

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Снегирев С. Д. О квазипериодических флуктуациях радиоизлучения Солнца с периодами от 45 до 90 мин в дециметровом диапазоне волн	5
Благовещенский Д. В., Благовещенская Н. Ф., Курченко Ю. А., Пирог О. М. Тонкая структура высокоширотной ионосферы во время суббурь	12
Павлов В. А. Воздействие землетрясений и извержений вулканов на ионосферную плазму	19
Кондратенко А. Н., Куклин В. М. Возбуждение магнитно-звуковых колебаний в сильнонеоднородной плазме	38
Попов В. С., Троицкий С. В., Якименко И. П. О поверхностных возбуждениях в плазме, граничащей с металлом	46
Зинченко В. П., Красовицкий В. Б. Нелинейная стабилизация поперечной черенковской моды в плазме внешним магнитным полем	51
Аракелян С. М., Варданян Г. А., Выслоух В. А., Ляхов Г. А., Макаров В. А., Чилингарян Ю. С. Влияние эффектов пространственной дисперсии нелинейности на самофокусировку лазерного излучения в жидких кристаллах. Теория и численный эксперимент	55
Тиунов Е. А. Влияние невзаимных элементов на взаимодействие эллиптически поляризованных встречных волн в кольцевых газовых лазерах	62
Кузнецов А. Н., Петухов Ю. М. Магнитный резонанс оптически ориентированных атомов, взаимодействующих со стенкой	66
Новиков А. А. Об оптимальных режимах работы распределенных автогенераторов	70
Позументов И. Е. К статистическому анализу линейных систем с квадратичными флуктуациями параметров	75
Ефремов Г. Ф. К нелинейной теории флуктуаций термодинамических величин	81
Крутиков В. А. О статистических характеристиках оптического излучения в среде с крупномасштабными дискретными неоднородностями	84
Давыдов В. А. Излучение равномерно движущегося заряда на нестационарном слое	95
Бабич Л. П., Лойко Т. В., Шамраев Б. Н. К вопросу об усилении поля в прикатодной области наносекундных разрядов в плотных газах	100
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Дубков А. А., Мальцев А. А. О производящей функции моментов аддитивных функционалов разрывных марковских процессов	107
Алексеев Б. Ф., Мамыкин А. И. Ядерная магнитная релаксация во вращающейся системе координат. Феноменологический подход	109
Новиков А. А. О методе нормальных форм для волновых систем	111
Калинин М. И. Параметрическое воздействие последовательности коррелированных импульсов на линейную динамическую систему	114
Калинин М. И. О резонансном взаимодействии стохастического электромагнитного излучения с веществом	116

УДК 523.164.32

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЯХ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА С ПЕРИОДАМИ ОТ 45 СЕКУНД ДО 90 МИНУТ В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

С. Д. Снегирев

Приведены результаты исследований квазипериодических компонентов (КПК) интенсивности интегрального радиоизлучения Солнца в дециметровом диапазоне длин волн на $\lambda = 60$ и 30 см (1972—1973 гг.). Обнаружены компоненты с периодами от 45 до 90 с и от 5 до 90 мин. Отмечено, что КПК с периодами 45—90 с присутствуют практически во всех записях, в то время как компоненты с периодами 5—90 мин появляются нерегулярно (примерно в 50% записей). Проведен анализ влияния условий распространения радиоволн в ионосфере Земли на принимаемое радиоизлучение Солнца в дециметровом диапазоне длин волн. На основании выполненных оценок и материалов наблюдений делается вывод о солнечном происхождении обнаруженных квазипериодических компонентов. Высказываются предположения о характере волновых процессов в короне Солнца, которые могут быть ответственными за происхождение наблюдавшихся квазипериодических компонентов.

Одним из эффективных методов получения новой информации о Солнце является изучение квазипериодических компонентов (КПК) флуктуаций солнечного радиоизлучения. В последние годы изучение флуктуаций радиоизлучения Солнца проводится на многих обсерваториях. Большинство наблюдений выполнено в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн, что соответствует излучению, приходящему из переходного слоя, хромосферы и более низких слоев [1]. Нами была сделана попытка получения информации о волновых процессах в нижней короне путем исследования флуктуаций дециметрового радиоизлучения Солнца.

Исследования в этом диапазоне волн потребовали заново рассмотреть многие вопросы наблюдений и в первую очередь возможные «паразитные» эффекты, которые могут вызвать появление КПК несолнечного происхождения. К таким эффектам относятся: шумы приемника, нестабильность эталона, наводка, излучение атмосферы, излучение и переизлучение от окружающих предметов, попадающее в боковые лепестки диаграммы направленности антенны, промышленные помехи, флуктуации коэффициента усиления приемника, неточности сопровождения Солнца антенной, влияние распространения в атмосфере Солнца и Земли, влияние математической обработки. Ниже мы рассмотрим «паразитные» эффекты, специфические для дециметрового диапазона длин волн. Общие для сантиметрового и дециметрового диапазона факторы, влияющие на принимаемый сигнал, подробно рассмотрены в [2, 3].

Излучение атмосферы в дециметровом диапазоне волн незначительно, а оценивая величину флуктуаций проходящего через атмосферу сигнала [5] в дециметровом диапазоне длин волн и учитывая, что наблюдения проводились при углах $\varphi > 20^\circ$, получим, что величина

флуктуаций не может превышать 0,5% от полного потока солнечного радиоизлучения.

Излучение галактического фона может составить десятки градусов (1% от полного потока солнечного радиоизлучения), но пространственные масштабы изменения температур таковы, что трудно ожидать получения периодов меньше нескольких часов. Гораздо существеннее эффект, связанный с интерференцией между лучом, попадающим в главный лепесток, и лучом, отраженным от Земли и попавшим в один из боковых лепестков антенны. В этом случае приемная система напоминает морской интерферометр.

Следуя [4] и предположив постоянство уровня боковых лепестков, начиная с четвертого, получим выражение для мощности на выходе такой системы в случае протяженного источника диаметром $2W$:

$$P = P_0 \left(1 + M \sqrt{F} |K| \frac{\sin [K(2H \cos \theta + D) W]}{K(2H \cos \theta + D) W} \times \right. \\ \left. \times \cos [2KH \sin \theta + KD\theta + \varphi_k] \right), \quad (1)$$

где $P_0 = 4W\Delta\omega p_0$ — мощность, принимаемая изолированной антенной в главный лепесток диаграммы от всего источника,

$$M = \frac{\sin K(2H \sin \theta + D\theta) \frac{\Delta\omega}{\omega}}{K(2H \sin \theta + D\theta) \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

— множитель, определяющий глубину модуляции интерференционной картины, H — высота антенны, ω — несущая частота, $\Delta\omega$ — полоса приема, F — диаграмма направленности антенны по мощности, K — коэффициент отражения от Земли, φ_k — разность фаз, вносимая при отражении Земли. Влияние конечности размеров источника на глубину модуляции интерференционной картины определяется множителем типа $\frac{\sin x}{x}$, где $x = K(2H \cos \theta + D)\omega$.

Из (1) получим зависимость периода интерференционной картины от высоты (θ) Солнца над горизонтом и от вертикальной скорости подъема Солнца:

$$T(\theta) \leq \frac{\lambda \cdot 60 \cdot 57,3}{\beta(2H \cos \theta + D)} \text{ (мин)}, \quad (2)$$

где β — вертикальная скорость подъема Солнца в град/ч, λ , H , D — в метрах.

Запишем условие интерференции:

$$\Delta r \leq c\Delta T, \quad (3)$$

где $\Delta r = 2H \sin \theta + D\theta$ — разность хода между прямым и отраженным лучами, $\Delta T = \Pi/\Delta\omega$ — длительность цуга волны. Переписывая (3) для полосы пропускания приемника Δf , получим

$$\Delta f_n \leq \frac{c}{2(2H \sin \theta + D\theta)}. \quad (4)$$

Из формул (1)–(4) можно определить возможность появления интерференционной картинки и ее параметры для конкретного случая.

Теперь рассмотрим влияние ионосферы на принимаемый нами сигнал. Наиболее значительное влияние на проходящий сигнал могут оказать следующие факторы:

1) дифракция радиоизлучения на неоднородностях электронной концентрации,

2) поглощение радиоволн в ионосфере,

3) эффект Фарадея.

Неоднородности ионосферы принято делить на мелкомасштабные, постоянно присутствующие в ионосфере ($l = 0,1 \div 1$ км, $V_{др} \sim 40 \div 160$ м/с) и периодически возникающие крупномасштабные неоднородности ($l = 100 \div 150$ км, $V_{др} \sim 180$ м/с) [6, 7].

Особый интерес для нас представляет электронная концентрация в неоднородностях. Достаточно уверенно можно полагать следующие значения электронной концентрации в зависимости от размеров неоднородностей [8]:

$$l \sim 50 \text{ м} \quad - \quad \frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-4},$$

$$l \sim 1 \div 5 \text{ км} \quad - \quad \frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-8},$$

$$l \sim 100 \div 350 \text{ км} \quad - \quad \frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-2},$$

$$l \sim 500 \text{ км} \quad - \quad \frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-1}.$$

Неоднородности регистрируются на высотах от 100 до 1000 км, но основная часть — на высоте 200—400 км [9—11]. Что касается длительности существования неоднородностей, то мелкомасштабные неоднородности живут несколько минут, хотя и присутствуют в ионосфере постоянно [12]. Крупномасштабные неоднородности живут дольше: от нескольких минут до часа, причем, чем крупнее неоднородность, тем дольше она живет. Для неоднородностей со временем жизни 10 мин — $\frac{\Delta N}{N} \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$, характерное время появления один раз в час. Для

неоднородностей с линейными размерами около 500 км и $\frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-1}$ характерное время появления — один раз в месяц [13].

Рассматривая возможные флуктуации за счет дифракции на мелкомасштабных неоднородностях, в приближении фазового экрана получим величину $\frac{\Delta T}{T} \leq 10^{-4}$. Возможный период этих флуктуаций — от долей секунды до нескольких секунд. Флуктуации интенсивности за счет увеличения поглощения очень малы и в реальном случае вряд ли могут вызвать флуктуации потока больше $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$.

Присутствие в ионосфере магнитных полей делает среду магнитоактивной, что приводит к повороту плоскости поляризации (эффект Фарадея). При наблюдении по частоте $f \geq 300$ МГц и в отсутствие сильных изменений магнитного поля этим эффектом можно пренебречь [14]. В результате просвечивания внешней короны Солнца галактическими радиоисточниками были обнаружены мелкомасштабные неоднородности околосолнечной плазмы [15], рассеяние радиоволн на которых можно рассматривать как дифракцию. Однако дифракционной картины наблюдаться не должно, так как не только Солнце, но и ло-

кальные источники, которые могут давать в дециметровом диапазоне волн 20% общего потока радиоизлучения, не являются точечными по сравнению с размерами неоднородностей.

Для проведения наблюдений в 1972 г. на $\lambda = 60$ см и в 1973 г. на $\lambda = 30$ см мы использовали одинаковые антенные системы на полигоне НИРФИ «Старая Пустынь». Зеркало диаметром 7,0 м на вертикально-азимутальной установке с полуавтоматическим сопровождением позволяет выдерживать точность сопровождения Солнца антенной лучше 2'. Для того, чтобы ошибка не превышала 0,05% от полного потока солнечного радиоизлучения, чувствительности приемной аппаратуры, точность сопровождения должна быть не хуже $\pm 3'$. В обоих случаях мы применяли квазиулевой метод наблюдений и в качестве компенсирующего сигнала использовали сигнал от генератора шума ГШ.

С 20 марта по 10 апреля 1972 г. нами был поставлен предварительный эксперимент с целью выяснения возможности наблюдения КПК флуктуаций радиоизлучения Солнца в дециметровом диапазоне. Для наблюдений использовался радиометр П5-9 ($\lambda = 60$ см) с флуктуационным порогом чувствительности 0,5 К при постоянной времени $\tau = 20$ с [16]. Антенная система радиотелескопа принимала горизонтально поляризованное излучение, кроме того, в период наблюдений происходило активное таяние снега, что увеличило значение коэффициента отражения от Земли. Все это в совокупности с узкой полосой ПЧ-приемника (16 МГц) сделало заметным эффект интерференции, описанный выше, и вынудило нас ограничиться обработкой записей длиной около 1 часа вблизи местного полудня, когда Солнце практически не имеет вертикальной составляющей скорости и, следовательно, не дает периодической картины.

В июле—августе 1973 г. в период низкой активности Солнца мы проводили наблюдения радиоизлучения Солнца на волне $\lambda = 30$ см [17], излучаемого более низкими слоями солнечной короны, мы также приняли меры для исключения возможности появления интерференционного эффекта. Во-первых, приемник имел большую полосу пропускания $\Delta f = 40$ МГц, во-вторых, наблюдения проводились на вертикальной поляризации (в качестве облучателя в обоих случаях использовался диполь) и, в-третьих, наблюдения происходили летом, когда почва была сухой, что уменьшило величину коэффициента отражения от Земли. Кроме того, для обработки были отобраны записи, сделанные в солнечную безветренную погоду. Таким образом, мы исключили возможность попадания в диаграмму тяжелых дождевых облаков и влияние порывов ветра на точность сопровождения.

Чувствительность приемника $\delta T = 0,5$ К при $\tau = 1$ с. С целью проверки аппаратуры на стабильность были сделаны контрольные записи сигнала от ГШ (квазиулевым методом при сигнале, примерно равном сигналу от Солнца), по продолжительности равные основным записям. Контрольные записи были обработаны по тем же программам, что и записи солнечного радиоизлучения.

Записи радиоизлучения Солнца на $\lambda = 60$ и 30 см были обработаны с целью обнаружения КПК с периодами 30—300 с [18]. Интерес к этому интервалу частот определяется теоретическими предположениями о том, что энергия в верхние слои передается высокочастотными волнами (периоды 30—180 с), которые генерируются в конвективной зоне и могут легко проходить область минимума температур [19]. Данные наблюдений на $\lambda = 30$ см были также обработаны с целью поиска долгопериодных КПК — от 5 минут до двух часов (которые, возможно, являются проявлением собственных колебаний различных активных областей на Солнце [20]).

Математическая обработка результатов проводилась по методике, изложенной в [21], а интервалы достоверности определялись по формулам и таблицам, приведенным в [22]. Нами учитывались только те гармоника, достоверность которых превышала 80%. Амплитуда исследуемых колебаний превышает 0,5% от полного потока солнечного радиоизлучения спокойного Солнца, и поэтому мы с большой степенью уверенности можем говорить о солнечном происхождении обнаруженных КПК.

При обработке данных 10-часовых интервалов наблюдений на $\lambda = 30$ см только в 50% случаев наблюдались КПК с периодами более 5 минут, в остальные дни мы не смогли выявить КПК даже с 50-процентной достоверностью. Кроме того, вероятность появления КПК этого диапазона с различными периодами (5—90 минут) почти одинакова. Мы сделали попытку установления связи КПК с солнечной активностью в те дни наблюдений, данные за которые обрабатывались с целью поиска КПК с периодами более 5 минут. Прямого соответствия наличия КПК какому-либо параметру солнечной активности установить не удалось. Интересно, что КПК отсутствовали в дни с минимальной активностью Солнца (число Вольфа $W = 0$, суммарная площадь пятен в МДП $S = 0$) и при достаточно активном Солнце ($W > 50$, $S > 220$). Если считать, что появление КПК связано с активными областями, то вполне возможно, что во втором случае отсутствие КПК связано с наличием колебаний из нескольких областей, взаимно «завывающих» друг друга.

На рис. 1 в качестве примера приведены спектры мощности радиоизлучения Солнца за 20, 23 июля 1973 года и спектр ГШ.

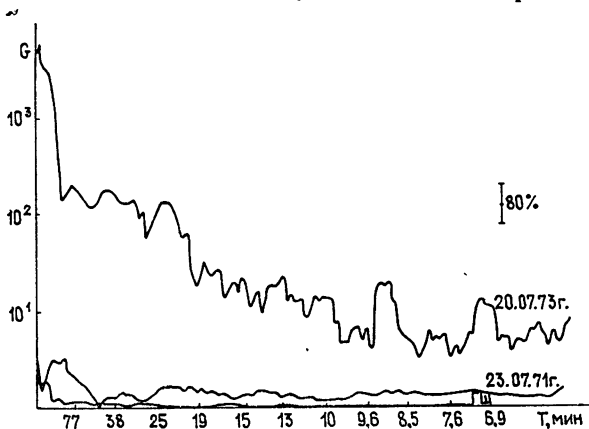


Рис. 1.

Совершенно иную картину мы наблюдаем при обработке этих же данных с целью поиска КПК с периодами около 1 минуты (для этой цели обрабатывались данные часовых интервалов записей). Общий вид полученных спектров значительно отличается от вида спектров, отвечающих обработке 10-часовых интервалов: 1) в каждом из обработанных интервалов с достоверностью 80% выделяются какие-либо КПК, 2) около 90% всех достоверно обнаруженных КПК сосредоточены в четко выделенных группах с периодами 40—50 с и 60—90 с.

На рис. 2 приведена гистограмма периодов, выделившихся из 25 непересекающихся интервалов с 80-процентной достоверностью. Спектральная ширина каждой компоненты определялась на уровне 0,7 соответствующего пика.

Для определения времени жизни отдельных компонентов нами были построены динамические спектры. Имел место достаточно большой разброс времени жизни исследуемых короткопериодических компонентов: от 15 минут до двух часов.

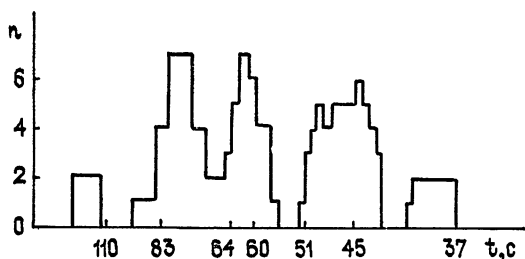


Рис. 2.

Постоянное присутствие в дециметровом радиоизлучении Солнца короткопериодических компонентов и нерегулярность появления КПК с периодами более 5 минут подтверждают теоретические предположения о том, что в нижнюю корону могут в основном проходить волны с периодами 30—180 с [20].

Автор признателен М. М. Кобрину за ценные советы и обсуждение работы и всем товарищам, принимавшим участие в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Кобрин, *Phys. Sol., Potsdam*, № 2, 3 (1976).
2. М. М. Kobrin, V. V. Pakhomov and N. A. Prokof'eva, *Sol. Phys*, 50, 113 (1976).
3. В. В. Пахомов, *Phys. Sol., Potsdam*, № 2, 41 (1976).
4. Д. Л. Позы, Р. Н. Брейсуэл, *Радиоастрономия*, ИЛ, М., 1958.
5. К. С. Станкевич, Л. Н. Бондарь, *Изв. вузов — Радиофизика*, 6, № 4, 669 (1963).
6. Н. А. Чернобровкина, сб. *Ионосферные исследования*, вып. 2, изд. Наука, Новосибирск, 1969.
7. В. Д. Гусев, Л. Д. Драчев, С. Ф. Миркамон, *ДАН СССР*, 123, № 5, 817 (1958).
8. Г. Г. Гетманцев, К. И. Грингауз, Л. М. Ерухимов, Ю. А. Кривцов, Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. А. Рудаков, С. М. Рытов, *Изв. вузов — Радиофизика*, 11, № 5, 649 (1968).
9. G. Herman, *Rev. Geophys.*, 4, № 2, 255 (1966).
10. A. Hewish, *Proc. Roy. Soc. Am.*, 214, 494 (1952).
11. G. E. Stuart and J. E. Tilheridy, *J. Atm. Terr. Phys*, 28, 255 (1966).
12. Б. Н. Гершман, *Динамика ионосферной плазмы*, изд. Наука, М., 1975.
13. Н. А. Чернобровкина, *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*, вып. 7, изд. Наука, М., 1970, стр. 89.
14. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, изд. Наука, М., 1967.
15. Н. А. Лотова, *УФН*, 95, № 2, 293 (1968).
16. В. В. Пахомов, С. Д. Снегирев, *Астрономический циркуляр*, № 753 (1973).
17. С. Д. Снегирев, Н. Г. Каверин, Е. А. Аверьянихина, *Астрономический циркуляр*, № 905 (1976).
18. В. В. Пахомов, С. Д. Снегирев, *Письма в Астрономический журнал*, 3, № 5, 229 (1977).
19. R. F. Stein and S. Leibacher, *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, 12, 401 (1974).
20. Э. И. Могилевский, О. Г. Гонтарев, *Солнечные данные*, № 6, 72 (1975).
21. Отчет НИРФИ, *Исследования радиоастрономическими методами волновых движений в атмосфере Солнца*, Гос. рег. № 73017727, 1973.
22. F. N. Edmonds, *Astrophys. J.*, 144, 733 (1966).

QUASI-PERIODIC FLUCTUATION OF SOLAR RADIO EMISSION WITH PERIODS
FROM 45 SECONDS TO 90 MINUTES AT DECIMETER WAVELENGTHS*S. D. Snegirev*

The results of investigations of quasi-periodic components (QPC) of the integral solar radio emission intensity at decimeter wavelengths $\lambda = 60$ and 30 sm (1972—1973). Components with periods 45—90 sec and 5—90 min are detected. The components with periods 45—90 sec are present practically in all records while the components with periods 5—90 min appear not regularly (approximately in 50% of records). The influence of the conditions of radio wave propagation in the Earth ionosphere upon the received solar radio emission at decimeter wavelengths has been analysed. A conclusion on the solar origin of discovered quasi-periodic components is made on the basis of estimations and observational data. The assumptions are made on the character of wave processes in the solar corona which may be responsible for the origin of observed quasi-periodic components.

УДК 551.510.535

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЫ ВО ВРЕМЯ СУББУРЬ

Д. В. Благовещенский, Н. Ф. Благовещенская, Ю. А. Курченко,
О. М. Пирог

Анализируется динамика тонкой структуры авроральной E -области ионосферы (размер мелкомасштабных неоднородностей, флуктуации электронной концентрации, коэффициент мутности ионосферы, угловой спектр рассеянных волн и др.) в течение суббури по данным частотно-разнесенного приема на одноканальной радиотрассе, проходящей вдоль зоны полярных сияний.

Исследование параметров тонкой структуры авроральной ионосферы во время суббури проводилось методом частотно-разнесенного приема КВ сигналов на радиотрассе, расположенной вдоль зоны полярных сияний ($D = 1450$ км). Период наблюдений — зима, ночные часы. Для частотных разносов $\Delta f = 3; 6$ и 12 кГц осуществлялся попарный прием монохроматических сигналов. Рабочие несущие частоты — $10,7$ и $16,7$ МГц. Использовались V -образные антенны с длиной луча 40 м и приемники типа Р-250 М2 с выводом на многоканальный быстродействующий самописец. Обработка записей сигналов (около 300 сеансов) проводилась на интервале стационарности флуктуаций длительностью $1-3$ минуты.

Рассчитывались следующие характеристики КВ сигналов.

— Коэффициенты частотной взаимной корреляции квадрата огибающей сигнала $r_{R^2, \omega}$ для разнесения по частоте $\Delta f = 3; 6$ и 12 кГц. Находилась зависимость $r_{R^2, \omega}(\tau)$ как функция временного сдвига τ , и далее в анализе использовались максимальные значения $r_{R^2, \omega}(\tau)$, а не его значения при $\tau = 0$. Такой способ определения $r_{R^2, \omega}$ позволяет исключить влияние регулярной рефракции на характер изменения коэффициента частотной корреляции [1].

— Индекс флуктуаций, равный

$$F = \frac{(\overline{R^2} - \overline{r^2})^2}{\overline{R^2}^2},$$

где R — амплитуда огибающей сигнала.

— Временной радиус корреляции флуктуаций τ_k , определяемый из автокорреляционной функции на уровне $1/e$.

— Безразмерное отношение моментов $\overline{R^2}/\overline{R^2}$, по которому в дальнейшем находились значения коэффициента мутности ионосферы β^2 . Последний представляет отношение энергий «зеркальной» компоненты сигнала к сумме «рассеянных».

Перечисленные параметры ниже используются в качестве исходных при вычислении характеристик ионосферы.

Закономерности изменения τ_k , F , r_{R^2} и т. д. во время авроральных

суббурь прослеживались путем сопоставления указанных характеристик сигналов с вариациями H -составляющей геомагнитного поля в средней точке трассы. Для анализа было выбрано 14 изолированных отрицательных бухт с резко выраженным началом в окологлоуночном секторе зимнего периода. В максимуме бухт отклонения H -составляющей достигали значений $\delta H_{\max} = 350 \div 650 \gamma$. Далее проводилось усреднение статистических характеристик КВ сигналов по всем суббурям на получасовых интервалах времени наблюдения за три часа до начала резкого уменьшения H -составляющей геомагнитного поля (принято за момент времени $T = 0$) и в течение трех часов после.

На рис. 1 представлены усредненные значения радиуса корреляции τ_k , индекса флуктуаций F и коэффициентов частотной корреляции r_{R^2} в различные фазы авроральной суббури. Верхние кривые на рис. 1а и 1б, а также полностью рис. 1в соответствуют частоте 10,7 МГц. Нижние кривые рис. 1а и 1б и весь рис. 1г — частоте 16,7 МГц. Функции r_{R^2} на рис. 1в и 1г построены для значений $\Delta f = 3; 6$ и 12 кГц (точки, крестики, кружки).

Анализ закономерностей изменения статистических характеристик КВ сигналов проводился совместно с данными вертикального зондирования ионосферы, полученными за тот же период наблюдений. Было рассмотрено поведение минимальных частот отражений f_{\min} , критических частот $F2$ -слоя f_0F2 , предельных частот спорадических E_s -слоев f_0E_s , минимальных высот отражений h_0 и истинных высот максимумов ионизации h_{\max} в различные фазы авроральной суббури. За полутолщину слоя принята разность между h_{\max} и h_0 . Анализировалась вероятность $P(F2)$ появления отражений от $F2$ -слоя, вероятность $P(F2+E_s)$ появления полупрозрачных E_s -слоев, вероятность $P(E_s)$ появления экранирующих E_s -слоев и вероятность полного поглощения $P(B)$. Проводилась классификация спорадических E_s -слоев по типам (слои с групповым запаздыванием E_{sr} , плоские E_{sf} и диффузные E_{sa}). Рассматривалась также вероятность появления каждого из типов спорадических слоев в различные фазы авроральной суббури. Указанные параметры, усредненные на получасовых интервалах по 14 суббурям, представлены на рис. 2. Остановимся подробнее на данных рис. 1 и рис. 2.

За 2,5—3 часа до момента $T = 0$ (начало резкого уменьшения H -составляющей магнитного поля) наблюдаются отражения либо от слоя $F2$, либо от $F2$ совместно с E_{sr} . Нижняя граница E_s -слоя располагается на высотах порядка 120 км. Предельные частоты E_{sr} невелики, менее 2 МГц. Критические частоты $F2$ -слоя составляют примерно 2,5 МГц. Очевидно, в этот период наблюдается фоновое высыпание низкоэнергичных частиц, причем интенсивность потоков невелика. Примерно за 1,5—2,0 часа до момента $T = 0$ наблюдается резкое возрастание радиусов корреляции замираний τ_k , уменьшение индексов флуктуаций F , а также повышение значений коэффициентов частотной корреляции r_{R^2} . Указанное изменение параметров имеет место как на частоте 10,7 МГц, так и на 16,7 МГц. Однако на частоте 16,7 МГц глубина замираний меньше, а скорость выше, чем на 10,7 МГц. Коэффициенты корреляции r_{R^2} велики на обеих частотах. Этот период времени характеризуется максимальной вероятностью появления экранирующих E_s -слоев, среди которых преобладают E_{sr} . Отражения от области $F2$ исчезают. Наблюдается также возрастание предельных частот f_0E_{sr} до 3 МГц и увеличение полутолщины E_s -слоя, которая достигает максимальных значений около 20 км, при неизменной высоте нижней границы слоя. Скорее всего это обусловлено увеличением интенсивности высыпающихся потоков без изменения энергетического спектра. Ионизация в E_s -слое порядка часа остается неизменной, тогда как сам слой

постепенно опускается и становится тоньше, что, вероятно, связано с возрастанием жесткости потоков. Глубина замираний КВ сигналов увеличивается, растет их скорость. Вероятность поглощения также увеличивается, хотя и незначительно. Примерно за полчаса до момента $T = 0$ повышаются предельные частоты E_s -слоев. Полутолщина слоя уменьшается до ~ 10 км, а его высота до ~ 110 км. Начинается резкое уменьшение коэффициентов частотной корреляции флуктуаций на 10,7 и 16,7 МГц одновременно. Очевидно, в это время начинается увеличение интенсивности и жесткости потоков, величины которых максимальны при $T = 00 - 1,0$ час. Во взрывную фазу суббури ($T = 00 - 0,5$ час) скорость замираний значительна, индекс флуктуаций F максимален, коэффициенты частотной корреляции Γ_{R^2} минимальны.

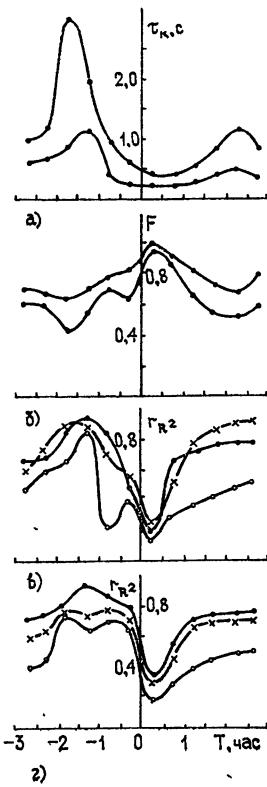


Рис. 1.

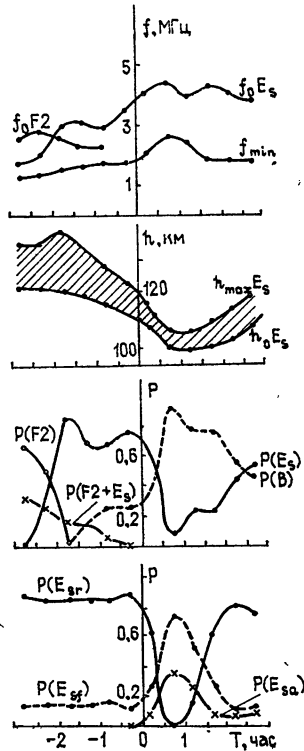


Рис. 2.

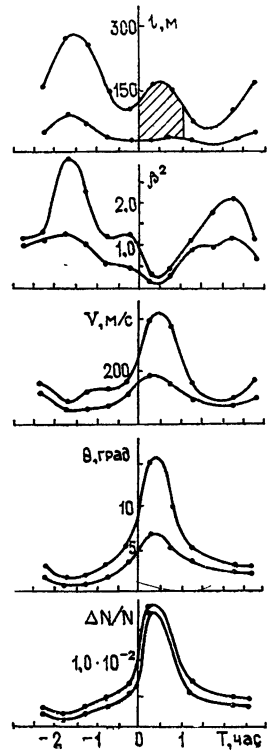


Рис. 3.

Спустя $3/4$ часа после начала бухты предельные частоты E_s -слоев достигают наибольших значений, вплоть до $4-5$ МГц. Высота E_s и его полутолщина минимальны (около 100 и 5 км соответственно). Вероятность появления спорадических слоев E_{sr} , которые преобладают среди всех типов E_s в предварительную фазу суббури, начиная с момента $T = 0$, резко падает. Спорадические слои E_{sr} переходят либо в плоские E_s (тип f), либо в диффузные (тип a). Иногда они совсем пропадают из-за полного поглощения, вероятность которого $P(B)$ максимальна также через $3/4$ часа после начала бухты. Затем происходит восстановление состояния ионосферы, спустя $2,0-2,5$ часа после начала бухты. Параметры радиосигналов на трассе также восстанавливаются. Таким образом, во все фазы авроральной суббури существует достаточно четкая корреляция как между изменениями самих статистиче-

ских характеристик КВ сигналов (рис. 1), так и между вариациями параметров ионосферы и характеристиками сигналов на высокоширотной радиотрассе (рис. 1 и 2).

Представляет интерес оценить параметры тонкой структуры ионосферы и проследить за их изменениями в течение суббури. К таким параметрам относятся: размер мелкомасштабных неоднородностей l , флуктуации электронной концентрации $\frac{\Delta N}{N}$, горизонтальные градиенты ионизации $\frac{\partial N}{\partial x}$, угловой спектр рассеянных волн Θ , коэффициент мутности ионосферы β^2 , скорость дрейфа неоднородностей V .

Размер неоднородностей l для зоны Фраунгофера можно вычислить по формуле [2]

$$r_{R^2} = \exp \left[- \left(\frac{8\delta L_{\text{эфф}} \sin 2\varphi}{l} \right)^2 \right], \quad \bar{s}^2 \ll 1, \quad (1)$$

$$r_{R^2} = \exp \left[- \left(\frac{8\delta L_{\text{эфф}} \sin 2\varphi}{l} \right)^2 \bar{s}^2 \right], \quad \bar{s}^2 \gg 1, \quad (2)$$

где r_{R^2} — максимальное значение коэффициента частотной корреляции флуктуаций интенсивности сигнала, l — характерный масштаб неоднородностей ионосферы, $L_{\text{эфф}}$ — эффективная толщина ионосферного слоя, φ — угол падения волны на ионосферу, \bar{s}^2 — среднеквадратичный набег фазы волны в слое, $\delta = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$, $f_2 = f_1 + \Delta f$.

При расчетах размера неоднородностей l значения коэффициента частотной корреляции r_{R^2} и относительный разнос частот δ определялись из экспериментальных данных по частотно-разнесенному приему (рис. 1). Эффективная толщина ионосферного слоя $L_{\text{эфф}}$ рассчитывалась на основе данных вертикального зондирования ионосферы. Угол падения волны на ионосферу φ определяется геометрией трассы. Величину среднеквадратичного набег фазы волны в слое \bar{s}^2 (зона Фраунгофера, $\lambda L / \cos \varphi \gg l^2$, модель фазового экрана) можно определить из выражения [3]

$$F = 1 - \exp(-2\bar{s}^2), \quad (3)$$

где F — индекс флуктуаций, определяемый из эксперимента. В зависимости от величины среднеквадратичного набег фазы волны в слое \bar{s}^2 вычисление размера неоднородностей l проводилось по формулам (1) или (2).

Интенсивность флуктуаций электронной концентрации находится из выражения [3, 4]

$$2\bar{s}^2 = k_0^2 \sqrt{\pi} l L_{\text{эфф}} \cos^2 \varphi \ln \left(\frac{8L_{\text{эфф}} \cos^2 \varphi}{l} \right) T_e, \quad (4)$$

где $T_e = \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2$ — для параболического слоя с постоянной величиной относительных флуктуаций электронной концентрации по высоте, k_0 — волновое число, l определяется из (1) или (2).

Расчеты коэффициента мутности ионосферы β^2 для случаев $1 \leq \leq \frac{R^2}{\bar{R}^2} \leq 4/\pi$ (где R — амплитуда сигнала) проводились по методике, изложенной в [5], для $\frac{R^2}{\bar{R}^2} > 4/\pi$ выполнялись методом характеристических функций [6]. Угловой спектр рассеянных волн Θ определяется по формуле [5]

$$\theta = \frac{\lambda \sqrt{s^2}}{2\pi l} \quad (l > \lambda). \quad (5)$$

Здесь λ — длина волны, l — размер неоднородностей, $\sqrt{s^2}$ определяется из (3).

Оценки скоростей дрейфа неоднородностей можно получить из выражения [7]

$$V = l/\tau_k, \quad (6)$$

где τ_k — временной радиус корреляции на уровне $1/e$ (определяется из экспериментальных данных).

