А. Петленко, Н. А. Хижняк

УДК 621.372.852

РАССЕЯНИЕ H_{10} -ВОЛНЫ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ НАКЛОННЫМ СТЕРЖНЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

В работе рассмотрено решение задачи о рассеянии основной электромагнитной волны тонким идеально проводящим стержнем (полоской), не перегораживающим полностью прямоугольный волновод и расположенным под некоторым углом к вектору напряженности электрического поля. Получено аналитическое выражение для функции распределения тока вдоль стержня, позволяющее определить рассеянное поле и коэффициент отражения. Представлены частотные зависимости характерных параметров при различных углах наклона. Отмечается, что когда стержень касается одним из концов стенки волновода, его наклон приводит к существенному сужению полосы отражения.

Статья депонирована в ВИНТИ,
рег. № 3524—79. Деп. от 8 октября 1979 г.

УДК 621 396 67

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ФАЗИРОВАННОЙ
АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВСТАВКАМИ

А. С. Ильинский, С. В. Трубников

Рассмотрены внутренние резонансы в плоской периодической фазированной антенной решетке с диэлектрическими вставками.

Резонансные явления являются типичными для задач распространения и дифракции электромагнитных волн. Особенно ярко резонансные явления проявляются в случае, когда электромагнитные волны распространяются в периодических структурах, таких, например, как фазированные антенные решетки (ФАР). Поэтому резонансы в ФАР являются объектом пристального внимания исследователей. Получено довольно много количественных результатов, поэтому наибольший интерес представляют качественные исследования резонансов.

Для решения электродинамической задачи применялся прямой проекционный метод [1, 2]. Преимущество данного метода состоит в простоте численной реализации, отсутствии каких-либо ограничений на параметры решетки и в удобстве интерпретации полученных результатов. Метод дает возможность непосредственно получать энергетические характеристики поля и вклад каждой составляющей его волны. Это позволяет проводить не только количественный расчет, но и качественное изучение явлений, происходящих в ФАР.

Исследуем плоскую бесконечную периодическую ФАР, состоящую из идентичных круглых полубесконечных волноводов с диэлектрическими вставками. Введем прямоугольную систему координат X, Y, Z . Центральные оси волноводов параллельны оси Z . В плоскости xOy центры волноводов образуют двоякопериодическую сеть с периодами a и b по оси X и Y соответственно. Ячейка сети — прямоугольник ($-0 \leq x \leq a, -0 \leq y \leq b$). Радиусы волноводов — ρ . Решетка расположена в области $z \geq 0$. Плоскость $z = 0$ вне сечений волноводов и стенки волноводов считаем бесконечно проводящими. Во всех волноводах при $0 \leq z \leq d$ расположены диэлектрические вставки с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Относительная диэлектрическая проницаемость в свободном пространстве ($z < 0$) и в волноводах при $z > d$ равна 1. Относительная магнитная проницаемость в свободном пространстве и в волноводах равна 1 (рис. 1).

Все волноводы возбуждаются волнами H_{11}^+ с постоянными сдвигами фаз, равными δ_x вдоль оси X и δ_y вдоль оси Y .

Искалось электромагнитное поле в волноводах и в свободном пространстве. Посредством теоремы Флоке исходная задача сводится к задаче по отысканию поля в канале Флоке. При $z < 0$ канал Флоке представляет собой область ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z < 0$), а при $z \geq 0$ это волновод с центральной осью, проходящей через точку $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$. Последняя задача решалась с помощью прямого

проекционного метода. Суть метода состоит в том, что тангенциальные компоненты электромагнитного поля представлялись в виде конечных сумм по системам собственных волн в каждой из областей V_0 ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $z < 0$), V_1 ($\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2} \leq \rho$, $0 \leq z \leq d$) и V_2 ($\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2} \leq \rho$, $z > d$):

$$E_i^k = \sum_{n=1}^{N^k} a_n^k(z) e_n^k(x, y), \quad (1)$$

$$H_i^k = \sum_{n=1}^{N^k} b_n^k(z) h_n^k(x, y), \quad x, y, z \in V_k \quad (k = 0, 1, 2).$$

Здесь $e_n^k(x, y)$, $h_n^k(x, y)$ — полные системы поперечных собственных функций канала Флоке в областях V_k , а $a_n^k(z)$ и $b_n^k(z)$ имеют вид

$$a_n^0(z) = B_n^0 e^{-i\Gamma_n z}, \quad b_n^0(z) = -B_n^0 e^{-i\Gamma_n z}; \quad (2)$$

$$a_n^1(z) = A_n^1 e^{ih_n z} + B_n^1 e^{-ih_n z}, \quad b_n^1(z) = A_n^1 e^{ih_n z} - B_n^1 e^{-ih_n z}; \quad (3)$$

$$a_n^2(z) = A_n^2 e^{i\gamma_n z} + \bar{B}_{n_0} e^{-i\gamma_{n_0} z} \delta_{nn_0}, \quad (4)$$

$$b_n^2(z) = A_n^2 e^{i\gamma_n z} - \bar{B}_{n_0} \exp(-i\gamma_{n_0} z) \delta_{nn_0},$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\delta_x + 2\pi n'(n)}{a}\right)^2 - \left(\frac{\delta_y + 2\pi m'(n)}{b}\right)^2}, \quad h_n = \sqrt{k^2 \epsilon - \left(\frac{\mu_n}{\rho}\right)^2},$$

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu_n}{\rho}\right)^2}$$

— постоянные распространения волн в областях V_0 , V_1 и V_2 соответственно, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $n'(n)$ и $m'(n)$ — пары целых чисел, упорядоченные так, чтобы $\text{Re } \Gamma_n$ убывало, а $\text{Im } \Gamma_n$ возрастало с возрастанием номера n , μ_n^2 — радиальные собственные значения для оператора Лапласа в единичном круге, n_0 и \bar{B}_{n_0} — номер и амплитуда возбуждающей волны $H_{n_0}^+$.

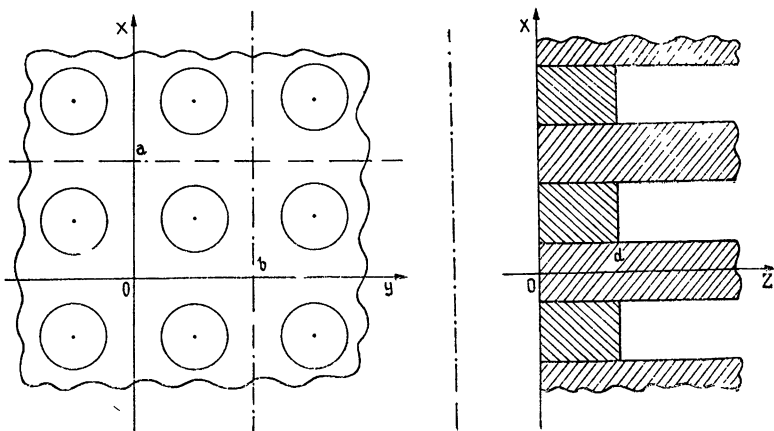


Рис. 1.

Выражения (2), (4) представляют собой парциальные условия излучения.

Коэффициенты разложений A_n^k и B_n^k ищались из проекционных соотношений в сечениях канала Флоке при $z = 0$ и $z = d$.

При $z = 0$

$$\int_{S_0} [E_i^0 h_n^{0*}]_z dS_0 = \int_{S_1} [E_i^1 h_n^{0*}]_z dS_1 \text{ для } n = 1, \dots, N^0, \quad (5)$$

$$\int_{S^*} [e_n^1 H_i^{0*}]_z dS_1 = \int_{S_1} [e_n^1 H_i^{1*}]_z dS_1 \text{ для } n = 1, \dots, N^1,$$

при $z = d$

$$\int_{S_1} [E_i^1 h_n^{1*}]_z dS_1 = \int_{S_1} [E_i^2 h_n^{1*}]_z dS_1 \text{ для } n = 1, \dots, N^1, \quad (6)$$

$$\int_{S_1} [e_n^2 H_i^{1*}]_z dS_1 = \int_{S_1} [e_n^2 H_i^{2*}]_z dS_1 \text{ для } n = 1, \dots, N^2.$$

Здесь S_0 — поперечное сечение области V_0 , а S_1 — поперечное сечение области V_1 .

Из проекционных соотношений (5) и (6) следует непрерывность энергетического интеграла при $z = 0$ и $z = d$ для построенного нами с помощью формул (1)–(4) приближенного решения. Поэтому для приближенного решения будут верны те же энергетические соотношения, что и для точного. И это позволяет довольно легко доказать существование, единственность приближенного решения и сходимости его к точному [1, 2].

На основе проекционного метода был разработан численный алгоритм, составлена программа на языке АЛГОЛ и проведен численный эксперимент. В настоящей работе мы приведем некоторые результаты этого эксперимента.

Исследовалась ФАР с параметрами $a = b = 0,67\lambda_0$, $\rho = 0,33\lambda_0$, $\epsilon = 2,55$. Здесь λ_0 — некоторая фиксированная длина волны. Амплитуда возбуждения $\bar{B}_{n_0} = 1$, сдвиги фаз возбуждения выбирались во всех случаях равными $\delta_x = 0,1ka$, $\delta_y = 0,01kb$. Количество волн N^k в областях V_k выбиралось так, чтобы точность полученных результатов была не меньше 1%. В области V_0 бралось 26 волн: 13 волн E -типа и 13 волн H -типа, а в областях V_1 и V_2 бралось по 12 волн: по 5 волн E -типа и по 7 волн H -типа. В эксперименте задавались два различных значения волнового числа: $k = 5,7/\lambda_0$ и $k = 6,97/\lambda_0$. И в том и в другом случае в областях V_0 и V_2 существовали по две распространяющиеся волны E_{00} , H_{00} и H_{11}^+ , H_{11}^- соответственно. В области V_1 количество распространяющихся волн менялось: в первом случае в области V_1 существовали 3 распространяющихся волны (\tilde{H}_{11}^+ , \tilde{H}_{11}^- , \tilde{E}_{01}), а во втором случае — 5 волн (\tilde{H}_{11}^+ , \tilde{H}_{11}^- , \tilde{E}_{01} , \tilde{H}_{21}^+ , \tilde{H}_{21}^-).

Исследовалась зависимость энергетических (нормированных) коэффициентов волн E_{00} , H_{00} , H_{11}^+ , H_{11}^- от длины вставки d . Энергетические коэффициенты обозначим $Q_{E_{00}}^T$, $Q_{H_{00}}^T$, $Q_{H_{11}^+}^R$, $Q_{H_{11}^-}^R$. Они вычислялись по формулам

$$Q_{E_{00}}^T = \frac{\operatorname{Re} \Gamma_{E_{00}} |B_{E_{00}}^0|^2}{\operatorname{Re} \gamma_{n_0}}, \quad Q_{H_{00}}^T = \frac{\operatorname{Re} \Gamma_{H_{00}} |B_{H_{00}}^0|^2}{\operatorname{Re} \gamma_{n_0}},$$

$$Q_{H_{11}^+}^R = |A_{H_{11}^+}^2|^2, \quad Q_{H_{11}^-}^R = |A_{H_{11}^-}^2|^2$$

и удовлетворяли энергетическому тождеству

$$Q_{E_{00}}^T + Q_{H_{00}}^T + Q_{H_{11}^+}^R + Q_{H_{11}^-}^R = 1.$$

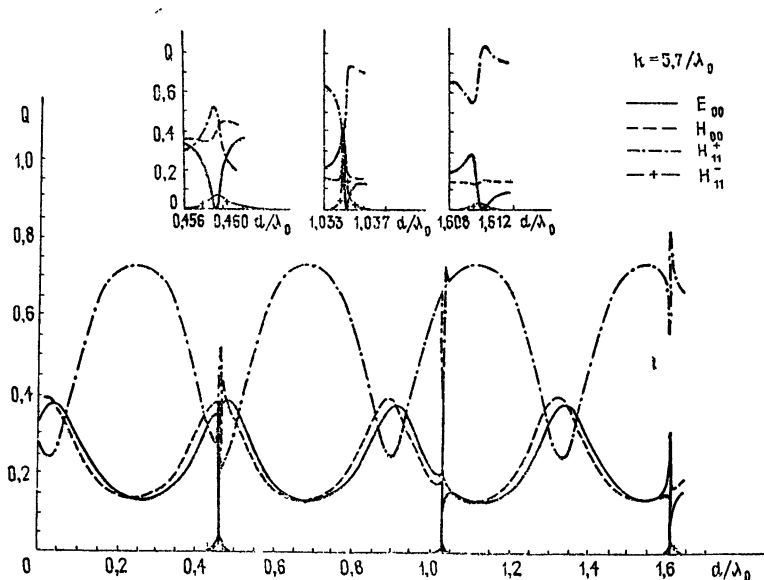


Рис. 2.

