

СОДЕРЖАНИЕ

Арбузов С. И. Вариации наклона спектра радиоизлучения активных областей на Солнце ($\lambda \approx 3 \text{ см}$) во время солнечных вспышек	1165
Зиничева М. Б., Наумов А. П. О рефракции радиоволн в атмосферах планет-гигантов	1177
Денисов Н. Г. О линейном взаимодействии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме	1186
Беленов А. Ф., Чугунов Ю. В. Рассеяние мод типа шепчущей галереи на ионосферных неоднородностях, вытянутых вдоль геомагнитного поля	1195
Бодров В. В., Заичкин Д. И. Расчет множителя ослабления на протяженной трассе с одиночным препятствием	1205
Елютин С. О., Захаров С. М., Маныкин Э. А. Сверхизлучение в радиодиапазоне, создаваемое оптическими импульсами в условиях эффекта фототонного эха	1213
Малкин В. М. Об установлении стационарного спектра турбулентности при трехволновом распадном взаимодействии	1218
Кузлев М. В., Рухадзе А. А. К вопросу о расплывании импульсов в диссиативных и неравновесных средах	1223
Беленький М. С., Боронов В. В., Гомбоев Н. Ц., Миронов В. Л. Измерение структурной характеристики атмосферной турбулентности с помощью пространственно-ограниченного лазерного пучка	1230
Ефремов Г. Ф., Казаков В. А. К выводу нелинейного уравнения с флуктуирующими параметрами для открытой динамической подсистемы	1236
Музычук О. В. К статистическому описанию линейных систем с не дельта-коррелированными флуктуациями параметров	1246
Полуботко А. М., Степанов В. А. О компенсации дифрагированного поля в решетке из плоских волноводов с неоднородностями	1255
Ланда П. С., Пономарев Ю. В. Возбуждение страт в положительном столбе газового разряда с учетом влияния метастабильных атомов	1265

Краткие сообщения и письма в редакцию

Кузнецов Ю. П. Применение стробоскопического метода в радиointерферометрии с большими базами	1276
Ерухимов Л. М., Ковалев В. И., Лернер А. М., Мясников Е. Н., Поддельский И. Н., Рахлин А. В. О спектре крупномасштабных искусственных неоднородностей в F-слое ионосферы	1278
Дробышевич В. И., Наумов А. П. О некоторых свойствах оптимальных ортогональных разложений коэффициентов преломления и поглощения микрорадиоволн в земной атмосфере	1281
Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. К статистической теории уравнений в частных производных первого порядка	1283
Смирнов А. И., Шарков Е. А. О диэлектрических и излучательных характеристиках сильно минерализованных солевых растворов	1285

УДК 523.164.32

ВАРИАЦИИ НАКЛОНА СПЕКТРА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА СОЛНЦЕ ($\lambda \approx 3$ см) ВО ВРЕМЯ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК

C. I. Арбузов

На основе данных наблюдений наклона спектра радиоизлучения активных областей на Солнце ($\lambda \approx 3$ см) McMath 13786 и 13790, полученных в августе 1975 г. на радиотелескопе РТ-22 КАО, и данных Мировой радио- и оптической Службы Солнца проведен сравнительный анализ вариаций (флуктуаций и всплесков) наклона спектра радиоизлучения активных областей с их вспышечной активностью

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в экспериментальной солнечной радиоастрономии большое место уделяется исследованию «тонких» характеристик радиоизлучения Солнца, к которым, в частности, относится изучение флуктуаций радиоизлучения. В широком диапазоне волн обнаружены квазипериодические компоненты в спектрах флуктуаций с периодами от десятков секунд до нескольких часов [1], изучалась их связь с солнечной активностью.

Под флуктуациями радиоизлучения Солнца* в большинстве случаев понимают слабые изменения (вариации) радиоизлучения, имеющие величину порядка 1% от уровня излучения спокойного Солнца ($T_{\text{сп}}$) и менее. При исследовании спектров флуктуаций всплески радиоизлучения (изменения радиоизлучения, заметно выделяющиеся на фоне флуктуаций) обычно тем или иным способом исключались из записей радиоизлучения и не рассматривались. Такое разделение принимаемого радиоизлучения на всплески и флуктуации, опирающееся на морфологические характеристики записей радиоизлучения (характерное время изменений, амплитуда и т. д.), в определенной мере условно. Условность разделения и известная неопределенность границы между всплесками и флуктуациями обусловлена также и тем, что одни и те же изменения в радиоизлучении активного Солнца при наблюдениях на малых антенах (с низким угловым разрешением $\Omega_{\text{рл}} \geq \Omega_{\odot}$, где $\Omega_{\text{рл}}, \Omega_{\odot}$ — угловые размеры главного лепестка диаграммы направленности антенны и Солнца) слабо проявляются на фоне излучения всего Солнца и могут рассматриваться как флуктуации радиоизлучения, а при наблюдениях на больших антенах ($\Omega_{\odot} > \Omega_{\text{рл}} \geq \Omega_{\text{а.о.}}$, где $\Omega_{\text{а.о.}}$ — угловой размер активной области) — четко проявляются и рассматриваются как всплески радиоизлучения.

С другой стороны, известно, что большинство радиовсплесков тесно связано с H_{α} -вспышками и часто радиовсплески и H_{α} -вспышки рассматриваются как проявления соответственно в радио- и оптическом диапазонах излучения солнечных вспышек (энерговыделений в солнеч-

* Здесь и далее имеется в виду микроволновый диапазон радиоизлучения Солнца.

ной атмосфере). Таким образом, понятию всплеска радиоизлучения придается определенная физическая основа. Поэтому, говоря о природе флюктуаций радиоизлучения Солнца, при их интерпретации, обычно солнечные вспышки из рассмотрения исключаются, так как всплески радиоизлучения из записей радиоизлучения исключены, или считается, что они отсутствуют.

В настоящей работе мы попытались выяснить, в какой мере слабые вариации радиоизлучения Солнца, которые по внешним признакам могут рассматриваться как флюктуации радиоизлучения, связаны или обусловлены вспышечной деятельностью активных областей Солнца. С этой целью мы провели сопоставление полученных в июле—августе 1975 года записей наклона спектра радиоизлучения активных областей McMath 13786 и 13790 ($\lambda \approx 3 \text{ см}$) и зарегистрированных в них Мировой Службой Солнца H_{α} -вспышек [2, 3]. Для анализа мы использовали также данные о микроволновых всплесках интенсивности интегрального радиоизлучения Солнца [2, 3].

2. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ

Наблюдения наклона спектра радиоизлучения активных областей проводились на радиотелескопе Крымской Астрофизической Обсерватории РТ-22, имеющем ширину главного лепестка диаграммы направленности на $\lambda = 3 \text{ см}$ $\theta \approx 6'$.

Применявшийся для наблюдений радиометр «наклона спектра» имел следующие характеристики: это супергетеродинный радиометр квазинулевого типа; сигнал, поступающий от антенны, разделялся частотными фильтрами на два сигнала со средними частотами $f_1 = 9480 \text{ МГц}$ и $f_2 = 9670 \text{ МГц}$ (полосы фильтров $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 50 \text{ МГц}$). На выходе радиометра регистрировался сигнал, пропорциональный разности антенных температур на частотах f_1 и f_2 , $\Delta T_a = T_a(f_1) - T_a(f_2)$ с флюктуационным порогом чувствительности $\delta T = 1 \text{ K}$ при постоянной времени $\tau = 1 \text{ с}$.

Методика измерения наклона спектра радиоизлучения Солнца и его активных областей подробно рассмотрена и изложена в [4]. Основную погрешность при измерении наклона спектра вносит неравенство коэффициентов полезного действия антенны (включая ВЧ тракт), которое в основном определяется различными потерями в каналах радиометра. Выравнивание коэффициентов полезного действия производилось по радиоизлучению Луны, спектр которого в сантиметровом диапазоне слабо зависит от длины волн [5]. Учитывая ширину дорожки радиометра и температуру антенны при приеме радиоизлучения Луны, точность выравнивания коэффициентов полезного действия была не хуже 6 %.

В период времени с 30 июля по 11 августа 1975 г. производилось слежение за активной областью McMath 13786, а с 11 по 16 августа — за активной областью McMath 13790. Некоторые из полученных записей представлены на рис. 1—8 (верхняя часть рисунков). Под записями радиоизлучения отмечены H_{α} -вспышки, зарегистрированные в наблюдавшихся активных областях. Вспышки в линии H_{α} обозначены треугольниками, основание которых соответствует времени начала и конца вспышки, высота — пропорциональна баллу вспышки, а положение вершины треугольника соответствует времени ее максимальной яркости. Всплески интенсивности интегрального радиоизлучения Солнца отмечены в нижней части рис. 1—8 также в виде треугольников. Высота расположения основания треугольника соответствует частоте, на которой был зарегистрирован тот или иной радиовсплеск. Знак вопроса около некоторых радиовсплесков означает, что время максимума интенсивно-

сти всплеска известно не точно, либо в использованных источниках [2, 3] не указано.

Поскольку нас интересовали относительные изменения наклона спектра потока радиоизлучения активных областей и их связь с H_{α} -вспышками и всплесками интегрального радиоизлучения Солнца, на рисунках записи наклона спектра даны в относительных единицах и указан интервал antennных температур, составляющий 1% от antennной температуры спокойного Солнца при приеме интенсивности радиоизлучения Солнца на одной из длин волн измеряемого наклона спектра.

3. ИЗМЕНЕНИЯ НАКЛОНА СПЕКТРА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ McMath 13786 И 13790 И СОЛНЕЧНЫЕ ВСПЫШКИ В ЛИНИИ H_{α}

За рассматриваемый период времени в активных областях McMath 13786 и 13790 было зарегистрировано в общей сложности ~ 140 H_{α} -вспышек, 83% из которых были субвспышки (баллов sf , sn , sb) и 17% балла 1 ($1f$, $1n$, $1b$). Вспышек балла 2 и более не наблюдалось. Столь большое количество вспышек и их относительно малая мощность отразились на принимаемом радиоизлучении наличием в записях наклона спектра различных по временным и амплитудным характеристикам изменений. Их амплитуда в большинстве случаев лежала в пределах 1—2% интервала температур от antennной температуры спокойного Солнца.

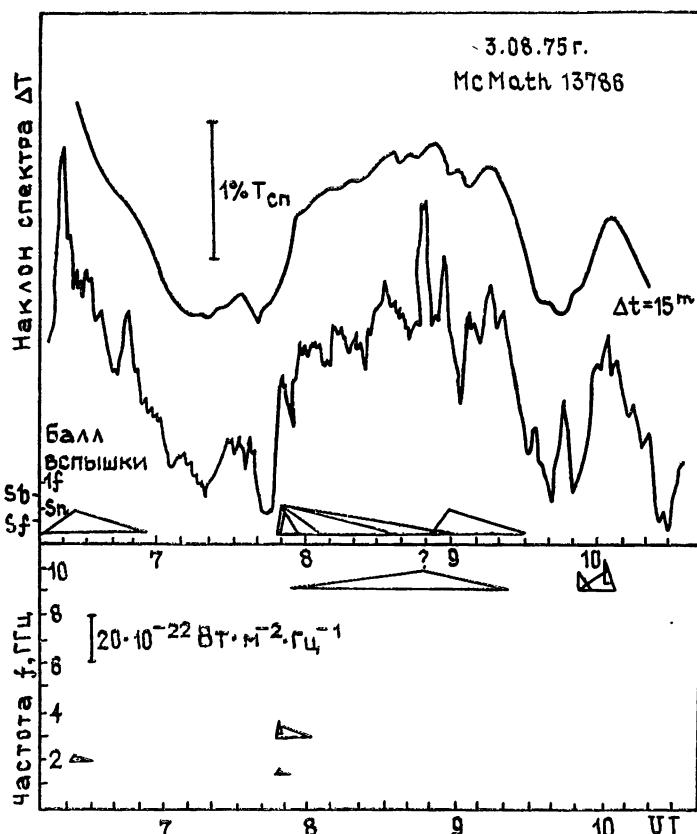


Рис. 1.

Анализируя временной ряд H_{α} -вспышек, отмеченных на представленных рисунках, можно видеть, что, как правило, H_{α} -вспышки расположены на временной оси группами по несколько вспышек в группе (каждая из H_{α} -вспышек имеет различные координаты).

В записях наклона спектра в это время можно наблюдать четыре основных вида изменений.

1) Изменения наклона спектра имеют вид импульсного всплеска, намного превышающего по величине вариации наклона спектра до и после всплеска ($\Delta T_{\max} \gg 2\% T_{\text{сп}}$) (см. рис. 3 ~ 11.50; 12.55 UT; рис. 4 ~ 10.00; 10.55 UT; рис. 5 ~ 8.05; 9.20 UT). Время максимума всплеска соответствует времени максимальной яркости одной из H_{α} -вспышек.

Во всех случаях во время этих всплесков наклона спектра наблюдались либо серия микроволновых всплесков интенсивности радиоизлучения Солнца, либо отдельные микроволновые всплески, в основном, на частотах, близких к средней частоте наблюдаемого наклона спектра ($f_{\text{ср}} \approx 9500 \text{ МГц}$).

2) Изменения наклона спектра имеют вид плавного подъема и спада ($\Delta T < 2\% T_{\text{сп}}$) с мелкомасштабными вариациями и четко коррелируют с группами H_{α} -вспышек (рис. 1, 2 а, б). Если провести усреднение этих записей (верхние кривые на рис. 1, 2 б, где время усреднения $\Delta t = 15 \text{ мин}$), то корреляция изменений наклона спектра с группами H_{α} -вспышек становится еще наглядней.

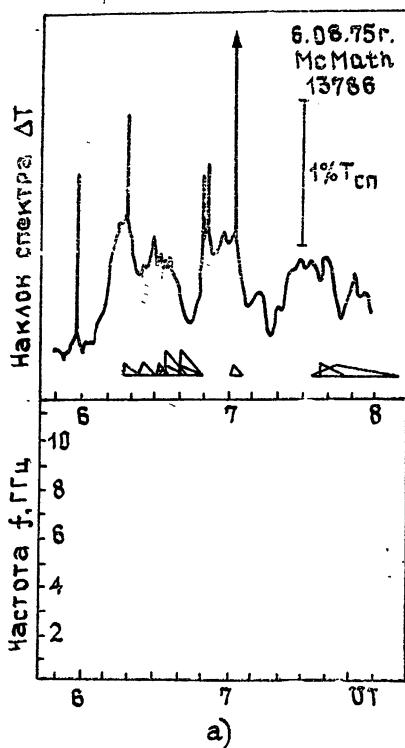


Рис. 2а.

Например, 6 августа (рис. 2 б) наблюдалось 4 группы H_{α} -вспышек, следующих одна за другой с интервалом времени ~ 50 — 70 минут, что отразилось в записях наклона спектра наличием квазипериодических пульсаций с тем же периодом.

Микроволновые всплески интенсивности радиоизлучения Солнца были зарегистрированы уже не во всех случаях, когда наблюдались H_{α} -вспышки. По-видимому, их амплитуда была на грани достоверно выделяемой радиослужбой Солнца.

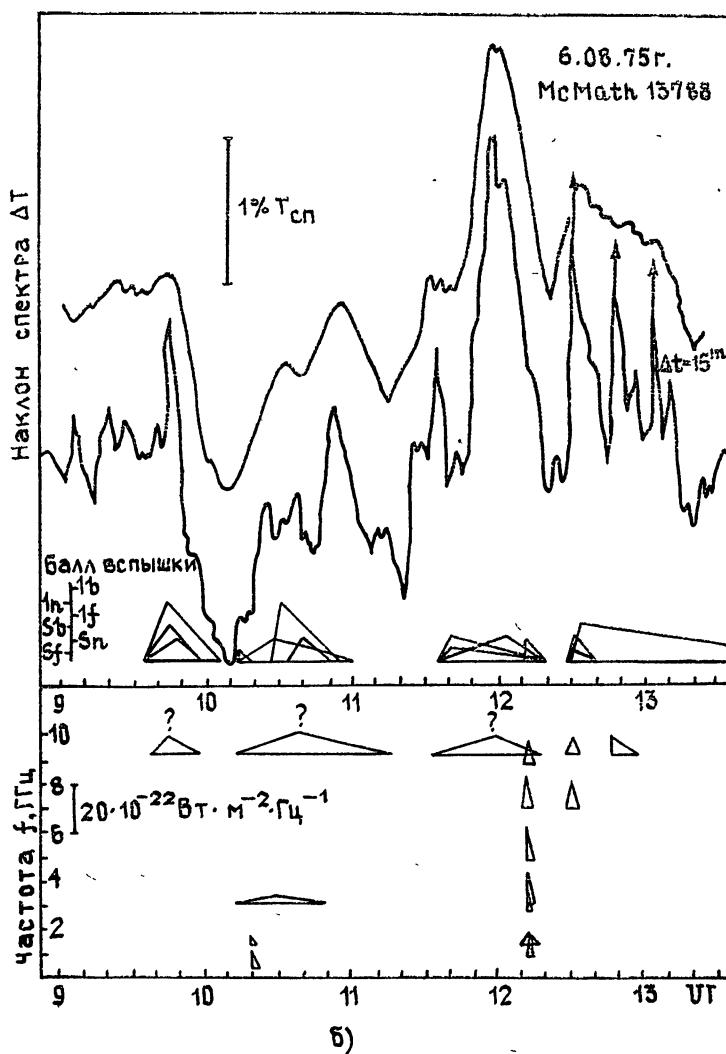


Рис. 26.

3) Изменения наклона спектра имеют величину $\leq 1\% T_{\text{сп}}$ и слабо коррелируют с H_{α} -вспышками (рис. 6—8). Микроволновые всплески, как правило, отсутствовали. Заметим, что первые два вида изменений относятся к активной области McMath 13786, а третий — к McMath 13790.

4) Отдельную группу составили изменения наклона спектра в виде импульсного всплеска длительностью менее 1 минуты (на рисунках они обозначены вертикальной линией) в большинстве случаев небольшой амплитуды $\sim 1\% T_{\text{сп}}$ (см. рис. 2а, б — неусредненные записи и рис. 4 ~ 13.00 UT). Все эти всплески наблюдались в максимумах более плавных изменений наклона спектра, имеющих вид явно выраженных

квазипериодических пульсаций. В большинстве случаев они совпадали по времени с H_{α} -вспышками.

В отсутствие H_{α} -вспышек изменения наклона спектра были слабыми и носили флуктуационный характер (рис. 4 ~ 7.00–9.30 UT; рис. 5 ~ 10.00–13.00 UT; рис. 7 ~ 9.00–11.30 UT). Исключение составляют записи наклона спектра радиоизлучения активной области McMath 13786 (рис. 3 ~ 6.40–8.10 UT), а также отдельные случаи, когда в наклоне спектра наблюдались заметные изменения в виде импульсного всплеска (рис. 4 ~ 13.00 UT) и плавного подъема и спада (рис. 1 ~ 9.50–10.30 UT). К сожалению, мы не можем определенно сказать, что в эти периоды времени H_{α} -вспышки реально отсутствовали, так же как и то, что они имели место, но по каким-либо причинам не зарегистрированы или пропущены.

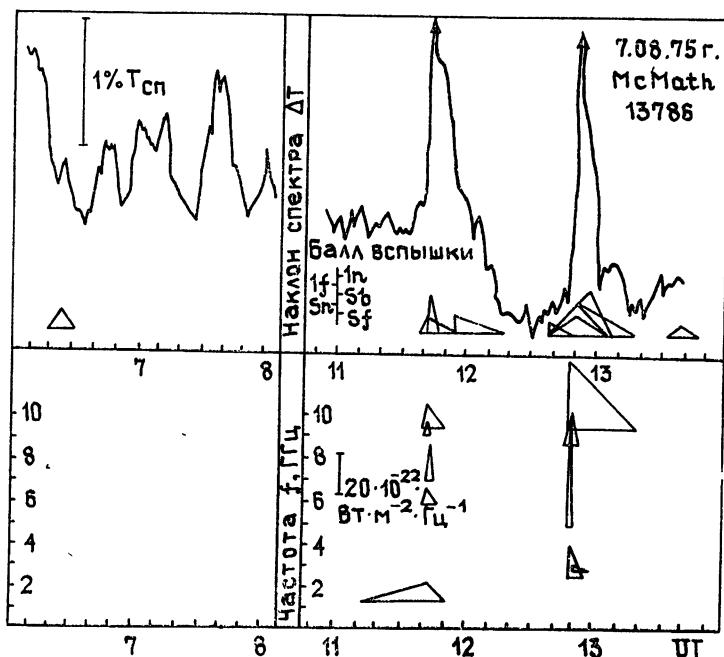


Рис. 3.

Таким образом, из приведенного выше сопоставления записей наклона спектра радиоизлучения активных областей McMath 13790 и 13786 с H_{α} -вспышками следует, что для активной области McMath 13786 имеется тесная корреляция наблюдаемых изменений наклона спектра и H_{α} -вспышек. Корреляция наблюдается как для мощных импульсных всплесков наклона спектра ($\Delta T \gg 2-3\% T_{\text{сп}}$), так и для слабых его вариаций ($\Delta T \leq 1-2\% T_{\text{сп}}$).

В ряде случаев изменения наклона спектра имели вид квазипериодических пульсаций и соответствовали квазипериодическому характеру возникновения H_{α} -вспышек.

Описанная выше картина свидетельствует о том, что наблюдаемые изменения радиоизлучения активных областей и H_{α} -вспышки, как и следовало ожидать, определяются общими процессами в атмосфере Солнца над пятнами, каковыми могут быть солнечные вспышки, и являются вторичными эффектами последних [9].

Для активной области McMath 13790 корреляция наблюдаемых из-

менений наклона спектра и H_{α} -вспышек была слабой, а в отдельных случаях вообще на наблюдалась. Это можно объяснить тем, что вспышки возникают в довольно широком интервале высот в солнечной атмосфере [6]. В зависимости от взаимного расположения высот возникновения солнечной вспышки и области генерации принимаемого радиоизлучения возможны различные по величине отклики радио- и оптического излучений на солнечную вспышку: от H_{α} -вспышек значительного балла и слабых изменений радиоизлучения до слабых H_{α} -вспышек и мощных импульсных всплесков в радиодиапазоне.

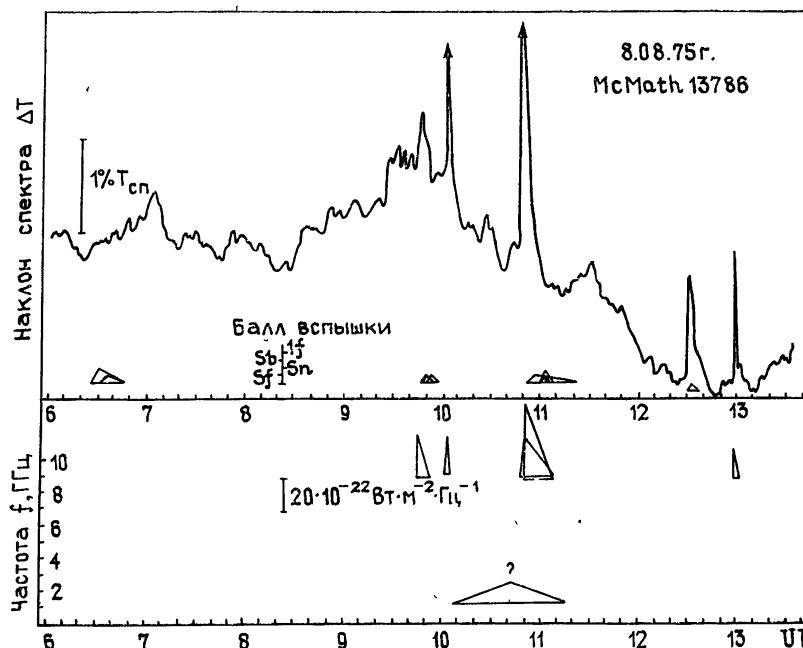


Рис. 4.

Рассматриваемые в настоящей работе активные области McMath 13786 и 13790, по-видимому, имели различную структуру (хотя по внешним морфологическим признакам они существенно не отличались друг от друга), что отразилось в различных условиях генерации оптического и радиоизлучений во время вспышек и, таким образом, в различной степени связи изменений наклона спектра и H_{α} -вспышек.

Тот факт, что все наблюдавшиеся нами импульсные (< 1 мин) всплески наклона спектра имели место в максимумах его более плавных изменений, в большинстве случаев квазипериодических пульсаций, говорит, по-видимому, об определенной взаимосвязи некоторых колебательных процессов в солнечной атмосфере и солнечных вспышек. Такими процессами могут быть процессы неустойчивости, а также колебания отдельных структур и образований в солнечной атмосфере. В определенные моменты времени эти колебательные процессы могут явиться триггерным механизмом возникновения вспышки, и, как следствие последней, в оптическом диапазоне будут наблюдаться H_{α} -вспышки, а в радиодиапазоне — всплески радиоизлучения. Наблюдавшаяся картина может быть, в частности, объяснена в рамках модели механизма возникновения солнечных вспышек, предложенной Пустильником [7].

4. ИЗМЕНЕНИЯ НАКЛОНА СПЕКТРА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ McMath 13786 И 13790 И МИКРОВОЛНОВЫЕ ВСПЛЕСКИ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА

Регистрация в наклоне спектра достаточно быстрого и значительно-го по величине изменения свидетельствует о том, что спектр радиоизлу-чения наблюдаемого источника претерпел в это время значительные изменения, во всяком случае в диапазоне частот наклона спектра [8]. Однако, регистрируя наклон спектра, мы можем судить лишь о величи-не разности потоков радиоизлучения наблюдаемой активной области на длинах волн λ_1 и λ_2 . Поэтому сравнение записей и, в частности, всплесков наклона спектра со всплесками интенсивности радиоизлуче-ния на различных частотах может расширить информацию о механизме генерации того или иного всплеска, а следовательно, и о физике процес-сов, вызвавших этот всплеск.

В настоящее время считается, что микроволновые всплески есть широкополосный процесс, захватывающий область примерно от 1 до 10 ГГц [9]. Установлены и проанализированы основные виды спектров наблюдаемых микроволновых всплесков. Имеются работы [10], показывающие, что ряд всплесков могут иметь спектр с полосой зани-маемых частот ~ 7 ГГц и уже.

За время наблюдений активных областей McMath 13786 и 13790 нами было отмечено только пять случаев, когда радиослужбой Солнца были зарегистрированы всплески практически во всем выбранном ди-апазоне частот (рис. 26 ~ 12.15 UT; рис. 3 ~ 11.45 и 12.50 UT; рис. 5 ~ ~ 13.30 UT и рис. 6 ~ 6.20 UT). Из них в трех случаях (обозначим их события «А») (рис. 3 ~ 11.45 UT, 12.50 UT и рис. 5 ~ 13.30 UT) им соответствовали мощные импульсные всплески в наклоне спектра. В двух (события «Б») всплески наклона спектра были слабыми, $\sim 1\text{--}2\%$ $T_{\text{сп}}$ (рис. 2 ~ 12.15 UT; рис. 6 ~ 6.20 UT).

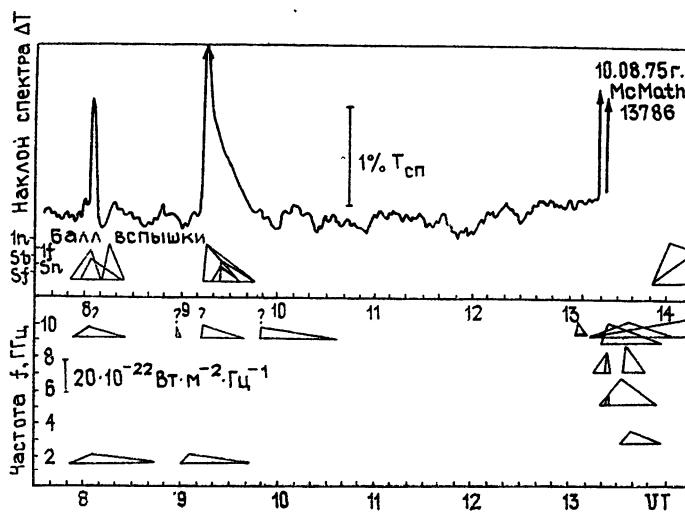


Рис. 5.

Если сравнить величины микроволновых всплесков интенсивности радиоизлучения в их максимумах на каждой из частот соответственно для каждого из рассмотренных случаев, то легко видеть, что для собы-тий «А» всплески интенсивности радиоизлучения в трехсанитметровом диапазоне имели амплитуду существенно большую, чем для событий типа «Б». Для последних событий максимум спектра всплесков был смешен в более длинноволновую часть диапазона.

Наклон спектра ΔT

12.08.75г.

McMath 13790

Балл вспышки
1n 1f
Sb Sn
Sf



частота f , ГГц
 $[2 \cdot 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}]$

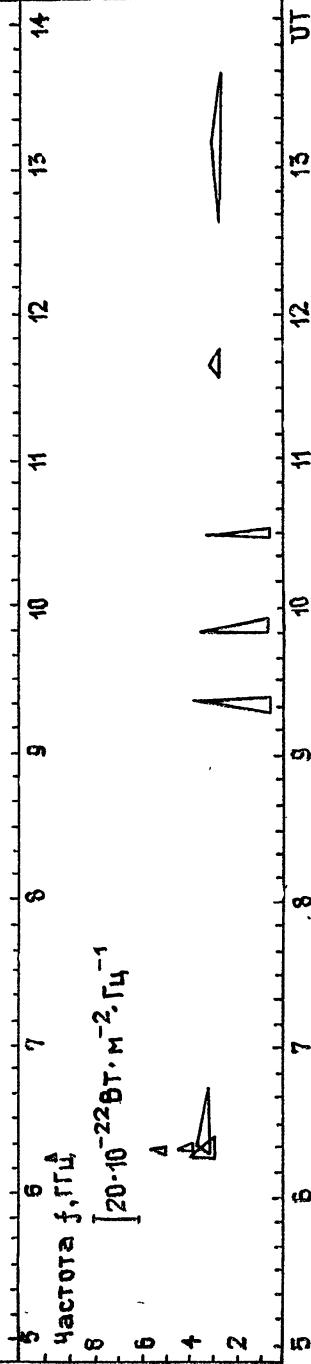


Рис. 6.

Кроме описанных выше случаев мы наблюдали значительные всплески наклона спектра, в то время как в интенсивности радиоизлучения они присутствовали только на отдельных частотах, в основном в 3-сантиметровом диапазоне, а также иногда на частоте $f \approx 1.4 \text{ ГГц}$ (см., например, рис. 4 ~ 10.05 UT, ~ 10.55 UT, рис. 5 ~ 8.05 UT, 9.20 UT). Мы не можем утверждать, что эти всплески были узкополосными, так как радиослужбой Солнца регистрируется интегральное излучение Солнца и микроволновые всплески на других частотах могли быть и не зарегистрированы. Однако в двух случаях (рис. 4 ~ 10.55 UT и рис. 5 ~ 9.20 UT) мы, по-видимому, имеем дело со всплесками, имеющими два отчетливо выраженных максимума в области частот ~ 8—10 ГГц и 1—2 ГГц, так как наблюдаемые в это время всплески наклона спектра имели амплитуду, сравнимую с величиной тех всплесков наклона спектра, во время которых были зарегистрированы микроволновые всплески интенсивности во всем диапазоне частот.

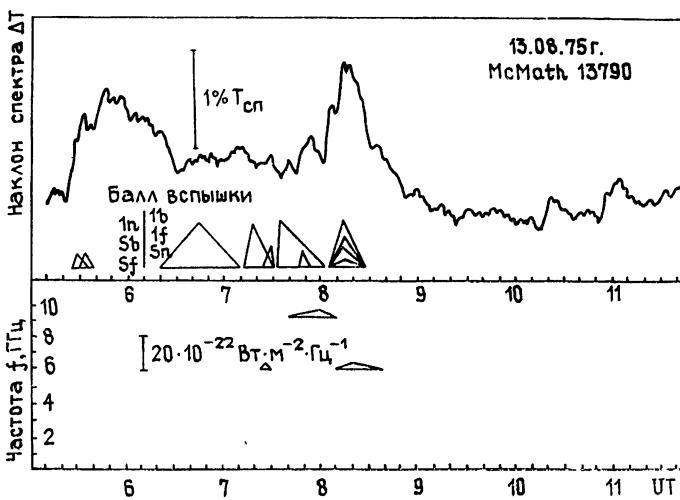


Рис. 7.

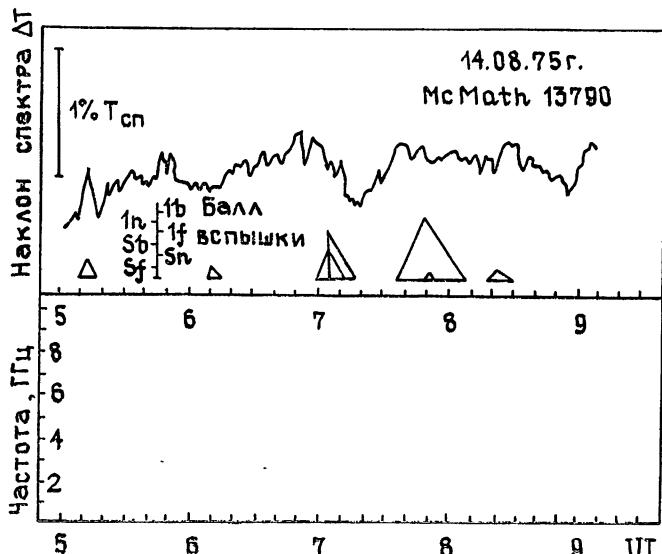


Рис. 8.

Информативность измерений наклона спектра видна также на следующем примере: 10 августа (рис. 5) в 3-сантиметровом диапазоне наблюдались два всплеска интенсивности радиоизлучения (~ 8.05 UT, 9.20 UT), имеющих сравнимые амплитуды, в то время как в наклоне спектра были зарегистрированы всплески со значительно отличающимися амплитудами. Таким образом, мы имеем возможность судить о спектральном различии процессов, вызывающих эти всплески.

Проведенный анализ полученных нами на радиотелескопе РТ-22 КАО записей наклона спектра радиоизлучения активных областей на Солнце в 3-сантиметровом диапазоне и H_{α} -вспышек, зарегистрированных в этих же активных областях Мировой Службой Солнца, показал следующее:

1) Во время H_{α} -вспышек наблюдаются как значительные по величине имеющие вид всплеска изменения наклона спектра радиоизлучения, так и слабые вариации, носящие флуктуационный характер;

2) Соотношение вариаций наклона спектра и H_{α} -вспышек различно для различных активных областей. Наблюдавшиеся нами активные области по внешним морфологическим признакам не отличались заметно друг от друга, однако для одной из них наблюдалась тесная корреляция вариаций наклона спектра и H_{α} -вспышек (включая слабые квазипериодические флуктуации наклона спектра), для другой — корреляция была слабой либо вообще не наблюдалась.

Сопоставление записей изменений наклона спектра радиоизлучения активных областей и всплесков интенсивности радиоизлучения Солнца на фиксированных частотах показало, что соответствующие им всплески наклона спектра могут сильно отличаться по своему характеру даже при внешнем подобии всплесков интенсивности радиоизлучения. Последнее свидетельствует о многообразии динамики протекающих в активных областях процессов, информация с которых может быть получена путем анализа данных одновременных наблюдений наклона спектра, интенсивности и желательно поляризации радиоизлучения активных областей.

Автор выражает благодарность Крымской Астрофизической Обсерватории за предоставленную возможность проведения наблюдений на радиотелескопе РТ-22, а также сотрудникам радиоастрономического отдела КрАО за содействие и помошь во время работы.

Автор глубоко признателен М. М. Кобрину за постоянное внимание к работе, ценные дискуссии и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. М. Кобрин, Phys Solariterr, № 2, 3, Potsdam (1976)
- 2 Solar Geophysical Data, pt. II, № 377 (1976); pt. II, № 378 (1976), pt. I, № 373 (1975)
- 3 Солнечные данные, № 7, № 8 (1975)
- 4 М. М. Кобрин и др., Отчет по НИР «Исследование флуктуаций солнечного радиоизлучения (КАПГ)», № гос. рег 76014807, НИРФИ, 1978.
- 5 Н. М. Цейтлин, Антennaя техника и радиоастрономия, изд Сов радио, М, 1976
- 6 Ю. М. Слоним, Солнечные процессы и их наблюдения, изд Фан, Узб ССР, Ташкент, 1973.
- 7 Л. А. Пустыльник, Внеатмосферные исследования активных областей на Солнце, Труды Консультативного Совещания АН социалистических стран по физике Солнца, изд Наука, М, 1976
- 8 А. Ф. Дравских, Изв. ГАО, 21, № 164, 128 (1960).

9. С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, В. Н. Цытович, Физика плазмы солнечной атмосферы, изд. Наука, М., 1977
10. J. R. Blakely, Sol. Phys., 46, 241 (1976).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 сентября 1978 г.

SPECTRUM SLOPE VARIATIONS OF THE ACTIVE REGION
RADIOEMISSION ($\lambda \approx 3$ cm) DURING THE SOLAR FLARES

S. I. Arbusov

Using the observation data of the spectrum slope of radioemission of the active regions ($\lambda \approx 3$ cm) McMath 13786 and 13790, obtained in August 1975 with 22 m radiotelescope of Crimean Astrophysical Observatory and the data of World radio and optical Sun Service a comparative analyses of variations (fluctuations and bursts) of the spectrum slope of radioemission of the active regions and their flare activity has been carried out.

УДК 523.164.3

О РЕФРАКЦИИ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ-ГИГАНТОВ*

М. Б. Зиничева, А. П. Наумов

Для моделей атмосфер планет-гигантов, построенных с учетом космических данных и сведений по излучению этих планет в СВЧ и ИК диапазонах, проведены теоретические исследования зависимости показателя преломления N , изменений эквивалентного радиуса планет и физических условий для сверхрефракции радиоволн от высоты h . Получены высотные зависимости атмосферной рефракции радиоволн в нейтральных частях атмосфер планет-гигантов. Определены параметры экспоненциальной аппроксимации $N(h)$ и вычислены значения планетной рефракции радиоволн вблизи критических высот для Юпитера, Сатурна и Нептуна.

Явление рефракции электромагнитных волн в планетных атмосферах привлекает внимание исследователей в связи с влиянием на общий характер распространения радиоволн и с возможностью использования этого явления для определения физических свойств атмосфер. Рефракция радиоволн в атмосферах планет земной группы рассматривалась в [1–4] и в ряде других работ. В связи с началом космических исследований планет-гигантов (станции «Пионер-10 и -11» [5], «Вояджер-1 и -2» [6]) аналогичное рассмотрение представляется целесообразным для Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна**. Такое рассмотрение для электрически нейтральных частей атмосфер указанных планет проведено в данной работе.

Наибольший интерес в подобном анализе представляет, по-видимому, выявление особенностей рефракции радиоволн, обусловленных спецификой физических условий в атмосферах планет-гигантов. Особенности физических условий на этих планетах характеризуются спецификой химического состава (преобладание водорода и гелия), отсутствием поверхностей планет, низкими температурами вблизи верхних границ видимых облачных образований и т. д. Возрастание давления с глубиной до весьма высоких значений приводит к тому, что ниже определенных уровней в атмосферах планет-гигантов преобладают уже множественные (вместо бинарных — в верхних слоях) соударения молекул.

Расчеты атмосферной рефракции R выполнялись для варианта погружающегося в адиабатическую атмосферу планет-гигантов источника радиоизлучения в слоях, где преобладают бинарные соударения молекул ($\tau < \Delta t$, τ — время соударений молекул, Δt — время между соударениями). Основные параметры принятых моделей планет представлены в табл. 1***.

* Результаты данной работы частично были доложены на сессии Научного Совета АН СССР по комплексной проблеме «Распространение радиоволн» (г. Горький, октябрь 1977 г.) и на XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (г. Томск, июнь 1978 г.).

** Сведения о физических условиях на Плутоне являются еще более неопределенными, чем на перечисленных планетах.

*** Верхнюю часть атмосфер планет часто моделируют изотермической областью. Тонкая структура верхней атмосферы Юпитера рассматривается, например, в [5, 25].

Таблица 1

Основные параметры моделей атмосфер планет-гигантов

Планета	Модель	P_0, T_0	$\nabla T, \frac{\text{град}}{\text{км}}$	r	$r_0, \text{км}$	$g, \text{см}/\text{с}^2$
Юпитер	A	$P_0 \approx 1 \text{ атм}$ $T_0 = 165 \text{ К} \pm 5 \text{ К}$ [5]	2,2 [7, 8]	1,49 [7, 8]	$7,14 \cdot 10^4$	2600
	B	$P_0 \approx 2 \text{ атм}$ $T_0 = 168 \text{ К}$ [7, 8]				
Сатурн	-	$P_0 \approx 1 \text{ атм}$ $T_0 \approx 95 \div 100 \text{ К}$ [8, 11-14]	0,9 [12]	1,49 [12]	$6,04 \cdot 10^4$	1120
Уран	-	$P_0 \approx 0,26 \text{ атм}$ $T_0 = 52 \text{ К}$ [18-20]	~ 1 [20]	1,59	$2,38 \cdot 10^4$	940
Нептун	-	$P_0 \approx 0,23 \text{ атм}$ $T_0 = 48 \text{ К}$ [19, 20, 22]	~ 1 [20]	1,3	$2,23 \cdot 10^4$	1500

Химический состав					$\bar{H}, \text{км}$
f_{H_2}	f_{He}	f_{NH_3}	$f_{\text{H}_2\text{O}}$	Прочие примеси	
~0,8	~0,2	(0,5 \div 6,8) $\cdot 10^{-4}$ [7]	$10^{-6} \div 10^{-3}$ [9, 10]	$\text{CH}_4, \text{CH}_3\text{D}, \text{CO}, \text{GeH}_4,$ $\text{HCN}, \text{C}_2\text{H}_2, \text{PH}_3 \text{ и др.}$ [5]	-400 -250
~0,8	~0,2	(2 \div 5) $\cdot 10^{-5}$ [12, 13]	$\sim 10^{-4}$ [13]	$\text{CH}_4, \text{C}_2\text{H}_6$ [15, 16] HD [17]	-200
~0,85	~0,15	(1 \div 4) $\cdot 10^{-5}$ [21]	?	HD [17]	-500
~0,85	~0,15	$10^{-7} \div 10^{-6}$ [21]	?	$\text{CH}_4, \text{C}_2\text{H}_6$ [23]	-120

r_0 — радиус видимого диска планеты, g — ускорение свободного падения, f_j — относительные содержания газовых компонент (по числу частиц). Данные о значениях f_{NH_3} и $f_{\text{H}_2\text{O}}$ относятся к высотам, лежащим ниже уровня насыщения NH_3 и H_2O . Сведения о величинах r_0 и g заимствованы из [24]. Остальные обозначения таблицы пояснены в тексте. Во второй части таблицы (химический состав) первая строка относится к обеим моделям Юпитера (A и B), значения \bar{H} приведены для каждой из этих моделей.

Наибольшая информация о физических условиях на планетах-гигантах имеется в настоящее время относительно Юпитера. После пролетов мимо Юпитера космических аппаратов «Пионер-10, -11» была получена новая информация об этой планете, принципиально недоступная ранее [5]. Вместе с тем, упомянутые результаты выявили и различные точки зрения, например, о физических условиях на уровне, который принимается исходным при построении современных адиабатических моделей планеты. Так, согласно данным космических аппаратов «Пионер-10, -11» в качестве указанного уровня следует принимать уровень, на котором давление составляет $P_0 \approx 1 \text{ атм}$ (точнее, $P_0 = 1 \text{ бар}$, в табл. 1 и в последующих расчетах мы округлили это значение P_0), а температура $T_0 = 165 \text{ К}$ [5]. В то же время наилучшее согласие с экспериментальными данными по измерению спектра яркостных температур в радиодиапазоне обнаруживается при давлении на исходном уровне $P_0 = 2 \text{ атм}$ [7]. Поэтому в статье мы рассматриваем две модели Юпитера: одна из которых (A) соответствует космическим данным [5], а другая (B) — результатам [7] интерпретации радиоастрономических сведений.

Описание высотных зависимостей температуры и давления ниже видимого облачного слоя на планетах-гигантах осуществлялось по формулам

$$T(h) = T_0 - \nabla T(h - h_0); \quad (1)$$

$$P(h) = P_0 \left[\frac{T(h)}{T_0} \right]^{r/(r-1)}, \quad (2)$$

где ∇_T — средний адиабатический градиент температуры по высоте, r — среднее отношение удельных теплоемкостей ($r = C_p/C_v$). Ниже уровня $h_0 = 0$ значения высот отрицательны ($h < 0$). Величина адиабатического градиента температуры $\nabla_T = g/C_p$, вообще говоря, несколько меняется с высотой, поскольку теплоемкость многоатомных газов при постоянном давлении C_p увеличивается с ростом температуры*. Однако отличие истинных величин ∇_T от соответствующих средних значений в атмосферах планет-гигантов, согласно, например, данным рисунка 1.3 в [26], не превышает десятых долей градуса, что, в свою очередь, приводит к неточностям в величинах температуры даже на весьма больших глубинах ($|h| < |\bar{H}|$) только в несколько десятков градусов.