На рис. 3 представлены наиболее вероятные пределы изменения параметров l , β^2 , V , θ и $\Delta N/N$, рассчитанных по формулам (1)–(6) в различные фазы авроральной суббури. Масштаб времени аналогичен рис. 1 и 2. Расчеты проводились по усредненным статистическим характеристикам КВ сигналов за 14 суббурь. При этом во все фазы суббури распространение радиоволн на трассе происходило посредством отражения от слоев E_s (они экранировали F -область ионосферы). Поэтому результаты расчетов параметров тонкой структуры ионосферы относятся к авроральной E -области и могут рассматриваться как достаточно общие.

Из рис. 3 следует, что по мере развития суббури, начиная с ее предварительной фазы, размеры неоднородностей l уменьшаются, что, вероятно, обусловлено турбулентными процессами в плазме. Уменьшение размеров неоднородностей сопровождается понижением высоты слоя (рис. 2), а также возрастанием относительных флуктуаций электронной концентрации $\frac{\Delta N}{N}$, угловых спектров рассеянных волн θ и уменьшением параметра β^2 . Скорости дрейфа неоднородностей V повышаются примерно за полчаса до начала отрицательной бухты.

В активную фазу суббури наблюдаются интенсивные неоднородности, когда $\sqrt{s^2} \gg 1$ (заштрихованная область на рис. 3), а относительные флуктуации электронной концентрации, скорости дрейфа неоднородностей и угловые спектры рассеянных волн максимальны. По окончании суббури происходит постепенное восстановление параметров ионосферы ($T = 2,5 \div 3,0$ час) до значений, примерно соответствующих времени $T = -(2,0 \div 2,5$ час).

Оценки значений градиента ионизации можно получить по формуле [1]

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} \approx \frac{2V \tau_0 \pi m f_0^3}{D e^3 \Delta f}, \quad (7)$$

где τ_0 — временной сдвиг максимума $r_{R^2}(\tau)$ относительно значения $\tau = 0$, e , m — заряд и масса электрона, D — протяженность трассы.

Задаваясь значениями $f_0 = 10,7$ МГц, $\Delta f = 6$ кГц, $\tau_0 = 0,4$ с, с учетом данных по V (рис. 3) имеем

$$T = -(2,0 \div 2,5 \text{ час}) \quad - \frac{\partial N_n}{\partial x} \approx (1,0 \div 1,5) \cdot 10^5 \text{ см}^{-3},$$

$$T = 0,0 \div 0,5 \text{ час} \quad - \frac{\partial N_n}{\partial x} \approx 5,6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3},$$

$$T = 2,5 \div 3,0 \text{ час} \quad - \frac{\partial N_n}{\partial x} \approx (2,5 \div 3,5) \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}.$$

Здесь пространственный сдвиг $V\tau_0$ порядка или более размера неоднородностей,

В заключение остановимся на возможных механизмах генерации авроральных неоднородностей в E -области ионосферы.

Одним из механизмов в предварительную фазу суббури, когда происходит уменьшение размеров неоднородностей в течение полутора часов до начала взрывной фазы суббури, может быть нелинейное взаимодействие между более крупными вихревыми движениями плазмы. При этом разность скоростей электронов и ионов в поперечном к полю направлении может быть малой [7]. Большая роль среди механизмов генерации мелкомасштабных авроральных неоднородностей отводится двухпоточковой и градиентно-дрейфовой неустойчивостям [8]. Наиболее вероятно, что за счет этих механизмов образуются неоднородности в активную фазу суббури. По данным ракетных наблюдений мелкомасштабных неоднородностей в антарктической авроральной E -области ионосферы установлено, что размер неоднородностей $l \leq 200$ м [9]. В качестве возможного механизма генерации таких неоднородностей предлагается градиентно-дрейфовая неустойчивость, так как для послеполюсной авроральной дуги характерно экваториальное направление внешнего электрического поля E , а градиент ионизации в видимых формах полярных сияний и вблизи них параллелен E [9]. За счет этого механизма вероятно могут возникать неоднородности и в фазу восстановления суббури. В результате ракетных измерений электрических полей в авроральной E -области ионосферы установлено, что мелкомасштабные неоднородности могут возникать вследствие двухпоточковой неустойчивости [10]. Высказывается предположение, что пространственно-временные вариации интенсивности и жесткости авроральных потоков также являются причиной образования неоднородностей в E -области ионосферы.

Таким образом, механизмы генерации мелкомасштабных неоднородностей могут быть различными. Отдать предпочтение какому-либо нельзя, поскольку вероятнее всего на разных фазах суббури их действие проявляется по-разному.

Полученные в статье результаты свидетельствуют о том, что параметры тонкой структуры авроральной E -области существенно зависят от фазы суббури. Поэтому комплексные методы исследования характеристик ионосферы весьма полезны не только в изучении поведения и структуры суббурь, но и для их прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Л. Н. Рубцов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1482 (1973).
2. В. А. Алимов, Геомагнетизм и аэронавигация, 12, № 3, 548 (1972).
3. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, А. В. Рахлин, Л. Н. Рубцов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1601 (1975)
4. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Т. С. Пыркова, Геомагнетизм и аэронавигация, 11, № 5, 790 (1971).
5. Я. Л. Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972.
6. И. С. Всехсвятская, Статистические свойства сигналов, отраженных от ионосферы, изд. Наука, М., 1973.
7. Л. М. Ерухимов, в сб. Физика ионосферы, М., 1976, стр. 58.
8. Б. Н. Гершман, в сб. Геомагнетизм и высокие слои атмосферы, (итоги науки и техники), 3, 62 (1976).
9. T. Ogawa, H. Mori and S. Miyazaki, J. Geophys. Res., 81, № 22, 4013 (1976).
10. M. C. Kelley and F. S. Moser, J. Geophys. Res., 78, № 3, 2214 (1973).

A FINE STRUCTURE OF HIGH-ALTITUDE IONOSPHERE DURING SUB-STORMS

D. V. Blagoveshchenskii, N. F. Blagoveshchenskaya, Yu. A. Kurchenko, O. M. Pirog

The dynamics of the fine structure of auroral ionospheric *E*-region (small-scale irregularity dimension, electron density fluctuations, turbidity factor of the ionosphere, angular spectrum of scattered waves and other) during a sub-storm is analysed according to the data of frequency-spaced reception on the single-discontinuity radio path lying along the auroral region.

УДК 551.510.535

ВОЗДЕЙСТВИЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ И ИЗВЕРЖЕНИЙ ВУЛКАНОВ НА ИОНОСФЕРНУЮ ПЛАЗМУ

В. А. Павлов

Рассматривается воздействие на ионосферу волны от землетрясения и извержения вулкана. Сделана оценка возмущения электронной концентрации.

В результате землетрясений и извержений вулканов происходит возбуждение акустико-гравитационных волн в атмосфере и в ионосферной плазме [1-9], которое может быть использовано [4-6, 10] для обнаружения эпицентров землетрясений, фиксации начала извержения вулканов и оценки мощности этих процессов. Возбуждение акустико-гравитационных волн в атмосфере в результате воздействия поверхностной волны Рэлея исследовалось [7] при задании возмущения поверхности Земли в виде синусоидального профиля, перемещающегося с постоянной скоростью.

В первом разделе данной работы делается оценка возмущения концентрации электронов ионосферной плазмы, вызываемого землетрясением (оно учитывается в виде локализованной в направлении движения волны Рэлея). В отличие от [7] принимаются во внимание потери за счет слабой электропроводности среды (приближение малых магнитных чисел Рейнольдса). Электропроводность считается зависящей от высоты, и учитывается неоднородность по высоте невозмущенной концентрации заряженных частиц ионосферной плазмы. Второй раздел посвящен воздействию извержения вулкана на ионосферу. Извержение описывается как нестационарное выделение массы, импульса и энергии из стороннего источника и как гармонические, локализованные около этого источника колебания земной поверхности.

1. Рассмотрим возмущения нейтральной компоненты ионосферной плазмы и атмосферы, вызванные поверхностной волной Рэлея. При этом используем следующую модель поверхности Земли и среды над ней. Границу $z = 0$ будем считать невозмущенной поверхностью Земли. Под действием землетрясения возникает двумерная поверхностная волна Рэлея, приводящая к возмущению этой поверхности:

$$z = Z(\chi), \quad \partial Z / \partial y = 0, \quad \chi = x - v_0 t, \\ v_0 = \text{const},$$

где v_0 — скорость перемещения поверхностной волны; считаем, что функция $Z(\chi)$ задана (вид функции $Z(\chi)$ будет конкретизирован ниже). Так как в случае землетрясений вертикальные смещения земной поверхности гораздо меньше горизонтальных масштабов поверхностной волны $L_x \sim 10^5$ м, $|Z| \leq 10^{-1}$ м, то $|Z| \leq L_x$. Это позволяет ставить граничное условие на невозмущенной поверхности $z = 0$:

$$v_z|_{z=0} = \frac{\partial Z}{\partial t}. \quad (1)$$

При $z \rightarrow \infty$ потребуем, чтобы функция v_z имела вид уходящей волны.

Среду выше границы $z = 0$ считаем слабо ионизированной плазмой. В качестве невозмущенного профиля плотности нейтральных частиц возьмем экспоненциальную зависимость $\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-z/z_1}$, где $\rho_0(0)$ и z_1 — постоянные параметры ($\rho_0(0) \sim 1 \text{ кг/м}^3$, $z_1 \sim 10^4 \text{ м}$).

Поля в области $z > 0$ будем описывать следующими линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial \rho' / \partial t + \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{v}) &= F_1, \\ \rho_0(z) (\partial \mathbf{v} / \partial t) &= -\nabla p' - \rho' g \mathbf{e}_z + \mu [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0] + F_2 \mathbf{e}_z, \\ \partial \rho' / \partial t &= -\mathbf{v} \nabla \rho_0(z) - a^2 \rho_0(z) \operatorname{div} \mathbf{v} + F_3, \\ \mathbf{j} &= \sigma_{\perp}(z) \{ -\nabla \varphi + \mu [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] \}, \\ \operatorname{div}(\sigma_{\perp}(z) \nabla \varphi) &= \mu \sigma_{\perp}(z) (\mathbf{H}_0, \operatorname{rot} \mathbf{v}), \\ \mathbf{H}_0 &= -H_0 \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия применимости системы (2) и обозначения в ней приведены в Приложении 1.

Невозмущенные значения полей отмечаются индексом нуль, штрихи у функций указывают, что их невозмущенные значения отличны от нуля. Функции без индексов описывают поля, невозмущенное значение которых равно нулю. В системе (2) в первом разделе положено $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Так как возмущение в поверхностной волне не зависит от y , а свойства среды зависят только от z , то поля не зависят от y .

Сделав преобразование Фурье по t и по x , получим связь полей с компонентой v_z :

$$\begin{aligned} v_y &= 0, \quad \varphi = 0, \\ v_x &= \frac{-ik}{\kappa_0^2(z)} \left(\frac{dv_z}{dz} - \frac{v_z}{\gamma z_1} \right), \\ \rho' &= \frac{\rho_0(z) \omega (1 + i \operatorname{Rm}(z))}{ia^2 \kappa_0^2(z)} \left\{ \frac{dv_z}{dz} - v_z \left[\frac{1}{z_1} - \frac{a^2 k^2 (\gamma - 1)}{z_1 \omega^2 \gamma (1 + i \operatorname{Rm}(z))} \right] \right\}, \\ \operatorname{Rm}(z) &= \frac{\sigma_{\perp}(z) \mu v_a^2(z)}{\omega} = \frac{\sigma_{\perp}(z) \mu^2 H_0^2}{\omega \rho_0(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_a^2(z) = \frac{\mu H_0^2}{\rho_0(z)}, \quad \kappa_0^2(z) = \frac{\omega^2}{a^2} (1 + i \operatorname{Rm}(z)) - k^2.$$

Компонента v_z находится из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_z}{dz^2} + \frac{dv_z}{dz} \left[-\frac{1}{z_1} + \kappa_1^2(z) - \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\kappa_1^2(z)} \right) \right] + \\ + v_z \left[\kappa_1^2(z) - g^2(1 - \gamma) \frac{k^2}{\omega^2 a^2 (1 + i \operatorname{Rm}(z))} - \frac{k^2 g \kappa_1^2(z)}{\omega^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\kappa_0^2(z)} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

при учете граничного условия (1) и условия при $z \rightarrow \infty$. В уравнении (4) введено обозначение

$$\kappa_1^2(z) = \frac{\kappa_0^2(z)}{1 + i \operatorname{Rm}(z)}.$$

Безразмерный параметр $\operatorname{Rm}(z)$, входящий в (3) и (4), пропорционален $\sigma_{\perp}(z)$. $\operatorname{Rm}(z)$, как и $R_{\sigma}(z)$ (П.5), характеризуют потери.

В условиях ионосферы $\operatorname{Rm} \leq \frac{5 \cdot 10^{-4}}{\omega \rho_0(z)}$ (в слое E $\operatorname{Rm} \leq \frac{10^{-7}}{\omega}$, в слое F $R_{\sigma} \leq \frac{10^{-4}}{\omega}$), и так как характерные частоты в случае землетрясений имеют порядок [4-7] $\omega \sim 5 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, то $\operatorname{Rm} \ll 1$. Сделав замену неизвестной функции $v_z = \frac{\kappa_1(z)}{\kappa_1(0)} e^{z/2z_1} W_1$, вместо (4) получим уравнение, не содержащее первой производной:

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} + \Phi(z) W_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \kappa_1^2(z) + \frac{(\gamma - 1) a^2 k^2}{\gamma^2 \omega^2 z_1^2 (1 + i \operatorname{Rm}(z))} - \frac{1}{4z_1^2} + \frac{k^2 a^2}{\omega^2 \gamma z_1 (1 + i \operatorname{Rm}(z))} \times \\ & \times \frac{1}{\kappa_0^2(z)} \frac{d \kappa_0^2(z)}{dz} - \frac{1}{2z_1 \kappa_1^2} \frac{d \kappa_1^2}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \frac{d \kappa_1^2}{dz} \right). \end{aligned}$$

В условиях поставленной задачи функция $\Phi(z)$ — медленно меняющаяся:

$$\left| \frac{1}{\Phi} \frac{d \sqrt{\Phi}}{dz} \right| \ll 1.$$

Пренебрегая локальными отражениями, найдем W_1 в приближении ВКБ. Принимая во внимание граничные условия для v_z , получим представление

$$v_z \approx -i \omega \sqrt{\frac{\Phi(0)}{\Phi(z)}} \frac{\kappa_1(z)}{\kappa_1(0)} Z(k, \omega) \exp \left(z/2z_1 + i \int_0^z \sqrt{\Phi} dz' \right), \quad (5)$$

где $\operatorname{Im} \sqrt{\Phi} \geq 0$, Z — возмущение поверхности Земли. Формулы (5) и (3) характеризуют фурье-образы функций v и ρ' в приближении ВКБ для нейтральной компоненты ионосферной плазмы.

Поле скоростей нейтральной компоненты считаем заданным формулами (3), (5), а возмущение концентрации заряженных частиц описываем уравнением (П.8) (см. Приложение 2):

$$\frac{\partial N'}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (N_0(z) v_z).$$

Это неоднородное уравнение соответствует уравнению неразрывности для заряженных частиц, которые увлекаются нейтральным газом вдоль поля H_0 ($v_{ez} \sim v_{iz} = v_z$) и не увлекаются в поперечном направлении ($|v_{i\perp}| \ll |v_{iz}|$).

Приняв во внимание представление (5), получим формулу для

$$N'(k, \omega) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ N_0(z) \sqrt{\frac{\Phi(0)}{\Phi(z)}} \frac{\kappa_1(z)}{\kappa_1(0)} Z(k, \omega) \exp \left(z/2z_1 + i \int_0^z \sqrt{\Phi} dz' \right) \right\}. \quad (6)$$

Если интересоваться возмущениями земной поверхности в виде бесконечного синусоидального профиля $Z = h \operatorname{Im}\{\exp[ik(x - v_0 t)]\}$, как в [7], перемещающегося со скоростью v_0 , то формула (6) дает решение этой задачи. При этом нужно в (6) взять $\omega = kv_0$ и вычислить мнимую часть этого выражения.

Ниже мы используем функцию $Z(x - v_0 t)$ в виде волны Рэлея, вызванной землетрясением:

$$Z(x - v_0 t) = \sum_{n=1}^{n_0} h_n \exp\left[-\left(\frac{x - v_0 t + x_n}{L_{nx}}\right)^2\right], \quad (7)$$

где n_0 — число максимумов в волне Рэлея, h_n и L_{nx} — максимальное вертикальное смещение и горизонтальный масштаб.

В отличие от представления, использованного в [7], аппроксимация вида (7) учитывает локализацию возмущения в окрестности линий $x = v_0 t - x_n$ (где $n = 1, 2, \dots$) на границе раздела сред. Фурье-образ функции (7) имеет вид

$$Z(k, \omega) = 2\pi^{3/2} \sum_{n=1}^{n_0} h_n L_{nx} \exp\left(-\frac{k^2 L_{nx}^2}{4} + ikx_n\right) \delta(\omega - kv_0), \quad (8)$$

и возмущение концентрации $N'(r, t)$ дается выражением

$$N'(r, t) = - \sum_{n=1}^{n_0} h_n \frac{\partial}{\partial z} [N_0(z) e^{z/2z_1} F_n(r, t)]; \quad (9)$$

$$F_n(r, t) = \frac{L_{nx}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk C_n(k) \exp\left(-\frac{k^2 L_{nx}^2}{4} + ik\chi_n + i \int_0^z \sqrt{\Phi_n} dz'\right) \Big|_{\omega=kv_0},$$

$$C_n(k) = \sqrt[4]{\frac{\Phi_n(0)}{\Phi_n(k)} \frac{x_1(z)}{x_1(0)}} \Big|_{\omega=kv_0}, \quad (10)$$

$$\chi_n = x - v_0 t + x_n.$$

Прежде всего отметим, что имеют место соотношения

$$\frac{x_1^2(z)}{x_1^2(0)} = 1 + O(\operatorname{Rm}), \quad C_n(k) = 1 + \delta(k), \quad (11)$$

$$\delta(k) \sim O(\operatorname{Rm}) + O\left(\frac{z_1}{x_1} \frac{dx_1}{dz}\right) \ll 1,$$

позволяющие функцию $C_n(k)$ как медленно изменяющуюся вынести в (10) за знак интеграла. При этой операции аргументом у $C_n(k)$ берется значение $k = k_s$, дающее основной вклад при интегрировании в (10).

В зависимости от рассматриваемых ниже ситуаций k_s будет иметь различный вид. Функцию $\Phi_n(z)$, входящую в (10), представим в виде

$$\sqrt{\Phi_n} \approx (1 + \delta) \sqrt{k^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1\right) - b_0^2}, \quad (12)$$

где

$$b_0^2 = \frac{1}{4z_1^2} \left(1 - 4 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{a^2}{v_0^2}\right). \quad (13)$$

На основе (11) и (12) заменим формулу (10) приближенным выражением:

$$F_n(r, t) \approx C_n(k_s) I_n(r, t),$$

$$I_n(r, t) = \frac{L_{nx}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-\frac{k^2 L_{nx}^2}{4} + ik \chi_n + i \xi \sqrt{k^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \right]. \quad (14)$$

$$\xi = z(1 + \delta).$$

Отметим, что интеграл в (14) в частном случае однородной среды, т. е. при $b_0 = 0$, вычисляется точно:

$$I_n|_{b_0=0} = \exp \left[-\left(\frac{\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}}{L_{nx}} \right)^2 \right].$$

При этом возмущение в основном сосредоточено в окрестности плоскостей $\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1} = 0$, где выполнено условие черенковского излучения $\sin \alpha_n = \frac{a}{v_0} < 1$. Здесь угол α_n характеризует положение точки наблюдения относительно одной из перемещающихся точек максимального возмущения поверхности Земли.

В случае $b_0 \neq 0$ вычислим интеграл в (14) приближенно.

1-й случай. Расположение точки наблюдения «вблизи» поверхности Земли. При вычислении будем исходить из предположения, что имеет место условие

$$\left| -\frac{k_s^2 L_n^2}{4} + ik_s \chi_n \right| \gg \left| \xi \sqrt{k_s^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \right|. \quad (15)$$

При этом

$$I_n(r, t) \approx \frac{L_{nx}}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(i \xi \sqrt{k_s^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \times \times \exp \left(-ik \chi_n - \frac{k^2 L_{nx}^2}{4} \right) = \exp \left[-\frac{\chi_n^2}{L_{nx}^2} (1 + \Delta_{n,1}) \right], \quad (16)$$

где

$$k_s = \frac{2i \chi_n}{L_{nx}^2},$$

$$\Delta_{n,1} = \frac{2\xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}}{\chi_n} \sqrt{1 + \frac{b_0^2 L_{nx}^2}{4\chi_n^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right)}}.$$

Неравенство (15) дает условие применимости формулы (16):

$$|\operatorname{ctg} \alpha_n| = \left| \frac{\chi_n}{z} \right| \gg \left| 2 \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1} \right|,$$

т. е.

$$\alpha_n \ll \frac{a}{2v_0} \ll 1.$$

В рассмотренной ситуации угол α_n — острый, т. е. точка наблюдения должна находиться «около» поверхности Земли.

2-й случай. Формула (16) может быть уточнена, и условия применимости результата могут быть сделаны менее жесткими, чем в случае 1, если в выражении (14) исходить из условия

$$|b_0^2| \ll \left| k_s^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) \right|. \quad (17)$$

При этом

$$\begin{aligned} \xi \sqrt{k^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \approx \xi k \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1} - \\ - \frac{\xi b_0^2}{2k_s \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}} + O\left(\frac{\xi b_0^4 a^4}{k_s^3 v_0^4}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$I_n \approx \frac{L_{nx}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{i\xi b_0^2}{2k_s \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left[-\frac{k^2 L_{nx}^2}{4} + ik\left(-\chi_n + \right.$$

$$\left. + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}\right) \right] = \exp\left[-\left(\frac{\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}}{L_{nx}}\right)^2 \left(1 + \frac{4\xi}{z_1} \Delta_{n,2}\right)\right],$$

где

$$k_s = \frac{2i\left(\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}\right)}{L_{nx}^2},$$

$$\Delta_{n,2} = \frac{b_0^2 z_1 L_{nx}^4}{16 \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1} \left(\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}\right)^2}.$$

Неравенство (17) дает условие применимости (18):

$$\left(\frac{\chi_n + \xi \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}}{L_{nx}}\right)^2 \gg \frac{1}{16}.$$

3-й случай. Будем интересоваться случаем $|\operatorname{ctg} \alpha_n| \ll \left|\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1}\right|$ в предположении

$$|k_s \chi_n| \ll \left| -\frac{k_s^2 L_{nx}^2}{4} + i\xi \sqrt{k^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \right|. \quad (19)$$

Выражение для I_n упростим, преобразуя к виду

$$I_n \approx \frac{L_{nx}}{2\sqrt{\pi}} \exp(ik_s \chi_n) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-\frac{k^2 L_{nx}^2}{4} + i \xi \sqrt{k^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - b_0^2} \right] \approx$$

$$\approx \exp \left[-\frac{\xi^2}{L_{nx}^2} \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - \frac{b_0^2 L_{nx}^2}{\left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right)} \right] (1 + \Delta_{n,3}), \quad (20)$$

где

$$k_s = \sqrt{\frac{-4\xi^2 \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right)}{L_{nx}^2} + \frac{b_0^2}{\left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right)}},$$

$$\Delta_{n,3} = \frac{-ik_s \chi_n}{\frac{\xi_n^2}{L_{nx}^2} \left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right) - \frac{b_0^2 L_{nx}^2}{\left(\frac{v_0^2}{a^2} - 1 \right)}}.$$

Неравенство (19) дает условие применимости формулы (20):

$$|\operatorname{ctg} \alpha_n| = \left| \frac{\chi_n}{z} \right| \ll \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_0^2}{a^2} - 1} \right| \sim \frac{v_0}{2a}.$$

Возмущение концентрации электронов $N'(\mathbf{r}, t)$ ионосферной плазмы выражается через $I_n(\mathbf{r}, t)$ следующим образом:

$$N'(\mathbf{r}, t) \approx - \sum_{n=1}^{n_0} h_n \frac{\partial}{\partial z} [N_0(z) e^{z/2z_0} (1 + \delta(k)) I_n(\mathbf{r}, t)],$$

где $I_n(\mathbf{r}, t)$ в различных предельных ситуациях имеет вид (16), (18) или (20). Это возмущение перемещается со скоростью движения волны Рэлея и имеет горизонтальный масштаб вдоль направления перемещения порядка L_{nx} . Если вертикальные возмущения поверхности h_n Земли в волне Рэлея, вызванные землетрясением, окажутся величиной в несколько сантиметров, это может привести к значительному возмущению концентрации электронов в слое F :

$$\max N' \leq N_0.$$

Следует отметить, что мы здесь использовали двумерную модель явления (поля не зависели от координаты y). Получающиеся при этом значения возмущения N' представляют оценку сверху, так как в реальных условиях появится дополнительное ослабление полей за счет «расходимости» волн.

2. Извержение вулкана опишем нестационарными источниками массы, импульса, энергии (ниже они обозначены соответственно F_1, F_2, F_3) и колебанием земной поверхности. Последнее аппроксимируем гармоническим возмущением в виде

$$z(\mathbf{r}, t) = Z \equiv h \exp \left[-\left(\frac{r}{L} \right)^2 - i \omega_0 t \right], \quad (21)$$

где $h = \max|Z|$; ω_0 , L — характерная частота и горизонтальный масштаб возмущения, r — цилиндрическая координата. При $z = 0$ используем граничное условие (1).

Вторым условием на v_z будет требование того, чтобы при $z \rightarrow \infty$ функция v_z имела вид уходящей вверх волны. Среду выше границы $z = 0$ описываем уравнениями (2) со сторонними источниками массы F_1 , импульса F_2 и энергии F_3 . Будем считать, что сторонние источники F_1 , F_2 , F_3 — точечные и расположены в точке с координатами $z = z_0$, $r = 0$ (после построения решения сделаем предельный переход к $z_0 \rightarrow 0$). Кроме того, ограничимся случаем, когда импульс стороннего источника F_2 действует только вдоль оси z . Сформулированная таким образом задача обладает осевой симметрией. Следствием этого является равенство $v_\varphi = 0$, $\varphi = 0$, и система (2) сводится к следующему уравнению для вектора \mathbf{v} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - a^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - g \mathbf{e}_z (1 - \gamma) \operatorname{div} \mathbf{v} + g \nabla v_z + \sigma_1(z) \times$$

$$\times \mu v_a^2(z) \frac{\partial v_r}{\partial t} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{F}_0}{\rho_0(z)},$$

$$\mathbf{F}_0 \equiv -g F_1 \mathbf{e}_z + \frac{\partial F_2}{\partial t} \mathbf{e}_z - \nabla F_3.$$

Сделаем преобразования Фурье по t и преобразование Фурье — Бесселя по r в виде

$$v_r(r) = \int_0^\infty dk k v_r(k) J_1(kr),$$

$$v_z(r) = \int_0^\infty dk k v_z(k) J_0(kr),$$

$$F_{0r}(r) = \int_0^\infty dk k F_{0r}(k) J_1(kr),$$

$$F_{0z}(r) = \int_0^\infty dk k F_{0z}(k) J_0(kr)$$

и введем, как и в 1-м разделе, новую неизвестную функцию W_2 :

$$v_z(\omega, k, z) = \frac{x_1(z)}{x_1(0)} e^{z/2z_1} W_2.$$

Это позволяет привести (2) к неоднородному уравнению для функции W_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_2}{dz^2} + \Phi(z) W_2 = \frac{x_1(0)}{x_1(z)} e^{-z/2z_1} \left\{ -\frac{x_1^2(z) F_{0z}}{\omega^2 \rho_0(z)} + \right. \\ \left. + \frac{x_1^2(z)}{\omega^2} \left[a^2 \frac{\partial}{\partial z} + g(1 - \gamma) \right] \left[\frac{k F_{0z}}{x_0^2(z) a^2 \rho_0(z)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Функции $x_1(z)$, $x_0(z)$, $\Phi(z)$ имеют тот же вид, что и в первом разделе. Благодаря медленному изменению $\Phi(z)$, можно воспользоваться асимптотическим представлением ВКБ решения неоднородного уравнения

(22). Оно строится методом вариации постоянных Лагранжа с учетом условия (21) при $z = 0$ и условия, справедливого при $z \rightarrow +\infty$. После предельного перехода $z_0 \rightarrow 0$ (источник расположен на невозмущенной поверхности Земли) функция $v_z(\omega, k, z)$ принимает вид

$$v_z(\omega, k, z) = \frac{x_1(z)}{x_1(0)} e^{z/2z} W_2 \left[\eta(z) \frac{F_3(\omega)}{2\pi a^2 \rho_0(0)} - i\omega Z(\omega, k) \right], \quad (23)$$

где

$$Z(\omega, k) = \pi h L^2 \delta(\omega - \omega_0) \exp\left(-\frac{k^2 L^2}{4}\right),$$

$$\eta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases},$$

$$W_2(z) \approx \sqrt[4]{\frac{\Phi(0)}{\Phi(z)}} \exp\left(i \int_0^z V \overline{\Phi} dz\right).$$

В формуле (23) имеется лишь функция F_3 , характеризующая выделение энергии. Ниже будем считать, что $F_3(t, r, z) = f_3 \frac{\delta(r)}{2\pi} \delta(t)$, т. е.

в формуле (23) $F_3(\omega) = f_3$. Параметр f_3 имеет смысл полной энергии, выделившейся в результате «взрывного» извержения: $F_3 \sim \delta(t)$. Параметр f_3 может быть оценен как произведение выделенной массы на квадрат средней скорости ее выброса. Так как исходные уравнения справедливы лишь для низких частот $\omega \ll \frac{1}{\mu \sigma_{\perp} L^2}$, а в спектре импульсного источника вида $\delta(t)$ представлены все частоты, то решение, полученное ниже, будет плохо описывать начальную стадию переходного процесса и хорошо отражать установившийся колебательный режим.

В случае малых магнитных чисел Рейнольдса справедливы соотношения

$$\frac{x_1(z)}{x_1(0)} \sqrt[4]{\frac{\Phi(0)}{\Phi(z)}} \approx 1 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

$$\int_0^{\infty} V \overline{\Phi} dz \approx \xi_0(\omega) \sqrt{\omega^2 b^2(\omega) - k^2}, \quad \left| z^2 \frac{d \sqrt{\overline{\Phi}(z)}}{dz} \right| \ll 1,$$

$$b^2(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega^2 - \omega_b^2}, \quad \omega_a^2 = \frac{a^2}{4z_1^2},$$

$$\omega_b^2 = \frac{(\gamma - 1)a^2}{\gamma^2 z_1^2}, \quad \omega_b < \omega_a, \quad (24)$$

$$\xi_0(\omega) = \xi \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}}{\omega}, \quad \xi = z(1 + O(\text{Rm})),$$

$$\text{Rm} = \frac{\sigma_{\perp}(z) \mu^2 H_0^2}{\omega \rho_0(z)} \ll 1.$$

Возмущение концентрации ионосферной плазмы N' связано с v_z соотношением (П.8) из Приложения 2:

$$N'(k, \omega) \approx \frac{-i}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} [N_0(z) v_z(k, \omega)] = N'_1 + N'_2, \quad (25)$$

что соответствует увлечению заряженных частиц нейтральными вдоль вектора H_0 при условии малости радиальных скоростей заряженных частиц.

В формуле (25) функции N'_1 и N'_2 имеют вид

$$N'_1 = \frac{-f_3}{4\pi^2 a^2 \rho_0(0)} \frac{\partial}{\partial z} \left[N_0(z) e^{z/2z_1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \left(\frac{I_1(t, z, r)}{R} \right) \right]; \quad (26)$$

$$N'_2 = \frac{-hL^2 e^{-i\omega_0 t}}{2} \frac{\partial}{\partial z} [N_0(z) e^{z/2z_1} I_2(t, z, r)]; \quad (27)$$

$$I_1 = \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_b^2)(\omega^2 - \omega_a^2)}} \exp \left[-i\omega t + it_0 \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 - \omega_b^2}} \right]; \quad (28)$$

$$I_2 = \int_0^\infty dk k J_0(kr) \exp \left[-\frac{k^2 L^2}{4} + i\xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k^2} \right], \quad (29)$$

$$R = \sqrt{r^2 + \xi^2}, \quad \omega_c = \omega_b \frac{\xi}{R}, \quad t_0 = \frac{R}{a}, \quad \alpha > 0,$$

N'_1 описывает возмущение концентрации электронов за счет стороннего источника F_3 при отсутствии колебаний земной поверхности $Z=0$, $f_3 \neq 0$. Перейдем к приближенному вычислению интегралов I_1 и I_2 в формулах (28) и (29).

Подынтегральное выражение в (28) содержит неоднозначные функции. На комплексной плоскости ω проведем разрезы (при вычислении аналогичных интегралов это делалось в [12, 14] различными способами), как это изображено на рис. 1 жирными линиями. В верхней полуплоскости ω нет особых точек подынтегрального выражения, поэтому при $t - t_0 < 0$, замыкая контур сверху, убеждаемся, что $I_1|_{t < 0} = 0$. При $t - t_0 > 0$ интегрирование от $-\infty + i\alpha$ до $\infty + i\alpha$ может быть заменено интегрированием по контурам L_1, L_2, L_3, L_4 (см. рис. 1):

$$I_1 = \eta(t - t_0) \sum_{k=1}^4 \Psi_k, \quad (30)$$

$$\Psi_k = \int_{L_k} \frac{d\omega \exp \left[-i\omega t + i\omega_0 \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 - \omega_b^2}} \right]}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_b^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда горизонтальное расстояние от источника до точки наблюдения гораздо больше вертикального расстояния ($r \gg \xi$). При этом $\omega_c \ll \omega_b \ll \omega_a$ и при интегрировании по контуру L_2 , где $|\omega| \ll \omega_c$, можно использовать приближенное представление

$$\Psi_2 \approx \int_{L_2} \frac{d\omega \exp \left(-i\omega t + it_0 \frac{\omega_a}{\omega_b} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \right)}{i\omega_b \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \quad (31)$$

$$= \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{d\omega \exp\left(-i\omega t + it_0 \frac{\omega_a}{\omega_b} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}\right)}{i\omega_b \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = -\frac{2\pi}{\omega_b} J_0(\omega_c \sqrt{t^2 - t_1^2}) \eta(t - t_1),$$

где

$$t_1 = t_0 \frac{\omega_a}{\omega_b} > t_0, \quad r \ll \xi.$$

Последний интеграл в формуле (31) является табличным [15]. Интегралы вида (31) встречаются в различных задачах о распространении акустико-гравитационных волн [9] и волн в магнитоактивной плазме [13]. Следует отметить, что функция Ψ_2 , даваемая формулой (31), описывает часть полного поля. Передний фронт этой части запаздывает на время $\Delta t = t_0 \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_b}$ по сравнению с полем (30) (в выражении (31) учтена лишь «низкочастотная часть» спектра). Представление (31) показывает, что возмущение Ψ_2 в области $r \gg \xi$ распространяется от источника со скоростью $\frac{R}{t_1} = \frac{a\omega_b}{\omega_a}$, меньшей скорости звука, после чего возникает переходный режим осцилляций. При $t \rightarrow \infty$ имеем предельный режим, исследованный в [14].

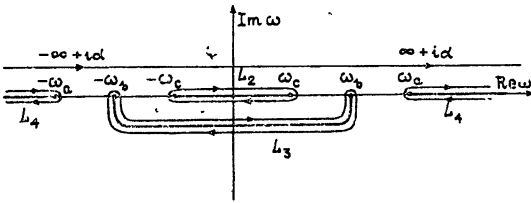


Рис. 1.

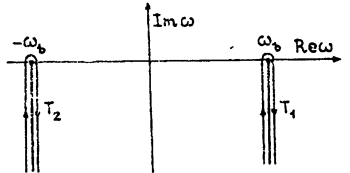


Рис. 2.