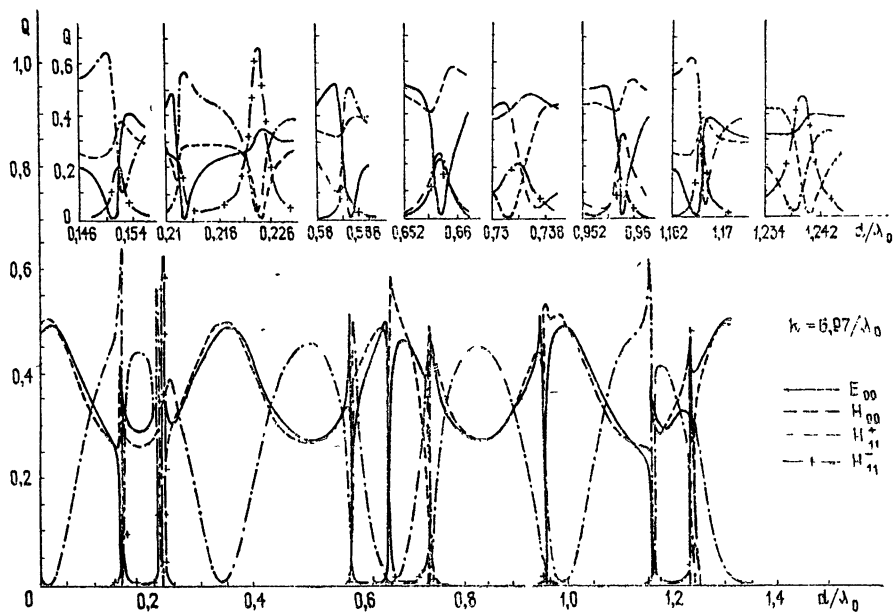


Рис. 3.

Графики энергетических коэффициентов в зависимости от длины вставки d при двух различных значениях волнового числа изображены на рис. 2 и 3. Из графиков видно, что как в первом, так и во втором случае энергетические коэффициенты являются почти периодическими

функциями. Периодичность нарушают только резкие падения (провалы) $Q_{E_{0n}}^T$ или $Q_{H_{0n}}^T$ до нуля. Если исключить провалы, то графики 2 и 3 были бы периодическими с периодом, равным половине длины волны \tilde{H}_{11}^+ во вставке $\left(\frac{\pi}{h \sim H_{11}^+}\right)$. При возникновении провала претерпевают резкие скачки все энергетические коэффициенты и возникает резкий пик $Q_{H_{11}^-}^R$.

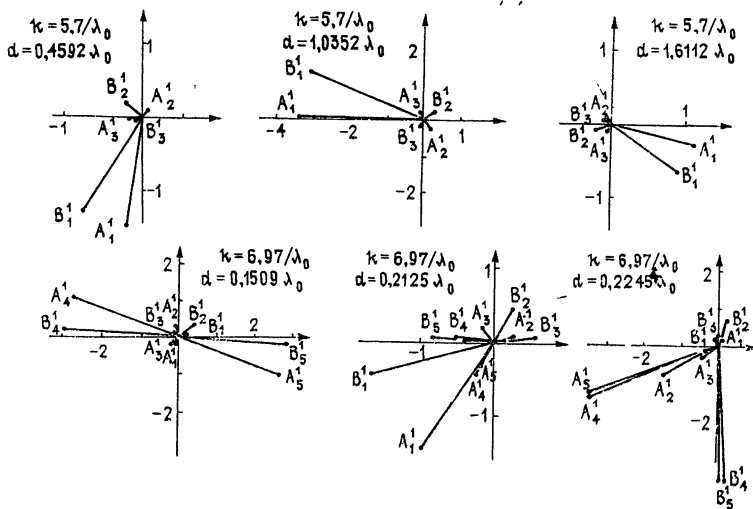


Рис. 4.

Для выяснения механизма появления провалов исследовалось поведение коэффициентов A_n^1 и B_n^1 . На рис. 4 и 5 приведены диаграммы A_n^1 и B_n^1 на комплексной плоскости. На оси абсцисс диаграммы откладываются действительные части коэффициентов, а на оси ординат — мнимые. Диаграммы приводятся только для тех значений длины вставки d , при которых возникает провал, и только для распространяющихся во вставке волн. На всех диаграммах номер $n = 1$ соответствует волне \tilde{E}_{01} , номер $n = 2$ — волне \tilde{H}_{11}^+ , $n = 3$ — \tilde{H}_{11}^- , $n = 4$ — \tilde{H}_{21}^+ и $n = 5$ — \tilde{H}_{21}^- . Номера 4 и 5 присутствуют в диаграммах только при $k = 6,97/\lambda_0$, так как при $k = 5,7/\lambda_0$ волны \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- являются запредельными.

Из диаграмм видно, что при возникновении провалов во вставке преобладают определенные типы волн: при $k = 5,7/\lambda_0$ — волна \tilde{E}_{01} , а при $k = 6,97/\lambda_0$ — либо волна \tilde{E}_{01} , либо волны \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- . С другой стороны, при тех d , при которых не возникают провалы, во вставке всегда преобладает волна \tilde{H}_{11}^+ . Таким образом, при появлении провалов происходит резонансное возрастание амплитуды волны \tilde{E}_{01} или \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- , причем амплитуды прямой и обратной волн оказываются равными. Это говорит о том, что, когда появляется провал, во вставке образуется стоячая волна (происходит резонанс). Поэтому провалы можно классифицировать в зависимости от того, какого типа стоячей волной они обусловлены. Классифицируя таким образом провалы, мы будем

иметь, что при $k = 5,7/\lambda_0$ все провалы обусловлены резонансом волны \tilde{E}_{01} , а при $k = 6,97/\lambda_0$ — второй, четвертый и седьмой провалы (счет провалов ведется по графикам 2 и 3 слева направо) обусловлены резонансом волны \tilde{E}_{01} , а остальные — резонансами волн \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- . Из рис. 3 видно, что среди провалов, обусловленных резонансом волн \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- , присутствуют как провалы E_{00} ($Q_{E_{00}}^T = 0$), так и провалы H_{00} ($Q_{H_{00}}^T = 0$). Отметим, что волной \tilde{E}_{01} обусловлены только провалы E_{00} .

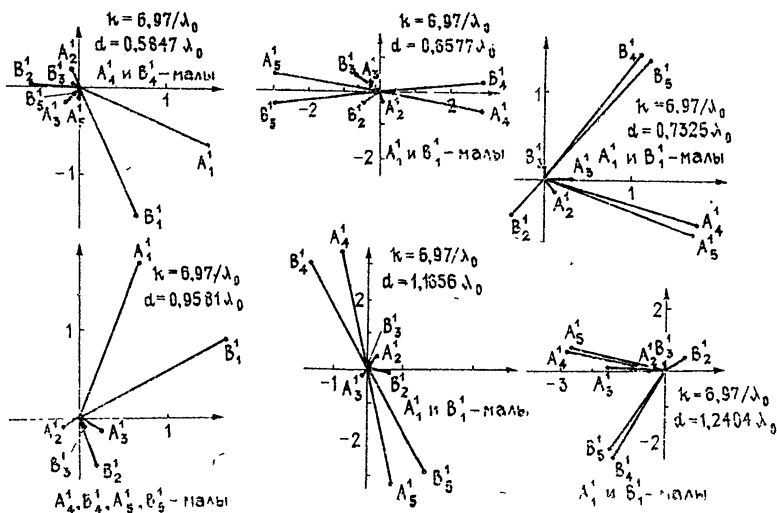


Рис 5.

Итак, мы выделили три группы провалов:

- 1) провалы E_{00} , обусловленные резонансом волны \tilde{E}_{01} ,
- 2) провалы E_{00} , обусловленные резонансом волн \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- ,
- 3) провалы H_{00} , обусловленные резонансом волн \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- .

Отметим одно общее важное свойство: провалы обусловлены только резонансами волн, распространяющихся во вставке, причем такими, что соответствующие типы волн в волноводе являются запердевыми.

А теперь перечислим другие очевидные свойства резонансов. Пусть n — номер резонирующей волны. Во-первых, расстояние d между провалами почти постоянно и близко к половине длины волны, обусловившей провал (π/h_n). Во-вторых, $\Delta\varphi_n = \arg(A_n^1) - \arg(B_n^1)$ — почти постоянная величина для всех провалов, принадлежащих одной группе, а для провалов, обусловленных волнами \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- , $\Delta\varphi_4$ (для волны \tilde{H}_{21}^+) и $\Delta\varphi_5$ (для волны \tilde{H}_{21}^-) — не только почти постоянные величины, но и равные между собой. В-третьих, резонансы волн \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- появляются одновременно.

Из всего сказанного становится ясно, что появление провалов обусловлено накоплением энергии во вставке за счет возникновения режима стоячей волны (резонанса). Режим стоячей волны возникает при определенных значениях длины вставки d , которые обеспечивают необходимый набег фазы.

Некоторые свойства резонансов можно получить из непосредственного исследования системы (6). Подставим (1) — (4) в соотношения (6) и получим

$$A_n^1 = \bar{\alpha}_{n_0} \delta_{nn_0} + \alpha_n A_n^2, \tag{7}$$

$$B_n^1 = \bar{\beta}_{n_0} \delta_{nn_0} + \beta_n A_n^2,$$

где

$$\alpha_n = \frac{P_n + Q_n}{2} \exp [i(\gamma_n - h_n) d], \quad \beta_n = \frac{P_n - Q_n}{2} \exp [i(\gamma_n + h_n) d],$$

$$\bar{\alpha}_{n_0} = \bar{B}_{n_0} \frac{P_{n_0} - Q_{n_0}}{2} \exp [-i(\gamma_{n_0} + h_{n_0}) d],$$

$$\bar{\beta}_{n_0} = \bar{B}_{n_0} \frac{P_{n_0} + Q_{n_0}}{2} \exp [-i(\gamma_{n_0} - h_{n_0}) d],$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\gamma_n}{h_n} & \text{для } E\text{-волн} \\ 1 & \text{для } H\text{-волн} \end{cases}, \quad Q_n = \begin{cases} \varepsilon & \text{для } E\text{-волн} \\ \frac{\gamma_n}{h_n} & \text{для } H\text{-волн} \end{cases}.$$

Пусть n — номер волны, распространяющейся во вставке, причем соответствующий тип волны в волноводе является запердельным ($\text{Im } h_n = \text{Re } \gamma_n = 0$). Пусть также $n \neq n_0$. Тогда соотношения (7) будут иметь вид

$$A_n^1 = \frac{\alpha_n}{\beta_n} B_n^1, \tag{8}$$

отсюда

$$|A_n^1| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} |B_n^1|,$$

но

$$\frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} = \frac{|P_n + Q_n|}{|P_n - Q_n|} = 1$$

и, следовательно,

$$|A_n^1| = |B_n^1|.$$

Таким образом, для всех типов волн, распространяющихся во вставке и запердельных в волноводе, амплитуды прямой и обратной волн во вставке всегда равны для любой длины вставки d . При некоторой длине вставки d обеспечивается необходимый набег фазы и возникает резонанс. Пусть $A_n^1 = A e^{i\varphi_a^n}$, $B_n^1 = A e^{i\varphi_b^n}$, а $\frac{P_n + Q_n}{P_n - Q_n} = e^{i\varphi_n}$.