Величина r , кроме химического состава атмосферы, существенно определяется величиной ускорения свободного падения на планете. Поэтому при близких химических составах и значениях P_0 , T_0 , ∇_T , но при заметно отличающихся величинах r и отношениях $r/(r-1)$ будут существенно различаться и величины давления на соответствующих высотных уровнях, что, в свою очередь, может привести к весьма заметно отличающимся условиям распространения радиоволн в планетных атмосферах. Подобная ситуация имеет место, в частности, для рефракции (см. ниже) в рассматриваемых атмосферных моделях Урана и Нептуна

$$\left(\left(\frac{r}{r-1} \right)_{\text{Урана}} = 2,69, \quad \left(\frac{r}{r-1} \right)_{\text{Нептуна}} = 4,33 \right).$$

Оценки границ применимости бинарного приближения при описании молекулярных соударений осуществлялись по следующим формулам для τ и Δt :

$$\tau = \frac{r_{\text{опт}}}{v}, \quad \Delta t = \frac{\bar{l}}{v}, \quad (3)$$

в которых полагалось (с определенным запасом), что оптический радиус $r_{\text{опт}}$ молекул примерно на порядок превышает газокинетический радиус, т. е. $r_{\text{опт}} \approx 10^{-7}$ см, а средняя длина свободного пробега \bar{l} и относительная тепловая скорость молекул v вычислялись на соответствующих уровнях по формулам [27, 28]:

$$\bar{l} = \frac{kT}{4\sqrt{2\pi} r_{\text{опт}}^2 P}; \quad (4)$$

$$v = \sqrt{\frac{8}{\pi} kT \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}. \quad (5)$$

В (4), (5) k — постоянная Больцмана, m_i — массы соударяющихся молекул. В табл. 1 приведены для каждой из рассматриваемых планет значения высот \bar{H} , на которых время молекулярных соударений и время между соударениями сравнимы ($\tau \approx \Delta t$). Расчеты рефракции осуществлялись для атмосферных слоев, лежащих выше \bar{H} ($|h| \leqslant |\bar{H}|$). Значение \bar{H} по модулю минимально для Нептуна и максимально — для Урана.

Расчеты атмосферной рефракции выполнялись по следующей модификации формулы (3.15) монографии [1]:

$$R = -10^{-6} (1 + 10^{-6} N_i) r_i \sin \theta \times \quad (6)$$

* Для одноатомных газов (в частности, для гелия) $C_p = \text{const}$.

$$\times \int_{N_i}^{N_0} \frac{(1 + 10^{-6}N)^{-1} dN}{\sqrt{(1 + 10^{-6}N)^2 (r_0 + h)^2 - (1 + 10^{-6}N_i)^2 r_i^2 \sin^2 \theta}}.$$

В (6) N — текущее по высоте h значение приведенного показателя преломления радиоволн в атмосфере, N_i и N_0 — соответствующие значения на уровнях излучения радиоволн и вблизи верхней границы облачного покрова, $r_i = r_0 + H_i$ ($H_i < 0$) — радиус уровня излучения радиоволн, θ — зенитный угол.

Для неполярных газовых компонент в области бинарных молекулярных соударений

$$N(h) = \frac{P(h)}{T(h)} \sum_j K_j f_j. \quad (7)$$

Здесь P выражено в *мбар*. Значения K_j для основных компонент атмосфер планет-гигантов могут быть определены из экспериментальных данных [29]. В частности, из [29] следует, что $K_{\text{H}_2} = 36,66 \pm \pm 0,05 \text{ К/мбар}$, $K_{\text{He}} = 9,44 \pm 0,05 \text{ К/мбар}$. Поскольку содержания дипольных газовых компонент в атмосферах планет-гигантов, по оценкам [5, 7, 9, 10, 12, 13, 21], составляют десятые и сотые доли процента*, то их вкладом в значения N и R можно пренебречь без существенного ущерба для точности расчета, хотя преломляющие свойства этих компонент, и особенно твердодипольные части N , при равных условиях превосходят по величине соответствующие упругие составляющие водорода и гелия**. При некоторых условиях в атмосферах планет-гигантов не исключается вклад в ослабление радиоволн механизма поглощения, обусловленного индуцированными при соударениях дипольными моментами молекул $\text{H}_2 - \text{H}_2$ [32]. Однако вклад этого нерезонансного механизма в диэлектрическую проницаемость ϵ молекулярного водорода, по оценкам, является эффектом более высокого порядка по сравнению с упругой составляющей ϵ . Заметим, что аналогичная ситуация для CO_2 реализуется в атмосфере Венеры [2]. Облачные образования также дают, как правило, малый вклад в рефракцию радиоволн [33].

На рис. 1 представлены высотные зависимости $N(h)$ для атмосфер планет-гигантов, полученные по формуле (7)***. Из рисунка видно, что зависимость N от высоты носит в общем неэкспоненциальный характер. На большом интервале высот (порядка сотни и более километров) недостаточно точной оказывается и аппроксимация высотной зависимости приведенного показателя преломления в виде $N(h) = \exp(Ah^2 + Bh + C)$, который является удовлетворительным для планет земной группы [2]. Однако на небольших интервалах высот можно использовать простую экспоненциальную зависимость

$$N(h) = N(h^*) e^{-D(h-h^*)}, \quad (8)$$

* В [30] рассматривались модели Урана и Нептуна с содержанием водяного пара и аммиака соответственно $f_{\text{NH}_3} \sim 0,002$, $f_{\text{H}_2\text{O}} \sim 0,01$. Однако при столь высоких содержаниях указанных дипольных газов возникают существенные трудности в интерпретации микроволновых спектров этих планет [21].

** Результаты [31] по атмосферной рефракции радиоволн для планет-гигантов скорректированы в данной работе на химический состав атмосфер с учетом данных [7, 9, 12, 13, 21] (см. также табл. 1) и на результаты [20] относительно начального уровня отсчета высоты в атмосферах Урана и Нептуна. Заметим, однако, что в [20] рассматривались только водородно-метановые модели планет с малыми примесями других газов. Поэтому атмосферные параметры [20] на уровнях $|h| > |h_0|$ отличаются от соответствующих параметров в рассматриваемых моделях.

*** Для ряда моделей Юпитера, отличающихся между собой содержанием водорода и гелия, зависимость $N(h)$ рассматривается также в [2].

при этом коэффициент D будет изменяться с изменением высоты. Характерные значения коэффициентов D для рассматриваемых атмосфер вблизи уровней $h^* = \bar{H}$ и $h^* = -100$ км приведены в табл. 2. Определение коэффициентов D представляет интерес в связи с тем, что многие формулы в теории атмосферной рефракции, удобные для практического использования, получены для зависимости типа (8) (см. [1]).

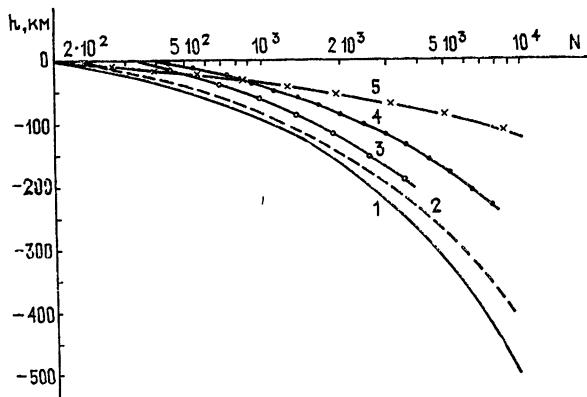


Рис. 1. Зависимость приведенного показателя преломления радиоволн от высоты в атмосферах планет-гигантов:
1—Уран, 2—Юпитер (модель A), 3—Сатурн, 4—Юпитер (модель B),
5—Нептун.

Таблица 2
Значения коэффициента $D \text{ км}^{-1}$ в экспоненциальной аппроксимации (8)
для двух высотных уровней атмосфер планет-гигантов

Планета $h, \text{ км}$	Юпитер		Сатурн	Уран	Нептун
	Модель A	Модель B			
-100	0,018	0,018	0,016	0,018	0,037
\bar{H}	0,0050	0,012	0,0081	0,0039	0,023

Полученные в данной работе количественные результаты по атмосферной рефракции радиоволн для планет-гигантов позволили установить следующие особенности R в рассматриваемых областях (по классификации [1]):

1) В слоях атмосфер, прилегающих к облачным покровам ($h > -50$ км), реализуются условия для положительной повышенной рефракции радиоволн на Юпитере (модель A) и Сатурне, для положительной пониженной рефракции на Уране и для положительной сверхрефракции на Нептуне;

2) На Юпитере (модель A) и Сатурне также существуют условия для сверхрефракции радиоволн (при $H_i \leq -100$ км). Для модели B Юпитера соответствующие условия реализуются при $h > -50$ км;

3) Сверхрефракция радиоволн в рассматриваемой атмосфере Урана отсутствует.

Впрочем, если окажется, что вблизи начального уровня отсчета высот на Уране давление существенно превышает принятое значение P_0 , то в атмосфере этой планеты также могут существовать условия

для сверхрефракции радиоволн. Так, для модели атмосферы с $T_0 = -55$ К и $P_0 = 3$ atm [34] условия для сверхрефракции возникают на высотах даже выше начального уровня $h_0 = 0$.

Физическая интерпретация перечисленных видов рефракции выполняется с помощью величины отношения радиуса кривизны траектории луча ρ к текущему радиусу планеты [1]:

$$\Gamma = \frac{\rho}{r_0 + h} = - \frac{1 + 10^{-6} N(h)}{10^{-6} (r_0 + h) \frac{dN}{dh}}. \quad (9)$$

Критические значения отношения Γ для различных типов рефракции приведены в [1]. В табл. 3 представлены величины отношений Γ , минимальных видимых зенитных углов $\theta_{0\min}$, при которых выходящее с различных уровней излучение вновь возвращается к планете, и эквивалентного радиуса планет r_3 для ряда высот h в атмосферах планет-гигантов. Расчеты углов $\theta_{0\min}$ выполнялись с шагом $\delta\theta = 0^\circ,5$ при $\theta \leqslant 89^\circ$ и с шагом $\delta\theta = 0^\circ,1$ при $\theta > 89^\circ$. Эквивалентный радиус планет вычислялся по формуле

$$r_3 = \frac{r_0 + H_i}{1 + 10^{-6} (r_0 + H_i) \frac{dN}{dh}}. \quad (10)$$

Таблица 3

Планета	Юпитер (модель А)			Юпитер (модель Б)		
	Γ	$\theta_{0\min}$	$r_3, \text{км}$	Γ	$\theta_{0\min}$	$r_3, \text{км}$
$h, \text{км}$						
-50	1,38	-	$+2,6 \cdot 10^5$	0,69	$89^\circ,2$	$-1,6 \cdot 10^5$
-100	0,96	$89^\circ,8$	$-1,8 \cdot 10^6$	0,48	$87^\circ,5$	$-6,6 \cdot 10^4$
-200	0,60	88°	$-1,1 \cdot 10^5$	0,30	$85^\circ,5$	$-3,1 \cdot 10^4$
-300	0,44	$86^\circ,5$	$-5,5 \cdot 10^4$			
-400	0,35	$84^\circ,5$	$-3,7 \cdot 10^4$			
-500						

Сатурн			Уран		Нептун		
Γ	$\theta_{0\min}$	$r_3, \text{км}$	Γ	$r_3, \text{км}$	Γ	$\theta_{0\min}$	$r_3, \text{км}$
1,33	-	$+2,4 \cdot 10^5$	4,55	$3,0 \cdot 10^4$	0,78	$89^\circ,3$	$-7,9 \cdot 10^4$
0,95	$89^\circ,8$	$-1,0 \cdot 10^6$	3,38	$3,4 \cdot 10^4$	0,30	$85^\circ,5$	$-9,4 \cdot 10^3$
0,59	$87^\circ,5$	$-8,6 \cdot 10^4$	2,32	$4,2 \cdot 10^4$			
			1,81	$5,3 \cdot 10^4$			
			1,51	$7,0 \cdot 10^4$			
			1,31	$1,0 \cdot 10^5$			

При сверхрефракции радиоволн эквивалентный радиус планеты становится отрицательным. В [35] показано, что отрицательный эквивалентный радиус планеты может, так же как и при положительных значениях, использоваться для расчетов напряженности полей электромагнитных волн.

При существовании сверхрефракции в атмосферах планет можно определить критическую высоту H_{kp} , на которой траектория луча имеет точку поворота, а функция

$$X(h) = [1 + 10^{-6} N(h)] \frac{r_0 + h}{r_0 + H_i} \quad (11)$$

обладает минимумом [1]. Значения H_{kp} для Юпитера (модели A и B), Сатурна и Нептуна получились соответственно равными — 91 км, — 13 км, — 91 км и — 39 км.

На рис. 2, 3 представлена угловая зависимость атмосферной рефракции ($\text{угол места } \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$) для планет-гигантов при излучении

радиоволн с высот $h_1 = -100$ км и $h_2 = \bar{H}$. Поскольку для Нептуна высоты h_1 и h_2 близки между собой, то результаты для этой планеты приведены только на рис. 3. Условия сверхрефракции в атмосферах Юпитера (модель A) и Сатурна при излучении радиоволн с высоты $h_1 = -100$ км реализуются для траекторий, почти параллельных соответствующей поверхности, и углы рефракции R быстро возрастают при $\varphi \leq 2^\circ$. Аналогичное возрастание углов R для модели B Юпитера имеет место для $\varphi \leq 4^\circ$. При излучении радиоволн с уровней $h = \bar{H}$ углы рефракции быстро возрастают при $\varphi \approx 5^\circ \div 7^\circ$.

В заключение приведем численные значения планетной рефракции α для Юпитера, Сатурна и Нептуна, полученные по формуле (10.31) монографии [1] с использованием данных табл. 2, для случая, когда излучатель и приемник электромагнитного излучения находятся за пределами атмосферы, а траектория луча проходит вблизи критической высоты ($h_F = H_{kp} + 5$ км; h_F — высота точки F, соответствующая прицельному расстоянию траектории луча). Оценки угла α показывают, что планетная рефракция в этом случае может достигать весьма больших значений: $\alpha_{\text{мод. A}}^{\text{Юпитер}} \approx 8^\circ 4'$, $\alpha_{\text{мод. B}}^{\text{Юпитер}} \approx 3^\circ 7'$, $\alpha_{\text{Сатурн}} \approx 10^\circ 17'$, $\alpha_{\text{Нептун}} \approx 5^\circ 9'$.

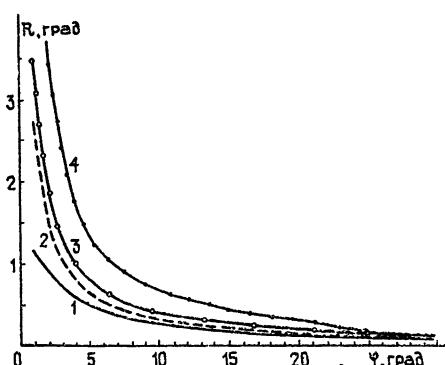


Рис. 2.

Рис. 2. Угловая зависимость атмосферной рефракции в атмосферах планет-гигантов для случая излучения радиоволн с уровня $h = -100$ км:

1 — Уран, 2 — Юпитер (модель A), 3 — Сатурн, 4 — Юпитер (модель B).

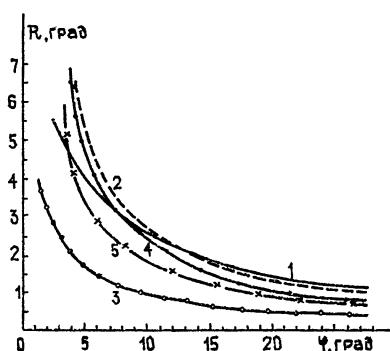


Рис. 3.

Рис. 3. Угловая зависимость атмосферной рефракции в атмосферах планет-гигантов для случая излучения радиоволн с уровня $h = \bar{H}$:

1 — Уран, 2 — Юпитер (модель A), 3 — Сатурн, 4 — Юпитер (модель B), 5 — Нептун.

Полученные результаты свидетельствуют о возможном многообразии рефракционных условий в атмосферах планет-гигантов, которые необходимо учитывать при теоретических и экспериментальных исследованиях распространения радиоволн в этих атмосферах. Зависимость планетной рефракции радиоволн от физических условий в атмосферах планет-гигантов (ср., например, данные для различных моделей Юпитера) может быть использована в космическом радиопросвещивающем эксперименте [2, 36, 37] для уточнения высотных распределений метеоэлементов (в частности, давления) и устранения, таким образом, существующих модельных альтернатив.

Авторы признательны В. И. Дробышевичу за помощь в проведении расчетов на ЭВМ БЭСМ-6.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Колосов, А. В. Шабельников, Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса, изд. Сов. Радио, М., 1976.
2. О. И. Яковлев, Распространение радиоволн в Солнечной системе, изд. Сов. Радио, М., 1974.
3. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрон. ж., 48, № 1, 146 (1971).
4. Н. Н. Крупенио, А. П. Наумов, сб. Физика Луны и планет, изд. Наука, М., 1972, стр. 365.
5. «Jupiter», ed. T. Gehrels, The University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 1976.
6. V. R. Eshleman, G. L. Tyler, J. D. Anderson, G. Fjeldbo, G. S. Levy, G. E. Wood, T. A. Croft, Space Sci. Rev., 21, № 2, 207 (1977).
7. А. Д. Кузьмин, Т. В. Смирнова, Астрон. вестник, 7, № 3, 139 (1973).
8. A. D. Kuzmin, T. V. Smirnova, Cospar space research, 18, Pergamon Press, Oxford and New York, 457 (1978).
9. H. P. Larson, U. Fink, R. Treffers, T. N. Gautier, Astrophys. J., 197, № 3, pt. 2, L137 (1975).
10. М. Я. Маров, Земля и Вселенная, № 3, 16 (1977).
11. G. Nolt, W. B. Sinton, L. J. Caroff, E. F. Erickson, D. W. Strecker, J. V. Radostitz, Icarus, 30, № 4, 747 (1977).
12. А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрон. вестник, 6, № 1, 13 (1972).
13. А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 12, 1755 (1974).
14. D. A. Allen, T. L. Murchie, Icarus, 14, № 1, 1 (1972).
15. A. Tokunaga, R. F. Knacke, T. Owen, Astrophys. J., 197, № 2, pt. 2, L77 (1975).
16. T. Owen, R. D. Cess, Astrophys. J., 197, № 1, pt. 2, L37 (1975).
17. W. Macy, W. H. Smith, Astrophys. J., 222, № 2, pt. 2, L73 (1978).
18. D. Morrison, D. P. Cruikshank, Astrophys. J., 179, № 1, pt. 1, 329 (1973).
19. G. H. Rieke, F. J. Low, Astrophys. J., 193, № 3, pt. 2, L147 (1974).
20. R. E. Danielson, Icarus, 30, № 3, 462 (1977).
21. С. Б. Андреянович, К. П. Гайкович, А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 7, 888 (1979).
22. R. F. Loewenstein, D. A. Hargre, M. Harvey, Astrophys. J., 218, № 3, pt. 1, L145 (1977).
23. W. Macy, W. Sinton, Astrophys. J., 218, № 2, pt. 2, L79 (1977).
24. К. У. Аллен, Астрономические величины, ИЛ, М., 1960.
25. W. B. Hubbard, R. E. Nather, Astron. J., 77, № 1, 41 (1972).
26. Ф. Даниэльс, Р. Олберти, Физическая химия, изд. Мир, М., 1978.
27. Ф. Рейф, Статистическая физика, Берклиевский курс физики, т. 5, изд. Наука, М., 1977.
28. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.
29. L. Essen, Proc. Phys. Soc., 66B, № 399B, pt. 3, 189 (1953).
30. L. Margulis, H. O. Halvorson, J. Lewis, A. G. W. Cameron, Icarus, 30, № 4, 793 (1977).
31. К. П. Гайкович, М. Б. Зиничева, А. П. Наумов, Тезисы докладов на XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (Томск, июнь 1978), ч. 1, изд. Наука, М., 1978, стр. 246.
32. К. П. Гайкович, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 9, 1037 (1979).
33. С. А. Жевакин, М. Б. Каневский, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 4, 514 (1976).
34. А. Д. Кузьмин, ДАН СССР, 196, № 1, 65 (1971).

- 35 С. Я. Брауде, И. Е. Островский, Ф. С. Санин, Изв. вузов — Радиофизика, 4, № 1, 67 (1961)
36. А. С. Гурвич, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 7, № 10, 1023 (1971)
37. А. П. Наумов, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 13, № 9, 943 (1977).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 августа 1978 г.

REFRACTION OF RADIO WAVES IN ATMOSPHERES OF GIANT PLANETS

M. B. Zinicheva, A. P. Naumov

Theoretical investigations are carried out of the dependence of the refraction index N , variations of the equivalent radius of planets and physical conditions for superrefraction of radio waves on the height h for giant planet atmosphere models built with the help of cosmic data and data on radiation of these planets in VHF and IF wavelengths. Height dependence of the atmosphere refraction of radio waves have been obtained in neutral parts of atmospheres of giant planets. Parameters of exponential approximation $N(h)$ are defined and values of planetary refraction of radio waves close to the critical height are calculated for Jupiter, Saturn and Neptune.

УДК 533.951

О ЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Н. Г. Денисов

Исследуется линейное взаимодействие электромагнитных волн в переходном слое между неоднородной гиротропной плазмой и однородной квазизотропной или квазивакуумной средой. Получены точные решения уравнений взаимодействия волн для некоторых моделей переходных слоев. Эти решения позволяют определить параметры излучения, выходящего из неоднородной плазмы. Показано, что эти параметры могут существенно отличаться от тех, которые предсказывает приближение геометрической оптики.

Исследованию линейного взаимодействия (трансформации) электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме посвящено большое число работ (см., например, [1-3]), в которых были рассмотрены наиболее типичные случаи взаимодействия волн в ионосферной, космической и лабораторной плазме. Интерес к этой проблеме прежде всего связан с тем, что в определенных условиях эффект взаимодействия проявляется в локализованных областях плазмы и оказывает существенное влияние на параметры распространяющихся волн. Это позволяет, в частности, использовать эффект трансформации для целей диагностики плазмы.

Хорошо известно, что в плавно неоднородной среде заметная трансформация волн возможна в той ее области, где показатели преломления нормальных волн $n_{1,2}$ принимают близкие друг другу значения (область квазипересечения или пересечения кривых $n_{1,2}(z)$). К этому типу взаимодействия относится взаимодействие высокочастотных волн в ионосферной плазме [1], определяющее эффект утраивания сигналов в ионосфере, взаимодействие быстрых и медленных магнитозвуковых волн [4], трансформация низкочастотных волн, объясняющая появление ионных свистов в верхней ионосфере [5], и взаимодействие циркулярно поляризованных волн в области поперечного распространения (см. [6] и цитированную там литературу).

Известна также формальная аналогия между теорией взаимодействия волн в неоднородной магнитоактивной плазме и квантовой теорией неупругих соударений между атомами. Так, вышеуказанные примеры взаимодействия аналогичны адиабатическим переходам в квантовой системе с двумя линейными термами, теория которых была развита в работах Ландау и Зинера (см. [7-9]). Эта аналогия распространяется и на ряд других случаев взаимодействия, которые рассматриваются в настоящей работе. К ним относится, прежде всего, взаимодействие электромагнитных волн на плавной границе неоднородной гиротропной плазмы и слабогиротропной однородной среды в области малых плотностей электронов, в частности, при выходе излучения из плотной плазмы в квазивакуумную среду.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения поля для плоских электромагнитных волн в неоднородной плоскостной гиротропной плазме могут быть представлены в виде двух связанных уравнений второго порядка [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Pi_1}{dz^2} + (k_0^2 n_1^2 - \psi^2) \Pi_1 &= -\frac{d\psi}{dz} \Pi_2 - 2\psi \frac{d\Pi_2}{dz}, \\ \frac{d^2 \Pi_2}{dz^2} + (k_0^2 n_2^2 - \psi^2) \Pi_2 &= \frac{d\psi}{dz} \Pi_1 + 2\psi \frac{d\Pi_1}{dz}, \end{aligned} \quad (1)$$

которым подчиняются волновые функции

$$\Pi_{1,2} = E_{x1,2} \sqrt{1 - K_{1,2}^2} \sim e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где $E_{x1,2}$ — компоненты электрического поля необыкновенной (1) и обычной (2) волн, так что $E_x = E_{x1} + E_{x2}$, $E_y = E_{y1} + E_{y2}$, $E_{y1,2} = K_{1,2} E_{y1,2}$. Считается, что волны распространяются вдоль оси z , а внешнее магнитное поле H_0 лежит в плоскости yz и составляет угол ϑ с осью z , в (2) входят также коэффициенты поляризации нормальных волн:

$$K_{1,2} = i(\eta \mp \sqrt{1 + \eta^2}), \quad \eta = \frac{s_c}{1 - v - is}. \quad (3)$$

Здесь используются хорошо известные обозначения [1]:

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad s = \frac{\gamma_{\text{эфф}}}{\omega}, \quad s_c = \sqrt{u} \frac{\sin^2 \vartheta}{2 \cos \vartheta} \quad (4)$$

(ω_0 — плазменная частота, $\omega_H = \sqrt{u}\omega$ — гирочастота электронов и $\gamma_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений электронов с тяжелыми частицами). Коэффициент связи ψ , входящий в систему (1), определяется формулой [1]

$$\psi = \frac{i}{K_2^2 - 1} \frac{dK_2}{dz} = \frac{1}{2(1 + \eta^2)} \frac{d\eta}{dz} \quad (5)$$

и, как видно из (3), определяется градиентами концентрации электронов, числа соударений и внешнего магнитного поля.

Для сред с плавно меняющимися свойствами, когда эффектом отражения волн можно пренебречь, уравнения (1) сводятся к системе уравнений второго порядка для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн [1, 10]. В слабоионизированной плазме, $v \ll 1$, амплитуды нормальных волн $U_{1,2}(z)$, определенные соотношениями

$$\Pi_{1,2} = U_{1,2} \exp \left\{ -ik_0 \int \frac{n_1 + n_2}{2} dz \right\}, \quad (6)$$

подчиняются системе уравнений [11]:

$$\begin{aligned} U'_1 &= ik_0 \frac{n_2 - n_1}{2} U_1 - \psi U_2, \\ U'_2 &= \psi U_1 - ik_0 \frac{n_2 - n_1}{2} U_2. \end{aligned} \quad (7)$$

При $v \ll 1$ и $s = 0$ [1]

$$\begin{aligned} n_2 - n_1 &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad A = \frac{vu_T}{2(1-u)}, \quad B = \frac{v\sqrt{u_L}}{1-u}, \\ n_2 + n_1 &= 2 \sqrt{1 - \frac{v}{2} \frac{2-u_T}{1-u}}, \quad u_T = u \sin^2 \vartheta, \quad u_L = u \cos^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

Параметр η , определяющий коэффициент связи ψ , при этом будет равен

$$\eta = \frac{A}{B} = \frac{u_T}{2\sqrt{u_L}} = s_c. \quad (9)$$

Таким образом, в использованном здесь приближении ($v \ll 1$) система (7) описывает линейное взаимодействие волн в плазме лишь при условии изменения параметра s_c , т. е. при неоднородном внешнем магнитном поле H_0 . Вместе с тем, по своей структуре она практически совпадает с более общими уравнениями Баддена [10], и результаты, полученные ниже для определенных типов пересечений, могут быть использованы при анализе подобных случаев взаимодействия в плазме без принятых здесь ограничений.

Следует указать на то, что система (7) плохо приспособлена для решения тех задач, о которых пойдет речь ниже, т. е. тех случаев взаимодействия, когда точки $\eta = \pm i$ (в которых $n_1 = n_2$) располагаются вблизи действительной оси z . В этих точках коэффициенты поляризации нормальных волн $K_{1,2}$ (см. (3)) одинаковы и параметр ψ обращается в бесконечность. Однако уравнения (7) можно преобразовать к более удобному виду — к системе с регулярными коэффициентами, если перейти к другим зависимым переменным $V_{x,y}(z)$ [12]:

$$E_{x,y} = V_{x,y} \exp \left\{ -i \int \frac{n_1 + n_2}{2} dz \right\}. \quad (10)$$

Это достигается преобразованием

$$\begin{aligned} V_x &= U_1 \cos g + U_2 \sin g, & \operatorname{ctg} 2g &= \eta = \frac{A}{B}, \\ iV_y &= U_1 \sin g - U_2 \cos g, \end{aligned} \quad (11)$$

которое дает систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд $V_{x,y}$, эквивалентную (7):

$$\begin{aligned} V'_x &= i \frac{k_0 A}{2} V_x - \frac{k_0 B}{2} V_y, \\ V'_y &= \frac{k_0 B}{2} V_x - i \frac{k_0 A}{2} V_y. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбор той или иной системы уравнений (7), (12) определяется условиями постановки конкретных задач и позволяет существенно упростить их решение.

При $u \ll 1$ уравнения (12) совпадают с уравнениями квазизотропного приближения [6]. Аналогичные уравнения для общего случая неоднородной магнитоактивной плазмы были получены в работах [13, 14].

В теории распространения волн в средах с плавно меняющимися свойствами широко используется приближение геометрической оптики (ГО), которое для уравнений (12) имеет вид

$$V_x = \frac{C_1}{\sqrt{1 - K_1^2}} \exp \left\{ ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right\} + \frac{C_2}{\sqrt{1 - K_2^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right\} \quad (13)$$

($K_{1,2}$ определяется формулами (3)) и представляет волновое поле в виде независимых волн двух типов. Однако в области сближения кривых $n_{1,2}(z)$, когда точки $\eta = \pm i (K_{1,2}^2 = 1)$ приближаются к действительной оси z , решение (13) становится неприменимым. Здесь коэффициенты C_1 и C_2 изменяются и по выходе из указанной области принимают другие значения. Закон преобразования коэффициентов в решении (13), который полностью описывает эффект линейного взаимодействия, может быть получен на основе более полного исследования решений исходной системы (12). Поскольку результат существенно зависит от характера пересечения дисперсионных кривых, ниже рассматриваются конкретные модели неоднородных плазменных слоев.

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ВЫХОДЕ В ОДНОРОДНУЮ ГИРОТРОПНУЮ СРЕДУ

Как показано в [10] (см. также [12]), на примере одной модели переходного слоя плазмы заметного взаимодействия волн следует ожидать при сильном перепаде параметра $\int \psi dz$ на масштабе изменения $n_2 - n_1$. По этой причине мы будем рассматривать те случаи распространения волн в неоднородной плазме, когда в глубоких ее слоях выполнено условие квазипоперечности $s_c \gg 1$, а при выходе из слоя ($z \rightarrow \infty$) $s_c \rightarrow 0$. При этом кривые $n_{1,2}(z)$ не пересекаются и ведут себя качественно так, как изображено на рис. 1. В области $z \sim z_0$ ($A \sim B$) происходит перестройка дисперсионных кривых, так что слева от нее распространение волн носит квазипоперечный характер, а при $z > z_0$ — распространение квазипродольное.

В квантовой теории неупругих соударений между атомами такой случай квазипересечений рассматривался в работе [8], где было показано, что область квазипересечения $A \sim B$ ($z \sim z_0$) обладает свойствами, подобными свойствам хорошо известного линейного пересечения. Задача решалась методом фазовых интегралов для потенциала взаимодействия, спадающего по степенному закону. В обозначениях нашей задачи это соответствует следующей модели переходного слоя плазмы:

$$A = A_0 \left(\frac{z}{L} \right)^{-s}, \quad s \geq 2, \quad B(z) = \text{const} \quad (14)$$

(поперечная компонента внешнего магнитного поля при $z \rightarrow \infty$ исчезает, и поле становится продольным, $u \ll 1$).

Используя решение, полученное в [8], сразу же можно найти коэффициенты трансформаций волн при прохождении области квазипе-

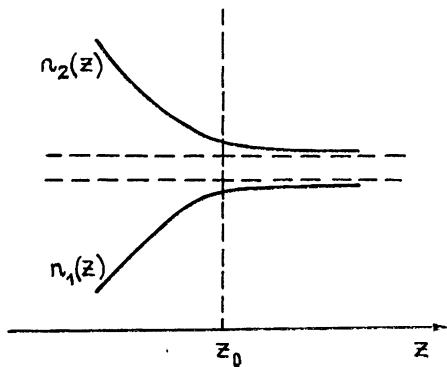


Рис. 1.

рессечения. Так, если вначале ($z < z_0$) задана волна определенного типа (2), то при прохождении через точку $z = z_0$ она расщепляется на две волны 1 и 2 с амплитудами

$$|C_1| = e^{-\delta}, \quad |C_2| = \sqrt{1 - e^{-2\delta}}. \quad (15)$$

Параметр δ в этом случае равен

$$\delta = -\frac{ik_0}{4} \oint (n_2 - n_1) dz = -\frac{ik_0}{2} \oint \sqrt{A^2 + B^2} dz. \quad (16)$$

Если ввести переменную интегрирования

$$t = \frac{A}{B} = \frac{A_0}{B} \left(\frac{z}{L} \right)^{-s},$$

то интеграл (16) запишется в виде

$$\delta = \frac{ik_0 L}{4s} B^{\frac{s-1}{s}} A_0^{1/s} \oint \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^n} dt, \quad n = 1 + \frac{1}{s}, \quad (17)$$

где контур интегрирования охватывает точки ветвления $t = \pm i$ (см. рис. 2). На рис. 2 изображены также линии Стокса для случая

$s = 2$, которые разделяют плоскость комплексного переменного t на области с различным асимптотическим поведением решения вида (13). При этом линия, соединяющая точки $t = \pm i$, является полуокружностью, пересечение которой с действительной осью z соответствует точке квазипересечения $A \sim B$. В работе [8] было показано также, что при увеличении s структура стоксовых линий, изображенная на рис. 2, изменяется незначительно, так что качественно картина взаимодействия для переходного слоя (14) при $s > 2$ сохраняется. При этом эффект трансформации волн определяется параметром δ (см. (16)), который, как легко показать, по порядку величины равен разности набегов фаз

в области квазипересечения*:

$$\delta \sim k_0 (n_2 - n_1) L_{\text{эфф}}, \quad (18)$$

и эффективная длина взаимодействия $L_{\text{эфф}} = L (A/B)^{1/s}$ определяется расстоянием между ближайшими к действительной оси z точками, в которых $n_1 = n_2$.

Границный случай $s = 1$ в работе [8] не рассматривался, однако для такой модели переходного слоя уравнения (12) могут быть решены точно. При $A = A_0 (z/L)^{-1}$ и $B = \text{const}$ система (12) сводится к уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 V_x}{d \xi^2} + \left(1 + \frac{\alpha^2 + i\alpha}{\xi^2} \right) V_x = 0, \quad (19)$$

* В теории неадиабатических переходов при атомных столкновениях этот параметр называется параметром Месси [9].

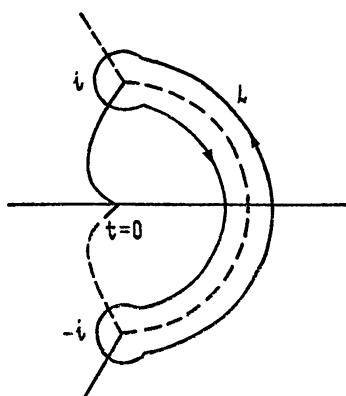


Рис. 2.

где $\xi = k_0 B z / 2L$, $\alpha = k_0 L A_0 / 2$, решение которого может быть выражено в функциях Бесселя. Если теперь выбрать частное решение (12) в виде

$$\begin{aligned} V_x &= C \sqrt{\xi} J_{\frac{1}{2} - i\alpha}(\xi), \\ V_y &= -C \sqrt{\xi} J_{-\frac{1}{2} - i\alpha}(\xi), \end{aligned} \quad |C|^2 = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \pi \alpha}, \quad (20)$$

где константа C выбрана для нормировки полного потока на единицу, то в области квазипоперечного распространения ($\xi \ll 1$, $\alpha \neq 0$) оно дает одну нормальную волну (2), поляризация которой близка к линейной:

$$\begin{aligned} V_x &\approx \frac{C \xi}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - i\alpha\right)} \exp\left(-i\alpha \ln \frac{\xi}{2}\right) \sim \xi \exp\left(-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\right), \\ V_y &\approx \frac{C \sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\alpha\right)} \exp\left(-i\alpha \ln \frac{\xi}{2}\right) \sim \exp\left(-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz\right). \end{aligned} \quad (21)$$

При выходе в область квазипродольного распространения ($z \rightarrow \infty$) асимптотическое представление функций Бесселя в (20) при $\xi \gg 1$, $\xi \gg \alpha$ дает циркулярно поляризованные нормальные волны. Амплитуды этих волн равны

$$|C_1| = (1 + e^{2\delta})^{-1/2}, \quad |C_2| = (1 + e^{-2\delta})^{-1/2}, \quad \delta = \pi\alpha = \frac{\pi}{2} k_0 L A_0. \quad (22)$$

Параметр взаимодействия в этом случае также определяется разностью набегов фаз нормальных волн на эффективной длине взаимодействия.

Можно привести ряд других моделей переходного слоя, для которых уравнения (12) имеют точные решения. Так, например, при экспоненциальном спадании поперечной компоненты $H_0 A(z) = A_0 e^{-z/L}$, $B = \text{const}$, взаимодействие волн в области квазипересечения $A \sim B$ характеризуется коэффициентами трансформации (22), в которых параметр взаимодействия равен

$$\delta = \frac{\pi}{2} k_0 L B \quad (23)$$

и по порядку величины совпадает со значением параметра (18) в точке квазипересечения.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН ПРИ ВЫХОДЕ В ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Аналогичное квазипересечение дисперсионных кривых реализуется в переходном слое магнитоактивная плазма — изотропная среда. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда в переходном ϑ слое внешнее магнитное поле H_0 при постоянном угле ϑ стремится к нулю. Это означает, что при $z \rightarrow \infty$ $A(z) \rightarrow 0$ и $B(z) \rightarrow 0$ и дисперсионные кривые ведут себя так, как показано на рис. 3. Область квазипересечения, где происходит перестройка дисперсионных кривых ($z \sim z_0$, $A \sim B$), здесь такая же, как и в рассмотренном выше случае, но теперь при $z > z_0$ располагается область, в которой кривые $n_{1,2}(z)$ продолжают сближаться и на действительной оси z может появиться точка их пересечения.

Рассмотрим вначале переходный слой, в котором внешнее магнитное поле спадает по закону $H_0 \sim \frac{1}{z}$ ($u \ll 1$). Коэффициенты системы уравнений (12) будут равны

$$A = A_0 \left(\frac{z}{L} \right)^{-2}, \quad B = B_0 \left(\frac{z}{L} \right)^{-1}, \quad (24)$$

и ее решение может быть записано в функциях Уиттекера [15]:

$$\begin{aligned} V_y &= t^{-1/2} W_{1/2, i\beta}(-t), & t &= \frac{i k_0 L A_0}{z} = \frac{i k_0 L v u_L^0}{2z}, \\ V_x &= \beta t^{-1/2} W_{-1/2, i\beta}(-t), & \beta &= \frac{k_0 L B_0}{2} = \frac{k_0 L}{2} v \sqrt{u_L^0}. \end{aligned} \quad (25)$$

В глубоких слоях плазмы, т. е. при $t \gg 1$, $t \gg \beta$ асимптотическое разложение функций Уиттекера дает представление

$$\begin{aligned} V_y &\approx e^t \sim \exp \left(-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right), \\ V_x &\approx \frac{\beta e^t}{t} \sim \frac{\beta}{t} \exp \left(-ik_0 \int \frac{n_2 - n_1}{2} dz \right), \end{aligned}$$

соответствующее приближению ГО для волны типа 2, которая в этой области имеет поляризацию, близкую к линейной. Поле этой волны при выходе в изотропную среду ($z \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$) имеет также простое представление, если использовать разложение функций, входящих в (25), при $t \ll 1$ [15]:

$$\begin{aligned} V_y &= (-t)^{i\beta} \frac{\Gamma(-2i\beta)}{\Gamma(-i\beta)} + (-t)^{-i\beta} \frac{\Gamma(2i\beta)}{\Gamma(i\beta)}, \\ V_x &= \beta \left[(-t)^{i\beta} \frac{\Gamma(-2i\beta)}{\Gamma(1-i\beta)} + (-t)^{-i\beta} \frac{\Gamma(2i\beta)}{\Gamma(1+i\beta)} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Легко убедиться в том, что формула (26) дает циркулярно поляризованные волны. Используя известные свойства гамма-функций, можно показать, что амплитуды этих волн равны

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\delta}}}, \\ C_- &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\delta}}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, эффект трансформации в этом случае зависит от параметра $\delta = \pi\beta = \frac{\pi}{2} k_0 L v \sqrt{u_0} \cos \vartheta$, который при

заданном градиенте внешнего магнитного поля (L^{-1}) может принимать различные значения. При $\delta \ll 1$ волна распространяется без изменения

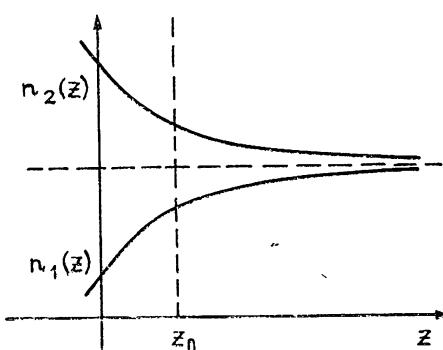


Рис. 3.

поляризации, а при $\delta \gg 1$ ее поляризация меняется в соответствии с поляризацией нормальной волны (2).

Следует отметить, что рассмотренный случай переходного слоя во многом напоминает рассмотренный выше, так как и здесь существует область взаимодействия, разделяющая области применимости геометрической оптики. Поэтому наиболее характерным переходным слоем между гиротропной плазмой и изотропной средой является тот, для которого интеграл $\int_z^\infty (n_2 - n_1) dz$ имеет конечное значение. В этом случае вся информация об эффекте взаимодействия содержится в предельном значении коэффициента поляризации волны, выходящей из гиротропной плазмы. Некоторые модели такого рода переходных слоев были рассмотрены в [12]. Одним из них является слой, в котором H_0 спадает по экспоненциальному закону. В этом случае эффект взаимодействия также определяется одним параметром (18), взятым в точке квазипресечения, а $L_{\text{эфф}}$ по порядку величины равна масштабу всего переходного слоя L .

Приведенные выше решения показывают, что при выходе излучения из плавно неоднородной гиротропной плазмы в однородную квазизотропную или квазивакуумную среду ($v \ll 1$) его поляризация может существенно отличаться от той, которую предсказывает геометрическая оптика. Полученные формулы позволяют рассчитать те искажения, которые возникают в волне в переходном слое плазмы, и определить параметр взаимодействия δ и степень локализации эффекта взаимодействия ($L_{\text{эфф}}/L$). Рассмотренные модели переходных слоев характеризуются областью взаимодействия, которая определяется наличием двух точек взаимодействия ($n_1 = n_2$ и $K_1 = K_2$), расположенных близко к действительной оси z . В этих случаях параметры δ и $L_{\text{эфф}}$ определяются стандартным образом, однако их конкретные значения существенно зависят от модели переходного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967
2. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Вопросы теории плазмы, вып. 7 (1973).
3. К. Г. Budden, Radio waves in the Ionosphere, Cambridge, 1961.
4. С. С. Моисеев, В. Р. Смилянский, Магнитная гидродинамика, 2, 23 (1965).
5. Н. С. Беллюстин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 4, 487 (1978).
6. Ю. А. Кравцов, О. Н. Найда, ЖЭТФ, 71, 237 (1976).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1964.
8. Е. С. Stüskelberg, Helv Phys. Acta, 5, 369 (1932).
9. Е. Е. Никитин, Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах, изд. Химия, М., 1970
10. K. G. Budden, Proc Roy Soc, A215, 215 (1952).
11. M. H. Cohen, Astrophys J, 131, 664 (1960)
12. Н. Г. Денисов, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 921 (1978).
13. M. A. Simpson, Austr. J Phys., 29, 343 (1976).
14. Н. С. Беллюстин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 11, 1563 (1978)
15. Э. Уиттекер, Дж. Н. Уатсон, Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1963.

**THE LINEAR INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN AN
INHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA***N. G. Denisov*

The linear interaction of electromagnetic waves is investigated in a transition layer between an inhomogeneous plasma and a homogeneous quasi-isotropic or quasi-vacuum medium. Accurate solutions of equations of wave interaction have been obtained for some models of transition layers. These solutions permit to define parameters of radiation outgoing from an inhomogeneous plasma. It is shown that these parameters may essentially differ from those which predict the approximation of the geometrical optics.