При $r \gg \xi$ на контурах L_1 и L_4 $|\omega| \gg \omega_a > \omega_b \gg \omega_c$ и выражения для Ψ_1 и Ψ_4 упрощаются:

$$\Psi_1 + \Psi_4 \approx \int_{L_1+L_4} \frac{d\omega \exp\left(-i\omega t + i\frac{R}{a}\omega \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_a^2}{\omega^2 - \omega_b^2}}\right)}{\sqrt{\omega^3(\omega^2 - \omega_b^2)}}.$$

Основной вклад в этот интеграл дают точки ветвления $\omega = \pm \omega_a$.

Медленно меняющийся множитель $[\omega^2(\omega^2 - \omega_b^2)]^{-1/2}$ вынесем за знак интеграла:

$$\begin{aligned} \Psi_1 + \Psi_4 &\approx \frac{1}{\omega_a \sqrt{\omega_a^2 - \omega_b^2}} \int_{L_1+L_4} d\omega \exp(-i\omega t + it_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}) = \\ &= \frac{1}{\omega_a \sqrt{\omega_a^2 - \omega_b^2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} d\omega \exp(-i\omega t + it_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}) = \quad (32) \\ &= \frac{2\pi}{\omega_a \sqrt{\omega_a^2 - \omega_b^2}} \left[\delta(t - t_0) - \eta(t - t_0) \frac{\omega_a t_0 J_1(\omega_a \sqrt{t_1^2 - t_0^2})}{\sqrt{t^2 - t_0^2}} \right]. \end{aligned}$$

Выражение (32) описывает «высокочастотную» часть поля (30), эта часть распространяется со скоростью $\frac{R}{t_0} = a$ и может быть интерпретирована [14] как акустическое поле.

Теперь рассмотрим выражение для Ψ_3 . Отметим, что функции $\Psi_2 + \Psi_3$ могут быть интерпретированы [14] как гравитационное поле. Получим для Ψ_3 соответствующую асимптотику при $r \gg \xi$ и $t \rightarrow \infty$, заменив интегрирование по контуру L_3 интегрированием по контурам T_1 и T_2 , изображенным на рис. 2. В интеграле по контуру T_1 при $t \rightarrow \infty$ основной вклад дает точка ветвления ω_b :

$$\int_{T_1} \equiv \int_{T_1} \frac{d\omega \exp \left[-i\omega t + it_0 \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 - \omega_b^2}} \right]}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_b^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}} \approx \quad (33)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\omega_b(\omega_b^2 - \omega_c^2)}} \int_{T_1} \frac{d\omega \exp \left(-i\omega t - \frac{q}{\sqrt{\omega - \omega_b}} \right)}{\sqrt{\omega - \omega_b}},$$

где

$$q = \frac{t_0 \sqrt{(\omega_a^2 - \omega_b^2)(\omega_b^2 - \omega_c^2)}}{\sqrt{2\omega_b}}.$$

Сделаем замену $\omega - \omega_b = \Omega$ и представим (33) в виде

$$\int_{T_1} = \frac{e^{-t\omega_b}}{\sqrt{2\omega_b(\omega_b^2 - \omega_c^2)}} \int_{T_1} \frac{d\Omega}{\sqrt{\Omega}} \exp \left(-i\Omega t - \frac{2}{\sqrt{\Omega}} \right). \quad (34)$$

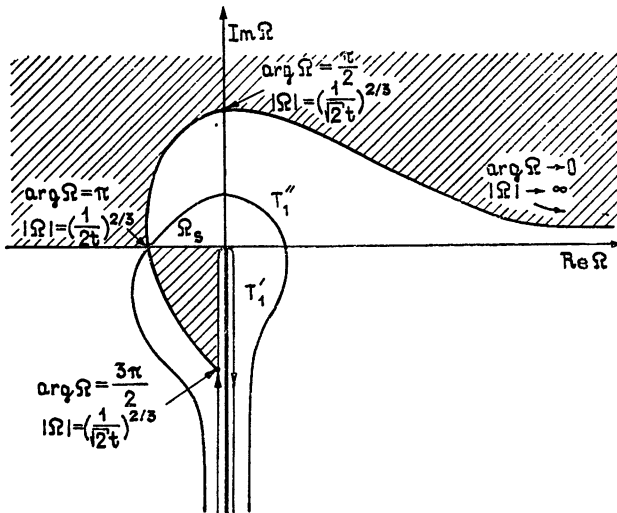


Рис. 3.

Контур интегрирования в (34) изображен на рис. 3. Интеграл вида (34) исследовался в [14] методом скорейшего спуска. Седловая точка дается выражением $\Omega_s = e^{i\pi} \left(\frac{q}{2t}\right)^{2/3}$, на плоскости Ω разрез проходит вдоль

отрицательной части оси $\Omega = \text{Im } \Omega$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \Omega \leq \frac{3\pi}{2}$. Вещественная часть показателя экспоненты $\text{Re} \left(-i\Omega t - \frac{q}{\sqrt{\Omega}} \right)$ в (33) положительна на заштрихованной части плоскости Ω (рис. 3). Контур скорейшего спуска имеет вид T_1' . В результате имеем асимптотику вида

$$\int_{I_1} \approx \frac{e^{-i\omega_b t}}{\sqrt{2\omega(\omega_b^2 - \omega_a^2)}} \sqrt{\frac{4\pi}{3t}} \exp \left[i \left(3 \sqrt{\frac{q^2 t}{4}} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

где $t_1 \gg t_0$.

Интеграл по контуру T_2 оценивается аналогичным образом, асимптотика функции Ψ_3 имеет вид установившегося колебательного процесса

$$\Psi_3 \approx \sqrt{\frac{8}{3t\omega_b(\omega_b^2 - \omega_c^2)}} \cos \left(\omega_b t - 3 \sqrt{\frac{q^2 t}{4}} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (35)$$

где $t \gg t_0$.

Рассмотрим случай, когда точка наблюдения располагается в области, где $r \ll \xi$, т. е. $\omega_c \rightarrow \omega_b$. При этом

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega_b^2} \exp(-i\omega t + it_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}) = \\ &= -\eta(t - t_0) \frac{2\pi}{\omega_b} \exp(-t_0 \sqrt{\omega_a^2 - \omega_b^2}) \sin \omega_b t + \\ &+ \int_{L_1+L_2} \frac{d\omega \exp(-i\omega t + it_0 \sqrt{\omega^2 - \omega_a^2})}{\omega^2 - \omega_b^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $r \ll \xi$. Первое слагаемое в правой части (36) получается при вычислении вычетов в полюсах $\omega = \pm \omega_b$. Так как основной вклад при интегрировании по контурам L_1 и L_2 дают точки ветвления $\omega = \mp \omega_a$ то медленно меняющийся множитель $(\omega^2 - \omega_b^2)^{-1}$ может быть вынесен за знак интеграла в точках $\omega = \mp \omega_a$:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx -\eta(t - t_0) \frac{2\pi}{\omega_b} \exp(-t_0 \sqrt{\omega_a^2 - \omega_b^2}) \sin \omega_b t + \\ &+ \frac{2\pi}{\omega_a^2 - \omega_b^2} \left[\delta(t - t_0) - \frac{\eta(t - t_0) \omega_a t_0 J_1(\omega_a \sqrt{t^2 - t_0^2})}{\sqrt{t^2 - t_0^2}} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

($r \ll \xi$).

Формулы (30), (32), (35) и (37) описывают интеграл I_1 , входящий в выражение (26) для возмущения концентрации электронов N_1' ионосферной плазмы. Как отмечалось выше, N_1' — та часть возмущения концентрации, которая связана с действием стороннего источника энергии F_3 .

Сделаем оценку возмущения концентрации электронов в слое F в области над источником ($r \ll \xi$), если воздействует источник с энергией порядка 10^{12} Дж, что соответствует взрыву с мощностью в 1 кт. Относительное возмущение концентрации оценим по формуле

$$\frac{N_1'}{N_0} \sim \frac{f_3 e^{z/2z_1}}{4 \pi^2 a^2 \rho_0(0) z_1^2 z} \frac{\partial I_1}{\partial t},$$

что при $f_3 = 10^{12}$ Дж, $a^2 = 10^5$ м²/с², $z_1 = 10^4$ м, $z = 3 \cdot 10^5$ м, $\rho_0(0) = 1$ кг³/м, $\frac{\partial I_1}{\partial t} \sim O(1)$ дает $\frac{N_1'}{N_0} \sim 3 \cdot 10^{-2}$.

Вычислим приближенно интеграл I_2 (29). При этом рассмотрим три различные предельные ситуации.

1-й случай. $\frac{4 R_0^2}{L^2} \gg \frac{\omega_0 b(\omega_0) r^2}{a R_0}$, где $R_0 = \sqrt{\xi_0^2(\omega_0) + r^2}$. Будем исходить из предположения, что $\exp\left(-\frac{k^2 L^2}{4}\right)$ — медленно изменяющаяся функция по сравнению с

$$J_0(k, r) \exp\left(i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k^2}\right),$$

где $|k_s r| \gg 1$ и k_s — точка, дающая основной вклад в интеграл для I_2 . При этом имеет место представление

$$I_2 \approx \exp\left(-\frac{k_s^2 L^2}{4}\right) \int_0^\infty dk k \exp\left[i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k^2}\right] \times \\ \times J_0(kr) = -\exp\left(-\frac{k_s^2 L^2}{4}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_0(\omega_0)} \left[\frac{1}{R_0} \exp\left(i b(\omega_0) \frac{\omega}{a} R_0\right) \right], \quad (38)$$

где

$$R_0 = \sqrt{\xi_0^2(\omega_0) + r^2},$$

$$k_s = \frac{\omega_0 b(\omega_0) r}{a R_0}.$$

Из неравенств $|k_s r| \gg 1$ и $\left|\frac{k_0^2 L^2}{4}\right| \ll \left|\frac{\omega_0 b(\omega_0) r}{a R_0}\right|$ получаем условие применимости (38):

$$\frac{4 R_0^2}{L^2} \gg \frac{\omega_0 b(\omega_0) r^2}{a R_0} \gg 1. \quad (39)$$

2-й случай. $\frac{r^2}{L^2} \gg 1$, $\frac{r^2}{L^2} \gg \left| \xi_2(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) + \frac{4 r^2}{L^4}} \right|$.

При этом функцию $\exp\left(i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k_s^2}\right)$ как медленно меняющуюся вынесем за знак интеграла:

$$I_2 \approx \exp\left[i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k_s^2}\right] \int_0^\infty dk k J_0(kr) \exp\left(-\frac{k^2 L^2}{4}\right) = \\ = \frac{2}{L^2} \exp\left(-\frac{r^2}{L^2} + i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2}{a^2} b^2(\omega_0) - k_s^2}\right), \quad (40)$$

где

$$\frac{r^2}{L^2} \gg \left| \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 b^2(\omega_0)}{a^2} - k_s^2} \right|. \quad (41)$$

Последнее неравенство позволяет найти точку k_s , вблизи которой получаем основной вклад в интеграл (40):

$$k_s = \frac{2ir}{L^2}.$$

Система неравенств (41) дает условие применимости формулы (40):

$$\frac{r^2}{L^2} \gg 1,$$

$$\frac{r^2}{L^2} \gg \left| \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 b^2(\omega_0)}{a^2} + \frac{4r^2}{L^4}} \right|.$$

Предыдущие два случая относились к ситуации, когда точка наблюдения находилась в «дальней» зоне по горизонтальному расстоянию $|k_s r| \gg 1$. Сейчас рассмотрим ситуацию, когда точка наблюдения находится в окрестности оси z , проходящей через источник.

3-й случай. $\frac{2r}{L} \leq 1$.

Введя новую переменную $\eta = \frac{kL}{2}$, выражение для I_2 приведем к виду

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{4}{L^2} \int_0^\infty d\eta \eta J_0\left(\eta \frac{2r}{L}\right) \exp\left(-\eta^2 + i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 b^2(\omega_0)}{a^2} - \frac{4\eta^2}{L^2}}\right) \approx \\ &\approx \frac{4}{L^2} \int_0^1 d\eta \eta J_0\left(\eta \frac{2r}{L}\right) \exp\left(-i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 b^2(\omega_0)}{a^2} - \frac{4\eta^2}{L^2}}\right). \end{aligned}$$

Если имеет место неравенство $\frac{2r}{L} \leq 1$, то, используя представление вида $J_0(z) \approx 1$ при $z < 1$, получим табличный интеграл:

$$\begin{aligned} I_2 \approx \frac{\partial}{\partial \xi_0(\omega_0)} &\left[\frac{1}{\xi_0(\omega_0)} \exp\left(i \xi_0(\omega_0) \sqrt{\frac{\omega_0^2 b^2(\omega_0)}{a^2} - \frac{4}{L^2}}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\xi_0(\omega_0)} \exp\left(i \xi_0(\omega_0) \frac{b(\omega_0) \omega_0}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Сделаем оценку возмущения концентрации N_2' в области $r \leq \frac{L}{2} \sim 5$ км в слое F по грубой формуле $\frac{N_2'}{N_0} \sim \frac{h}{2} \frac{L^2}{z_1} e^{2|I_2|}$ при $L_1 \sim 10^4$ м, $z_1 \sim 10^4$ м, $|I_2| \sim \frac{b(\omega_0) \omega_0}{\xi_0(\omega_0) a} \sim \frac{\omega_0}{\xi_0(\omega_0) a}$, $\xi_0(\omega_0) \sim z \sim 3 \cdot 10^5$ м, $\omega_0 \sim 10^{-3}$ с $^{-1}$.
Получим при этом $\frac{N_2'}{N_0} \sim 10^{-1} h$, где $[h] = \text{м}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Получим условия применимости системы уравнений (2). В качестве исходной возьмем линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(z) \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho_0(z) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p' - \rho' g \mathbf{e}_z + \mu [\mathbf{j}; \mathbf{H}_0], \\ \frac{\partial p'}{\partial t} &= -\mathbf{v} \nabla p_0(z) - a^2 \rho_0(z) \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

$$\mathbf{j} \approx \mathbf{j}_\perp = \sigma_\perp(z) \{ \mathbf{E} + \mu [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] \}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t},$$

$$a^2 = \gamma \frac{p_0(z)}{\rho_0(z)} = \gamma z_1 g, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad \mathbf{H}_0 = -H_0 \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{g} \parallel \nabla \rho_0(z), \quad \mathbf{g} = g \mathbf{e}_z.$$

В этой системе уравнений a — скорость звука, C_p , C_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, $\mathbf{H}_0 = -H_0 \mathbf{e}_z$ — внешнее постоянное магнитное поле Земли (векторы \mathbf{g} и \mathbf{H}_0 в нашем рассмотрении параллельны друг другу), $\sigma_\perp(z)$ — перпендикулярная вектору \mathbf{H}_0 компонента тензора электропроводности [11]. Считая, что при $z \rightarrow 0$ среда переходит в нейтральную атмосферу, накладываем условие $\sigma_\perp(0) = 0$. (Другие ограничения на вид зависимости σ_\perp от z будут получены ниже.) Ионосферная плазма слабо ионизирована, поэтому ρ' , \mathbf{v} означают возмущения плотности нейтральных частиц и их скорость. Возмущение концентрации электронов рассмотрено в тексте статьи как вторичный эффект, возникающий при наличии полей, описываемых системой (П.1).

Введя векторный и скалярный потенциалы \mathbf{A} и φ ,

$$\mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi + \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

представим плотность тока \mathbf{j}_\perp в виде

$$\mathbf{j}_\perp \approx \sigma_\perp(z) \{ -\nabla \varphi + \mu [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] \}. \quad (\text{П.2})$$

Этим представлением можно пользоваться при условии выполнения неравенства

$$\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right| \ll | [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] |.$$

Оно может быть приведено к виду

$$| \mathbf{A} | \ll \left| \frac{\mathbf{v}_\perp H_0}{\omega} \right|, \quad \omega \sim \frac{v_0}{L_x}, \quad \mathbf{v}_\perp \perp \mathbf{e}_z.$$

Используя представление $\mathbf{H}' = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, приведем последнее неравенство к виду

$$| \mathbf{H}' | \ll \left| \frac{\mathbf{v}_\perp H_0}{\omega \sqrt{L_x^2 + L_z^2}} \right| \sim \left| \frac{\mathbf{v}_\perp L_x H_0}{v_0 \sqrt{L_x^2 + L_z^2}} \right|. \quad (\text{П.3})$$

Например, интересуясь случаем движения волны Рэлея со скоростью $v_0 > a$, имеем следующую связь вертикального L_z и горизонтального L_x -масштабов неоднородности полей: $L_z \sim (a/v_0)L_x < L_x$.

Последнее обстоятельство позволяет упростить условие (П.3) применимости представления (П.2) к виду

$$|H'| \ll \left| \frac{v_{\perp}}{v_0} H_0 \right|. \quad (\text{П.4})$$

В статье показано, что при пренебрежении возмущением магнитного поля H' и использовании представления (П.2) для плотности тока \mathbf{j}_{\perp} из-за симметрии задачи потенциал φ обратится в нуль. При этом получаются следующие оценки:

$$\begin{aligned} j &\sim \sigma_{\perp} \mu v_{\perp} H_0, \\ H' &\sim \sigma_{\perp} \mu v_{\perp} L_x H_0 = R_{\sigma}(z) H_0, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $R_{\sigma}(z) = \sigma_{\perp}(z) \mu v_{\perp} L_x$ — магнитное число Рейнольдса.

На основе (П.4) и (П.5) получаем условие пренебрежения возмущением магнитного поля

$$R_{\sigma} \ll \left| \frac{v_{\perp}}{v_0} \right| \quad \text{при} \quad \sigma_{\perp} \ll \frac{1}{\mu v_0 L_x}.$$

Если $v_0 \sim 3 \cdot 10^3$ м/с, $L_x \leq 10^5$ м, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\sigma_{\perp} \leq 3 \cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$. В земной ионосфере так $\sigma_{\perp}(z) \leq 10^{-4}$ Ом $^{-1}$ ·м $^{-1}$, следовательно, в задаче о воздействии волны землетрясения на ионосферную плазму $|H'| \ll \ll H_0$. Учитывая неравенство $|H'| \ll H_0$, систему (П.1) можно представить в виде (2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Получим уравнение для возмущения концентрации заряженных частиц и обсудим условия применимости его. Так как характерные частоты ω в случае землетрясений и извержений вулканов малы по сравнению с частотами столкновений заряженных частиц с нейтральными, то линеаризованные уравнения движения электронов и ионов запишем в виде [11], но с учетом неоднородности невозмущенной концентрации зарядов по высоте:

$$\begin{aligned} -\frac{xT}{N_0(z)} \nabla N'_e + \frac{xT N'_e \nabla N_0}{N_0^2(z)} - |e| \{ \mathbf{E} + \mu [\mathbf{v}_{e\perp}, \mathbf{H}] \} - m v_{en}(z) \times \\ \times (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}) = 0, \\ -\frac{xT}{N_0(z)} \nabla N'_i + \frac{xT N_i \nabla N_0}{N_0^2(z)} + |e| \{ \mathbf{E} + \mu [\mathbf{v}_{i\perp}, \mathbf{H}_0] \} - \\ - M v_{in}(z) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

В этих уравнениях учтено то обстоятельство, что N_0 , v_{en} , v_{in} могут быть произвольными функциями высоты z , и принято, что $T_e = T_i = \text{const}$.

Уравнения непрерывности могут быть упрощены, так как из-за влияния внешнего поля \mathbf{H}_0 имеют место неравенства

$$|v_{ez}| \gg |v_{e\perp}|, \quad |v_{iz}| \gg |v_{i\perp}|.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial N'_e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (N_0(z) v_{ez}),$$

$$\frac{\partial N'_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (N_0(z) v_{iz}).$$

Вертикальная компонента суммы уравнений в системе (П.6) имеет вид

$$\frac{xT}{N_0(z)} \left(\frac{\partial N'_e}{\partial z} + \frac{\partial N'_i}{\partial z} \right) - \frac{xT (N'_e + N'_i)}{N_0^2(z)} \frac{\partial N_0}{\partial z} + M v_{in}(z) (v_{iz} - v_z) + m v_{en}(z) (v_{ez} - v_z) = 0,$$

где последнее слагаемое пренебрежимо мало, так как справедливо соотношение

$$\frac{M v_{in}}{m v_{en}} \sim \sqrt{\frac{M}{m}} \gg 1.$$

Исключив из уравнения v_{iz} , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{xT}{M v_{in}(z)} \frac{\partial}{\partial z} (N'_e + N'_i) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{xT (N'_e + N'_i)}{M v_{in}(z) N_0(z)} \times \right. \right. \quad (\text{П.7})$$

$$\left. \left. \times \frac{\partial N_0}{\partial z} \right] - \frac{\partial N'_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (N_0(z) v_z) \right] = 0,$$

где $\frac{xT}{M v_{in}}$ — коэффициент диффузии ионов. На высотах ниже максимума $N_0(z)$ слоя F ионосферы в условиях нашей задачи (при $\omega \sim 5 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$) первые два слагаемых в уравнении (П.7) малы. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{N'_e + N'_i} \frac{\partial (N'_e + N'_i)}{\partial z} \right| \sim \frac{1}{z_1} \gg \left| \frac{1}{N_0} \frac{\partial N_0}{\partial z} \right|.$$

Оценим величину параметра $\Delta z = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xT}{M v_{in}(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right)$, приняв во внимание, что

$$\frac{xT}{M v_{in}} \sim \frac{a^2}{v_{in}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dz^2} \sim \frac{1}{z_1^2}, \quad \text{т. е.} \quad \Delta(z) \approx \frac{a^2}{\omega v_{in}(z) z_1^2}.$$

На высоте z порядка 100 км $a \sim 3 \cdot 10^2 \text{ м/с}$, $v_{in} \sim 10^3 \text{ c}^{-1}$, $z_1 \sim 10^4 \text{ м}$, при $\omega = 5 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ $\Delta(z) \sim 3 \cdot 10^{-5} \div 2 \cdot 10^{-4}$. На высоте порядка 300 км $a \sim 7 \cdot 10^2 \text{ м/с}$, $v_{in} \sim 7 \text{ c}^{-1}$, $z_1 \sim 6 \cdot 10^4 \text{ м}$, при $\omega = 5 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ $\Delta(z) \sim 10^{-1} \div 1$.

Таким образом, уравнение (П.7) в области ионосферы ниже высоты максимума $N_0(z)$ слоя F упрощается:

$$\frac{\partial N'}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (N_0(z) v_z),$$

$$N'_e \sim N'_i \sim N'. \quad (\text{П.8})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Row, J. Geophys. Res., 72, № 5, 1599 (1967).
2. R. S. Scorer, Proc. Roy. Soc. London, A201, 137 (1950).
3. David G. Horkviter, J. Geophys. Res., 69, № 24, 5295 (1964).
4. K. Najita, P. F. Weaver and P. C. Yuen, Proc. IEEE, 62, № 5, 563 (1974)
5. P. C. Yuen, P. F. Weaver, R. K. Suzuki and A. C. Furumoto, J. Geophys. Res., 74, 2256 (1969).
6. Я. Г. Бирфельд, Доклад на Всесоюзном совещании «Воздействие планет на солнечную активность, космические лучи, сейсмическую активность Земли», Пулково, 1976
7. Г. С. Голицын, В. И. Кляцкин, Изв. АН СССР, серия ФАО, 3, № 10, 1044 (1965).
8. Г. И. Григорьев, В. П. Докучаев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 945 (1978).
9. Г. И. Григорьев, Геомagnetизм и аэрономия, 15, № 2, 260 (1975).
10. С. А. Намазов, В. Д. Новиков, И. А. Хмельницкий, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 4, 73 (1975).
11. Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
12. R. V. Row, J. Geophys. Res., 72, № 5, 1599 (1967).
13. Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 3, 351 (1973)
14. Л. А. Дикий, Теория колебания земной атмосферы, Гидрометеониздат, Л., 1969.
15. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, изд. Высшая школа, М., 1965

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 мая 1977 г.

INFLUENCE OF EARTHQUAKES AND VOLCANIC ERUPTIONS ON THE
IONOSPHERE PLASMA

V. A. Pavlov

Influence wave born by earthquakes and volcanic eruptions on the ionosphere is considered. Disturbance of the electron density has been estimated.

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИЛЬНОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин

Показано, что эффективная трансформация внешнего электромагнитного поля, частота которого ω больше $\sqrt{\omega_i |\omega_e|}$ (где ω_i, e' — циклотронные частоты ионов и электронов), в продольные колебания возможна только в сильнонеоднородной магнитоактивной плазме. При $\omega < \sqrt{\omega_i |\omega_e|}$ возбуждаемые в области НГР продольные волны эффективно поглощаются вблизи границы плазмы даже при слабых соударениях.

1. Одним из методов нагрева плазмы является поглощение энергии внешнего поля в области нижнего гибридного резонанса (НГР). Изучению этого процесса посвящено множество работ (см. [1-4] и библиографию). В силу того, что уравнения Максвелла с тензором для холодной бесстолкновительной плазмы позволяют правильно определить энергию, передаваемую плазменной волне внешним полем [1, 5], в работе [4] (см. также библиографию [4]) исследована возможность нагрева плазмы при НГР в условиях, приближенных к реальным. Однако для понимания процесса поглощения энергии необходимо рассмотреть поведение плазменной волны, возбуждаемой внешним полем. Оказывается, что в слабостолкновительной плазме вся теряемая в области НГР энергия внешнего поля переносится плазменной волной в окрестность точки ионно-плазменного резонанса, которая может находиться значительно ближе к поверхности плазмы. Последнее обстоятельство может оказаться существенным в практике нагрева плазмы. Представляет также интерес изучение эффективности возбуждения плазменных волн внешним полем в том случае, если область НГР отсутствует.

2. В настоящей работе рассмотрим возбуждение внешним низкочастотным электрическим полем магнитозвуковых колебаний в сильнонеоднородной плазме. Температуру ионов положим равной нулю. Вектор внешнего магнитного поля H_0 ориентирован вдоль границы плазмы параллельно оси Oz. Профиль невозмущенной плотности плазмы имеет вид

$$n_0(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ n_0 \frac{x}{b} & (0 \leq x \leq b) \\ n_0 & (x > b) \end{cases}, \quad (1)$$

а внешнее электрическое поле в вакууме $E_0(t) = (E_0(t), 0, 0)$, причем $E_0(t) = E_0 \exp(-i\omega t)$. Частота внешнего поля находится в интервале $\omega_i \ll \omega \ll |\omega_e|$, где $\omega_a = e_a H_0 / m_a c$. Из линеаризованных уравнений квазигидродинамики и Пуассона, пренебрегая диссипацией, находим, что для поля в плазме справедливо следующее уравнение:

$$-\frac{v_{Te}^2}{\omega_e^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\epsilon_1 E) + \epsilon_1 E = E_0, \quad (2)$$

где

$$\epsilon_1 = \epsilon_i + \frac{\Omega_i^2(x)}{\omega_i |\omega_e|}, \quad \epsilon_i = 1 - \frac{\Omega_i^2(x)}{\omega(\omega + i\nu)} \quad (\nu \ll \omega),$$

$$\Omega_i^2(x) = \frac{4\pi e^2}{m_i} n_0(x),$$

$v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов.

3. Предположим, что частота внешнего поля ω превышает гибридную $\sqrt{|\omega_i|\omega_e|}$. В этом случае ϵ_1 всегда положительно, а ϵ_i может изменять знак. Вместо уравнения (2) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3}{\partial s^3} E + 3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} E + (s + s_0) \frac{\partial}{\partial s} E + E = 0, \quad (3)$$

которое получено путем однократного дифференцирования (2), причем в (3) использованы замены

$$s = -\frac{|\omega_e| a}{v_{Te}} \epsilon_i(x) (p^2 - 1)^{1/2},$$

$$s_0 = \frac{|\omega_e|}{v_{Te}} a \frac{p^2}{(p^2 - 1)^{1/2}}, \quad p^2 = \frac{\omega^2}{\omega_i |\omega_e|},$$

точка a — определяется из условия $\omega = \Omega_i(a)$.

Решение (3) ищем в виде интеграла

$$E(s) = \int_{\Gamma} v(t) e^{-ist} dt. \quad (4)$$

Вид функции $v(t)$ и контур интегрирования Γ следует определить с помощью (3). Подставляя (4) в уравнение (3), получим

$$E_j(s) = 2 e^{is} \int_{\Gamma_j} \exp \left[-i \left(2st - \frac{s_0}{2} \ln \frac{t-1}{t} \right) \right] dt, \quad (5)$$

где при $s < 0$ контуры Γ_j трех линейно независимых решений ($j=1, 2, 3$) уравнения (3) изображены на рис. 1. Пути интегрирования Γ_1 и Γ_3 обходят точки ветвления $t=0$; 1 подынтегрального выражения (5), из которых проведены разрезы в верхнюю полуплоскость t . Конец пути интегрирования каждого из решений Γ_j совмещен с точкой $t=1/2$. Можно показать аналогично [6], что при аналитическом продолжении решений E_j в область $s > 0$ (аргумент s при этом изменяется от $-\pi$ до нуля) только решение E_1 при $s \gg 1$ включает в себя волну, распространяющуюся в сторону возрастания плотности плазмы.

Выбирая вид решений в области $s > 0$ так, чтобы при $s \gg 1$ одно из них включало в себя бегущую в сторону $s \rightarrow \infty$ волну, а другое — волну, распространяющуюся в обратном направлении, получаем следующие решения при $s < 0$:

$$E_+ = E_1 + \exp(-\pi s_0) (E_3 - E_2),$$

$$E_- = E_2. \quad (6)$$

При достаточно больших значениях $s > 0$ контуры для E_+ и E_- деформируются так, как показано на рис. 2 и 3 соответственно.

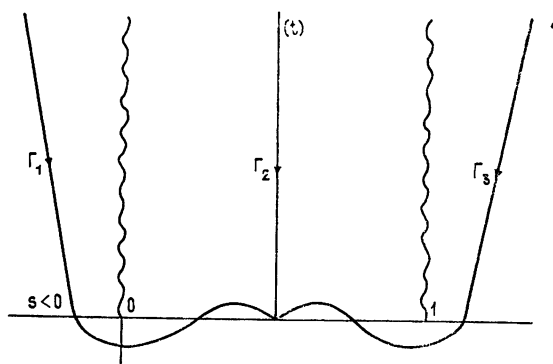


Рис. 1.

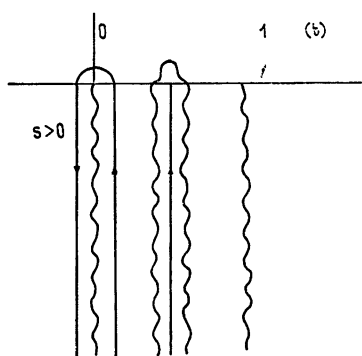


Рис. 2.

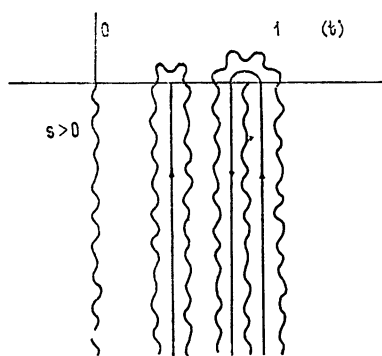


Рис. 3.

Если область однородной плазмы отсутствует ($b \rightarrow \infty$), поле при $s < 0$ имеет вид CE_+ . При достаточно больших значениях $s \gg 1$ интеграл (5) вдоль контура, изображенного на рис. 2, можно вычислить. Поле в плазме содержит два слагаемых:

$$E(s) = -C \left[\frac{\exp\left(\frac{\pi s_0}{2}\right)}{s + s_0} + 2(2s)^{i\frac{s_0}{2}-1} \times \right. \\ \left. \times \Gamma\left(1 - i\frac{s_0}{2}\right) (1 - e^{-\pi s_0}) \exp\left(is + \frac{3\pi i}{2} + \frac{\pi s_0}{4}\right) \right]. \quad (7)$$

Первое слагаемое описывает электронные колебания поперек магнитного поля, а второе — магнитозвуковую волну, распространяющуюся в направлении градиента плотности плазмы.

Уравнение (3) эквивалентно (2) в том случае, если выбраны соответствующие граничные условия. В качестве одного из условий можно использовать уравнение (2). Подставляя первое слагаемое (7) в уравнение (2) и удерживая члены, пропорциональные $(s + s_0)^{-1}$, определим постоянную C :

$$C \approx i \exp\left(-\frac{\pi s_0}{2}\right) \frac{s_0}{p^{\frac{1}{2}}} E_0. \quad (8)$$

Таким образом, амплитуда магнитозвуковой волны пропорциональна $\exp(-\pi s_0/4)$ и только в сильнонеоднородной плазме может быть сравнима с амплитудой внешнего возмущающего поля E_0 .

В том случае, если функция плотности плазмы $n_0(x)$ имеет вид (1), причем $b > a$, в области $x < b$ существует отраженная волна. Поле в неоднородной плазме можно записать в виде суммы двух интегралов $E(s) = C_+ E_+ + C_- E_-$. В однородной области ($x > b$) поле представлено электронными колебаниями и магнитозвуковой волной, распространяющейся в сторону $x = +\infty$:

$$E(x) = \frac{E_0 s_0 p^{-2}}{s_0 + s(b)} + C_0 \exp \left\{ \frac{i |\omega_e|}{v_{Te}} \left[\frac{s_0 + s(b)}{s(b)} \right]^{1/2} (p^2 - 1)^{1/2} (x - b) \right\}, \quad (9)$$

где C_0, C_{\pm} — произвольные постоянные. Их находим с помощью граничных условий, состоящих в непрерывности электрического поля и возмущенной плотности электронов на границе однородной плазмы, а также используя уравнение (2), определяющее амплитуду электронных колебаний в неоднородной области.

Приведем значение амплитуды магнитозвуковой волны в однородной области в том случае, когда $s_0 \gg 1$:

$$C_0 \approx E_0 \frac{1}{p^2 s(b)} \left[\frac{s_0}{s_0 + s(b)} \right]^2. \quad (10)$$

Таким образом, возмущение плотности на скачке градиента плотности приводит к генерации магнитозвуковой волны с амплитудой порядка $E_0/s(b)$ в отличие от предыдущего случая ($b \rightarrow \infty$), когда амплитуда волны пропорциональна $\exp(-\pi s_0/4)$ и пренебрежимо мала.

4. Если частота внешнего поля ω меньше гибридной $\sqrt{|\omega_i| |\omega_e|}$, источником плазменных колебаний являются не границы раздела, как это было при $\omega > \sqrt{|\omega_i| |\omega_e|}$, а область НГР ($\text{Re } \epsilon_1(d) = 0, \Omega_i^2(d) = [\omega^2/(1-p^2)] > \omega^2$). Пусть плотность плазмы, как и ранее, линейно нарастает вдоль оси Ox . Предположим, что характерный размер неоднородности намного превосходит длину волны плазменных колебаний, а частота внешнего поля не слишком мала по сравнению с гибридной $\sqrt{|\omega_i| |\omega_e|}$. В этом случае область существования плазменных волн располагается между $\text{Re } \epsilon_i = 0$ и $\text{Re } \epsilon_1 = 0$. В окрестности НГР ($\text{Re } \epsilon_1 = 0$) уравнение (2) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \eta F = - \frac{\chi p^2}{1-p^2} E_0, \quad (11)$$

где

$$F = \epsilon_i E, \quad \chi = \left[\frac{\omega_e^2 d^2 (1-p^2)}{p^2 v_{Te}^2} \right]^{1/3}, \quad \eta = \chi \left(1 - \frac{x}{d} \right),$$

причем d определяется из условия $\text{Re } \epsilon_1(d) = 0$.

Вместо уравнения (11) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F = 0, \quad (12)$$

полученное из (11) однократным дифференцированием. При этом порядок уравнения возрастает и следует ввести дополнительное граничное

условие. Таким условием при $|\eta| \gg 1$ может служить исходное уравнение (11). Уравнение типа (11) рассматривалось в ряде работ (см., например, [1, 5]). При больших значениях $|\eta| \gg 1$ решение (12) в области $\text{Re } \varepsilon_1 \gg 0$ имеет вид

$$F = A \left[\eta^{-1} + \sqrt{\pi} |\eta|^{-1/4} \exp \left(\frac{2i}{3} |\eta|^{3/2} - \frac{\pi i}{4} \right) \right], \quad (13)$$

где A — постоянная. Первое слагаемое описывает электронные колебания поперек магнитного поля, а второе — магнитозвукую волну, распространяющуюся к границе раздела «плазма — вакуум».