Здесь $A = |A_n^1| = |B_n^1|$, $\varphi_a^n = \arg(A_n^1)$, $\varphi_b^n = \arg(B_n^1)$,

$$\varphi_n = \arg \left(\frac{P_n + Q_n}{P_n - Q_n} \right) = \begin{cases} 2 \arctg \left(\varepsilon \frac{|\gamma_n|}{h_n} \right) - \pi & \text{для } E\text{-волн} \\ 2 \arctg \left(\frac{|\gamma_n|}{h_n} \right) & \text{для } H\text{-волн} \end{cases}$$

Подставив эти выражения в (6), будем иметь

$$\Delta\varphi_n = \varphi_a^n - \varphi_b^n = \varphi_n - 2h_n d + 2\pi N,$$

где $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отсюда непосредственно следует, что

$$d = \frac{\varphi_n - \Delta\varphi_n}{2h_n} + \frac{\pi}{h_n} N.$$

Поэтому, если $\Delta\varphi_n$ постоянно для тех d , при которых возникает резонанс, то резонансы будут возникать периодически с периодом π/h_n и наоборот. В эксперименте появление резонансов слегка отклонялось от периодичности, но отклонение было настолько мало, что изменение $\Delta\varphi_n$ на диаграммах совершенно не видно.

Во всех других случаях (при $n \neq n_0$), когда волна является распространяющейся в волноводе и во вставке или когда волна является запертой в волноводе и во вставке, амплитуды прямой и обратной волн не равны при любой длине вставки. Равенство амплитуд оказывается возможным, если только $\gamma_n = 0$ или $h_n = 0$. При $n = n_0$ равенство амплитуд прямой и обратной волн для любого значения длины вставки невозможно, и экспериментально резонанс волны с номером n_0 не обнаружен.

Таким образом, режим стоячей волны возможен только для тех типов волн, которые являются распространяющимися во вставке и запертыми в волноводе.

При проектировании ФАР важно знать места возникновения провалов, поэтому свойство «квазипериодичности» появления провалов, в сочетании с приведенной нами их подробной классификацией, может оказаться полезным. Как уже указывалось, энергетические коэффициенты как функции d периодичны, если исключить провалы. Поэтому, построив графики энергетических коэффициентов на одном периоде и найдя положение первых провалов каждого типа, можно довольно точно воссоздать дальнейший ход графиков и лишь уточнять их численно. Таким образом, было найдено положение последующих провалов.

При $k = 6,97/\lambda_0$

1) провалы E_{00} , обусловленные волной \tilde{E}_{01} , возникают при $d = 1,3316\lambda_0$, $d = 1,7051\lambda_0$, $d = 2,0783\lambda_0$,

2) провалы E_{00} , обусловленные волнами \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- , возникают при $d = 1,6739\lambda_0$, $d = 2,182\lambda_0$, $d = 2,69025\lambda_0$,

3) провалы H_{00} , обусловленные волнами \tilde{H}_{21}^+ и \tilde{H}_{21}^- , возникают при $d = 1,74875\lambda_0$, $d = 2,2569\lambda_0$, $d = 2,765\lambda_0$.

При $k = 5,7/\lambda_0$ провалы E_{00} , обусловленные волной \tilde{E}_{01} , возникают при $d = 2,1874$; $2,7634$; $3,3395\lambda_0$.

В заключение отметим, что полученные нами экспериментальные данные и аналитические исследования хорошо согласуются с выводами работы [3], где в ФАР, подобных нашей, провалы объясняются возникновением «внутренних резонансов» волн высших типов, распространяющихся во вставке и не распространяющихся в волноводе. Такие волны получили название «запертых мод». Экспериментальные данные, полученные нами, подтверждают это положение. Кроме того, в процессе анализа результатов выявлены такие важные свойства провалов, как возникновение режима стоячей волны и квазипериодичность. Классификация, полученная нами, детализирует классификацию [3]. Выяснен механизм возникновения стоячей волны и получены фазовые соотношения для резонирующих волн. Показано, что режим стоячей волны (резонанс) возможен только для «запертых мод».

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Ильинский, ЖВМ и МФ, 13, № 1, 119 (1973)
2. А. С. Ильинский, С. В. Трубников, Проекционный метод расчета электродинамических характеристик волноводной фазированной антенной решетки, в сб. Численные методы электродинамики, изд МГУ, 1978, стр. 51
3. A. A. Oliner, in Phased array antennas, Ed Oliner A. A., Knittel G. H., Dedham, Artech House, 1972, p. 107

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 апреля 1979 г

INVESTIGATION OF RESONANCE PHENOMENA IN A PHASED ARRAY
ANTENNA WITH DIELECTRIC PLUGS

A. S. Il'inskij, S. V. Trubnikov

Internal resonances are considered in a plane periodic phased array antenna with dielectric plugs

УДК 621.382.026.64

ФЛИККЕРНЫЙ ШУМ СВЧ ДЕТЕКТОРОВ НА ДИОДАХ С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ

С. А. Корнилов, В. Л. Лосев, А. В. Мещеряков

Приведены результаты экспериментального исследования фликкерных шумов диодов с барьером Шоттки в статическом режиме и в режиме детектирования слабой модуляции СВЧ колебания. Предложена теоретическая модель, объясняющая возрастание уровня фликкерного шума в режиме детектирования флуктуациями коэффициента отражения СВЧ волны от диода.

1. ВВЕДЕНИЕ

СВЧ детекторы на диодах с барьером Шоттки (ДБШ) отличаются повышенной флуктуационной чувствительностью по сравнению с детекторами на $p-n$ -переходе [1]. Целью настоящей работы является выяснение факторов, определяющих шумовое поведение детекторов на ДБШ во фликкерной области. С практической точки зрения это интересно для режимов детектирования слабо модулированных колебаний, характерных для измерителей флуктуаций и измерительных систем с восстановлением несущей.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

2.1. Методика измерений

Исследовались планарные ДБШ n -типа из GaAs. Измерение НЧ шумов проводилось в статическом режиме и в режиме детектирования. В первом случае ток через диод задавался напряжением батарейного источника питания, во втором — мощностью СВЧ колебаний. В режиме детектирования постоянное смещение на диоде было обусловлено только падением напряжения на нагрузочном резисторе; батарейный источник постоянной ЭДС отключался. Для исключения ошибок, связанных с детектированием амплитудного шума СВЧ генератора, уровень этого шума контролировался корреляционным измерителем флуктуаций. Используемый в экспериментах генератор обладал весьма низким уровнем амплитудного шума (165 дБ/Гц на частоте 2 кГц), и ошибка, связанная с его влиянием, не превышала 1 дБ .

2.2. Результаты измерений

На рис. 1а показаны прямые ветви ВАХ двух типичных ДБШ; обратная ветвь ВАХ одного из этих диодов показана на рис. 1б. Экспоненциальная часть прямых ветвей ВАХ ограничена током около 10 мА . Параметры идеализированной ВАХ ($i = I_s(e^{au} - 1)$), определенные из измерений в области $i < 10 \text{ мА}$, сведены в табл. 1.

На рис. 1 представлены также зависимости спектральных плотностей шумовых токов, протекающих через нагрузочный резистор, от напряжения на диоде. Непосредственным результатом измерений были

спектральные плотности шумовых напряжений на нагрузке S_u ; точки на рис. 1а, б получены пересчетом: $S_i = G^2 S_u$, где G — проводимость нагрузки. Такое представление экспериментальных данных вызвано тем, что при измерениях в режимах прямого и обратного смещений использовались разные нагрузки (60 Ом и 10 кОм соответственно), и прямое сопоставление величин S_u было бы неинформативным. Срав-

Таблица 1

№ диода	$a, 1/B$	I_s, A
1	26	$1,66 \times 10^{-10}$
2	25	$1,43 \times 10^{-10}$

нивая графики S_i на рис. 1а и 1б, видим, что S_i в режиме обратного смещения приближается по порядку величины к S_i в режиме прямого смещения только при $U_{обр} \approx 30 В$, что близко к напряжению пробоя.

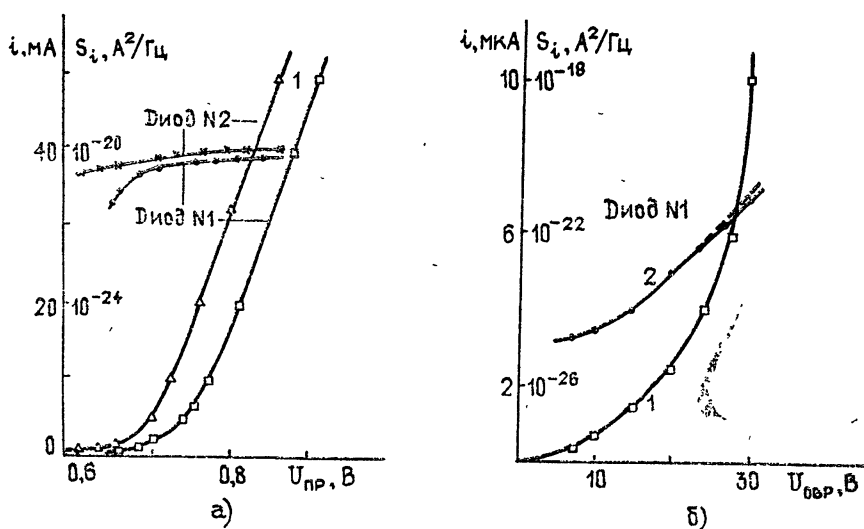


Рис 1. ВАХ диодов (1) и зависимость энергетического спектра шумового тока S_i в нагрузочном резисторе (2) на частоте 2 кГц от смещения (а) — прямое смещение, б) — обратное). Пунктирная линия на рис. 1б — расчетная спектральная плотность $S_{i фл}$ тока источника фликкерного шума при обратном смещении.

На рис. 2 приведены энергетические спектры шумовых токов $S_i(F)$ в статическом режиме и в режиме детектирования СВЧ колебаний. Видно, что во всем обследованном диапазоне частот наблюдались чисто фликкерные процессы.

На рис. 3 совмещены зависимости S_i от тока диода в статическом режиме и в режиме детектирования (во втором случае аргументом является постоянная составляющая тока диода). Эти зависимости различаются. В то время как в статическом режиме при токе, большем $0,5 \div 1 мА$, наступает своеобразное насыщение, в режиме детектирования S_i изменяется по закону, близкому к квадратичному, в более широкой области. При токе, большем 1 мА, фликкерный шум в режиме детектирования значительно больше, чем в статическом режиме. Объяснение этих особенностей будет дано на основании модели, излагаемой в следующем разделе.

Отметим, что приведенные шумовые характеристики можно считать типичными. На это указывают измерения, приведенные для других экземпляров ДБШ того же типа.

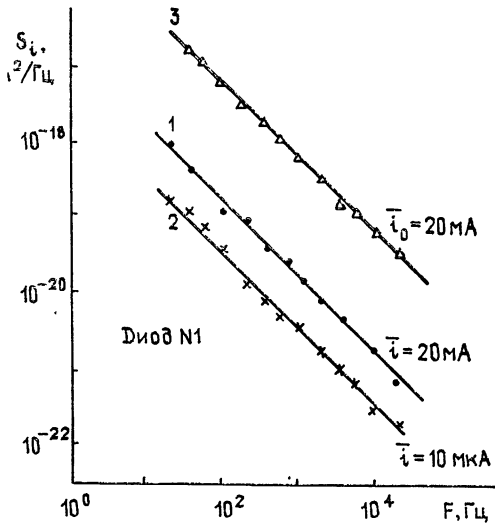


Рис 2 Энергетические спектры шумового тока диода № 1 в нагрузочном резисторе $S_i(F)$:

1 — статический режим, прямое смещение ($\bar{i} = 20 \text{ мА}$), 2 — статический режим, обратное смещение ($\bar{i} = 10 \text{ мкА}$), 3 — режим детектирования СВЧ колебаний ($\bar{i}_0 = 20 \text{ мА}$).