УДК 621.371.25

РАССЕЯНИЕ МОД ТИПА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ НА ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ, ВЫТЯНУТЫХ ВДОЛЬ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. Ф. Беленов, Ю. В. Чугунов

Рассматривается рассеяние мод типа шепчущей галереи на неоднородностях, вытянутых вдоль геомагнитного поля. Вычисляются коэффициенты возбуждения мод при рассеянии одной моды в другую и при рассеянии плоской волны на вытянутой неоднородности (аналог «ракурсного» рассеяния в геометрооптическом приближении). Обсуждаются вопросы селекции мод при таком рассеянии.

Как известно [¹⁻⁴], ионосферные волноводы (ИВК) могут возбуждаться за счет неоднородной структуры диэлектрической проницаемости ионосферной плазмы. Данному вопросу посвящено значительное количество работ. Например, в работе [²] была развита адиабатическая теория захвата радиоволн в ИВК за счет рефракции на регулярных горизонтальных ионосферных неоднородностях, в [⁴] решена задача в приближении геометрической оптики о возбуждении ИВК в результате рассеяния радиоволн на случайных неоднородностях ионосферы; в работе [³] изложены результаты волнового подхода к задаче о влиянии неоднородностей ионосферной плазмы на спектр собственных мод ИВК.

В настоящей работе рассматривается задача возбуждения в ИВК мод типа шепчущей галереи [⁶]. Основное внимание при этом уделяется вопросам возбуждения волновода за счет рассеяния на неоднородностях, вытянутых вдоль геомагнитного поля. Показано, как анизотропия неоднородностей влияет на условия наиболее оптимальной «запитки» ИВК. В то же время отметим, что рассеяние радиоволн на изотропных неоднородностях в ИВК рассматривалось в работе [⁹].

1. Представим ИВК, содержащий неоднородности, в виде однородной и неоднородной частей. Модель однородной части волновода здесь была выбрана в виде цилиндрической полости с $\epsilon = 1$ при $r < R_1$ и $\epsilon = \epsilon_1 < 1$ при $r \geq R_1$ (ϵ — диэлектрическая проницаемость слоя, r — расстояние до точки наблюдения в цилиндрической системе координат с началом в центре Земли). Параметры волновода — объем волноводного канала, число мод в канале, объем, занимаемый отдельной модой, — зависят от выбора величин R_1 и ϵ_1 . На основании анализа кругосветного распространения коротких радиоволн, проведенного в работе [¹], можно выбрать величины ϵ_1 и R_1 так, чтобы приведенные выше параметры рассматриваемой модели волновода были близки к аналогичным параметрам реального надземного волновода. При этом для диапазона частот $\omega \sim (1,5 \div 2) \cdot 10^8 \text{ Гц}$ следует положить $\epsilon_1 = 0,92$, $z_1 = 90 \text{ км}$ (день), где $z_1 = R_1 - R_0$, R_0 — радиус Земли, и $\epsilon_1 = 0,92$, $z_1 = 100 \text{ км}$ (ночь). Выбранные параметры удовлетворительно описывают в данной модели распространение радиоволн в плоскости большого круга.

Неоднородную часть волновода зададим в виде осесимметричного возмущения диэлектрической проницаемости: $\epsilon_n = 1 - \Delta\epsilon(x, z)$. Декартова система координат x, z (см. рис. 1) введена так, что ось симметрии неоднородности совпадает с осью z . Рассмотрим возбуждение ионосферного волновода за счет рассеяния падающей электромагнитной волны с амплитудой электрического поля $E_{\text{пад}}^*$ на неоднородности $\Delta\epsilon(x, z)$. При $\Delta\epsilon \ll 1$ плотность тока, возбуждаемого падающей волной, может быть записана в виде**

$$j(x, z) = i\omega\Delta\epsilon(x, z)E_{\text{пад}}. \quad (1)$$

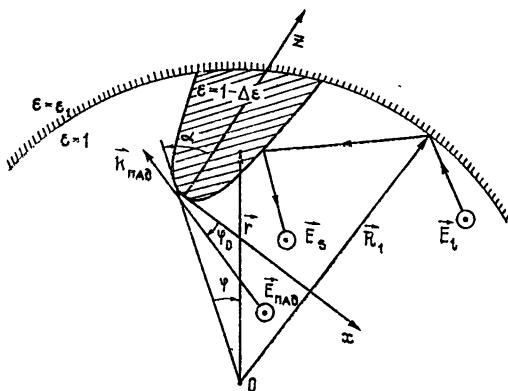


Рис. 1.

Рассеянное поле представим в виде суперпозиции собственных мод волновода

$$E_p = \sum_l (D_l E_l + D_{-l} E_{-l}), \quad (2)$$

где $E_{\pm l}$ — набор функций, представляющих собой собственные моды ионосферного волновода. В рассматриваемом случае цилиндрической полости для горизонтальной поляризации волны (когда вектор $E_{\text{пад}}$ параллелен оси цилиндра) выражения для $E_{\pm l}$ хорошо известны [5]:

$$E_{\pm l} = y_0 \exp(\mp i\nu_l \varphi) \begin{cases} H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 \sqrt{\epsilon_1} r) & (r > R_1) \\ J_{\nu_l}(k_0 r) & (r \leq R_1) \end{cases}. \quad (3)$$

Здесь y_0 — единичный вектор, параллельный оси цилиндра, r, φ — полярные координаты в плоскости большого круга, $J_{\nu_l}(\tau)$, $H_{\nu_l}^{(2)}(\tau)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода, $k_0 = \omega/c$, $\nu_l \approx k_0 R_1 - M t_l$, $M = (k_0 R_1/2)^{1/3}$, где t_l — l -й корень функции Эйри $v(-t_l)$, т. е. $v(-t_l) = 0$.

Коэффициент возбуждения D_l моды номера l связан с током, возбуждающим дифракционные моды, соотношением [5]

* Всюду далее рассматриваются монохроматические процессы с зависимостью от времени $e^{i\omega t}$.

** Метод возмущений, в рамках которого получено выражение (1), предполагает ограничение на поперечный размер неоднородностей L_x : $k_0 L_x \cos \alpha_0 \Delta\epsilon \ll 1$. Фактически неоднородности, для которых $k_0 L_x \cos \alpha_0 \gg 1$, вносят малый вклад в рассеяние, приводящее к запирке волновода или выводу из ИВК волноводных мод. Поэтому при условии $\Delta\epsilon \ll 1$ вышеуказанное ограничение на размер неоднородностей можно считать выполненным.

$$D_{\pm l} = \frac{1}{N_l} \iint_{\Delta} E_{\mp l} j(x, z) dx dz, \quad (4)$$

где

$$N_l = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{R_1}{V \varepsilon_1} [H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 V \varepsilon_1 R_1)]^2, \quad (5)$$

интегрирование проводится по объему, занятому неоднородностью. Выражения (2), (3) и (5) позволяют рассчитать коэффициенты возбуждения $D_{\pm l}$ волноводных мод при рассеянии на неоднородности, находящейся в волноводном канале.

2. Рассмотрим случай, когда падающая волна является одной из собственных мод ионосферного волновода, т. е. $E_{\text{пад}} = E_s$.

Пользуясь равномерной асимптотикой Лангера — Фока [7] для $J_{\nu_l}(\tau)$ при $\tau \gg 1$, $\tau \sim \tau$, из (1), (3), (5) при условии $L_x \sin \alpha_0 \ll (1/3)(k_0^{-2} R_0)^{1/3}$ получим (L_x — характерный масштаб неоднородности поперек геомагнитного поля, α_0 — угол наклонения геомагнитного поля*)

$$D_{\pm l} = Q I, \\ Q = \frac{i \omega \varepsilon_0}{\pi N_l M^2} \frac{H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 V \varepsilon_1 R_1) H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 V \varepsilon_1 R_1)}{J_{\nu_l}(k_0 R_1) J_{\nu_s}(k_0 R_1)}, \quad (6)$$

$$I = \int_0^{L_z} \widetilde{\Delta \varepsilon}(x, z) \exp \left[i (\pm \nu_e - \nu_s) \frac{z \sin \alpha_0}{R_1} \right] v(\xi_l) v(\xi_s) dz.$$

Здесь

$$\xi_{l,s} = [\nu_{l,s} - k_0(R_1 - L_z \cos \alpha_0 + z \cos \alpha_0)] \frac{1}{M},$$

$$\widetilde{\Delta \varepsilon}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varepsilon(x, z) e^{izx} dx, \quad x = \frac{\cos \alpha_0}{R_1} (\pm \nu_l - \nu_s),$$

знак плюс отвечает рассеянию вперед, знак минус — обратному рассеянию, L_z — размер неоднородности по оси z .

В случае рассеяния вперед интеграл I , стоящий в правой части (6), при $L_z \gtrless L_{E_\perp} / \cos \alpha_0$ равен

$$I \approx \widetilde{\Delta \varepsilon}(x) \int_0^{L_z} v(\xi_l) v(\xi_s) dz. \quad (7)$$

Область, существенная для интегрирования в (7), определяется объемом волноводного канала для моды с наименьшим индексом. Как видно из (7), наибольшая величина коэффициента возбуждения для рассеяния вперед достигается при $l \sim s$. В этом случае

$$D_{+l,s} \sim Q \widetilde{\Delta \varepsilon}(x) \frac{M}{k_0 \cos \alpha_0}. \quad (8)$$

* Величина $(1/3)(k_0^{-2} R_0)^{1/3} = L_{E_\perp}$ является характерным масштабом поперечной структуры поля рассматриваемого волновода

Для обратного рассеяния ситуация несколько сложнее, так как необходимо учитывать фазовый множитель $\exp(i\nu_l\varphi)$. Например, при $s \sim 1$, $L_z \geq (L_{E_\perp}, t_l/\cos \alpha_0) = L_{E_l}$ коэффициент возбуждения равен

$$D_{-l,1} \approx Q \int_0^{L_z} \tilde{\Delta\epsilon}(x, z) v(\xi_1) v(\xi_l) \exp(2ik_0 z \sin \alpha_0) dz. \quad (9)$$

Интеграл, стоящий в правой части (9), может быть вычислен методом стационарной фазы:

$$D_{-l,1} \approx \tilde{\Delta\epsilon}(x, z_{ct}) Q \frac{M}{\sqrt{\pi} t_l^{1/4} k_0 \cos \alpha_0} v(\xi_l(z_{ct})), \quad (10)$$

где стационарная точка z_{ct} определяется выражением

$$t_l - \frac{k_0}{M} \cos \alpha_0 (L_z - z_{ct}) = M^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0. \quad (11)$$

Таким образом, вклад в обратное рассеяние дают моды, для которых стационарная точка попадает в интервал интегрирования $(0, L_z)$. Рассеяние происходит в модах, сильно отличающиеся от падающей $l \gg s$, и условие (11) является аналогом «ракурсного» условия при рассеянии плоской волны в вакууме на вытянутых неоднородностях [8].

Оценим долю рассеиваемой энергии для случая падения на неоднородность «скользящей» волны* ($s \sim 1$). Пусть Δn — характерное число рассеиваемых мод, l — номер моды с наибольшим коэффициентом возбуждения. Общее выражение для доли рассеиваемой энергии имеет вид

$$W_p^{-l,s} \sim \Delta n |D_{l,s}|^2 \frac{L_{E_l}}{L_{F_s}} \left| \frac{H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 \sqrt{\epsilon_1} R_1) J_{\nu_s}(k_0 R_1)}{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 \sqrt{\epsilon_1} R_1) J_{\nu_l}(k_0 R_1)} \right|^2. \quad (12)$$

Наибольший интерес, по-видимому, представляет оценка доли энергии, выводимой из волноводного канала и попадающей на поверхность Земли. Для мод, у которых нижняя каустика касается поверхности Земли, $l \sim 3 \cdot 10^2$, $\Delta n \sim 3$. Для количественной оценки выражения, стоящего в правой части (12), используем выражение (5) для N_l , а также асимптотику $J_{\nu_l}(k_0 R_1)**$:

$$W_{-l,s} \approx \frac{3}{\pi} \frac{\Delta\epsilon_{\max}^2}{\cos^4 \alpha_0} t_{300}^{-1/2} = \left(\frac{\Delta\epsilon_{\max}}{2 \cos^2 \alpha_0} \right)^2 \frac{12}{\pi t_{300}^{1/2}}. \quad (13)$$

Величина, стоящая в скобках в (13), представляет собой френелевский коэффициент отражения от плоскопараллельной пластинки толщиной $\lambda_0/2 \cos \alpha_0$ с диэлектрической проницаемостью $1 - \Delta\epsilon_{\max}$. Таким образом, доля энергии, рассеиваемой неоднородностью в надземном канале для случая углов падения волны, отвечающих условиям попадания рассеянного сигнала на Землю, полученная с помощью волнового подхода, отличается от результатов аналогичной задачи, решенной методом геометрической оптики, множителем $12/\pi t_{300}^{1/2} \sim 1/3$. Уменьшение доли

* Как показано в работе [4], волны такого типа являются наименее затухающими в надземном волновом канале.

** Для асимптотики $J_{\nu_l}(k_0 R_1)$ мы здесь используем более точное решение дисперсионного уравнения $\nu_l \approx k_0 R_1 + \left(\frac{k_0 R_1}{2}\right)^{1/3} \left(t_l + \frac{1}{M}\right)$.

рассеиваемой энергии по сравнению с долей, рассчитанной в приближении геометрической оптики, может быть объяснено качественным отличием структуры поля волноводных мод от структуры поля плоских волн. При падении волноводной моды на неоднородность необходим учет структуры поля вблизи каустики, что может быть сделано в рамках использованного волнового подхода.

Основные результаты данного раздела можно сформулировать следующим образом.

1) При прямом рассеянии на вытянутой вдоль магнитного поля неоднородности волноводная мода трансформируется в моды, близкие к падающей.

2) При обратном рассеянии наиболее эффективно возбуждаются моды, удовлетворяющие соотношению (11), являющемуся волновым аналогом условий геометрического ракурса [8].

3) Условия рассеяния моды с $l \sim 1$ в моды с $l \gg 1$, нижняя каустика которых касается поверхности Земли, зависят от поперечного размера канала и угла наклона α_0 неоднородности к вертикали. Для канала с наименьшими поперечными размерами подобное рассеяние наиболее эффективно при $\alpha_0 \sim \arctg [t_{30}^{1/2} / (k_0 R_1)^{1/3}] \sim 15^\circ$. При этом доля рассеянной из канала энергии составляет 0,01% энергии, заключенной в падающей на неоднородность моде.

3. Рассмотрим теперь возбуждение ИВК радиосигналом, излучаемым с поверхности Земли. Пусть волновой вектор падающей на неоднородность радиоволны, излучаемой передатчиком, составляет угол φ_0 с осью x (см. рис. 1):

$$E_{\text{пад}} = y_0 E_0 \exp(-i k_0 z \sin \varphi_0 + i k_0 x \cos \varphi_0). \quad (14)$$

Подставляя выражение для $E_{\text{пад}}$ в соотношения (3) — (5), определяющие коэффициент $D_{\pm l}$ возбуждения волноводных мод, получим

$$D_{\pm l} = \frac{i \omega \varepsilon_0 E_0 H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 \sqrt{\varepsilon_1} R_1)}{\sqrt{\pi} N_l M J_{\nu_l}(k_0 R_1)} \int_0^{L_z} \widetilde{\Delta \varepsilon}(x, z) v(\xi_l) \exp(i \gamma z) dz, \quad (15)$$

где

$$\widetilde{\Delta \varepsilon}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varepsilon(x, z) e^{ixz} dx,$$

$$x = k_0 \left(\cos \varphi_0 \mp \frac{\nu_l}{k_0 R_1} \cos \alpha_0 \right),$$

$$\gamma = -k_0 \left(\sin \varphi_0 \pm \frac{\nu_l}{k_0 R_1} \sin \alpha_0 \right),$$

$$\xi_l = (\nu_l - k_0 [R_1 + (z - L_z) \cos \alpha_0]) \frac{1}{M},$$

$$M = \left(\frac{k_0 R_1}{2} \right)^{1/3}.$$

В случае прямого рассеяния область, существенная для интегрирования в (15), определяется членом $e^{i \gamma z}$:

$$|D_{+l}| \approx \widetilde{Q} \widetilde{\Delta \varepsilon}(x, 0) \frac{v(\xi_l(0))}{\gamma}. \quad (16)$$

Здесь

$$\widetilde{Q} = \frac{\omega \epsilon_0 H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 \sqrt{\epsilon_1} R_1)}{\sqrt{\pi} N_l M J_{\nu_l}(k_0 R_1)}.$$

Выражение (16) показывает, что возбуждение волноводных мод при прямом рассеянии ничтожно мало ввиду малости члена $\Delta\epsilon(x, 0)$. Действительно, в этом случае диаграмма рассеяния сильно вытянута в направлении, составляющем с границей раздела угол, превышающий угол полного внутреннего отражения, и лишь малая доля энергии, рассеянной в направлении, близком к направлению вектора k_0 , «захватывается» в канал.

При обратном рассеянии множитель $e^{i\gamma z}$, стоящий под знаком интеграла в (15), может быть достаточно медленным, поэтому необходимо учитывать изменение функции $v(\xi_l(z))$, описывающей поперечную структуру волноводной моды. Для мод, волноводный канал которых имеет наименьшие поперечные размеры $l \sim 1$, при углах падения φ_0 , удовлетворяющих условию

$$\frac{2\pi}{k_0 \left(\sin \varphi_0 - \frac{\nu_l}{k_0 R_1} \sin \alpha_0 \right)} \gg \frac{L_{E_\perp}}{\cos \alpha_0}, \quad (17)$$

изменение множителя $e^{i\gamma z}$ под интегралом в (15) можно не учитывать. В этом случае при $L_z \gg M/k_0 \cos \alpha_0$, $L_x \sim \lambda_0/2 \cos \alpha_0$ коэффициент возбуждения равен

$$|D_{-l}| \approx \widetilde{Q} \Delta \epsilon_{\max} \frac{M}{2k_0^2 \cos^2 \alpha_0}, \quad (18)$$

где $\Delta \epsilon_{\max}$ — максимальное отклонение диэлектрической проницаемости от $\epsilon = 1$ в неоднородности.

Для углов φ_0 , сильно отличающихся от α_0 ,

$$\frac{2\pi}{k_0 \left| \sin \varphi_0 - \frac{\nu_l}{k_0 R_1} \sin \alpha_0 \right|} \ll \frac{L_{E_\perp}}{\cos \alpha_0}, \quad (19)$$

выражение для D_{-l} может быть получено так же, как и в случае прямого рассеяния, а именно:

$$|D_{-l}| = \frac{\widetilde{Q} \Delta \epsilon(x, 0) v(\xi_l(0))}{\gamma}. \quad (20)$$

В этом случае (условие (19)) возбуждение волноводных мод, как и для прямого рассеяния, пренебрежимо мало. Сравнивая результаты (18) и (20), можно сделать вывод, что возбуждение волноводных мод с $l \sim 1$ существенно при углах падения φ_0 , лежащих в интервале

$$|\varphi_0 - \alpha_0| \leq \frac{1}{M}. \quad (21)$$

При углах наклона магнитного поля, отвечающих средним широтам ($\alpha_0 \sim 20^\circ$), условие (21) дает $19^\circ 5 \leq \varphi_0 \leq 20^\circ 5$. Доля захватываемой в волноводный канал энергии при этом определяется приближенно характерным числом Δn мод, для которых коэффициент возбуждения при

заданных φ_0 и α_0 совпадает по порядку величины с $D_{l\max}$. Как будет показано ниже, приведенные выше рассуждения справедливы для волноводных мод с $l \leq 3$. Определяя аналогично тому, как это было сделано выше, долю захватываемой энергии \tilde{W}_p , получим, что для углов φ_0 и α_0 , удовлетворяющих соотношению (21),

$$\tilde{W}_p \approx 3(\Delta \epsilon_{\max})^2. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь условия возбуждения волноводных мод с $l \gg 1$. Используя для вычисления интеграла в правой части (15) асимптотику функции Эйри [7]:

$$v(\xi) = \xi^{-1/4} \sin \left[\frac{2}{3} \xi^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right], \quad (23)$$

и вычисляя данный интеграл методом стационарной фазы, получим

$$|D_{-l}| \approx \frac{\tilde{Q} M \tilde{\Delta \epsilon}(x, z)}{k_0 \cos \alpha_0}. \quad (24)$$

Стационарная точка z_1 в выражении (24) удовлетворяет соотношению

$$\xi_l(z_1) = \left(\frac{\gamma M}{k_0 \cos \alpha_0} \right)^2. \quad (25)$$

Выражение (24) справедливо при углах падения φ_0 , удовлетворяющих условию*

$$\frac{M t_{l1}}{k_0 R_1} \leq |\varphi_0 - \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{t_l}}{M}. \quad (26)$$

На рис. 2 изображены качественно кривые зависимости коэффициента возбуждения $|D_{-l}|$ от угла падения φ_0 при заданном α_0 . При отыскании зависимости $|D_{-l}|$ от φ_0 использовалось полученное из (25) соотношение $\tilde{\Delta \epsilon}(x, z) \approx \Delta \epsilon_{\max} \pi / x$. На основании (18), (24) и условий (19) и (26) построены указанные выше кривые при $l \sim 1$ (кривая 1), $l \sim 10$ (кривая 2) и $l \sim 10^2$ (кривая 3). Из анализа кривых D_{-l} , изображенных на рис. 2, можно сделать следующие выводы.

1) В интервале углов падения, удовлетворяющих соотношению (21), наиболее эффективно возбуждаются моды с наименьшим поперечным размером $L_{E_\perp} \sim M/k_0$.

2) В интервале углов падения

$$\frac{1}{M} \leq |\varphi_0 - \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{t_{10}}}{M} \quad (27)$$

возбуждается максимальное число мод $\Delta n_{\max} \sim 10^2$, т. е. весь спектр волноводных мод.

3) Моды с наибольшим поперечным размером $L_{E_{\max}} \approx M t_{100}/k_0$ возбуждаются в интервале углов падения

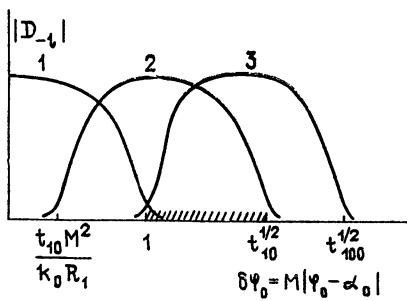


Рис. 2.

* Условие (26) отвечает попаданию стационарной точки в область интегрирования.

$$\frac{1}{M} \leq |\varphi_0 - \alpha_0| \leq \frac{\sqrt{t_{100}}}{M}. \quad (28)$$

Отсюда следует, что максимальная доля захватываемой энергии

$$\tilde{W}_{p_{\max}} \approx 10^2 (\Delta \epsilon_{\max})^2 \quad (29)$$

будет возбуждена в надземном волноводе при углах падения на неоднородность, удовлетворяющих условию (27). При $\alpha_0 \sim 20^\circ$, $\Delta \epsilon \sim 10^{-2}$ захватываемая энергия составляет 1% падающей на неоднородность энергии при углах падения φ_0 , отклоненных от углов, отвечающих условию геометрического ракурса не более чем $1^\circ,6$ и не менее чем $0^\circ,56$.

Мы предполагали, что неоднородность перекрывает весь объем волноводного канала. При уменьшении размеров неоднородности до величины $L_{E_\perp}/\cos \alpha_0$ выводы, сделанные в данном разделе относительно возбуждения моды с $l \sim 1$, остаются в силе.

Максимальная доля захватываемой энергии уменьшается при этом примерно в 10 раз, так как в такое же число раз уменьшается максимально возможное число возбуждаемых мод. Наиболее энергетически выгодное для возбуждения надземного волновода расположение неоднородности будет достигаться у нижней границы канала, отвечающего $l \sim 10$, т. е. на расстоянии $M t_{10}/k_0$ от верхней границы надземного волновода*. Область углов падения для данного расположения неоднородности, как и в случае $L_z \cos \alpha_0 > L_{F_{100}}$, определяется условием (27).

Сравним величину доли энергии \tilde{W}_p , захватываемой в волноводный канал (коэффициент захвата), определяемую соотношением (29), с величиной коэффициента захвата G_0 , полученной в приближении геометрической оптики ([¹⁰], стр. 39). Применимально к рассмотренному выше двумерному случаю для неоднородностей с размерами $L_x \ll k_0^{-1}$

отношение этих коэффициентов захвата составляет $\tilde{W}_p/G_0 \sim 10^2$. Превышение \tilde{W}_p над G_0 связано с тем, что возбуждение Δn мод на языке геометрической оптики эквивалентно рассеянию на Δn неоднородностях. Если неоднородность с размерами $L_z \sim L_{E_\perp}$ расположена вблизи верхней границы канала, то $\Delta n \sim 1$ и $\tilde{W}_p \sim G_0$.

4. Рассеяние волн типа шепчущей галереи на вытянутых неоднородностях ионосферной плазмы позволяет (в силу ракурсной чувствительности такого рассеяния) производить анализ степени возбуждения ИВК в зависимости от номера моды. Будем интересоваться зависимостью коэффициента возбуждения от угла падения плоской волны на неоднородность при неполном перекрытии неоднородностью объема волнового канала. Пусть r_1 — расстояние от верхнего края неоднородности до верхней границы канала, L_z — продольный размер неоднородности. Коэффициент возбуждения отличен от нуля в области углов падения (φ_1, φ_2), при которых стационарные точки, определяемые уравнением (25) (при падении на неоднородность волны, излучаемой наземным передатчиком), попадают в область, занятую неоднородностью. Углы φ_1 и φ_2 находятся из уравнения (25), которое при $|\varphi_0 - \alpha_0| \ll \pi$ имеет вид

$$\xi(r_{ct}) \approx M^2 (\alpha_0 - \varphi_0)^2, \quad (30)$$

где r_{ct} — расстояние от точки z_{ct} до центра Земли. Подставляя в (30)

* При таком расположении область, существенная для интегрирования, не превышает размеров неоднородности.

$r_{ct_1} = R_1 - r_1$ и $r_{ct_2} = R_1 - r_1 - L_z \cos \alpha_0$, получим

$$M |\alpha_0 - \varphi_{1,2}| = \left[t_l + \frac{k_0}{M} (r_{ct_{1,2}} - R_1) \right]^{1/2} = \xi_{1,2}^{1/2}. \quad (31)$$

Таким образом, для возбуждения отдельных типов волноводных мод (наличия разрешения по модам) необходимо, чтобы области углов (φ_1 , φ_2), отвечающие разным номерам l волноводных мод, не перекрывались. На графике зависимости $\xi_{1,2}(t_l)$ (рис. 3), построенном на основании (31), разрешению по модам соответствует отсутствие перекрытия областей I и II, отвечающих соседним точкам t_l и t_{l+1} . При увеличении l интервал $\Delta t = t_{l+1} - t_l$ уменьшается, т. е. существует предельный номер, далее которого разрешение по модам пропадает. Число разрешаемых мод, как видно из графика, тем больше, чем меньше L_z и r_1 . Однако продольный размер неоднородности L_z ограничен областью, существенной для интегрирования*, и дальнейшее уменьшение L_z отвечает пропаданию ракурсной чувствительности.

При $L_z = L_{z_{\min}} = M t_l^{1/4} / k_0$ (неоднородность расположена вблизи верхней границы канала) имеем уравнение, определяющее число разрешенных мод:

$$t_{l^*+1} - t_{l^*} \approx t_{l^*}^{1/4}. \quad (32)$$

Приближенная оценка решения уравнения (32) (с использованием асимптотики $v(\xi_l)$) дает значение $l^* \sim 5$. Таким образом, наилучшему разрешению отвечает расположение неоднородности с продольным размером $L_z \sim M t_5^{1/4} / k_0 \sim 0,5$ км вблизи верхней границы канала. При этом хорошо разрешаются первые 5 мод с углом разрешения $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, определяемым из (32):

$$\Delta\varphi \sim \frac{1}{M} \sim 0^\circ,5.$$

В заключение отметим, что полученные выше результаты в качественном отношении остаются в силе и для более реального профиля $\epsilon(r)$ электронной концентрации ионосферной плазмы при рассмотрении распространения волн типа шепчущей галереи в плоскости большого круга.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия, 11, 961 (1971).
2. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 13, 233 (1973).
3. Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1275 (1976).
4. Л. М. Ерухимов, С. Н. Матюгин, В. П. Урядов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1297 (1975).

* В этой области фазовый множитель γz , стоящий под интегралом в (15), меняется на величину порядка π .

5. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
6. D. Ludwig, J. Math. Phys., 11 (1970)
7. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1977.
8. Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 12, 1909 (1976).
9. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1895 (1977).
10. А. В. Гуревич, В. Ю. Ким, Е. Е. Цедилина, сб. Сверхдальнее распространение радиоволны и модели ионосферы, ИЗМИРАН, М., 1977.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 октября 1978 года

SCATTERING OF MODES OF WHISPERING GALLERY TYPE BY IONOSPHERIC INHOMOGENEITIES STRETCHED ALONG A GEOMAGNETIC FIELD

A. F. Belenov, Yu. V. Chugunov

Scattering of modes of whispering gallery type by inhomogeneities stretched along a geomagnetic field is considered. Coefficients of mode excitation are calculated when one mode is scattered into another and when a plane wave is scattered by a stretched inhomogeneity (the analog of «angular» scattering in the approximation of the geometrical optics). Problems of mode selection are discussed in such scattering.

УДК 538.574.6

РАСЧЕТ МНОЖИТЕЛЯ ОСЛАБЛЕНИЯ НА ПРОТЯЖЕННОЙ ТРАССЕ С ОДИНОЧНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

B. B. Бодров, Д. И. Заичкин

С помощью параболического уравнения в лучевых координатах решается задача о дифракции сферической волны на одиночном протяженном гладком препятствии с плавно меняющимся и малым по сравнению с длиной трассы радиусом кривизны с учетом отражений от ровных участков трассы. Для малых дифракционных углов получено выражение для множителя ослабления за препятствием. Численно показано, что множитель ослабления определяется, в основном, затеняющим действием препятствия.

В практике расчета УКВ линий связи встречаются случаи, когда на протяженной и ровной трассе выделяются одно или несколько одиночных выпуклых гладких препятствий (холмов) с плавно меняющимися и малым по сравнению с длиной трассы радиусом кривизны. В этих случаях при расчете дифракционного ослабления необходимо учитывать отражение радиоволн от поверхности равных участков трассы (рис. 1), в связи с чем приходится рассчитывать дифракцию на вершине препятствия сразу нескольких лучей, приходящих под разными углами. Напряженность поля в точке наблюдения находится как суперпозиция напряженностей полей всех лучей, приходящих в эту точку. При большом расстоянии до источника и точки наблюдения и протяженном препятствии для расчета дифракции одного луча можно воспользоваться результатами решения задачи дифракции на параболическом цилиндре [1, 7]. С целью сокращения машинного времени, необходимого для

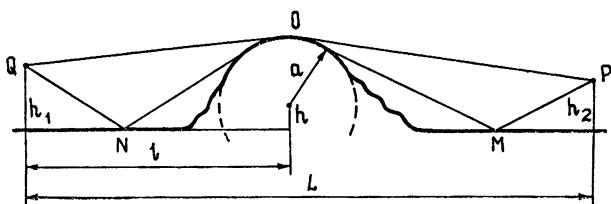


Рис. 1.

проведения численных расчетов, целесообразно использовать более эффективный метод параболического уравнения в лучевых координатах [2, 3]. Целесообразность использования последнего оправдывается еще и тем, что решение параболического уравнения записывается с помощью известных и хорошо исследованных академиком Фоком функций. В предлагаемой работе для горизонтального электрического и магнитного диполей рассчитывается множитель ослабления за одиночным протяженным гладким препятствием с малым по сравнению с длиной трассы, большим по сравнению с длиной волны и плавно меняющимся радиусом кривизны. Расстояние от препятствия до источника l и точки

наблюдения $L - l$ значительно больше высот препятствия $h + a$, источника h_1 и точки наблюдения h_2 . Все формулы получены в системе СИ для временной зависимости $e^{i\omega t}$.

1. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА АЛГОРИТМА

В случае одиночной неоднородности земной поверхности (рис. 1) в точку наблюдения может приходить до четырех лучей [1]: QOP , $QNOP$, $QOMP$, $QNOMP$. Последние три луча учитывают влияние подстилающей поверхности. Будем считать подстилающую поверхность плоской, а ее параметры равными $\epsilon'_2 = \epsilon_2 - i60\gamma\lambda$, $\mu'_2 = 1$. Для плоской земли отражение лучей в точках N и M можно учесть с помощью коэффициентов отражения Френеля Φ_b и Φ_r :

$$\Phi_b = \frac{\epsilon'_2 \sin \Phi - \sqrt{\epsilon'_2 - \cos^2 \Phi}}{\epsilon'_2 \sin \Phi + \sqrt{\epsilon'_2 - \cos^2 \Phi}}, \quad (1)$$

$$\Phi_r = \frac{\sin \Phi - \sqrt{\epsilon'_2 - \cos^2 \Phi}}{\sin \Phi + \sqrt{\epsilon'_2 - \cos^2 \Phi}},$$

где Φ — угол скольжения.

Для расчета напряженности поля, создаваемой в точке P отдельным лучом, аппроксимируем препятствие круглым импедансным цилиндром с радиусом a , равным радиусу кривизны препятствия в области огибания луча, и воспользуемся методом параболического уравнения [2, 3], сведя предварительно трехмерную задачу к двумерной. Трехмерная задача о дифракции сферической волны на круговом цилиндре сводится к нахождению функции Грина G , удовлетворяющей волновому уравнению (2),

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + k^2 G = 0, \quad (2)$$

всюду, кроме точки источника $Q(r', \varphi', z')$, условию излучения при $r \rightarrow \infty$ и импедансному граничному условию на поверхности цилиндра. Представим G в виде разложения в интеграл Фурье по оси z :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixz} dx. \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получим уравнение для $g(x)$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + k'^2 g = 0, \quad (4)$$

где

$$k'^2 = k^2 - x^2.$$

Импедансные граничные условия для $g(x)$ на поверхности цилиндра имеют вид

$$\frac{\partial g}{\partial r} - ikpg = 0, \quad (5)$$

где

$$p = \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \frac{1}{Z} \text{ — для электрического диполя},$$

$$p = \left(\frac{k'}{k} \right)^2 Z \text{ — для магнитного диполя.}$$

Поверхностный импеданс для относительно плотной среды определяется по формуле

$$Z = \sqrt{\frac{\mu'_2}{\epsilon'_2}}. \quad (6)$$

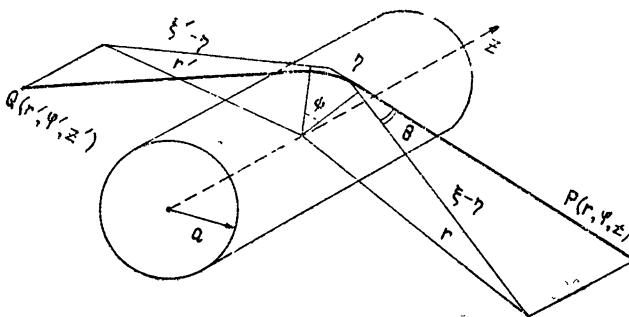


Рис. 2.

Для решения граничной задачи (4), (5) перейдем в лучевую систему координат ξ , η , z (рис. 2) и воспользуемся результатами, изложенными в [2], § 5, и [4], § 3. Для случая, когда источник и точка наблюдения находятся на большом расстоянии от цилиндра, для функций Грина на многолистной поверхности Γ можно записать:

$$\Gamma = \frac{e^{izx'}}{\sqrt{2\pi}} \frac{M \exp \left[-i \left(k'\sigma + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{4\pi k'^2 (\xi' - \eta)(\xi - \eta)}} V_{11}(\zeta, \mu, q) \quad \text{при } \zeta > 0; \quad (7a)$$

$$\Gamma = \frac{e^{izx'}}{4\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi k' \sigma}} \exp \left[-i \left(k'\sigma + \frac{\pi}{4} + \omega_0 \right) \right] + \quad (7b)$$

$$+ \frac{e^{izx'}}{\sqrt{2\pi}} \frac{M \exp \left[-i \left(k'\sigma + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{4\pi k'^2 (\xi' - \eta)(\xi - \eta)}} V_{11}(\zeta, \mu, q) \quad \text{при } \zeta < 0,$$

где

$$V_{11}(\zeta, \mu, q) = V^{(0)}(\zeta, \mu) + V^{(1)}(\zeta, q) + V^{(2)}(\zeta, q), \quad (8)$$

$$M = \left(\frac{k' a}{2} \right)^{1/3}, \quad \sigma = \xi + \xi' - \eta, \quad \mu^2 = \frac{\sqrt{YY'}}{\sqrt{Y} + \sqrt{Y'}}, \quad \zeta = M \frac{\eta}{a}.$$

Выражения для X , Y , Y' и q имеют вид

$$X = M \frac{\sigma}{a}, \quad Y = \left(M \frac{\xi - \eta}{a} \right)^2, \quad Y' = \left(M \frac{\xi' - \eta}{a} \right)^2, \quad (9)$$

$$q = -i \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \frac{M}{Z} \text{ — для электрического диполя,} \quad (10)$$

$$q = -i \left(\frac{k'}{k} \right)^2 MZ \text{ — для магнитного диполя.}$$

Известную формулу для ω_0 можно привести к более удобному для численных расчетов виду:

$$\omega_0 = -\frac{X^3}{12} + \frac{X}{2}(Y + Y') + \frac{(Y - Y')^2}{4X} - \frac{2}{3}Y^{3/2} - \frac{2}{3}Y'^{3/2} = -\mu^2 \zeta^2 \left(1 - \frac{\zeta}{X} \right) - \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^4}{4X}. \quad (11)$$

Функции $V^{(0)}$, $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ определяются так:

$$V^{(0)}(\zeta, \mu) = \mu \frac{\exp \left[i \left(\mu^2 \zeta^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu\zeta}^{\infty} \exp(-is^2) ds \quad \text{при } \zeta > 0, \quad (12)$$

$$V^{(0)}(\zeta, \mu) = -\mu \frac{\exp \left[i \left(\mu^2 \zeta^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\mu\zeta} \exp(-is^2) ds \quad \text{при } \zeta < 0;$$

$$V^{(1)}(\zeta, q) = -\frac{\exp \left(i \frac{\pi}{12} \right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-t \zeta \exp \left(-i \frac{\pi}{6} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{v'(t) + \exp \left(i \frac{\pi}{3} \right) q v(t)}{w'_1(t) + \exp \left(i \frac{\pi}{3} \right) q w_1(t)} dt; \quad (13)$$

$$V^{(2)}(\zeta, q) = -\frac{\exp \left(-i \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-it\zeta) \frac{v'(t) - q v(t)}{w'_2(t) - q w_2(t)} dt. \quad (14)$$

Для цилиндра большого радиуса ($ka \gg 1$) с достаточной точностью можно считать $g(x) = \Gamma(x)$. Воспользуемся преобразованием Фурье (3) и оценим результат методом перевала. При условии малости дифракционного угла $|\psi| \ll 1$ (рис. 2) в подынтегральном выражении (7) можно выделить быстроменяющийся множитель $\exp \{-i[k'x + x(z - z')]\}$. Малость следующего по величине после $k'x + x(z - z')$ слагаемого в показателе экспоненты $\mu^2 \zeta^2$ видна, если его привести к виду

$$\mu^2 \zeta^2 = \frac{k'}{2} \psi^2 \frac{(\xi' - \eta)(\xi - \eta)}{(\xi' - \eta) + (\xi - \eta)}. \quad (15)$$

После применения метода перевала получаем

$$G = \frac{1}{2\pi} \frac{Me^{-ikS}}{\sqrt{2k(\xi' - \eta)(\xi - \eta)S}} V_{11}(\zeta, \mu, q) \quad \text{при } \zeta > 0; \quad (16a)$$

$$G = \frac{\exp [-i(kS + \omega_0)]}{4\pi S} + \frac{1}{2\pi} \frac{Me^{-ikS}}{\sqrt{2k(\xi' - \eta)(\xi - \eta)S}} V_{11}(\zeta, \mu, q) \quad (16b)$$

при $\zeta < 0$,

где

$$S = \frac{\sigma}{\cos \theta}, \quad M = \left(\frac{ka \cos \theta}{2} \right)^{1/3}.$$

Угол θ изображен на рис. 2, S есть расстояние по лучу от Q до P . Пределы изменения θ , в которых можно пользоваться предлагаемым методом, определяются исходя из сохранения большой величины параметра $M = \left(\frac{ka \cos \theta}{2} \right)^{1/3}$.

Согласно [5] функция G вблизи геометрической границы тени имеет характер френелевского интеграла, наложенного на медленно меняющуюся функцию, дифракционный фон, учитывающий кривизну и материал цилиндра. Главный член в G можно записать так:

$$G^{\text{rl}} = \frac{e^{-ikS}}{4\pi S} \sqrt{1 + \frac{a\phi}{(\xi' - \eta) + (\xi - \eta)}} \frac{V^{(0)}(\zeta, \mu)}{\mu} \quad \text{при } \zeta > 0; \quad (17a)$$

$$G^{\text{rl}} = \frac{\exp [-i(kS + \omega_0)]}{4\pi S} + \frac{e^{-ikS}}{4\pi S} \sqrt{1 + \frac{a\phi}{(\xi' - \eta) + (\xi - \eta)}} \times \quad (17b)$$

$$\times \frac{V^{(0)}(\zeta, \mu)}{\mu} \quad \text{при } \zeta < 0.$$

Суммарная напряженность поля в точке P вычисляется как суперпозиция напряженностей, создаваемых каждым из четырех лучей. Выражение для множителя ослабления, определяемого как отношение общей напряженности поля к напряженности первичного поля, имеет вид

$$V = 4\pi R e^{ikR} \sum_{i=1}^4 \Phi_i G_i \cos^2 \theta_i, \quad (18)$$

где Φ_i равен 1 или соответствующему коэффициенту отражения Френеля (1), G_i — функция Грина i -го луча, $\cos^2 \theta_i$ учитывает проекцию напряженности на направление приемного диполя и диаграмму направленности излучающего диполя, $R = \sqrt{r'^2 + r^2 + z^2 + 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}$ — расстояние от Q до P . Заметим, что из-за отражений от ровных участков трассы лучи в точке P складываются попарно почти противофазно. Поэтому может оказаться, что сумма главных членов (17) в (18)

$$V^{\text{rl}} = 4\pi R e^{ikR} \sum_{i=1}^4 \Phi_i G_i^{\text{rl}} \cos^2 \theta_i \quad (19)$$

будет соизмерима с величиной дифракционного фона. Показать аналитически, что при практических расчетах вместо (18) можно пользоваться формулой (19), довольно трудно. Возможность этого будет исследована ниже с помощью численного анализа выражений (18) и (19).

2. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты численных расчетов множителя ослабления в децибелах в зависимости от радиуса полукругового цилиндра ($h = 0$), аппроксимирующего препятствие, представлены на рис. 3—6. Расчеты прово-

дились для вертикальной (рис. 3, 5) и горизонтальной (рис. 4, 6) поляризации для трассы длиной $kL = 10^4$ и двух характерных высот расположения излучателя и точки наблюдения: 1) $kh_1 = kh_2 = 10$; 2) $kh_1 = kh_2 = 125$. В первом случае приземного расположения излучателя и точки наблюдения точка P для любого луча будет находиться в тени холма (рис. 3, 4). Во втором случае прямой и отраженный от ровной части трассы лучи (если последний не затеняется препятствием) складываются в фазе, и напряженность поля в точке P при малой высоте препятствия примерно равна удвоенной напряженности первичного поля (рис. 5, 6). В УКВ диапазоне интересующие нас значения высот h_1 и h_2 обычно находятся между двумя названными случаями.

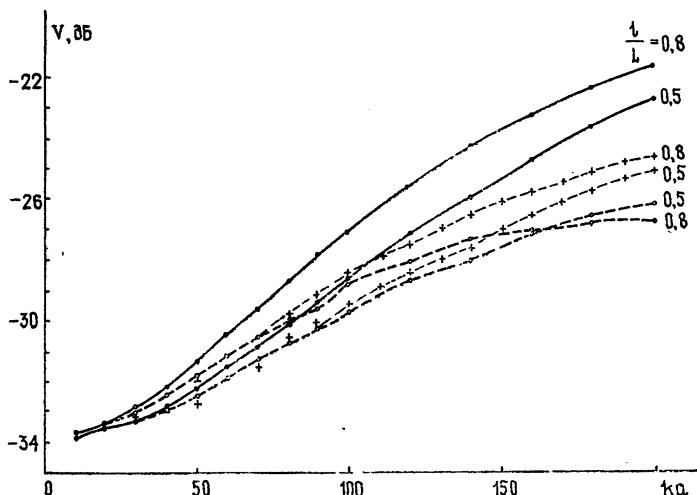


Рис. 3

Множитель ослабления V вычисляется для идеально проводящего цилиндра ($Z = 0$) и цилиндра с поверхностным импедансом, характерным для мокрой земли: $Z = V^{1/(15-i3)}$ (показано соответственно сплошной линией и пунктиром). Для сравнения приведены результаты расчета множителя ослабления по формуле (19) (тонкий пунктир).