Постоянную A определим с помощью уравнения (11):

$$A = -\chi E_0 \frac{p^2}{1 - p^2}. \quad (14)$$

Точка $\text{Re } \varepsilon_2 = 0$ для плазменной волны является особой точкой (полюсом). В этом случае, как показано в работе [7] (см. также [8]), падающая на полюс волна поглощается и отраженная волна отсутствует. Если частота столкновений ионов значительна,

$$\frac{\nu}{\omega} \gg \frac{v_{Te}}{|\omega_e| d} \frac{1}{1 - p^2}, \quad (15)$$

то диссипация энергии плазменной волны будет происходить во всей области ее существования.

5. Пусть на неоднородную плазму, профиль невозмущенной плотности которой имеет вид (1), нормально падает необыкновенная электромагнитная волна с компонентами

$$H_z = E_y = e^{i\psi}, \quad E_x = E_z = H_x = H_y = 0, \quad (16)$$

где $\psi = \omega \left(\frac{x}{c} - t \right)$.

Уравнения, описывающие электромагнитное поле в плазме, имеют вид

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} \left(\varepsilon_{11} E_y - \varepsilon_{12} E_x - i \frac{\omega_e}{\omega} Q_e \right); \quad (17)$$

$$\varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + Q_e = 0; \quad (18)$$

$$iH_z = \frac{c}{\omega} \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad (19)$$

$$4\pi en_e = -\frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{11}^{(i)} E_x + \varepsilon_{12}^{(i)} E_y), \quad (20)$$

где

$$Q_e = -\frac{v_{Te}^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \frac{\partial}{\partial x} (4\pi en_e),$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(i)} - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^{(i)} - i \frac{\omega_e}{\omega} \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_e^2},$$

$$\epsilon_{11}^{(i)} = 1 - \frac{\Omega_i^2(\omega + i\nu)}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_i^2]}, \quad \epsilon_{12}^{(i)} = -i \frac{\omega_i}{\omega} \frac{\Omega_i^2}{[(\omega + i\nu)^2 - \omega_i^2]},$$

n_e — возмущенная плотность электронов плазмы.

При сделанных ранее предположениях $\omega_i \ll \omega \ll |\omega_e|$ и $p^2 < 1$ система уравнений (17) — (20) сводится к двум уравнениям

$$\frac{v_{Te}^2}{\omega_e^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\epsilon_i E_x) - \epsilon_1 E_x = \epsilon_2 E_y; \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{\epsilon_1} E_y = i \frac{\omega}{|\omega_e|} \beta_T^2 \frac{\epsilon_i}{\epsilon_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\epsilon_i E_x), \quad (22)$$

где

$$\beta_T = \frac{v_{Te}}{c}, \quad \epsilon_2 = -i \frac{\Omega_i^2(x)}{\omega \omega_i}.$$

Пусть окрестность НГР ($\text{Re } \epsilon_1 = 0$) находится в неоднородной плазме ($d < b$). Кроме того, будем считать, что неоднородность на границе плазмы мала по сравнению с характерным размером скинирования электромагнитной волны:

$$\frac{\omega^3 b [d(b-d)]^{-1/2}}{c \omega_i (1-p^2)} \ll 1. \quad (23)$$

Слагаемые в уравнениях (21) и (22), пропорциональные v_{Te} , существенны только в окрестности $|\epsilon_1| \ll 1$, в остальной области магнитозвуковая и электромагнитная волны существуют независимо, практически не взаимодействуя между собой в рассматриваемом здесь линейном по амплитуде колебаний приближении. В окрестности $|\epsilon_1| \ll 1$ разделение на магнитозвуковую и электромагнитную волны невозможно.

В сравнительно холодной плазме область взаимодействия волн мала, и ее можно при $v_{Te} \rightarrow 0$ свести в точку $i\text{Re } \epsilon_1 = 0$. Потери энергии электромагнитной волны на возбуждение плазменных колебаний можно заменить эффективной диссипацией, вводя в области $|\epsilon_1| \ll 1$ частоту столкновений [5]. Модуль коэффициента отражения необыкновенной волны от неоднородной плазмы при этих предположениях можно вычислить:

$$|R| \approx 1 - 2 \frac{\pi \omega}{c} \frac{d^2}{b^2} (b-d). \quad (24)$$

В окрестности НГР резонанса составляющая электромагнитного поля E_y^{tr} практически не изменяется, поэтому для поля плазменной волны справедливо уравнение (11), где E_0 следует заменить на $\epsilon_2(d)E_y^{\text{tr}}(d)$, причем

$$E_y^{\text{tr}}(d) \approx 2 \frac{\omega_i(1-p^2)}{\omega} \frac{d}{b} \left(\frac{b-d}{d} \right)^{1/2}.$$

Используя (13), амплитуду плазменной волны нетрудно определить:

$$E_x^l = i\sqrt{\pi} \frac{d}{b} |\epsilon_1|^{-1/4} \chi^{3/4} \frac{p^2}{1-p^2} \exp\left(\frac{2i}{3} \eta^{3/2}\right). \quad (25)$$

Система уравнений (17) — (20) имеет инвариант ($\nu = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial x} (H_z^* E_y + E_y^* H_z) = \frac{i \omega_e}{c \operatorname{Im} \epsilon_{12}^*} \left[1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega_e} \right) \right] (E_x^* Q_e - E_x Q_e^*). \quad (26)$$

Инвариант (26) в рассматриваемом приближении удобно записать в следующей форме:

$$\frac{c}{8\pi} (H_z^* E_y + H_z E_y^*) \Big|_{x=-\infty}^{x>a} \approx -i \frac{v_{Te}^2 \omega \omega_i}{8\pi |\omega_e| \Omega_i^2(x)} \times \\ \times \left[(\epsilon_i E_x) \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_i E_x)^* - (\epsilon_i E_x)^* \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_i E_x) \right] \Big|_{x=-\infty}^{x>a}. \quad (27)$$

Можно показать, что левая часть (27) на верхнем пределе, а правая часть на нижнем пределе обращаются в нуль. Тогда (27) представляет собой равенство полного потока энергии поперечных волн потоку энергии магнитозвуковых колебаний. Из (27) получим

$$1 - |R|^2 \approx -i \frac{v_{Te}^2 \omega \omega_i}{|\omega_e| c \Omega_i^2} \left[(\epsilon_i E_x^l) \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_i E_x^l)^* - (\epsilon_i E_x^l)^* \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_i E_x^l) \right]. \quad (28)$$

Подставляя в (28) значения амплитуды плазменных колебаний (25) и коэффициента отражения (24), убеждаемся в сохранении полного потока энергии.

6. В заключение остановимся на основных результатах данной работы. В неоднородной плазме, которая удерживается внешним магнитным полем $H_0 \perp \operatorname{grad} n_0(\mathbf{r})$, переменное продольное поле $E_0 \parallel \operatorname{grad} n_0(\mathbf{r})$ с частотой $\omega_i \ll \omega \ll |\omega_e|$ возбуждает магнитозвуковые колебания. В том случае, если частота ω превышает гибридную $\sqrt{\omega_i |\omega_e|}$, амплитуда плазменных колебаний в плавно-неоднородной плазме пропорциональна

$$E_0 \exp \left(-\frac{\pi |\omega_e|}{4v_{Te}} a \frac{p^2}{p^2 - 1} \right),$$

где $p^2 = \omega^2 / \omega_i |\omega_e|$. Если функция плотности плазмы имеет «плато», то при условии $a \gg \frac{v_{Te}}{|\omega_e|} \frac{p^2 - 1}{p^2}$ амплитуда поля плазменной волны порядка амплитуды внешнего поля E_0 .

Внешнее поле с частотой ω , меньшей гибридной, $\sqrt{\omega_i |\omega_e|}$ возбуждает в окрестности нижнегибридного резонанса ($\operatorname{Re} \epsilon_i = 0$) магнитозвуковую волну, распространяющуюся в направлении, обратном градиенту плотности плазмы. Если частота столкновений ионов достаточно мала,

$$\frac{\nu}{\omega} < \frac{v_{Te}}{|\omega_e| d} \frac{1}{1 - p^2},$$

магнитозвуковая волна поглощается в области ионно-плазменного резонанса ($\operatorname{Re} \epsilon_i = 0$).

Нормально падающая на неоднородную плазму необыкновенная электромагнитная волна ($p^2 < 1$) теряет в области НГР энергию на возбуждение плазменной волны. Если неоднородная область на границе

плазмы меньше глубины скинирования электромагнитной волны $\frac{c \omega_i (1 - p^2)}{\omega^2 b} [d(b - d)]^{1/2}$, то относительные потери энергии необыкновенной волны порядка $4 \frac{\pi \omega}{c} \frac{d^2}{b^2} (b - d)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Голант, А. Д. Пилия, УФН, **104**, 413 (1971).
2. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, УФН, **109**, 225 (1973).
3. E. Lazzaro, Plasma Phys, **17**, 1033 (1975)
4. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Г. В. Переверзев, А. В. Погосян, Физика плазмы, **1**, 623 (1975)
5. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, ЖЭТФ, **57**, 1198 (1969).
6. R. V. White, F. F. Chen, Plasma Phys., **16**, 565 (1974)
7. K. G. Badden, Physics of the Ionosphere, 320 (1955), Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, London, 1961
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд Наука, М., 1967

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 октября 1977 г

EXCITATION OF MAGNETO-SOUND OSCILLATIONS IN A
STRONGLY-INHOMOGENEOUS PLASMA

A. N. Kondratenko, V. M. Kuklin

It is shown that the effective transformation of the external electromagnetic field which frequency ω is greater than $\sqrt{\omega_i |\omega_e|}$ (where $\omega_{i, e}$ are the cyclotron ion and electron frequencies) into longitudinal oscillations is possible only in a strongly-inhomogeneous magnetoactive plasma. For $\omega < \sqrt{\omega_i |\omega_e|}$ the longitudinal waves of weak collisional dissipation excited in low-hybrid resonance (LHR) effectively absorb near the plasma boundary even at weak collisions.

УДК 533.9.01

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ В ПЛАЗМЕ, ГРАНИЧАЩЕЙ С МЕТАЛЛОМ

В. С. Попов, С. В. Троицкий, И. П. Якименко

В рамках кинетической теории получено уравнение, описывающее спектр возбуждений в изотропной электронной плазме, граничащей с металлом. Показано, что в такой системе могут распространяться поверхностные волны, граничная частота которых близка к электронной плазменной частоте. Найдены простые соотношения для волнового числа и декремента затухания волн этого типа.

При наличии резких границ раздела между различными средами реализуются условия для возбуждения поверхностных экситонов [1, 2], исследование которых имеет существенное значение для проблем высокотемпературной проводимости [3], поглощения света кристаллами [4] и электромагнитных волн плазмой [5], неустойчивостей [6] и флуктуаций [7] в неравновесной ограниченной плазме и др. Поверхностные возбуждения флуктуационного происхождения могут развиваться как на открытых границах, так и на границах диэлектрик — металл или плазма — металл. Последняя ситуация встречается, например, при исследовании плазмы в волноводах и резонаторах или при движении металлических объектов в ионосфере.

Представляет значительный интерес вопрос об особенностях спектров возбуждений в различных случаях в связи с тем, что эти особенности могут быть достаточно сильно выраженными. Так, в работе [8] показано, что при наличии металлической поверхности вместо хорошо известного резонанса $\text{Re } \epsilon(\omega) = -1$ ($\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость среды при неучете пространственной дисперсии) возникает возбуждение, частота и волновой вектор которого связаны соотношением

$$\epsilon_{33}(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (1)$$

характерным для спектров продольных волн в плазме [9]. Описание резонансов такого типа, в отличие от обычного резонанса Херлофсона [10], невозможно без учета пространственной дисперсии. При этом для решения граничной задачи необходимо описать поведение частиц на границе раздела. Обычно в качестве граничных условий для частиц выбираются условия зеркального или диффузного отражения (см., например, работы [7, 11–16]). Следует, однако, отметить, что некоторые наблюдаемые эффекты (например, резонансы Тонкса — Даттнера в ограниченной плазме [5] или некоторые особенности аномального скин-эффекта в металле [12]) удовлетворительно объясняются в рамках модели зеркального отражения.

В настоящей работе методами микроскопической теории рассматриваются поверхностные возбуждения квазипродольного типа при наличии границы раздела изотропная плазма — металл. Пусть электронная плазма занимает полупространство $z > 0$ и частицы испытывают зеркальное отражение от поверхности $z = 0$. Тогда распределение элек-

трического поля в области плазмы может быть представлено в следующем виде (см., например, [14]):

$$E_{i\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) (j_{j\mathbf{k}\omega}^e + I_{j\mathbf{k}\omega}), \quad (2)$$

где

$$\Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2 \varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{k^2 \delta_{ij} - k_i k_j}{k^2 \left[\varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right]}, \quad (3)$$

$\varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega)$ и $\varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega)$ — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости изотропной плазмы, $j_{j\mathbf{k}\omega}^e$ — фурье-компонента заданного распределения токов в полупространстве $z > 0$ (в качестве этих токов могут быть выбраны, в частности, величины, играющие роль «источников» флуктуационного поля [17]):

$$I_{j\mathbf{k}, \omega} = \begin{cases} -\frac{c}{2\pi} B_{yp\omega}(+0) & (j = x) \\ \frac{c}{2\pi} B_{xp\omega}(+0) & (j = y), \\ 0 & (j = z) \end{cases} \quad (4)$$

$B_{jp\omega}(+0)$ — преобразование Фурье (по координатам x, y и времени t) j -компоненты вектора магнитной индукции при $z = +0$; \mathbf{p} — двумерный вектор с компонентами k_x и k_y , так что

$$p^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k^2 = p^2 + k_z^2. \quad (5)$$

Отметим, что распределение (2) является точным следствием уравнений Максвелла и линеаризованного уравнения Власова, т. е. это распределение записано с учетом запаздывания и граничных условий для одночастичной функции распределения в случае зеркального отражения частиц от поверхности $z = 0$ ($f(v_z > 0) = f(v_z < 0)$).

Постоянные $B_{jp\omega}(+0)$ исключаются с помощью граничных условий для электрического поля на плоскости раздела $z = 0$, которые в случае идеально проводящего металла сводятся к требованию обращения в нуль тангенциальных составляющих электрического поля (2), что дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_z \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) (j_{j\mathbf{k}\omega}^e + I_{j\mathbf{k}\omega}) = 0 \quad (i = x, y). \quad (6)$$

В результате поле в плазме представляется в виде линейного функционала от тока $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t)$, что позволяет решать разнообразные задачи возбуждения плазменного полупространства, ограниченного металлической поверхностью.

Для целей настоящей работы достаточно рассмотреть детерминант системы (6), который представляется в виде произведения

$$L(\mathbf{p}, \omega) = L_1(\mathbf{p}, \omega) L_2(\mathbf{p}, \omega), \quad (7)$$

где

$$L_1(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k^2} \left[\frac{p^2}{\varepsilon_L(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}} \right]; \quad (8)$$

$$L_2(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{\varepsilon_T(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}}. \quad (9)$$

Приравнивая (7) нулю, получим уравнения, описывающие спектры собственных колебаний в рассматриваемой системе:

$$L_1(\mathbf{p}, \omega) = 0 \quad (10)$$

или

$$L_2(\mathbf{p}, \omega) = 0. \quad (11)$$

Можно показать, что второе из этих уравнений имеет решения лишь в низкочастотной области спектра, где само это уравнение, строго говоря, несправедливо. Поэтому мы ограничимся ниже исследованием уравнения (10), из которого вытекает возможность существования поверхностных возбуждений в области достаточно высоких частот, включающей, в частности, ближайшую окрестность плазменной частоты:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Напомним в связи с этим, что частотный спектр поверхностных волн в системе плазма — вакуум ограничен сверху хорошо известным условием

$$\omega < \omega_p / \sqrt{2}. \quad (13)$$

Используя технику интегрирования в комплексной плоскости (ср. с [15, 16]), для интересующей нас области частот $\omega \leq \omega_p$ получим:

$$L_1(\mathbf{p}, \omega) = p^2 \frac{\sqrt{2} v_T}{\omega} [\Phi(t) - i \alpha(t)] + \frac{\pi}{\varepsilon(t)} \sqrt{p^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \varepsilon(\omega), \quad (14)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{f(t)y(t)}{\sqrt{2} \left[\frac{y^2(t)}{2} + \frac{p^2 v_T^2}{\omega^2} \right]}, \quad f(t) = \frac{\pi y(t)}{(3/2)y^2(t) + \varepsilon(t)},$$

$$\alpha(t) = \frac{2 \sqrt{\pi}}{t^2 |\varepsilon_L(\omega, k)|_{k \approx \omega/\sqrt{2} v_T}^2}, \quad (15)$$

$$\varepsilon(t) = 1 - \frac{1}{t^2}, \quad t = \frac{\omega}{\omega_p},$$

$v_T^2 = \frac{T}{m}$, T — температура плазмы в энергетических единицах, $y(t)$ — функция, определяемая корнем k_{0L} уравнения $\varepsilon_L(k, \omega) = 0$, расположенным в нижней полуплоскости комплексных k на мнимой оси:

$$y(t) = i \sqrt{2} k_{0L} \frac{v_T}{\omega}. \quad (16)$$

Из (14) следует, что при $T \rightarrow 0$ уравнение (10) не имеет решений волнового типа. При $T \neq 0$ слабозатухающие решения ($\alpha(t) \ll \Phi(t)$) определяются соотношением

$$\left(\frac{pc}{\omega_p}\right)^2 = \frac{\pi^2 t^2}{4\beta^2 \varepsilon^2(t)u(t)} \left[1 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \beta^2 \varepsilon^3(t)u(t)\right)^{1/2}\right], \quad (17)$$

где

$$u(t) = f^2(t) - \left[\frac{\pi}{\varepsilon(t)y(t)}\right]^2, \quad \beta = \frac{v_T}{c}. \quad (18)$$

Соотношение (17) выведено в предположении, что $\varepsilon(t)\beta^2 \ll \frac{1}{2} y^2(t)$.

При $t \approx 1$ это соотношение упрощается к виду

$$\frac{pc}{\omega_p} = \frac{\pi t}{\beta |\varepsilon(t)| \sqrt{2u(t)}}. \quad (19)$$

Условие

$$\lim_{t \rightarrow t_{\text{гр}}} \frac{pc}{\omega_p} = \infty \quad (20)$$

определяет граничную частоту поверхностных волн $\omega_{\text{гр}} = \omega_p t_{\text{гр}}$. Из (19) видно, что это условие реализуется, если $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ или $u(t) \rightarrow 0$. Рассматривая функции $\varepsilon(t)$ и $u(t)$, нетрудно показать, что при увеличении t функция $u(t)$ первой переходит через нуль. Поэтому граничная частота удовлетворяет уравнению $u(t_{\text{гр}}) = 0$. Поскольку это уравнение содержит функцию $y(t)$, оно должно решаться методами численного анализа, который показывает, что $t_{\text{гр}}$ очень близко к единице. Для

иллюстрации на рис. 1 приведены зависимости величины $\frac{pc}{\omega_p}$ от безраз-

мерной частоты t для плазмы с различными температурами ($1 - T =$

$= 1$ эВ, $2 - T = 10$ эВ, $3 - T = 10^2$ эВ). Как видно, $\omega_{\text{гр}} \approx \omega_p$, причем

величина $\frac{pc}{\omega_p}$ резко возрастает только вблизи $\omega_{\text{гр}}$. Следует отметить так-

же весьма существенное влияние температуры на дисперсию во всем

диапазоне рассматриваемых частот.

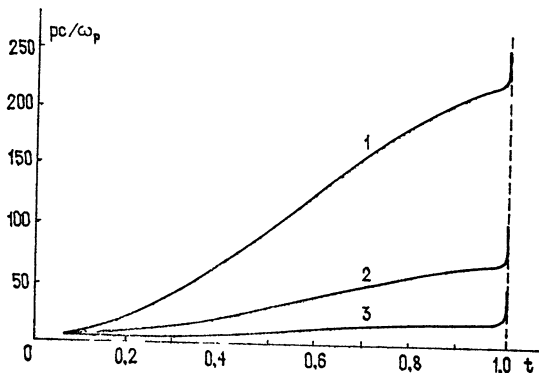


Рис. 1.

Как известно, по мере приближения к граничной частоте наряду с уменьшением фазовой скорости поверхностных волн увеличивается их декремент затухания γ (эта величина вводится посредством соотношения $\rho = \rho' + i\gamma$). Используя (10) и (14), можно получить следующее простое выражение для декремента затухания:

$$\gamma = \frac{\alpha(t)x^2}{pf(t)} \frac{p^2 - (4/\pi^2)\beta^2 x^2 \epsilon^3(t)}{p^2 f^2(t) - x^2}, \quad (21)$$

где

$$x = \frac{\pi t}{2|\epsilon(t)|\lambda_D}, \quad \lambda_D = (T/4\pi e^2 n_0)^{1/2}. \quad (22)$$

Это выражение справедливо при $t < 0,5$. Сравнение (21) и (17) показывает, что в этой области частот $\gamma \ll p'$. Для определения декремента затухания в области более высоких частот необходимо численное решение исходного уравнения (10).

Отметим в заключение, что результаты настоящей работы нетрудно обобщить на случай учета конечной (отличной от нуля) глубины скин-слоя в металле. Для этого вместо (6) необходимо использовать граничное условие импедансного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Пекар, ЖЭТФ, 33, 1022 (1957).
2. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
3. В. Л. Гинзбург, УФН, 101, 185 (1970).
4. В. М. Агранович, Теория экситонов, изд. Наука, М., 1968.
5. P. E. Vandenplas, Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas, John Wiley, Interscience, London—New York—Sidney, 1968.
6. E. Abu-Assali, B. A. Alterkop and A. A. Rukhadze, Plasma Phys., 17, 189 (1975).
7. В. С. Попов, И. П. Якименко, ЖТФ, 45, 1381 (1975).
8. В. М. Агранович, А. Г. Мальшуков, М. А. Мехтиев, ФТТ, 14, 849 (1972).
9. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
10. N. Herlofson, Arkiv för Fysik, 3, 247 (1951).
11. R. Tegeback, A. S Usenko, I. P. Yakimenko and A. G. Zagorodny, J. Plasma Phys., 18, № 1, 113 (1977).
12. G. E. Juras, Phys. Rev., B2, 2869 (1970).
13. D. E. Beck and V. Celli, G. Lo Vecchio and A. Magnaterra, Nuovo Cimento, 68B, 230 (1970).
14. I. P. Yakimenko and A. G. Zagorodny, Physica Scripta, 10, 244 (1974).
15. Ю. А. Романов, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 2, 242 (1964).
16. А. В. Резвов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 9, 1315 (1971).
17. Ю. Л. Климонтович, Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы, изд. Наука, М., 1975.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 июля 1977 г.

SURFACE EXCITATIONS IN PLASMA BORDERING ON METAL

V. S. Popov, S. V. Troitskii, I. P. Yakimenko

In the framework of the kinetic theory the equation is derived which describes the spectrum of excitation in an isotropic electron plasma bordering on metal. It is shown that surface waves which boundary frequency is close to the electron plasma frequency may propagate in such a system. Simple relations for the wave number and decrement of this type wave attenuation are found.

УДК 533.0.01 : 530.18

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ ЧЕРЕНКОВСКОЙ МОДЫ В ПЛАЗМЕ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. П. Зинченко, В. Б. Красовицкий

Исследован процесс подавления поперечной черенковской моды, возбуждаемой в плазме ограниченным по радиусу релятивистским пучком электронов, внешним продольным магнитным полем. Полученные численные решения системы нелинейных уравнений позволяют проследить за динамикой развития колебаний и, в частности, за эволюцией радиуса пучка в зависимости от напряженности магнитного поля. Показано, что неустойчивость практически не развивается, если гирочастота электронов пучка в собственной системе отсчета в пять раз превышает инкремент.

Известно, что распространение в плазме релятивистского пучка электронов характеризуется преимущественной раскачкой поперечных ленгмюровских колебаний из-за наличия анизотропии продольной и поперечной масс [1]. Возникающее при этом сильное поперечное электрическое поле приводит к значительному искажению радиального профиля пучка за время порядка нескольких обратных инкрементов неустойчивости [2], и, следовательно, развитие поперечной черенковской моды приводит к ухудшению условий транспортировки пучка в плазме. Очевидно, что поперечные колебания в пучке могут быть подавлены внешним магнитным полем, параллельным скорости пучка и запрещающим поперечное движение электронов. Целью настоящей работы является исследование динамики развития поперечной черенковской моды при наличии внешнего магнитного поля в случае «тонкого» пучка [2]. Полученные численные решения представлены на рис. 1—3.

Пусть цилиндрический, ограниченный по радиусу пучок электронов, пространственный заряд и ток которого скомпенсированы электронами и ионами плазмы, распространяется в плазме вдоль постоянного магнитного поля H_0 , направленного вдоль скорости пучка V_0 . Если плотность пучка мала по сравнению с плотностью плазмы и постоянна в сечении, а его радиус мал по сравнению с плазменной длиной волны, то производные по продольной координате z оказываются малыми по сравнению с производными по r (z и r — цилиндрические координаты) и система уравнений гидродинамики может быть приведена к уравнению для радиуса пучка [2]. Для аксиально-симметричных возмущений, исключая зависимость от координаты r с помощью замены

$$v_r = \frac{\dot{R}}{R} r, \quad v_\varphi = \Omega r, \quad E_r = Nr \quad (1)$$

и используя интегралы движения

$$n_b = \begin{cases} n_0 \frac{R_0^2}{R^2} & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}, \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{\omega_H}{2} + \frac{R_0^2}{R^2} \left(\Omega_0 - \frac{\omega_H}{2} \right),$$

аналогично работе [2] находим

$$R + \left[\frac{\omega_H^2}{2} - \frac{R_0^4}{R^4} \left(\Omega_0 - \frac{\omega_H}{2} \right)^2 + \frac{e}{m} N \right] R = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \Omega_p^2 \right) N = 2\pi e n_0 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_{Hp}^2 \right) \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right),$$

где точкой обозначена производная по времени, $\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial z}$,

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad \omega_{Hp} = \frac{\omega_H}{\gamma_0}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_p}{m \gamma_0^3}, \quad \Omega_p^2 = \omega_p^2 + \omega_{Hp}^2,$$

V_0 — скорость плазмы в системе отсчета пучка, $\gamma_0 = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2} \right)^{-1/2}$,

R_0 и Ω_0 — начальный радиус и угловая скорость электронов пучка*. В отсутствие магнитного поля ($\omega_H = 0$) получаем соответствующую систему уравнений работы [2].

Дальнейшее упрощение системы (3) имеет место в случае пучка малой плотности:

$$\nu = \left(\gamma_0^3 \frac{n_0}{2n_p} \right)^{1/3} \ll 1. \quad (4)$$

Полагая, что возмущения имеют вид

$$N(t, z) = \frac{1}{2} [N(t) \exp(-ik_{\parallel} z) + \text{к. с.}],$$

и считая зависимость амплитуды от времени «медленной» ($\dot{N} \ll \omega_p N$), для резонансной гармоники $\omega_p = k_{\parallel} V_0$ (соответствующей максимальному инкременту) получаем систему уравнений в полных производных по времени:

$$\frac{d^2 R}{d t^2} + \left[\frac{\alpha^2}{4} \left(1 - \frac{1}{R^4} \right) + \text{Re}(X \exp(-i\Phi)) \right] R = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dX}{d t^2} = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(i\Phi)}{R^2} d\Phi.$$

В уравнениях (5) введены безразмерные переменные

$$R(\tau) = \frac{R}{R_0}, \quad X = \frac{eN}{m \omega_p^2 \nu^2}, \quad \tau = \nu \omega_p t, \quad \Phi = k_{\parallel} z.$$

Кроме того, при переходе от формул (3) к формулам (5) магнитное поле предполагается слабым и удержано лишь в уравнениях движения пучка, что справедливо при условии

* По сравнению с работой [2] учтено магнитное поле волны в уравнениях движения электронов плазмы, что приводит к замене поперечной массы $m_{\perp} = m\gamma_0$ на продольную $m_{\parallel} = m\gamma_0^3$.

$$\alpha = \frac{\omega_H}{\nu \omega_p} \ll 1.$$

При этом электроны плазмы остаются немагнитными: $\Omega_p \approx \omega_p$. Считается также, что начальная угловая скорость пучка равна нулю: $\Omega_0 = 0$.

Результаты численного интегрирования системы (5) для различных значений параметра α при начальных условиях $X(0) > 0$ и $R(0) = 1$ (пунктир) представлены на рис. 1—3, где каждая из кривых для радиуса пучка соответствует разным фиксированным моментам времени (рис. 1—3а).

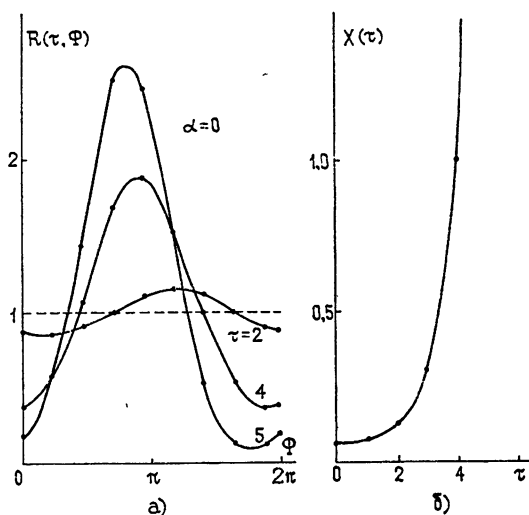


Рис. 1.

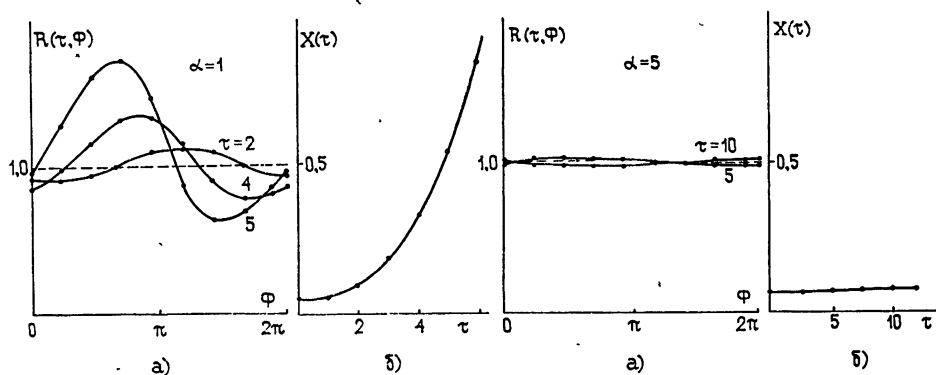


Рис. 2.

Рис. 3.

В отсутствие внешнего магнитного поля $\alpha = 0$ (рис. 1а) развитие неустойчивости сопровождается образованием выбросов и перетяжек в сечении пучка в зависимости от фазы электронов относительно волны Φ и ростом амплитуды поля со временем τ (рис. 1б). Качественно та же картина наблюдается и на рис. 2, соответствующем случаю $\alpha = 1$. Наличие магнитного поля «затрудняет» поперечное движение электро-

нов, и развитие неустойчивости значительно замедляется. Согласно рис. 3 включение достаточно сильного магнитного поля $\alpha = 5$ практически подавляет неустойчивость.

В заключение отметим, что наличие внешнего магнитного поля, стабилизирующего черенковскую неустойчивость, может привести к раскачке поперечных колебаний в пучке в условиях аномального эффекта Доплера [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ, 57, 966 (1969).
2. В. Б. Красовицкий, Физика плазмы, 3, 105 (1977).
3. В. Б. Красовицкий, Физика плазмы, 5, вып. 1 (1979).

Ростовский-на-Дону государственный
университет

Поступила в редакцию
28 ноября 1977 г.

NONLINEAR STABILIZATION OF TRANSVERSE CERENKOV MODE IN PLASMA BY THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD

V. P. Zinchenko, V. B. Krasovitskii

The suppression of a transverse Cerenkov mode excited in plasma by a radially bounded electron beam by the external longitudinal magnetic field has been investigated. The obtained numerical solutions of the nonlinear equation system permit to follow the dynamics of evolution of oscillations and, in particular, of the beam radius as a function of the magnetic field strength. It is shown that the instability does not practically develop if the electron beam gyro-frequency in the self-frame of reference exceeds the increment five times.

УДК 530.145 : 530.18

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА САМОФОКУСИРОВКУ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ. ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

*С. М. Аракелян, Г. А. Варданян, В. А. Выслоух,
Г. А. Ляхов, В. А. Макаров, Ю. С. Чилингарян*

Проведен аналитический расчет (в безаберрационном приближении) пороговых условий и изменений ширины светового пучка при самофокусировке (СФ) в изотропной фазе жидкого кристалла вблизи точки фазового перехода. Показано, что ориентационный и тепловой механизмы пространственной дисперсии (ПД) нелинейности обеспечивают возможность квазиволноводного распространения мощного пучка в среде. На основе метода конечных элементов разработана программа численного решения уравнений СФ в среде с ПД нелинейности и проведено исследование в широком диапазоне параметров характеристик распространяющегося в среде светового пучка.

1. Исследование самофокусировки (СФ) света в веществах, которые в определенном диапазоне термодинамических параметров имеют жидкокристаллическую структуру, характеризующуюся макроскопической упорядоченностью молекулярной ориентации, представляет интерес по целому ряду причин.

1) Нелинейность во многих жидких кристаллах (ЖК) намного превосходит по величине нелинейность обычных жидкостей; то же самое известно относительно времени релаксации τ_p нелинейности ЖК, причем рост τ_p особенно заметен при приближении температуры к точке перехода T^* «изотропная жидкость — нематический ЖК»* [1-4]. Основные следствия этого: низкий порог СФ [1-4], устойчивость СФ относительно расслоения интенсивного пучка на нити, зафиксированная экспериментально [1] и имеющая теоретическое объяснение, основанное на учете пространственной дисперсии (ПД) нелинейности [5, 6]. Важность этих особенностей в приложениях несомненна. Чувствительность τ_p к изменению температуры эффективно используется также для исследований, необходимых в целях изучения техники формирования коротких импульсов, общих свойств нестационарного самовоздействия [7].

2) Влияние структурных свойств ЖК и мощного излучения взаимно; под действием последнего возможна контролируемая перестройка структуры среды [8, 9] (см. также [10]). Это ставит нелинейные оптические эффекты, в частности, эффекты СФ, в ряд индикаторов термодинамических изменений ЖК — фазы вблизи точки фазового перехода. Дополнительные возможности здесь содержит использование статистических методов нелинейной оптики (см. [11]).

3) Подчеркнутость и многообразие, контролируемость нелинейных

* Эффекты самовоздействия света в холестерических ЖК имеют, конечно, свою специфику и должны быть рассмотрены отдельно.

самовоздействий в ЖК, с одной стороны, и вполне реальная возможность постановки соответствующих экспериментов в широком диапазоне параметров, с другой, — делают эти эффекты удобным объектом для решения широкого круга вопросов теории нелинейных волн.

Целью данной работы является, во-первых, аналитический (в безабберационном приближении [12]) расчет пороговых условий СФ и изменения интенсивности и ширины светового пучка в изотропной фазе ЖК вблизи точки фазового перехода; во-вторых, численный анализ эффектов СФ, в котором найдены области параметров излучения и среды, определяющие качественный характер протекания СФ (эффекты насыщения, квазиволноводные режимы, многофокусная структура). Основное внимание уделено учету теплового и ориентационного механизмов ПД нелинейности.