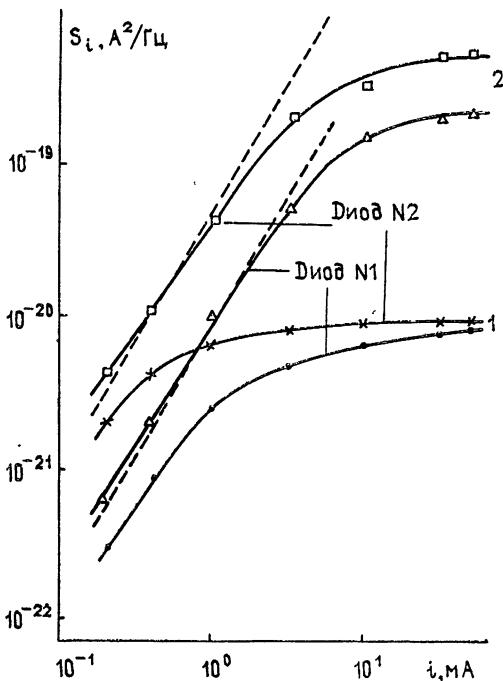


Рис. 3 Зависимость энергетического спектра шумового тока в нагрузочном резисторе S_i на частоте 2 кГц от среднего тока диода (сплошные линии): 1 — статический режим, 2 — режим детектирования. Пунктирные линии — расчетные спектральные плотности $S_{i, \text{фл}}$ источников шумового тока в статическом режиме.

3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

3.1. Допущения. Общие соотношения

В основе модели лежат три допущения.

1) Преобразование шумов квазистатично. В частотной области действия фликкерного шума это допущение естественно.

2) Влияние шумов обратного тока в режиме детектирования пренебрежимо мало. Это вытекает из малости $I_s = 0(10^{-10} \text{ А})$ по сравнению с постоянной составляющей тока детектора $i = 0(10^{-3} \text{ А})$ и прямо подтверждается экспериментом (рис. 1).

3) Диод рассматривается как нелинейная активная проводимость, т. е. считается, что нелинейность емкости имеет второстепенное значение. Основанием для этого является то, что в режиме детектирования слабой модуляции импульсы прямого тока (и его среднее значение) велики.

С учетом сказанного можно считать, что реактивность диода скомпенсирована настройкой детекторной секции. Это позволяет изобразить эквивалентную схему входной (СВЧ) цепи детектора так, как показано на рис. 4 а. Здесь g_0 — характеристическая проводимость линии, $g_1(U, V)$ — проводимость диода по первой гармонике, зависящая от амплитуды СВЧ колебания V и напряжения смещения U , V_0 — амплитуда падающей волны. Эквивалентная схема выходной (НЧ) цепи детектора показана на рис. 4 б, где E — ЭДС источника постоянного напряжения*, G — проводимость нагрузки, $i_0(U, V)$ — генератор тока, замещающий диод, $i_{\text{фл}}(t)$ — генератор, отображающий источник фликкерного шума в токе диода.

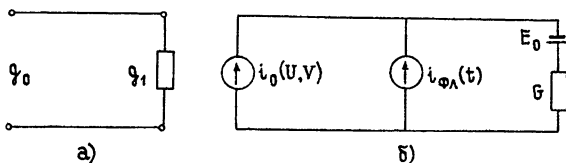


Рис. 4 Эквивалентные схемы входной (а) и выходной (б) цепей СВЧ детектора на ДБШ.

Уравнения, соответствующие схемам на рис. 4:

$$V = V_0 [1 + \Gamma(U, V)],$$

$$U = E_0 - \frac{1}{G} [i_0(U, V) + i_{\text{фл}}(t)], \quad (1)$$

где $\Gamma(U, V) = \frac{g_0 - g_1(U, V)}{g_0 + g_1(U, V)}$ — коэффициент отражения.

Представив U и V суммами средних значений и малых флуктуаций ($U = \bar{U} + \delta U(t)$, $V = \bar{V} + \delta V(t)$), можно получить из (1) линеаризованные флуктуационные уравнения

$$\delta V(t) = V_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial V} \delta V(t) + V_0 \frac{\partial \Gamma}{\partial U} \delta U(t), \quad (2)$$

$$G \delta U(t) = - \frac{\partial i_0}{\partial V} \delta V(t) - \frac{\partial i_0}{\partial U} \delta U(t) - \delta i_{\text{фл}}(t),$$

* Внутреннее сопротивление источника напряжения предполагается малым по сравнению с сопротивлением нагрузки

где

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial U, V} = - \frac{2g_0}{(g_0 + g_1)^2} \frac{\partial g_1}{\partial U, V}.$$

Здесь и в дальнейшем производные берутся в точках $U = \bar{U}$, $V = \bar{V}$, что не отмечено индексацией для упрощения записи. То же относится к функции g_1 .

Разрешая (2) относительно $\delta U(t)$, найдем

$$\delta U(t) = - \frac{\delta i_{\text{фл}}(t)}{G + g_{\sim} + g_{\Delta}}. \quad (3)$$

В этом выражении $g_{\sim} + g_{\Delta}$ — низкочастотная «электронная» проводимость диода, состоящая из обычной дифференциальной проводимости $g_{\sim} = \frac{\partial i_0}{\partial U}$ и дополнительной, появление которой связано с учетом зависимости Γ от U :

$$g_{\Delta} = \frac{V_0}{1 - V_0} \frac{\partial \Gamma}{\partial V} \frac{\partial i_0}{\partial V} \frac{\partial \Gamma}{\partial U}. \quad (4)$$

Уравнению (3) соответствует эквивалентная схема, описывающая шумы в выходной цепи детектора (рис. 5). С физической точки зрения изменение «электронной» составляющей проводимости цепи на величину g_{Δ} обусловлено тем, что напряжение смещения на диоде U влияет

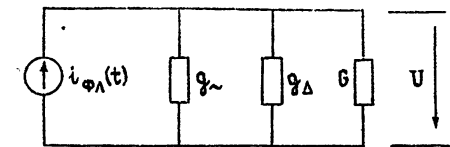


Рис. 5. Шумовая эквивалентная схема выходной цепи детектора на ДБШ.

на величину тока диода не только прямым путем, но и косвенно — в результате изменения коэффициента отражения изменяется амплитуда СВЧ напряжения на диоде.

Из (3) следует выражение для энергетического спектра флуктуаций напряжения на нагрузке детектора:

$$S_U(F) = \frac{S_{i_{\text{фл}}}(F)}{(G + g_{\sim} + g_{\Delta})^2}. \quad (5)$$

3.2. Соотношения для идеализированной ВАХ диода

Идеализированная ВАХ диода с барьером Шоттки имеет вид [2]

$$i = I_s \left[\exp \left(n \frac{eu_0}{kT} \right) - 1 \right],$$

где u_0 — напряжение на барьере, а n — коэффициент формы. При ограниченных значениях прямого тока можно пренебречь объемным сопротивлением полупроводника и считать $u_0 \approx u$, где u — напряжение на зажимах диода. Кроме того, крайняя малость обратного тока (для обследованных диодов $I_s \approx 10^{-10}$ А) и его шумов (см. разд. 2), позволяет пренебречь им, т. е. принять

$$i = I_s e^{au}, \quad (6)$$

где $a = n \frac{e}{kT}$.

В нашем случае $u = U + V \cos \omega t$ и выражения для средней (за период СВЧ колебания) составляющей тока и его первой гармоники имеют вид

$$i_0 = I_s e^{aU} I_0(aV); \quad (7)$$

$$i_1 = 2I_s e^{aU} I_1(aV) \cos \omega t. \quad (8)$$

Для низкочастотной дифференциальной проводимости диода и его СВЧ проводимости (по первой гармонике) получаем

$$g_{\sim} = \frac{\partial i_0}{\partial U} = a I_s e^{aU} I_0(aV) = a \bar{i}_0; \quad (9)$$

$$g_1 = \frac{2I_s e^{aU} I_1(aV)}{\bar{V}} = 2g_{\sim} \frac{I_1(aV)}{aV I_0(aV)}. \quad (10)$$

Выражение для проводимости g_{Δ} можно привести к виду

$$g_{\Delta} = -g_{\sim} \frac{a\bar{V} \frac{I_1(a\bar{V})}{I_0(a\bar{V})}}{\left(1 + \frac{g_0}{2g_{\sim}}\right) \frac{a\bar{V} I_0(a\bar{V})}{I_1(a\bar{V})} - 1}. \quad (11)$$

Для диодов с барьером Шоттки характерны большие значения $a\bar{V}$ в режиме детектирования, что обусловлено малостью I_s . Так, для исследованных образцов при $\bar{i}_0 = 3 \text{ мА}$ и $G = 0,01 \text{ См}$ $a\bar{V} \approx 30$. Это позволяет упростить (10) и (11), используя асимптотические представления модифицированных функций Бесселя:

$$g_1 \approx \frac{2g_{\sim}}{a\bar{V}}; \quad (12)$$

$$g_{\Delta} \approx - \frac{g_{\sim}}{1 + g_0/2g_{\sim}}. \quad (13)$$

Относительная ошибка, допускаемая при этом, имеет порядок $1/a\bar{V}$ [3]. При использовании волноводной детекторной секции (как это было в наших экспериментах) g_0 мало и отношение $g_0/2g_{\sim}$ в области рабочих режимов оказывается по крайней мере того же порядка, что и $1/a\bar{V}$, т. е. может быть отброшено в знаменателе (13):

$$g_{\Delta} \approx -g_{\sim}. \quad (14)$$

Следует помнить, что (14) справедливо лишь для достаточно больших $a\bar{V}$; при $V_0 \rightarrow 0$ $\bar{V} \rightarrow 0$ и, как следует из (11), $g_{\Delta} \rightarrow 0$.

Подставляя (14) в (5), приходим к результату

$$S_V(F) \approx \frac{S_{i\phi\lambda}(F)}{G^2}, \quad (15)$$

т. е. при больших $a\bar{V}$ добавочная проводимость g_{Δ} компенсирует дифференциальную проводимость g_{\sim} , и генератор шумового тока работает только на проводимость нагрузки G . «Электронная» проводимость, шунтирующая G в статическом режиме работы диода, в режиме детектирования СВЧ колебаний практически исчезает.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Пределы применимости идеализированной модели

Как уже отмечалось выше, ВАХ обследованных ДБШ экспоненциальна до тока около 10 мА. Это является пределом применимости идеализированной модели для статического режима диодов. Оценим максимальный средний ток в режиме детектирования, соответствующий работе в пределах экспоненциальности ВАХ. Как следует из (7) и (8), в асимптотическом приближении амплитуда основной гармоники вдвое превышает постоянную составляющую. Пренебрегая высшими гармониками, можем сформулировать грубую оценку: $\bar{I}_0 \leq 10$ мА, откуда получаем граничное значение $\bar{i}_0 \approx 3$ мА.

Рассмотрим теперь обоснованность асимптотического приближения. В режиме детектирования $\bar{U} = -\frac{\bar{i}_0}{G}$. Подставляя это значение в (7) и задавая \bar{i}_0 , нетрудно определить $a\bar{V}$. Для минимальных токов, имевших место в эксперименте ($\bar{i}_0 = 0,2$ мА), получаем $a\bar{V} = 17$, максимальное значение ($\bar{i}_0 = 3$ мА) $a\bar{V} = 32$. Относительная ошибка асимптотического представления модифицированных функций Бесселя ($1/a\bar{V}$) лежит, таким образом, в пределах $6 \div 3\%$. Что касается относительной ошибки при расчетах по формуле (15), то она грубо оценивается как $\frac{1}{a\bar{V}} \frac{g_{\sim}}{G} = \frac{a\bar{i}_0}{Ga\bar{V}}$. В пределах $\bar{i}_0 = 0,2 \div 3$ мА она изменяется от 3 до 27%, т. е. не превышает 1 дБ (оценка сделана для использованной в экспериментах величины $G = 0,01$ См).