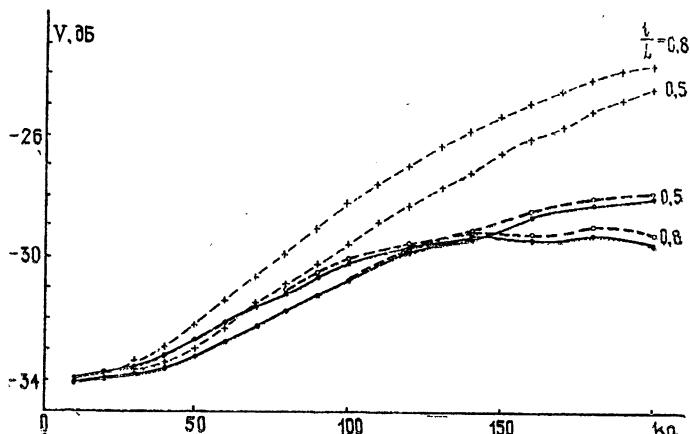


Рис. 4

Из анализа представленных графиков можно сделать следующие выводы. При малых высотах h_1 и h_2 (рис. 3, 4) с увеличением размеров препятствия поле за ним возрастает. При этих высотах действует эффект усиления препятствием. Для больших h_1 и h_2 (рис. 5, 6) увеличение размера препятствия ведет к уменьшению поля, так как с ростом ka увеличивается перекрытие луча, отраженного от подстилающей поверхности и складывающегося в фазе с первичным. Для $l/L = 0,8$ перекрытие отраженного луча при малых ka не происходит, поэтому поле уменьшается, начиная с $ka = 60$. Результаты расчетов для идеально проводящего и импедансного цилиндров практически совпадают при горизонтальной поляризации и отличаются при вертикальной.

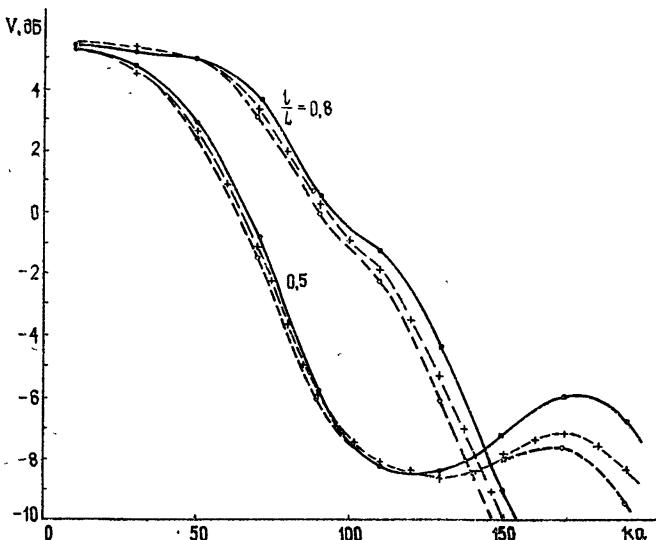


Рис. 5

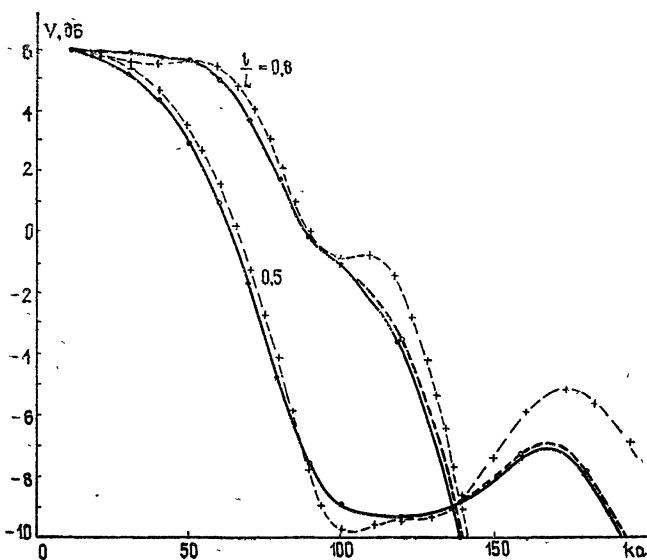


Рис. 6.

Приведенные численные результаты говорят о том, что и при учете отражений радиоволн от ровных участков трассы основную роль в формуле множителя ослабления за препятствием большого электрического размера играют члены, описываемые интегралами Френеля. Для открытых трасс ошибка в величине множителя ослабления из-за отбрасывания дифракционного фона, учитывающего кривизну и материал препятствия, приблизительно одинакова для обеих поляризаций и не превышает 25 %. Для закрытых трасс при приземном расположении излучателя и точки наблюдения ошибка сильно зависит от высоты препятствия и его кривизны и для горизонтальной поляризации примерно в два раза больше, чем для вертикальной.

Основным результатом работы является формула (18), позволяющая эффективно проводить численные расчеты множителя ослабления сферической волны за одиночным протяженным гладким препятствием (холмом) с плавно меняющимся и малым по сравнению с длиной трассы радиусом кривизны, и программа, реализующая разработанный алгоритм. Численный расчет по формуле (18), полученной с учетом отражений радиоволн от ровных участков трассы, говорит о том, что величина множителя ослабления при малых дифракционных углах, в основном, определяется затеняющим действием препятствия, описываемым с помощью интегралов Френеля. Дифракционная поправка, учитывающая кривизну и материал препятствия, сложным образом зависит от высоты препятствия, его материала и кривизны и имеет разную величину для вертикальной и горизонтальной поляризации. Оценки дифракционной поправки, полученные в работе [6] для одного луча, при многолучевом распространении радиоволн, учитывающем отражения от ровных участков трассы, требуют уточнения, особенно для тех геометрических соотношений, которые исследованы в настоящей работе.

В заключение авторы выражают благодарность Г. Т. Маркову за интерес к работе и конструктивные предложения, высказанные в процессе ее обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Н. Троицкий, Распространение ультракоротких волн в горах, изд. Связь, М., 1968.
- 2 Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 6, № 8, 1247 (1961)
- 3 Л. А. Вайнштейн, Г. Д. Малюжинец, Радиотехника и электроника, 6, № 9, 1489 (1961)
- 4 П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1957.
- 5 В. А. Фок, УФН, 43, № 4, 587 (1950).
- 6 Е. М. Хомяк, сб. Распространение ультракоротких радиоволн в условиях гористой местности, Тр. Бурятского института естественных наук, вып. 1, 161 (1968).
- 7 S O Rice, Bell Syst. Techn. J., 33, № 2, 417 (1954).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
2 января 1979 г.

CALCULATION OF THE DAMPING FACTOR AT A STRETCH TRACE WITH A SINGLE OBSTACLE

V. V. Bodrov, D. I. Zaichkin

By a parabolic equation in ray coordinates a problem is solved on a spheric wave diffraction on a single stretch smooth obstacle with smoothly varying curvature radius which is small in comparison with a trace length taking account of reflection from flat sections of the trace. For small diffraction angles an expression have been obtained for the damping factor behind the obstacle. It is shown numerically that the damping factor is defined mainly by the overshade action of the obstacle.

УДК 535.2

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В РАДИОДИАПАЗОНЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ОПТИЧЕСКИМИ ИМПУЛЬСАМИ В УСЛОВИЯХ ЭФФЕКТА ФОТОННОГО ЭХА

C. O. Елютин, C. M. Захаров, Э. A. Маныкин

Рассматривается возникновение радиочастотной когерентности между компонентами сверхтонкой структуры в условиях эффекта фотонного эха. Получены выражения для амплитуд откликов, обсуждаются условия пространственного синхронизма в микроволновом диапазоне.

1. К настоящему времени метод фотонного эха (ФЭ), обнаруженного впервые при возбуждении двухуровневой резонансной среды [1, 2], обобщен на случай многоуровневых квантовых систем как с эквидистантным, так и с неэквидистантным спектром. Импульсы сверхизлучения типа ФЭ формируются в условиях многократного резонанса и отличаются тем, что могут возникать и на частоте возбуждения, и на комбинационных частотах. При этом сигналы эха в некоторых случаях обладают чрезвычайно большой фазовой «памятью» [3, 4]. Важной особенностью эффекта ФЭ на трехуровневых атомах является модуляционная зависимость интенсивности когерентного спонтанного излучения при двойном радиооптическом резонансе [5, 6]. Помимо этого в последних экспериментах в трехуровневых системах типа атомарного газа Na зарегистрирован двухквантовый аналог светового эха [7]. Возможность возникновения радиочастотного отклика в сильном высокочастотном поле была показана в работе [8], однако этот отклик формируется в системах с отличным от нуля дипольным моментом в основном и возбужденном состояниях.

В данной работе рассматривается возникновение сверхизлучения в радиодиапазоне в атомных системах, где диагональные компоненты дипольного момента равны нулю. Предполагается, что возбуждение системы трехуровневых атомов с неэквидистантным спектром (рис. 1) производится последовательностью двух когерентных оптических импульсов. Подчеркнем, что частота внешних импульсов попадает в резонанс с переходом 2—3, в то время как рассматриваемое излучение имеет частоту перехода 1—2. Существование такого эффекта возможно лишь в сильном поле импульсов возбуждения, когда частота

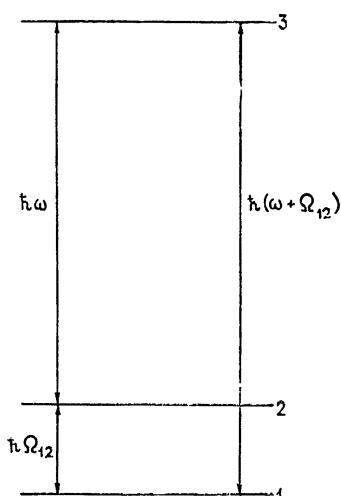


Рис. 1.

$$\frac{d_{23}\mathcal{E}}{\hbar} > \Omega_{12}. \quad (1)$$

Здесь d_{23} — модуль матричного элемента дипольного перехода, Ω_{12} — частота перехода между уровнями 1 и 2, \mathcal{E} — амплитуда внешнего поля.

При выполнении этого неравенства дополнительное уширение спектра внешних импульсов перекрывает частотный интервал Ω_{12} , и тем самым становится возможным формирование когерентной суперпозиции всех трех состояний.

Возникновение отличных от нуля недиагональных элементов матрицы плотности для состояний 1 и 2 приводит к появлению макроскопического мультипольного момента и, следовательно, к излучению на частоте, соответствующей радиочастотному переходу.

2. Поведение трехуровневого атома в поле световых импульсов описывается в нашем случае уравнением Шредингера для трехрядной матрицы плотности с гамильтонианом, учитывающим дипольный характер взаимодействия внешнего поля с атомами. При этом обратной реакцией среды на проходящее излучение пренебрегается, т. е. выполнено приближение заданного поля.

Решение, полученное с помощью метода, развитого авторами в предыдущих работах [6, 9], дает возможность рассчитать недиагональные элементы ρ_{12} матрицы плотности в любые моменты времени и вычислить макроскопический мультипольный момент (например, намагниченность \mathbf{J})

$$\mathbf{J} = N_0 \mu \sum_{b=1}^5 [j_{(b)}(\mathbf{R}, t) \exp(i\tilde{\mathbf{k}}_{(b)} \cdot \mathbf{R} + i\Omega_0 t)], \quad (2)$$

где μ — магнитный дипольный момент, N_0 — концентрация оптически активных частиц,

$$j_{(b)} = g \left(t - \frac{\tilde{\mathbf{k}}_{(b)} \cdot \mathbf{R}}{\Omega_0} - t_{(b)} \right) f_{(b)} \exp \left[-\gamma_\Omega \left(t - \frac{\tilde{\mathbf{k}}_{(b)} \cdot \mathbf{R}}{\Omega_0} - T_{(b)} \right) + i\Phi_{(b)} \right], \quad \tilde{\mathbf{k}} = \frac{\Omega_0}{\omega} \mathbf{k}_{\text{opt}}, \quad (3)$$

Ω_0 — центральная частота неоднородно-уширенной линии, соответствующая резонансному переходу 1—2; $g(t)$ — функция корреляции, связанная с функцией распределения $g(\Omega_{12} - \Omega_0)$ обычным фурье-преобразованием. Время t во всех слагаемых $t > \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R}/\omega + \tau + \delta_1$ кроме $b=1$, для которого $t > \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{R}/\omega$. Здесь \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — волновые векторы оптических импульсов, δ_1 и δ_2 — длительности импульсов, а τ — интервал между ними. Амплитуды откликов $f_{(b)}$ задаются выражениями

$$f_{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\theta_1 \varphi_1 \sin^2 \frac{\lambda_1}{2}}{\lambda_1^4} \left(\lambda_1^2 - \frac{\theta_1^2}{2} \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \right),$$

$$f_{(2)} = \frac{1}{128} \frac{\theta_2 \varphi_2}{\lambda_1^4 \lambda_2^4} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2} (\theta_2^2 \cos \lambda_2 + \varphi_2^2) (\theta_1^2 \cos \lambda_1 + \varphi_1^2)^2,$$

$$f_{(3)} = \frac{1}{8} \frac{\theta_2^2 \varphi_2^2 \theta_1^2 \varphi_1^2}{\lambda_1^4 \lambda_2^4} \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \sin^4 \frac{\lambda_2}{2} \cos \lambda_2, \quad (4)$$

$$f_{(4)} = \frac{1}{8} \frac{\theta_1 \theta_2^3}{\lambda_2 \lambda_1^3} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \exp \left[-\gamma_\omega \left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{\omega} \mathbf{R} + \tau \right) \right],$$

$$f_{(5)} = \frac{1}{16} \frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_1^3 \lambda_2} \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 (\theta_1^2 \cos \lambda_1 + \varphi_1^2) \exp \left[-\gamma_\omega \left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{\omega} \mathbf{R} + \tau \right) \right].$$

Здесь

$$\theta_a = \frac{d_{13}}{\hbar} \int_{t_a}^t \mathcal{E}_a(\mathbf{R}, t) dt, \quad \varphi_a = \frac{d_{23}}{\hbar} \int_{t_a}^t \mathcal{E}_a(\mathbf{R}, t) dt,$$

$$\lambda_a = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_a^2 + \varphi_a^2},$$

$a = 1, 2$ нумерует последовательность импульсов. Константы γ_Ω и γ_ω , входящие в (3) и (4), феноменологически описывают процессы необратимой релаксации квантовой когерентности для микроволновых и оптических переходов.

Значения величин $t_{(b)}$, $\tilde{\mathbf{k}}_{(b)}$, $T_{(b)}$ и $\Phi_{(b)}$ даны в табл. 1.

Таблица 1

b	$t_{(b)}$	$\tilde{\mathbf{k}}_{(b)}$	$T_{(b)}(\mathbf{R})$	$\Phi_{(b)}$
1	δ_1	$\tilde{\mathbf{k}}_1$	0	0
2	τ	$\tilde{\mathbf{k}}_2$	0	0
3	2τ	$2\tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1$	$\frac{2}{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{k}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_2) \mathbf{R}$	0
4	τ	$\tilde{\mathbf{k}}_2 + \frac{\omega}{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1)$	$\frac{\omega}{\Omega_0} \frac{(\tilde{\mathbf{k}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_2)}{\Omega_0} \mathbf{R}$	$\Phi_1 + \Phi_2 - \pi$
5	2τ	$2\tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1 + \frac{\omega}{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{k}}_2 - \tilde{\mathbf{k}}_1)$	$\left(1 + \frac{\omega}{\Omega_0}\right) \frac{(\tilde{\mathbf{k}}_1 - \tilde{\mathbf{k}}_2)}{\Omega_0} \mathbf{R}$	$\Phi_1 + \Phi_2 - \pi$

$t_{(b)}$ — момент возникновения отклика с индексом « b », $\tilde{\mathbf{k}}_{(b)}$ — волновой вектор, $T_{(b)}$ — параметр затухания, $\Phi_{(b)}$ — фазы сигналов.

3. Таким образом, число когерентных радиочастотных откликов среды равно пяти. Слагаемые с индексом $b = 1, 2$ представляют собой сигналы сверхизлучения, наводимые через когерентную связь полем внешних оптических импульсов. Из таблицы видно, что моменты возникновения этих импульсов совпадают с аналогичными величинами для когерентного оптического излучения. Однако несмотря на то, что импульсы с $b = 1, 2$ формально обладают волновыми векторами $\tilde{\mathbf{k}}_{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{k}}_{(2)}$, в реальных случаях соответствующая длина волны гораздо больше размеров образца. Вследствие этого возникающее излучение не является узконаправленным, как это имеет место в эффекте ФЭ, а его угловое распределение и поляризационные свойства определяются свойствами обычного магнитодипольного излучения. Подчеркнем, что эти импульсы могут быть зарегистрированы как отдельные сигналы, в то время

когда излучение ФЭ не может быть зарегистрировано ввиду его слабости. Это обстоятельство делает предлагаемую методику перспективной для изучения когерентных явлений в оптической среде.

как в оптическом диапазоне наблюдение аналогичных откликов затруднено вследствие значительного расхождения в интенсивности внешних импульсов и импульсов сверхизлучения.

В момент времени 2τ в среде возникает импульс на радиочастоте (см. таблицу), который по аналогии с ФЭ может быть назван импульсом радиочастотного эха (РЭ). Отметим, что возникновение РЭ не связано ни с какими внешними полями в данный момент времени, в том числе и с полем импульса ФЭ, так как его интенсивность в нашем случае мала (приближение заданного поля). Формирование РЭ происходит в условиях синхронизма фаз излучателей, как это имеет место в известных эхо-процессах [10, 11], а именно, вследствие дефазировки излучателей после действия первого оптического импульса и явления рефазировки после второго импульса. При этом рефазировка приводит к полной компенсации случайных фаз излучателей и созданию когерентного состояния среды в момент 2τ .

Необходимо заметить, что, в то время как в эффекте ФЭ условие пространственного синхронизма накладывает жесткие ограничения на направление волнового вектора эха ($\hat{k}_e = 2\hat{k}_2 - \hat{k}_1$), в нашем случае при таком же соотношении между волновыми векторами (см. таблицу)

в силу малости \hat{k}_{12} интенсивность излучения слабо зависит от направления возбуждающих импульсов.

Когерентные состояния вещества, описываемые слагаемыми с индексами $b = 4, 5$, возникают в те же моменты времени, что и импульсы с $b = 2$ и 3. Интересно отметить, что волновые векторы этих импульсов имеют более сложную структуру (см. таблицу). В частности, векторы $\tilde{\hat{k}}_{(4)}$ и $\tilde{\hat{k}}_{(5)}$ записываются в виде суммы двух частей. Микроволновая часть указанных векторов точно совпадает с $\tilde{\hat{k}}_{(2)}$ и $\tilde{\hat{k}}_{(1)}$, в то время как вторые слагаемые представляют собой по существу разность волновых векторов возбуждающих оптических импульсов. Такая структура $\tilde{\hat{k}}_{(4)}$ и $\tilde{\hat{k}}_{(5)}$ приводит к сильному (в $(L/\lambda_\omega)^2$ раз) ослаблению интенсивности импульсов с $b = 4$ и 5 даже при небольшом угле между векторами \hat{k}_1 и \hat{k}_2 (L — длина образца).

Как известно [11], такая же ситуация имеет место в эффекте ФЭ. Сильная зависимость интенсивности импульсов с $b = 4, 5$ от угла (\hat{k}_1, \hat{k}_2) , по-видимому, дает возможность обнаружения соответствующих сигналов по суммарной интенсивности микроволнового излучения при $t = \tau$ и 2τ .

Амплитуды радиочастотных импульсов, как это видно из формул (4), довольно сложным образом зависят от углов поворота. Очевидно, что здесь, так же как и в эффектах оптического сверхизлучения, соответствующим выбором θ_a и φ_a можно добиться усиления одних сигналов и ослабления других.

Экспоненциальные множители в выражениях для $f_{(4)}$ и $f_{(5)}$ описывают необратимые процессы релаксации дипольного момента для переходов 1—3 и 2—3. Наличие такого рода сомножителей, как и в случае с волновыми векторами $\tilde{\hat{k}}_{(4)}$ и $\tilde{\hat{k}}_{(5)}$, указывает на сильное влияние оптической когерентности на формирование откликов ($b = 4, 5$) в радиочастотном диапазоне. Отметим также, что «геометрические» поправки $T_{(b)}(\mathbf{R})$ к интервалу между импульсами существенны лишь при значительном расхождении между \hat{k}_1 и \hat{k}_2 , однако, как уже отмечалось, интенсивность откликов с индексами 4 и 5 в этом случае мала.

Рассматриваемый эффект можно наблюдать экспериментально, например, на сверхтонкой структуре в атомарных газах типа Cs, на вда-

щательно-колебательных переходах в молекулярных газах. Кроме этого, возникновение радиочастотных откликов возможно на электрон-донорных спиновых уровнях в полупроводниковых кристаллах *n*-типа CdS [12], а также на системе уровней, возникающих в парамагнитных кристаллах при снятии вырождения внешним магнитным полем. Так, расщепление компонент сверхтонкой структуры во внешнем магнитном поле напряженностью $H \sim 100$ Гц составит по порядку величины $\Omega_{12} \sim \mu H/\hbar \sim 10^9$ Гц, где $\mu \sim \mu_b \sim 10^{-20}$. Тогда, приняв $d_{23} \sim 10^{-20}$ CGSE (ионы Cr³⁺ в кристалле рубина), из неравенства (1) получим оценку для амплитуды поля:

$$\mathcal{E} > \frac{\hbar \Omega_{12}}{d_{23}} \sim 10^2 \text{ CGSE.}$$

При этом плотность потока энергии в импульсе достигнет величины $I \sim 2 \text{ MBt/cm}^2$, что легко достигается в современных экспериментальных установках с источниками когерентного излучения.

Исследованное нами явление может стать еще одним методом спектроскопии сверхвысокого разрешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибиров, ФММ, 15, 313 (1963).
2. N. A. Kurnit, I D'Abella, S R. Hartmann, Phys Rev. Lett., 13, 567 (1964).
3. V. R Nagibarov, N K. Sоловаров, Phys. St. Sol., 37, 889 (1970)
4. А И Алексеев, А. М. Башаров, ЖЭТФ, 74, 1988 (1978)
5. В Р Нагибиров, Н. К. Соловаров. Оптика и спектроскопия, 28, 993 (1970).
6. С. М. Захаров, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ, 60, 1867 (1971).
7. A Flusberg, T. Mossberg, R. Kachgi, S. R. Hartmann, Phys Rev. Lett., 41, 305 (1978)
8. В М. Файн, ЖЭТФ, 33, 416 (1957).
9. С М Захаров, Э А. Маныкин, Э. В. Онищенко, ЖЭТФ, 59, 1370 (1970)
10. E L Hahn, Phys Rev., 80, 580 (1950).
11. I. D. Abella, N A. Kurnit, S R Hartmann, Phys. Rev., 141, 391 (1966)
12. P Hu S Geschwind, T M. Jedju, Phys Rev. Lett., 37, 1357 (1976).

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
10 июля 1978 года

SUPERRADIATION IN THE RADIO RANGE CREATED BY OPTICAL PULSES UNDER THE CONDITION OF PHOTON ECHO EFFECT

S. O. Elyutin, S. M. Zakharov, Eh. A. Manykin

The occurrence of radio frequency coherence is considered between components of superfine structure under the condition of photon echo effect. Expressions have been obtained for the response amplitude. Conditions of space synchronism in the microwave range are discussed.

УДК 538.56 : 519.25

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

B. M. Малкин

Получено достаточное условие установления стационарных решений кинетического уравнения, описывающего эволюцию турбулентного распределения волн при наличии трехволновых распадных процессов и линейного возбуждения (поглощения) колебаний.

В приближении случайных фаз производные интенсивностей волн по времени представимы в виде степенных рядов по самим интенсивностям. Учет первых же нелинейных членов разложений приводит к весьма сложным уравнениям эволюции турбулентного распределения волн. Решить эти уравнения удается крайне редко, поэтому приобретает особое значение качественное исследование поведения их решений. В уравнениях имеется два типа членов, квадратичных по интенсивности волн. Одни из этих членов описывают индуцированное рассеяние волн на частицах, другие — трехволновое распадное взаимодействие. Случай, в котором главным нелинейным процессом является индуцированное рассеяние, рассматривался в работе [1]. Там было показано, что стационарное решение, если такое существует, устанавливается при любых начальных условиях. В настоящей работе мы будем считать основными нелинейными процессами трехволновые распады и, предполагая, что стационарный спектр существует, получим критерий его установления, не зависящий от начальных данных.

1. ВЫВОД КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Трехволновое распадное взаимодействие и линейное возбуждение (поглощение) колебаний со случайными фазами и положительными энергиями описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} = & \gamma_i N_i - \sum_{j, r} V_{i, jr} (N_i N_j + N_i N_r - N_j N_r) + \\ & + \sum_{j, r} (V_{j, ir} + V_{j, ri}) (N_j N_i + N_j N_r - N_i N_r) + \epsilon_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Поясним использованные здесь обозначения: γ_i — инкремент возбуждения i -й волны. Поглощению соответствует отрицательное значение γ_i . $V_{i, jr}$ — вероятность распада i -й волны на волны j и r за единицу времени. Нам удобно считать пару (j, r) упорядоченной каким-либо способом, а при нарушении установленного порядка полагать $V_{i, jr} = 0$. Тогда для каждой заданной тройки волн (i, j, r) может отличаться от нуля только одна из величин $V_{i', j', r'}$, где (i', j', r') — произвольная перестановка индексов (i, j, r) .

Величины ϵ_i прибавлены к правым частям уравнений (1) для учета влияния источника тепловых шумов. Это влияние существенно, если числа волн N_i сравнимы со своими значениями в состоянии термодинамического равновесия. В частности, учет ϵ_i устраниет возможность обращения величин N_i в нуль. Действительно, устремляя N_i к нулю, получим из (1) $\frac{\partial N_i}{\partial t} > 0$. В той области спектра, где волны значительно интенсивнее тепловых шумов, — а ниже мы будем рассматривать лишь те спектры, в которых такая область имеется, — слагаемые ϵ_i можно опустить.

Пусть N_i^0 — стационарное решение уравнений (1). Выразим инкременты через величины N_i^{0*} . Затем умножим (1) на $c_i \left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right)$ и просуммируем по всем i . В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt} K(\{N_i\}) = -U(\{N_i\}), \quad (2)$$

где $K(\{N_i\})$ и $U(\{N_i\})$ — некоторые функционалы от величин N_i .

Числа c_i пока произвольны. Попытаемся подобрать их так, чтобы функционалы K и U были положительно определены и обращались в нуль только на стационарном решении. Условия, при которых искомые c_i существуют, суть достаточные условия устойчивости стационарного спектра относительно произвольных (не обязательно малых) возмущений.

Функционал**

$$K = \sum_i c_i N_i^0 \left(\frac{N_i}{N_i^0} - 1 - \ln \frac{N_i}{N_i^0} \right) \quad (3)$$

удовлетворяет сформулированным требованиям, если все c_i положительны. Для знакопределенности U необходимо, чтобы числа c_i являлись аддитивными интегралами трехволновых распадов:

$$(c_i - c_j - c_r) V_{i,j,r} = 0. \quad (4)$$

При выполнении (4) функционал U заметно упрощается и может быть представлен в следующем виде:

$$U = \sum_{i,j,r} V_{i,j,r} N_i N_j N_r \left\{ \frac{c_j}{N_j^0} \left(\frac{N_j^0}{N_j} - \frac{N_i^0}{N_i} \right)^2 + \right. \\ + \frac{c_r}{N_r^0} \left(\frac{N_r^0}{N_r} - \frac{N_i^0}{N_i} \right)^2 + \left[c_j \left(\frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_j^0} \right) + c_r \left(\frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_r^0} \right) \right] \times (5) \\ \times \left. \left(\frac{N_j^0}{N_i} - \frac{N_i^0}{N_j} \right) \left(\frac{N_r^0}{N_i} - \frac{N_i^0}{N_r} \right) \right\} + \sum_i c_i \epsilon_i \frac{N_i}{N_i^0} \left(1 - \frac{N_i^0}{N_i} \right)^2.$$

Приведем неравенства, обеспечивающие положительную определенность

* Складывая эти выражения, легко получить следующее необходимое условие существования стационарного спектра:

$$\sum_i \gamma_i < 0.$$

** Отметим, что функционалы, подобные K , использовались ранее для исследования устойчивости экологических систем (см. (2)).

ность заключенных в фигурные скобки квадратичных форм, а с ними и U :

$$\left(\frac{N_i^0}{N_j^0} + \frac{N_i^0}{N_r^0} - 1 \right) V_{i, jr} \geq 0; \quad (6)$$

$$\left\{ \left[\frac{\left(\frac{N_i^0}{N_j^0} \frac{N_i^0}{N_r^0} \right)^{1/2} + \left(\frac{N_i^0}{N_j^0} + \frac{N_i^0}{N_r^0} - 1 \right)^{1/2}}{1 - \frac{N_i^0}{N_j^0}} \right]^2 c_r - c_j \right\} (V_{i, jr} + V_{i, ri}) \geq 0. \quad (7)$$

Теперь мы можем сформулировать критерий устойчивости: стационарный спектр устанавливается при любых начальных данных, если для каждой тройки индексов (i, j, r) выполняется условие (6), и существуют положительные числа c_i, c_j, c_r , удовлетворяющие условиям (4), (7).

Заметим, что поток энергии по стационарному спектру направлен при выполнении неравенств (6) от высокочастотных колебаний к низкочастотным. Пользуясь (6), легко вывести еще и такое утверждение, относящееся к волнам, которые могут рождаться только в результате слияния или только в результате распада других волн: первые должны возбуждаться ($\gamma_i > 0$), а последние — поглощаться ($\gamma_i < 0$).

Полученный критерий устойчивости можно упростить ценой некоторого его ослабления. Воспользуемся следующим частным решением функционального уравнения (4), связанным с законами сохранения энергии и импульса волн в трехволновых распадных процессах:

$$c_i = \alpha (\omega_i + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_i). \quad (8)$$

Здесь α и \mathbf{v} — четыре произвольные постоянные. При подстановке (8) в (7) постоянная α выпадает из критерия устойчивости, а вектор \mathbf{v} входит в него линейно. Предположим, что условия (6) выполнены, тогда каждое из неравенств (7) имеет смысл и определяет некоторое полупространство в пространстве \mathbf{v} . Если пересечение всех этих полупространств не пусто, то стационарный спектр устойчив относительно произвольных возмущений.

Подчеркнем, что даже при наличии большого количества взаимодействующих волн, (8), вообще говоря, не является общим решением уравнения (4). В качестве иллюстрации рассмотрим такую систему: имеется три ветви колебаний; каждая волна ветви I может распадаться на пару волн, одна из которых принадлежит ветви II, а другая — ветви III; все остальные распады запрещены. В этом случае (4) имеет решение более общего вида, чем (8):

$$c_{ni} = \alpha (\omega_{ni} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_{ni} + \beta_n).$$

Здесь индекс n нумерует ветви колебаний, индекс i — колебания n -й ветви; β_{II} и β_{III} — произвольные постоянные, $\beta_I = \beta_{II} + \beta_{III}$.

2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Применим упрощенный критерий устойчивости к степенному стационарному спектру

$$N_i^0 = \frac{\text{const}}{\omega_i^f}. \quad (9)$$

Неравенство (6) выполняется, если $f \leq 1$. Согласно условию (7), неравенство

$$\frac{\left(\frac{\omega_j}{\omega_i} - \frac{\omega_r}{\omega_i}\right)^{f/2} + \left[\left(\frac{\omega_j}{\omega_i}\right)^f + \left(\frac{\omega_r}{\omega_i}\right)^f - 1\right]^{1/2}}{1 - \left(\frac{\omega_j}{\omega_i}\right)^f} \geq \left(\frac{c_j}{c_r}\right)^{1/2}$$

должно выполняться для всех i, j, r таких, что $\omega_i = \omega_j + \omega_r$. С ростом f (от нуля до единицы) левая часть этого неравенства монотонно убывает и достигает при $f = 1$ значения $\left(\frac{\omega_j}{\omega_r}\right)^{1/2}$. Следовательно, положив $c_i = \omega_i$, добьемся выполнения критерия устойчивости. Отметим, что при $f = 1$ функционал U по существу совпадает с функционалом, описывающим изменение энтропии в трехволновых распадных процессах, который обычно используется для доказательства устойчивости распределения Рэлея—Джинса (см. (3)).

Рассмотрим еще один пример применения критерия устойчивости, теперь уже не упрощенного, а полного. Пусть имеется всего одна тройка взаимодействующих волн. Волна 1 распадается на волны 2 и 3. Легко проверить, что стационарный спектр существует тогда и только тогда, когда знак γ_1 противоположен знаку γ_2, γ_3 , а сумма всех инкрементов отрицательна. При этом (см. (4), (5))

$$N_1^0 = -\frac{A}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{A}{\gamma_2}, \quad N_3^0 = \frac{A}{\gamma_3}, \quad A = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) V_{1,2,3}}. \quad (10)$$

Если $\gamma_1 > 0$, то неравенство (6) выполняется. Полагая

$$c_2 = \left| 1 - \frac{N_1^0}{N_3^0} \right|, \quad c_3 = \left| 1 - \frac{N_1^0}{N_2^0} \right|, \quad c_1 = c_2 + c_3,$$

добьемся выполнения условий (4), (7). Следовательно, стационар (10) устанавливается при любых начальных данных.

Если $\gamma_1 < 0$, то неравенство (6) нарушается. Легко показать, что в этом случае имеет место неустойчивость. Действительно, полагая $N_i = N_i^0 + n_i$, линеаризуя уравнения (1) и подставляя в них $n_i \propto \exp(\lambda t)$, получим следующее уравнение:

$$\lambda^3 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \lambda^2 - \frac{3\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \lambda + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 0. \quad (11)$$

При $\gamma_1 < 0$ оно имеет положительный корень, что соответствует росту возмущений со временем.

Примеры, рассмотренные в предыдущем разделе, показывают, что имеются реальные стационарные спектры, к которым применим предлагаемый критерий устойчивости. Из него, в частности, следует известный результат об установлении распределения Рэлея—Джинса и обобщение этого результата на случай степенных спектров, убывающих с ростом частоты медленнее, чем ω^{-1} . Для одной тройки взаимодействующих волн критерий оказывается не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости.

Время установления стационарного спектра, как видно из уравнения (2), того же порядка, что и характерное время распадного взаимодействия волн. В тех случаях, когда критерий устойчивости не выполняется, уравнение (2) позволяет оценить время развития возможной неустойчивости. Отметим, что последнее может оказаться гораздо больше времени установления стационара в основной части спектра, если критерий нарушается лишь в той области, где числа волн малы по сравнению со своими характерными значениями в спектре.

В заключение автор благодарит Б. Н. Брейзмана за постановку задачи и критическое обсуждение работы и Д. Д. Рютова за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Брейзман, ЖЭТФ, 72, № 2, 518 (1977).
2. В. Вольтерра, Математическая теория борьбы за существование, изд. Наука, М, 1976, стр. 145.
3. А. И. Ахиезер и др., Электродинамика плазмы, изд. Наука, М, 1974, стр. 508.
4. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М, 1967, гл. 3, § 7.
5. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 5—6, 736 (1976).

Институт ядерной физики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
5 апреля 1979 г.

FORMATION OF STATIONARY TURBULENCE SPECTRUM IN THREE-WAVE DECAY INTERACTION

V. M. Malkin

The paper presents a sufficient condition of formation of stationary solutions of a kinetic equation describing the evolution of a turbulent wave distribution in the presence of three-wave decay process and linear excitation (absorption) of oscillations

УДК 538.574.33

К ВОПРОСУ О РАСПЛЫВАНИИ ИМПУЛЬСОВ В ДИССИПАТИВНЫХ И НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

M. B. Кузелев, A. A. Рухадзе

В квазимохроматическом приближении проанализирована проблема пространственного расплывания со временем финитного в начальный момент волнового пакета в диссипативной среде. Показано, что независимо от знака диссипации (поглощения, либо усиления) всегда имеет место расплывание пакетов, причем скорость расплывания определяется величиной мнимой части комплексной групповой скорости, в то время как действительная часть этой скорости характеризует перемещение волнового пакета в пространстве как целого. Рассмотрение проводится как для одномерного, так и многомерного случаев.

1. Проблема пространственного расплывания волновых пакетов сводится к решению начальной задачи для уравнений колебаний среды, которое в линейном приближении выражается в виде интеграла

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} F(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — вектор малых возмущений среды, начальное значение которого определяет функцию $F(\mathbf{k})$,

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}, 0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

а $\omega(\mathbf{k})$ — корень дисперсионного уравнения малых колебаний $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$, определяющего спектры нормальных волн системы.

Асимптотическое поведение (при $t \rightarrow \infty$) интеграла (1) в случае вещественных $\omega(\mathbf{k})$ может быть исследовано методом стационарной фазы [1, 2]. При этом, если функция $\varphi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ имеет невырожденную критическую точку \mathbf{k}_0 (т. е. $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0) = 0$, $\det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{k}_i \partial \mathbf{k}_j}(\mathbf{k}_0) \neq 0$),

$\mathbf{k}_0 \in \text{supp } F(\mathbf{k})$, то интеграл (1) описывает расплывающуюся в пространстве группу волн. Такое расплывание волновых пакетов в недиссипативных средах довольно подробно исследовано даже при наличии вырождения (см. обзор [3] и цитированную там литературу).

Иначе обстоит дело с проблемой расплывания пакетов в диссипативных средах, когда спектр частот $\omega(\mathbf{k})$, а следовательно, и групповая скорость волн $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$ являются комплексными. До сих пор в литературе эта проблема не получила достаточно полного решения даже в приближении квазимохроматических волн, когда функция $F(\mathbf{k})$ имеет острый максимум для некоторого $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$ и интеграл (1) можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega(\mathbf{k}_1)t + i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} u \left(\mathbf{r} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_1)t \right). \quad (3)$$

Аргумент функции u в диссипативной среде является комплексным, что приводит к пространственному расплыванию пакета (3) со временем. На подобное расплывание пакета уже неоднократно обращалось внимание в работах [4–8] при рассмотрении ряда частных случаев. Общим выводом этих работ, подытоженных в обзоре [3], является утверждение о том, что понятие групповой скорости в диссипативных средах, вообще говоря, введено быть не может. В частности, определение такой скорости, как скорости перемещения «центра масс» средней плотности энергии [3, 4], затруднительно, так как при наличии диссиpации затруднительна энергетическая интерпретация отдельных членов уравнения баланса энергии [7, 8]. Вопрос об определении направления распространения волн в диссипативных средах подробно проанализирован в работах [6, 8].

Ниже проблема расплывания волновых пакетов в диссипативных средах вновь обсуждается в указанном выше квазимохроматическом приближении. При этом удается определить область локализации финитного возмущения как функцию времени, и показывается, что независимо от знака диссиpации (среда является поглощающей либо усиливающей) всегда происходит пространственное расплывание волновых пакетов, причем величина мнимой части групповой скорости $\left| \operatorname{Im} \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|$ характеризует скорость такого расплывания.

2. Пусть известны уравнения малых колебаний для некоторой, вообще говоря, векторной величины $\Phi(r, t)$ и задано начальное условие в виде волнового пакета

$$\Phi(r, 0) = \varphi(r) e^{ikr} + \text{к. с.}, \quad (4)$$

где $\varphi(r)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда, обращающаяся в нуль на бесконечности и удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, уточненным ниже, а k — вещественный волновой вектор. Будем искать решение сформулированной задачи Коши в виде

$$\Phi(r, t) = u(r, t) e^{-i\omega t + ikr} + \text{к. с.} \quad (5)$$

Подставляя (4) в уравнение малых колебаний и ограничиваясь в квазимохроматическом приближении учетом лишь первых производных функции $u(r, t)$, получим

$$\frac{\partial D(\omega, k)}{\partial \omega} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial D(\omega, k)}{\partial k} \frac{\partial}{\partial r} \right) u = iD(\omega, k)u. \quad (6)$$

Здесь $D(\omega, k) = 0$ определяет спектры частот собственных колебаний системы, и, поскольку ω в решении (5) должна совпадать с собственной частотой, уравнение (6) сводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(V_g \frac{\partial}{\partial r} \right) u = 0, \quad V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (7)$$

В диссипативной среде удобно ввести обозначения

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad u = u_1 + iu_2, \quad V_g = v_1 + iv_2$$

и перейти к новым переменным $\zeta = r - v_1 t$, $\eta = v_2 t$. При этом сформулированная выше задача перепишется в виде

$$\left(v_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u_1 = \left(v_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) u_2,$$

$$\left(\mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) u_1 = - \left(\mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u_2, \quad (8)$$

$$u_{1,2}(\zeta, \eta)|_{\eta=0} = \varphi_{1,2}(\zeta).$$

Решение этой задачи ищется в той «полуплоскости» переменной η , которая определяется условием $t \geq 0$ и знаком компонент вектора \mathbf{v}_2 .

Рассмотрим подробно одномерный случай: $u_{1,2}(z, t) = u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z)$, где $\zeta_z = z - v_{1z}t$, $\eta_z = v_{2z}t$. Уравнения (8) в этом случае совпадают с условиями Коши—Римана для функций u_1 и u_2 . Следовательно, эти функции удовлетворяют уравнению Пуассона, и, потребовав их регулярности на бесконечности, $u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z)$ можно представить в виде интегралов Пуассона:

$$u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_z}{(\zeta' - \zeta_z)^2 + \eta_z^2} \varphi_{1,2}(\zeta') d\zeta'. \quad (9)$$

Это и определяет упомянутое выше дополнительное ограничение на начальное условие. А именно, продолжение с действительной оси ζ_z функции $\varphi(\zeta_z) = \varphi_1(\zeta_z) + i\varphi_2(\zeta_z)$ на соответствующую полуплоскость комплексной переменной $\zeta_z + i\eta_z$ должно представлять регулярную на бесконечности аналитическую функцию.

3. Рассмотрим в качестве примера два модельных волновых пакета

$$\varphi_1(\zeta_z) = \frac{B}{\pi} \frac{\theta}{(\zeta_z^2 + \theta^2)} \quad \text{и} \quad \varphi_1(\zeta_z) = \frac{B}{\pi} \frac{\sin \zeta_z k_0}{\zeta_z}. \quad (10)$$

Функции $\varphi_2(\zeta_z)$ при этом определяются с точностью до постоянных из условий Коши—Римана. В первом из этих случаев решение задачи имеет вид

$$u_{1,2}(z, t) = \frac{B}{\pi} \frac{1}{(z - v_{1z}t)^2 + (\theta + |v_{2z}|t)^2} \left\{ \begin{array}{l} \theta + |v_{2z}|t \\ z - v_{1z}t \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что возмущение перемещается в пространстве как целое со скоростью v_{1z} , а полуширина пакета растет со временем со скоростью $|v_{2z}|$.

Для второго начального условия (10) решение задачи записывается в виде

$$u_1(z, t) + iu_2(z, t) = \frac{[|v_{2z}|t + i(z - v_{1z}t)][1 - \exp(-|v_{2z}|t k_0 + i(z - v_{1z}t)k_0)]}{(z - v_{1z}t)^2 + |v_{2z}|^2 t^2}. \quad (12)$$

Это решение обладает теми же свойствами, что и (11).

При $\theta \rightarrow 0$ и $k_0 \rightarrow \infty$ решения (11) и (12) соответственно описывают эволюцию дельта-образного начального возмущения.

Для произвольного начального возмущения трудно сделать какие-либо общие выводы о характере решения. Однако если начальные возмущения $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ в основном сосредоточены в области $z \in [z_1^{(0)}, z_2^{(0)}]$ ($z_1^{(0)} < z_2^{(0)}$), то интегралы (9) приближенно равны

$$u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z) = \frac{1}{\pi} \varphi_{1,2} [\langle \zeta_z \rangle (\zeta_z, \eta_z)] \left(\operatorname{arctg} \frac{z_2^{(0)} - \zeta_z}{\eta_z} - \operatorname{arctg} \frac{z_1^{(0)} - \zeta_z}{\eta_z} \right). \quad (13)$$

Отсюда следуют два важных вывода: во-первых, невозможность определения в общем случае групповой скорости волн в диссипативной среде, что следует уже из того, что средняя точка $\langle \zeta_z \rangle$ есть функция ζ_z и η_z , определяемая видом начальных условий; во-вторых, если известна область локализаций начальных возмущений, то соотношение (13) однозначно определяет область их локализации в любой момент t . Так, при малых временах, когда $|v_{2z}| t \ll z_2^{(0)} - z_1^{(0)}$, область локализации возмущений со временем расширяется со скоростью $|v_{2z}|$, т. е. $z \equiv [z_1(t), z_2(t)]$, причем*

$$z_{1,2}(t) = z_{1,2}^{(0)} + v_{1z} t \mp |v_{2z}| t. \quad (14)$$

Таким образом, в диссипативной среде можно ввести групповую скорость как среднюю скорость перемещения области локализаций финитных возмущений $\langle V_g \rangle = v_{1z} = \frac{\partial \operatorname{Re} \omega}{\partial k_z}$ и скорость расплывания волнового пакета $w_g = |v_{2z}| = \left| \frac{\partial \operatorname{Im} \omega}{\partial k_z} \right|$. При этом следует заметить, что скорость $\langle V_g \rangle$ не имеет в общем случае энергетического смысла.