2. Исходными для анализа СФ излучения в изотропной фазе ЖК являются уравнения, связывающие медленную комплексную амплитуду E линейно поляризованной электромагнитной волны, температуру T и параметр порядка Q , характеризующий степень ориентационной упорядоченности молекул.

Это, во-первых, параболическое уравнение нелинейной дифракции [12, 2], нелинейность которого обусловлена зависимостью Q от поля:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \delta \right) E = - \frac{4\pi ik}{3n^2} \chi_a Q E. \quad (1)$$

Здесь z — координата распространения, k — волновое число, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, v — групповая скорость, χ_a — анизотропия линейной восприимчивости. Зависимостью коэффициента поглощения δ от температуры и интенсивности излучения пренебрегаем: по оценкам, она становится существенной только в области непрозрачности ЖК ($T < T^*$).

Разложение Ландау свободной энергии нематика при $T \rightarrow T^*$, учитывающее влияние поля, имеет вид [13]*

$$F = F_0 + \frac{a}{2} (T - T^*) Q^2 + \frac{b}{2} (\text{grad } Q)^2 - \frac{2}{9} \chi_a Q |E|^2. \quad (2)$$

Здесь F_0 — энергия изотропной фазы ($T \gg T^*$), a — константа, не зависящая от температуры. Константа b , зависящая от температуры слабо, связана с характерным для ЖК корреляционным масштабом L_K : $b = a(T - T^*)L_K^2/4$; третье слагаемое в (2) описывает ПД параметра порядка. Уравнение релаксации получается варьированием (2) по Q :

$$\eta \partial Q / \partial t + a(T - T^*)Q = b \Delta_{\perp} Q + \frac{2}{9} \chi_a |E|^2, \quad (3)$$

где η — коэффициент вязкости. Вблизи T^* время релаксации параметра порядка $\tau_p = \eta/a(T - T^*)$ резко изменяется с температурой (зависимость η от T медленной [3]), поэтому влияние лазерного нагрева может стать решающим.

Изменение температуры среды в поле излучения описывается уравнением теплопроводности

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta_{\perp} T + \frac{\delta c n |E|^2}{8\pi}, \quad (4)$$

* Вообще говоря, параметр порядка — тензорная величина, однако эффекты СФ линейно поляризованной волны зависят только от одной скалярной комбинации компонент этого тензора.

κ — коэффициент теплопроводности. Это уравнение учитывает второй — тепловой — механизм пространственной нелокальности нелинейного отклика. Зависимость плотности среды ρ и теплоемкости C от температуры в интересующем нас диапазоне, по оценкам, слабо влияет на решение системы (1), (3), (4).

Будем считать, для определенности, что на границу среды ($z = 0$) падает гауссов пучок

$$E(r, z = 0) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right) \quad (r^2 = x^2 + y^2), \quad (4')$$

и рассмотрим стационарный режим самофокусировки, реализующийся, если длительность падающего импульса больше τ_p и времени установления температурного распределения $\tau_T = C \rho r_0^2 / 4 \kappa$ (качественные черты СФ, проявляющиеся в стационарном режиме, сохраняются и в нестационарном; подробное исследование нестационарной СФ в ЖК — предмет последующей работы).

3. Действуя по известной методике безабберационного приближения [12], из системы (1), (3), (4) в стационарном режиме ($\partial/\partial t = 0$) выводим уравнения, описывающие изменение безразмерной ширины пучка с координатой распространения (по предположению о сохранении гауссовой формы [12], интенсивность на оси пучка обратно пропорциональна квадрату ширины f). При учете только ориентационного механизма ПД ($\delta = 0$) имеем

$$f^3 \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 1 - \alpha \gamma f^2 [1 + \gamma f^2 \text{Ei}(-\gamma f^2) \exp(\gamma f^2)]. \quad (5)$$

Здесь $\xi = z/L_d$ (дифракционная длина $L_d = kr_0^2$), $\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция, параметр $\alpha = P/P_1$ — отношение мощности пучка $P = cn E_0^2 r_0^2 / 8$ к пороговой мощности СФ без учета ПД; $P_1 = 27 \pi cn^3 a (T - T^*) / 2 (8 \pi k \chi_a)^2$, параметр ПД $\gamma = (r_0/L_K)^2$.

Для чисто теплового механизма ($L_K = 0$)*

$$f^3 \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 1 - \alpha \left(1 - \frac{0.1 \alpha \beta}{f^2}\right) \times \left(1 + \frac{0.4 \alpha \beta}{f^2}\right)^{-2}, \quad (5')$$

где $\beta = P_1/P_2$, $P_2 = 2 \pi \kappa (T_0 - T^*) / \delta$, T_0 — температура термостата.

Из (5) и (5') следует, что СФ лазерного пучка происходит, если мощность его превышает пороговую, $P > P_n$ ($\alpha > \alpha_n$), которая определяется соответственно соотношениями

$$\alpha_n = [\gamma (\gamma \exp(\gamma) \text{Ei}(-\gamma) + 1)]^{-1}; \quad (6)$$

$$1 = \alpha_n (1 - 0.1 \alpha_n \beta) (1 + 0.4 \alpha_n \beta)^{-2}. \quad (6')$$

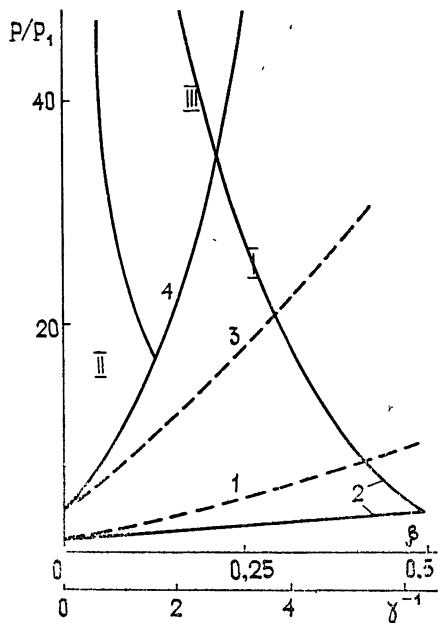


Рис. 1.

* Изменением интенсивности за счет поглощения в изотропной фазе ЖК можно пренебречь: $\delta L \ll 1$, L — длина ЖК.

В отсутствие ПД, обусловленной нелокальностью ориентационного отклика ($L_K = 0$), и поглощения ($\delta = 0$) (6) и (6') переходят в обычное условие $P_{\pi} > P_1$ [12].

Зависимости (6) и (6') пороговой мощности от параметров излучения и среды показаны на рис. 1. Кривая 1 отображает зависимость $\alpha_n(\gamma)$, кривая 2 — $\alpha_n(\beta)$. Эффекты ПД, как видно из этих графиков, делают более жесткими условия СФ пучка с заданными параметрами; наличие верхней ветви кривой 2 свидетельствует о том, что в безаберрационном приближении СФ не происходит, если мощность пучка превышает некоторое, достаточно большое в реальном масштабе, значение. Это объясняется тем, что тепловой механизм насыщает нелинейность, причем насыщение нелокально. Подробнее картина самовоздействия исследуется при точном численном анализе стационарного режима (1), (3), (4) (см. п. 4).

Уравнения (5), (5') удается проинтегрировать один раз:

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{f^2} + \alpha\gamma [\text{Ei}(-\gamma) \exp(\gamma) - \text{Ei}(-\gamma f^2) \exp(\gamma f^2)]; \quad (7)$$

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{f^2} - \frac{5\alpha}{4} \left(1 - \frac{1}{f^2}\right) \left/ \left(1 + \frac{2\alpha\beta}{5}\right) \left(1 + \frac{2\alpha\beta}{5f^2}\right) + \frac{5}{8\beta} \ln \left(\frac{1 + \frac{2}{5}\alpha\beta}{1 + \frac{2\alpha\beta}{5f^2}} \right) \right. \quad (7')$$

Решения (7) показаны на рис. 2а. При $\gamma \rightarrow \infty$ (обычный керровский механизм без насыщения) пучок схлопывается в точку (кривая 1). ПД нелинейности вызывает осцилляции ширины пучка по z , период которых увеличивается с ростом γ^{-1} (кривые 1—4 рис. 2а построены при α и γ , равных соответственно 5; ∞ ; 10,1; 5,3; 5,1).

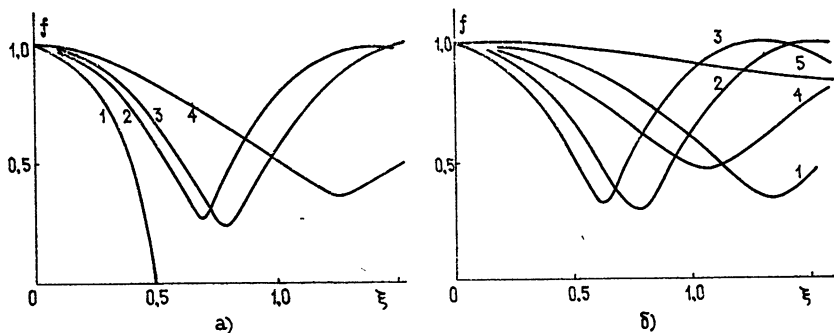


Рис. 2.

Тепловой механизм оказывает аналогичное влияние на изменения f (рис. 2б); СФ становится мягче, ее также характеризует многофокусность структуры. Кривые 1—3 построены при $\beta = 0,1$ и $\alpha = 2; 5; 10$; кривые 4, 5 — при $\alpha = 5$ и $\beta = 0,2; 0,4$. Минимальное сечение R_{\min}^2 пучка определяется при учете только ПД Q уравнением

$$\frac{r_0^2}{R_{\min}^2} = \alpha\gamma \left[\text{Ei}(-\gamma) \exp(\gamma) - \text{Ei}\left(\frac{-\gamma R_{\min}^2}{r_0^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma R_{\min}^2}{r_0^2}\right) \right] + 1, \quad (8)$$

а при учете только теплового механизма — уравнением

$$\frac{r_0^2}{R_{\min}^2} = 1 - \frac{5\alpha}{4} \left(1 - \frac{r_0^2}{R_{\min}^2}\right) / \left(1 + \frac{2}{5}\alpha\beta\right) \left(1 + \frac{2\alpha\beta r_0^2}{5R_{\min}^2}\right) + \frac{5}{8\beta} \ln \left(\frac{1 + \frac{2}{5}\alpha\beta}{1 + \frac{2\alpha\beta r_0^2}{5R_{\min}^2}} \right). \quad (8')$$

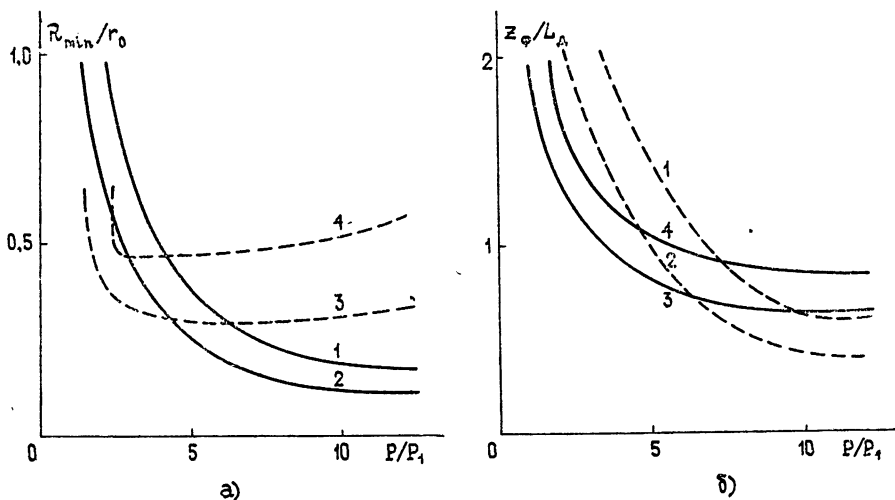


Рис. 3.

Рис. 3 показывает зависимости R_{\min} (рис. 3а) и периода осцилляций z_{ϕ} ширины пучка (рис. 3б) от его мощности (кривые 1, 2 — $\gamma = 1$; 2; кривые 3, 4 — $\beta = 0,1; 0,2$). С ростом мощности глубина биений f увеличивается; влияние ПД Q проявляется в стремлении стабилизировать амплитуду этих биений (квазиволноводное распространение). Зависимость R_{\min} от мощности при учете теплового механизма немонотонна: при небольших превышениях керровского порога ($\alpha = 1$) нагрев среды не дает заметного вклада в стабилизацию f ; при больших же значениях мощности ($\alpha \gtrsim 8$) нелокальность нагрева препятствует сужению пучка и глубина биений f уменьшается.

Конкуренция керровского механизма СФ и механизмов ПД нелинейности может, таким образом, объяснить зафиксированную в эксперименте [7] стабилизацию R_{\min} при самовоздействии в ЖК.

4. Безаберрационное приближение позволяет качественно рассмотреть процесс СФ и получить оценки критических значений параметров. Последовательное решение (1), (3), (4) с произвольными граничными условиями может быть получено только с помощью современных численных методов, таких, как метод конечных разностей (применение к исследованию СФ см., например, в [14]) или метод конечных элементов, использованный в нашей работе и позволяющий достичь заданной точности с меньшими вычислительными затратами (детально описан в [15]; о приложении его к решению задач нелинейной дифракции см. [16]).

Перейдем к анализу результатов численного счета; сначала рассмотрим влияние на СФ ПД параметра порядка. На рис. 4 показана зависимость нормированного модуля амплитуды поля $|A|$ на оси пучка от толщины кристалла ξ при различных значениях α и γ ; эти значе-

ния приведены в разрывах кривых (в качестве граничного условия здесь использовано (4')). Три из приведенных кривых получены при $\alpha = 8$, что соответствует мощности, в два раза превышающей порог керровской СФ (как известно [17], безабберационное приближение в четыре раза занижает порог СФ). Кривые 3 и 4 рис. 1 показывают зависимости $\alpha_n(\gamma)$ и $\alpha_n(\beta)$, полученные при численном решении исходных уравнений; описанный способ решения учитывает абберации. Если корреляционный масштаб ЖК L_K значительно меньше r_0 ($\gamma = 100$), возникает многофокусная структура. С ростом L_K ($\gamma = 10$) расстояние между фокусами увеличивается, одновременно уменьшается максимальное значение амплитуды. При $\gamma = 1$ возникает режим, напоминающий режим стационарного волноводного распространения. Остальные кривые получены вблизи порога керровской СФ ($\alpha = 4$).

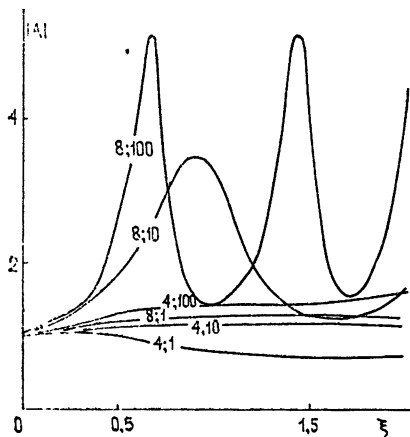


Рис. 4.

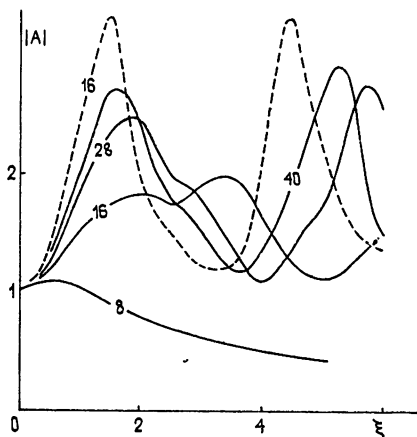


Рис. 5.

Если преобладает тепловой механизм, картина СФ определяется тремя процессами: керровской СФ, линейной дифракцией и дефокусировкой, обусловленной нагревом среды. В области I параметров среды и излучения (рис. 1) главную роль играет дифракция, амплитуда поля на оси монотонно убывает с ростом ξ . Области II и III характеризуются возникновением многофокусной структуры; примеры таких структур приведены на рис. 5 ($\beta = 0,1$; сплошные кривые, значения α указаны в разрывах кривых). Вблизи границы областей I и II многофокусная структура СФ имеет сложный характер ($\alpha = 16$). Более подробный анализ результатов численного счета показывает, что здесь подчеркивается процесс радиального перераспределения амплитуды по сечению пучка с отклонением его формы от гауссової. Для области III характерно появление насыщения: дальнейший рост входной мощности мало влияет на положение фокусов и на максимальное значение амплитуды. Уменьшение параметра β весьма заметно влияет на порог СФ (штриховая кривая на рис. 5 $\beta = 0,075$, $\alpha = 16$).

5. ПД параметра порядка делается все более заметной при приближении температуры к критической — в уравнении (3) главным становится член с поперечным лапласианом. Коэффициент $\gamma^{-1} \sim L_K^2$ критически расходится в точке перехода, поэтому обнаружение и измерение параметров многофокусной структуры СФ в ЖК является реальным

способом исследования L_k — одной из важнейших характеристик фазового перехода.

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. V. G. L. Narasimha Rao and S. Jayraman, Appl. Phys. Lett., 23, 539 (1973).
2. G. K. L. Wong and Y. R. Shen, Phys. Rev. Lett., 30, 895 (1973); 32, 527 (1974)
3. G. K. L. Wong and Y. R. Shen, Phys. Rev., A10, 1277 (1974).
4. D. V. G. L. Narasimha Rao and S. Jayraman, Phys. Rev., A10, 2457 (1974).
5. Г. А. Ляхов, В. А. Макаров, Третья республиканская конференция молодых физиков (Тезисы докладов), изд. ФАН, Ташкент, 1976, стр. 187.
6. S. M. Arakelyan, G. A. Vardanyan, G. A. Lyakhov, V. A. Makarov and Yu. S. Chilingaryan, 3 Internationale Tagung «Laser und ihre Anwendungen», Dresden — DDR, 1977, p. 122.
7. E. G. Hanson, Y. R. Shen and G. K. L. Wong, Opt. Comm., 20, 45 (1977).
8. С. Г. Дмитриев, ЖЭТФ, 65, 2466 (1973).
9. Г. А. Ляхов, В. А. Макаров, Вестник МГУ, серия 3, физика, астрономия, 18, 106 (1977)
10. Л. М. Блинов, УФН, 114, 67 (1974).
11. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1971.
12. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
13. P. G. de Gennes, Phys. Lett., 30A, 454 (1969)
14. В. А. Петрищев, Изв. вузов — Радиофизика, 13, 1979 (1970)
15. Г. Стрэнг, Дж. Фикс, Теория метода конечных элементов, изд. Мир, М., 1977.
16. В. А. Выслоух, В. П. Кандидов, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, Ростов-на-Дону, М., 1977, т. 1, стр. 274
17. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, 1353 (1971)

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 ноября 1977 г.

THE INFLUENCE OF SPATIAL DISPERSION OF THE NONLINEARITY ON LASER EMISSION SELF-FOCUSING IN LIQUID CRYSTAL. THEORY AND NUMERICAL EXPERIMENT

*S. M. Arakelyan, G. A. Vardanyan, V. A. Vysloukh,
G. A. Lyakhov, V. A. Makarov, Yu. S. Chilingaryan*

The analytical calculation has been made in the aberrationless approximation of threshold conditions and light beamwidth changes in self-focusing (SF) in the isotropic phase of liquid crystal near the phase transition point. The orientation and thermal mechanisms of spatial dispersion (SD) of nonlinearity are shown to give the possibility of quasi-waveguide propagation of a powerful beam in the medium.

Based upon the finite element method the program of numerical solution of SF solutions in the medium with SD nonlinearity has been developed. The investigation has been made of the characteristics of a light beam propagating in the medium for a wide parameter region.

УДК 621.373.826

ВЛИЯНИЕ НЕВЗАИМНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВЫХ ГАЗОВЫХ ЛАЗЕРАХ

Е. А. Тиунов

Получены скалярные уравнения генерации эллиптически поляризованных встречных волн в кольцевых газовых лазерах с анизотропными резонаторами в присутствии невзаимных элементов. На основании этих уравнений рассчитана разность частот генерации встречных волн в практически важном случае, когда их поляризации мало отличаются друг от друга и близки к линейным. Формула анализируется для одно- и двух-изотопного состава активной среды.

1. В [1, 2] рассматривалось нелинейное взаимодействие эллиптически поляризованных встречных волн в кольцевых газовых лазерах с резонаторами, обладающими произвольной поляризационной анизотропией и не содержащими невзаимных элементов. Известно, что в таких резонаторах в каждом из встречных направлений ($n=r, l$) имеется два ($k=1, 2$) собственных состояния поляризации бегущей волны с различными собственными значениями. При этом частоты и потери встречных волн, принадлежащих одному и тому же собственному значению, одинаковы, а их поляризации различны. Согласно [2] собственные векторы поляризации встречных волн, принадлежащие различным собственным значениям, обладают свойством квазиортогональности (см. формулу (1.4) из [2]).

В настоящей работе результаты [1, 2] обобщаются на случай присутствия в резонаторе произвольных невзаимных элементов, создающих амплитудную, частотную и поляризационную невзаимность встречных волн. В этом случае потери, частоты и поляризации всех четырех собственных колебаний резонатора оказываются различными, а указанные условия квазиортогональности нарушаются. При этом скалярные уравнения генерации (2.14), (2.15) из [2] сохраняют свой вид, тогда как коэффициенты нелинейного взаимодействия эллиптически поляризованных волн (2.16), (2.17) изменяются. Измененные выражения для этих коэффициентов приведены в Приложении.

Отметим различия коэффициентов (П.1)—(П.3) и соответствующих выражений работы [2]:

- 1) не зависящий от направления распространения волны коэффициент T_0 из [2] заменяется на T_r из (П.3);
- 2) изменяется выражение для b_r ;
- 3) в выражении для $B_{nn'}$ появляется новый член, пропорциональный a_n .

В отсутствие невзаимных элементов эти различия исчезают и формулы (П.1)—(П.3) переходят в соответствующие выражения работы [2].

2. Рассмотрим влияние невзаимных элементов на разность частот встречных волн в режиме одномодовой генерации. Пусть векторы поля-

ризации однонаправленных собственных колебаний резонатора, рассчитанные в месте нахождения активной среды, ортогональны между собой:

$$(q_n^{(1)} \times q_n^{(2)*}) = 0 \quad (n = r, l) \quad (1)$$

(здесь * означает комплексное сопряжение).

Предположим также, что наиболее добротные полярзации встречных направлений $q_r^{(1)}$ и $q_l^{(1)}$ мало отличаются друг от друга и близки к линейным

$$|\Delta\varphi| \equiv \left| \frac{\varphi_{1r} - \varphi_{1l}}{2} \right| \ll 1, \quad |\varepsilon| \equiv \left| \frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{1l}}{2} \right| \ll 1, \quad |\Delta\varepsilon| \equiv \left| \frac{\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{1l}}{2} \right| \ll 1. \quad (2)$$

В этом случае разность частот генерации встречных волн, рассчитанная по методу [1, 2], может быть представлена в виде*

$$\Delta\omega \equiv \omega_r - \omega_l = (\nu_r - \nu_l) + (\sigma_r - \sigma_l) + \Delta\omega_H, \quad (3)$$

где $(\nu_r - \nu_l)$ — невязанность собственных частот резонатора; $(\sigma_r - \sigma_l)$ — разность затягиваний генерируемых волн; $\Delta\omega_H$ — нелинейная (пропорциональная интенсивности генерации) разность частот встречных волн. Положим $\Delta\omega_H \equiv \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$. Тогда в одноизотропной активной среде

$$\Delta\omega_1 = 2\alpha \frac{1+f^2}{2+f^2} \left[\eta^2 \Delta f + \frac{\alpha_3}{f} (1 - 2K_0)\varepsilon\Delta\varepsilon \right], \quad \alpha_3 = \frac{4}{1+2K_0}, \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\gamma_{ab}}{ku}, \quad \Delta\omega_2 = \frac{\Delta\alpha}{f} \left\{ \frac{\alpha_3(1+f^2)}{f^2} \left[\frac{K_2}{2} (\Delta\varphi)^2 + 2(1-K_1)(\Delta\varepsilon)^2 \right] - 1 \right\}.$$

В 50-процентной смеси изотопов

$$\Delta\omega_1 = -\alpha \left(\frac{2\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{из}} \right)^2 \left[\frac{\Delta f}{2} (1 + 4y^4) + 2\alpha_3 f (1 + 2y^2)(1 - 2K_0)\varepsilon\Delta\varepsilon \right], \quad (5)$$

$$\Delta\omega_2 = \Delta\alpha \left(\frac{2\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{из}} \right)^2 \left\{ f(1 + 4y^2 - 4y^4) - \alpha_3 f (1 + 2y^2) \times \right.$$

$$\left. \times \left[2(1 - K_1)(\Delta\varepsilon)^2 + \frac{K_2}{2} (\Delta\varphi)^2 \right] \right\}.$$

В этих формулах $f = \frac{\omega_r + \omega_l - 2\omega_0}{2\gamma_{ab}}$ — расстройка средней частоты

генерируемых волн, $\Delta f = \frac{\omega_r - \omega_l}{\gamma_{ab}}$ — безразмерная разность резонатор-

ных частот генерируемых волн (частотная невязанность), α — среднее для генерируемых встречных волн превышение усиления над потерями, $\Delta\alpha$ — разность превышений встречных волн над потерями, обусловленная как частотной невязанностью Δf , так и амплитудной невязанностью

(различием резонаторных потерь встречных волн); $y = \frac{\Delta\omega_{из}}{2ku}$ —

функции электронных моментов генерирующих уровней [2]. Заметим,

* Отметим, что при выполнении (1) разность частот (3.6), рассчитанная в отсутствие невязанных элементов в [2], равна нулю. Разность частот (3) связана с амплитудной, частотной и поляризационной невязанностью резонатора.

что в резонаторах, обычно используемых в эксперименте, в отсутствие невзаимных элементов $\Delta\alpha = 0$, $\Delta f = 0$, а собственные векторы встречных волн обладают свойством квазиортогональности, вследствие которого в формулах (4), (5) $\Delta\varphi = \Delta\varepsilon = 0$. Следовательно, в этом случае $\Delta\omega = 0$, что находится в согласии с соответствующим результатом [2] при выполнении условия (1).

Оценим разность частот встречных волн (4) и (5) для линии $\lambda = 0,6328$ мк при давлении газовой смеси $P = 2$ Тор ($\gamma_{ab} \sim 134$ МГц) и для расстройки $f = (\omega - \omega_0)/\gamma_{ab} \approx 1$ (в двухизотопной активной среде $\omega_0 \equiv \frac{1}{2}(\omega_{01} + \omega_{02})$ — центр суммарного контура усиления двух изотопов). Тогда для чистого изотопа

$$\Delta\omega_H = \alpha(0,03\Delta f + 1,9\varepsilon\Delta\varepsilon) - \Delta\alpha \left[1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 - 7,5(\Delta\varepsilon)^2 \right]. \quad (6)$$

Для 50-процентной смеси

$$\Delta\omega_H = -\alpha(0,05\Delta f + 0,4\varepsilon\Delta\varepsilon) + \Delta\alpha[0,2 - 0,1(\Delta\varepsilon)^2 - 0,01(\Delta\varphi)^2]. \quad (7)$$

Здесь α , $\Delta\alpha$ и $\Delta\omega_H$ выражены в единицах $\Delta\omega_p/2$ (резонаторная полуширина).

Если невзаимность потерь, частот и поляризаций встречных волн в резонаторе создается невзаимным элементом фарадеевского типа, то, в соответствии с результатами [3], величина $\Delta\alpha$ в (6), (7) мала ($|\Delta\alpha| \ll |\alpha|$), и ее следует отбросить. При этом $\Delta f \ll 10^{-3}$ и главный вклад в $\Delta\omega_H$ дает поляризационная невзаимность встречных волн. Так при $\varepsilon \approx |\Delta\varepsilon| = 0,01$ и превышении усиления над потерями $\alpha = 0,1$, имеем в чистом изотопе $\Delta\omega_H \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta\omega_p}{2}$, а в 50-процентной смеси — $\Delta\omega_H \approx 0,4 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta\omega_p}{2}$.

Как следует из (4) и (5), величина $\Delta\omega_H$ при уменьшении расстройки ($f \rightarrow 0$) возрастает в чистом изотопе ($\sim 1/f$) и убывает в смеси ($\sim f$).

Таким образом, наличие в резонаторе невзаимного элемента фарадеевского типа приводит, во-первых, к возникновению разности частот $\Delta\nu$ и разности потерь $\Delta\alpha$ встречных волн. Как показывает приведенная оценка, влияние этих величин на нелинейную невзаимность частот генерации встречных волн $\Delta\omega_H$ пренебрежимо мало. Во-вторых, рассматриваемый невзаимный элемент приводит к невзаимности состояний поляризации встречных волн, вызывая различие их эллиптичностей $\Delta\varepsilon$ и азимутов $\Delta\varphi^*$. В соответствии с результатами работы [2] эта поляризационная невзаимность встречных волн приводит к возникновению нелинейной разности частот встречных волн (члены, пропорциональные $\varepsilon\Delta\varepsilon$ в [4-7]). В соответствии с приведенной оценкой эта разность частот может быть не малой и поэтому может играть существенную роль, например, в высокоточной лазерной гиromетрии.

Автор благодарит Э. Е. Фрадкина за неизменное внимание к работе и за полезные обсуждения ее результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $\frac{1}{2} \varphi_{kn}$ — азимуты, а $\text{tg } \varepsilon_{kn}$ — эллиптичности собственных поляризаций невзаимного резонатора, вычисленные в месте нахождения

* Здесь предполагается, что в отсутствие невзаимного элемента собственные поляризации встречных волн одинаковы, что обеспечивается, например, выполнением условия (1).

активной среды ($n = r, l; k = 1, 2$). Тогда для волны, распространяющейся в направлении $n = r$, имеем

$$B_{rr} = \frac{1}{2} (\beta_{ss} + \beta_{s-s}) + \frac{1}{2} b_r (\beta_{s-s} - \beta_{ss}) \sin 2\varepsilon_{1r}, \quad (\text{П.1})$$

$$B_{rl} = \frac{1}{2} (\theta_{ss} + \theta_{s-s} + \vartheta_s) + \frac{1}{2} b_r (\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s) \sin 2\varepsilon_{1l} + \frac{\vartheta_s}{2} a_r;$$

$$T_{rr} = \frac{1}{4} (\beta_{s-s} - \beta_{ss}) \sin 4\varepsilon_{1r}, \quad (\text{П.2})$$

$$T_{rl} = (\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s) \sin 2\varepsilon_{1l} \cos 2\varepsilon_{1r} + \frac{\vartheta_s}{2} t_r.$$

Входящие сюда коэффициенты круговых компонент поля β, θ, ϑ (см. пояснения в [2]) должны быть вычислены на частоте волны, бегущей в направлении $n = r$;

$$b_r = -\frac{1}{T_r} \left[\cos \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{2r}}{2} \right) \cos (\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}) - i \sin \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{2r}}{2} \right) \sin (\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}) \right],$$

$$a_r = -\frac{2}{T_r} \left[\cos \left(\frac{\varphi_{1l} - \varphi_{2r}}{2} \right) \cos (\varepsilon_{1l} + \varepsilon_{2r}) - i \sin \left(\frac{\varphi_{1l} - \varphi_{2r}}{2} \right) \sin (\varepsilon_{1l} - \varepsilon_{2r}) \right] \times$$

$$\times \left[\cos \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{1l}}{2} \right) \sin (\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{1l}) - i \sin \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{1l}}{2} \right) \cos (\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{1l}) \right], \quad (\text{П.3})$$

$$T_r = \cos \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{2r}}{2} \right) \sin (\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{2r}) - i \sin \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{2r}}{2} \right) \cos (\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r}),$$

$$t_r = \left[\cos^2 \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{1l}}{2} \right) \sin 2(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{1l}) - \sin^2 \left(\frac{\varphi_{1r} - \varphi_{1l}}{2} \right) \sin 2(\varepsilon_{1r} - \varepsilon_{1l}) \right] - \\ - i \cos 2\varepsilon_{1l} \sin (\varphi_{1r} - \varphi_{1l}).$$

Соответствующие выражения для встречной волны ($n = l$) получаются из (П.1) — (П.3) заменой ($r \rightleftharpoons l$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зборовский, Э. Е. Фрадкин, ЖЭТФ, **66**, 1219 (1974).
2. В. А. Зборовский, Е. А. Тиунов, Э. Е. Фрадкин, Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 6, 816 (1978)
3. Д. П. Лукьянов, А. Ф. Рогачев, В. С. Самохин, Оптика и спектроскопия, **32**, № 4, 814 (1972)

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 11 июля 1977 г.

THE EFFECT OF NONRECIPROCAL ELEMENTS ON INTERACTION OF ELLIPTICALLY POLARIZED OPPOSITE WAVES IN RING GASEOUS LASERS

E. A. Tiunov

The scalar equations are derived of elliptically polarized opposite wave generation in ring gaseous lasers with anisotropic resonators in the presence of nonreciprocal elements. Based on these equations we calculate the difference between the generation frequencies of opposite waves in practically important case when their polarizations differ slightly from each other and are close to the linear ones. The formula is analysed for one- and two-isotropic composition of the active medium.

УДК 538.69

МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ АТОМОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СТЕНКОЙ

А. Н. Кузнецов, Ю. М. Петухов

Изучается взаимодействие оптически ориентированных в основном состоянии атомов ртути Hg^{199} с парамагнитными центрами (ПЦ) на поверхности ячейки. Показано, что следствием такого взаимодействия является не только релаксация макроскопической намагниченности атомной системы, но и сдвиг частоты магнитного резонанса. Установлено качественное согласие результатов эксперимента с выводами теории. Проведена оценка времени корреляции взаимодействия ядерной спин-системы с поверхностными ПЦ.

Изучение возмущений, возникающих в системах оптически ориентированных атомов, находящихся в газовой фазе и взаимодействующих с внешней средой, имеет большое прикладное значение, например, для оценки точностных характеристик квантовых магнитометров [1] и квантовых стандартов частоты [2].

В настоящей работе рассматривается магнитное диполь-дипольное взаимодействие оптически ориентированных атомов ртути Hg^{199} (спин-ядра $I=1/2$) с парамагнитными центрами (ПЦ), имеющимися на внутренних поверхностях ячеек и обусловленных структурными нарушениями в сетке кварцевых стекол, из которых они изготавливаются. Известно, [3-5], что взаимодействие такого рода является одной из главных причин, вызывающих магнитную релаксацию ядер Hg^{199} . Поэтому основной акцент в работе делается на изучение сдвига частоты магнитного резонанса как другого следствия взаимодействия ядерной спин-системы с ПЦ. Изучаемый сдвиг частоты логично назвать релаксационным.

Используя модель взаимодействия оптически ориентированной ядерной спин-системы с ПЦ на поверхности ячейки, описанную в [5], можно показать, что релаксационный сдвиг частоты резонанса имеет вид*

$$e_I = \frac{1}{15} \sum_{\alpha} \gamma_I^2 \gamma_{sa}^2 \hbar^2 S_{\alpha} (S_{\alpha} + 1) \frac{\tau_{ca} \tau_a n_{\alpha}}{r_{\alpha}^4 \tau_c (\tau_a + \tau_v)} \times \left[\frac{(\omega_I - \omega_{sa}) \tau_{ca}}{1 + (\omega_I - \omega_{sa})^2 \tau_{ca}^2} + \frac{3\omega_I \tau_{ca}}{1 + \omega_I^2 \tau_{ca}^2} + \frac{6(\omega_I + \omega_{sa}) \tau_{ca}}{1 + (\omega_I + \omega_{sa})^2 \tau_{ca}^2} \right], \quad (1)$$

где γ_I, γ_{sa} — гиромагнитное отношение ядра Hg^{199} и электронного ПЦ α -го типа соответственно, S_{α} — полный механический момент ПЦ α -го типа, τ_a — среднее время физической адсорбции атома ртути на стенке,

* Согласно стандартной методике теории возмущений [6] при выводе выражения для e_I учитывалась мнимая часть функции спектральной плотности случайного процесса, описывающей взаимодействие атомов Hg^{199} со стенкой, общий вид которой дан в [5]. В окончательном виде в (1) использовано соотношение $P_{\alpha} = n_{\alpha} r_{\alpha}^2$, где P_{α} — вероятность адсорбции на ПЦ α -го типа.