4.2. Интенсивность источников фликкерного шума в режиме детектирования и в статическом режиме (прямое смещение)

Как следует из (15), в режиме детектирования спектральная плотность шумового тока, протекающего через нагрузку (S_i), совпадает со спектральной плотностью тока источника фликкерного шума ($S_i = G^2 S_U \approx S_{i \text{ фл}}$). Из рис. 3 видно, что в области применимости (15) ($\bar{i}_0 < 3$ мА) $S_i \sim (\bar{i}_0)^2$ (кривые 1), что характерно для фликкерного шума. Это само по себе указывает на слабое шунтирование источника шума «электронной» проводимостью диода (ср. с аналогичной зависимостью в статическом режиме — кривые 2 на рис. 3, где влияние «электронной» проводимости очевидно). Результаты анализа (разд. 3.2) объясняют самокомпенсацию «электронной» проводимости в режиме детектирования флуктуациями коэффициента отражения от диода. Отклонение зависимости $S_i(\bar{i}_0)$ от квадратичного закона при $\bar{i}_0 > 3$ мА (кривые 1 на рис. 3) может быть связано с неэкспоненциальностью ВАХ диодов.

В статическом режиме, при $g_{\Delta} = 0$, из (5) следует

$$S_{i \text{ фл}} = S_U (G + g_{\sim})^2 = S_i \left(\frac{G + g_{\sim}}{G} \right)^2,$$

где $g_{\sim} = a\bar{i}_0$. Результаты расчета $S_{i \text{ фл}}$ по зависимости $S_i(\bar{i}_0)$ (кривые 2 на рис. 3), нанесены на рис. 3 пунктиром. При $\bar{i}_0 < 3$ мА расчетные зависимости практически повторяют ход спектральных плотностей $S_i(\bar{i}_0)$, полученных экспериментально в режиме детектирования. Если вспомнить, что в режиме детектирования $S_i \approx S_{i \text{ фл}}$, то это приводит

к важному выводу: в обследованных ДБШ источник фликкерного шума не изменяет своих физических свойств при быстропеременном воздействии; его интенсивность зависит только от величины среднего тока диода и равна интенсивности фликкерного шума в статическом режиме при том же токе.

В вышеприведенных рассуждениях так же, как и в анализе, не принималась во внимание периодическая нестационарность шума в режиме детектирования. Нетрудно показать (Приложение), что она не сказывается на спектральной плотности низкочастотного шума при условии $1/F_{\max} \ll T$, где F_{\max} — максимальная граница полосы шума, а T — период колебания. В нашем случае это условие заведомо выполнялось.

4.3. Интенсивность источника фликкерного шума при обратном смещении

Спектральная плотность тока источника фликкерного шума $S_{i \text{ фл}}$ при обратном смещении показана на рис. 16 пунктиром. Она получена пересчетом $S_{i \text{ фл}} = S_i \left(\frac{G + g_{\sim}}{G} \right)^2$. НЧ дифференциальная проводимость $g_{\sim} = \frac{\partial i}{\partial U}$ рассчитывалась в данном случае по ВАХ; величина G была равна в эксперименте 10^{-4} См . В отличие от случая прямого смещения зависимость $S_{i \text{ фл}}(\bar{i})$ заметно отличается от квадратичной. При очень большом обратном смещении уровень $S_{i \text{ фл}}$ достигает $10^{-21} \text{ А}^2/\text{Гц}$, что сравнимо по порядку с уровнем $S_{i \text{ фл}}$ при малых токах в режиме прямого смещения ($10^{-21} \div 10^{-20} \text{ А}^2/\text{Гц}$, рис. 3, диод № 1, пункт). Однако средние токи различаются при этом существенно (10 мкА и 200 мкА), так что относительная спектральная плотность шума $S_{i \text{ фл}}/\bar{i}^2$ при обратном смещении на два — три порядка больше, чем при прямом. Это говорит о различии свойств источников фликкерного шума при прямом и обратном смещениях.

4.4. Сопоставление с результатами исследования фликкерных шумов в диодах с p — n -переходом

Сходство ВАХ ДБШ и диодов с p — n -переходом, казалось бы, позволяет рассматривать их фликкерные шумы в рамках единой модели. Однако эксперимент указывает на важное различие: в ДБШ уровень фликкерных шумов существенно возрастает при переходе от статического режима к динамическому (к режиму детектирования). В диодах с p — n -переходом возможно как некоторое повышение уровня шумов, так и его снижение. Последнее указано в [5] и неоднократно наблюдалось нами. Это не укладывается как в рамки модели, обсуждаемой в настоящей статье, так и в рамки модели, предложенной для диодов с p — n -переходом в [6], что указывает, по нашему мнению, на необходимость проведения дополнительных исследований.

Авторы благодарят С. М. Дремуха и М. В. Никушкина за помощь при выполнении экспериментальной части работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Следуя [4], поясним законность пренебрежения периодической нестационарностью источника фликкерного шума. Дисперсия периодически нестационарного фликкерного шума — $\overline{\delta i_{\text{фл}}^2} = \frac{A I^2(t)}{\omega} \Delta\omega$, где

A — постоянный коэффициент. Принимая произвольный периодический закон изменения $I(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n e^{jn\omega_0 t}$ и вводя стационарную случайную функцию $\xi(t)$ с энергетическим спектром $S_\xi(\omega) = \frac{AB_0^2}{\omega}$ (B_0 — постоянная составляющая тока), можно записать $\delta i_{\phi n}(t) = \xi(t) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{B_n}{B_0} e^{jn\omega_0 t}$. Энергетический спектр $\delta i_{\phi n}(t)$ таков:

$$S_{i_{\phi n}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{|B_n|^2}{B_0^2} S_\xi(\omega - n\omega_0).$$

Из этого выражения видно, что вклад периодической нестационарности в низкочастотную часть спектра ($\omega \ll \omega_0$) ничтожно мал. Это связано с убыванием спектральной плотности $S_\xi(\omega)$ на высоких частотах: при $\omega \ll \omega_0$ $S_\xi(\omega - n\omega_0)$ пренебрежимо мала при всех n , кроме $n = 0$. Таким образом, при $\omega \ll \omega_0$ $S_{i_{\phi n}}(\omega) \approx S_\xi(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Couley, Low-noise Schottky-barrier videodetector diode, IEEE International el dev meeting, Oct. 23—25, 1968, Washington, IEEE Trans., ED-16, № 2, (1969).
2. СВЧ полупроводниковые приборы и их применение, под ред. Г. Уотсона, изд. Мир, М., 1972.
3. Г. А. Розет, Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1956.
4. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
5. J. Lipkin, S. Maniv, Comparison of diode noise under RF and DC excitations, IEEE Trans, MTT22, № 8, 793 (1974).
6. А. В. Якимов, Об измерении фликкерных флуктуаций проводимости полупроводниковых диодов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 8, 1170 (1974).

Ленинградский электротехнический
институт связи
Ленинградский политехнический
институт

Поступила в редакцию
22 марта 1979 г.

FLICKER NOISE OF VHF DIODE DETECTORS WITH SHOTTKY BARRIER

S. A. Kornilov, V. L. Losev, A. V. Meshcheryakov

In the static regime and in the regime of detection of weak modulation of VHF oscillation results are given of experimental investigation of flicker noises of diodes with Schottky barrier. A theoretical model is suggested which explains the increase of the level of flicker noise in the regime of detecting by fluctuations of the coefficient of VHF reflection of a wave from the diode.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 535.8 . 535 214.4

**РАДИОМЕТР САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА С ПОВЫШЕННОЙ
ДОЛГОВРЕМЕННОЙ СТАБИЛЬНОСТЬЮ**

В. П. Егорычев, А. В. Красиков

В настоящее время одной из важных задач радиоастрономии является изучение флуктуаций радиоизлучения и, в частности, радиоизлучения Солнца с целью получения информации о процессах, происходящих в плазме. Исследования флуктуаций радиоизлучения Солнца, проводимые в течение ряда последних лет, привели к обнаружению в частотных спектрах флуктуаций квазипериодических компонент (КПК) с периодами от десятков секунд до нескольких часов [1]. При этом встретились значительные трудности создания аппаратуры, связанные с малостью амплитуд КПК (0,3—1% T_{\odot}) и разнообразием их периодов. Все это приводит к тому, что для повышения достоверности выделения КПК на фоне интегрального радиоизлучения необходимо проводить их выделение по как можно большему интервалу наблюдений, к тому же для устранения влияния флуктуаций атмосферы необходимо эти наблюдения проводить на радиотелескопах, разнесенных на значительные расстояния. Естественно, что при этих условиях на радиоастрономический измерительный комплекс налагаются особые требования по обеспечению долговременной стабильности его собственных параметров. В работе [2] приводятся данные о разработке радиометра 3-сантиметрового диапазона длин волн для исследования флуктуаций радиоизлучения Солнца. Этот радиометр имеет относительный уход коэффициента усиления не более 1,5% за восемь часов непрерывной работы.

Дальнейшим развитием аппаратуры этого класса является разработка радиометров с использованием гибридно-интегральных схем СВЧ (ГИССВЧ). Наряду с известными методами обеспечения высокой долговременной стабильности (полное термостатирование, применение двойной стабилизации питающих напряжений) существенное улучшение ее в этом случае может быть достигнуто за счет малых температурных и временных уходов СВЧ элементов, выполненных с применением высокостабильных твердых СВЧ подложек гибридных схем. Использование в радиометре элементов на ГИССВЧ (балансного смесителя на диодах с барьером Шоттки, микрополоскового гетеродина и усилителей промежуточной частоты) обеспечивает высокую надежность, стабильность и хорошую воспроизводимость параметров преобразователя. Кроме того, существенное уменьшение габаритов и веса приемного СВЧ блока радиометра позволяет уменьшить потребляемую им мощность и снизить питающие напряжения. При такой реализации СВЧ блок может быть легко установлен в фокус параболического радиотелескопа.

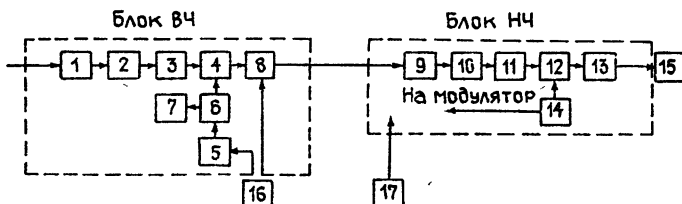


Рис. 1. Блок-схема радиометра:

- 1 — модулятор, 2 — вентиль, 3 — волноводно-полосковый переход,
- 4 — смеситель, 5 — генератор, 6 — циркулятор, 7 — нагрузка, 8, 9 —
- усилитель промежуточной частоты, 10 — квадратичный детектор,
- 11 — усилитель низкой частоты, 12 — синхронный интегратор,
- 13 — усилитель постоянного тока, 14 — генератор опорного и моду-
- лирующего напряжения, 15 — самописец, 16, 17 — блоки питания.

На рис. 1 приводится блок-схема разработанного радиометра 3-сантиметрового диапазона длин волн, внешний вид СВЧ приемного блока (модуля) изображен на рис. 2.

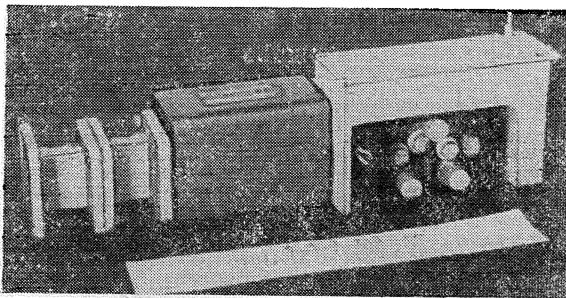


Рис. 2.

Для соединения микрополоскового ВЧ блока с облучателем антенны разработан широкополосный волноводно-полосковый переход с волновода 23×10 мм на микрополосковую линию. Он выполнен на основе $3/4\lambda$ -перехода в П-образном волноводе на микрополосковую линию с диэлектриком толщиной 0,5 мм. Коэффициент стоячей волны перехода не более 1,2 в полосе частот 1 ГГц. Общие потери СВЧ тракта до смесителя (модулятор, волноводный вентиль, волноводно-полосковый переход) не более 1,6 дБ.