Теперь не представляет труда обобщить все сказанное на трехмерный случай. Выберем систему координат так, чтобы ось $0z$ совпала со скоростью v_2 , т. е. $v_2 = (0, 0, v_{2z})$. Уравнения (8) при этом перейдут в соотношения Коши—Римана по переменным ζ_x и ζ_y . Поэтому решение опять может быть записано в виде интегралов Пуассона (9), в которых $\varphi_{1,2}$ зависит от переменных ζ_x и ζ_y как от параметров. В результате область локализации возмущений будет перемещаться как целое со скоростью v_1 и распльваться вдоль оси $0z$ со скоростью $|v_{2z}|$. Таким образом, в трехмерном случае, так же как и в одномерном, можно ввести две скорости

$$\langle V_g \rangle = v_1 = \frac{\partial \operatorname{Re} \omega}{\partial k}, \quad v_2 = \frac{\partial \operatorname{Im} \omega}{\partial k}, \quad (15)$$

характеризующие скорость перемещения области локализации возмущений и скорость их пространственного расплывания, причем независимо от знака v_2 всегда имеет место расплывание волновых пакетов со скоростью $w_g = |v_2|$ в направлении вектора v_2 .

4. Из проведенного выше анализа мы пришли к выводу, что в диссипативной среде волновые пакеты всегда распльваются независимо от того, какой процесс происходит в среде: поглощение или усиление волн. Такой однозначный вывод может вызвать сомнение, в особенности, если речь идет о неустойчивости. Поэтому требует обоснования наложенное выше требование регулярности функции $u(z, t)$. Остановимся на этом вопросе подробнее, ограничиваясь рассмотрением одномерного случая.

Записав частоту $\omega(k) \rightarrow \omega(k) + i\delta(k)$, представим интеграл (1) в виде

$$\Phi(z, t) = \int dk F(k) e^{\delta(k)t - i\omega(k)t + ikz} + \text{к. с.} \quad (16)$$

Пусть функция $F(k) \equiv 0$, если $k \in [k_1, k_2]$ и абсолютно интегрируема, а $\delta(k)$ монотонна на сегменте $[k_1, k_2]$, причем $\delta(k_2) > \delta(k_1)$. Тогда

* Заметим, что величины $v_{1z} \mp |v_{2z}|$ могут быть и больше скорости света. Это не противоречит теории относительности, так как возмущения, хотя и малые, могут быть и вне области локализации. Иными словами, по принятой терминологии [3] речь идет о распространении импульсов, а не сигналов.

в квазимохроматическом приближении ($(k_2 - k_1) \ll (k_2 + k_1)/2$) из (16) получаем

$$\Phi(z, t) = \exp [\delta(k_2)t - i\omega(k_2)t + ik_2 z] \int_0^{k_2 - k_1} dk F(k_2 - k) \times \\ \times \exp [-v_2 kt - ik(z - v_1 t)] + \text{к. с.}, \quad (17)$$

где

$$v_2 = \frac{\delta(k_2) - \delta(k_1)}{k_2 - k_1} \approx \frac{\partial \delta}{\partial k} > 0, \quad (18)$$

$$v_1 = \frac{\omega(k_2) - \omega(k_1)}{k_2 - k_1} \approx \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Интеграл в (17) представляет собой медленно меняющуюся амплитуду $u(z, t) = u_1 + iu_2$, определенную в (5). Учитывая это, из (17) находим для $\eta_z > 0$

$$u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z) = \int_0^{k_2 - k_1} dk \exp(-\eta_z k) \left[F_1(k_2 - k) \begin{pmatrix} \cos k \zeta_z \\ -\sin k \zeta_z \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + F_2(k_2 - k) \begin{pmatrix} \sin k \zeta_z \\ \cos k \zeta_z \end{pmatrix} \right], \quad (19)$$

где $F = F_1 + iF_2$. Теперь нетрудно убедиться в том, что выражение (19) определяет регулярные на бесконечности гармонические функции $u_{1,2}(\zeta_z, \eta_z)$.

Таким образом, исходя только из монотонности $\delta(k)$ на сегменте $[k_1, k_2]$, удалось обосновать все требования, используемые выше. С другой стороны, в квазимохроматическом приближении, когда интервал $(k_2 - k_1)$ достаточно узок, предположение монотонности $\delta(k)$ на этом сегменте вполне оправдано.

5. Нетрудно понять физический смысл расплывания волновых пакетов в диссипативной среде и в общем случае. При наличии мнимой части у частоты $\delta(k)$ с течением времени существенный вклад в интеграл (16) будет давать все более сужающаяся область интегрирования $\Delta k(t)$, расположенная вблизи максимума функции $\delta(k)$, т. е. с течением времени все более существенными становятся те гармоники, которые лежат внутри области $\Delta k(t)$; вклад же остальных гармоник оказывается экспоненциально малым. Очевидно, что область $\Delta k(t)$ сужается независимо от знака $\delta(k)$, а следовательно, волновой пакет со временем всегда расплывается независимо от знака диссипации в среде.

Для одного частного вида волновых пакетов, порождаемых четной (нечетной) функцией $\varphi_1(z)$ и нечетной (четной) функцией $\varphi_2(z)$, что соответствует чисто действительной (чисто мнимой) спектральной плотности $F(k)$ в интеграле (16), можно определить скорость перемещения максимума следующей квадратичной по возмущениям величины $w = u_1^2 + u_2^2$. Легко показать, что

$$w = \int_0^{k_2 - k_1} \int dk' dk'' F(k_2 - k') F(k_2 - k'') \exp[-\eta_z(k' + k'')] \cos \zeta_z(k' - k''). \quad (20)$$

Максимум этой функции реализуется при $\zeta_z = 0$, а следовательно, перемещается в пространстве со скоростью $v_{1z} = \frac{\partial \operatorname{Re} \omega}{\partial k}$. Это еще один

аргумент в пользу того, чтобы скорость $v_1 = \frac{\partial \text{Re} \omega}{\partial k}$ назвать групповой скоростью волн в диссипативной среде.

6. В заключение кратко обсудим пределы применимости полученных выше результатов, обусловленные принятыми ограничениями и упрощениями. При анализе интеграла (16) в квазимохроматическом приближении было использовано разложение подынтегрального выражения по степеням ($k_2 - k$) с точностью до членов первой степени. Пренебрежение следующими членами разложения приводит к требованию

$$t < 2L^2 \min \left[\left(\frac{\partial v_{1z}}{\partial k} \right)^{-1}, \left(\frac{\partial v_{2z}}{\partial k} \right)^{-1} \right]. \quad (21)$$

Здесь $L = L(t)$ — ширина импульса в момент времени t , которая согласно (14) растет со временем $L \sim t$. В результате неравенство (21) с ростом времени выполняется все с большим запасом, а точность полученных выше результатов по этому условию со временем возрастает. Это хорошо видно из выражения (9), в котором с ростом t (т. е. величины η_z) экспоненциально уменьшается область интегрирования по k , дающая существенный вклад в интеграл. Таким образом, ограничение (21) не является жестким и со временем ослабляется.

К действительно жесткому ограничению приводит принятное в (17) предположение, что функция $F(k) \equiv 0$ вне сегмента $[k_1, k_2]$. В реальных условиях это никогда не выполняется. Пусть, например, вне области $[k_1, k_2]$ функция $F(k) = F_w(k)$, причем $|F(k)|_{\max[k_1, k_2]} \gg |F_w(k)|$. Если при этом $\delta(k)$ достигает своего абсолютного максимума в точке $k = k_0 \in [k_1, k_2]$, то на больших временах исходный импульс исказится настолько, что перестанет содержать информацию о своем первоначальном спектральном составе. В этих условиях полученные выше результаты будут справедливыми до момента наступления такого сильного искажения начального импульса, т. е. при

$$t < t_0 = \frac{\ln(|F(k)|_{\max[k_1, k_2]}/|F_w|)}{\delta(k_0) - \delta(k)_{\max[k_1, k_2]}}. \quad (22)$$

При $t \sim t_0$ трудно дать аналитическое описание временной эволюции импульса. Однако при $t \gg t_0$ это легко сделать, воспользовавшись асимптотической оценкой интеграла (17). Для простоты, ограничившись одной точкой максимума функции $\delta(k)$ при $k = k_0$, легко получить соотношение

$$\Phi(z, t) = F(k_0) \exp[\delta(k_0)t] \sqrt{\frac{2\pi}{\rho t}} \exp \left[\frac{\delta'' \gamma^2}{2\rho^2 t} + i \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\omega'' \gamma^2}{2\rho^2 t} - \psi_0 \right) \right], \quad (23)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega'' &= \frac{\partial^2 \omega(k_0)}{\partial k^2}, & \delta'' &= \frac{\partial^2 \delta(k_0)}{\partial k^2} < 0, & \rho^2 &= \delta''^2 + \omega''^2, \\ \gamma &= z - \omega'(k_0)t, & \psi_0 &= \omega(k_0)t - k_0 z, & \varphi &= \arctg \frac{\omega''}{\delta''}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражение (23) обобщает известную формулу асимптотического расплывания волновых пакетов [^{1,3}] на случай диссипативных сред. Заметим, что при $\delta'' \rightarrow 0$ слагаемое $\omega''\gamma^2/2\rho^2t$ в экспоненте (23) является превышением точности.

Полученные в работе результаты, конечно, не являются всеохватывающими. Поэтому нельзя сказать, что вопрос о смысле комплексного вектора $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ решен в общем виде. Действительно, в работе из всего

многообразия волновых пакетов был выделен определенный класс, а именно класс волновых пакетов, имеющих финитную спектральную плотность $F(k)$. Результаты, полученные в работе, справедливы только для пакетов из этого класса. Следует отметить, что такие пакеты являются достаточно распространенными и важными в различных экспериментальных исследованиях. Как правило, они формируются при резонансном возбуждении воли (в лазерах, СВЧ генераторах и т. д.), и мерой их немонокроматичности по существу является длительность импульса. В связи с этим спектральная плотность таких пакетов с хорошей степенью точности может считаться финитной функцией k . Полученные в работе результаты несомненно представляют интерес во всех вопросах, связанных с исследованием и использованием таких импульсов в радиофизике, исследованиях ионосферы, в теории СВЧ генераторов и кристаллооптике диссипативных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. С Т а у, Линейные волны в средах с дисперсией, сб. Нелинейные волны, изд. Мир, М., 1977.
2. Ф Ольвер, Введение в асимптотические методы и специальные функции, изд. Наука, М., 1978
3. Л А Вайнштейн, УФН, 118, 339 (1976)
4. Л А Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2506 (1957)
5. В. Л. Гинзбург, Изв. вузов — Радиофизика, 4, № 1, 74 (1961)
6. К. А Барсуков, В. Л. Гинзбург, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 6, 1187 (1964)
7. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
8. В. М. Агронович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии, изд. Наука, М., 1965.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
8 января 1979 г.

TO THE PROBLEM OF PULSE DIFFUSION IN DISSIPATIVE AND NONEQUILIBRIUM MEDIA

M V Kuzelov, A A Rukhadze

In the quasimonochromatic approximation a problem is considered of space diffusion with time of the finite at the initial moment wave packet in a dissipative medium. It is shown that irrespective of the dissipation sign (absorption or amplification) the packet diffusion is always takes place. The velocity of diffusion is defined by the value of the imaginary part of the complex group velocity, while the real part of this velocity characterizes the migration of the wave packet in the space as a whole. The consideration is carried out both for a one-dimensional case and for a multi-dimensional one.

УДК 551.510.5

**ИЗМЕРЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ
АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА**

М. С. Беленький, В. В. Боронов, Н. Ц. Гомбоев, В. Л. Миронов

Проведена экспериментальная проверка формул для определения структурной характеристики атмосферной турбулентности по искажению пространственной когерентности поля лазерного пучка. Показана необходимость учета угловой расходимости пучка и размера излучающей апертуры.

В экспериментах по распространению лазерного излучения в турбулентной атмосфере и при изучении свойств атмосферной турбулентности часто структурную характеристику флюктуаций показателя преломления воздуха C_n^2 определяют из измерений распределения средней интенсивности в фокальной плоскости приемной линзы [1-3]. При этом в случае статистически однородных трасс величина C_n^2 обычно вычисляется по предложенной в работе [2] формуле

$$C_n^2 = \frac{\alpha [y_{0,5} / F]^{5/3}}{2,91 k^{1/3} x}, \quad (1)$$

где k — волновое число, x — длина трассы, $y_{0,5}$ — измеренная полуширина на полувысоте кривой распределения средней интенсивности в фокальной плоскости линзы, F — фокусное расстояние, $\alpha = 0,95$.

Формула (1), как известно, является следствием проведенного в [1, 4] расчета средней интенсивности в фокальной плоскости приемной линзы, на которую падает неограниченная плоская волна. В работе [1] она была подтверждена экспериментально измерениями в атмосфере при приеме линзой коллимированного лазерного пучка, диаметр излучающей апертуры которого был много больше радиуса первой зоны Френеля.

В случае приема пространственно-ограниченного лазерного пучка, имеющего произвольный начальный диаметр и угловую расходимость, распределение средней интенсивности в фокальной плоскости линзы было найдено в работах [5, 6]. Согласно [5, 6] величина мощности светового потока, прошедшего через узкую (по сравнению с размером не размытого турбулентностью фокального пятна) щель, нормированная на ее максимальное значение, записывается в виде следующей приближенной формулы:

$$\frac{\langle I(y) \rangle}{\langle I(0) \rangle} = V(y) = \exp \left(-\frac{k^2 y^2}{4F^2 P} \right), \quad (2)$$

где

$$P(\rho_0) = \left\{ \frac{1}{4\rho_a^2} + \frac{1}{d^2/2} + \frac{d^2 \gamma^2}{32\rho_b^4 (1 + d^2/8\rho_b^2)} \right\},$$

$$\begin{aligned}\rho_a^{-2} &= \left\{ 1 + 4 \frac{a^2}{\rho_0^2} \left[1 - \frac{x}{f} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{f} \right)^2 + \frac{1}{3} \Omega^{-2} \right] + \frac{4}{3} \frac{a^4}{\rho_0^4} \Omega^{-2} \right\} / \rho_b^2, \\ \rho_b^2 &= a^2 \left[\left(1 - \frac{x}{f} \right)^2 + \Omega^{-2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{a^2}{\rho_0^2} \right) \right], \\ \gamma &= \Omega^{-1} \left(1 + 2 \frac{a^2}{\rho_0^2} \right) - \frac{ka^2}{f} \left(1 - \frac{x}{f} \right).\end{aligned}$$

Здесь a и x/f — начальный радиус и параметр фокусировки пучка соответственно, $\Omega = ka^2 x^{-1}$ — параметр Френеля излучающей апертуры, $\rho_0 = (1,45 k^2 C_n^2 x)^{-3/5}$ — радиус когерентности плоской волны в турбулентной среде, d — диаметр приемной линзы, y — пространственная координата щели в ее фокальной плоскости.

При известных дифракционных параметрах лазерного пучка $(\Omega, \frac{x}{f})$, известном диаметре d и фокусном расстоянии F приемной линзы величину ρ_0 и, следовательно, структурную характеристику C_n^2 можно определить из уравнения

$$y_{0,5} = 0,83 \frac{2F P^{1/2}(\rho_0)}{k} \quad (3)$$

по измеренному значению полуширины $y_{0,5}$ распределения $\langle I(y) \rangle / \langle I(0) \rangle$. Соотношение (3) в общем случае является алгебраическим уравнением четвертой степени относительно ρ_0 . В частном случае коллимированного $\left(\frac{x}{f} = 0 \right)$ лазерного пучка в области сильных флюктуаций интенсивности $\left(\frac{x}{k \rho_0^2} = 1,22 \rho_0^{12/5} \gg 1 \right)$, где $\rho_0^2 = 1,23 k^{7/6} C_n^2 x^{11/6}$ для приемной апертуры, удовлетворяющей условию $\rho_0 \ll d \ll \frac{x}{k \rho_0}$, решение уравнения (3) записывается в простой форме:

$$C_n^2 = \frac{0,86 \mu (y_{0,5}/F)^{5/3}}{2,91 k^{1/3} x}, \quad (4)$$

где параметр μ принимает значения $\mu = 1, 2^{5/3}$ и $3^{5/6}$, если соответственно реализуются режимы плоской волны

$$a \gg \frac{x}{k \rho_0}, \quad (5)$$

пространственно-ограниченного пучка

$$\rho_0 \ll a \ll \frac{x}{k \rho_0} \quad (6)$$

и сферической волны

$$a \ll \rho_0. \quad (7)$$

Из сравнения формулы (4) с (1) при $\mu = 1$ (плоская волна) видно, что использование в работах [5, 6] квадратической аппроксимации

для функции взаимной когерентности поля второго порядка занижает величину C_n^2 на 9,4 %. Расчеты, аналогичные проделанным в [1, 4], в случае, когда на приемную линзу падает сферическая волна и диаметр линзы удовлетворяет условию $\rho_0 \ll d \ll \frac{x}{k\rho_0}$, дают для коэффициента α в формуле (1) значение $\alpha = 2,53$. Относительная ошибка формулы (4) в этом случае достигает 15 %.

Максимальная погрешность, равная 25 %, наблюдается при падении на приемную линзу пространственно-ограниченного коллимированного пучка при условии $\rho_0 \ll a, d \ll \frac{x}{k\rho_0}$. Для оценки этой ошибки численно было рассчитано распределение средней интенсивности $\langle I(y) \rangle / \langle I(0) \rangle$ с использованием общего интегрального представления для функции когерентности поля второго порядка Γ_2 , приведенного в [3]. Результаты расчета в виде зависимости отношения V от обобщенного параметра $\tilde{x} = \frac{k\rho_0 y}{2^{3/5} F}$ изображены на рис. 1. Значение параметра \tilde{x} , соответствующее убыванию функции $\langle I(\tilde{x}) \rangle / \langle I(0) \rangle$ (кривая 2) до уровня 0,5, дает для коэффициента α в формуле (1) величину $\alpha = 3,63$.

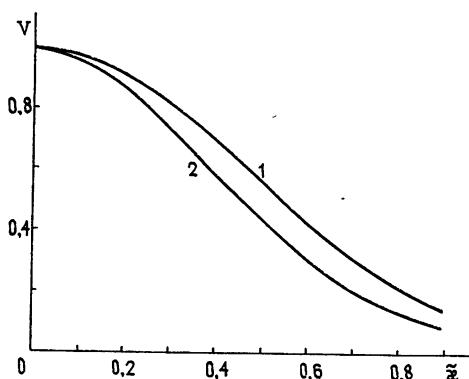


Рис. 1. Распределение средней интенсивности в фокальной плоскости линзы:

1 — расчет по формуле (2); 2 — расчет на основе общего интегрального представления для функции Γ_2 .

Полученные выше оценки точности формулы (4) лежат в пределах ошибок измерений параметра C_n^2 по записям распределений средней интенсивности [1, 7], вызванных как аппаратурными погрешностями, так и флуктуациями интенсивности принимаемого излучения.

Из неравенства (5) следует, что в условиях сильных флуктуаций интенсивности ($\beta_0^2 \gg 1$) для осуществления режима плоской волны необходимо, чтобы размер апертуры передатчика был не просто больше радиуса первой зоны Френеля, а превышал дифракционный масштаб $\frac{x}{k\rho_0}$, который при сильных флуктуациях интенсивности сам оказывается много больше величины $\sqrt{x/k}$.

Оценки показывают, что в случае протяженных (порядка десяти и более километров) приземных трасс даже при наибольших из использующихся на практике размерах передатчиков ($a \approx 20 \div 30$ см)

условие (5) не выполняется и реализуется режим пространственно-ограниченного пучка (6). Например, при $x = 10^4 \text{ см}$, $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$, среднем значении $C_n^2 = 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$ условие (5) принимает вид $a \gg 50 \text{ см}$.

Использование в этих условиях другого предельного типа излучения — сферической волны — затруднено из-за ограниченности мощности лазеров. Действительно, согласно (7), для перехода к режиму сферической волны требуется, чтобы дифракционная расходимость пучка — $1/ka$ намного превышала его расходимость за счет турбулентности — $1/k\rho_0$. В результате этого в рассмотренном выше примере для выполнения условия (7) угловая расходимость пучка должна превышать значение $\varphi = 2'$.

Таким образом, при измерениях структурной характеристики C_n^2 в атмосфере по полуширине дифракционной картины в фокальной плоскости приемной линзы, освещаемой лазерным источником, часто приходится иметь дело с режимом пространственно-ограниченного пучка (6) или промежуточными режимами. При этих условиях для определения C_n^2 необходимо пользоваться общей формулой (3), которая при фиксированных параметрах x, f, a, k, F, d может быть представлена в виде градиуровочной кривой $y_{0.5} = f(C_n^2)$. В частности, при определении параметра C_n^2 в режиме (6) по формуле для плоской волны (1) возникает систематическое занижение величины C_n^2 в $2^{5/3}$ раза.

С целью проверки приближенного соотношения (3) нами был выполнен эксперимент. В отличие от методики, использовавшейся в работе [1], где одновременно с записями распределения средней интенсивности $\langle I(y) \rangle$ проводились измерения C_n^2 по градиентам средней температуры и скорости ветра [8], а затем практически сравнивались значения структурной характеристики, найденные из формулы (1) и метеорологическим способом, в нашем случае имелась возможность определять величину C_n^2 из параллельных оптических экспериментов. Для этого одновременно проводились записи средней интенсивности в фокальных плоскостях двух идентичных приемных линз при освещении последних лазерными пучками с различными дифракционными параметрами. Полученные таким образом два значения $y_{0.5}$ использовались для определения величин C_n из градиуровочных кривых, построенных по формуле (3). Найденные значения C_n затем сравнивались между собой.

Измерения проводились в августе—сентябре 1976 года на трассе протяженностью 1800 м в районе г. Улан-Удэ. Трасса проходила на высоте 2,5 м над ровной подстилающей поверхностью в условиях степи. Разнос лучей в горизонтальной плоскости был равен 1 м. Освещение приемных линз производилось одновременно следующими источниками: 1) одномодовым широким коллинированным ($x/f = 0, \Omega = 90^\circ$) и расходящимся (угол расходимости $\varphi = 2', 5'$) пучками; 2) одномодовым сфокусированным ($x/f = 1, \Omega = 90^\circ$) и расходящимся ($\varphi = 2', 5'$) пучками; 3) одномодовым широким коллинированным ($x/f = 0, \Omega = 90^\circ$) и узким коллинированным ($x/f = 0, \Omega = 1^\circ$) пучками.

В качестве передатчиков использовались Не-Не лазеры типа ЛГ-75 ($\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}$), работавшие в одномодовом режиме. Для формирования широкого ($\Omega = 90^\circ$) коллинированного ($x/f = 0$) и сфокусированного ($x/f = 1$) пучков применялось сферическое зеркало диаметром 40 см. Расходящиеся пучки формировались с помощью лазеров без фокусирующей оптики.

Запись распределений $\langle I(y) \rangle$ осуществлялась путем сканирования вертикальной щелью. Приемные системы имели следующие пара-

метры: диаметр линзы $d = 15 \text{ см}$, фокусное расстояние $F = 160 \text{ см}$, ширина щели $20 \mu\text{м}$, скорость сканирования $v = 0,113 \text{ мм/мин}$.

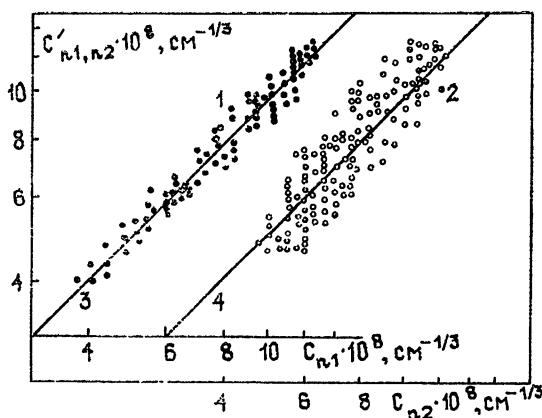


Рис. 2. Сравнение значений параметра C_n , найденных при различных дифракционных параметрах просвечивающего атмосферу лазерного пучка:

1 — измерения с широким коллимированным (C_{n1}) и расходящимся (C'_{n1}) пучками; 2 — измерения с расходящимся (C_{n2}) и сфокусированным (C'_{n2}) пучками; 3 — прямая $C_{n1} = C'_{n1}$; 4 — прямая $C_{n2} = C'_{n2}$.

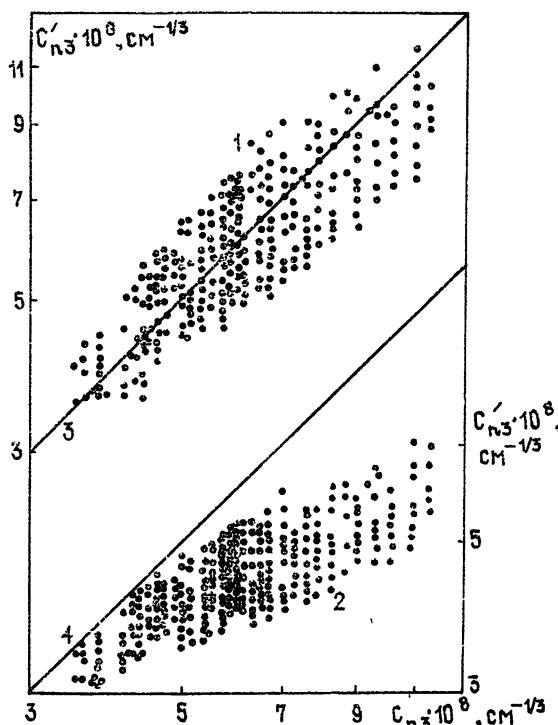


Рис. 3. Значения C_n , найденные по одновременным измерениям в широком (C_{n3}) и узком (C'_{n3}) коллинированных пучках:
1 — обработка по формуле (3); 2 — обработка по формуле (1);
3, 4 — прямые $C_{n3} = C'_{n3}$.

Результаты эксперимента в виде значений параметра C_n , найденных по формуле (3) из независимых измерений $y_{0,5}$ с разными пучками, показаны на рис. 2, 3. Из рисунков видно, что одновременно полученные значения C_n удовлетворительно согласуются друг с другом. Кроме того, на рис. 3 изображены значения величин C_{n3} и C'_{n3} , вычисленные по формуле (1), соответствующей плоской волне. Видно, что возникающая при такой обработке систематическая ошибка определения C_n превышает разброс экспериментальных данных.

Таким образом, в результате проведенного эксперимента показано, что при определении структурной характеристики флуктуаций показателя преломления в атмосфере из измерений полуширины дифракционной картины в фокальной плоскости приемной линзы необходимо учитывать размер передающей апертуры и угловую необходимость освещающего линзу лазерного пучка.

В заключение авторы выражают благодарность Ч. Ц. Цыдыпову за внимание к работе и Ж. П. Балданову и В. Н. Поплаухину за помощь в проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Артемьев, А. С. Гурвич, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 734 (1971).
2. Э. С. Вартанян, А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян, Изв. АН СССР, ФАО, 6, № 8, 844 (1970).
3. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в атмосфере, под ред. В. И. Татарского, изд. Наука, М., 1976.
4. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 6, № 3, 488 (1963).
5. М. С. Беленький, В. Л. Миронов, III Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1975, стр. 202.
6. М. С. Беленький, А. И. Кон, В. Л. Миронов, Квантовая электроника, 4, № 3, 517 (1977).
7. А. В. Артемьев, Радиотехника и электроника, 14, № 3, 544 (1969).
8. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, ФАО, 7, № 1, 73 (1971).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
24 августа 1977 г,
после переработки
22 мая 1979 г.

MEASUREMENTS OF ATMOSPHERE TURBULENCE STRUCTURAL CHARACTERISTICS BY A SPACE-LIMITED LASER BEAM

M. S. Belen'kij, V. V. Boronoev, N. Ts Gomboev, V. L. Mironov

An experimental check of formulas has been made for definition of the structural characteristic of the atmosphere turbulence according to the distortion of space coherence of a laser beam field. It is shown that the angular divergence of the beam and the dimension of the radiating aperture are necessary to take into account.

УДК 530.161/162

К ВЫВОДУ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Г. Ф. Ефремов, В. А. Казаков

Получено нелинейное стохастическое уравнение для операторов динамической подсистемы, находящейся в неравновесном состоянии и взаимодействующей с макроскопической системой (термостатом). Полученное уравнение (обобщая известные в литературе уравнения Ланжевена) содержит флюктуирующие параметры и нелинейные члены, обусловленные воздействием термостата. В качестве примера рассмотрено стохастическое уравнение для квантового гармонического осциллятора.

В последнее время большое внимание уделяется микроскопическому выводу стохастических уравнений Ланжевена, описывающих, например, броуновское движение тяжелой частицы, квантового осциллятора и т. д. [¹⁻⁵]. В работе авторов [⁶] получено стохастическое уравнение Ланжевена для динамической подсистемы, взаимодействующей с термостатом, с учетом флюктуаций параметров (коэффициента затухания). В данной работе мы получим нелинейное уравнение с учетом нелинейных свойств термостата и флюктуаций параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Разделим рассматриваемую систему на две подсистемы — так называемую динамическую и взаимодействующую с ней макроскопическую систему, называемую условно термостатом.

Для динамической подсистемы существенно, что она обладает малым числом степеней свободы в сравнении с макроскопически большим числом степеней свободы термостата.

Разделение системы на «малую» и «большую» части или выделение наиболее существенных переменных может быть использовано в очень широком круге задач и позволяет, прежде всего, рассматривать сильно неравновесные состояния. Мы выделяем часть системы, которая находится в неравновесном состоянии, примесные атомы, длинноволновое поле излучения и т. д. и остальную ее макроскопическую часть, которая находится в состоянии, близком к равновесию. Кроме этого, выделение наиболее существенных переменных позволяет рассмотреть ряд интересных явлений в состоянии термодинамического равновесия, таких, как фазовые переходы.

Пусть динамическая подсистема с гамильтонианом H_0 взаимодействует с термостатом, имеющим гамильтониан F , и находится под воздействием внешней силы $f(t)$, так что гамильтониан всей системы имеет вид

$$H = H_0 + F - gXQ - Xf(t). \quad (1)$$

Здесь член $V = -gXQ$ описывает взаимодействие между динамической подсистемой и термостатом, X и Q — соответственно переменные

динамической подсистемы и термостата. Будем считать известным поведение динамической подсистемы и термостата без учета их взаимодействия. Наша задача состоит в определении поведения динамической подсистемы, взаимодействующей с термостатом. Будем считать, что в некоторый момент времени (например, $t = 0$) состояние системы задано, а вся эволюция во времени содержится в операторах (гейзенберговское представление).

При выводе стохастических уравнений используем тот факт, что термостат — большая система с макроскопически большим числом степеней свободы по сравнению с имеющей малое число степеней свободы динамической подсистемой. В силу макроскопичности термостата можно считать, что переменные термостата мало меняются при взаимодействии с динамической подсистемой. Вместе с тем, влияние макроскопической подсистемы на динамическую не является малым и существенным образом определяет диссипативные и флуктуационные процессы в динамической системе.

В силу основного физического предположения мы должны учесть малость изменения переменных термостата за счет взаимодействия с термостатом. С этой целью рассмотрим поведение термостата под действием возмущения, обусловленного воздействием динамической системы на термостат,

$$H' = F - gQX(t), \quad (2)$$

где $X(t)$ — произвольная случайная функция времени. Здесь мы рассматриваем классическую задачу, а затем приведем обобщение на квантовый случай.

Учитывая малость изменения переменных термостата под действием заданного возмущения

$$V(t) = -gQX(t), \quad (3)$$

получим [7]*

$$\begin{aligned} Q^h(t) = Q(t) + g \int_0^\infty dt_1 \varphi(t; t_1) X(t_1) + g^2 \int_0^\infty dt_1 dt_2 \varphi(t; t_1, t_2) \times \\ \times X(t_1) X(t_2) + g^3 \int_0^\infty dt_1 dt_2 dt_3 \varphi(t; t_1, t_2, t_3) X(t_1) X(t_2) X(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $Q(t)$ определяется невозмущенным поведением термостата,

$$\varphi(t, t_1) = -\{Q(t), Q(t_1)\} \eta(t - t_1), \quad (5)$$

$$\varphi(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2} P_{1,2} \{\{Q(t), Q(t_1)\} Q(t_2)\} \eta(t - t_1) \eta(t_1 - t_2)$$

есть случайные функции отклика. Фигурные скобки $\{\}$ означают скобки Пуассона, $\eta(\tau) = \begin{cases} 1 & (\tau > 0) \\ 0 & (\tau < 0) \end{cases}$ — единичная функция, учитывающая принцип причинности.

Обратимся теперь к поведению динамической подсистемы.

Уравнения движения для переменных динамической подсистемы имеют вид

$$\dot{X}_i^h(t) = \{X_i^h, H_0\} - \{X_i^h, X^h\}(gQ^h(t) + f(t)), \quad (6)$$

* В классическом пределе квантовые скобки переходят в классические скобки Пуассона. В отличие от [7] здесь отсутствует усреднение по начальному распределению.

где X_i ($i = 1, 2, \dots$) — полный набор величин, определяющих состояние динамической подсистемы.

Уравнения движения (6) для переменных динамической подсистемы являются точными, если $Q^h(t)$ есть функционал от $X^h(t)$, представляемый в общем случае в виде бесконечного ряда (4) по степеням $X^h = X$. Замкнутые уравнения для переменных динамической подсистемы будут найдены после того, как мы используем основное физическое предположение и подставим в (6) приближенное выражение для $Q^h(t)$, ограничившись несколькими первыми членами разложения (4):

$$\begin{aligned} \dot{X}_i^h(t) - \{X_i^h(t), H_0(t)\} + \{X_i^h(t), X^h(t)\}(f(t) + gQ(t)) = \\ = \{X^h(t), X_i^h(t)\} \{g^2 \int dt_1 \varphi(t, t_1) X^h(t_1) + g^3 \int dt_1 dt_2 \times \\ \times \varphi(t; t_1, t_2) X^h(t_1) X^h(t_2) + \dots\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $Q(t)$, $\varphi(t, t_1)$, $\varphi(t; t_1, t_2)$ есть случайные функции времени, определяемые соотношениями (5). Их статистика полностью определяется невозмущенным термостатом. Таким образом, полученное уравнение (7) является нелинейным стохастическим уравнением со случайными параметрами. Решение этого уравнения в принципе позволяет найти все статистические характеристики случайного процесса $X(t)$ по заданным характеристикам термостата.

Наиболее важными из них являются средние значения и корреляционные функции. Уравнение (7) единым образом описывает флуктуационные и релаксационные процессы в динамической системе.

2. ВЫВОД КВАНТОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Вывод стохастического уравнения (7) в классическом случае является физически прозрачным и не вызывает каких-либо принципиальных трудностей. Перейдем к квантовому выводу стохастического уравнения. В силу принципа соответствия мы должны получить разложение гейзенберговских операторов термостата $Q^h(t)$ в функциональный ряд по степеням гейзенберговского оператора $X^h(t)$ с коэффициентами, зависящими только от невозмущенных операторов термостата.

Особенность такого разложения состоит в том, что оператор X^h является некоторым функционалом переменных термостата и, таким образом, не коммутирует с операторами термостата. Это обстоятельство делает разложение $Q^h(t)$ в функциональный ряд по $X^h(t)$ нетривиальным. Чтобы обойти эту трудность, введем явным образом зависимую от времени константу взаимодействия $g(t)$ так, что взаимодействие между термостатом и динамической системой принимает вид

$$V(t) = -g(t) Q^h(t) X^h(t), \quad (8)$$

и воспользуемся функциональным тождеством

$$\begin{aligned} Q^h = Q + \int dg_1 \frac{\delta Q^h}{\delta g_1} - \frac{1}{2} \int dg_1 dg_2 \frac{\delta^2 Q^h}{\delta g_1 \delta g_2} + \frac{1}{3!} \int dg_1 dg_2 \times \\ \times dg_3 \frac{\delta^3 Q^h}{\delta g_1 \delta g_2 \delta g_3} + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения

$$g_1 = g(t_1), \quad dg_1 = g(t_1) dt_1, \quad Q = Q(t), \quad Q^h = Q^h(t), \quad (10)$$

$$\frac{\delta Q^h}{\delta g_1} = \frac{\delta Q^h(t)}{\delta g(t_1)} = i[Q^n(t), Q^h(t_1)X^h(t_1)] - \eta(t - t_1)$$

есть функциональная производная ($\hbar = 1$).

Используя тождество (9), будем разлагать Q^h по константе связи $g(t)$, считая оператор X^h произвольным. В нулевом порядке по константе связи $Q^h(t)$ совпадает с невозмущенным оператором $Q(t)$. Чтобы получить член первого порядка по g , необходимо заменить Q^h и Q_1^h во втором слагаемом (9) их невозмущенными значениями Q , Q_1 и т. д. Существенная особенность такого разложения состоит в том, что будут содержаться коммутаторы X^h с невозмущенными операторами Q .

Чтобы найти коммутатор X_1^h с невозмущенным оператором Q , используем разложение

$$X_1^h = X_1^0 + \int dg_2 \frac{\delta X_1^h}{\delta g_2} - \frac{1}{2} \int dg_2 dg_3 \frac{\delta^2 X_1^h}{\delta g_2 \delta g_3} + \dots, \quad (11)$$

где X_1^0 определяется свободной эволюцией динамической подсистемы.

Учитывая коммутативность X_1^0 и Q , из (10), (11) получим

$$[Q, X_1^h]_- = \frac{1}{2} \int dg_2 [D_{12}, [Q, Q_2]_-]_+ + \frac{1}{4} \int dg_2 \times \\ \times dg_3 [[X_2^h, D_{13}]_+, [Q, \varphi_{32}]_-]_+ + \dots, \quad (12)$$

где

$$\varphi_{32} = i[Q_3, Q_2]_- \eta(t_3 - t_2), \quad (13)$$

$$D_{12} = \frac{\delta X_1^h}{\delta f_2} = i[X_1^h, X_2^h]_- \eta(t_1 - t_2).$$

Используя формулу (12), из (9) после исключительных, но достаточно громоздких выкладок получим следующее разложение:

$$Q^h = Q + \frac{g}{2} \int dt_1 [\varphi_{01}, X_1^h]_+ + \frac{g^2}{4} \int dt_1 dt_2 [[\varphi_{0,12}, X_2^h]_+ \times \\ \times X_1^h]_+ + \frac{g^3}{8} \int dt_1 dt_2 dt_3 [[[Q, Q_1]_-, Q_2]_- \eta(t - t_1) \eta(t_1 - t_2), \quad (14)$$

где

$$\varphi_{01} = i[Q, Q_1]_- \eta(t - t_1), \quad .$$

$$\varphi_{0,12} = i^2 [[Q, Q_1]_-, Q_2]_- \eta(t - t_1) \eta(t_1 - t_2), \quad (15)$$

$$\varphi_{0,123} = i^3 [[[Q, Q_1]_-, Q_2]_-, Q_3]_- \eta(t - t_1) \eta(t_1 - t_2) \eta(t_2 - t_3)$$

определяются невозмущенным поведением термостата.

Средние значения (по начальному состоянию термостата) операторов (15) имеют простой физический смысл, а именно определяют линейный и нелинейные отклики термостата на заданное возмущение

$$\hat{V} = -\hat{Q}X^{\text{ст}}(t), \quad (16)$$

где $X^{\text{ст}}(t)$ — сторонняя классическая сила. В классическом пределе выражение (14) переходит в полученное ранее разложение (4) (скобки

симметризации опускаются, а квантовые скобки Пуассона переходят в классические).

Обратимся к поведению динамической подсистемы. При выводе (14) мы не делали каких-либо предположений относительно природы динамической подсистемы и степени ее неравновесности. Простейшими, но очень важными моделями динамической подсистемы являются осциллятор и двухуровневая система.

Для определенности рассмотрим в качестве динамической подсистемы гармонический осциллятор с частотой ω_0 :

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_0^2 X^2. \quad (16')$$

Из (1) и (16) получаем

$$\ddot{X}^h(t) + \omega_0^2 X^h(t) = gQ^h(t) + f(t). \quad (17)$$

Используя основное физическое предположение, подставим в (17) приближенное выражение для Q^h , ограничившись несколькими первыми членами разложения (14):

$$\begin{aligned} \ddot{X}^h(t) + \omega_0^2 X^h(t) &= f(t) + gQ(t) + \frac{g^2}{2} \int dt_1 [\varphi(t, t_1), X^h(t_1)]_+ + \\ &+ \frac{g^3}{4} \int dt_1 dt_2 [[\varphi(t; t_1, t_2), X^h(t_2)]_+ X^h(t_1)]_+ + \\ &+ \frac{g^4}{8} \int dt_1 dt_2 dt_3 [[[\varphi(t; t_1, t_2, t_3) X^h(t_3)]_+ X^h(t_2)]_+ X^h(t_1)]_+, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varphi(t, t_1)$, $\varphi(t; t_1, t_2)$, ... есть случайные функции отклика, определяемые (15), а в классическом случае—(5). Их статистика и временная зависимость полностью определяется термостатом.

Отметим две существенные особенности полученного уравнения для осциллятора: во-первых, (18) есть нелинейное уравнение, причем эта нелинейность обусловлена свойствами термостата; во-вторых, это уравнение с флюктуирующими параметрами.

3. ГАУССОВ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ПЕРЕМЕННЫХ ТЕРМОСТАТА

В [6] показано, что флюктуации функции отклика обусловлены не-гауссовостью переменной термостата $Q(t)$. Легко также показать, что нелинейные члены в (18) также обусловлены негауссовостью термостата. Посмотрим, как будет выглядеть стохастическое уравнение (18) в случае гауссовых флюктуаций $Q(t)$. Решение стохастического уравнения (18) является некоторым функционалом случайных функций отклика $\varphi(t, t_1)$, $\varphi(t; t_1, t_2)$, ..., который можно записать в виде функционального ряда по этим переменным. Теперь воспользуемся теоремой, согласно которой любое среднее от гауссовых величин или операторов $Q(t)$ типа

$$\langle Q(t) Q(t_1) Q(t_2) \dots \rangle \quad (19)$$

разбивается на сумму всевозможных произведений попарных средних, причем в случае операторов порядок следования величин в средних сохраняется. Легко видеть, что если усреднить коммутатор $[Q(t), Q(t_1)]_-$, помноженный на другие $Q(t_2) Q(t_3)$, то выполняется соотношение

$$\langle [Q(t), Q(t_1)]_- Q(t_2) Q(t_3) \rangle = \langle [Q(t), Q(t_1)]_- \rangle \langle Q(t_2) Q(t_3) \rangle. \quad (20)$$

Например, если мы будем спаривать $Q(t_1)$ с $Q(t_2)$ в левой стороне (20), то в результате получим C — число, коммутатор которого с $Q(t)$ равен нулю. Отсюда ясно, что такой коммутатор можно заменить его средним в функционале, представляющем собой решение (18), а следовательно, и в исходном уравнении (18). При этом существенно, что замена коммутаторов $[Q(t), Q(t_1)]_-$ их средними значениями в нелинейных функциях отклика приводит к их исчезновению. В результате получаем стохастическое уравнение для осциллятора

$$\ddot{X}^h(t) + \omega_0^2 X^h(t) - \int dt_1 \langle i [Q(t), Q(t_1)]_- \rangle \eta(t-t_1) \times \\ \times X^h(t_1) = Q(t) + f(t), \quad (21)$$

в котором отсутствуют нелинейные члены, а также флуктуации функции отклика. Другими словами, для гауссовой модели термостата точное выражение для гейзенберговского оператора $Q^h(t)$ имеет вид

$$Q^h(t) = Q(t) + \int dt_1 \langle i [Q(t), Q(t_1)]_- \rangle \eta(t-t_1) X^h(t_1).$$

4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И НЕЛИНЕЙНАЯ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Основное стохастическое уравнение (18) для осциллятора, связанного с термостатом, демонстрирует глубокую связь между процессами переноса и релаксации средних, с одной стороны, и флуктуационными процессами — с другой стороны, по крайней мере в том случае, когда начальное состояние термостата есть состояние термодинамического равновесия. Здесь мы рассмотрим этот вопрос в простейшем случае, когда из (18) получаются замкнутые выражения для средних значений $X(t)$.

Обсудим приближения, при помощи которых можно из (18) получить замкнутые уравнения для $\langle X(t) \rangle$. Этих приближений два.