τ_c , τ_{ca} — среднее время жизни атома ртути на произвольном и парамагнитном центрах адсорбции соответственно, τ_v — среднее время пролета атома ртути в ячейке, n_a — поверхностная концентрация ПЦ α -го типа, r_a — «эффективный радиус» ПЦ α -го типа, ω_f , ω_{sa} — ларморовские частоты ядерной и электронной (α -го типа) спин-систем соответственно.

Оценим величину сдвига частоты магнитного резонанса при следующих упрощающих предположениях.

1) Все центры адсорбции (в том числе и не релаксационные) обладают близкими кинетическими характеристиками.

2) Магнитные характеристики релаксационных центров тождественны.

3) Выполняются соотношения $\omega_f^2 \tau_c^2 \ll 1$, $\omega_s^2 \tau_c^2 \sim 1$.

Сделанные предположения относятся к такой реальной ситуации, когда микроскопические неоднородности различных участков стенки, определяющие ее адсорбционные свойства, незначительны, что достигается выбором соответствующей технологии изготовления ячеек [7]. В кварцевом стекле достаточно мало примесей, и на поверхности ячейки возникают ПЦ преимущественно идентичной природы. Наконец, ядерный резонанс наблюдается при невысокой температуре стенки в области изменения постоянного магнитного поля $H_0 < 1 \text{ Э}$.

Поскольку при температурах 22—55°C, как показано в [8], $\tau_c \sim 10^{-6} \text{ с}$, а $\gamma_f = 4769 \text{ рад/с} \cdot \text{Э}$, $\gamma_s \sim 10^7 \text{ рад/с} \cdot \text{Э}$, то условие (3) предположений легко выполнимо. В этом случае имеем

$$\epsilon_f = \frac{1}{3} \frac{A(n_s) \omega_s \tau_c}{1 + \omega_s^2 \tau_c^2}, \quad (2)$$

где смысл $A(n_s)$ понятен из сравнения (2) с (1).

Для экспериментального исследования релаксационного сдвига частоты магнитного резонанса была применена следующая методика. По эффекту Фарадея [9] регистрировался сигнал поперечной компоненты намагниченности атомов Hg^{199} . При этом температура ячейки, интенсивности света накачки и регистрации фиксировались и в дальнейшем не изменялись. Постоянное магнитное поле H_0 , вызывающее зеемановское расщепление атомных подуровней, и радиочастотное поле $h \cos \omega t$ ($\omega = \gamma_f H_0$), индуцирующее магнитный резонанс, создавались системой двух сферических катушек с относительной неоднородностью $\frac{\Delta H}{H} \approx 10^{-4}$

в объеме ячейки. Внешнее поле лаборатории экранировалось магнитным экраном с коэффициентом экранирования $k \approx 10^5$. Интенсивность резонансного света и амплитуда радиочастотного поля h устанавливались в пределах, не оказывающих заметного возмущающего влияния на ядерную систему. В этих условиях релаксация атомов Hg^{199} обуславливалась лишь взаимодействием ядер со стенкой ячейки. Для создания некоторой «избыточной» концентрации ПЦ на поверхности ячейки и, тем самым, обнаруживаемого релаксационного сдвига ячейка дополнительно облучалась интенсивным ультрафиолетовым (УФ) светом от газоразрядной лампы, содержащей изотопы ртути Hg^{198} высокого обогащения, с последующей фильтрацией (с помощью газового фильтра на изотопах Hg^{199}) возможных резонансных компонент в спектре излучения лампы. Вследствие того, что ячейка облучалась неполяризованным и нерезонансным светом, исключались световые сдвиги частоты резонанса двух известных типов [10].

На возможность генерации ПЦ в кварцевом стекле при его интенсивном УФ облучении впервые указано в работе [3], где также отмечен

факт легкой обратимости процесса: уже при комнатной температуре индуцированные УФ светом ПЦ почти полностью отжигались после прекращения действия облучения. На рис. 1 представлены экспериментальные зависимости времени релаксации T_1 продольной компоненты намагниченности (T_1 измерялось по методике, описанной в [11]) от длительности воздействия на ячейку УФ света различной интенсивности. Так как скорость релаксационного процесса пропорциональна концентрации ПЦ, то рис. 1 иллюстрирует кинетику рождения ПЦ на поверхности ячейки под действием УФ облучения.

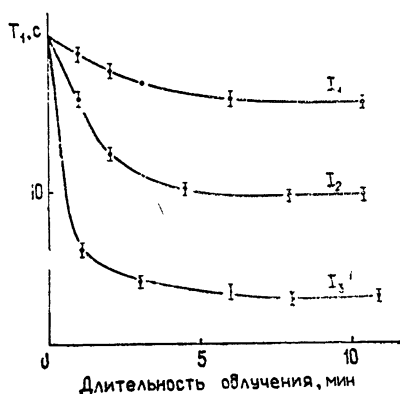


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость T_1 от длительности облучения ячейки УФ светом с интенсивностями $I_1 < I_2 < I_3$; температура ячейки 55°C .

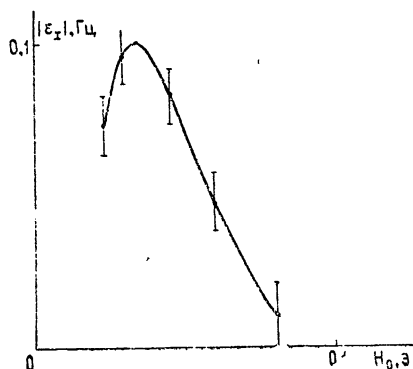


Рис. 2.

Рис. 2. Полевая зависимость сдвига частоты магнитного резонанса.

Релаксационный сдвиг частоты магнитного резонанса ϵ_r измерялся как разность частот прецессии ядер Hg^{199} , соответствующих максимумам сигналов поглощения (нулю сигналов дисперсии) до облучения ячейки интенсивным УФ светом и при облучении. При этом использовалась стандартная техника синхронного детектирования с разверткой магнитного поля H_0 в окрестности резонанса. На рис. 2 представлена полевая зависимость сдвига частоты магнитного резонанса при температуре ячейки 55°C и некоторой индуцированной УФ светом концентрации ПЦ на поверхности стекла. Из выражения (2) следует, что при постоянной температуре ячейки и концентрации ПЦ сдвиг частоты резонанса максимален при $\omega_s \tau_c \sim 1$. Допуская, что g -фактор ПЦ приблизительно равен g -фактору свободного электрона из экспериментального максимума релаксационного сдвига, находим $\tau_c = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, что близко к значению τ_c , определенному при соответствующей температуре ячейки в работе [8].

Отметим, что величина $A(n_s)$ в (2), пропорциональная концентрации ПЦ, определяет скорости релаксации $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$ продольной и поперечной компонент ядерной намагниченности. При естественном допущении о быстрой собственной релаксации электронной подсистемы ПЦ в рамках сделанных выше предположений из [5] следует

$$\frac{1}{T_1} = \frac{6}{15} A(n_s) + \frac{14}{15} \frac{A(n_s)}{1 + \omega_s^2 \tau_c^2}$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{7}{15} A(n_s) + \frac{13}{15} \frac{A(n_s)}{1 + \omega_s^2 \tau_c^2}. \quad (3)$$

На рис. 3 представлена экспериментальная зависимость T_1 от постоянного магнитного поля, где T_1 измерялась без дополнительного УФ облучения ячейки по ранее указанной методике [11]. Данная методика позволяет регистрировать сигнал изменения продольной компоненты намагниченности на частотах $\omega > \gamma_1 H_0$ и, тем самым, расширяет возможность использования избирательной детектирующей аппаратуры в области малых значений H_0 .

Из рис. 3 видно, что зависимость T_1 от H_0 , сохраняя лоренцевский характер, обнаруживает значительно меньшее относительное изменение T_1/T_1^{\max} чем это следует из (3). Видимо, при малых равновесных концентрациях ПЦ релаксация макроскопической ядерной намагниченности может в значительной степени определяться широкополосными (с малыми временами корреляции) процессами. Так, если адсорбция атомов ртути на стенке ячейки сопровождается деформацией электронных оболочек атомов, то взаимодействие ориентированных ядер с деформационными локальными магнитными полями может характеризоваться весьма малым временем корреляции [8] и при малом H_0 полевой вклад в T_1 , а также в ϵ_r , не возникает.

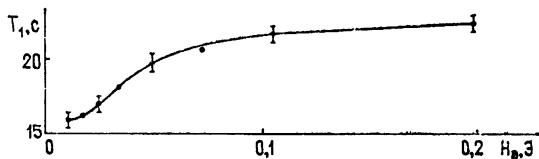


Рис. 3. Полевая зависимость T_1 ; температура ячейки 55°C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скродцкий, Физические основы квантовой магнитометрии, изд. Наука, М., 1972
2. В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968
3. C. Cohen-Tannoudji and J. Brosse, Compt. Rend., 258, 6119 (1964).
4. А. Н. Кузнецов, И. Е. Гринько, В. Ф. Терзезман, Оптика и спектроскопия, 35, № 3, 406 (1973).
5. В. П. Путырский, Т. Г. Изюмова, Оптика и спектроскопия, 37, № 3, 399 (1974).
6. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
7. В. Сагнас, These, Paris, 1960.
8. J. Moguzzi, Phys. Rev., 8, 51 (1973).
9. О. А. Бартнев, А. М. Скрипкин, И. Е. Гринько, И. А. Шушпанов, Оптика и спектроскопия, 31, № 2 (1971)
10. C. Cohen-Tannoudji, Ann. Phys., 7, 423 (1962)
11. О. А. Бартнев, Л. Н. Новиков, ПТЭ, № 5, 129 (1972).

Поступила в редакцию
12 января 1978 г.

MAGNETIC RESONANCE OF OPTICALLY-ORIENTED ATOMS INTERACTING WITH A WALL

A. N. Kuznetsov, Yu. M. Petykhov

The interaction between mercury atoms Hg^{199} optically oriented in the ground state and paramagnetic centers (PC) on the cell surface is studied. It is shown that the result of such an interaction is not only the relaxation of macroscopic magnetization of the atomic system but also the shift of the magnetic resonance frequency.

A qualitative agreement between the experimental results and theoretical conclusions is established. The correlation time of the interaction between nucleus spin-system and surface PC is established.

УДК 538 574 · 530 18

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

А. А. Новиков

Рассматриваются нагруженные режимы работы квазираспределенных многоэлементных автогенераторов. Найдены зависимости выходной мощности, КПД и добротности от величины нагрузки и длины активной линии при различных способах вывода мощности. Обсуждаются достоинства и недостатки кольцевого генератора и генератора-отрезка.

В последнее время возрастает интерес к проблеме сложения мощностей, связанный с успехами в области разработки и применения малогабаритных микроволновых активных элементов [1]. Одним из способов решения этой задачи является использование режима бегущей волны многоэлементных устройств в виде отрезков волновода с периодически включенными активными приборами [2]. Системы такого типа рассматривались также в [3, 4], но основное внимание уделялось особенностям волновых процессов при холостой работе автогенераторов. Целью настоящей статьи является обсуждение условий оптимальной работы многоэлементных автогенераторов с бегущей волной на полезную нагрузку.

Основными характеристиками нагруженного режима являются, как известно, выходная мощность, КПД, добротность. Строгий расчет этих параметров должен опираться на решение граничной задачи для уравнений активной линии, имеющих вид (см. эквивалентную схему на рис. 1)

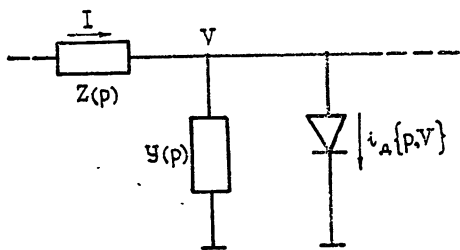


Рис. 1.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + Z(p)I = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} + Y(p)V + i_A\{p, V\} = 0.$$

(1)

Здесь $p = \frac{\partial}{\partial t}$, $Z(p)$, $Y(p)$ — линейные пассивные двухполюсники, представленные в виде операторного сопротивления и проводимости соответственно, $i_A\{p, V\}$ — мгновенная ВАХ диода. Кроме того, предполагается, что дисперсия в линии достаточно сильна и стационарные волны имеют квазисинусоидальный характер.

Наибольший интерес с точки зрения практики представляют следующие варианты граничных условий: генератор в виде отрезка активной линии длины L с реактивным импедансом $Z_0(p)$ на одном конце и нагрузкой G на другом:

$$Z_0(p)I|_{x=0} = -V|_{x=0}, \quad G^{-1}I|_{x=L} = V|_{x=L}; \quad (2)$$

кольцевой генератор с сосредоточенной нагрузкой G :

$$V|_{x=0} = V|_{x=L}, \quad I|_{x=L} = I|_{x=0} + GV|_{x=0}; \quad (3)$$

кольцевой генератор с нагрузкой G и настроечным элементом Y_H , предназначенным для компенсации отражения от нагрузки. Настроечный элемент описывается парой условий типа (3).

Как отмечалось в [2], обеспечение оптимальных условий работы для всех активных элементов линии возможно лишь при условии

$$\mu \equiv \rho \tilde{g} \ll 1, \quad (4)$$

где $\rho = \sqrt{Z(p)/Y(p)}$ — волновое сопротивление линии, \tilde{g} — эффективная отрицательная проводимость диодов, расположенных на длине волны λ .

Наличие малого параметра (4) позволяет, опираясь на разработанный аппарат теории волн в слабонелинейных средах [5], перейти к укороченным уравнениям для интенсивностей встречных волн, взаимодействие которых определяет устанавливающиеся в автогенераторе распределения полей. При кубичной аппроксимации мгновенной ВАХ диода в окрестности рабочей частоты типа

$$i = -gu(1 - \alpha u^2) \quad (5)$$

укороченные уравнения в безразмерных переменных имеют вид [4]

$$\frac{dm_{1,2}}{dz} = \pm (1 - m_{1,2} - 2m_{2,1})m_{1,2}. \quad (6)$$

Здесь $m_{1,2} = 3\alpha v_{1,2}^2$, $v_{1,2}$ — амплитуды напряжений во встречных волнах, $z = x/l_H$ — безразмерная координата вдоль линии, $l_H = \lambda/\mu$ — характерный масштаб нелинейного взаимодействия волн.

В переменных, в которых записаны уравнения (6), граничные условия приобретают вид

$$m_1(0) = m_2(0), \quad m_2(Z) = Rm_1(Z), \quad R = \left(\frac{1 - \rho G}{1 + \rho G}\right)^2 \quad (7)$$

в случае генератора-отрезка (2) и

$$P_z = \frac{(2 - \rho G)P_0 - \rho G}{\rho GP_0 + (2 + \rho G)}, \quad K_+ = (2 + \rho G + \rho GP_0)/2, \quad (8)$$

где $P_{0,z} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \Big|_{z=0,Z}$, $K_+ = \sqrt{m_1(Z)/m_1(0)}$, $Z = L/l_H$, для кольцевого генератора без настроечного элемента (3).

В случае кольца с компенсацией отражения от нагрузки при подборе величины компенсатора Y_H и места его расположения около нагрузки согласно условию

$$1/Y_H = \rho/2 - (\rho/2 + 1/G)e^{-2i\theta}, \quad (9)$$

где θ — набег фазы между настроечным элементом и нагрузкой, отраженной волны не будет. При этом система (6) сводится к одному уравнению

$$\frac{dm}{dz} = m(1 - m), \quad (10)$$

а граничные условия имеют вид

$$K_+^2 = 1 + \rho G(2 + \rho G) \sin^2 \theta. \quad (11)$$

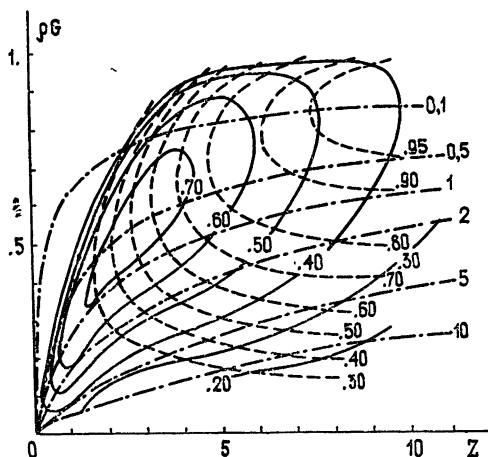


Рис. 2. Нагрузочные характеристики генератора-отрезка.

активных элементов, определяемой выражением

$$P_{\max} = \left(\frac{dm_1}{dz} \right)_{\max} Z = Z/4. \quad (13)$$

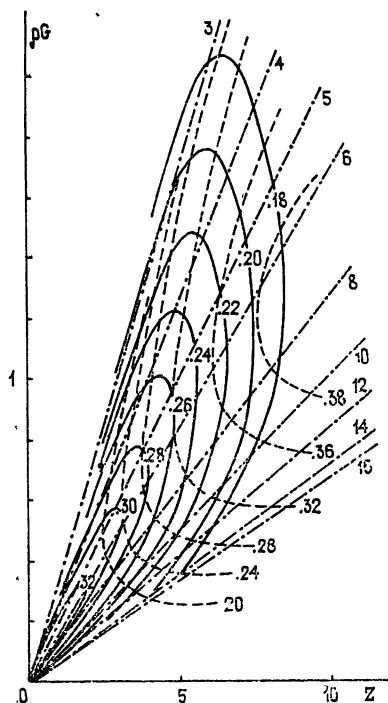


Рис. 3. Нагрузочные характеристики кольцевого генератора без компенсации отражения от нагрузки.

На рис. 2, 3, 4 приведены линии уровня КПД суммирования η (сплошные кривые), выходной мощности $P_{\text{вых}}$ (пунктирные кривые) и относительной добротности Q/q (штрихпунктирные кривые) для вышеприведенных вариантов подключения нагрузки. Выходная мощность вычислялась как разность потоков мощности, притекающих и оттекающих от нагрузки, т. е.

$$P_{\text{вых}} = m_1(Z) - m_2(Z) + m_2(0) - m_1(0), \quad (12)$$

а КПД суммирования η — как отношение $P_{\text{вых}}$ и P_{\max} — сумме оптимальных мощностей всех

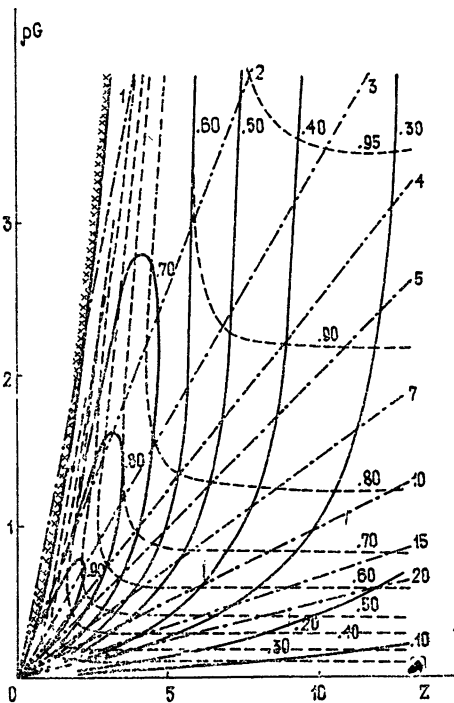


Рис. 4. Нагрузочные характеристики кольца с интерференционным гашением отраженной волны.

Для оценки добротности использовано общепринятое ее определение [6] как отношение энергии, циркулирующей в системе, к энергии, выводимой за период. Для генератора-отрезка это дает

$$Q = 2\pi \frac{m_2(Z) 2L}{(m_1(Z) - m_2(Z)) v_{гр} T},$$

или, с учетом граничных условий,

$$Q/q = \frac{1 - \rho G}{2\rho G} Z. \quad (14)$$

Здесь $q = kl_{н}v_{ф}/v_{гр}$, k , T , $v_{ф}$, $v_{гр}$ — соответственно волновое число, период, фазовая и групповая скорости волны.

В случае кольца для практически важных режимов встречной волной можно пренебречь (как показывает расчет, ее интенсивность меньше интенсивности основной волны по крайней мере на порядок даже без настроенного элемента). При этом для добротности имеем

$$Q/q = \frac{m_1(0)}{m_1(Z) - m_1(0)} Z = \frac{Z}{\rho G}. \quad (15)$$

В случае отрезка и кольца без компенсатора приведенные результаты получены путем численного решения соответствующих граничных задач. Граничная задача для кольца с компенсацией отражения допускает аналитическое решение, имеющее вид

$$\frac{m(z)(1 - m(0))}{m(0)(1 - m(z))} = \exp(z),$$

$$P_{вых} = (K_+^2 - 1)m(0) = \frac{(K_+^2 - 1)(\exp(Z) - K_+^2)}{K_+^2(\exp(Z) - 1)}, \quad (16)$$

$$\eta = 4P_{вых}/Z.$$

Линии уровня на рис. 4 получены путем табулирования формул (15), (16) при $K_+ = 1 + \rho G \left(\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$.

Полученные данные позволяют сделать следующие выводы.

1) Наилучшие по всем параметрам результаты дает кольцевой генератор с компенсацией отражения от нагрузки.

2) Несколько меньший КПД имеет генератор-отрезок, что объясняется наличием участка со стоячей волной около ненагруженного конца и связанным с ним нарушением условий оптимальной работы части диодов.

3) Наиболее низкие КПД и выходную мощность имеет кольцевой генератор без компенсатора, поскольку, хотя установившийся режим и близок к бегущей волне, его средняя амплитуда существенно больше оптимального значения. Это связано с тем, что для эффективного подавления отражения от нагрузки за счет конкуренции волн диоды должны работать в сильно нелинейном режиме вблизи границы исчезновения активных свойств.

4) Генератор-отрезок и кольцо с компенсатором имеют приблизительно одинаковый потолок по выходной мощности, достигаемый при сравнимых размерах системы и КПД, но при существенно большей добротности кольцевого генератора.

5) При необходимости реализации высокой добротности ($Q/q \geq 10$) кольцевая структура позволяет добиться несколько большего КПД даже без компенсации отражения.

В заключение автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Дворников, Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 1156 (1974).
2. А. А. Новиков, Радиотехника и электроника, 23, № 3, 633 (1978).
3. М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).
4. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 5, 987 (1966).
5. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
6. Дж. Керрол, СВЧ-генераторы на горячих электронах, изд. Мир, М., 1972, гл. II.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 июня 1977 г.

OPTIMAL OPERATION CONDITIONS OF DISTRIBUTED SELF-GENERATORS

A. A. Novikov

The loaded operation conditions of quasi-distributed multielement self-generators are considered. The dependences of the output power, efficiency and Q -factor on the values of load and length of the active line are found for different methods of the power output. The advantages and disadvantages of a ring generator and a piece-generator are discussed.

УДК 538.56 : 519.25

К СТАТИСТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

И. Е. Позументов

На основе применения аппарата вариационных производных с использованием формулы Фуруцу—Новикова проводится статистический анализ линейных стохастических систем с квадратичными флуктуациями параметров. Проведено сравнение точного решения для среднего значения выхода исследуемой системы с некоторым приближением, удобным для практического использования, и приближением Бурре. Приведена диаграммная интерпретация полученных решений.

1. В последнее время все большее внимание уделяется анализу стохастических систем с негауссовыми флуктуациями параметров. Однако для замкнутого статистического описания последних необходимо знать либо характеристический функционал случайного процесса, либо полный (бесконечный) набор всех его моментных или кумулянтных функций [1, 2]. За исключением наиболее простых вероятностных распределений (гауссово, пуассоновское) такие характеристики процесса неизвестны. В то же время для приложений в радиолокации и системах управления представляет интерес анализ стохастических уравнений с негауссовыми флуктуациями параметров определенного типа, а именно с флуктуациями параметра в виде квадратичной функции гауссова случайного процесса [3]. Указанная постановка задачи имеет и общетеоретический интерес, так как рассмотрение квадратичных флуктуаций параметров является по существу учетом второго члена ряда Тейлора при разложении произвольной функции от гауссова процесса.

В данной работе для анализа систем с указанным типом флуктуаций параметров используется аппарат вариационных производных, основанный на применении формулы Фуруцу—Новикова [1]. Приведена диаграммная интерпретация полученных решений.

2. Рассмотрим линейную стохастическую систему, допускающую замкнутое статистическое описание [2] и описываемую следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = u^2(t) A \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — гауссов случайный процесс с $\langle u \rangle = 0$ и заданной корреляционной функцией $B(\tau) = \langle u(t)u(t-\tau) \rangle$, A — матрица постоянных коэффициентов a_{ij} .

При статистическом усреднении (1) основную сложность вызывает размыкание смешанной корреляции $\langle u^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle$. Считая $u(t) \mathbf{x}(t)$ некоторым функционалом гауссова процесса $u(t)$, применим для ее вычисления формулу Фуруцу—Новикова. В результате получим

$$\langle u^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \langle u^2 \rangle \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \int_0^t B(t-t_1) \left\langle u(t) \frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta u(t_1)} \right\rangle dt_1. \quad (2)$$

Вариационную производную $\frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta u(t_1)}$ найдем из исходной системы (1) [2]:

$$\frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta u(t_1)} = 2u(t_1) A \mathbf{x}(t). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), будем иметь

$$\langle u^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \langle u^2 \rangle \langle \mathbf{x}(t) \rangle + 2A \int_0^t B(t-t_1) \langle u(t)u(t_1) \mathbf{x}(t) \rangle dt_1. \quad (4)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle u(t)u(t_1) \mathbf{x}(t) \rangle &= B(t-t_1) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + 2A \int_0^t B(t_1-t_2) \times \\ &\times \langle u(t)u(t_2) \mathbf{x}(t) \rangle dt_2. \end{aligned} \quad (4a)$$

Последнее интегральное уравнение можно решать итерациями. В результате получим точное замкнутое уравнение для среднего решения $\langle \mathbf{x}(t) \rangle^*$:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m A^{m+1} f_m(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle, \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \quad (5)$$

где

$$f_m(t) = \int_0^t \dots \int_0^t B(t-t_1) B(t_1-t_2) \dots B(t_m-t) dt_1 \dots dt_m.$$

Аналогичным способом нетрудно получить точную замкнутую систему для произвольного момента $\langle x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \rangle$.

Заметим, что смешанную корреляцию $\langle u^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle$ можно вычислять с помощью обобщенной формулы Фуруцу—Новикова [4, 5], считая $\mathbf{x}(t)$ функционалом $u^2(t)$:

$$\begin{aligned} \langle u^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \int_0^t \dots \int_0^t K_s^{u^2}(t, t_1, \dots, t_{s-1}) \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta^{s-1} \mathbf{x}(t)}{\delta u^2(t_1) \dots \delta u^2(t_{s-1})} \right\rangle dt_1 \dots dt_{s-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $K_s^{u^2}(t, t_1, \dots, t_{s-1})$ — кумулянтная функция порядка s процесса $u^2(t)$. Сравнивая последнее выражение с итерированным уравнением (4) и учитывая симметричность кумулянтных функций по своим аргументам, найдем известное выражение для кумулянтных функций квадрата гауссова процесса:

$$K_s^{u^2}(t, t_1, \dots, t_{s-1}) = 2^s \frac{(s-1)!}{2} \{B(t-t_1) B(t_1-t_2) \dots B(t_{s-1})\}, \quad (7)$$

где $\frac{(s-1)!}{2} \{ \dots \}$ — скобка симметризации по переменным t, t_1, \dots, t_{s-1} , содержащая $\frac{(s-1)!}{2}$ членов.

* Заметим, что в отличие от [2] использованный способ получения уравнения (5) свободен от привлечения к анализу характеристического функционала случайного процесса $u^2(t)$.

Полученное уравнение (5) является точным. Однако вычисление многократных интегралов, входящих в него, весьма затруднительно даже для экспоненциально коррелированных флуктуаций $u(t)$. Поэтому перейдем от (5) к некоторому приближению, удобному для практического использования [6-8]. Варьируя (1) и разрешая полученное уравнение относительно вариационной производной, получим

$$\frac{\delta x(t)}{\delta u(t_1)} = 2u(t_1)Ax(t_1) + \int_{t_1}^t u^2(\tau) \frac{\delta x(\tau)}{\delta u(t_1)} d\tau. \quad (8)$$

Легко видеть, что при достаточно быстрых флуктуациях $u(t)$ (по сравнению с масштабом изменения $\langle x(t) \rangle$) вкладом второго слагаемого в (8) при его подстановке в (2) можно пренебречь*. Производя эту процедуру многократно, получим следующее приближенное уравнение для среднего решения $\langle x(t) \rangle_d$:

$$\frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle_d = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m A^{m+1} \varphi_m(t, \langle x \rangle_d), \quad \langle x(0) \rangle_d = x_0, \quad (9)$$

где

$$\varphi_m(t, \langle x \rangle_d) = \int_0^t \dots \int_0^{t_{m-1}} B(t-t_1)B(t_1-t_2) \dots \\ \dots B(t_m-t) \langle x(t_m) \rangle dt_1 \dots dt_m.$$

Здесь в рамках использованного выше условия остроты корреляционных функций $B(t_i - t_{i+1})$ по сравнению с временем релаксации $\langle x(t_m) \rangle$ не представляет затруднений вычисление многократных интегралов с упорядоченным временем. Проиллюстрируем это далее на конкретных примерах.

3. Для сравнения решений (5), (9) и удобства их диаграммной интерпретации рассмотрим уравнение первого порядка, приводимое к (1) [2] и имеющее практический интерес [3],

$$\frac{dg(t, t')}{dt} + (\Pi + u^2(t))g(t, t') = \delta(t - t'). \quad (10)$$

Среднее значение и моменты решения $g(t, t')$ определяются аналогично (5), (9). Приведем диаграммную интерпретацию точного решения и рассматриваемого приближения для $\langle g(t - t') \rangle$. Для этого введем обозначения, близкие к общепринятым [9]:

$$\overline{\tau} \leftrightarrow g_0(t-\tau), \quad \overline{\overline{\tau}} \leftrightarrow \langle g(t-\tau) \rangle, \quad \circ \leftrightarrow \langle u^2 \rangle, \\ \overline{\overline{\tau}} \leftrightarrow \langle u^2 \rangle^{-1} B(t-\tau), \quad \overline{\overline{\tau}} \leftrightarrow \langle u^2(t) g(t-\tau) \rangle, \quad (11)$$

где $g_0(t - \tau)$ — «невозмущенная» функция Грина системы (10). В этих обозначениях средняя функция Грина $\langle g(t - t') \rangle$ представляет собой

* Пренебрежение соответствующим членом в случае гауссовых флуктуаций параметров соответствует широко используемому диффузионному приближению [1]. Однако в отличие от него условия применимости рассматриваемого приближения содержат, помимо малости относительного времени корреляции, малость флуктуаций параметра $u(t)$ (см. пп. 3, 4).

$$\overline{\text{---}}_{t_1 t'} = \overline{\text{---}}_{t_1 t'} - \overline{\text{---}}_{t_1 t_1} \overline{\text{---}}_{t_1 t'} \quad (t > t_1 > t'), \quad (11a)$$

где по t_1 подразумевается интегрирование от t' до t .

Точное и приближенное размыкание смешанной корреляции соответственно имеют вид

$$\overline{\text{---}}_{t_1 t'} = \overline{\text{---}}_{t_1 t'} - 2 \overline{\text{---}}_{t_1 t_2} \overline{\text{---}}_{t_2 t'} + 4 \overline{\text{---}}_{t_1 t_2 t_3} \overline{\text{---}}_{t_3 t'} - \dots ; \quad (11б)$$

$$\overline{\text{---}}_{t_1 t'} = \overline{\text{---}}_{t_1 t'} - 2 \overline{\text{---}}_{t_1 t_2} \overline{\text{---}}_{t_2 t'} + 4 \overline{\text{---}}_{t_1 t_2 t_3} \overline{\text{---}}_{t_3 t'} - \dots \quad (11в)$$


По внутренним вершинам t_i в (11б), (11в) предполагается интегрирование в пределах от t' до t_1 в (11б) и от t' до t_{i-1} в (11в), причем интегрирование в (11б) проводится только по корреляционным связям $B(t_i - t_{i+1})$, в то время как средняя функция Грина является множителем.

Сравнивая (11б) и (11в), заметим, что рассматриваемое приближение, так же, как и диффузионное приближение в случае гауссовых флуктуаций параметров [11], суммирует наименее связанные диаграммы ряда (11б).

Для пояснения этого рассмотрим связь полученных решений с кумулянтными функциями квадрата гауссова процесса. Как следует из (7), последние имеют следующее диаграммное представление:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\leftrightarrow \circ, \quad \kappa_2(t, t_1) \leftrightarrow 2 \overline{\text{---}}_{t_1 t_1}, \quad \kappa_3(t, t_1, t_2) \leftrightarrow 8 \overline{\text{---}}_{t_1 t_1 t_2}, \\ \kappa_4(t, t_1, t_2, t_3) &\leftrightarrow 16 \left\{ \overline{\text{---}}_{t_1 t_1 t_2 t_3} + \overline{\text{---}}_{t_1 t_1 t_2 t_3} + \overline{\text{---}}_{t_1 t_1 t_2 t_3} \right\} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Из сравнения последних выражений с рядами (11б), (11в) заметим, что вид суммируемых диаграмм определяется видом кумулянтных функций квадрата гауссова процесса. Нетрудно видеть, что приближенное выражение (11в) из-за упорядоченности времен интегрирования суммирует,

кроме первых двух диаграмм, диаграмму $\frac{8}{2!}$  и далее

диаграммы вида



, которые в ряде (11б) являются наименее связными. Известно (см., например, [9]), что наименее связанные диаграммы в решении дают наибольший вклад.

Представляет интерес сравнить рассматриваемое приближение с известным приближением Бурре [10] применительно к анализируемому типу флуктуаций параметров. Нетрудно показать, что последнее суммирует лишь первые две диаграммы приближенного ряда (11в), которые, однако, в рамках условий применимости (см. ниже) являются преобладающими*.

* Для сравнения отметим, что соотношение между диффузионным приближением и приближением Бурре в случае гауссовых флуктуаций параметров является иным [9]

Для экспоненциально коррелированных флуктуаций ($B(\tau) = \langle u^2 \rangle e^{-\nu|\tau|}$) ряд (11в) легко суммируется, в результате чего нетрудно получить при $t \rightarrow \infty$

$$\langle u^2 g \rangle_d = \frac{\langle u^2 \rangle \langle g \rangle_d}{1 + \mu}, \quad (12)$$

где $\mu = \int_0^\infty B(\tau) d\tau$ — величина, пропорциональная спектральной плотности шума $u(t)$ на нулевой частоте. Соответствующий результат в приближении Бурре имеет вид

$$\langle u^2 g \rangle_B = \langle u^2 \rangle \langle g \rangle_B (1 - \mu). \quad (13)$$

Теперь нетрудно оценить условия применимости выражения (12) (или (11в)). «Эффективная» полоса стохастической системы (10) есть

$$\Pi_d = \Pi + \frac{\langle u^2 \rangle}{1 + \mu}.$$

Использованное при получении (12) условие $\nu \gg \Pi_d$ приводит к следующим достаточным условиям применимости рассматриваемого приближения:

$$\alpha, \mu \ll 1, \quad \alpha = \Pi/\nu. \quad (14)$$

Отметим, что в рамках (14) отличие (12) от (13) содержится во втором порядке малости по параметру μ . Однако, как показывает анализ и сравнение с некоторыми точными результатами, выражение (12), в отличие от (13), качественно верно описывает поведение системы и при больших значениях параметра μ [7].