Балансный смеситель и гетеродин выполнены на диэлектрических подложках из поликора. Применение в смесителе бескорпусных диодов с барьером Шоттки позволило получить потери преобразования смесителя менее 5 дБ. Для увеличения чувствительности приемника в радиометрическом режиме используются прямой и зеркальный каналы супергетеродина. В микрополосковом гетеродине применен диод Ганна. Генератор развязан Y-полосковым циркулятором и имеет на выходе мощность около 15–20 мВт.

Низкочастотный блок разработан в НИРФИ [3] и состоит из УНЧ, синхронного интегратора, генератора опорного и модулирующего напряжения и усилителя постоянного тока. Временная нестабильность коэффициента передачи блока низкой частоты составляет 0,5% за восемь часов.

Параметры радиометра

Флуктуационный порог чувствительности 0,15 К
 Нестабильность коэффициента усиления за 8 часов 0,8%
 Полоса пропускания УПЧ 300 МГц
 Напряжение питания — 12,6 В
 Мощность, потребляемая ВЧ блоком, 10 Вт
 Диапазон рабочих температур — $40^\circ\text{C} \div +40^\circ\text{C}$
 Температура термостатирования $+40^\circ\text{C} \pm 0,5^\circ\text{C}$
 Габариты ВЧ блока $240 \times 55 \times 65$ мм³

Таким образом, в результате проработки вопросов по улучшению долговременной стабильности приемной аппаратуры на основе ГИССВЧ создан высокостабильный приемник для исследования долгопериодных компонент флуктуаций радиоизлучения Солнца. Малые габариты и вес при высокой надежности позволяют применять ВЧ блок разработанного радиометра в системах бортовой радионавигации и теплолокации, в системах радиосвязи, в составе мобильных экспедиционных радиотелескопов и для изучения теплового радиоизлучения биологических объектов.

Авторы выражают благодарность М. М. Кобрину за ценные советы при проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Кобрин, Phys. Sol., Potsdam, № 2, 3 (1976).
2. В. П. Егорычев и др., Астрон. циркуляр, № 964 (1977)
3. С. К. Малышев и др., Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1211 (1975).

УДК 539.2.01

УСИЛЕНИЕ И МОДУЛЯЦИЯ КВАДРУПОЛЬНОГО СПИНОВОГО ЭХА ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Н. Е. Айнбиндер, А. С. Ажеганов, А. С. Ким

Обнаружение двухчастотного квадрупольного спинового эха [1] стимулировало интерес к проблеме изучения влияния двухчастотного воздействия на многоуровневую спин-систему [2, 3]. Влияние двухчастотного импульсного воздействия на затухание амплитуды спинового эха в многоуровневых квадрупольных спин-системах обнаружено ранее [4–6], причем импульсная программа предусматривала подачу РЧ импульса накачки на соседнем переходе одновременно с подачей зондирующего импульса на наблюдаемом переходе. При этом амплитуда сигнала эха уменьшалась в зависимости от длительности Δt импульса накачки, достигая минимума при $\Delta t = \tau$ (временной интервал между зондирующим и считывающим импульсами).

В настоящей работе используется программа, в которой импульс накачки на соседнем с наблюдаемым переходом подается непосредственно перед зондирующим импульсом. Как будет показано ниже, это приводит к усилению амплитуды сигнала спинового эха и модуляции огибающей сигналов эха.

Аналогичные программы применялись [7] для наблюдения так называемого явления «захвата», а также при изучении поведения сигналов индукции [3, 8]. Целью настоящей работы является теоретическое и экспериментальное изучение эффекта усиления и модуляции спинового эха.

Метод матрицы плотности с учетом импульсного воздействия на любой соседний переход для произвольного ядерного спина $J > 3/2$ и отсутствия аксиальной симметрии градиента электрического поля (ГЭП) приводит к следующему выражению для амплитуды спинового эха на переходе $m \rightarrow m'$:

$$E_m, m' = E_0(1 + \alpha \sin^2 \beta \gamma H_1 \Delta t), \quad (1)$$

где E_0 — амплитуда спин-эха в отсутствие импульса накачки длительностью Δt и амплитудой H_1 , γ — гиромагнитное отношение ядра, β — матричный элемент оператора I_x в представлении полного квадрупольного гамильтониана для состояния, между которыми имеет место накачка. Коэффициент α есть отношение частот накачиваемого и наблюдаемого переходов.

Выражение (1) описывает модуляционный эффект огибающей сигналов спин-эха при H_1 , линейно-поляризованном вдоль оси x градиента электрического поля, в случае изучения монокристаллов. Из соотношения (1) видно, что применяемое импульсное двухчастотное воздействие приводит с одной стороны к увеличению амплитуды эха (коэффициент усиления может достигать, например, для $J = 5/2$ значения, равного 3), а с другой, — к модуляции огибающей сигналов эха с периодом $\beta \gamma H_1 \Delta t$. Последнее обстоятельство позволяет определить величину амплитуды РЧ поля H_1 импульса накачки.

Экспериментальное наблюдение рассматриваемых эффектов проводилось на ядрах ^{185}Re и ^{187}Re ($J = 5/2$) в полукристаллическом KReO_4 в диапазоне температур 77–300 К. В этом случае выражение (1) должно быть усреднено по поликристаллу, что приводит к некоторому уменьшению амплитуды, однако характер биений сохраняется.

На рис. 1а, б представлена зависимость амплитуды спинового эха соответственно на переходах $1/2 \rightarrow 3/2$ и $3/2 \rightarrow 5/2$ от длительности импульса накачки на соседнем переходе, подаваемого непосредственно перед зондирующим импульсом для разных значений τ . Положение первого максимума амплитуды спин-эха зависит от произведе-

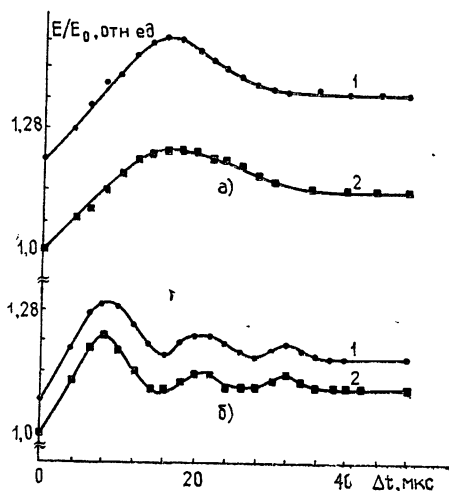


Рис. 1. Зависимость амплитуды квадрупольного спинового эха ядер ^{187}Re в KReO_4 (77 К) от длительности импульса накачки на соседнем резонансном переходе при разных τ :

а) наблюдаемый переход $-1/2 \rightarrow 3/2$, $1 - \tau = 100 \text{ мкс}$, $2 - \tau = 200 \text{ мкс}$, $U = 1,5 \text{ кВ}$;
 б) наблюдаемый переход $-3/2 \rightarrow 5/2$, $1 - \tau = 150 \text{ мкс}$, $2 - \tau = 250 \text{ мкс}$, $U = 2,0 \text{ кВ}$.

ния $H_1 \Delta t$, и поскольку величина H_1 определяется напряжением на контуре (U), наблюдается пропорциональность U и Δt_{\max} (Δt_{\max} — длительность импульса накачки, соответствующего первому максимуму амплитуды спин-эха, см. рис 2). Параметры модуляционного эффекта — частота и амплитуда модуляции, таким образом, зависят как от величины H_1 , так и от Δt . Из условия «90-градусности» импульса на нижнем переходе $\sqrt{8} \gamma H_1 t_w = \frac{\pi}{2}$ (где $\gamma/2\pi = 958,4 \text{ Э}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ для ^{185}Re и $968,1 \text{ Э}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ для ^{17}Re) при $t_w = 5 \text{ мкс}$ получаем значение H_1 (амплитуда поляризованного по кругу), равное 18 Э . Такая же величина H_1 получается при использовании соотношения (1) со средним периодом модуляции порядка 10 мкс (см рис 1б). Независимая оценка величины H_1 , исходя из геометрии катушки [9], дает значение, равное примерно 17 Э .

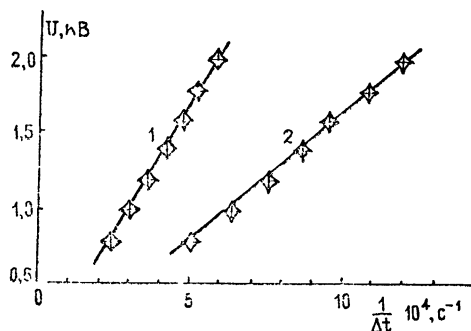


Рис 2 Вид взаимозависимости между напряжением на контуре (U) и обратной величиной длительности (Δt_{\max}^{-1}) импульса накачки при наблюдении первого максимума амплитуды спинового эха на переходах $1/2 \rightarrow 3/2$ (1) и $3/2 \rightarrow 5/2$ (2).

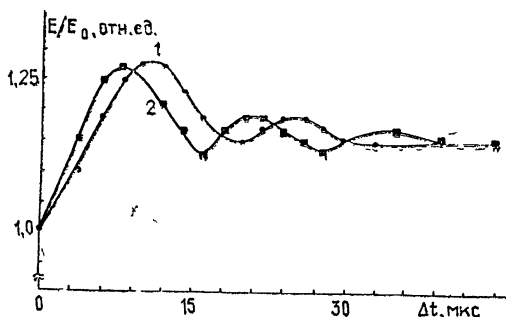


Рис. 3. Относительное изменение картины модуляционного эффекта (соответствующего графику на рис. 1 б) — наблюдение перехода $3/2 \rightarrow 5/2$, $\tau = 150 \text{ мкс}$, накачка на переходе $1/2 \rightarrow 3/2$ при разных напряжениях на контуре:
1 — $U = 1,5 \text{ кВ}$, 2 — $U = 2,0 \text{ кВ}$.

На рис. 3 показано изменение картины модуляционного эффекта при разных значениях H_1 . Очевидно, что чем меньше величина H_1 , тем сильнее сглаживается картина модуляции (в поликристаллах). Этим, по-видимому, объясняется наличие лишь одного максимума на рис. 1а.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В С Гречишкин, Н Е Айнбиндер, Письма в ЖЭТФ, 5, 87 (1967).
- 2 V S Grechishkin, E M. Shishkin, V. A Shishkin, V. A Kjunzel, Organ Magn Res, 3, 505 (1971)
- 3 A S Kim, N E Aimbinder, Abstracts XX Ampere Congress, Tallin, 1978
- 4 А С Ким, Н Е Айнбиндер, Статья депонирована в ВИНТИ, рег № 2215-76, Деп от 7 06.76.

- 5 Н. Е. Айнбиндер, А. С. Ким, сб. Магнитный резонанс, изд. ИФ СО АН СССР, Красноярск, 1977, стр. 48
- 6 N. E. Aimbinder, I. G. Shaposhnikov, Adv. in Quadrup. Reson., 3, Heyden London, 1978, p. 67
- 7 В. А. Шишкин, сб. Ядерный квадрупольный резонанс, изд. Калининградского государственного университета, Калининград, 1976, стр. 3.
- 8 Н. Е. Айнбиндер, В. С. Гречишкин, А. Н. Осипенко, Е. М. Шишкин, ЖЭТФ, 58, 1543 (1970)
- 9 А. М. Кугушев, Н. С. Голубева, Основы радиоэлектроники, изд. Энергия, М., 1969

Пермский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 января 1979 г.

УДК 538.574.519.25

УЧЕТ НЕКОТОРЫХ ПОПРАВОК К ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ КВАЗИОПТИКИ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. И. Саичев

1. Пусть распространение волны в случайно-неоднородном слое описывается стохастическим уравнением Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 E = k^2 \varepsilon(x, \rho) E. \quad (1)$$

Здесь x — продольная, ρ — поперечные координаты, $\varepsilon(x, \rho)$ — случайные неоднородности среды, равные нулю вне слоя $x \in [0, L]$. Будем считать, кроме того, что слева на слой падает волна, в плоскости $x = 0$ равная $E_0(\rho)$.