1. Если ввести характерное время изменения динамической переменной, обусловленное воздействием термостата, T , и характерное время τ флуктуаций переменной термостата, то должно выполняться неравенство

$$\tau \ll T. \quad (22)$$

Это приближение применяется при выводе различных кинетических уравнений.

2. Флуктуации $X^h(t)$ малы по сравнению с его средним,

$$\sqrt{\langle [X^h(t) - \langle X^h(t) \rangle]^2 \rangle} \ll |\langle X^h(t) \rangle|. \quad (23)$$

Проведем в этом случае усреднение (18). Благодаря первому приближению, мы можем усреднять динамические и термостатные переменные независимо, а условие (23) дает возможность написать

$$\langle X^h(t_1) X^h(t_2) \rangle = \langle X^h(t_1) \rangle \langle X^h(t_2) \rangle.$$

Таким образом, из (18) мы получаем замкнутое уравнение для $\langle X(t) \rangle$:

$$\langle \dot{X}^h(t) \rangle + \omega_0^2 \langle X^h(t) \rangle - \int dt_1 \bar{\varphi}(t, t_1) \langle X^h(t_1) \rangle - \\ - \int dt_1 dt_2 \bar{\varphi}(t; t_1, t_2) \langle X^h(t_1) \rangle \langle X^h(t_2) \rangle - \\ - \int dt_1 dt_2 dt_3 \bar{\varphi}(t; t_1, t_2, t_3) \langle X^h(t_1) \rangle \langle X^h(t_2) \rangle \langle X^h(t_3) \rangle \equiv f(t). \quad (24)$$

Здесь $\bar{\varphi}(t; t_1), \bar{\varphi}(t; t_1, t_2), \dots$, определяемые $\bar{\varphi}(t, t_1) = \langle \hat{\varphi}(t, t_1) \rangle$, являются функциями реакции термостата на заданное возмущение (16).

Более общее предположение для уравнения (24), которое не требует малости характерных времен флуктуаций переменных термостата, связано с малостью флуктуаций функций отклика относительно их средних. Например, малость флуктуаций φ имеет место в случае малой негауссности переменной термостата $Q(t)$.

Представим функции отклика в виде

$$\begin{aligned}\varphi(t, t_1) &= \bar{\varphi}(t, t_1) + \tilde{\varphi}(t, t_1), \\ \varphi(t; t_1, t_2) &= \bar{\varphi}(t; t_1, t_2) + \tilde{\varphi}(t; t_1, t_2),\end{aligned}\quad (25)$$

где средние значения $\bar{\varphi}(t, t_1), \bar{\varphi}(t; t_1, t_2)$ равны нулю. Ввиду малости флуктуаций функции отклика можно заменить в (18) их средними значениями. Пусть действующая на осциллятор классическая сила $f(t)$ такова, что флуктуации

$$\tilde{X}(t) = X^h(t) - \langle X^h(t) \rangle \quad (26)$$

относительно средних значений будут малы по сравнению со средним. В этом случае при усреднении (18) получим уравнение для средних (24).

Аналогично, удерживая в (18) члены первого порядка по флуктуациям \tilde{X} и $\tilde{\varphi}$, получим стохастическое уравнение для флуктуаций \tilde{X} , которое запишем в виде

$$\int dt_1 D^{-1}(t, t_1) \tilde{X}(t_1) = Q(t) + \int dt_1 \tilde{\varphi}(t, t_1) \langle X^h(t_1) \rangle + \quad (27)$$

$$+ \int dt_1 \int dt_2 \tilde{\varphi}(t; t_1, t_2) \langle X^h(t_1) \rangle \langle X^h(t_2) \rangle + \dots = R(t);$$

$$\begin{aligned}D^{-1}(t, t_1) &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \delta(t - t_1) - \bar{\varphi}(t, t_1) - 2 \int dt_2 \bar{\varphi}(t; t_1, t_2) \times \\ &\times \langle X^h(t_2) \rangle - 3 \int dt_2 dt_3 \bar{\varphi}(t; t_1, t_2, t_3) \langle X^h(t_2) \rangle \langle X^h(t_3) \rangle,\end{aligned}\quad (28)$$

где $\langle X^h(t) \rangle$ определяется из уравнения (24) для средних. Левая часть уравнения (27) определяет динамику $\tilde{X}(t)$, а выражение в правой части представляет собой флуктуационную силу со средним значением, равным нулю. Таким образом, в приближении малых флуктуаций в стохастическом уравнении возможно разделение на динамическую часть и флуктуационную силу.

Из полученных уравнений (24), (27) могут быть вычислены как отклики (или восприимчивости) осциллятора на внешнюю силу $f(t)$, так и флуктуации при наличии $f(t)$. Например, линейная и квадратичная восприимчивости осциллятора имеют вид

$$\chi(\omega) = [\omega_0^2 - \omega^2 - \kappa(\omega)]^{-1}; \quad (29)$$

$$\chi(\omega_1, \omega_2) = -\chi(\omega_1 + \omega_2) \kappa(\omega_1, \omega_2) \chi(\omega_1) \chi(\omega_2), \quad (30)$$

где

$$\kappa(\omega) = \int d\tau e^{i\omega(t-t_1)} \bar{\varphi}(t - t_1), \quad (31)$$

$$\chi(\omega_1, \omega_2) = \int d\tau_1 d\tau_2 \exp [i\omega_1(t - t_1) + i\omega_2(t - t_2)] \bar{\varphi}(t - t_1, t - t_2).$$

Здесь мы предполагаем, что термостат находится в состоянии термодинамического равновесия*. Легко видеть, что функция корреляции для $\tilde{X}(t)$ (при известном из (24) среднем значении $\langle X^h(t) \rangle$) определяется функцией корреляции флуктуационной силы $R(t)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} [R(t), R(t_1)]_+ \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{2} [Q(t), Q(t_1)]_+ \right\rangle + \int dt_2 \left\{ \left\langle \frac{1}{2} \times \right. \right. \\ &\quad \times [Q(t), \tilde{\varphi}(t_1, t_2)]_+ \left. \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(t, t_2), Q(t_1)]_+ \right\rangle \right\} \langle X(t_2) \rangle + \\ &+ \int dt_2 dt_3 \left\{ \left\langle \frac{1}{2} [Q(t), \tilde{\varphi}(t_1, t_2, t_3)]_+ \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} [Q(t_1), \tilde{\varphi}(t, t_2, t_3)]_+ \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}(t, t_2), \tilde{\varphi}(t_1, t_3)]_+ \right\rangle \right\} \langle X(t_2) \rangle \langle X(t_3) \rangle. \right. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть термостат находится в состоянии термодинамического равновесия, тогда к функции корреляции (32) может быть применена обобщенная флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ) [8-12]. Роль внешнего возмущения и силы в данном случае будут играть соответственно $\hat{V} = -Q \langle X(t) \rangle$ и $\langle X(t) \rangle$.

Запишем (32) в виде

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} [R(t), R(t_1)]_+ \right\rangle &= \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp [i\omega_1(t - t_1)] \left\{ \Phi(\omega_1) + \right. \\ &+ \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \Phi(\omega_1; \omega_2) \langle X(\omega_2) \rangle e^{-i\omega_2 t} + \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \int \frac{d\omega_3}{2\pi} \Phi(\omega_1; \omega_2, \omega_3) \times \\ &\quad \left. \times \langle X(\omega_2) \rangle \langle X(\omega_3) \rangle \exp [-i(\omega_2 + \omega_3)t] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\langle X(\omega) \rangle = \int dt e^{i\omega t} \langle X^h(t) \rangle.$$

Тогда, согласно ФДТ Каллена — Велтона и квадратичной ФДТ [8], имеем

$$\Phi(\omega_1) = \hbar \chi''(\omega_1) \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega_1}{2T} \right); \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_1; \omega_2) &= -i\hbar \left\{ [\chi(\omega_1, \omega_2) - \chi(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1)] \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega_1}{2T} \right) + \right. \\ &+ [\chi(\omega_0, \omega_2) - \chi^{**}(\omega_0, \omega_1)] \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2T} \right) \left. \right\} \quad (\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0). \end{aligned} \quad (35)$$

* В силу стационарности равновесного состояния функции реакции зависят от фазности времен

$$\bar{\varphi}(t, t_1) = \varphi(t - t_1), \quad \bar{\varphi}(t; t_1, t_2) = \varphi(t - t_1, t - t_2).$$

** Здесь предполагается, что $Q(t)$ не меняет знака при обращении времени.

Квадратичный по $\langle X \rangle$ член в (33) в общем случае не определяется коэффициентами x , а подчиняется флюктуационно-диссипационным соотношениям симметрии [11]. Покажем, что выполнение ФДТ для переменных термостата приводит к соотношениям ФДТ для переменных динамической подсистемы. С этой целью вычислим из стохастического уравнения (27) парную функцию корреляции для \tilde{X} (с точностью до первого порядка по $\langle \tilde{X}(t) \rangle$ включительно).

Используя выражения (33) — (35) и (29) — (31) из (27), получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} [\tilde{X}(t), \tilde{X}(t_1)]_+ \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp[i\omega_1(t-t_1)] \left\{ \hbar \chi''(\omega_1) \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_1}{2T}\right) + \right. \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} e^{-i\omega_2 t} \left[\frac{\hbar}{i} (\chi(\omega_1, \omega_2) - \chi^*(\omega_0, \omega_1)) \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_1}{2T}\right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\hbar}{i} (\chi(\omega_0, \omega_2) - \chi^*(\omega_0, \omega_1)) \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2T}\right) \right] \chi^{-1}(\omega_2) \langle X(\omega_2) \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это выражение после подстановки $\langle X(\omega_2) \rangle = \chi(\omega_2) f(\omega_2)$ переходит в соотношение, полученное из ФДТ Каллена — Вельтона и квадратичной ФДТ, для величины X . Аналогичным образом, можно показать, что из флюктуационно-диссипационных соотношений симметрии (ФДСС) кубической теории [11] для флюктуационных источников $R(t)$ будут следовать ФДСС для величины $\tilde{X}(t)$ динамической подсистемы. Тем самым, показана непротиворечивость стохастического уравнения (27) линейным и нелинейным ФДТ, которые должны выполняться в любой правильной микроскопической и феноменологической теории флюктуаций.

В микроскопической теории полученные стохастические уравнения позволяют вычислять как средние значения, так и любые другие статистические характеристики физических величин.

Задача феноменологической теории флюктуаций состоит в том, чтобы по заданным макроскопическим уравнениям для средних (типа (24)) получить стохастическое уравнение типа (27). При этом функция корреляции для флюктуационных сил выбирается таким образом, чтобы она давала правильный результат для флюктуаций согласно обобщенной ФДТ. Использование, наряду с обобщенной ФДТ, определенных дополнительных предположений позволяет в ряде случаев установить полностью статистические свойства [13, 14].

Авторы выражают признательность Г. Н. Бочкову и В. Б. Цареградскому за полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Senitzky, Phys. Rev., **119**, 670 (1960).
2. H. Mori, Progr. Theor. Phys., **33**, 423 (1965).
3. P. Mazur and I. Oppenheim, Physica, **50**, 241 (1970).
4. A. Michaels and J. Oppenheim, Physica, **81A**, 221 (1975).
5. M. Tokuyama and A. Mori, Progr. Theor. Phys., **55**, 411 (1976).
6. Г. Ф. Ефремов, В. А. Казаков, Изв. вузов — Радиофизика, **22**, № 4, 458 (1979).
7. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, **51**, 156 (1966).
8. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, **55**, 2322 (1968).
9. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, **58**, 1612 (1970).
10. Р. С. Стратонович, Изв. вузов — Радиофизика, **13**, 1512 (1970).
11. Г. Ф. Ефремов, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, 1207 (1972).

12. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, ЖЭТФ, 72, 238 (1977).
13. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия физ., астр., № 5, 16 (1962).
14. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, 1467 (1978).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 июля 1978 г.

DERIVATION OF A NONLINEAR EQUATION WITH FLUCTUATING PARAMETERS
FOR AN OPEN DYNAMIC SUBSYSTEM

G. F. Efremov, V A Kazakov

A nonlinear stochastic equation have been obtained for operators of a dynamic subsystem being in non-equilibrium state and interacting with a macroscopic system (thermostat). The equation obtained (generalizing the well known Langevin equations) contains fluctuating parameters and nonlinear members due to the thermostat action. The stochastic equation for a quantum harmonic oscillator is considered as an example.

УДК 538.56 : 519.25

К СТАТИСТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

O. B. Музычук

Рассматривается построение высших приближений и точного решения для статистических средних выходной координаты линейной системы с не дельта-коррелированным параметрическим воздействием, представляющим собой непрерывный марковский процесс. Исследуются два случая: гауссов экспоненциально-коррелированный процесс и квадрат гауссова процесса.

Использован метод построения приближенных решений, основанный на пренебрежении статистической зависимостью «высших порядков» между флуктуациями параметра и выходной координатой системы. Установлено, что для рассматриваемых моделей параметрических воздействий точное решение представимо цепной дробью. На некоторых примерах показана быстрая сходимость предложенной процедуры к точным результатам.

1. Необходимость статистического анализа динамических систем с сильными и не дельта-коррелированными параметрическими воздействиями возникает при решении широкого круга радиофизических и радиотехнических задач. Особый интерес вызывает получение точных решений для статистических характеристик выходной координаты системы с флюктуирующими параметрами. В настоящее время известна возможность нахождения некоторых точных решений для динамических систем с дискретными марковскими параметрическими воздействиями и, прежде всего, в случае «телефрафных» флюктуаций [¹⁻³]. Однако такие модели случайных сил часто являются весьма искусственными, в то время как традиционная гауссова модель флюктуаций обычно более физически адекватна. В работе [⁴] показано, что в случае гауссовых марковских флюктуаций параметров точное решение для среднего значения выходной координаты стохастической линейной системы представимо цепной дробью.

Далее в [⁵] установлено, что предложенный в [⁶] функциональный метод построения высших приближений для статистических средних (использованный и развитый в [^{4, 5}]) соответствует кумулянтным ограничениям по статистическим связям между параметрическим воздействием и выходной координатой. В настоящей статье для статистического описания систем с небельыми параметрическими воздействиями использован аппарат кумулянтного анализа [^{7, 8}]. Здесь решается несколько более общая, чем в [^{4, 5}], задача: находится точное решение для статистических средних выходной координаты при наличии аддитивной внешней силы, коррелированной с параметрическими воздействиями. Рассмотрен также случай негауссовых флюктуаций определенного вида; на некоторых примерах исследована сходимость использованной процедуры к точному решению. Анализ подобных систем представляет интерес в ряде задач теории автоматического регулирования при статистическом описании систем автокомпенсации помех [^{9, 10}].

2. Рассмотрим нахождение среднего значения выходной координаты $\langle y(t) \rangle$ стохастической линейной системы, заданной дифференциальным уравнением

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) + \alpha_k(t) y^{(k)}(t) = x(t) \quad (1)$$

с флюктуирующими параметром $\alpha_k(t)$ (обобщение приведенной ниже методики на случай нескольких взаимно коррелированных параметрических воздействий не вызывает затруднений). Здесь $L \left(\frac{d}{dt} \right)$ — линейный оператор порядка N , явно не зависящий от времени, например,

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^N}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}.$$

Пусть флюктуации $\alpha_k(t)$ являются стационарным гауссовым марковским процессом с

$$\langle \alpha_k \rangle = 0, \quad \langle \alpha_k(t) \alpha_k(t - \tau) \rangle = \langle \alpha_k^2 \rangle e^{-\Pi |\tau|},$$

где Π — ширина спектра мощности. Такой процесс удобно задать вспомогательным стохастическим уравнением

$$\dot{\alpha}_k + \Pi \alpha_k = \eta(t), \quad (2)$$

где $\eta(t)$ — гауссов белый шум,

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta(t) \eta(t - \tau) \rangle = D_\eta \delta(\tau), \quad D_\eta = 2\Pi \langle \alpha_k^2 \rangle.$$

Из (2) следует, что

$$\alpha_k(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\Pi(t-\tau)} \eta(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем для стационарности $\alpha_k(t)$ нижний предел интегрирования полагаем равным $-\infty$.

При статистическом усреднении в уравнение (1) войдет совместный момент $\langle \alpha_k y^{(k)} \rangle$, совпадающий с совместным кумулянтом $\langle \alpha_k, y^{(k)} \rangle$ (поскольку $\langle \alpha_k \rangle = 0$). Получим для последнего уравнение эволюции. Для этой цели и ниже будем использовать известное коммутационное соотношение

$$M \left(\frac{d}{dt} + v \right) f(t) e^{-\Pi t} = e^{-\Pi t} M \left(\frac{d}{dt} + v - \Pi \right) f(t), \quad (4)$$

где $M \left(\frac{d}{dt} \right)$ — произвольный линейный оператор, $f(t)$ — дифференцируемая функция. На основании (1) — (4) нетрудно получить

$$\begin{aligned} L \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) \langle \alpha_k y \rangle &= L \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) \int^t e^{-\Pi(t-\tau)} \langle \eta(\tau) y(t) \rangle d\tau = \\ &= \int^t e^{-\Pi(t-\tau)} \left\langle \eta(\tau) L \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) \right\rangle d\tau = \left\langle \alpha_k(t) L \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) \right\rangle = \\ &= \langle \alpha_k(t) x(t) \rangle - \langle \alpha_k^2(t) y^{(k)}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Последний совместный момент представим в виде*

$$\langle \alpha_k^2 y^{(k)} \rangle = \langle \alpha_k^2 \rangle \langle y^{(k)} \rangle + \langle \alpha_k^{[2]}, y^{(k)} \rangle. \quad (6)$$

Используя (3), (4) и линейность кумулянтных скобок [8], можно установить справедливость соотношения

$$M \left(\frac{d}{dt} + s \Pi \right) \langle \alpha_k^{[s]}(t), y(t) \rangle = \left\langle \alpha_k^{[s]}(t), M \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) \right\rangle \quad (7)$$

$$(s = 1, 2, \dots)$$

для любого дифференциального оператора M , не зависящего явно от времени. Заметим, что формула (7) справедлива только для кумулянтов, а не для совместных моментов $\langle \alpha_k^s y \rangle$. Дело в том, что только в случае кумулянтов оператор $\left(\frac{d}{dt} \right)^l$ «не действует» на верхний предел интеграла (3), поскольку получающиеся при этом кумулянтные скобки вида $\langle \eta(\tau_1), \dots, \eta(\tau_{s-l}), \eta^{[l]}(t), y(t) \rangle$, $l = \overline{1, N}$ (N — порядок оператора $M \left(\frac{d}{dt} \right)$) равны нулю в силу статистической независимости процессов $\eta(t)$ и $y(t)$ в совпадающие моменты времени. На основании (5) — (7) придем к следующим зацепляющимся уравнениям:

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) \langle y \rangle + \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right)^k \langle \alpha_k, y \rangle = \langle x \rangle, \quad (8)$$

$$\langle \alpha_k^2 \rangle \langle y^{(k)} \rangle + L \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) \langle \alpha_k, y \rangle + \left(\frac{d}{dt} + 2\Pi \right)^k \langle \alpha_k^{[2]}, y \rangle = \langle \alpha_k, x \rangle.$$

Аналогичным образом можно получить уравнение эволюции совместного кумулянта параметрического воздействия и выходной координаты произвольного порядка. Для этого используем следующее кумулянтное разложение [8], являющееся обобщением формулы (6):

$$\langle \alpha^{[s]}, \alpha z \rangle = s \langle \alpha^2 \rangle \langle \alpha^{[s-1]}, z \rangle + \langle \alpha^{[s+1]}, z \rangle \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где $\alpha(t)$ — гауссов процесс, $z(t)$ — процесс, статистически связанный с $\alpha(t)$, обладающий произвольным вероятностным распределением. Введя обозначения

$$w_s = \langle \alpha_k^{[s]}, y \rangle, \quad r_s = \langle \alpha_k^{[s]}, x \rangle \quad (s = 0, 1, \dots)$$

(индекс k опустим для краткости) и используя полученные выше соотношения, приходим к следующей системе зацепляющихся уравнений**:

* Знак и ниже пользуемся обозначениями, введенными в монографии [8].

$$\langle \alpha^{[s]}, y \rangle \equiv \underbrace{\langle \alpha, \dots, \alpha, y \rangle}_{s \rightarrow}$$

— кумулянтная скобка порядка $s + 1$. Основным свойством кумулянтных скобок (совместных кумулянтов) является обращение их в нуль в случае статистической независимости хотя бы одной переменной со всеми остальными. Более подробно о свойствах кумулянтных скобок и связи их с моментными см в [8], § 21.

** Аналогичная система уравнений для случая статистически независимых процессов $\alpha_k(t)$ и $x(t)$ получена в [8] функциональным методом. Там же показано, что она адекватна системе интегродифференциальных уравнений для $\langle y(t) \rangle$ и средних значений вариационных производных выходной координаты $y(t)$ по $\alpha_k(t)$, [4–6].

$$\begin{aligned} s \langle \alpha_k^2 \rangle \left[\frac{d}{dt} + (s-1) \Pi \right]^k w_{s-1}(t) + L \left(\frac{d}{dt} + s\Pi \right) w_s(t) + \\ + \left[\frac{d}{dt} + (s+1) \Pi \right]^k w_{s+1}(t) = r_s(t) \quad (s=0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что в силу статистической независимости параметрического воздействия и выходной координаты системы в начальный момент времени $t=0$ переменные $w_s(t)$ обладают нулевыми начальными условиями $w_s^{(l)}(0) = 0$, $s=1, 2, \dots, l=0, N-1$. Искомое же среднее $\langle y(t) \rangle = w_0(t)$ может иметь произвольные начальные условия. Пусть флуктуации $\alpha_k(t)$ и внешняя сила $x(t)$ связаны лишь корреляционной («гауссовой») статистической зависимостью, т. е.

$$r_s(t) = \begin{cases} \langle x(t) \rangle & (s=0) \\ \langle \alpha_k(t) x(t) \rangle = r(t) & (s=1) \\ 0 & (s=2, 3, \dots) \end{cases}. \quad (11)$$

В этом случае, довольно часто встречающемся в различных приложениях, точное решение для преобразования Лапласа $\bar{Y}(p) \doteq \langle y(t) \rangle$ оказывается представимо цепной дробью, как и в случае статистически независимой внешней силы.

Переходя в (10) к преобразованиям Лапласа, с учетом (11) получим

$$s \langle \alpha_k^2 \rangle p_{s-1}^k W_{s-1}(p) + L(p_s) W_s(p) + p_{s+1}^k W_{s+1}(p) = \begin{cases} X(p) & (s=0) \\ R(p) & (s=1) \\ 0 & (s=2, 3, \dots) \end{cases}, \quad (12)$$

где

$$W_s(p) \doteq w_s(t), \quad R(p) \doteq r(t), \quad p_s = p + s\Pi,$$

а в выражение для $X(p)$ входят, помимо преобразования Лапласа функции $\langle x(t) \rangle$, также отличные от нуля начальные условия для $y(t)$. Разрешая систему (12) относительно $\bar{Y}(p) = W_0(p)$, можно прийти к выражению

$$\bar{Y}(p) = \rho p^{-k} + \frac{X(p) - \rho p^{-k} L(p)}{L(p) - \Lambda(p)}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(p) = \frac{u_1}{L_1 - \frac{u_2}{L_2 - \frac{u_3}{L_3 - \dots}}}, \\ u_s(p) = s \langle \alpha_k^2 \rangle (p_{s-1} p_s)^k, \quad \rho(p) = \langle \alpha_k^2 \rangle^{-1} R(p). \end{aligned} \quad (14)$$

В отсутствие корреляции между x и $\alpha_k(\rho=0)$ из формул (13), (14) следует результат, полученный в [4, 5] (см. также [12]). Ограничение в выражении (14) подходящей дробью порядка n соответствует пренебрежению статистической связью между параметрическим воздействием и выходным сигналом, описываемой совместными кумулянтами высших порядков $\langle \alpha^{[n+l]}, y \rangle$, $l=1, 2, \dots$. Как отмечалось в [5] (см. также пример ниже), к более точным результатам приводит не простое отбрасывание кумулянта $\langle \alpha^{[n+l]}, y \rangle$, а нахождение последнего из замкнуто-

го уравнения диффузионного приближения. Это соответствует n -му диффузионному приближению для искомого решения $\langle y(t) \rangle$ в терминологии [5].

3. Рассмотрим теперь одну негауссову модель параметрического воздействия, для которой удается аналогичным образом построить точное решение для среднего значения выходной координаты. Пусть $\alpha_k(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов марковский процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\dot{\xi} + \frac{\Pi}{2} \xi = \eta(t), \quad (2a)$$

подобному (2) (ширина спектра мощности процесса $\xi(t)$ выбрана равной $\Pi/2$, чтобы ширина спектра флуктуаций параметра $\alpha_k(t)$ по-прежнему равнялась Π). Теперь, очевидно,

$$\alpha_k(t) = \int \int \exp \left[-\frac{1}{2} \Pi (2t - \tau_1 - \tau_2) \right] \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (15)$$

Построение системы зацепляющихся уравнений, из которой определяется $\langle y(t) \rangle$, производится по рассмотренной выше методике. При получении уравнения эволюции совместного кумулянта $\langle \xi^{[2s]} \rangle$, у нас потребуется кумулянтное разложение смешанного статистического среднего $\langle \xi^{[2s]}, \xi^2 y \rangle$. Используя формулу [8], стр. 40,

$$\langle z^{[l]}, uv \rangle = \langle z^{[l]}, u, v \rangle + \sum_{m=0}^l c_l^m \langle z^{[l-m]}, u \rangle \langle z^{[m]}, v \rangle,$$

где случайные переменные z, u, v могут иметь произвольное вероятностное распределение, и учитывая гауссовость процесса $\xi(t)$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \langle \xi^{[2s]}, \xi^2 y \rangle &= \langle \xi^{[2s+2]}, y \rangle + (4s+1) \langle \xi^2 \rangle \langle \xi^{[2s]}, y \rangle + \\ &+ 2s(2s-1) \langle \xi^2 \rangle^2 \langle \xi^{[2s-2]}, y \rangle \quad (s = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначив теперь $w_{2s} = \langle \xi^{[2s]}, y \rangle$, $r_{2s} = \langle \xi^{[2s]}, x \rangle$, на основании (15), (16) приходим к цепочке уравнений, подобной (10),

$$\begin{aligned} 2s(2s-1) \langle \xi^2 \rangle^2 \left[\frac{d}{dt} + (s-1)\Pi \right]^k w_{2s-2}(t) + \left[L \left(\frac{d}{dt} + s\Pi \right) + \right. \\ \left. + (4s+1) \langle \xi^2 \rangle \right] w_{2s}(t) + \left[\frac{d}{dt} + (s+1)\Pi \right]^k w_{2s+2}(t) = r_{2s}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где искомое среднее значение $\langle y(t) \rangle$ по-прежнему соответствует номеру $s = 0$. В случае, когда только первые два уравнения системы (17) являются неоднородными, т. е. при $r_{2l} = 0$, $l = 2, 3, \dots$, ее решение можно представить в виде (13), (14), где теперь

$$L_s = L(p_s) + (4s+1) \langle \xi^2 \rangle, \quad u_s = 2s(2s-1) \langle \xi^2 \rangle^2 (p_{s-1} p_s)^k. \quad (18)$$

Заметим, что, если $\langle \alpha_k \rangle = 0$, т. е. при задании параметрического воздействия формулой $\alpha_k(t) = \xi^2(t) = \langle \xi^2 \rangle$, в выражениях (17), (18) следует положить равной нулю дисперсию $\langle \xi^2 \rangle$, входящую в первой степени.

Использованная методика построения зацепляющихся систем уравнений для определения среднего значения выходной координаты при-

менима, в принципе, и в случае более общей модели негауссовых флуктуаций параметра $\alpha_k(t) = \xi^m(t)$, $m = 3, 4, \dots$, однако в этом случае точное решение уже не имеет вид цепной дроби. Дело в том, что кумулянтные разложения возникающих при этом статистических средних вида $\langle \xi^{[ms]}, \xi^m y \rangle$ выглядят более сложным образом, чем (9), (16): в уравнение для s -й переменной кроме $(s-1)$ -й и $(s+1)$ -й войдут и другие с номерами $l < s-1$. Такая же ситуация имеет место в самом общем случае негауссовых марковских параметрических воздействий. Следует отметить, что довольно похожим образом может быть осуществлено статистическое описание линейной системы с флуктуирующими параметрами, являющимися марковскими процессами с конечным числом состояний. В этом случае к зацепляющимся уравнениям, подобным (10), можно прийти с помощью «формул дифференцирования» смешанных статистических средних [11, 12]*, задавая процесс $\alpha_k(t)$ его кинетическим оператором. В случае телеграфного процесса с пуассоновской статистикой перескоков соответствующая система состоит всего из двух уравнений и легко решается.

4. Исследуем сходимость полученных цепных дробей на некоторых конкретных примерах (см. также [4, 5]). Обратимся сначала к простому стохастическому уравнению 1-го порядка:

$$\dot{y} + hy + \alpha(t)y = x(t). \quad (19)$$

Пусть внешняя сила представляет собой гауссов шум с

$$\langle x \rangle = 0, \quad \langle x(t) x(t-\tau) \rangle = D_x \delta(\tau),$$

статистически независимый с $\alpha(t)$, а $\alpha(t)$ — гауссов марковский процесс, описываемый уравнением (2). Найдем среднюю энергию броуновского движения систем $\langle y^2(t) \rangle$. Для стационарного значения $\langle y^2 \rangle \equiv \langle y^2(\infty) \rangle$ непосредственным усреднением решения уравнения (19) нетрудно получить следующее точное выражение:

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \langle y^2 \rangle_0 \int_0^\infty \exp \{ (\mu - 1)\tau - 2\gamma\mu(1 - e^{-\gamma/2\tau}) \} d\tau = \\ &= \langle y^2 \rangle_0 (1 - \mu)^{-1} {}_1F_1(1, 1 + 2\gamma - 2\gamma\mu; -2\gamma\mu) \quad (\mu < 1), \end{aligned} \quad (20)$$

где безразмерные параметры

$$\langle y^2 \rangle_0 = D_x(2h)^{-1}, \quad \mu = 2 \langle \alpha^2 \rangle (h\Pi)^{-1}, \quad \gamma = h\Pi^{-1}$$

имеют соответственно смысл энергии невозмущенного броуновского движения системы, мощности и относительного времени корреляции параметрического воздействия; ${}_1F_1(u, v; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, определяемая рядом

$${}_1F_1(u, v; z) = 1 + \frac{u}{v}z + \frac{u(u+1)}{v(v+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (21)$$

Система алгебраических уравнений для отыскания стационарного значения энергии, соответствующая (10), здесь имеет вид

* Необходимо отметить, что в работе [11] допущен ряд существенных неточностей. Так, ошибочен вывод о том, что решение зацепляющейся системы уравнений для совместных моментов $\langle \alpha^n y \rangle$ представимо цепной дробью, некорректно разложение $\langle \alpha^n y \rangle \approx \langle \alpha^n \rangle \langle y \rangle$, используемое для замыкания подобных систем.

$$\langle y^2 \rangle + w_1 = \langle y^2 \rangle_0, \quad (22)$$

$$\frac{s}{2} \mu w_{s-1} + \left(\frac{s}{2} + \gamma \right) w_s + \gamma w_{s+1} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots),$$

а вспомогательные переменные представляют собой

$$w_s = h^{-s} \langle \alpha^{[s]}(t), y^2(t) \rangle |_{t \rightarrow \infty} \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Разрешая (22) относительно $\langle y^2 \rangle$, имеем

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\langle y^2 \rangle_0}{1 - \Lambda}, \quad \Lambda = \frac{\mu}{L_1 - \frac{\mu}{L_2 - \frac{\mu}{L_3 - \dots}}}, \quad (23)$$

где

$$L_s = s + 2\gamma, \quad u_s = 2s\gamma\mu, \quad s = 1, 2, \dots$$

На рис. 1 показано сравнение точного решения (20) (кривая 1) с приближенными, полученными ограничением в (23) конечными подходящими дробями (кривые 2, 3), и с результатами высших диффузационных приближений (кривые 1a—3a). Здесь n -е диффузационное приближение [4, 5] получается предельным переходом $\gamma \rightarrow 0$ в $(n+1)$ -м уравнении системы (22). Отсюда видно, что

для рассматриваемого примера сходимость высших диффузационных приближений к точному результату в области, близкой к границе среднеквадратичной устойчивости $\mu = 1$, существенно лучшая, чем «кумулянтных» приближений. Это связано с тем, что в данном случае результат n -го диффузационного приближения при любом значении n позволяет правильно определить границу устойчивости системы. Результат n -го диффузационного приближения отличается от n -го приближения (получаемого при ограничении подходящей дробью n -го порядка) лишь последним этажом соответствующей (23) подходящей дроби: величину L_n следует заменить на $\bar{L}_n = n + 2\gamma(1 - \mu)$. Однако после такой замены, как легко убедиться, подходящая дробь любого порядка обращается в единицу при значении $\mu = 1$. Отметим также, что при ограничении в разложении

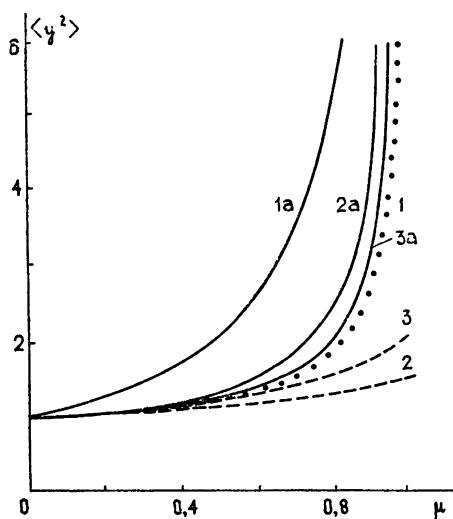


Рис. 1. Зависимость средней энергии броуновского движения системы (19) от эффективной мощности параметрического воздействия:

кружки — точное решение, 2, 3 — соответственно результаты 2-го и 3-го приближений, 1a — 3a — соответствующих диффузационных приближений ($\gamma = 1$).

ния точного решения (20), (21) членами первого порядка по параметру $\gamma\mu$ придем к выражению 2-го диффузационного приближения*:

* Положив в формуле (23a) $\gamma = 0$, получим результат первого диффузационного (марковского) приближения $\langle y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle_0 (1 - \mu)^{-1}$; опустив член $2\gamma\mu$, придем к результату приближения Бурре или, в нашей терминологии, 2-го приближения.

$$\langle y^2 \rangle \approx \langle y^2 \rangle_0 [1 - \mu(1 + 2\gamma - 2\gamma\mu)^{-1}]^{-1}. \quad (23a)$$

5. В качестве другого примера рассмотрим стохастическое уравнение

$$\dot{y} + hy + \xi^2(t)y = a\xi^2(t), \quad (24)$$

описывающее, при определенных условиях, релаксацию управляющих напряжений в системе автокомпенсации помех с корреляционной обратной связью [9, 10]. Здесь $\xi(t)$ — гауссов шум (помеха), описываемый уравнением (2a). Используя результаты п. 3, для стационарного значения $\langle y \rangle \equiv \langle y(\infty) \rangle$ можно получить выражение

$$\langle y \rangle = a \left(1 - \frac{1}{1 + \beta - \Lambda} \right), \quad (25)$$

где Λ — цепная дробь вида (14) с коэффициентами

$$L_s = 1 + 2s\gamma^{-1} + (4s + 1)\beta, \quad u_s = 2s(2s - 1)\beta^2. \quad (26)$$

Здесь введены безразмерные параметры $\beta = \langle \xi^2 \rangle h^{-1}$, $\gamma = 2h\Pi^{-1}$, представляющие собой действующую мощность и относительное время корреляции шума $\xi(t)$. Легко видеть, что при $\gamma \rightarrow 0$ ($\beta = \text{const}$) мы приходим к результату 1-го приближения [10]

$$\langle y \rangle \approx a\beta(1 + \beta)^{-1},$$

соответствующего «прямому» размыканию смешанного момента $\langle \xi^2 y \rangle \approx \langle \xi^2 \rangle \langle y \rangle$ в усредненном уравнении (24). Статистическая зависимость между $\xi(t)$ и $y(t)$, которая имеет место при $\gamma \neq 0$, здесь полностью игнорируется. Ограничившись первым этажом в выражении для Λ , полагая

$$\Lambda \approx 2\beta^2\gamma(2 + \gamma + 5\gamma\beta)^{-1},$$

получим результат второго приближения, в котором учтена статистическая связь между процессами $\xi(t)$ и $y(t)$, описываемая совместным кумулянтом $\langle \xi, \xi, y \rangle$. Достаточное условие применимости результата второго приближения, как показывает сравнение с высшими приближениями и точным решением, имеет вид $\gamma\beta \ll 1$. Учет следующих этажей дроби Λ соответствует последовательному учету влияния высших кумулянтов $\langle \xi^{2s} y \rangle$, $s = 2, 3, \dots$ на статистическое среднее $\langle y \rangle$.

Заметим, что для среднего значения решения уравнения (24) можно получить точное выражение, найдя производящую функцию моментов квадратичного функционала $I[\xi] = \int \xi^2(\tau) d\tau$ (подобная задача рассматривалась в литературе, см. [13] и библиографию в [13]). При определенных значениях параметров γ , β удается выразить $\langle y \rangle$ через специальные функции. В частности, при $\gamma = 1/2$ стационарное значение имеет вид [13]

$$\langle y \rangle = a \left[1 - \frac{1}{V\beta l} F \left(\arcsin \sqrt{\frac{l-1}{l}}; -\frac{1}{V^2} \right) \right], \quad (27)$$

где $l = V\sqrt{1+2\beta}$, $F(u; v)$ — неполный эллиптический интеграл 1-го рода. На рис. 2 показано сравнение приближенных решений, полученных на основании (25), (26), с точным результатом (27). Здесь кривая 1 — результат 1-го приближения, 2, 3 — кривые второго и третьего приближений, получаемые ограничением в Λ подходящими дробями соответствующих порядков, кружочками показано точное решение (27).

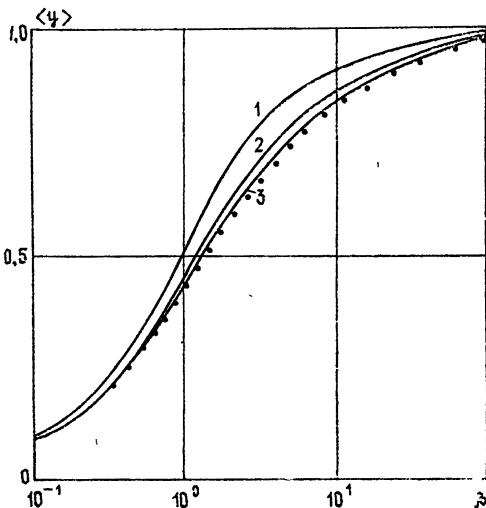


Рис. 2. Зависимость $\langle u \rangle$ от мощности помехи β при значении $\gamma = 1/2$. Номера кривых соответствуют номерам приближений; кружки — точное решение.

Отсюда видна хорошая сходимость приближенных результатов к точному решению при любых значениях мощности шума β .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Bouiguet, U. Frish, A. Pouquet, Physica, 65, 303 (1973).
2. A. Brissaud, U. Frish, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
3. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 562 (1977).
4. О. В. Музычук, Теоретическая и математическая физика, 28, № 3, 371 (1976).
5. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 9, 1279 (1978).
6. В. И. Кляцкин, В.-И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 9, 707 (1971).
7. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
8. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978.
9. Б. Уидроу и др., ТИИЭР, 63, № 12, 69 (1975).
10. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, 23, № 7, 1401 (1978).
11. В. М. Логинов, В. Е. Шапиро, Препринт ИФСО-55 Ф, Красноярск, 1977.
12. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 6, 716 (1979).
13. А. А. Мальцев, А. И. Саичев, Радиотехника и электроника, 23, № 12, 2543 (1978).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 сентября 1978 г.

TO THE STATISTIC DESCRIPTION OF LINEAR SYSTEMS WITH NON-DELTA CORRELATED FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

O. V. Muzuchuk

The construction of highest approximations and an accurate solution are considered for a statistical average output coordinate of the linear system with non-delta correlated parametric action which is a continuous Markov process. Two cases are investigated: Gaussian exponentially correlated process and the squared Gaussian process. A method of construction of approximate solutions is used based on the neglect of the statistical dependence of «highest orders» between fluctuations of a parameter and the output coordinate of the system. It is stated that for considered models of parametric interactions the accurate solution may be presented by a continued fraction. A rapid convergence of the procedure to the exact results is shown by some examples.

УДК 621.372.09

О КОМПЕНСАЦИИ ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ В РЕШЕТКЕ ИЗ ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДОВ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

A. M. Полуботко, B. A. Степанов

Для решетки плоских волноводов с неоднородностями получены условия на матрицу коэффициентов трансформации волноводных волн, при выполнении которых происходит полная компенсация поля расходящихся пространственных гармоник. Показано, что полная компенсация может быть достигнута в определенном интервале углов падения плоской волны и может осуществляться с помощью «различных наборов» коэффициентов трансформации.

При падении плоской волны на решетку из плоских волноводов кроме поля, прошедшего внутрь системы, существует поле, отраженное от переднего края структуры. В свою очередь, это поле можно разделить на поле, расходящееся от структуры, и поле поверхностных волн, локализованное вблизи поверхности.

В системе с пассивными неоднородностями, введенными в волноводы, расходящееся от структуры поле может быть скомпенсировано полем, отраженным от неоднородностей и прошедшим обратно в свободное пространство.

Настоящая работа посвящена изучению возможности такой компенсации и получению соотношений, которым должна удовлетворять матрица коэффициентов трансформации волноводных мод на неоднородностях, при условии полной компенсации гармоник, расходящихся от структуры.

Решение задачи получено для случая падения E -поляризованной волны, однако результаты могут быть распространены и для случая H -поляризованной волны.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем рассматривать дифракцию плоской, наклонно падающей волны на решетке из плоских волноводов с неоднородностями, когда вектор E направлен параллельно ребрам структуры (рис. 1). Будем считать, что неоднородности расположены «достаточно глубоко» в волноводах, когда можно пренебречь рассеянием нераспространяющихся волноводных мод на неоднородности и на границе структуры. В этом приближении неоднородность может быть охарактеризована матрицей коэффициентов трансформации порядка N , пересчитанной к уровню $z = 0$, где N — число распространяющихся волноводных мод:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N1} & R_{N2} & \dots & R_{NN} \end{pmatrix}.$$

Поле в верхнем полупространстве, в выбранной системе координат представимо в виде суммы пространственных гармоник типа Флоке:

$$E^{(I)} = \exp(i\vec{k}_0 \sin \theta_0 y - i\vec{k}_0 \cos \theta_0 z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i\alpha_n y) \exp(i\Gamma_n z),$$

а поле в волноводах вблизи границы структуры —

$$\begin{aligned} E^{(II)} = & \sum_{n=1}^{\infty} b_n^m \sin \left[\frac{\pi n}{l} (y - ml) \right] \exp(-i\gamma_n z) + \\ & + \sum_{n=1}^N \tilde{D}_n^m \sin \left[\frac{\pi n}{l} (y - ml) \right] \exp(i\gamma_n z), \end{aligned}$$

где a_n и b_n^m — амплитуды разложения поля по пространственным гармоникам и волноводным волнам.

Величина

$$\tilde{D}_n^m = R_{n1} b_1^m + R_{n2} b_2^m + \dots + R_{nN} b_N^m$$

есть амплитуда n -й отраженной моды в волноводах

$$\alpha_n = \frac{2\pi n + k_0 \sin \theta_0 l}{l}, \quad \Gamma_n = \sqrt{k_0^2 - \alpha_n^2}.$$

Индекс m в коэффициентах разложения по волноводным волнам означает номер волновода.

Как известно (1), величины b_n^{m+1} и b_n^m связаны соотношением

$$b_n^{m+1} = b_n^m \exp(i\vec{k}_0 \sin \theta_0 l).$$

Поэтому, в дальнейшем мы будем опускать значок m , имея в виду волновод с индексом $m=0$.

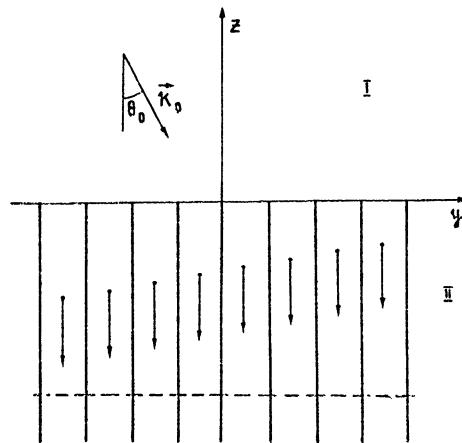


Рис. 1.