4. В заключение рассмотрим пример распространения монохроматической волны $\Psi = v(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})]$ в случайно-неоднородной не поглощающей среде. В отличие от [12] будем предполагать гауссовыми флуктуации показателя преломления среды $n(t)$. Тогда, как нетрудно показать, амплитуда волны $v(\mathbf{r})$ в малоугловом приближении удовлетворяет следующему параболическому уравнению*:

$$2ik \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta_\perp v + k^2 (2\tilde{\alpha}(x, \rho) + \tilde{\alpha}^2(x, \rho)) v = 0, \quad (15)$$

где

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{n}}{\langle n \rangle}, \quad k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \langle n \rangle^2.$$

Поставим задачу отыскания среднего значения $\langle v(x, \rho) \rangle$, которое можно представить в виде

$$\langle v(x, \rho) \rangle = v_0(x, \rho) \exp\left[-\frac{1}{2}(\text{Re } \gamma - i \text{Im } \gamma) x\right], \quad (16)$$

где $v_0(x, \rho)$ — решение уравнения (15) при $\tilde{\alpha} \equiv 0$ с граничным условием $v_0(0, \rho) = v_0$.

Используя для размыкания смешанных корреляций $\langle \tilde{\alpha}(x, \rho) v \rangle$,

* Аналогичному уравнению (с точностью до коэффициентов) удовлетворяет $v(\mathbf{r})$ при разложении $\epsilon = f(\tilde{\alpha})$ (ϵ — диэлектрическая проницаемость, $\tilde{\alpha}(t)$ — гауссов процесс) в ряд Тейлора с сохранением первых двух членов.

$\langle \tilde{\alpha}^2(x, \rho) v \rangle$ исследованное выше приближение и суммируя полученные итерационные ряды, можно найти выражения для «эффективного» показателя поглощения $\text{Re } \gamma$ и поправки к волновому числу $\text{Im } \gamma$:

$$\begin{aligned} \text{Re } \gamma &= k^2 D \left(1 + \frac{k^2 D^2}{8} \right) \left(1 + \frac{k^2 D^2}{4} \right)^{-1}, \\ \text{Im } \gamma &= k \left[\langle \tilde{\alpha}^2 \rangle - \frac{k^2 D^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 D^2}{4} \right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $D = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi, 0) d\xi$, $B(x - x', \rho - \rho') = \langle \tilde{\alpha}(x, \rho) \tilde{\alpha}(x', \rho') \rangle$.

Использованное выше условие остроты корреляционной функции $B(x - x', \rho - \rho')$ вдоль продольной координаты по сравнению с масштабом затухания поля в том же направлении приводит к следующему достаточному условию применимости полученных результатов:

$$kD \ll 1. \quad (18)$$

Отметим, что пренебрежение членами второго порядка малости в (17) приводит к соответствующим результатам распространения монохроматической волны в случайно-неоднородной среде с гауссовыми флуктуациями диэлектрической проницаемости ϵ [12]. Однако по аналогии с примером п. 3 можно ожидать, что выражения (17) качественно верно описывают поведение $\langle v(x, \rho) \rangle$ и за рамками условия их применимости (18).

Автор благодарен А. Н. Малахову за полезные замечания, а также А. А. Мальцеву и О. В. Музычку за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975
2. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 11, 1752 (1977).
3. Теоретические основы радиолокации, под ред. Я. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ТМФ, 17, № 2, 273 (1973).
5. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, ДАН СССР, 222, № 4, 793 (1975).
6. О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 2, 217 (1978)
7. О. В. Музычук, Диссертация, ГГУ, Горький, 1978.
8. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, 23, № 7, 1401 (1978).
9. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
10. R. C. Bourget, Can. J. Phys., 40, 782 (1962).
11. А. А. Дубков, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 6, 901 (1977)
12. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1437 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 10 февраля 1978 г.

ON THE STATISTICAL ANALYSIS OF LINEAR SYSTEMS WITH QUADRATIC PARAMETER FLUCTUATIONS

I. E. Pozumentov

Based upon the apparatus of variational derivatives with the use of Furutsu — Novikov's formula the statistical analysis is made of linear stochastic systems with quadratic parameter fluctuations. An explicit solution for the mean output value of the system investigated is compared with an approximation suitable for practical use and with Burgett's approximation. The diagram interpretation of the solutions obtained is given.

УДК 536.7 : 530.18

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Г. Ф. Ефремов

Теория флуктуаций, основанная на нелинейной флуктуационно-диссипационной теореме, распространена на термодинамические величины, для которых нельзя указать сопряженные им силы (термические возмущения). Показано, что корреляции третьего порядка для температуры имеют особенность вблизи точек фазового перехода второго рода.

В [1-4] установлена нелинейная флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ) для величин x_i , для которых можно указать сопряженные им силы f_i и, таким образом, учесть их воздействие в гамильтониане системы (динамические возмущения). Однако имеется широкий класс термодинамических величин, таких, как температура, химический потенциал и т. д., для которых нельзя ввести сопряженные им силы (или их введение носит искусственный характер). Между тем, связь между флуктуациями и диссипативными процессами в той же системе которая составляет сущность ФДТ, должна носить универсальный характер. Естественно поэтому попытаться обобщить флуктуационно-диссипационные методы на такого рода величины.

Это достигается в данной работе на основе гипотезы о введении сторонних термодинамических сил в феноменологические уравнения релаксации*:

$$\dot{x}_i = -\alpha_{ik} x_k - \alpha_{i, kl} x_k x_l - \alpha_{i, klm} x_k x_l x_m. \quad (1)$$

Здесь x_i ($i = 1, 2, \dots$) — полная совокупность величин, определяющая неравновесное состояние рассматриваемой системы и, тем самым, энтропию неравновесного состояния**:

$$s(x_1, x_2, \dots).$$

Перепишем уравнения (1) в терминах термодинамически сопряженных с x_i переменных

$$X_i = -\frac{\partial s(x_1, x_2, \dots)}{\partial x_i} = \beta_{ik} x_k + \beta_{ikl} x_k x_l + \dots; \quad (2)$$

$$\dot{x}_i = -\gamma_{ik} X_k - \gamma_{i, kl} X_k X_l - \gamma_{i, klm} X_k X_l X_m, \quad (3)$$

где

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ij} \beta_{jk}^{-1}, \quad (4)$$

* Переход от феноменологических уравнений (1) в том случае, когда индексы i, k, \dots пробегает дискретный ряд значений, к марковской нелинейной флуктуационно-диссипационной термодинамике [5, 6] содержится в [7, 8].

** Индекс i может пробегать как дискретный, так и непрерывный ряд значений (распределенные системы).

$$\gamma_{i,kl} = (-\gamma_{il'} \beta_{l'k'l'} + \alpha_{i,k'l'}) \beta_{k'k}^{-1} \beta_{l'l}^{-1} \quad (4')$$

есть так называемые кинетические коэффициенты.

Введем далее сторонние термодинамические силы $X^{\text{ст}}$ так, что полное значение величин X_i окажется равным

$$X_i^n = X_i + X_i^{\text{ст}}. \quad (5)$$

Если величина x_i является динамической в том смысле, что ей соответствует сопряженная сила $f_i^{\text{ст}}$, то*

$$X_i^{\text{ст}}(t) = -f_i^{\text{ст}}(t)/T_0. \quad (6)$$

Будем вводить термодинамические сторонние силы (6) для таких величин, как температура, химический потенциал и т. п., не обладающих этим свойством. При этом важно отметить, что сторонние термодинамические силы $X^{\text{ст}}$ связаны со сторонним источником энтропии:

$$\dot{s}^{\text{ст}} = -\dot{x}_i X_i^{\text{ст}}.$$

При введении термодинамических сторонних сил (6) феноменологические уравнения релаксации (1) принимают вид

$$\dot{x}_i = -\gamma_{ik} \left(X_k - \frac{f_k^{\text{ст}}}{T_0} \right) - \gamma_{i,kl} \left(X_k - \frac{f_k^{\text{ст}}}{T_0} \right) \left(X_l - \frac{f_l^{\text{ст}}}{T_0} \right) - \dots \quad (7)$$

Предположим далее, что связь между флуктуациями термодинамических величин и откликами системы на термодинамические силы (6), введенные в уравнения (7), точно такая же, что и для динамических величин, согласно обобщениям ФДТ [1-4]. Иначе говоря, мы предполагаем универсальность связи между флуктуациями физических величин и диссипативными процессами в той же системе**. Определив из (7) обобщенные восприимчивости, мы сможем воспользоваться нелинейной ФДТ [1-4] для определения равновесных и неравновесных флуктуаций термодинамических величин.

В качестве примера рассмотрим равновесные флуктуации температуры тела, взаимодействующего с окружающей средой (термостатом). Пусть уравнение релаксации для температуры тела T имеет вид

$$\dot{T} = -\alpha(T - T_0) - \alpha_{(2)}(T - T_0)^2, \quad (8)$$

где T_0 — температура термостата. Термодинамически сопряженная с $T - T_0 = \Delta T$ величина есть (см. [9], § 112)

$$X_T = -\frac{\partial s}{\partial T} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial R_{\min}}{\partial T} = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) C_V(T), \quad (9)$$

где $C_V(T)$ — теплоемкость тела при постоянном объеме. Используя (9) и определение (2), находим

$$\beta = \left(\frac{\partial X_T}{\partial T} \right)_{T=T_0} = \frac{C_V(T_0)}{T_0^2}, \quad \beta_{(2)} = \frac{1}{T_0^2} \left(C_V'(T_0) - \frac{C_V(T_0)}{T_0} \right). \quad (10)$$

* Здесь T_0 — температура окружающей данное тело среды или температура в состоянии равновесия.

** Из данной гипотезы совершенно естественно следует хорошо известная теория флуктуаций термодинамических величин, основанная на формуле Эйнштейна и гипотезе Онсагера (см. [9]).

Следуя общим правилам, определим из (7) обобщенные восприимчивости и воспользуемся квадратичной ФДТ [1]. Тогда для равновесной корреляции температуры третьего порядка в классическом пределе получим формулу

$$\begin{aligned} \langle \Delta T \Delta T(\omega_1) \Delta T(\omega_2) \rangle = & \left(\frac{2T_0}{C_V(T_0)} \right)^2 P_{012}^{\text{II}} \text{Im} \left\{ \left[\alpha \left(\frac{C'_V(T_0)}{C_V(T_0)} - \frac{1}{T_0} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{(2)} - \left(\frac{C'_V(T_0)}{C_V(T_0)} - \frac{1}{T_0} \right) \frac{\alpha^3}{\omega_1 \omega_2} \right] \frac{1}{-\omega_0 + i\alpha} \frac{1}{\omega_1 + i\alpha} \frac{1}{\omega_2 + i\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0$, P_{012}^{II} — оператор суммы циклической перестановки индексов 0, 1, 2.

Как известно [9], вблизи точек фазового перехода второго рода теплоемкость C_V остается конечной, а ее производная обращается в бесконечность. Таким образом, корреляции третьего порядка (11) в точках фазового перехода второго рода имеют особенность, в то время как корреляции второго порядка

$$\langle \Delta T \Delta T(\omega) \rangle = \frac{T_0^2}{C_V(T_0)} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (12)$$

такой особенностью не обладают.

В заключение отметим, что распространение нелинейной ФДТ на термодинамические величины позволяет рассмотреть различные перекрестные флуктуационные эффекты, такие, как термоэлектрические, термомагнитные и т. п., которые играют важную роль в различных областях радиофизики, теплофизики, химической кинетики и т. д.

Автор глубоко благодарен Г. Н. Бочкову, М. А. Новикову за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 54, 2322 (1968).
2. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 58, 1612 (1970).
3. Г. Ф. Ефремов, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1207 (1972).
4. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, ЖЭТФ, 72, 238 (1977).
5. Р. Л. Стратонович, Вестник Моск. ун-та, физ., астрон., № 4, 84 (1967).
6. Р. Л. Стратонович, Вестник Моск. ун-та, физ., астрон., № 1, 40 (1969).
7. Р. Л. Стратонович, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
8. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, Статистическая физика, ч. 1, изд. Наука, М., 1976.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
24 октября 1977 г.

NONLINEAR FLUCTUATION THEORY OF THERMODYNAMIC VALUES

G. F. Efremov

The fluctuation theory based upon the nonlinear fluctuation-dissipation theorem is extended for the thermodynamic values for which it is impossible to point to the conjugated forces (thermal perturbations). It is shown that the third order correlation has a peculiarity for the temperature near the points of the second kind phase transition.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. А. Крутиков

На основе приближенного решения стохастического волнового уравнения получены выражения для статистических моментов волнового поля произвольного порядка. В качестве такого решения волнового уравнения используется приближение, в фазовом представлении учитывающее взаимодействие со случайной непрерывной средой и последовательное рассеяние на каждом из ансамбля независимых дискретных рассеивателей. Проведено исследование используемого приближения в качестве возможного решения дифференциального уравнения для момента волнового поля произвольного порядка.

Распространение оптических волн в рассеивающей случайно-неоднородной среде всегда сопровождается не только энергетическим ослаблением и появлением рассеянных волн, но и пространственно-временными флуктуациями интенсивности проходящего и рассеянного оптического излучения. Для описания этих флуктуаций используются построенные из соответствующего стохастического волнового уравнения с помощью функциональных методов и вариационного исчисления замкнутые уравнения для моментов волнового поля произвольного порядка, а также уравнения для его характеристического функционала [1-4]. Существенно, что в общем случае уравнения могут быть интегродифференциальными и, вообще говоря, не сводиться к дифференциальным. Кроме того, возникают серьезные математические трудности на этапе их решения, обойти которые в общем виде удается в уравнениях для первых двух моментов волны. Поскольку решение поставленной задачи может быть осуществлено только приближенными методами, то необходима разработка таких подходов, с помощью которых можно строить как некоторые асимптотические аналитические представления, так и проводить численный расчет статистических моментов волнового поля с определенной точностью и в наиболее общей постановке, т. е. с учетом параметров излучающей и приемной аппаратуры.

В настоящей работе предлагается в качестве возможного способа расчета статистических характеристик световой волны, прошедшей слой крупномасштабных (по сравнению с длиной волны) неоднородностей, использовать метод Калашникова и Рязанова для приближенного решения непосредственно волнового уравнения [5, 6]. Кроме всего прочего, таким способом можно единообразно рассматривать как непрерывные случайно-неоднородные среды, так и ансамбли дискретных рассеивателей.

В нашем случае будет исследовано волновое поле для системы взаимодействующих рассеивателей. При этом ограничимся изучением только одновременных пространственных статистических свойств излучения, случайный характер которого обусловлен случайной реализацией поля неоднородностей показателя преломления среды. Под отдельной реализацией случайно-неоднородной среды будем понимать

значение диэлектрической проницаемости непрерывной среды вместе с совокупностью некоторых величин, характеризующих количество дискретных рассеивающих центров, их взаимное расположение, размеры, форму, ориентацию и т. д. Смена одной реализации на другую осуществляется за счет движения неоднородностей, но сам характер этого движения не влияет на пространственную одновременную статистику излучения.

Для описания распространения монохроматического излучения в случайно-неоднородной среде используем скалярное волновое уравнение

$$[\Delta + k^2 + V_1(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

с потенциалом, описывающим как случайное непрерывное поле диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$, так и свойства дискретной рассеивающей среды,

$$V_1(\mathbf{r}) = k^2 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^n V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j). \quad (2)$$

Здесь $\Psi(\mathbf{r})$ — волновое поле, введенное согласно равенству $E(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, $E(\mathbf{r}, t)$ — напряженность электрического поля, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle$ — волновое число, $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}) - \langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}$ — флуктуирующая часть

диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$, n — общее (случайное) число частиц внутри некоторого рассеивающего объема, \mathbf{R}_j — положение центра j -го рассеивателя, ζ_j — все прочие случайные параметры, характеризующие j -й рассеиватель, такие, как размер, форма, ориентация. В общем случае рассеивающий потенциал $V_1(\mathbf{r})$ является комплексной величиной, т. е. среда может быть поглощающей.

В качестве решения уравнения (1) с потенциалом (2) используем фазовое представление

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \exp [\Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi'(\mathbf{r})] = \\ &= \exp \left[\Phi_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^n \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j) + \sum_{i \neq j}^n \sum_{i \neq j}^n \Phi_2(\mathbf{r}, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j; \zeta_i, \zeta_j) + \dots \right], \end{aligned} \quad (3)$$

обобщающее [6] и позволяющее получить систему нелинейных зацепляющихся уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 + (\nabla \Phi_0)^2 + k^2 &= -k^2 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}), \\ \Delta \Phi_1 + 2\nabla \Phi_0 \nabla \Phi_1 + (\nabla \Phi_1)^2 &= V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}; \zeta), \\ \Delta \Phi_2 + 2\nabla \Phi_0 \nabla \Phi_2 + (\nabla \Phi_2)^2 &= \nabla \Phi_1 \nabla \Phi_1'. \end{aligned} \quad (4)$$

Для упрощения записи в системе (4) индексы суммирования, а также параметры, от которых зависят функции Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 и т. д., опущены. Штрих в правой части третьего уравнения обозначает несовпадение номеров частиц, которым соответствуют две функции Φ_1 .

Первое из системы уравнений описывает распространение волнового поля в непрерывной, возможно и случайной, среде с полем диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$ и составляет предмет исследования теории распространения излучения в турбулентной среде. В нашем

случае эта задача будет считаться решенной. Если $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 0$, то $\Phi_0(\mathbf{r}) \equiv \Phi_0^0(\mathbf{r})$ будет характеризовать распространение падающего поля $\exp \Phi_0^0(\mathbf{r})$ в однородной среде. Второе уравнение соответствует точному

решению задачи рассеяния поля $\exp \Phi_0(\mathbf{r})$ на изолированном потенциале $V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}; \zeta)$. Величина $\sum_{j=1}^n \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j)$ суммирует фазовые искажения поля $\exp \Phi_0(\mathbf{r})$, вносимые каждым из n рассеивателей, и поэтому учитывает приближенно многократное рассеяние на системе n рассеивателей. Следующие уравнения осуществляют последовательное приближение фазовой функции $\Phi(\mathbf{r})$ по плотности рассеивателей. Так, решение третьего уравнения системы учитывает отличие рассеяния на двух рассеивателях от последовательного рассеяния поля $\exp \Phi_0(\mathbf{r})$ на каждом из них. Очевидно, что значения этих величин будут зависеть от того, насколько близко расположены рассеиватели друг к другу. Анализ системы уравнений (4), проведенный для первичной падающей волны и $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) = 0$, показал [6], что в выражении (3) можно пренебречь слагаемыми с кратностью суммирования больше первой, если выполняется условие

$$\tau \langle \Theta_0^2 \rangle < 1, \quad (5)$$

где τ — величина оптической толщи рассеивающего слоя в направлении распространения падающей волны, $\langle \Theta_0^2 \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния излучения изолированным рассеивателем.

Соотношение (5) не будет, однако, достаточным условием при нарушении условия независимости рассеяния системой частиц при их высокой концентрации [7], когда могут возникнуть новые условия для поля многократно рассеянных волн — так называемые кооперативные эффекты [8, 9]. В этом случае высокая плотность частиц в пространственной системе рассеивателей приводит к деформации индикатрисы рассеяния при значительно меньших оптических толщах, чем для обычной системы независимых рассеивателей. Поэтому возрастает доля излучения, рассеянного под большими углами, не учитываемая только однократным суммированием в (3).

Вне области проявления кооперативных эффектов волновое поле $\Psi(\mathbf{r})$ будем искать в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp \left[\Phi_0(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^n \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j) \right]. \quad (6)$$

Если падающее поле $\exp \Phi_0^0(\mathbf{r})$ носит неслучайный характер, то за флуктуации излучения будет ответственно как случайное изменение фазы волнового поля $\Phi_0(\mathbf{r}) - \Phi_0^0(\mathbf{r})$ за счет распространения в турбулентной среде с полем диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$, так и слабое с последовательным суммированием фаз после рассеяния на каждом из n рассеивателей. Статистическая зависимость функции $\Phi_0(\mathbf{r})$ и $\Phi'(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j)$ полностью определяется случайным характером диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$. При этом представляют интерес только статистические характеристики волнового поля, получаемые усреднением по реализациям случайного поля $\varepsilon(\mathbf{r})$ и ансамбля большого числа $n \gg 1$ рассеивателей.

В дальнейшем будем считать, что реализация ансамбля невзаимодействующих рассеивателей статистически независима от реализации случайного поля флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ турбулентной среды.

Полное статистическое описание случайного поля $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ содержится в его характеристическом функционале

$$X_{\tilde{\varepsilon}}[x; \nu(\xi, \rho')] \equiv \left\langle \exp \left[i \int_0^x d\xi \int d\rho' \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho') \nu(\xi, \rho') \right] \right\rangle = \exp \{ \Theta_{\tilde{\varepsilon}}[x; \nu(\xi, \rho')] \}. \quad (7)$$

В случае гауссова случайного процесса $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ [3]

$$\Theta_{\tilde{\varepsilon}}[x; \nu(\xi, \rho')] = -\frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x d\xi_1 d\xi_2 \int d\rho'_1 d\rho'_2 \times \\ \times \langle \tilde{\varepsilon}(\xi_1, \rho'_1) \tilde{\varepsilon}(\xi_2, \rho'_2) \rangle \nu(\xi_1, \rho'_1) \nu(\xi_2, \rho'_2), \quad (8)$$

а для дельта-коррелированных гауссовых флуктуаций поля диэлектрической проницаемости

$$B_{\tilde{\varepsilon}}(x, \rho; x', \rho') = \langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \rangle = \delta(x - x') A(x, \rho, \rho'), \quad (9)$$

и функционал $\Theta_{\tilde{\varepsilon}}$ имеет вид

$$\Theta_{\tilde{\varepsilon}}[x; \nu(\xi, \rho')] = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int d\rho'_1 d\rho'_2 \times \\ \times A(\rho'_1 - \rho'_2) \nu(\xi, \rho'_1) \nu(\xi, \rho'_2). \quad (10)$$

Определим статистику рассеивающей среды, т. е. зададим вероятность реализации функции $V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j)$, статистически

независимой от поля $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$. Фиксированная реализация рассеивающей среды определяется числом частиц n , положением их центров и параметров ζ . Будем рассматривать только такую рассеивающую среду, которая состоит из большого числа статистически независимых рассеивателей. В этом случае точки \mathbf{R}_j равномерно распределены в произвольном объеме V_{06} и плотность вероятности положения центра одной частицы равна $p(\mathbf{R}_j) = V_{06}^{-1}$ со средним значением $\langle n \rangle$:

$$P(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}. \quad (11)$$

При статистической независимости параметров \mathbf{R}_j естественно, кроме того, принять, что параметры ζ_j статистически независимы, а также не зависят от \mathbf{R}_j . Тогда при фиксированном числе частиц n плотность вероятности для реализации рассеивающей среды примет вид [10]

$$p(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = V_{06}^{-n} \prod_{j=1}^n p(\zeta_j). \quad (12)$$

Введем среднюю концентрацию частиц $n_0 = \langle n \rangle / V_{06}$. При отсутствии дальнедействующих сил с радиусом действия $r > a$ (где a — характерный размер рассеивающей частицы) рассеиватели можно счи-

тать статистически независимыми, если пренебречь столкновениями между ними. Таким образом, выражение (12) будет справедливо при условии $na^3 \ll 1$, а функцию $V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j)$ можно рассматривать как случайный пуассоновский процесс. В дальнейшем будем считать, что рассеивающая среда занимает плоский слой $V_{об} = SL$ с границами $x=0$ и $x=L$, причем $L \gg a$, поэтому удобнее представить $V(\mathbf{r})$ в виде

$$V(\mathbf{r}) \equiv V(x, \rho) = \sum_{j=1}^n V_0(x - \xi_j, \rho - \mathbf{R}_{\perp j}; \zeta_j), \quad (13)$$

и для полного описания статистических свойств случайного пуассоновского процесса $V(x, \rho)$, используя (11)–(13), можно построить его характеристический функционал для $x < L$:

$$\begin{aligned} X_V[x; \nu(\xi, \rho'), \eta(\xi, \rho')] &\equiv X_V[x; \nu, \eta] = \\ &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\rho' [V(\xi, \rho') \nu(\xi, \rho') + V^*(\xi, \rho') \eta(\xi, \rho')] \right\} \right\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left[\frac{1}{SL} \int_0^L d\tilde{\xi} \int_{(S)} d\mathbf{R}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta p(\zeta) \times \right. \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\rho' (V_0(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_{\perp}; \zeta) \nu(\xi, \rho') + \right. \\ &\left. \left. + V_0^*(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_{\perp}; \zeta) \eta(\xi, \rho')) \right\} \right]^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Проведя суммирование и учитывая, что $V_0(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_{\perp}; \zeta) = 0$ при $\tilde{\xi} > \xi + a$, получим

$$\begin{aligned} X_V[x; \nu, \eta] &= \exp \left\{ n_0 \int_0^x d\tilde{\xi} \int d\mathbf{R}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta p(\zeta) \times \right. \\ &\times \left[\exp \left\{ i \int_{\tilde{\xi}}^x d\xi \int d\rho' (V_0(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_{\perp}; \zeta) \nu(\xi, \rho') + \right. \right. \\ &\left. \left. + V_0^*(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_{\perp}; \zeta) \eta(\xi, \rho')) \right\} - 1 \right] \Big\} = \\ &= \exp \{ \Theta_V[x; \nu(\xi, \rho'), \eta(\xi, \rho')] \} \quad (x < L). \end{aligned} \quad (15)$$

Выполнение условия дельта-коррелированности случайного пуассоновского процесса $V(x, \rho)$ соответствует предельному переходу [3]

$$V(x, \rho) = \sum_{j=1}^n V_0(x, \rho - \mathbf{R}_{\perp j}; \zeta_j) \delta(x - \xi_j) \quad (16)$$

и приводит к выражению для логарифма характеристического функционала поля дискретной рассеивающей среды в виде

$$\Theta_V [x; \nu(\xi, \rho'), \eta(\xi, \rho')] = n_0 \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left[i \int d\rho' (V_0(\xi, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \nu(\xi, \rho') + V_0^*(\xi, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) \eta(\xi, \rho') \right) \right] - 1 \right\rangle_{\mathbf{R}_\perp, \zeta}. \quad (17)$$

К удобному упрощению выражения (15) приводит и использование локализованности потенциала $V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \zeta)$, описывающего свойства отдельного рассеивателя около его центра \mathbf{R} . В этом случае с достаточной степенью точности выполняется равенство

$$\int_{\tilde{\xi}}^x d\xi V_0(\xi - \tilde{\xi}, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) = \int_0^\infty d\xi V_0(\xi, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) \quad (|x - \tilde{\xi}| \ll a) \quad (18)$$

и соответствующий функционал Θ_V получается в виде

$$\Theta_V [x; \nu(\xi, \rho'), \eta(\xi, \rho')] = n_0 x \left\langle \exp \left[i \int d\xi \int d\rho' (V_0(\xi, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \nu(\xi, \rho') + V_0^*(\xi, \rho' - \mathbf{R}_\perp; \zeta) \eta(\xi, \rho') \right) \right] - 1 \right\rangle_{\mathbf{R}_\perp, \zeta}. \quad (19)$$

При этом соотношения (18) и (19) допускают очевидную геометрическую аналогию, а именно правая часть (18) имеет смысл длины секущей в данном рассеивателе в определенном направлении и проходящей через фиксированную точку ρ . Если положение центра рассеивателя \mathbf{R}_\perp является случайным, то и длина секущей будет величиной случайной, а (19) дает ее полное статистическое описание [10]. Выражение для логарифма характеристического функционала поля $V(x, \rho)$ в виде (19) использовалось в [11] для получения дифференциальных уравнений для моментов волнового поля в случайно-неоднородной среде пуассоновского типа.

Вследствие статистической независимости двух случайных процессов $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j; \zeta_j)$ характеристический функционал для всей случайно-неоднородной среды будет иметь вид

$$X_V [x; \eta, \eta] = \tilde{X}_\varepsilon [x; \nu] \times X_V [x; \nu, \eta] = \exp \{ \Theta_\varepsilon [x; \nu] + \Theta_V [x; \nu, \eta] \}. \quad (20)$$

При таком задании статистических свойств рассеивающей среды слабые, составляющие комплексную фазу поля (6) в виде суммы по совокупности рассеивателей, также независимы, поскольку каждое дает независимый вклад в рассеяние, определяемый вторым уравнением системы (4). В этом случае величина комплексной фазы $\tilde{\Phi}'(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j, \zeta_j)$ при фиксированной реализации поля $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ будет также пуассоновским случайным процессом.

Подобно процессу (13) для него построим характеристический функционал:

$$X_{\Phi'} [\nu, \eta] \equiv \left\langle \exp i \int d\mathbf{r}' [\Phi'(\mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}') + \Phi'^*(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}')] \right\rangle_{\mathbf{R}, \zeta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp n_0 \int d\mathbf{R} \int d\zeta p(\zeta) \left\{ \exp i \int [\Phi_1(\mathbf{r}' - \mathbf{R}; \zeta) \nu(\mathbf{r}') + \right. \\
&\quad \left. + \Phi_1^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}; \zeta) \eta(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' - 1 \right\} = \\
&= \exp n_0 \left\langle \exp i \int [\Phi_1(\mathbf{r}' - \mathbf{R}; \zeta) \nu(\mathbf{r}') + \Phi_1^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}; \zeta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \eta(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' - 1 \right\rangle_{\mathbf{R}, \zeta}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда характеристический функционал для полной случайной комплексной фазы $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi'(\mathbf{r})$ получится в виде

$$\begin{aligned}
X_\Phi[\nu, \eta] &\equiv \left\langle \exp i \int d\mathbf{r}' [(\Phi_0(\mathbf{r}') + \Phi'(\mathbf{r}')) \nu(\mathbf{r}') + \right. \\
&\quad \left. + (\Phi_0^*(\mathbf{r}') + \Phi'^*(\mathbf{r}')) \eta(\mathbf{r}')] \right\rangle = \\
&= \left\langle \exp i \left\{ \int d\mathbf{r}' [\Phi_0(\mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}') + \Phi_0^*(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}')] \right\} X_{\Phi'}[\nu, \eta] \right\rangle_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь наряду с усреднением по ансамблю рассеивателей, обозначенному как $\langle \dots \rangle_{\mathbf{R}, \zeta}$, проводится усреднение и по реализациям случайного поля $\varepsilon(\mathbf{r})$, на что указывает запись $\langle \dots \rangle_{\varepsilon}$.

Выражение для характеристического функционала (22) содержит полную информацию о статистических свойствах излучения в чисто турбулентной атмосфере и излучения прошедшего слоя только дискретных рассеивателей. При этом важно отметить, что в выражения для моментных функций многократно рассеянного волнового поля, получающихся из (22), случайные фазы $\Phi_0(\mathbf{r})$ и $\Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}; \zeta)$ входят только в виде $\exp \Phi_0(\mathbf{r})$ и $\exp \Phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}; \zeta)$. В такой записи они имеют физический смысл соответственно волнового поля $\Psi_0(\mathbf{r})$, прошедшего слой турбулентной среды, — точное решение первого уравнения системы (4), и волны, образованной при рассеянии поля $\Psi_0(\mathbf{r})$ на отдельном рассеивателе, — точное решение второго уравнения системы (4). К решению этих двух уравнений и сводится задача построения статистических характеристик волнового поля в случайной среде с крупномасштабными дискретными неоднородностями.

Исследуем полученные выражения как возможное приближенное решение соответствующих замкнутых дифференциальных уравнений для моментов волнового поля.

Воспользуемся малоугловым характером данного приближения, который позволяет перейти от волнового уравнения (1) к параболическому уравнению

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp} + V_1(x, \rho) \right] U(x, \rho) = 0, \tag{23}$$

где

$$\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

с начальным условием

$$U(0, \rho) = U_0(0, \rho) \equiv U_0(\rho), \tag{24}$$

где функция $U(x, \rho)$ связана с $\Psi(x, \rho)$ следующим образом:

$$\Psi(x, \mathbf{r}) = U(x, \rho) e^{ikx}. \tag{25}$$

Аналогом первых двух уравнений системы (4) для параболического уравнения будет

$$2ik \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \Delta_{\perp} \Phi_0 + 2k^2 + (\nabla_{\perp} \Phi_0)^2 + k^2 \tilde{\varepsilon}(x, \rho) = 0; \quad (26)$$

$$2ik \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \Delta_{\perp} \Phi_1 + 2\nabla_{\perp} \Phi_0 \nabla_{\perp} \Phi_1 + (\nabla_{\perp} \Phi_1)^2 + 2ikV_0(x - \xi, \rho - R; \zeta) = 0. \quad (27)$$

Из параболического волнового уравнения в приближении диффузного случайного процесса, при котором используется предположение о дельта-коррелированности флуктуаций диэлектрической проницаемости вдоль направления распространения волны, можно получить дифференциальное уравнение для момента поля $U(x, \rho)$ произвольного порядка:

$$M_{n, m}(x; \rho_1, \dots, \rho_n; \rho'_1, \dots, \rho'_m) = \langle U(x, \rho_1) \dots U(x, \rho_n) U^*(x, \rho'_1) \dots U^*(x, \rho'_m) \rangle. \quad (28)$$

Это уравнение имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{n, m} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{l=1}^n \Delta_{\rho_l} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho'_k} \right) M_{n, m} + \\ & + \dot{\Theta}_x \left[\frac{1}{2k} \sum_{l=1}^n \delta(\rho' - \rho_l) - \frac{1}{2k} \sum_{k=1}^m \delta(\rho' - \rho'_k) \right] M_{n, m} \end{aligned} \quad (29)$$

с граничным условием

$$M_{n, m}(0; \rho_1, \dots, \rho_n; \rho'_1, \dots, \rho'_m) = U_0(\rho_1) \dots U_0(\rho_n) U_0^*(\rho'_1) \dots U_0^*(\rho'_m), \quad (30)$$

где

$$\Theta_x[\varphi(\xi, \rho')] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\rho' V_1(\xi, \rho') \varphi(\xi, \rho') \right\} \right\rangle \quad (31)$$

— логарифм характеристического функционала поля $V_1(\xi, \rho')$;

$$\dot{\Theta}_x \equiv \frac{d}{dx} \Theta_x[\varphi(\xi, \rho')].$$

Поскольку очевидна связь между $M_{n, m}^{\Psi}$ — моментами поля $\Psi(x, \rho)$ и $M_{n, m}$ — моментами поля $U(x, \rho)$, то интерес представляет сопоставление уравнения (29), (30) с приближением (6), (21), (22). Введем обозначение

$$\dot{\Theta}_x \left[\frac{1}{2k} \sum_{l=1}^n \delta(\rho' - \rho_l) - \frac{1}{2k} \sum_{k=1}^m \delta(\rho' - \rho'_k) \right] = Q_{n, m}. \quad (32)$$

Рассмотрим частный случай дельта-коррелированного случайного процесса $V_1(x, \rho)$, в котором флуктуации турбулентной среды $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ полагаем гауссовыми. Согласно (10) и (17) функционал Θ_x имеет вид

$$\Theta_x[\varphi(\xi, \rho')] = -\frac{k^4}{2} \int_0^x d\xi \int d\rho'_1 d\rho'_2 A(\rho'_1 - \rho'_2) \varphi(\xi, \rho'_1) \times \quad (33)$$

$$\times \varphi(\xi, \rho'_2) + n_0 \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left[i \int d\rho' V_0(\xi, \rho' - R_{\perp}; \zeta) \varphi(\xi, \rho') \right] - 1 \right\rangle.$$

Так что

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_x = & -\frac{k^4}{2} \int d \rho'_1 d \rho'_2 A(\rho'_1 - \rho'_2) \varphi(x, \rho'_1) \varphi(x, \rho'_2) + \\ & + n_0 \left\langle \exp \left[i \int d \rho' V_0(x, \rho' - R_{\perp}; \zeta) \varphi(x, \rho') \right] - 1 \right\rangle_{R_{\perp}, \zeta}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} Q_{n, m} = & -\frac{k^2}{8} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A(\rho_i - \rho'_k) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m A(\rho'_k - \rho'_l) \right] + n_0 \left\langle \exp \left[-\frac{i}{2k} \sum_{l=1}^n V_0(x, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2k} \sum_{k=1}^m V_0(x, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \right] - 1 \right\rangle_{R_{\perp}, \zeta}. \end{aligned} \quad (35')$$

Использование функционала (19) приводит к более общему выражению

$$\begin{aligned} Q_{n, m} = & -\frac{k^2}{8} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A(\rho_i - \rho'_k) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m A(\rho'_k - \rho'_l) \right] + n_0 \left\langle \exp \left[-\frac{i}{2k} \sum_{l=1}^n \int d \xi V_0(\xi, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2k} \sum_{k=1}^m \int d \xi V_0(\xi, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \right] - 1 \right\rangle_{R_{\perp}, \zeta}, \end{aligned} \quad (35)$$

которое при предельном переходе (16) совпадает с (35').