Если неоднородности среды крупномасштабны, а падающая на слой волна квазиплоская, от точного стохастического уравнения Гельмгольца обычно переходят к более простому приближенному параболическому уравнению (ПУ) квазиоптики. Однако существует множество физических явлений, которые в рамках ПУ не описываются. Во-первых, ПУ полностью игнорирует обратное рассеяние. Во-вторых, даже когда обратное рассеяние пренебрежимо мало, волна может распространяться в большом растворе углов и ПУ, с положенным в его основу малоугловым приближением, неприменимо. В-третьих, даже если волна распространяется под малыми углами к оси x и обратное рассеяние несущественно, на достаточно больших трассах может нарушиться френелевское приближение и ПУ станет несправедливым.

Таким образом, вокруг области применимости ПУ существует «мертвая зона», для заполнения которой необходимо вывести приближенные уравнения, более общие, чем ПУ, но более простые, чем стохастическое уравнение Гельмгольца.

Подобные приближенные уравнения, основанные на разложении решения стохастического уравнения Гельмгольца в ряд по кратности обратного рассеяния, предложены в работах [1, 2]. В данной статье изучаются некоторые следствия полученного в [2] в пренебрежении обратным рассеянием уравнения, справедливого и тогда, когда нарушаются два условия применимости ПУ: френелевское и малоугловое приближения.

2. Уравнение для $E(x, \rho)$, следующее из стохастического уравнения Гельмгольца (1) в пренебрежении обратным рассеянием, имеет вид [2]

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \hat{M} E + \frac{k^2}{2} \hat{N} \varepsilon E, \quad (2)$$

где \hat{M} и \hat{N} — следующие интегральные операторы

$$\hat{M} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots (\Delta_q + k^2) \frac{e^{ikR}}{R} dq,$$

$$\hat{N} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \frac{e^{ikR}}{R} dq, \quad R = \sqrt{(\rho - q)^2}.$$

В практических расчетах часто удобнее пользоваться не уравнением (2), а уравнением для

$$E_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{x}, \rho) e^{-i(\mathbf{x}\rho)} d\rho$$

— фурье-образа поля $E(\mathbf{x}, \rho)$ по поперечным координатам. Соответствующее (2) уравнение для $E_{\mathbf{x}}(x)$ таково:

$$\frac{\partial E_{\mathbf{x}}}{\partial x} = i\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} E_{\mathbf{x}} + \frac{k^2}{2i\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{\Omega} E_{\mathbf{x}-\Omega} d\Omega. \quad (3)$$

Будем считать, что входящая сюда функция $\varepsilon_{\Omega}(x)$ — фурье-образ $\varepsilon(\mathbf{x}, \rho)$ — гауссова и обладает следующей корреляционной функцией:

$$\langle \varepsilon_{\Omega}(x) \varepsilon_{\Omega'}(x + \tau) \rangle = \Phi_{\varepsilon}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \delta(\tau), \quad (4)$$

$$\Phi_{\varepsilon}(\Omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(s) e^{-i(s\Omega)} ds.$$

Усреднив уравнение (3) и замыкая среднее $\langle \varepsilon_{\Omega} E_{\mathbf{x}-\Omega} \rangle$ в диффузионном приближении, получим

$$\frac{\partial \langle E_{\mathbf{x}} \rangle}{\partial x} = \langle E_{\mathbf{x}} \rangle \left[i\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} - \frac{k^4}{8\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\varepsilon}(\Omega)}{\sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2}} d\Omega \right].$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\langle E_{\mathbf{x}}(x) \rangle = E_{\mathbf{x}}(0) \exp \left[ix\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} - \frac{k^4}{8\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\varepsilon}(\Omega)}{\sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2}} d\Omega \right]. \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет сделать некоторые выводы о пределах применимости параболического уравнения квазиоптики при статистическом описании распространяющихся в случайно-неоднородной среде волн. Первое ограничение такого рода есть ограничение френелевского приближения, т. е. справедливости замены в (13) $\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$ на $ik - \mathbf{x}^2/2k$. Другое ограничение непосредственно связано с влиянием случайных неоднородностей среды. Обсудим его. Будем считать при этом для простоты, что неоднородности среды $\varepsilon(\mathbf{x}, \rho)$ изотропны и одномасштабны с характерным масштабом l_0 , а характерный масштаб поля $E_0(\rho)$ равен ρ_0 . Если $l_0, \rho_0 \gg \lambda = 2\pi/k$, то корни $\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$, $\sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2}$ в (13) можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться при этом слагаемыми, пропорциональными \mathbf{x}^2 , Ω^2 . В результате получим

$$\langle E_{\mathbf{x}}(x) \rangle = E_{\mathbf{x}}(0) \exp \left[ikx - ix\frac{\mathbf{x}^2}{2k} - \frac{k^2 x}{8} A - \frac{D}{4} x - \frac{\mathbf{x}^2}{8} Ax \right]. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$A = A(0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(\Omega) d\Omega,$$

$$D = -\frac{1}{4} \Delta_s A(s)|_{s=0} = \frac{1}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \Phi_{\varepsilon}(\Omega) d\Omega.$$

Первые три слагаемых в показателе экспоненты (6) соответствуют параболическому приближению, а последние два описывают дополнительное затухание среднего поля, связанное с увеличением пути, пройденным волной в неоднородной среде, за счет флуктуаций углов распространения волны и наклонного падения отдельных плоских волн, составляющих первоначальную волну $E_0(\rho)$. Слагаемое $Dx/4 \ll 1$ в рамках малоуглового приближения, и его можно отбросить по сравнению с $k^2 Ax/8$. Слагаемое же $\mathbf{x}^2 Ax/8 \sim \sigma_{\varepsilon}^2 x l_0 / \rho_0^2$ ($\sigma_{\varepsilon}^2 = \langle \varepsilon^2 \rangle$), и, если $\rho_0 \ll l_0$, оно может привести к существенному отличию истинного среднего поля от среднего поля в рамках параболического приближения на расстояниях $x \sim \rho_0^2 / \sigma_{\varepsilon}^2 l_0$, на которых могут быть еще справедливы френелевское и малоугловое приближения.

3. Рассмотрим поправки к функции когерентности волны $E(x, \rho)$, вычисленной в рамках параболического уравнения квазиоптики. Определим функцию когерентности волны $E(x, \rho)$ равенством

$$\Gamma(x, s) = \frac{1}{ik} \langle E^*(x, \rho) \hat{M} E(x, \rho + s) \rangle.$$

Здесь и ниже падающая волна считается плоской: $E_0(\rho) = 1$. Введем еще функцию

$$S(x, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, s) e^{-i(\mathbf{x}s)} ds.$$

Нетрудно показать, что в диффузионном приближении $S(x, \mathbf{x})$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{k^4}{4\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}} \left[S \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_\epsilon(\Omega)}{\sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2}} d\Omega - \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\epsilon(\Omega) \times \right. \\ \left. \times \frac{S(x, \mathbf{x} - \Omega)}{\sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2}} d\Omega \right]. \quad (7)$$

Уравнение параболического приближения получается отсюда заменой $\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2} = \sqrt{k^2 - (\mathbf{x} - \Omega)^2} = k$. Интегрируя уравнение (7) по \mathbf{x} в бесконечных пределах и учтя симметричность функции $\Phi_\epsilon(\Omega)$ по Ω , приходим к равенству $\frac{d}{dx} \iint_{-\infty}^{\infty} S(x, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$, означающему, что средняя интенсивность волны сохраняется.

Считая неоднородности среды крупномасштабными, а волну квазиплоской, перейдем от уравнения (7) к приближенному уравнению, разлагая входящие в (7) корни типа $1/\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}$ в ряд Тейлора по \mathbf{x}^2 и ограничившись слагаемыми не выше \mathbf{x}^2, Ω^2 . Введем еще обозначение $\chi = \mathbf{x}^2$. В результате приближенное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{k^2}{4} d \left(4 \frac{\partial}{\partial \chi} \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) S + \frac{\chi}{8} d \left(4 \frac{\partial}{\partial \chi} \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) S + \frac{1}{8} d \left(4 \frac{\partial}{\partial \chi} \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \chi S - \\ - \frac{S}{8} d \left(4 \frac{\partial}{\partial \chi} \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \chi, \quad (8)$$

$$d(z) = A(i\sqrt{z}) - A.$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения соответствует параболическому уравнению квазиоптики. Остальные слагаемые описывают эффекты, выходящие за рамки параболического приближения.

Решение уравнения (8) неизвестно. В то же время его структура такова, что уравнения для моментов $S(x, \mathbf{x})$ —

$$S_n(x) = \pi \int_0^\infty \chi^n S d\chi = (-\Delta_s)^n \Gamma(x, s)|_{s=0}$$

— образуют конечную при конечном n замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых не представляет принципиальных затруднений. По поведению этих моментов можно судить о пределах применимости функции когерентности, полученной в рамках параболического уравнения квазиоптики.

Приведем здесь уравнения для первых двух моментов S_n :

$$\frac{dS_1}{dx} = (k^2 d_1 + 8d_2) S_0 + 2d_1 S_1, \quad (9)$$

$$\frac{dS_2}{dx} = (16k^2 d_2 + 288d_3) S_0 + (4k^2 d_1 + 80d_2) S_1 + \frac{21}{8} d_1 S_2.$$

Здесь $S_0 \equiv 1$, $d_n = (1/n!) d^{(n)}(z)|_{z=0}$, $d_1 = D$. Слагаемые в правой части этих уравнений, пропорциональные k^2 , соответствуют параболическому приближению, в котором моменты S_n представляют собой полиномы n -й степени относительно x . С учетом по-

правок к ПУ моменты S_n , как видно уже из уравнений (9), нарастают быстрее

$$S_1(x) = \frac{k^2}{2} (e^{2Dx} - 1),$$

$$S_2(x) = 6,1 k^2 \frac{d_2}{D} \left[\exp\left(\frac{21}{8} Dx\right) - 1 \right] + \frac{16}{5} Dk^4 \left[\exp\left(\frac{21}{8} Dx\right) - \exp(2Dx) \right] - k^4 D \frac{16}{21} \left[\exp\left(\frac{21}{8} Dx\right) - 1 \right].$$

Однако в малоугловом приближении $Dx \ll 1$ относительный вклад поправок к параболическому приближению в $S_1(x)$, $S_2(x)$ мал. Таким образом, моменты $S_1(x)$, $S_2(x)$, характеризующие остроту функции когерентности, хорошо описываются параболическим приближением до тех пор, пока волна распространяется под малыми углами к оси x

Автор признателен А Н Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В Е Осташев, В И Татарский, Изв вузов — Радиофизика, 21, № 5, 714 (1978).
2 А Н Малахов, А И Санчев, Изв вузов — Радиофизика, 22, № 11, 1324 (1979).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 декабря 1978 г

УДК 530 1

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ЗЕРКАЛЬНО ОТРАЖАЮЩЕЙ СТЕНКОЙ

В А. Погребняк

Учет многократного рассеяния в задачах о распространении плоских волн в одномерных случайно-неоднородных средах приводит к результатам [1-4], существенно отличным от получаемых в теории переноса. В последнее время исследовались статистические характеристики поля в случае, когда источник волн находится внутри среды [5, 6]. Данное сообщение посвящено аналогичному случаю источник расположен в слое с зеркально отражающей стенкой. Несмотря на то, что в идейном отношении одномерная задача достаточно полно исследована, выбор частной модели позволяет получить более детальные сведения о процессе многократного рассеяния. К одномерному случаю сводятся задачи о распространении волн в длинных линиях и волноводах, а также звука в плоскостной среде.