Производя процедуру сшивания тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе, получим бесконечную систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Gamma_m - \gamma_n} + \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\Gamma_m + \gamma_n} = 2i\Gamma_0 \delta_{0m}, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Gamma_m + \gamma_n} + \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{\Gamma_m - \gamma_n} = 2l \Gamma_m a_m,$$

где введены обозначения

$$B_n = \frac{\pi n}{l} [1 - (-1)^n \exp(-ik_0 \sin \theta_0 l)] b_n,$$

$$D_n = \frac{\pi n}{l} [1 - (-1)^n \exp(-ik_0 \sin \theta_0 l)] \tilde{D}_n,$$

δ_{0m} — символ Кронекера.

В случаях, когда

$$k_0 \sin \theta_0 l = \pi q \sin \theta_0 = \pi k,$$

где $q = 2l/\lambda$, система (1) меняет свой вид, поэтому будем решать в предположении, что

$$q \sin \theta_0 \neq k.$$

Для ее решения воспользуемся методом вычетов (1).

Отличием системы (1), по сравнению с решением задачи дифракции на решетке без неоднородностей (1), является наличие дополнительных членов, связанных с отраженными волнами, которые обусловливают появление дополнительных полюсов у функции $f(w)$ в точках

$$w = -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3, \dots, -\gamma_N,$$

а также появление дополнительных условий

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[1 - (-1)^n \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]n} \operatorname{Res} f(w) \Big|_{w=-\gamma_n} = \\ & = \sum_{m=1}^N \frac{R_{nm}}{[1 - (-1)^m \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]m} \operatorname{Res} f(w) \Big|_{w=\gamma_m}, \end{aligned} \quad (2)$$

являющихся условиями связи падающих и трансформированных на неоднородностях волн. Функцию $f(w)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(w) &= \exp \left[-\frac{i(w - \Gamma_0)l}{\pi} \ln 2 \right] 2\Gamma_0 l \frac{P(w)}{\prod_{n=1}^N \left(\frac{\gamma_n + w}{\gamma_n + \Gamma_0} \right)} \times \\ &\times \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_n - w}{\Gamma_n - \Gamma_0} \right) \left(\frac{\Gamma_{-n} - w}{\Gamma_{-n} - \Gamma_0} \right) \exp \left[-\frac{i(w - \Gamma_0)l}{n\pi} \right]}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n - w}{\gamma_n - \Gamma_0} \right) \exp \left[-\frac{i(w - \Gamma_0)l}{n\pi} \right]}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P(w)$ — полином, нормированный на 1 в точке $w = \Gamma_0$, степень которого N определяется необходимостью удовлетворить условию на бесконечности. При этом коэффициенты разложения полей по пространственным гармоникам и волноводным волнам определяются как

$$a_n = \frac{1}{2\Gamma_n l} f(-\Gamma_n); \quad (4)$$

$$b_n = \frac{l}{\pi n} \frac{1}{[1 - (-1)^n \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]} \operatorname{Res} f(w) \Big|_{w=\gamma_n}. \quad (5)$$

2. УСЛОВИЕ ПОЛНОЙ КОМПЕНСАЦИИ

В общем случае, при заданной матрице коэффициентов трансформации, условие (2) может быть использовано для определения нулей или коэффициентов полинома. Причем при изменении матрицы коэффициентов трансформации в пределах, определяющих неравенством

$$\sum_{n=1}^N |R_{nm}|^2 \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq 1, \quad (6)$$

левая часть которого есть отношение суммарного потока энергии волн всех типов, трансформированных из типа m , к потоку падающей волны, определяющее условие «пассивности» неоднородностей, нули полинома $P(w)$ будут иметь некоторую область дозволенных значений.

При условии полной компенсации, нули полинома $P(w)$ однозначно определяются из формулы (4) при условии

$$a_n \equiv 0 \quad (7)$$

для расходящихся гармоник.

Считая, что нули $P(w)$, определенные из (7), входят в область дозволенных значений и, обозначая число гармоник с постоянной распространения Γ_m через m_1 и, соответственно, с Γ_{-m} через m_2 , из условия поведения $f(w)$ на бесконечности (1), получим, что полная компенсация возможна лишь в случае выполнения условия

$$m_1 + m_2 + 1 = N. \quad (8)$$

При этом явное выражение для $P(w)$ будет

$$P(w) = \left(\frac{w + \Gamma_0}{2\Gamma_0} \right) \prod_{n=1}^{m_1} \left(\frac{\Gamma_n + w}{\Gamma_n + \Gamma_0} \right) \prod_{n=1}^{m_2} \left(\frac{\Gamma_{-n} + w}{\Gamma_{-n} + \Gamma_0} \right). \quad (9)$$

Условие (8) фактически представляет собой требование равенства числа распространяющихся волноводных волн числу расходящихся пространственных гармоник и означает, что для создания необходимого компенсирующего поля требуется число степеней свободы, равное числу расходящихся гармоник поля.

Найдем область изменения q и θ_0 , в которой условие (8) выполняется. Величины m_1 , m_2 и N являются целыми частями от следующих выражений:

$$m_1 = \left[q \frac{(1 - \sin \theta_0)}{2} \right],$$

$$m_2 = \left[q \frac{(1 + \sin \theta_0)}{2} \right],$$

$$N = [q].$$

Обозначая точки, в которых m_1 и m_2 изменяются на единицу, θ_0^m и $\theta_0^{m_2}$, получим

$$\theta_{0m_1}^m = \arcsin \left\{ \frac{\frac{q}{2} - \left[\frac{q}{2} \right] + m}{\frac{q}{2}} \right\},$$

$$\theta_{0m_2}^m = \arcsin \left\{ \frac{\left[\frac{q}{2} \right] - \frac{q}{2} + 1 + m}{\frac{q}{2}} \right\},$$

где индекс m меняется от 0 до $[q/2] - 1$ в выражении для $\theta_{0m_1}^m$ и от 0 до $[q] - [q/2] - 1$ в выражении для $\theta_{0m_2}^m$. При изменении угла θ_0 в пределах от 0 до $\pi/2$ эти точки соответствуют переходу одной из гармоник с постоянной распространения Γ_{m_1} в поверхностную и, соответственно, с Γ_{-m_2} — в расходящуюся.

При этом в случае

$$\frac{q}{2} - \left[\frac{q}{2} \right] < 0,5,$$

соответствующем четному значению N , компенсация может быть достигнута в интервале изменения θ_0 :

$$\theta_{0m_1}^m < \theta_0 < \theta_{0m_2}^m, \quad (10)$$

а в случае

$$\frac{q}{2} - \left[\frac{q}{2} \right] > 0,5,$$

соответствующем нечетному N , компенсация достигается в интервале

$$\theta_{0m_2}^m < \theta_0 < \theta_{0m_1}^m. \quad (11)$$

Следует отметить, что в случае H -поляризации в системе волноводов, кроме волноводных волн с постоянными распространения γ_n ($n = 1, 2, \dots$), может существовать еще одна волна с $\gamma_0 = k_0$.

Это обстоятельство снимает полученное выше ограничение на углы падения и позволяет в принципе компенсировать дифрагированное поле при любых значениях угла падения.

Дальнейшее рассмотрение будем вести в предположении, что полная компенсация возможна и величина θ_0 удовлетворяет неравенствам (10), (11). Для удобства проведения расчетов введем функцию

$$f_0(w) = \exp \left(-\frac{iwl}{\pi} \ln 2 \right) \times$$

$$\times \frac{\prod_{n=1}^{m_1} \left(1 - \frac{w^2}{\Gamma_n^2} \right) \exp \left(-\frac{iwl}{2\pi n} \right) \prod_{n=1}^{m_2} \left(1 - \frac{w^2}{\Gamma_{-n}^2} \right) \exp \left(-\frac{iwl}{2\pi n} \right)}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{w^2}{\gamma_n^2} \right) \exp \left(-\frac{iwl}{n\pi} \right)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{n=m_1+1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\Gamma_n}\right) \exp\left(-\frac{iwl}{2\pi n}\right) \prod_{n=m_2+1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\Gamma_{-n}}\right) \exp\left(-\frac{iwl}{2\pi n}\right)}{\prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\gamma_n}\right) \exp\left(-\frac{iwl}{n\pi}\right)},$$

которая при замене переменных $w \rightarrow -w$ изменяет свое значение на комплексно-сопряженное. Тогда выражение для $f(w)$ может быть представлено в виде

$$f(w) = 2\Gamma_0 l \left(\frac{w + \Gamma_0}{2\Gamma_0}\right) \frac{f_0(w)}{f_0(\Gamma_0)}.$$

Обозначим

$$\arg [\operatorname{Res} f_0(w)|_{w=-\gamma_n}] = \beta_n$$

и, соответственно,

$$\arg [f_0(\Gamma_0)] = -\beta_0.$$

Выражения для вычетов функции $f(w)$, после достаточно громоздких преобразований, связанных с вычислением

$$\left| \operatorname{Res} \frac{f_0(w)}{f_0(\Gamma_0)} \Big|_{w=\gamma_m} \right|,$$

могут быть получены в виде

$$\operatorname{Res} f(w)|_{w=-\gamma_m} = \frac{\Gamma_0 - \gamma_m}{\gamma_m} \frac{\pi m}{l} h_m \exp(i\beta_m + i\beta_0); \quad (12)$$

$$\operatorname{Res} f(w)|_{w=\gamma_m} = \frac{\Gamma_0 + \gamma_m}{\gamma_m} \frac{\pi m}{l} h_m \exp(i\pi - i\beta_m + i\beta_0), \quad (13)$$

где величина h_m определяется как

$$h_m = \sqrt{\frac{\prod_{n=1}^{m_1} \left(\frac{\Gamma_n^2 - \gamma_m^2}{\Gamma_n^2 - \Gamma_0^2}\right) \prod_{n=1}^{m_2} \left(\frac{\Gamma_{-n}^2 - \gamma_m^2}{\Gamma_{-n}^2 - \Gamma_0^2}\right) (-1)^{m+1} [\cos(\pi q \sin \theta_0) - (-1)^m]}{\prod_{n=1}^N \left(\frac{\gamma_n^2 - \gamma_m^2}{\gamma_n^2 - \Gamma_0^2}\right)}} \quad (n \neq m). \quad (14)$$

Соответствующее выражение для амплитуд расходящихся волноводных волн будет

$$b_m = \frac{h_m}{[1 - (-1)^m \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]} \frac{\Gamma_0 + \gamma_m}{\gamma_m} \exp(i\pi - i\beta_m + i\beta_0). \quad (15)$$

Используя выражения (12), (13), условие (2) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \frac{h_n}{[1 - (-1)^n \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]} \frac{\Gamma_0 - \gamma_n}{\gamma_n} \exp(i\beta_n) = \\ & = \sum_{m=1}^N \frac{R_{nm} h_m}{[1 - (-1)^m \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]} \frac{\Gamma_0 + \gamma_m}{\gamma_m} \exp(i\pi - i\beta_m). \end{aligned} \quad (16)$$

В данном случае, (16) представляет собой условие, которое необходимо наложить на матрицу коэффициентов трансформации \hat{R} для осуществления полной компенсации расходящегося поля. Из (16) видно, что полная компенсация может быть осуществлена с помощью «различных наборов» коэффициентов трансформации, таких, чтобы осуществлялись заданные значения амплитуд, отраженных от неоднородностей и возбуждающих границу структуры волноводных мод. При всех известных значениях коэффициентов трансформации R_{nm} в тип n , кроме одного R_{nk} , условие (16) совместно с неравенством (6) может рассматриваться как уравнение для его определения.

В частном случае, когда волны одного типа преобразуются только в волны того же типа, что соответствует, например, неоднородностям, однородным по своим свойствам в плоскости yx , матрица \hat{R} диагональна, а условие (16) принимает особенно простой вид:

$$R_{nn} = \frac{\Gamma_0 - \gamma_n}{\Gamma_0 + \gamma_n} \exp(i\pi + i2\beta_n), \quad (17)$$

представляя из себя выражение для определения коэффициента отражения n -й моды. Очевидно, условие (6) в этом случае всегда выполняется, а следовательно, полная компенсация осуществима. При этом выше сделанное предположение о попадании нулей, полученных из условия (7), в область допустимых значений оправдано. Это относится и к случаю, когда \hat{R} недиагональна. Так как $|R_{nn}|$ всегда меньше единицы, в области, где мода k является распространяющейся, можно ввести малые коэффициенты перевозбуждения R_{nk} и R_{kn} такие, что при выполнении (16) неравенство (6) будет выполняться.

3. СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ КОСОГО ПАДЕНИЯ

Рассмотрим случай

$$q \sin \theta_0 = k,$$

где k — целое число. Бесконечная система уравнений (1) изменяет свой вид, и для решения необходимо построение новой функции $f(w)$. Однако все результаты могут быть получены из результатов для произвольного косого падения при рассмотрении соответствующих предельных переходов в формулах (15) и (16) для величин

$$\xi_n = \frac{h_n}{[1 - (-1)^n \exp(-i\pi q \sin \theta_0)]}.$$

при $\theta_0 \rightarrow \theta_{0\text{пр}}$, которое определяется из условия

$$q \sin \theta_{0\text{пр}} = k. \quad (18)$$

Для $k = 2j$, соответствующего падению волны с вектором \mathbf{k}_0 , направленным противоположно одному из волновых векторов пространственных гармоник при нормальном падении, все величины $\xi_{2n} \equiv 0$, за исключением

$$\xi_{2j} = -\frac{i}{2}.$$

При этом, условие (16), накладываемое на матрицу (16), принимает вид

$$\sum_{m=1}^{2m-1=N} R_{2n-1, 2m-1} h_{2m-1} \frac{\Gamma_0 + \gamma_{2m-1}}{2\gamma_{2m-1}} \exp(i\pi - i\beta_{2m-1}) + \\ + iR_{2n-1, 2j} = h_{2n-1} \frac{\Gamma_0 - \gamma_{2n-1}}{2\gamma_{2n-1}} \exp(i\beta_{2n-1}); \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^{2m-1=N} R_{2n, 2m-1} h_{2m-1} \frac{\Gamma_0 + \gamma_{2m-1}}{2\gamma_{2m-1}} \exp(i\pi - i\beta_{2m-1}) + iR_{2n, 2j} = 0. \quad (20)$$

Для $k = 2j - 1$, $\xi_{2n-1} = 0$, за исключением $\xi_{2j-1} = -\frac{i}{2}$, и (16) за- пишется как

$$\sum_{m=1}^{2m < N} R_{2n, 2m} h_{2m} \frac{\Gamma_0 + \gamma_{2m}}{2\gamma_{2m}} \exp(i\pi - i\beta_{2m}) + iR_{2n, 2j-1} = \\ = h_{2n} \frac{\Gamma_0 - \gamma_{2n}}{2\gamma_{2n}} \exp(i\beta_{2n}); \quad (21)$$

$$\sum_{m=1}^{2m < N} R_{2n-1, 2m} h_{2m} \frac{\Gamma_0 + \gamma_{2m}}{2\gamma_{2m}} \exp(i\pi - i\beta_{2m}) + iR_{2n-1, 2j-1} = 0. \quad (22)$$

Появление нулевой правой части в обоих случаях связано с особенностю возбуждения решетки при $\theta_0 = \theta_0^{\text{пр}}$ и, по существу, является требованием равенства нулю отраженных мод четных номеров. Возбуждение волновой типа

$$\exp(ik_0 \sin \theta_0 y - ik_0 \cos \theta_0 z) \quad (23)$$

можно рассматривать как суперпозицию возбуждений двумя стоячими в направлении y волнами:

$$\cos(k_0 \sin \theta_0 y) \exp(-ik_0 \cos \theta_0 z); \quad (24)$$

$$i \sin(k_0 \sin \theta_0 y) \exp(-ik_0 \cos \theta_0 z). \quad (25)$$

В случае $q \sin \theta_0 = k$ волна со структурой (24) порождает лишь нечетные волноводные моды со сдвигом фаз 2π при $k = 2j$ и четные моды со сдвигом фаз π при $k = 2j - 1$, в то время как волна со структурой (25) проходит границу решетки, не претерпевая рассеяния. При этом излучение, рассеянное в свободное пространство, может быть скомпенсировано лишь этими же модами, что отражается в равенствах (19), (21). Соответственно четные и нечетные моды, трансформированные на неоднородностях, из-за совпадения созданной ими структуры поля в нижнем полупространстве с одной из пространственных гармоник со структурой поля вида (25), проходят без рассеяния границу решетки, не участвуя в компенсации рассеянного решеткой излучения. Необходимость полного отсутствия излучения решетки в случае полной компенсации приводит к требованию (20), (22).

4. О РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Полученные соотношения, в принципе, позволяют создать систему неоднородностей, идеально согласующую волноводную решетку со свободным пространством. Причем, так как число независимых членов матрицы \hat{R} больше числа уравнений (16), это создает дополнительные степени свободы при осуществлении такой системы. Однако наибольший

интерес с точки зрения простоты создания представляют неоднородности, однородные по своим свойствам в плоскости xy , которые могут быть реально осуществлены, например, в виде многослойных диэлектрических вставок. Диэлектрическая проницаемость и толщина этих вставок могут служить свободными параметрами для соблюдения заданной величины и фазы коэффициентов R_{nn} .

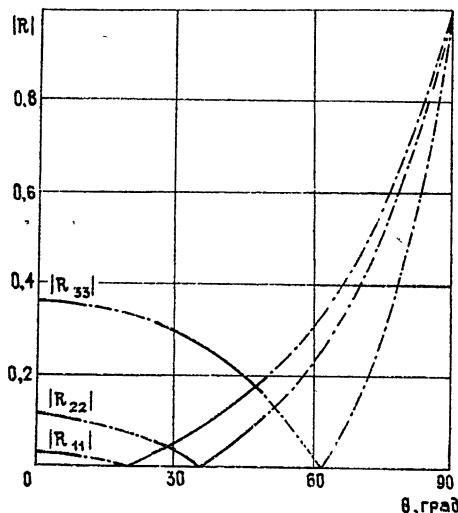


Рис. 2.

На рис. 2 представлены в качестве примера зависимости величин $|R_{nn}|$ от угла падения для значения $q = 3, 4$, рассчитанные по формуле (17). Широкой линией отмечены значения в области, где возможно осуществить полную компенсацию поля. Следует обратить внимание на тот факт, что значение $|R|$ достаточно слабо зависит от угла в области $0 < \theta_0 < 30^\circ$. Кроме того, можно показать непосредственно из (17), что это обстоятельство имеет место для широкого интервала изменений q и может быть использовано для компенсации дифрагированного поля в секторе $\sim 60^\circ$.

Таким образом, в результате анализа возможности компенсации поля расходящихся пространственных гармоник с помощью пассивных неоднородностей можно сделать следующие выводы.

Полная компенсация за счет переотражения части прошедшего в волноводы поля на пассивных неоднородностях возможна лишь в интервалах углов, зависящих от величины q , которая определяется из выражений (10), (11), когда число распространяющихся волноводных мод равно числу расходящихся пространственных гармоник. При этом матрица коэффициентов трансформации на неоднородностях должна удовлетворять условию (16) и компенсация может осуществляться за счет «различного набора» коэффициентов трансформации, которые удовлетворяют неравенству (6). В частном случае углов падения возбуждающей решетку волны при выполнении соотношения $q \sin \theta_0 = k$ компенсация осуществляется за счет трансформированных волноводных мод нечетных номеров при $k = 2j$ и за счет четных номеров, сдвинутых в соседних волноводах по фазе на π при $k = 2j - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Миттра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов, изд. Мир, М., 1974.

Ленинградский электротехнический
институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
18 июля 1978 г

DIFFRACTED FIELD COMPENSATION IN A LATTICE OF PLANE
WAVEGUIDES WITH INHOMOGENEITIES

A. M. Polubotko, V. A. Stepanov

For a lattice of plane waveguides with inhomogeneities conditions have been obtained for a matrix of transformation coefficients of waveguide waves. When these conditions are fulfilled a complete compensation of the field of diverging space harmonics occurs. It is shown that the complete compensation may be achieved in a definite interval of incidence angles of a plane wave and may be realized by «different set» of transformation coefficients

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ СТРАТ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ СТОЛБЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА С УЧЕМОМ ВЛИЯНИЯ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ АТОМОВ

П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев

Показано, что учет конечного времени жизни метастабильных атомов приводит к возможности существования двух типов страт. Области возбуждения этих типов страт по току могут либо перекрываться, либо не перекрываться. В последнем случае появляется так называемая бесстратовая область, наличие которой играет большую роль при работе газовых лазеров. Проведен аналитический и численный расчет границ бесстратовой области и дисперсионных характеристик страт вблизи этих границ.

1. Известно [1], что в инертных газах области существования бегущих страт по току и давлению имеют сложную форму (см. рис. 1). Из рисунка видно, что при фиксированном значении давления может существовать относительно небольшая область токов, внутри которой страты отсутствуют, — так называемая бесстратовая область [2–5]. Границы этой области по току зависят от давления и состава газа, а также размеров разрядной трубки [4, 5]. Обычно рабочие диапазоны давлений и токов в гелий-неоновых лазерах перекрываются с бесстратовой областью. Поэтому исследование этой области представляет большой практический интерес. В настоящей работе наличие бесстратовой области объясняется влиянием метастабильных атомов.

В большинстве имеющихся теоретических работ по возбуждению страт, например, [6–8], уравнение для метастабильных атомов не учитывается. Это справедливо при больших токах (вблизи границы Пуппа), когда эффективное время жизни метастабильных атомов мало и их концентрация успевает следить за концентрацией электронов как по времени, так и по пространству. В этом случае влияние метастабильных атомов проявляется лишь через скорость ионизации. В области малых и средних токов время жизни метастабильных атомов больше времени жизни электронов или сравнимо с ним, вследствие чего их влияние становится более существенным.

Учет влияния уравнения для метастабильных атомов производился в работах Цендина [9]. В этих работах указывалось, что за счет этого влияния при малых и больших токах должны возбуждаться страты разных типов. В дальнейшем условимся называть страты, возбуждающиеся в области малых токов, *m*-стратами, а в области больших токов —

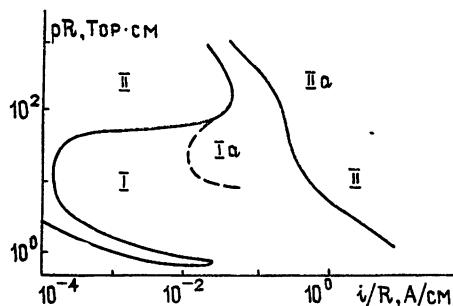


Рис. 1. Границы областей существования бегущих страт в неоне [1]; I — область возбуждения страт, II — область спокойного разряда, Ia, IIa — области контрагированных столба.

n-стратами. Цендин показал, что в области малых токов *m*-страты должны усиливаться, а *n*-страты — затухать. При переходе в область больших токов затухать должны *m*-страты. (На затухание *n*-страт при малых токах указывалось еще Недоспасовым [10].) В указанных работах Цендина рассматриваются только отдельные области токов и не прослеживается неустойчивость положительного столба при непрерывном изменении тока. В частности, в этих работах не исследуется бесстратовая область.

2. В качестве исходных используем гидродинамические уравнения для концентрации электронов *n*, метастабильных атомов *m* и энергии (температуры) электронного газа *T* [10, 11]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial n}{\partial x} \right) = n Z(n, m, T) - \frac{n}{\tau_n},$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} - D_m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = n P(n, m, T) - \frac{m}{\tau_m},$$

$$\zeta v \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma \frac{\mu_e}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left(n T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = v E + H(n, T),$$

$$j = -env = en \mu_e \left[E - \frac{T}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Здесь $D_a = \mu_i T$ — коэффициент амбиполярной диффузии; μ_e , μ_i — подвижности электронов и ионов; D_m — коэффициент диффузии метастабильных атомов; τ_n , τ_m — времена жизни электронов и метастабильных атомов за счет диффузии на стенки; E — продольная компонента электрического поля; v — дрейфовая скорость электронов; j — плотность тока; $H(n, T)$ — энергия, теряемая электроном в единицу времени при столкновениях; $Z(n, m, T)$, $P(n, m, T)$ — частоты образования ионов и метастабильных атомов ($Z(n, m, T) = Z_{0\infty} + \frac{m}{n_g} Z_{m\infty}$,

$P(n, m, T) = Z_{0m} - \frac{m}{n_g} (Z_{m0} + Z_{m\infty})$, где Z_{0m} , Z_{m0} , $Z_{0\infty}$, $Z_{m\infty}$ — частоты возбуждения, девозбуждения, прямой и ступенчатой ионизации, n_g — концентрация нейтральных атомов в основном состоянии); ζ , γ ,

γ_1 — кинетические коэффициенты, значения которых зависят от вида функции распределения электронов по энергиям.

Частоты возбуждения, девозбуждения, прямой и ступенчатой ионизации сильно зависят от температуры электронного газа и чувствительны к форме хвоста функции распределения электронов. Отличие хвоста функции распределения от максвелловского приводит к зависимости этих частот от концентрации электронов [6].

Из второго уравнения системы (1) и вида функции $P(n, m, T)$ следует, что время жизни метастабильных атомов определяется не только диффузией на стенки трубки, но и исчезновением их в объеме за счет процессов девозбуждения и ступенчатой ионизации. Поэтому целесообразно ввести эффективное время жизни метастабилей

$$\tau_{m\text{эфф}} = \left\{ \frac{1}{\tau_m} + \frac{n_0}{n_g} (Z_{m0} + Z_{m\infty}) \right\}^{-1},$$

где n_0 — среднее стационарное значение концентрации электронов. В силу зависимости от n_0 эффективное время жизни $\tau_{m \text{ эф}}$ должно существенно зависеть от тока разряда. При увеличении тока до границы Пуппа $\tau_{m \text{ эф}}$ уменьшается на несколько порядков. В связи с этим весь диапазон токов, в котором могут существовать страты, удобно разбить на три области: 1) область больших токов — $\tau_m \gg \tau_n \gg \tau_{m \text{ эф}}$, 2) область средних токов — $\tau_m \gg \tau_n \sim \tau_{m \text{ эф}}$, 3) область малых токов — $\tau_m \sim \tau_{m \text{ эф}} \gg \tau_n$. В каждой из этих областей механизм неустойчивости положительного столба имеет свои отличительные особенности. При больших и средних токах диффузия метастабильных атомов на стенки несущественна, и их концентрация слабо зависит от тока (только через функции Z_{m0} , $Z_{m\infty}$ и $Z_{m\infty}$). В области малых токов концентрация метастабильных атомов пропорциональна концентрации электронов и поэтому существенно изменяется при изменении тока.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением области средних токов. В этой области можно положить

$$\tau_{m \text{ эф}} = \frac{n_g}{n_0(Z_{m0} + Z_{m\infty})} = \frac{en_g \mu_e E_0}{(Z_{m0} + Z_{m\infty}) j_0}.$$

Если пренебречь зависимостью от тока среднего поля E_0 и частот Z_{m0} , $Z_{m\infty}$, то эффективное время жизни метастабильных атомов оказывается обратно пропорциональным току.

3. Для рассмотрения условий самовозбуждения и определения границ существования страт уравнения (1) можно линеаризовать относительно малых отклонений от стационарного состояния. Пренебрегая диффузией метастабильных атомов, запишем эти уравнения в безразмерных переменных: $N = \frac{n - n_0}{n_0}$, $M = \frac{m - m_0}{m_0}$, $U = \frac{T - T_0}{T_0}$,

$J = \frac{j - j_0}{j_0}$, $\xi = \varepsilon^2 t / \tau_n$, $\xi = \beta \varepsilon x / R$ ($\varepsilon = E_0 R / \beta T_0$), $\beta \sim 2,4$, R — радиус трубки, $\tau_n = R^2 / \beta^2 \mu_i T_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} &= \eta_m M + \eta_T U, \\ \frac{\partial M}{\partial \tau} &= P_n N - I M + I P_T U, \\ \alpha \frac{\partial U}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial N}{\partial \xi} + 2(N - J) + h_T U &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\eta_m = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{m_0}{n_g} Z_{m\infty} \left/ \left(Z_{m0} + \frac{m_0}{n_g} Z_{m\infty} \right) \right., \quad \eta_T = (Z_T - 1) / \varepsilon^2,$$

$$Z_T = \frac{T_0}{Z_0} \left. \frac{\partial Z}{\partial T} \right|_0, \quad P_n = \frac{n_0^2 \tau_n}{m_0 \varepsilon^2} \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_0 + \frac{\tau_n}{\varepsilon^2 \tau_m},$$

$$P_T = \frac{T_0}{m_0} - \frac{n_g}{Z_{m0} + Z_{m\infty}} \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_0,$$

$$h_T = \frac{T_0}{H_0} \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_0, \quad I = \frac{\tau_n}{\varepsilon^2 \tau_{m \text{ эф}}} = \frac{(Z_{m0} + Z_{m\infty}) T_0}{e \mu_i \mu_e n_g E_0^3} j_0.$$

Чтобы система уравнений (2) стала замкнутой, к ней надо добавить закон Ома:

$$J = \frac{R_0}{(R_i + R_0) l} \left[\int_0^l N d\xi - N(l) + N(0) \right], \quad (3)$$

где $R_0 = E_0 L / j_0 S$ — сопротивление положительного столба по постоянному току, L — длина положительного столба, S — эффективная площадь поперечного сечения, $l = \epsilon \beta L / R$ — безразмерная длина положительного столба, R_i — суммарное сопротивление внешней цепи по переменному току (предполагается, что это сопротивление активное). Параметры ϵ , η_m , η_T , P_n , P_T , h_T и I сложным образом зависят от тока и давления газа. Так, например, зависимость параметра ϵ от тока и давления для аргона, построенная по данным [6], приведена на рис. 2. Из рисунка видно, что при не очень малых токах ($j_0 S / R \gtrsim 0,1 \text{ A/cm}$) и не очень больших давлениях ($pR \leq 5 \text{ Tor}\cdot\text{см}$) параметр ϵ является малым и слабо зависит от тока. Чтобы упростить картину, будем считать все параметры, кроме I , не зависящими от тока, а параметр I положим пропорциональным току. Здесь следует особо оговориться насчет параметра P_n . Этот параметр пропорционален квадрату концентрации электронов n_0^2 и производной $\partial P / \partial n$, которая не равна нулю вследствие отличия функции распределения электронов от максвелловской [6]. Поскольку с ростом концентрации электронов функция распределения приближается к максвелловской, то при увеличении n_0 производная $\partial P / \partial n$ должна убывать. Параметр P_n можно считать не зависящим от тока, если $\partial P / \partial n \sim 1/n_0^2$ в рассматриваемом диапазоне токов.

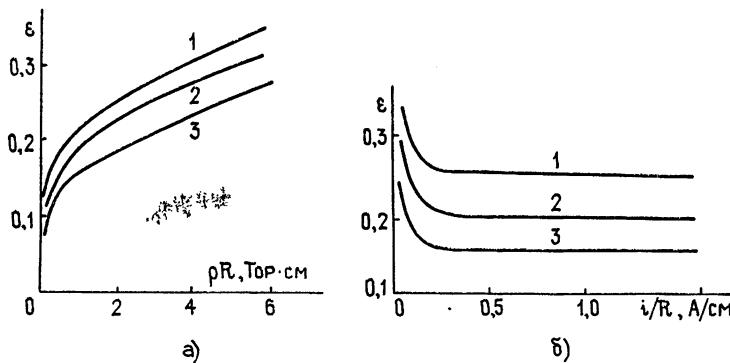


Рис. 2. Зависимость параметра ϵ от давления и тока по данным [6]:
 а) $1 - i/R = 0,064 \text{ A/cm}$, $2 - i/R = 0,13 \text{ A/cm}$, $3 - i/R = 4,5 \text{ A/cm}$;
 б) $1 - pR = 2,2 \text{ Tor}\cdot\text{см}$, $2 - pR = 1,4 \text{ Tor}\cdot\text{см}$, $3 - pR = 0,6 \text{ Tor}\cdot\text{см}$.

4. Решение уравнений (2), (3) представляет собой сумму четырех волн с комплексной частотой p и синфазной компоненты, обусловленной модуляцией тока разряда. Волновые числа k этих волн являются корнями дисперсионного уравнения

$$k^4 - \frac{\alpha}{\gamma} k^3 + \left(\frac{P_n \eta_m}{p + I} - p - \frac{h_T}{\gamma} \right) k^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma} p - \frac{\eta_T}{\gamma} - \frac{P_T \eta_m I}{\gamma(p + I)} - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{P_n \eta_m}{p + I} \right) k + \frac{h_T p}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} \eta_T + \frac{2}{\gamma} \frac{P_T \eta_m I}{p + I} - \frac{h_T P_n \eta_m}{\gamma(p + I)} = 0. \quad (4)$$

Чтобы определить условия самовозбуждения страт, нужно решить дисперсионное уравнение (4), воспользоваться законом Ома (3) и граничными условиями. При этом получится характеристическое уравнение для нахождения комплексной частоты p . Условие самовозбуждения страт эквивалентно неравенству $\operatorname{Re} p \geq 0$.

В явном виде приближенное решение уравнения (4) можно получить, если воспользоваться условием малости параметра ϵ . Положим $P_T \eta_m \sim \epsilon^{-3.25}$, $P_n \eta_m \sim \epsilon^{-3}$, $\eta_T \sim \epsilon^{-2.75}$, $h_T \leq \epsilon^{-1}$, $I \sim \epsilon^{-1}$. В этом случае, как будет показано ниже, один из корней дисперсионного уравнения (4) при чисто мнимом p (порядка частоты страт) имеет большую мнимую часть (больше или порядка $\epsilon^{-0.75}$) и сравнительно малую действительную. Этот корень соответствует основной ионизационной волне (собственно страте). Второй корень имеет действительную часть порядка единицы и сравнимую с ним или меньшую мнимую. Волну, соответствующую этому корню, будем называть встречной ионизационной волной. Другие два корня имеют большие (большие или порядка ϵ^{-1}) действительные части. Поскольку затухание соответствующих этим корням волн происходит на расстоянии, меньшем длины основной ионизационной волны, их можно не учитывать (или учесть через граничные условия).

Ради простоты выберем граничные условия в виде [7, 8, 12]

$$N(0) = 0, \quad N(l) = 0. \quad (5)$$

В этом случае характеристическое уравнение с точностью до членов порядка ϵ имеет вид

$$e^{kl} = \frac{1 + b \exp(k_1 l)}{1 + b}, \quad (6)$$

где k , k_1 — соответственно волновые числа основной и встречной волн, $b = k_1 l \left(\frac{R_i + R_o}{2R_o} k_1 - 1 \right) (\exp(k_1 l) - 1)^{-1}$. Полагая $k = \psi_0 + i\kappa$, из (6) находим собственные значения κ и ψ_0 :

$$\begin{aligned} \kappa_l &= 2\pi m + \arg \frac{1 + b \exp(k_1 l)}{1 + b}, \\ \psi_0 l &= \ln \left| \frac{1 + b \exp(k_1 l)}{1 + b} \right|. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $|b| \gg 1$, что возможно при достаточно большом R_i , то $\psi_0 = \psi_1$, где ψ_1 — коэффициент пространственного затухания встречной волны. В противном случае $\psi_0 < \psi_1$.

Вследствие того, что уравнение (4) относительно p имеет второй порядок, условие возбуждения страт может выполняться для двух значений частот, соответствующих стратам разных типов. При выбранных значениях параметров стратам m -типа соответствует $\omega = \operatorname{Im} p \sim \epsilon^{-1.25}$, а стратам n -типа — $\omega \sim \epsilon^{-2}$. Найдем условия возбуждения для страт того и другого типа.

5. Как следует из (4), при $|p| \sim \epsilon^{-1.25}$

$$k = \left(\frac{IP_T \eta_m}{\gamma p} \right)^{1/3} + O(\epsilon^{1/4}), \quad (8)$$

$$k_1 = 2 - \frac{P_n \eta_m h_T}{IP_T \eta_m} + p \frac{h_T P_n \eta_m \eta_T}{(P_T \eta_m I)^2} + O(\epsilon^{3/4}).$$

Полагая $p = \delta + i\omega$, где $\omega = IP_T \eta_m / \gamma x^2$ $\sim \varepsilon^{-1.25}$, $\delta \sim \varepsilon^{-1}$, из дисперсионного уравнения (4) находим δ :

$$\delta = \frac{P_n \eta_m}{x^2} - \frac{IP_T \eta_m \eta_T}{\gamma^2 x^6} - I - 3 \frac{IP_T \eta_m}{\gamma x^4} \psi_0. \quad (9)$$

Условия возбуждения страт ($\delta \geq 0$) можно записать так:

$$\psi \geq \psi_0, \quad (10)$$

где

$$\psi = \frac{1}{3} \left(\frac{P_n \eta_m \gamma x^2}{IP_T \eta_m} - \frac{\eta_T}{\gamma x^2} - \frac{\gamma x^4}{P_T \eta_m} \right). \quad (11)$$

Величина ψ имеет смысл коэффициента пространственного усиления волны с волновым числом x . Эта величина достигает максимума при x^2 , равном действительному положительному корню уравнения

$$x^6 - \frac{P_n \eta_m}{2I} x^4 - \frac{P_T \eta_m \eta_T}{2\gamma^2} = 0. \quad (12)$$

Максимальное значение ψ убывает с ростом тока, так что условие (10) при некотором значении $I = I_0$ перестает выполняться. Поскольку ψ_0 имеет порядок единицы, а ψ — порядок $\varepsilon^{-0.75}$, то I_0 приближенно можно определить из условия $\psi = 0$. С учетом (12) находим

$$I_0 = \frac{P_n \eta_m}{3} \sqrt[3]{\frac{4\gamma^2}{P_T \eta_m \eta_T}}. \quad (13)$$

Соответствующее этому значению I оптимальное волновое число равно $x_0 = (2P_T \eta_m \eta_T / \gamma^2)^{1/6}$. Следовательно, условие самовозбуждения страт m -типа имеет вид

$$\frac{P_n \eta_m}{3I} \sqrt[3]{\frac{4\gamma^2}{P_T \eta_m \eta_T}} \geq 1.$$

6. Для страт n -типа частота ω имеет порядок ε^{-2} , а волновое число $x \sim \varepsilon^{-0.75}$. В этом случае из (4) получаем следующие приближенные выражения для k и k_1 :

$$k = -\frac{\eta_T}{\gamma p} + O(\varepsilon^{1/4}),$$

$$k_1 = 2 - \frac{h_T IP_T \eta_m}{\eta_T^2} + \frac{h_T p}{\eta_T} + O(\varepsilon^{1/2}). \quad (14)$$

Полагая в (4) $p = \delta + i\omega$, где $\omega = \eta_T / \gamma x$, $\delta \sim \varepsilon^{-1.5}$, найдем δ :

$$\delta = \frac{IP_T \eta_m}{\eta_T} - x^2 - \frac{\eta_T}{\gamma x^2} \left(2 - \frac{\alpha}{\gamma} \right) - \frac{\eta_T}{\gamma x^2} \psi_0.$$

Условие самовозбуждения страт n -типа, как и страт m -типа, можно записать в виде (10), где

$$\psi = \frac{\gamma x^2}{\eta_T} \left(\frac{IP_T \eta_m}{\eta_T} - x^2 \right) - 2 + \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (15)$$

Коэффициент ψ достигает максимального значения при

$$\chi^2 = \chi_0^2 = \frac{1}{2} \frac{I P_T \eta_m}{\eta_T},$$

и условие возбуждения страт принимает вид

$$\frac{\gamma I^2 P_T^2 \eta_m^2}{4 \eta_T^3} \geq 2 - \frac{\alpha}{\gamma} + \psi_0. \quad (16)$$

Отсюда видно, во-первых, что на возбуждение страт n -типа в области средних токов параметр P_n не влияет, а основную роль играет параметр P_T . Во-вторых, возбуждение страт этого типа становится возможным при $I \geq I_0$, где

$$I_0 = \frac{2 \eta_T}{P_T \eta_m} \sqrt{\left(2 - \frac{\alpha}{\gamma} + \psi_0\right) \eta_T / \gamma}. \quad (17)$$

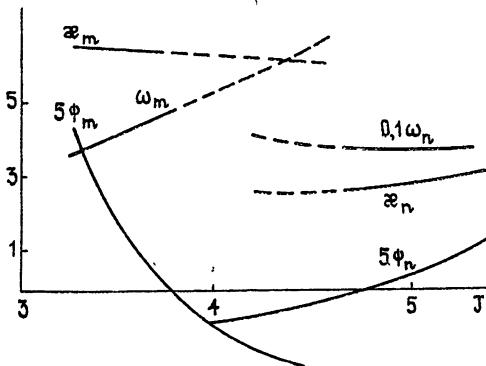


Рис. 3. Зависимость волнового числа (χ), частоты (ω) и коэффициента пространственного усиления (ψ) от тока (I) для страт m - и n -типов.

На рис. 3 построены зависимости от тока I коэффициента пространственного усиления ψ , частоты ω и волнового числа χ для страт m - и n -типов при следующих гипотетических значениях параметров: $P_n \eta_m = 220$, $P_T \eta_m = 300$, $\eta_T = 100$, $\gamma = 1$, $\alpha = 3/2$. Как видно из рисунка, при выбранных значениях параметров имеется бесстратовая область. Ширина этой области увеличивается с ростом граничного коэффициента усиления страт ψ_0 , а следовательно, с уменьшением длины положительного столба. Это качественно согласуется с экспериментальными данными [4, 5]. Если увеличивать параметры $P_T \eta_m$ и $P_n \eta_m$, то, как следует из формул (13) и (17), бесстратовая область будет сужаться и может вообще исчезнуть. В этом случае в некотором диапазоне токов станет возможным возбуждение обоих типов страт. Какой из них в действительности окажется возбужденным, будет зависеть от предыстории системы! Поэтому при изменении тока в ту или иную сторону должен наблюдаться гистерезис. Это соответствует экспериментальным данным группы Зайцева [13], если отождествить страты m -типа с p -стратами, а n -типа с s -стратами. В области перехода от одного типа страт к другому должен происходить скачок частоты и волнового числа. Это также соответствует экспериментам группы Зайцева [14] для значений $pR \sim 1$.

В экспериментах, проводимых для смеси гелия с неоном, зависимость коэффициента усиления ψ в районе бесстратовой области рис. 4 качественно совпадает с приведенной на рис. 3*. Однако в этих экспериментах при переходе через бесстратовую область не наблюдалось скачков частоты и длины волны. Последнее, по-видимому, говорит о том, что максимумы коэффициента усиления ψ близки друг к другу и типы страт не различимы по частотам и волновым числам. Это возможно, если параметр ϵ не является малым.

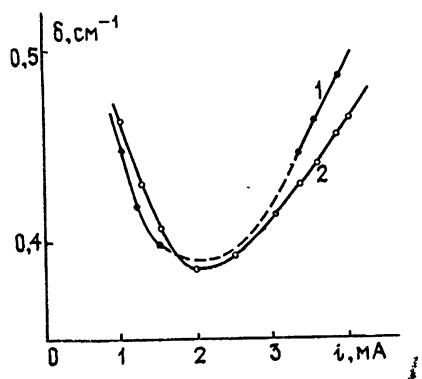


Рис. 4. Зависимость коэффициента пространственного усиления страт (ψ) от тока разряда (I) для смеси гелия с неоном $p_{\text{He}}:p_{\text{Ne}} = 15$, $pR = 0.3 \text{ Torr} \cdot \text{см}$, $1-L=10.2 \text{ см}$, $2-L=14.1 \text{ см}$ (штриховая кривая — стимулированные страты).

Полученные результаты позволяют также объяснить справедливость экспериментально установленного закона Новака о постоянстве падения потенциала на длине страты: $U_\lambda = E_0 \lambda = 2\pi T_0 / \kappa = \text{const}$ [15]. Для страт m -типа, как видно из рис. 3, величина κ уменьшается с ростом тока. Поскольку T_0 тоже уменьшается при увеличении тока, то значение U_λ должно быть примерно постоянным. При переходе к стратам n -типа величина κ скачком уменьшается примерно вдвое и слабо растет с ростом тока. При этом значение U_λ должно несколько уменьшаться, что подтверждается данными работы [16].

Заметим, что полученные результаты могут претендовать лишь на грубое качественное согласие с экспериментом, поскольку разложение в ряд производится по параметру $\epsilon^{1/4}$, который, по-видимому, не является достаточно малым. Для получения более точных количественных результатов был проведен расчет с использованием ЭВМ. Основная идея расчета состоит в следующем. Полагая в дисперсионном уравнении (4) временной инкремент δ равным нулю (физически это соответствует периодическому во времени возмущению положительного столба) и исключая частоту ω , можно получить связь между коэффициентом пространственного усиления страт ψ , волновым числом κ и током разряда I :

$$f(\psi, \kappa, I) = 0. \quad (18)$$

Выражение для частоты в частном случае $\psi = 0$ имеет вид

$$\omega = \frac{I\kappa(P_T \eta_m + \eta_T)(\kappa^2 + 2\alpha + h_T)}{\kappa^6 + (\alpha^2 + 2h_T)\kappa^4 + (h_T^2 + (2-\alpha)\eta_T)\kappa^2 + 2h_T\eta_T + I(\kappa^4 + (\alpha^2 + 2h_T)\kappa^2 + h_T^2)}. \quad (19)$$

Оно представляет собой дисперсионное уравнение, связывающее действительные частоту и волновое число страт с учетом метастабильных атомов. Для страт m - и n -типов, которым соответствуют разные длины волн, из (19) получаются существенно отличающиеся зависимости ω от κ (см. (7) и (14)).