Рассмотрим точечный источник, излучающий плоские монохроматические волны, скалярное поле $u(x)$ которых удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 \varepsilon'(x) u = -4\pi\delta(x), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

Будем считать, что случайно-неоднородная среда занимает слой $0 \leq x \leq L$, $-\infty < y, z \leq \infty$, $\varepsilon'(x)$ описывает свойства среды и внутри слоя задается в виде

$$\varepsilon'(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon(x), \quad (2)$$

где ε_1 — постоянная составляющая, $\varepsilon(x)$ — случайная функция со средним, равным нулю: $\langle \varepsilon(x) \rangle = 0$. Остальная часть пространства заполнена средой с постоянным значением $\varepsilon'(x) = \varepsilon_0$. Граница раздела $x = 0$ представляет собой зеркально отражающую стенку для волн, а источник расположен в точке $x = 0$ справа от зеркала. При

распространении от источника к противоположной грани пластины волна испытывает отражения от случайных неоднородностей, что приводит к уменьшению амплитуды волны при $x = L$ и увеличению ее вблизи источника. Количественной мерой такого перераспределения интенсивности поля может служить величина

$$\langle D \rangle = \left\langle \frac{|u(0)|^2}{|u(L)|^2} \right\rangle, \quad (3)$$

которую назовем коэффициентом внутреннего отражения. Целью данного исследования является определение величины $\langle D \rangle$.

Решение задачи будем искать, считая процесс $\varepsilon(x)$ δ -коррелированным с корреляционной функцией вида

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\tau) \rangle = B \delta(\tau), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\tau) \rangle, \quad (4)$$

где принято, что $\varepsilon(x)$ — однородный стационарный процесс.

Постановка задачи в вышеприведенном виде эквивалентна другой постановке, при которой источник находится посередине пластины, занимающей пространство от $-L \leq x \leq L$, причем $\varepsilon(x)$ является четной функцией x $\varepsilon(x) = \varepsilon(-x)$. Однако в этом случае δ -коррелированность процесса $\varepsilon(x)$ в интервале $-L \leq x \leq L$ не выполняется из-за четности $\varepsilon(x)$, поэтому исходное уравнение должно быть приведено к интервалу $0 \leq x \leq L$ [8]. Следует отметить также, что задача с источником внутри слоя связана принципом взаимности с задачей о поле, создаваемом в слое внешним источником.

Приступим к решению уравнения (1). Для этого удобно перейти от неоднородного уравнения (1) к однородному с начальным условием при $x = 0$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 \varepsilon'(x)u = 0, \quad 0 < x \leq L, \quad u'(0) = -4\pi. \quad (5)$$

Формулы (5) необходимо дополнить условием излучения

$$u(x) = u(L) \exp[ik_0(x-L)], \quad x \geq L, \quad k_0 = k\sqrt{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Решение задачи наиболее просто проводить, если ввести вспомогательный процесс $Y(x)$ с начальным условием в одной точке $x = 0$, к которому применимо марковское приближение [7]. Матрица $Y(x)$ фундаментальных решений

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2(x) & 0 \end{pmatrix} Y(x), \quad k^2(x) = k^2(\varepsilon_1 + \varepsilon(x)) \quad (8)$$

с начальным условием в точке $x = 0$:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Выражая поле $u(x)$ и его производную через $Y(x)$, нетрудно получить соотношение для интересующей нас величины:

$$D = \frac{|u(0)|^2}{|u(L)|^2} = y_2'^2(L) + k_0^2 y_2^2(L). \quad (10)$$

Применяя далее стандартную технику нахождения средних величин для марковских процессов [7], получим следующий результат

$$\langle D \rangle = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2\varepsilon_1} \exp\left(\frac{k^2 BL}{2\varepsilon_1}\right) - \exp\left(-\frac{k^2 BL}{4\varepsilon_1}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1} \cos(2k\sqrt{\varepsilon_1}L) + \frac{kB(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_0)}{16\varepsilon_1^{5/2}} \sin(2k\sqrt{\varepsilon_1}L) \right\}. \quad (11)$$

Выражение (11) является разложением точного решения для $\langle D \rangle$ по малому параметру $kB/\varepsilon_1 \ll 1$.

Как и следовало ожидать, отражающая способность случайно-неоднородной пластины экспоненциально увеличивается с увеличением толщины пластины. Важно отметить, что в предэкспоненциальном множителе в формуле (11) появляется величина ε_0 . Это означает, что граница раздела сред при любой толщине пластины дает вклад, пропорциональный ε_0 . Казалось бы, что увеличение толщины слоя L должно уменьшать влияние границы раздела вследствие ослабления поля таким образом, что при $L \rightarrow \infty$ ε_0 не должно входить в ответ. Однако это не так: полученная зависимость (11) указывает на когерентный характер вклада от рассеивателей, расположенных на любых участках пути распространения волны. Осциллирующая часть выражения (11) состоит из двух слагаемых. Первое, изменяющееся по закону косинуса, описывает обычную интерференцию в отсутствие флуктуаций. Оно обращается в нуль при $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$. Второе слагаемое, изменяющееся по закону синуса, пропорционально амплитуде флуктуаций, а физический смысл его происхождения таков же, как и первого.

Приведем еще выражение для величины $\langle |u(L)|^2 \rangle$, характеризующей отношение единичной амплитуды к амплитуде на выходе из слоя:

$$\left\langle \frac{1}{|u(L)|^2} \right\rangle = \left(\frac{k}{4\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \exp\left(\frac{k^2 BL}{2\varepsilon_1}\right) + \exp\left(-\frac{k^2 BL}{4\varepsilon_1}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2} \cos(2k\sqrt{\varepsilon_1}L) + \frac{kB(5\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{16\varepsilon_1^{5/2}} \sin(2k\sqrt{\varepsilon_1}L) \right] \right\}. \quad (12)$$

Осциллирующие слагаемые, пропорциональные $\sin(2k\sqrt{\varepsilon_1}L)$, в формулах (11) и (12) малы по параметру $kB/\varepsilon_1 \ll 1$, но не опущены для того, чтобы не пропадала осциллирующая часть при $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$.

В заключение автор рад выразить благодарность И. М. Фуксу за предложение заняться данной проблемой и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Теория вероятности и ее применение, 4, № 4, 424 (1959).
2. Ю. А. Газарян, ЖЭТФ, 56, № 6, 1856 (1969).
3. J. A. Morrison, G. C. Paranicolaou, J. B. Keller, Comm Pure Appl Math, 24, № 5, 473 (1971).
4. В. И. Гельфгат, Акуст. ж., 21, № 3, 391 (1975).
5. В. И. Гельфгат, Акуст. ж., 18, № 1, 31 (1972).
6. W. Kohler, G. C. Paranicolaou, J. Math Phys, 15, № 12, 2186 (1974).
7. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
8. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 65, № 1, 54 (1973).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
17 мая 1977 г.,
после переработки
6 июня 1979 г.

ХРОНИКА

УДК 621 385 7

V СОВЕТСКО-ЯПОНСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ЭЛЕКТРОНИКЕ

12—13 декабря 1978 г. в Москве проводился V Советско-японский симпозиум по электронике на тему «Исследования природной среды радиофизическими методами». Основная задача симпозиума состояла в широком обмене мнениями между специалистами СССР и Японии по проблеме дистанционного изучения природной среды методами активной и пассивной радиолокации с поверхности Земли, с бортов самолетов и ИСЗ, а также методами радиоакустического зондирования приземного слоя атмосферы. В программу симпозиума были включены доклады по вопросам радиометрической аппаратуры и обработки данных метеорологических спутников, классификации и практического использования оптических изображений, получаемых с ИСЗ.

С обзорным докладом о состоянии исследований в области дистанционного зондирования в Японии выступил д-р Т. Саката (Токайский университет). В его выступлении были перечислены основные результаты, полученные с ИСЗ «Ландсэт-1» (1972 г.) и «Ландсэт-2» (1975 г.), технические перспективы исследований в 1981—1990 гг., возможности использования результатов дистанционного зондирования в океанографии и сельском хозяйстве, для географического обзора и в метеорологии, для исследований природных ресурсов, создания мониторинга по загрязнению и т. д. Докладчик осветил также вопросы организации космических исследований природной среды в Японии.

Проблемам цифровой обработки данных метеорологических спутников и классификации землепользования по данным изображений с ИСЗ «Ландсэт» были посвящены доклады М. Такаги (Институт промышленности и науки при Токийском университете) и Х. Шимоды (Токайский университет). Анализ возможных геометрических ошибок в изображениях, получаемых с борта ИСЗ, и обсуждение вопросов коррекции этих ошибок с приведением системы коррекции для данных «Ландсэт» содержались в докладе д-ра Ш. Мураи (Институт промышленности и науки при Токийском университете).

Обзор возможностей и результатов радиометрического зондирования поверхности акваторий, а также особенностей взаимосвязи между физическими и химическими параметрами состояния моря и соответствующими радиохарактеристиками был сделан А. М. Шутко в докладе, объединяющем три сообщения А. Е. Башаринова, А. Г. Гранкова, Б. М. Либермана, Г. И. Чухрая и автора доклада. Одно из этих сообщений посвящено оценкам эффективности спектрального СВЧ радиометрического метода многопараметрического зондирования системы «океан — атмосфера» на основе опыта исследований с ИСЗ «Космос-243», а также теоретического анализа радиоизлучения рассматриваемой системы. В этой работе установлены оптимальные спектральные интервалы для одновременного дистанционного определения с борта ИСЗ температуры морской поверхности, приводной скорости ветра, полной массы водяно-

го пара в вертикальном столбе атмосферы и водозапаса облаков по характеристикам теплового излучения. В докладе приведены также оценки возможных ошибок определения перечисленных метеорологических параметров. Основные характеристики радиометрической аппаратуры в диапазоне $\lambda = 0,8 \div 30$ см, которая используется для дистанционного исследования природной среды, были сообщены в докладе В. С. Аблязова и В. П. Быданцева.

Вопросам дистанционного измерения параметров морских льдов при радиолокационных и радиотепловых наблюдениях в СВЧ диапазоне были посвящены доклады А. Е. Башаринова, А. А. Курской и М. И. Финкельштейна. Пассивные методы определения влажности земных покровов по характеристикам теплового излучения в области $\lambda \approx 3 \div 30$ см, получаемым с борта самолета, рассматривались в докладе А. Е. Башаринова и А. М. Шутко, а активные (радиолокационные) методы подповерхностного зондирования покровов анализировались в докладе В. А. Кутева и М. И. Финкельштейна.

Влияние атмосферы на результаты исследования земных ресурсов из космоса и проблемы оперативного определения метеорологических параметров методами радиотеплолокации и акустического зондирования обсуждались в докладах 1) А. С. Гурвича и Т. И. Макаровой; 2) А. П. Наумова, М. И. Сумина, А. В. Троицкого; 3) В. А. Рассадовского и А. В. Троицкого. В первом из перечисленных докладов приводились параметры действующей радиоакустической системы зондирования приземных слоев атмосферы в сантиметровом диапазоне волн и результаты определения высотных профилей температуры и скорости ветра до высот $h \approx 30$ м. Два других доклада были посвящены радиотеплолокационным исследованиям атмосферы в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн с поверхности Земли, с бортов научно-исследовательских судов в Атлантическом и Тихом океанах и с борта самолета. В докладах представлены результаты исследований физических аспектов дистанционного зондирования, сравнение возможностей зондирования в средней и коротковолновой частях миллиметрового диапазона, а также оценки точностей дистанционного определения метеорологических параметров (профилей температуры до высот $h \approx 6$ км, полной массы водяного пара) в различных географических широтах и при различных погодных условиях.

Доклады, прочитанные на симпозиуме, свидетельствуют о весьма широком развитии в СССР и в Японии работ по проблеме изучения природной среды дистанционными методами. Результаты научных докладов показали перспективность использования радиофизических методов в ряде важнейших отраслей хозяйства страны. Состоявшийся обмен мнениями между специалистами СССР и Японии по проблеме дистанционного изучения природной среды был, вне сомнения, полезным для взаимного ознакомления с новейшими научными результатами в этой области и способствовал развитию научных контактов. Материалы симпозиума изданы в Японии на английском языке [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Proceedings of the 5th USSR-Japan Electronics Symposium on «Radiophysical Methods in Environmental Investigations», Ed. by Tokai Research and Information Center Tokai University, 1979.

А. П. НАУМОВ