Вблизи границы возбуждения при фиксированном значении тока I пространственный коэффициент усиления ψ резонансным образом зависит от κ , достигая максимального значения ψ_{\max} при условии

* Этот график был нам любезно предоставлен М. И. Молчановым и Н. Г. Ярошеченко.

Таблица 1

Тип	h_T	I_0	χ_0	ω_0	$\partial\Psi/\partial I$	$\partial\omega/\partial I$	$\partial\chi/\partial I$	v_r/v_Φ	k_l	k_2	k_3
m	1	3,816	5,557	7,506	-0,330	5,251	-1,020	-2,6	$2 + i \cdot 10^{-4}$	$4,38 + 0,40i$	$-4,88 - 5,95i$
n	1	4,202	2,937	30,128	0,155	2,123	0,031	-1,28	$2 + i \cdot 10^{-4}$	$4,36 + 2,50i$	$-4,86 - 5,43i$
m	4	4,129	4,775	10,37	-0,203	16,39	-3,04	-2,15	$1,498 + 0,504i$	$4,85 + 0,25i$	$-4,85 - 5,52i$
n	4	4,304	3,464	18,83	0,084	10,52	-1,06	-1,30	$1,696 + 0,965i$	$4,54 + 0,78i$	$-4,74 - 5,22i$

Аналитические результаты

m	1	3,75	6,25	4,6	-0,8	2,15	-0,56	-3	$1,8 + 0,08i$	-	-
n	4	1	4,70	2,66	37,6	0,22	-0,37	0,27	-1	$1,2 + 0,32i$	-
										$1,86 + 0,38i$	-
										$1,44 + 1,50i$	-

$$\frac{d}{dx} f(\psi, x, I) \Bigg|_{I=\text{const}, \frac{d\psi}{dx}=0} = 0. \quad (20)$$

Области возбуждения страт соответствуют те значения тока I , для которых $\psi_{\max} \geq \psi_0$. Полагая в уравнениях (18), (20) $\psi = \psi_0$ и решая их относительно x и I , можно получить границу возбуждения страт по току I_0 и соответствующее волновое число x_0 . Используя выражение для частоты (например, (19) при $\psi_0 = 0$), можно вычислить ω_0 . Из дисперсионного уравнения (4) при $I = I_0$, $\omega = \omega_0$ можно получить значения остальных трех волновых чисел k_1 , k_2 , k_3 , а также значения производных $\partial\psi/\partial I$, $\partial x/\partial I$ и $\partial\omega/\partial I$, которые определяют характер изменения параметров ψ , x и ω в окрестности границы возбуждения.

Результаты расчета всех четырех корней дисперсионного уравнения (4), граничного значения тока (при $\psi = 0$) и соответствующих ему значений частоты ω_0 и волнового числа x_0 приведены в таблице 1. В этой же таблице приводятся значения производных $\partial\psi/\partial I$, $\partial\omega/\partial I$, $\partial x/\partial I$ и отношение групповой скорости к фазовой. Для сравнения приведены также аналитические значения указанных величин. Сравнение показывает, что несмотря на грубость теоретического анализа (для выбранных значений параметров $\epsilon^{-1} \sim 4$) получилось достаточно хорошее соответствие между результатами аналитического и численного расчетов, что оправдывает проведенное теоретическое рассмотрение.

Из результатов численного расчета следует (см. табл. 1), что увеличение параметра h_t , который не входит в приближенные теоретические формулы для I_0 , x_0 и ω_0 , приводит к сужению бесстратовой области и существенному сближению частот и волновых чисел разных типов страт. Кроме того, при увеличении параметра h_t меняется характер встречной волны (с волновым числом k_1) — уменьшаются ее пространственное затухание и длина волны. Результаты численного расчета подтвердили также сделанные теоретические предположения о достаточно большом пространственном затухании остальных двух волн (с волновыми числами k_2 и k_3).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Pfau, A. Rutschner and K. Wojaczek, Beitr. Plasmaphys., 9, 333 (1966).
V V
2. T. Ruzicka, Czech J. Phys., B18, 928 (1968).
3. K. Ohe and S. Takeda, Jap. J. Appl. Phys., 11, 1173 (1972).
4. П. А. Павлов, В. Е. Привалов, ЖТФ, 48, 1375 (1978).
5. Н. В. Кириллова, М. И. Молчанов, Радиотехника и электроника, 23, 2581 (1978).
V
6. K. Wojaczek, Beitr. Plasmaphys., 1, 30 (1961); 2, 13 (1962), 5, 307 (1965); 6, 319 (1966).
7. П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, Письма в ЖТФ, 1, 758 (1975).
8. П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, Радиотехника и электроника, 21, 2337 (1976).
9. Л. Д. Цендин, ЖТФ, 39, 1341 (1969); 40, 1600 (1970), 41, 1553 (1971).
10. А. В. Недоспасов, УФН, 94, 439 (1968).
V
11. L. Pekarek, K. Masek and K. Rohlena, Czech. J. Phys., B20, 879 (1970).
12. П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, В. Н. Садовский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, 1691 (1978).
13. A. A. Zaitsev, I. A. Savchenko and V. V. Ilinsky, Proc. XII ICPIG, Eindhoven, 1975, p. 123.

14. А. А. Зайцев, И. А. Савченко, В. Ф. Махров, Радиотехника и электроника, 15, 2650 (1970).
15. Л. Пекарек, УФН, 94, 464 (1968).
16. А. А. Зайцев, И. А. Савченко, ЖТФ, 45, 1541 (1975).

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 сентября 1978 г.

EXCITATION OF STRATA IN A POSITIVE COLUMN OF GAS DISCHARGE
REGARDING THE INFLUENCE OF METASTABLE ATOMS

P. S. Landa, Yu V. Ponomarev

It is shown that an account of the finite time of life of metastable atoms leads to the possibility of existence of two types of strata. Regions of excitation of these types of strata by the current may be either overlapped or may be not. In the last case a so called strataless region occurs the presence of which is of great importance in gas laser operation. Analytical and numerical calculations are made of boundaries of the strataless region and dispersion characteristics of strata close to these boundaries.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 543.46

ПРИМЕНЕНИЕ СТРОБОСКОПИЧЕСКОГО МЕТОДА В РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРИИ С БОЛЬШИМИ БАЗАМИ

Ю. П. Кузнецов

Одно из основных направлений развития радиоинтерферометров с большими базами [1, 2], используемых для измерения запаздывания принимаемого излучения между антеннами, — повышение точности измерения. При измерении по времени задержки огибающей взаимной корреляционной функции (ВКФ) это требует увеличения ширины используемого спектра сигнала, поскольку точность и разрешающая способность интерферометра определяются шириной огибающей ВКФ. Переход к измерениям по фазе высокочастотного заполнения ВКФ также требует увеличения точности измерения и, соответственно, расширения ширины спектра для устранения многозначности отсчета.

Достижение точности измерения геометрического запаздывания сигнала порядка долей метра для точных астрометрических, геодезических и геодинамических измерений [3] требует ширины полосы пропускания интерферометра порядка сотен $M\Gamma$. Для современных интерферометров непосредственное расширение спектра сигнала ограничивается полосой пропускания выходных устройств интерферометра (ретранслятор, устройства записи и обработки; в настоящее время их полоса порядка $10 M\Gamma$). Поэтому необходимо пойти на усложнение построения интерферометра и каким-либо способом расширить хотя бы результирующий спектр сигнала.

Сейчас это производится методом синтезирования полосы приема сигнала [4]. При последовательной перестройке гетеродина поочередно принимаются, записываются и обрабатываются отдельные участки спектра излучения наблюдаемого источника. Суммирование ВКФ участков спектра дает результирующую функцию, соответствующую суммарному спектру сигнала.

Возможен еще один способ достижения широкой полосы сигнала при ограничении полосы на выходе — использование стробоскопического метода. Широкополосные сигналы на выходе приемников в этом случае селектируются достаточно узкими по сравнению с интервалом корреляции стробирующими импульсами, далее пропускаются и обрабатываются отдельные отсчеты сигналов.

Полоса пропускания выходных устройств $\Delta f_{\text{вх}}$ определяется необходимой шириной ВКФ сигналов. Принимая для упрощения частотную характеристику высокочастотного тракта прямоугольной, по расстоянию между первыми нулями ВКФ $2\tau_0$, найдем $\Delta f_{\text{вх}} = 1/2\tau_0$. Частота повторения стробов F_c определяется полосой выходных устройств $F_c \ll 2\Delta f_{\text{вх}}$, их длительность $\tau_c \leq \tau = 1/2\Delta f_{\text{вх}}$. При таком выборе параметров возможно обеспечить работу интерферометра при полосе низкочастотного тракта много меньшей, чем полоса сигнала по высокой частоте.

После корреляционной обработки получаем ВКФ, определенную для дискретных значений задержки, разделенных интервалами, равными периоду повторения стробов $T_c = 1/F_c$. Поскольку расстояние между первыми нулями ВКФ много меньше, чем интервал между отсчетами ВКФ (см. рис. 1), то для получения всех значений ВКФ необходимо провести дополнительные измерения, в которых стробы одного из каналов задерживаются на величину, кратную наибольшей длительности стробов, $\tau_3 = n\tau$, где n — номер измерения. Общее число измерений N определяется начальной неопределенностью времени задержки сигналов $\Delta t_{\text{н}}$:

$$N = \frac{\Delta t_{\text{н}}}{\tau}, \quad \text{если } \Delta t_{\text{н}} < T_c; \quad N = \frac{T_c}{\tau}, \quad \text{если } \Delta t_{\text{н}} \geq T_c.$$

Поскольку на интервал корреляции приходится не менее двух отсчетов ВКФ, то по нем можно определить как задержку, так и величину максимума ВКФ.

Подобная методика преобразования сигнала (селектирование сигнала узкими импульсами, расширение стробированного сигнала для прохождения по выходным низко-

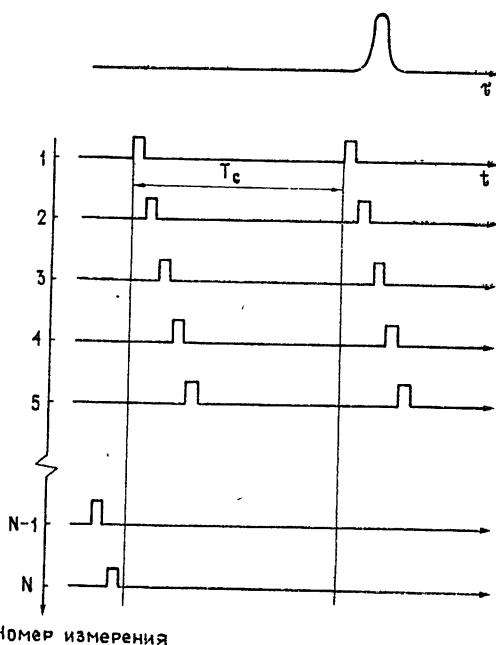


Рис. 1. Функция взаимной корреляции сигналов и последовательность стробов пункта, в котором задержка стробов изменяется при последовательных измерениях.

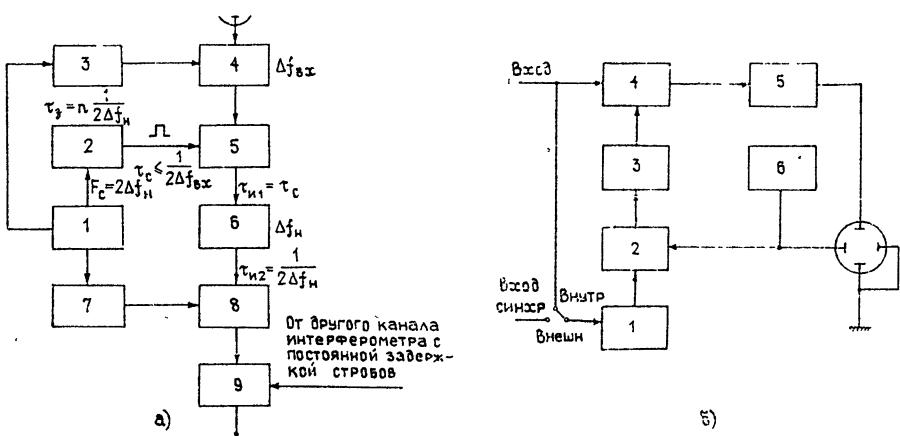


Рис. 2. Блок-схемы:

а) приемного пункта стrobоскопического интерферометра (в котором дискретно изменяется задержка);
 1 — опорный генератор, 2 — устройство дискретной задержки, 3 — гетеродин, 4 — приемник, 5 — селектор, 6 — низкочастотный тракт передачи, 7 — часы, 8 — устройство задержки, 9 — коррелятор;

б) стrobоскопического осциллографа;
 1 — генератор пилообразного напряжения, 2 — схема совпадения, 3 — генератор строб-импульса, 4 — селектор, 5 — усилитель, 6 — генератор развертки;

частотным цепям) применялась ранее в стrobоскопических осциллографах, поэтому целесообразно интерферометр, в котором используются выборки сигналов, обозначить стrobоскопическим. На рис. 2 для сравнения приводятся блок-схемы одного из приемных пунктов стrobоскопического интерферометра (в котором дискретно изменяется задержка стробов) и стrobоскопического осциллографа. К стrobоскопическому интер-

ферометру приводится также метод измерения корреляционной функции высокочастотного сигнала [5, 6], в котором сигналы в каждом канале преобразуются суммой гармоник $\sum_{n=0}^m n \omega_p$ — при достаточно большом числе гармоник сигнал гетеродина переходит в последовательность узких импульсов.

Целесообразно сравнить оба способа повышения точности измерения интерферометра: синтез по частоте и синтез по времени — стробоскопический интерферометр. Энергетические параметры обоих методов для отсчетов ВКФ сигналов при отдельных значениях задержки одинаковы. Выбор метода для конкретного интерферометра должен определяться условиями работы: измеряемыми параметрами, удобством и возможностями реализации.

Предел расширения полосы пропускания интерферометра определяется изменением угловой структуры источника излучения с частотой. Технические сложности создания широкополосных устройств и систем установки задержки не ограничивают применения стробоскопического метода, так как уже созданы стробоскопические устройства с временным разрешением до долей наносекунды.

Автор благодарит В. И. Галкина, Г. Ю. Кобзарева и С. П. Леоненко за плодотворную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Матвеенко, Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий, Изв. вузов — Радиофизика, 8, № 4, 651 (1965).
2. К. Келлерман, УФН, 109, вып. 3, 591 (1970).
3. В. С. Троицкий, В. А. Алексеев, В. Н. Гатэлюк, УФН, 117, вып. 2, 363 (1975).
4. A. Rogers, Radio Sci., 5, № 10, 1239 (1970).
5. R. M. Page, A. Bradzinsky, R. R. Zigler, Proc. IRE, 41, № 3, 128 (1953).
6. В.—А. В. Буйнявичус, Вопросы радиоэлектроники, серия Радиоизмерительная техника, вып. 7, 75 (1967).

Особое конструкторское бюро
московского энергетического
института

Поступила в редакцию
1 февраля 1979 г.

УДК 551.510.535

О СПЕКТРЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В F-СЛОЕ ИОНОСФЕРЫ

Л. М. Ерухимов, В. И. Ковалев, А. М. Лerner, Е. Н. Мясников,
И. Н. Поддольский, А. В. Рахлин

В настоящей работе представлены результаты измерений методом просвечивания ионосферы сигналами орбитальных ИСЗ искусственных неоднородностей, возбуждаемых мощным КВ радиоизлучением. В работе [1] были измерены спектры флуктуаций сигнала геостационарного ИСЗ при просвечивании на разных высотах области, занимаемой искусственными неоднородностями. Геометрия этого эксперимента позволяла наблюдать флуктуации сигнала, вызванные движением неоднородностей в направлении восток—запад (ось x), т. е. спектр амплитудных флуктуаций в этом случае был связан со спектром неоднородностей соотношением

$$\Phi_A(x_x = \frac{2\pi v}{V_x}) = \int_0^\infty \Phi_N(x_x, x'_y, x'_z = 0) dx'_y,$$

где $x_x = \frac{2\pi}{l_{b-3}}$, x'_y — волновые числа неоднородностей в плоскости «фазового экрана».

Как показали измерения, характерной особенностью спектров при «просвечивании» излучением ИСЗ турбулентной области вблизи высоты отражения мощных радиоволн являлось наличие максимума $\Phi_A(x_x)$ (а следовательно, и $\Phi_N(x_x)$) в диапа-

зоне масштабов $l_x \approx 500 \div 600$ м. Последнее свидетельствовало, по-видимому, о наличии неустойчивости, эффективно возбуждающей неоднородности данных масштабов. Одним из возможных механизмов генерации неоднородностей вблизи уровня отражения мощных радиоволн может быть самофокусировочная неустойчивость. В работе [2] была рассмотрена задача, в которой плоская радиоволна падала вертикально на ионосферный слой, и показано, что линейная стадия неустойчивости может приводить к образованию неоднородностей, вытянутых в плоскости геомагнитного меридиана; так как наиболее эффективное расслоение плазмы в данном случае должно иметь место только в направлении, ортогональном плоскости, образованной волновыми векторами радиоволны \mathbf{k} и магнитного поля \mathbf{H} .

Для проверки данной модели измерялся спектр флуктуаций сигналов спутника, пересекавшего возмущенную область в направлении север—юг. Ионосфера возбуждалась мощным КВ радиопередатчиком, расположенным вблизи г. Горького. Сигналы американских полярных ИСЗ NNS на частоте $f = 150$ МГц принимались в пункте наблюдения, расположенном в г. Смоленске. Для данной геометрии наблюдений плоскость «фазового экрана» составляет малый угол с плоскостью геомагнитного меридиана и спектр мерцаний определяется выражением

$$\Phi_A \left(z_y = \frac{2\pi v}{V_y} \right) = \int_0^{\infty} \Phi_N (z'_x = 0, z_y, z'_z) dz'_z, \quad z_y = \frac{2\pi}{l_{c-10}}.$$

При этом, используя разные пролеты ИСЗ, мы могли просвечивать различные высотные интервалы возмущенной области. На рис. 1 приведены измеренные на разных высотах значения индекса мерцаний ($I = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$) сигналов ИСЗ в интервале азимутов, соответствующих направлениям на возмущенную область. Как видно из рисунка, на высотах h_{H_1} и h_{H_2} достаточно четко видна ограниченная с юга и севера область, имеющая горизонтальные размеры $L \approx 100$ км, занятая искусственными неоднородностями. Для высот h_{H_3} и h_{H_4} северная граница выражена менее четко и на больших высотах практически сливаются с границей естественных ионосферных мерцаний. Отметим, что на этих высотах спектр флуктуаций сигнала при просвечивании возмущенной области оставался подобным спектру естественных мерцаний. Полученные здесь результаты совпадают с предшествовавшими измерениями спектров на больших высотах [1] и позволяют сделать вывод о том, что воздействие мощного радиоизлучения может приводить к «усилению» естественных ионосферных неоднородностей в достаточно широком высотном интервале.

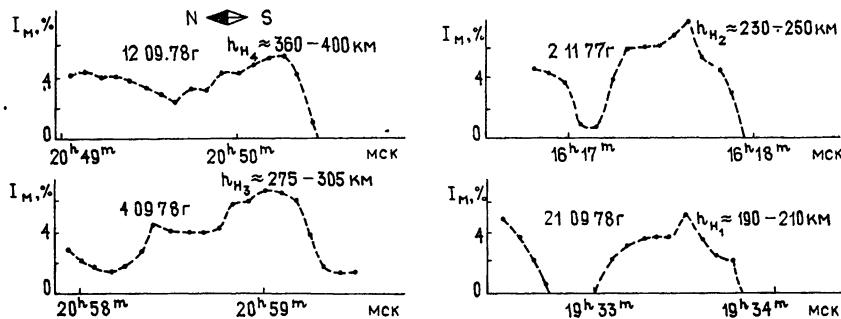


Рис. 1.

На рис. 2 приведен спектр флуктуаций сигнала для интервала высот h_{H_2} . Как видно, характерной его особенностью является немонотонный характер зависимости спектральной плотности от волнового числа неоднородностей. Вблизи масштабов $l_x \approx 700$ м имеет место максимум, аналогичный наблюдавшемуся (примерно на тех же масштабах) при просвечивании возмущенной области вблизи высот отражения мощных радиоволн сигналом геостационарного ИСЗ [1]. Так как эти два эксперимента позволили измерить спектры мерцаний в двух взаимно перпендикулярных направлениях (север—юг и восток—запад), то можно сделать вывод об изотропии (в области масштабов, соответствующих максимуму $\Phi_N(x)$) спектральной интенсивности искусственных неоднородностей в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля \mathbf{H} . Закон убывания спектральной плотности для спектра (см. рис. 2) и масштаб-

бов $l < l_m$ является примерно степенным $\Phi_A \sim v^{-p_1}$ с показателем степени $p_1 \approx 2,5$. Для модели спектра флуктуаций электронной концентрации вида

$$\Phi_N(x_x, x_y, x_z) \sim (\alpha x_x^2 + \beta x_y^2)^{-p/2} \exp\left(-\frac{x_z^2 l_z^2}{4}\right)$$

$$\left(x_x, x_y \gg \frac{2}{l_z} \right)$$

и измеренного значения $p = p_1 = 2,5$ можно получить, что в данном случае должно иметь место убывание величины флуктуаций электронной концентрации в сторону меньших масштабов $\langle \delta N^2(l) \rangle \sim l_{\perp}^{p-2}$. Как показали измерения спектров флуктуаций при просвечивании возмущенной области вблизи уровня отражения мощных радиоволн сигналом геостационарного ИСЗ ATS-6 (1976 г.), в различных условиях могут меняться как положение максимума спектральной плотности l_m , так и значение показателя степени спектра p_1 , для масштабов $l < l_m$. В частности, были измерены спектры, для которых значение $p_1 < 2$. Примеры характерных спектров амплитудных флуктуаций представлены на рис. 3. Отметим, что наблюдавшаяся искусственная ионосферная турбулентность с показателем степени спектра мерцаний $p_1 < 2$ могла быть следствием того обстоятельства, что источник неоднородностей в ряде случаев эффективно действует в широком интервале масштабов $100 \div 200 \text{ м} \lesssim l_{\perp} \lesssim 600 \div 700 \text{ м}$.

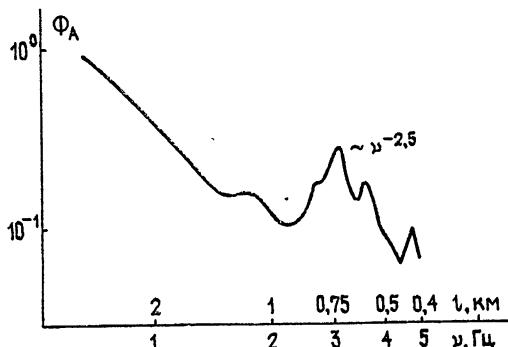


Рис. 2.

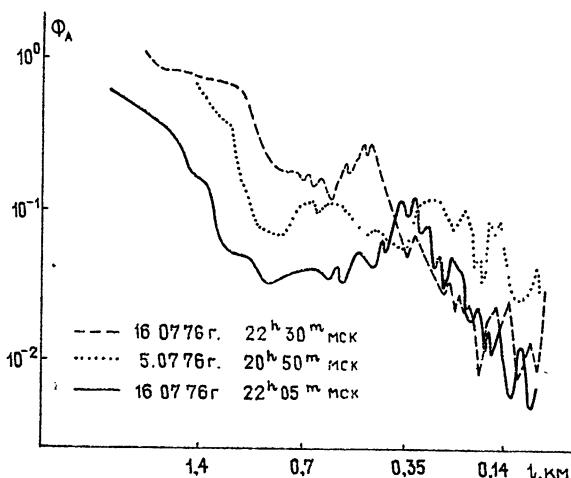


Рис. 3.

Авторы благодарят В. И. Мишина, И. Ф. Белова за помощь в организации и подготовке эксперимента, И. В. Попкова, Н. Н. Новикову за помощь в проведении измерений и обработке результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Ерухимов, Э. Е. Митякова, Е. Н. Мясников, С. В. Поляков, А. В. Рахлин, В. М. Синельников, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1814 (1977).
- В. В. Васьков, А. В. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1261 (1975).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 марта 1979 г.

УДК 621.371 22

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ
РАЗЛОЖЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ
МИКРОРАДИОВОЛН В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ**

В. И. Дробышевич, А. П. Наумов

При решении задач по распространению микрорадиоволн в земной атмосфере и по дистанционному исследованию природных ресурсов Земли могут оказаться удобными аппроксимации высотных зависимостей коэффициентов преломления и поглощения в атмосфере в виде разложений по заданным ортогональным системам базисных функций. В [1] показано, что в качестве оптимальных разложений случайных функций f , для которых скорость сходимости рядов в среднем является наибольшей, должны быть использованы собственные функции интегрального оператора, ядром которого служит соответствующая корреляционная функция B_{ff} . В [2] на основе статистического материала по радиозондированию атмосферы в Центральной части ЕТ СССР определены оптимальные ортогональные системы функций для коэффициентов поглощения γ и преломления N в СВЧ диапазоне в различные сезоны года (и при различных длинах волн λ для γ).

Если упомянутые базисные функции обозначить через $\Psi_K^f(h)$ (h — высота), то текущие реализации функции $f(h)$, согласно [1], представляются в виде

$$f_m(h) = \bar{f}(h) + \sum_{K=1}^m c_K^f \Psi_K^f(h), \quad (1)$$

а коэффициенты c_K , задание которых при принятом способе описания определяет отклонение рассматриваемого высотного профиля $f(h)$ от среднего профиля $\bar{f}(h)$, вычисляются из соотношения

$$c_K^f = \int_a^b [f(h) - \bar{f}(h)] \Psi_K^f(h) dh. \quad (2)$$

В (2) отрезок $[a, b]$ определяет область задания функции $f(h)$. Удобство аппроксимации (1) связано с возможностью использования небольшого количества (3–5) членов разложения при достаточной точности расчетов γ и N [1, 2]. В [3, 4] была установлена статистическая универсальность собственных векторов Ψ_K^f для некоторых метеоэлементов атмосферы (в частности, для температуры и удельной влажности). Поскольку радиохарактеристики атмосферы в микроволновом диапазоне существенно определяются метеопараметрами, то, в свете результатов [3], представляется целесообразным исследовать степень статистической стабильности оптимальных ортогональных разложений для γ и N , полученных в [2].

В данной работе коэффициенты разложений для характеристик поглощения γ на длине волны λ ($c_{K,\lambda}^f$) и преломления N (c_K^N) вычислялись по формуле (2) как по «своей», так и по «чужим» (по терминологии [3, 4]) системам функций $\Psi_{K,\lambda}^f$, Ψ_K^N [2]. При этом «своими» системами функций считались системы, полученные для тех же сезонов и длин волн, для которых рассматривались соответствующие радиохарактеристики атмосферы, а «чужими» — системы, полученные для другого сезона или для других длин волн при рассматриваемом сезоне, либо при одновременном несовпадении сезонов и длин волн. При исследовании вопроса о статистической стабильности разложений коэффициентов поглощения значения $c_{K,\lambda}^f$ вычислялись на длинах волн, при-

ходящихся как на окна прозрачности земной атмосферы ($\lambda = 0,33; 0,8; 3 \text{ см}$), так и на области молекулярных резонансов H_2O и O_2 ($\lambda = 1,35, 0,562 \text{ см}$). В анализе мы ограничились 5 членами разложения ($m = 5$) в аппроксимации (1).

В работе оценивались средние квадратичные ошибки восстановления высотных профилей коэффициентов поглощения и преломления относительно соответствующих величин (γ_i^3, N_i^3), вычисляемых непосредственно по результатам аэрологического зондирования атмосферы до высот $h \approx 16 \text{ км}$:

$$\tilde{\sigma}_N(h) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M [N_i^3(h) - N_i^B(h)]^2}; \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_{\gamma_\lambda}(h) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M [\gamma_i^3(\lambda, h) - \gamma_i^B(\lambda, h)]^2}. \quad (4)$$

Расчеты величин $N_i^3(h)$ и $\gamma_i^3(\lambda, h)$ выполнялись по тем же формулам, что и в [2]. Восстановление профилей $N_i^B(h)$, $\gamma_i^B(\lambda, h)$ осуществлялось по формуле (1) при использовании различных («своих» и «чужих») коэффициентов c_K^N , $c_{K,\lambda}^{\gamma}$ и функций Ψ_K^N , $\Psi_{K,\lambda}^{\gamma}$. Численные эксперименты были проведены примерно для 100 результатов аэрологического зондирования атмосферы в каждом из двух сезонов (лето, зима). В работе рассчитывались также среднеквадратичные по всем рассмотренным высотным уровням значения ошибок восстановления.

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^L \tilde{\sigma}_N^2(h_j)}{L-1}}, \quad \sigma_{\gamma_\lambda} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^L \tilde{\sigma}_{\gamma_\lambda}^2(h_j)}{L-1}}. \quad (5)$$

При сравнении точностей различных разложений удобно использовать среднюю относительную ошибку восстановления профилей $\gamma(h)$ и $N(h)$, согласно (1), равную отношениям σ_N и σ_{γ_λ} к соответствующим средним (по всем рассматриваемым уровням) значениям \bar{N} и $\bar{\gamma}_\lambda$.

Из анализа средних относительных ошибок восстановления профилей $\gamma(h)$ и $N(h)$ следует:

1 Результаты восстановления $\gamma_i^B(\lambda, h)$ -и $N_i^B(h)$ по «своим» системам функций являются близкими для летнего и зимнего периодов года. При этом средние ошибки восстановления N составляют менее 1%, а ошибки восстановления γ , как правило, не превышают $1 \div 5\%$ по диапазону. Исключение составило восстановление γ в зимний период года в области резонанса поглощения H_2O , центрированного к $\lambda = 1,35 \text{ см}$, где средняя ошибка возрастала до $\sim 8\%$.

2 При восстановлении профилей $N_i^B(h)$ по «чужой» (по сезону) системе функций средние ошибки несколько возрастают, но не превышают $\sim 1,5\%$ для лета и $\sim 5\%$ для зимы, что свидетельствует о достаточно высокой статистической стабильности соответствующих оптимальных базисных систем.

3 Разложения коэффициентов поглощения γ по «чужим» базисным системам обладают в общем меньшей статистической стабильностью, чем разложения N , хотя существуют ситуации (например, для γ в окнах прозрачности атмосферы в летний период года), когда соответствующие разложения оказываются также весьма стабильными (с точностью $\sim 3 \div 7\%$) по отношению к сезонным и спектральным заменам систем функций.

Разложения физических величин по ортогональным системам базисных функций позволяют в наиболее компактной форме представлять соответствующую эмпирическую информацию. Полученные выше результаты должны учитываться при практическом использовании разложений (1) для коэффициентов поглощения и преломления радиоволн в микроволновом диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. М. Обухов, Изв АН СССР, серия геофизическая, № 3, 432 (1960)
- 2 В. И. Дробышевич, А. П. Наумов. Изв вузов — Радиофизика, 21, № 12, 1742 (1978).

3. Л. И. Копрова, М. С. Малкевич, Изв АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 1, 27 (1965)
 4. М. С. Малкевич, Оптические исследования атмосферы со спутников, изд. Наука, М., 1973.

Вычислительный Центр СО АН СССР
 Научно-исследовательский
 радиофизический институт

Поступила в редакцию
 3 января 1979 г

УДК 538.56 : 519 25

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Г. И. Бабкин, В. И. Кляцкин

При изучении статистических характеристик нелинейных уравнений, описывающих различные физические процессы, на первый план выдвигается вопрос об эволюции плотности вероятностей для решения задачи, которая описывается кинетическим уравнением (уравнением Лиувилля). Однако написать такое уравнение удается далеко не всегда. Хорошо известно, что это можно сделать для обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (задачи Коши), см., например, [1]. Что же касается уравнений в частных производных, то уравнение Лиувилля было получено для квазилинейных уравнений [2] и для некоторых уравнений, содержащих производные первого порядка только в квадратичной комбинации [3]. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к случаю квазилинейного уравнения [4]. Ниже будет показано, что получить кинетическое уравнение можно для любых уравнений в частных производных первого порядка.

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка $g(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f) = 0$, которое, без ограничения общности, можно считать разрешенным относительно одной из производных:

$$f_t + H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{t} , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные, а f_t , $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ — частные производные функции f по t и x_i . Хорошо известно, что для уравнения (1) можно написать эквивалентную ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. С помощью этой системы легко получить затем кинетическое уравнение для плотности вероятности $P(\mathbf{x}, \mathbf{p}, f, t)$ в лагранжевых переменных.

Ниже будет показано, что в общем случае удается непосредственно получить кинетическое уравнение для плотности вероятностей $W(f, \mathbf{p}, p_{ik}; \mathbf{x}, t)$ в эйлеровых переменных. При этом необходимо ввести $(n^2 + n)/2$ дополнительных переменных $p_{ik} = p_{ki} = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_k}$, описывающих кривизну поверхности, ортогональной к характеристикам \mathbf{x} , \mathbf{p} . Схема вывода такова: введем плотность вероятностей

$$W = \delta[f(\mathbf{x}, t) - f] \delta[\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{p}] \delta[p(\mathbf{x}, t) - p], \quad (2)$$

где δ означает матрицу p_{ik} . Для W получаем уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} W - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} W - \frac{\partial}{\partial p_{ik}} \frac{\partial p_{ik}}{\partial t} W. \quad (3)$$

Дифференцируя (1) по x_i , а затем по x_k , можно найти уравнения для величин $\frac{\partial p_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial p_{ik}}{\partial t}$, которые, вообще говоря, содержат производные от f по x_i третьего порядка.

Однако, если записать выражение для величины $\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial W}{\partial x_i}$, то оно не будет содержать производных третьего порядка, и уравнение для W оказывается замкнутым. Лишь в случае, когда уравнение (1) является квазилинейным, величина W может не содержать дополнительных переменных p_{ik} [2]. Если начальное условие при $t = 0$ для уравнения (1) задано статистически, то функция W описывает эволюцию плотности

вероятностей со временем. Если же в уравнении (1) имеются флуктуирующие параметры, то необходимо провести дополнительное усреднение выражения (3).

Отметим, что в описанную выше схему без осложнений удается включить еще величину I , удовлетворяющую уравнению непрерывности

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(I \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0, \quad (4)$$

так как при этом не возникает новых переменных. В том случае, когда уравнение (1) соответствует распространению света в малоугловом приближении геометрической оптики, величина I определяет интенсивность световой волны. Если же (1) — это уравнение Гамильтона—Якоби, то I соответствует квадрату амплитуды квазиклассической волны.

Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим в качестве примера уравнение Гамильтона — Якоби с произвольным законом дисперсии при $n = 1$, тогда $H = G(p) + U(x)$, $p = f_x$, $q = f_{xx}$, $r = f_{xxx}$, а уравнения для p и q таковы:

$$p_t = -U' - G' q, \quad q_t = -U'' - G'' q^2 - G'r.$$

В результате получаем следующее уравнение для величины $W(f, p, q; x, t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + G' \frac{\partial W}{\partial x} + (pG' - H) \frac{\partial W}{\partial f} - U' \frac{\partial W}{\partial p} - (U'' + q^2 G'') \frac{\partial W}{\partial q} = 3G''qW.$$

Если уравнение (1) соответствует распространению света в малоугловом приближении геометрической оптики, то $n = 2$, $H = (p_1^2 + p_2^2)/2 - \epsilon(x_1, x_2, t)/2$, ϵ — отклонение диэлектрической постоянной от единицы, а f — эйконал, при этом достаточно ввести три дополнительные величины: p_{11}, p_{22}, p_{12} (в работе [3], где рассматривается такое уравнение, введена лишняя переменная). Кинетическое уравнение выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + p_t \frac{\partial W}{\partial x_t} + \frac{p_t^2}{2} \frac{\partial W}{\partial f} - p_{11} \frac{\partial}{\partial I} WI - \frac{\partial}{\partial p_{1k}} W p_{11} p_{1k} - \\ - W p_{11} = -\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial W}{\partial f} - \frac{\epsilon_t}{2} \frac{\partial W}{\partial p_t} - \frac{\epsilon_{1k}}{2} \frac{\partial W}{\partial p_{1k}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Когда ϵ — случайное гауссово поле, δ — коррелированное во времени, используя известную методику [1], можно усреднить уравнение (5) по ансамблю реализаций ϵ , что приводит к появлению в правой части диффузионных членов. После интегрирования по I и f вместо (5) получается более простое кинетическое уравнение, описывающее эволюцию $W(p, p; x, t)$.

Заметим, что в общем случае для системы (1), (4) можно написать кинетические уравнения как для $P(f, p, p; x, t)$, так и для $W(f, p, p; x, t)$; эти величины, в соответствии с полученными в работе [4] результатами, связаны соотношением $P = IW$, следствием которого является равенство

$$P(f, p, x, t) = I(t, x) \int dI dp \hat{W}(f, p, p; x, t).$$

Отсюда следует, что для функции

$$\tilde{W}(f, p, x, t) = I(x, t) \delta[f(x, t) - f] \delta[p(x, t) - p]$$

можно получить замкнутое уравнение, совпадающее с уравнением для плотности вероятностей лагранжевых переменных f, p, x . После введения соответствующей нормировки функция \tilde{W} будет совпадать с P .

Заметим, что в работе [6] получено кинетическое уравнение для частного случая $n = 1$, однако это уравнение является интегродифференциальным и не допускает обобщения на случай $n > 1$.

Авторы благодарны А. И. Саичеву за полезное обсуждение и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, 940. (1974).

- 3 А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).
 4 В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1165 (1977).
 5. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. Наука, М., 1964.
 6 А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974)

Тихоокеанский океанологический
институт ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
25 октября 1978 г.

УДК 541.1

О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИЛЬНО МИНЕРАЛИЗОВАННЫХ СОЛЕВЫХ РАСТВОРОВ

А. И. Смирнов, Е. А. Шарков

Определенные трудности, возникающие при интерпретации результатов радиотепловых наблюдений сильно минерализованных частей морских акваторий [1], связаны прежде всего с отсутствием систематических экспериментальных данных по диэлектрическим свойствам сильных электролитов в дециметровом и метровом диапазонах длин волн [2], где использование дистанционных радиофизических методов для решения указанных задач, по-видимому, наиболее эффективно.

В настоящем сообщении приведены результаты экспериментальных исследований диэлектрических свойств сильного моноэлектролита (соль NaCl) в диапазоне длин волн 10 см — 150 см при минерализациях, близких к соленостям Каспийского моря (12%), Черного моря (18%), Мирового океана (35%), залива Сиваш (100%) и залива Кара-Богаз-Гол (200%). Кроме того, в тех же частотных диапазонах были исследованы диэлектрические параметры смешанного раствора солей, по составу близкого к морской воде.

Измерения проводились на специальном стенде, включающем в себя генераторы СВЧ, измерительные линии соответствующих диапазонов; развязки и индикаторное устройство (измеритель отношений напряжений). Исследуемый раствор (после специального приготовления и титрования) заливался в специально изготовленную коаксиальную камеру с герметизированным короткозамыкателем скользящего типа. Для вычислений диэлектрических постоянных растворов были использованы методы «двух толщин» и «бесконечного слоя» [3]. Среднеквадратичные ошибки измерений на всех диапазонах не превышали следующих значений: 2—3% (для данных ϵ_1) и 3—4% (для данных ϵ_2).

В табл. 1 представлены экспериментальные результаты по измерению действительной (ϵ_1) и мнимой (ϵ_2) частей диэлектрической постоянной, а также вычисленный на основе этих данных радиояркостный контраст пресной и минерализованной воды. В скобках указано расчетное значение диэлектрических параметров пресной воды на основе модели Дебая с параметрами, установленными по экспериментальным данным сантиметрового и миллиметрового диапазонов (приведенным, например, в [4]). Перевод величин солености исследованного раствора в «нормальность» осуществлен в помощь [5]. Из анализа табл. 1 видно, что при малых соленостях (до 40%) наиболее чувствительным к радиояркостному контрасту является метровый диапазон (1 К при изменении солености на 1%), при повышенных соленостях (100—200%) — диапазоны 18—75 см (0,05 К на 1%), а при высоких (более 200%) чувствительность диапазонов к величине минерализации приблизительно одинаковая и весьма слабая (1—2 К на 100%).

В табл. 2 приведены результаты исследования по указанной установке диэлектрических характеристик в тех же СВЧ диапазонах сложных растворов поваренной соли, хлористого магния и сернокислого магния (парциальные концентрации компонент указаны в табл. 2), а также представлены вычисленные по этим данным возможные радиотепловые контрасты. Из анализа данных табл. 2 следует, что добавки солей магния в целом очень слабо влияют на действительную часть диэлектрической постоянной (в пределах ошибки эксперимента она остается постоянной) и довольно значительно увеличивают затухание в электролите. За счет этого возможен в основном отрицательный контраст в радиотепловых характеристиках сложных растворов по отношению к монорастору (от +0,2 до —4,0 К).

Существующие в экспериментальной практике высокочувствительные радиотепловые комплексы [6], возможно, позволяют дистанционно выявлять физико-химические особенности сложных природных солевых растворов по спектральным характеристикам их радиоизлучения.

Таблица 1

Диэлектрические характеристики сильных электролитов (NaCl)

$\frac{\text{Нормаль-} \text{ность,}}{\lambda}$	Сolenость, $\eta_{(n)}$	$\lambda=10 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=18 \text{ cM}, t=10^\circ\text{C}$			$\lambda=18 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=75 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=150 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$		
		ε_1	ε_2	$\Delta T_\alpha, \text{K}$	ε_1	ε_2	$\Delta T_\alpha, \text{K}$									
0*	0*	79,4 (78,33)	10,2 (13,52)	0	81,7 (82,48)	6,8 (10,21)	0	82,3 (80,79)	4,1 (1,86)	0	82,1 (80,82)	3,7 (0,93)	0	82,1 (82,3)	3,7 (0,93)	0
0,20	12	78,4	27,3	3,1	82,3	34,7	5,3	80,4	56,3	9,4	82,3	116	23,2	82,3	116	23,2
0,31	17,9	76,2	34,9	4,2	82,9	42,2	5,3	79,7	73,7	14,4	80,4	160	30,9	80,4	160	30,9
0,63	36,0	76,4	47,2	8,0	83,1	57,8	11,4	80,2	108	23,3	79,9	203	36,5	79,9	203	36,5
1,83	100,1	72,0	65,8	13,6	77,6	79,2	17,1	79,4	139	30,2	77,8	31	39,2	77,8	31	39,2
3,92	200,7	68,1	78,6	18,3	71,8	97,6	22,1	72,7	165	35,4	74,1	258	41,9	74,1	258	41,9
5,08	250	82,3	64,9	19,0	72,2	104	23,5	70,2	178	37,5	70,9	267	42,8	70,9	267	42,8

* Дистиллированная вода

Таблица 2

Диэлектрические характеристики смешанных растворов электролитов

Вид смеси растворов и концентрация компонента $\eta_{(n)}$	$\lambda=10 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=18 \text{ cM}, t=10^\circ\text{C}$			$\lambda=18 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=75 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$			$\lambda=150 \text{ cM}, t=18^\circ\text{C}$		
	ε_1	ε_2	$\Delta T_\alpha, \text{K}$	ε_1	ε_2	$\Delta T_\alpha, \text{K}$									
NaCl(20) + MgCl ₂ (5,4)	77,7	39,8	0	81,1	44,8	0	80,3	80,4	0	80,5	168	0	80,5	168	0
NaCl(20) + MgCl ₂ (7,8) + MgSO ₄ (5)	76,4	40,6	+0,26	80,7	48,3	-0,95	80,1	86,2	-1,58	80,3	172	-0,45	80,3	172	-0,45
	76,1	44,7	-1,0	80,2	51,6	-1,85	79,7	94,5	-3,92	80,6	187	-2,17	80,6	187	-2,17

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. А. Арманд, А. Е. Башаринов, А. М. Шутко, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 6, 809 (1977).
2. Я. Ю. Ахадов, Диэлектрические свойства бинарных растворов, изд. Наука, М., 1977
3. Измерения в электронике, Справочник под ред. Б. А. Доброхотова, изд. Энергия, М., 1965
- 4 В. Ю. Райзэр, Е. А. Шарков, В. С. Эткин, Препринт ИКИ АН СССР, Пр-164, М., 1974
- 5 В. А. Рабинович, З. Я. Хавин, Краткий химический справочник, изд. Химия, М., 1977.
- 6 В. Р. Амирханян, Е. А. Беспалова, М. Г. Булатов и др., Труды ГГО, 1976, вып. 371, стр. 134

Институт космических исследований
АН СССР

Поступила в редакцию
19 февраля 1979 г.