В качестве приближенного решения уравнения (29) с учетом (30) и (35) используем выражение, получившееся из (21) и (22) при условии

$$\nu(r') = -i \sum_{l=1}^n \delta(r' - r_l), \quad (36)$$

$$\eta(r') = i \sum_{k=1}^m \delta(r' - r'_k)$$

с учетом соотношения (25):

$$\begin{aligned} M_{n, m} = & \left\langle \exp \left[\sum_{l=1}^n \Phi_0(x, \rho_l) + \sum_{k=1}^m \Phi_0^*(x, \rho'_k) \right] \times \right. \\ & \times \exp ik(m-n)x \exp n_0 \left\langle \exp \left[\sum_{l=1}^n \Phi_1(x - \xi, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^m \Phi_1^*(x - \xi, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \right] - 1 \right\rangle_{R_{\perp}, \zeta} \right\rangle_{\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$R[\tilde{\varepsilon}] = \exp \left[\sum_{l=1}^n \Phi_0(x, \rho_l) + \sum_{k=1}^m \Phi_0^*(x, \rho'_k) \right]; \quad (38)$$

$$F[\tilde{\varepsilon}, V] = \exp \left[\sum_{l=1}^n \Phi_1(x - \xi, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) + \sum_{k=1}^m \Phi_1^*(x - \xi, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \right], \quad (39)$$

в которых выражение для искомого момента поля имеет вид

$$M_{n,m} = \langle \exp[-ik(n-m)x] \langle R[\tilde{\varepsilon}] \exp\{n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] - 1 \rangle_V\} \rangle_{\tilde{\varepsilon}} \rangle_{\tilde{\varepsilon}}. \quad (37')$$

Непосредственная подстановка (37) в уравнение (29) и использование (26) и (27) приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \langle R[\tilde{\varepsilon}] \exp\{n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] - 1 \rangle_V\} \left[\sum_{l=1}^n \tilde{\varepsilon}(x, \rho_l) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m \tilde{\varepsilon}(x, \rho'_k) \right] \rangle_{\tilde{\varepsilon}} + \langle R[\tilde{\varepsilon}] \exp\{n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] - 1 \rangle_V\} \times \\ & \times n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] \left[\sum_{l=1}^n V_0(x - \xi, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m V_0(x - \xi, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \right] \rangle_V \rangle_{\tilde{\varepsilon}} + \langle R[\tilde{\varepsilon}] \exp\{n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] - 1 \rangle_V\} \times \\ & \times n_0^2 \left\{ \sum_{l=1}^n \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] \nabla_{\rho_l} \Phi_1(x - \xi, \rho_l - R_{\perp}; \zeta) \rangle_V^2 - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] \nabla_{\rho'_k} \Phi_1(x - \xi, \rho'_k - R_{\perp}; \zeta) \rangle_V^2 \right\} \rangle_{\tilde{\varepsilon}} = \\ & = Q_{n,m} \langle F[\tilde{\varepsilon}] \exp\{n_0 \langle F[\tilde{\varepsilon}, V] - 1 \rangle_V\} \rangle_{\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Выполнение условия дельта-коррелированности гауссовых флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ и использование свойств пуассоновского процесса $V(x, \rho)$ приводит к равенству суммы первых двух слагаемых в левой части и правой части выражения (40). Таким образом, используемое приближение можно рассматривать как решение уравнения для момента волнового поля произвольного порядка (29), если величиной третьего — квадратичного по концентрации рассеивателей — слагаемого в левой части выражения (40) можно пренебречь. При известном решении задачи рассеяния на отдельном рассеивателе эту величину можно оценить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, 3 (1970).
2. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, 415 (1974).
3. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
4. K. Furutsu, Radio Sci, 10, 29 (1975).
5. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 47, 1055 (1964).
6. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 50, 459 (1966).

7. Е. А. Ведерникова, М. В. Кабанов, В. А. Крутиков, Изв. вузов — Физика, № 3, 99 (1976).
8. Г. В. Розенберг, УФН, 56, 77 (1955).
9. Г. В. Розенберг, УФН, 69, 57 (1959).
10. А. Г. Боровой, В. А. Крутиков, Оптика и спектроскопия, 40, 728 (1976).
11. П. Н. Свиркунов, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 399 (1977).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
12 января 1978 г.

ON STATISTICAL CHARACTERISTICS OF OPTICAL RADIATION
IN A MEDIUM WITH LARGE-SCALE DISCRETE INHOMOGENEITIES

V. A. Krutikov

The expressions for statistical moments of the wave field of arbitrary order are obtained on the basis of approximate solution of the stochastic wave equation. As the wave equation solution such approximation is used which in phase representation takes into account the interaction with random continuous medium and successive scattering on each of the independent discrete scatterers of the ensemble. The approximation used is investigated as a possible solution of differential equation for the moment of the arbitrary order wave field.

УДК 535.12

ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА НА НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛОЕ

В. А. Давыдов

Рассчитано излучение равномерно движущегося заряда в среде, диэлектрическая проницаемость которой плавно изменяется во времени по закону переходного слоя Эпштейна. Рассмотрены частные случаи больших и малых времен изменения диэлектрической проницаемости.

В 1973 г. Гинзбург [1] показал, что равномерно движущийся заряд должен излучать при мгновенном изменении диэлектрической проницаемости среды во времени. Затем это явление было изучено более подробно Гинзбургом и Цытовичем [2]. В работах [3] и [4] был применен иной метод расчета полей излучения на мгновенном скачке во времени диэлектрической проницаемости для случая «нечеренковского» и «черенковского» зарядов. Вместе с тем, представляет большой интерес рассмотрение задач, в которых изменение диэлектрической проницаемости среды происходит не мгновенно, а за конечный промежуток времени. Простейшая задача такого рода — излучение заряда на двух мгновенных скачках диэлектрической проницаемости, разделенных во времени интервалом t_0 , — была рассмотрена в [5].

В настоящей работе рассматривается излучение заряда в случае плавного изменения диэлектрической проницаемости ϵ во времени, когда изменение описывается формулой для переходного слоя Эпштейна:

$$\frac{1}{\epsilon(t)} = \frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \frac{e^{t/T}}{1 + e^{t/T}}. \quad (1)$$

Здесь параметр T характеризует время изменения диэлектрической проницаемости среды от ϵ_1 до ϵ_2 . Задача об излучении равномерно движущегося заряда на размытой пространственной границе двух сред, где размытие описывалось формулой, подобной (1), была рассмотрена в [6]. В [7] была рассмотрена трансформация плоской электромагнитной волны на нестационарном слое Эпштейна.

Итак, пусть заряд q движется вдоль оси z со скоростью V в среде, диэлектрическая проницаемость которой изменяется по закону (1). Уравнение для электрической индукции имеет вид

$$\Delta \mathbf{D} - \frac{\epsilon(t)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 4\pi \left[\text{grad } \rho + \frac{\epsilon(t)}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right], \quad (2)$$

для фурье-компоненты индукции \mathbf{D}_k получаем

$$\mathbf{D}_k'' + \tilde{\epsilon}(t)\omega_0^2 \mathbf{D}_k = i \frac{q}{2\pi^2} (\mathbf{V}(k\mathbf{V}) - \tilde{\epsilon}(t)c^2 \mathbf{k}) e^{-i(k\mathbf{V})t}, \quad (3)$$

где $\omega_0 = kc$, $\tilde{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon(t)}$,

Поскольку все излучение определяется поперечной составляющей индукции $D_k^{\text{tr}} = D_k - \frac{k(kD_k)}{k^2}$, то будем решать уравнение только для D_k^{tr} . Оно имеет вид

$$(D_k^{\text{tr}})'' + \tilde{\varepsilon}(t)\omega_0^2 D_k^{\text{tr}} = B e^{-i(kV)t}, \quad (4)$$

где

$$B = i \frac{q}{2\pi^2} (kV) \left(V - \frac{k(kV)}{k^2} \right).$$

Вводя новую переменную $\xi = -e^{t/T}$, а также сделав замену $D_k^{\text{tr}} = (-\xi)^\alpha f(\xi)$, для $f(\xi)$ получим уравнение

$$(\xi - 1)\xi f'' + [-\gamma + (\alpha + \beta + 1)\xi]f' + \alpha\beta f = T^2 B (-\xi)^{-(i k V T + \alpha + 1)} (1 - \xi), \quad (5)$$

где $a = i s \tilde{\varepsilon}_1^{1/2}$, $b = i s \tilde{\varepsilon}_2^{1/2}$, $\alpha = a + b$, $\beta = a - b$, $\gamma = 2a + 1$, $s = \omega_0 T$.

Уравнение (5) — это неоднородное гипергеометрическое уравнение. Два линейно-независимых решения уравнения (5) без правой части, регулярные в окрестности точки $\xi = 0$, описываются следующими выражениями:

$$f_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi), \quad (6)$$

$$f_2 = \xi^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ — гипергеометрическая функция аргумента ξ . Теперь нам удобно будет вернуться к уравнению (4), поскольку вронскиан этого уравнения есть постоянная величина, не зависящая от t (см., например, [8]). Поскольку стремлению ξ к нулю соответствует стремление t к $-\infty$, то два линейно-независимых решения уравнения (4) без правой части при $t < 0$ будут иметь следующий вид:

$$d_1 = \exp(i\omega_0 \tilde{\varepsilon}_1^{1/2} t) F(\alpha, \beta, \gamma, -e^{t/T}), \quad (7)$$

$$d_2 = \exp(-i\omega_0 \tilde{\varepsilon}_1^{1/2} t) F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma - e^{t/T}).$$

Для дальнейшего необходимо вычислить вронскиан W_1 . Так как W_1 есть постоянная величина, для его вычисления можно воспользоваться асимптотикой решений (7) при $t \rightarrow -\infty$. Получаем

$$W_1 = i 2 \omega_0 \tilde{\varepsilon}_1^{1/2}. \quad (8)$$

Запишем общее решение уравнения (4):

$$D_k^{\text{tr}} = -\frac{B}{W_1} d_1 \int d_2 e^{-i(kV)t} dt + \frac{B}{W_1} d_2 \int d_1 e^{-i(kV)t} dt + C_1 d_1 + C_2 d_2. \quad (9)$$

В (9) C_1 и C_2 — произвольные постоянные векторы. Взять интегралы в (9) можно, воспользовавшись интегральным представлением Барнса для гипергеометрической функции,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha + s)\Gamma(\beta + s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma + s)} (-z)^s ds, \quad (10)$$

где путь интегрирования искривлен (если это необходимо) для обеспечения того, чтобы полюсы функций $\Gamma(\alpha + s)$, $\Gamma(\beta + s)$, $\Gamma(-s)$ лежали справа от пути. В (10) $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Подставив (10) под знаки интегралов в (9), проведем интегрирование сначала по t , а потом по s , и в итоге получим

$$D_k^{\text{tr}} = \frac{B}{W_1} A e^{-i(kV)t} + \frac{B}{W_1} M_1 d_1 - \frac{B}{W_1} M_2 d_2 + C_1 d_1 + C_2 d_2, \quad (11)$$

где первый член, имеющий множителем $e^{-i(kV)t}$, есть поле движущегося заряда, не связанное с излучением;

$$M_1 = \frac{T\Gamma(1-2\alpha)\Gamma[iT(kV + i\omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2})]\Gamma[iT(kV - \omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2})]\Gamma[-iT(kV + \omega_0\tilde{\epsilon}_1^{1/2})]}{2\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1 - 2\alpha + ikVT + i\omega_0\tilde{\epsilon}_1^{1/2}T)}, \quad (12)$$

$$M_2 = \frac{T\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma[iT(kV + \omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2})]\Gamma[iT(kV - \omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2})]\Gamma[iT(\omega_0\tilde{\epsilon}_1^{1/2} - kV)]}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1 + 2\alpha + ikVT - i\omega_0\tilde{\epsilon}_1^{1/2}T)}.$$

Постоянные C_1 и C_2 в (11) найдем из условия отсутствия излучения при $t = -\infty$:

$$C_1 = \frac{B}{W_1} M_1, \quad C_2 = \frac{B}{W_1} M_2. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь область $t > 0$. Регулярными в этой области линейно-независимыми решениями уравнения (4) без правой части являются следующие функции:

$$\delta_1 = \exp(i\omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2}t)F(\beta, -\alpha, 1 - 2b, -e^{-t/T}), \quad (14)$$

$$\delta_2 = \exp(-i\omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2}t)F(\alpha, -\beta, 1 + 2b, -e^{-t/T}).$$

Две пары решений — d_1 , d_2 и δ_1 , δ_2 — связаны следующими линейными соотношениями:

$$d_1 = a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2, \quad (15)$$

$$d_2 = a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2,$$

где

$$a_{11} = \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(2b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 + a + b)}, \quad a_{12} = \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(-2b)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 + a - b)}, \quad (16)$$

$$a_{21} = \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)\Gamma(2b)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(1 - a + b)}, \quad a_{22} = \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)\Gamma(-2b)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1 - a - b)}.$$

Выпишем теперь решения уравнения (4) при $t > 0$:

$$D_k^{\text{tr}} = -\frac{B}{W_2}\delta_1 \int \delta_2 e^{-i(kV)t} dt + \frac{B}{W_2}\delta_2 \int \delta_1 e^{-i(kV)t} dt + A_1\delta_1 + A_2\delta_2. \quad (17)$$

Здесь $W_2 = 2i\omega_0\tilde{\epsilon}_2^{1/2}$, A_1 и A_2 — постоянные, но уже не произвольные, а связанные с постоянными C_1 и C_2 (см. (13)). Действительно, из (15) следует, что

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11}C_1 + a_{21}C_2, \\ A_2 &= a_{12}C_1 + a_{22}C_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Взяв интегралы в (17) аналогично тому, как это делалось выше, вычислим поле излучения D_k^{rad} при $t \rightarrow \infty$. Используя (13), (14), (16), (18), а также то, что $\lim_{z \rightarrow 0} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1$, получим

$$D_k^{\text{rad}} = a_+(k) \exp(-i\omega_0 \tilde{\epsilon}_2^{1/2} t) + a_-(k) \exp(+i\omega_0 \tilde{\epsilon}_2^{1/2} t), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} a_+(k) &= BT^2 \times \\ &\times \frac{\Gamma(-2b)\Gamma[-iT(kV + \omega_0 \tilde{\epsilon}_1^{1/2})]\Gamma[iT(\omega_0 \tilde{\epsilon}_1^{1/2} - kV)]\Gamma[iT(kV - \omega_0 \tilde{\epsilon}_2^{1/2})]}{\Gamma(\beta)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1 - ikVT - i\tilde{\epsilon}_2^{1/2} T \omega_0)}, \quad (20) \\ a_-(k) &= [a_+(-k)]^*. \end{aligned}$$

В (20) знак * означает комплексное сопряжение.

Из (19) видно, что при «прохождении» заряда через нестационарный переходный слой для данного k возникает излучение двух противоположно направленных волн (по k и против k).

Вычислим интенсивность излучения на частоте $\omega = kc/\sqrt{\epsilon_2}$ в элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, где $\cos \theta = \frac{kV}{kV}$. Для получения угловой зависимости излучения необходимо учесть, что в направлении k (под углом θ к оси z) распространяется не только волна с амплитудой $a_+(k)$, но и волна с амплитудой $a_-(-k) = a_+^*(k)$. Используя (20), а также известные свойства гамма-функции

$$|\Gamma(iy)|^2 = \pi/y \operatorname{sh} \pi y,$$

$$\Gamma(1 + iy)\Gamma(1 - iy) = \pi/y \operatorname{sh} \pi y,$$

получим

$$\begin{aligned} W_{\Omega, \omega} d\Omega &= \frac{q^2 V^4 \sqrt{\epsilon_2} \omega T(\epsilon_2 - \epsilon_1) \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{2\pi c^5 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \epsilon_1 \cos^2 \theta\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \epsilon_2 \cos^2 \theta\right)} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh}[\pi\omega_0 T(\tilde{\epsilon}_1^{1/2} + \tilde{\epsilon}_2^{1/2})] \operatorname{sh}[\pi\omega_0 T(\tilde{\epsilon}_1^{1/2} - \tilde{\epsilon}_2^{1/2})] \operatorname{sh}[\pi T(kV + \omega_0 \tilde{\epsilon}_2^{1/2})] d\Omega}{\operatorname{sh}(2\pi\omega_0 T \tilde{\epsilon}_2^{1/2}) \operatorname{sh}[\pi T(\omega_0 \tilde{\epsilon}_1^{1/2} + kV)] \operatorname{sh}[\pi T(\omega_0 \tilde{\epsilon}_1^{1/2} - kV)] \operatorname{sh}[\pi T(\omega_0 \tilde{\epsilon}_2^{1/2} - kV)]}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи формулы (21). Пусть время изменения диэлектрической проницаемости настолько мало, что аргументы всех гиперболических синусов в (21) много меньше единицы. Найдем при этих условиях первые два члена разложения интенсивности излучения. Вычисления дают

$$W_{\Omega, \omega} = W_{\Omega, \omega}^0 \left(1 - \frac{\pi^2 \omega^2 \left(1 - \frac{V}{c} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta\right)^2}{3} T^2\right). \quad (22)$$

В формуле (22) $W_{\Omega, \omega}^0$ — это интенсивность излучения при мгновенном скачке диэлектрической проницаемости среды (см. [2]), причем

$$W_{\Omega, \omega}^0 = \frac{q^2 V^4 (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\epsilon_2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \epsilon_1 \cos^2 \theta\right)^2 \left(1 - \frac{V}{c} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta\right)^2}. \quad (23)$$

Из (22) видно, что малым параметром, по которому производится разложение интенсивности, является отношение времени изменения диэлектрической проницаемости ко времени формирования излучения в среде с ϵ_2 .

Рассмотрим теперь, как интенсивность излучения зависит от T , если T настолько велико, что все аргументы у гиперболических синусов много больше единицы. В этом случае можно положить $\text{sh } x \approx \frac{e^x}{2}$. Из

(21) получим

$$W_{\Omega, \omega} = \frac{q^2 V^4 \omega T |\epsilon_2 - \epsilon_1| \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\pi c^5 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \epsilon_1 \cos^2 \theta\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \epsilon_2 \cos^2 \theta\right)} \times \\ \times \exp \left[-2\pi T \omega \left(1 - \frac{V}{c} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta\right) \right]. \quad (24)$$

Как показывает выражение (24), интенсивность излучения экспоненциально убывает с увеличением времени изменения диэлектрической проницаемости среды от ϵ_1 до ϵ_2 .

Автор благодарит Б. М. Болотовского и С. Н. Столярова за ценные советы, сделанные при обсуждении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 4, 512 (1973).
2. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **65**, 132 (1973).
3. В. А. Давыдов, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 4, 3 (1976).
4. В. А. Давыдов, Вестник МГУ, серия Физика, астрономия, **18**, № 6, 64 (1977).
5. В. А. Давыдов, Вестник МГУ, серия Физика, астрономия, **19**, № 3, 58 (1978).
6. А. Ц. Аматауни, Н. А. Корхмазян, ЖЭТФ, **39**, 1011 (1960).
7. С. Н. Столяров, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 3, 20 (1974).
8. Э. Т. Уиттекер, Дж. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, Физматгиз, М., 1963, стр. 227.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 февраля 1978 г.

RADIATION FROM A UNIFORMLY MOVING CHARGE IN A NONSTATIONARY LAYER

V. A. Davydov

The radiation from a charge uniformly moving in a medium the dielectric permittivity of which changes smoothly in time according to Epshtein transient layer has been calculated. Partial cases of great and small times of changes in the dielectric permittivity are considered.

УДК 537.5

К ВОПРОСУ ОБ УСИЛЕНИИ ПОЛЯ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДОВ В ПЛОТНЫХ ГАЗАХ

Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, Б. Н. Шамраев

Качественно рассматривается процесс усиления электрического поля в области эмиссионных пятен на катоде при наносекундных разрядах в плотных газах. Показана возможность роста напряженности поля от средней величины $\sim 10^5$ В/см до значения $\sim 10^8$ В/см, обеспечивающего эмиссионные токи критической плотности.

1. Наносекундные электрические разряды в почти однородном поле с напряженностью $E_0 \sim 10^5$ В/см при давлении газа порядка десятков и сотен тор отличаются большой скоростью коммутации тока: крутизна импульса тока при разрядах в воздухе атмосферной плотности достигает величины $\dot{J} \gtrsim 10^{12}$ А/с, приводя за время $\tau_j \lesssim 1,5$ нс [1] к реализации критической плотности тока автоэлектронной эмиссии $j^{(кр)} \sim \sim 10^9$ А/см² [2] с одного или нескольких эмиссионных пятен общей площадью порядка $S_a \sim 10^{-6}$ см² [3], для чего необходимо, чтобы в результате развития в прикатодной области положительного пространственного заряда локальная напряженность поля за время τ_j возросла до величины $E \approx 10^8$ В/см [4].

В настоящей работе делается попытка качественно оценить локальное усиление поля в прикатодной области, если не до предельной величины порядка 10^8 В/см, обеспечивающей взрывные процессы на катоде [2], то хотя бы до напряженности, создающей предпосылки для дальнейшего роста поля. Подобные предпосылки должны возникать уже на лавинной стадии, так как характерное время развития одиночной лавины до критических размеров, когда число электронов в лавине достигает величины $N_e^{(кр)} \approx 10^8$ [5],

$$\tau_{\lambda}^{(кр)} \approx \frac{\ln [N_e^{(кр)}(\tau_{\lambda}^{(кр)})/N_e(0)]}{\alpha_T(E_0/P)v_-(E_0/P)}, \quad (1)$$

оказывается соизмеримым с τ_j (например, при $\frac{E_0}{P} \approx 132$ В/см·Тор, $P = 760$ Тор и $N_e(0) = 1$ $\tau_{\lambda}^{(кр)} \approx 0,6$ нс [6]). Однако в действительности τ_j можно разбить на три временных интервала, каждый из которых характеризуется своим размером области существования поля с напряженностью $E \sim 10^7 \div 10^8$ В/см,

$$\tau_j = \tau_s + \tau_{\lambda}^{(кр)} + \tau_p, \quad (2)$$

где τ_s — статистическое время запаздывания разряда, $\tau_{\lambda}^{(кр)}$ — время развития одиночной электронно лавины до критических размеров, τ_p — время развития плотности и размеров положительного простран-

ственного заряда до величин, обеспечивающих локальную напряженность поля в области эмиссионных пятен на катоде $\sim 10^8$ В/см.

Рассмотрим каждый из этих интервалов времени.

2. Согласно общепринятой концепции иницирование наносекундных разрядов осуществляется в результате автоэлектронной эмиссии с вытянутых микровыступов на поверхности катода [7]. Для расчета усиления поля вблизи микровыступа последний обычно аппроксимируется полуэллипсоидом вращения [8]. Используя для потенциала электрического поля проводящего эллипсоида, помещенного во внешнее однородное поле E_0 , выражение, приведенное в [9], нетрудно получить компоненты напряженности поля вдоль оси разряда x и в поперечном направлении ρ :

$$E_x(E_0, \alpha, \nu, z) = E_0 \alpha^2 z \sqrt{\frac{1 + \nu}{(1 + \nu - z^2)(\alpha^2 + \nu) + \alpha^4 z^2(1 + \nu)}} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{\text{Arth} \sqrt{1 - \alpha^2} - \sqrt{1 - \alpha^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + \nu} + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 + \nu} - \sqrt{1 - \alpha^2}} - \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 + \nu}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z^2(1 + \nu)}{(1 + \nu)^2 + (\alpha^2 - 1)z^2} \left(\frac{1 - \alpha^2}{1 + \nu} \right)^{3/2} \right] \right\}; \quad (3)$$

$$E_\rho(E_0, \alpha, \nu, z) = E_0 \frac{(1 + \nu - z^2)z}{[(1 + \nu)^2 + (\alpha^2 - 1)z^2] \sqrt{(1 + \nu - z^2)(\alpha^2 + \nu) + (1 + \nu)\alpha^4 z^2}} \times \\ \times \frac{(1 - \alpha^2)^{3/2}}{\text{Arth} \sqrt{1 - \alpha^2} - \sqrt{1 - \alpha^2}}; \quad (4)$$

$$E(E_0, \alpha, \nu, z) = \sqrt{E_x^2(E_0, \alpha, \nu, z) + E_\rho^2(E_0, \alpha, \nu, z)}, \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{R}{a}}$, $z = \frac{x}{a}$, $r = \frac{\rho}{b}$, a и b — большая и малая полуоси эллипсоида, R — радиус кривизны вблизи вершины, а координата ν задается уравнением эквипотенциалей эллипсоида

$$\frac{\alpha^2 r^2}{\alpha^2 + \nu} + \frac{z^2}{1 + \nu} = 1, \quad (6)$$

$\nu = 0$ соответствует поверхности эллипсоида.

Полный ток автоэлектронной эмиссии с части поверхности микровыступа от произвольного значения координаты z до вершины ($z = 1$) равен

$$I(E_0, \varphi, \alpha, a, z) = a^2 J(E_0, \varphi, \alpha, z) = 2\pi \alpha a^2 \times \\ \times \int_z^1 j(\varphi, E(E_0, \alpha, 0, z')) \sqrt{1 - (1 - \alpha^2)z'^2} dz', \quad (7)$$

где $j(\varphi, E(E_0, \alpha, 0, z'))$ — плотность тока автоэлектронной эмиссии Фаулера—Нордгейма [4].

Статистическое запаздывание разряда снимается за время

$$\tau_s = \frac{e}{a^2 J(E_0, \varphi, \alpha, z)}, \quad (8)$$

необходимое для появления с поверхности микровыступа одного электрона, инициирующего разряд.

В табл. 1 приведены результаты расчета $J(E_0, \varphi, \alpha, z)$ и a для двух значений работы выхода φ (чистого поликристаллического вольфрама и его карбидов, которые могут образоваться в результате механической обработки [10]) и ряда значений отношения высоты микровыступа к его ширине $(2\alpha)^{-1}$ при $\tau_s \leq 1$ нс.

Таблица 1

$\varphi = 2,6$ эВ			$\varphi = 4,5$ эВ		
$z_{эфф} = 0,9999$			$z_{эфф} = 0,9996$		
$(2\alpha)^{-1}$	$J, \text{ м/см}^2$	$a, \text{ мк}$	$(2\alpha)^{-1}$	$J, \text{ мА/см}^2$	$a, \text{ мк}$
5	0	∞	15	$2,29 \cdot 10^{-3}$	83,6
6	$3,95 \cdot 10^{-11}$	63,6 см	16	$2,13 \cdot 10^{-2}$	27,5
7	$2,92 \cdot 10^{-7}$	0,74	17	0,141	10,6
8	$1,51 \cdot 10^{-4}$	326	18	0,71	4,7
9	$1,44 \cdot 10^{-2}$	33,4	19	2,89	2,3
10	0,45	6	20	9,7	1,3
11	6,33	1,6	21	28,2	0,75
12	51,5	0,56	22	72,1	0,47
13	278	0,24	23	165,4	0,31

Эффективная эмиссионная поверхность выступа ограничена снизу значением координаты $z = z_{эфф}$, приведенным в таблице для каждой φ при максимальном $(2\alpha)^{-1}$; $z_{эфф}$ почти не отличается от 1, т. е. эмитирует ничтожно малая часть поверхности микровыступа у вершины, и, следовательно, его форма слабо влияет на автоэлектронную эмиссию: существенным является только отношение радиуса кривизны вершины к высоте микровыступа [8]. Автоэлектронная эмиссия осуществляется небольшими группами атомов или даже отдельными атомами [4]. Поэтому значения $(2\alpha)^{-1}$ порядка 10—20 вполне реальны (так, например, $(2\alpha)^{-1} = 20$ соответствует радиус кривизны вершины $R \approx 6 \cdot 10^{-8}$ см). Таким образом, можно считать, что эмиссия осуществляется с поверхности субмикровыступов, находящихся на поверхности обычной микрошероховатости, имеющей характерный размер $a \sim 1$ мк [8], а центры первичной эмиссии* распределены по площади S со средней плотностью порядка $n/S \approx a^{-2} \sim 10^8$ см $^{-2}$.

За время развития лавины со всех n микровыступов, каждый из которых способен пропустить ток $I = Ja^2$, эмитируется примерно

$$N_e(0) \sim \frac{Ja^2 \tau_l^{(кр)}}{e} n \quad (9)$$

первичных электронов. При $\tau_l^{(кр)} \approx \tau_s \approx 1$ нс $N_e(0) \approx n \approx S/a^2$.

3. Прежде чем приступить к рассмотрению усиления поля на катоде, связанного с развитием электронных лавин, заметим, что согласно (3)—(5) E спадает до E_0 на расстоянии порядка $\sqrt{3} a \ll a_T^{-1}$ и лавина развивается в однородном поле E_0 . Следует также отметить, что движением ионов в течение $\tau_l^{(кр)}$ можно пренебречь вследствие

$$v_+ \left(\frac{E_0}{P} \right) \tau_l^{(кр)} \left(\frac{E_0}{P} \right) \ll a_T^{-1}.$$

* Под первичной здесь понимается эмиссия в течение времени $\tau_l^{(кр)}$ после снятия статистического запаздывания [7].

Электронная лавина достигает критических размеров в непосредственной близости к катоду: при $\frac{E_0}{P} = 132 \text{ В/см} \cdot \text{Тор}$ и $P = 760 \text{ Тор}$

$x_{\text{кр}} \approx \alpha_T^{-1} \ln N_e^{(\text{кр})} \approx 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ [6], причем пространственный заряд ионов, остающихся по следу лавины, полностью перекрывает эмиссионное пятно, так как $\sqrt{S_0} \ll r_{\text{л}} \approx 3r_{D-} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ [6].

В дипольном приближении напряженность электрического поля на поверхности эмиссионного пятна под лавиной с учетом изображения зарядов в катод можно представить следующим образом:

$$E = -E_0 - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} (\xi_+^{-2} - \xi_-^{-2}), \quad (10)$$

где $Q = eN_e^{(\text{кр})}$, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, ξ_+ и ξ_- — координаты центров «тяжести» ионов и электронов относительно поверхности катода.

Если принять $\xi_- = x_{\text{кр}}$, а дипольный момент $\xi_- - \xi_+ = r_{\text{л}}$, то из (10) следует, что коэффициент усиления поля на катод за счет развития одиночной лавины

$$\mu_p = 1 + \frac{eN_e^{(\text{кр})}}{2\pi\epsilon_0 x_{\text{кр}}^2 E_0} \frac{(2x_{\text{кр}} - r_{\text{л}})r_{\text{л}}}{(x_{\text{кр}} - r_{\text{л}})^2}. \quad (11)$$

Так как $x_{\text{кр}} > r_{\text{л}}$, то $\mu_p - 1 \sim x_{\text{кр}}^{-3} \sim \alpha_T^3$ и, например, в области $E_0/P \in [200, 1000] \text{ В/см} \cdot \text{Тор}$ [11] $\mu_p - 1 \sim P^3 \left(\sqrt{0,21 \frac{E_0}{P}} - 3,65 \right)^3$, что делает

понятным регулярное увеличение временной задержки в появлении токов проводимости при понижении давления газа, наблюдавшееся в работе [3].

Кроме того, с уменьшением давления радиус диффузии электронов r_{D-} возрастает, в связи с чем поле пространственного заряда ионов,

остающихся по следу лавины, $E_p \sim \frac{eN_e^{(\text{кр})}}{r_{D-}^2}$, уменьшается. Например, в той же области E_0/P , если принять, что $T_e \sim E_0/P$ [12],

$$r_{D-} \approx \sqrt{\frac{6T_e x_{\text{кр}}}{eE_0}} \sim \sqrt{\frac{E_0}{P} \frac{1}{E_0} \frac{1}{\left(\sqrt{0,21 \frac{E_0}{P}} - 3,65 \right)^2 P}} \sim \frac{1}{P} \quad (12)$$

и $E_p \sim P^2$, что также соответствует зависимости задержки токов проводимости от давления и с чем может быть связано уменьшение эрозии поверхности катода при понижении давления газа [3].

Оценки $\mu_p - 1$, выполненные на основании данных [6] при $E_0/P = 132 \text{ В/см} \cdot \text{Тор}$ и $P = 760 \text{ Тор}$ в предположении одноэлектронного инициирования, когда $\alpha_T x_{\text{кр}} \approx \ln N_e^{(\text{кр})}$, дают слишком малую величину усиления поля ($\mu_p \approx 1,65$) за время развития лавины. Однако согласно изложенному выше, $N_e(0) \approx \frac{S}{a^2} \sim \frac{\pi r_{\text{л}}^2}{a^2} \approx 2 \cdot 10^4 \gg 1$. Тогда $\alpha_T x_{\text{кр}} \approx$

$\approx \ln \frac{N_e^{(\text{кр})}}{N_e(0)} \approx 4 \ln 10 < \ln N_e^{(\text{кр})} \approx 8 \ln 10$ и $\mu_p \approx 8^*$. Таким образом, поле

* Заметим, что $N_e(0)$ растет, а $x_{\text{кр}}$ уменьшается самосогласованно с увеличением поля положительного пространственного заряда. Следует также отметить, что плотность пространственного заряда ионов больше, чем электронов, из-за неподвижности первых, и дипольное приближение дает заниженную величину μ_p .

на поверхности катода под лавиной за время развития последней возрастает почти на порядок, эмиссионная поверхность существенно увеличивается, автоэлектронная эмиссия становится интенсивнее, т. е. создаются условия для дальнейшего увеличения плотности и размеров положительного пространственного заряда вследствие ионизации газа потоком эмиссионных электронов, усиливающимся самосогласованно вместе с полем.

Следует подчеркнуть, что хотя $N_e(0) \gg 1$, тем не менее речь шла не об одновременном развитии большого числа лавин [7], а об убыстрении развития одной лавины эмиссией большого числа первичных электронов $N_e(0)$.

Разумеется, микрорельеф поверхности катода неоднороден, а работа выхода отдельных ее участков может сильно отличаться от средней. Поэтому эмиссия первичных электронов $N_e(0)$ неоднородна в пространстве и времени, и первый автоэлектрон, снимающий статистическое запаздывание, появляется в газе вблизи небольшой группы микровыступов или даже у одного из них, достаточно вытянутого, где реализуется наибольшая напряженность поля при минимальной φ . Плотность пространственного заряда ионов оказывается на его оси больше, чем на периферии не только из-за диффузии электронов, ионизирующих газ, но и вследствие того, что плотность $N_e(0)$ выше возле места первых актов ионизации и самосогласованно растет вместе с полем пространственного заряда ионов. По этой причине величина ρ_p на оси пространственного заряда оказывается выше средней, чем, по-видимому, можно объяснить локализацию эмиссионного тока на малом пятне $S_0 \sim 10^{-6} \text{ см}^2$ [3], хотя электронные лавины за время $t \sim 1 \text{ нс}$ стартуют со всей поверхности катода $S_K \sim 1 \text{ см}^2$ [1].

4. Самосогласованное развитие положительного пространственного заряда и автоэлектронной эмиссии в течение некоторого времени $\tau \sim 1 \text{ нс}$ приводит к достижению на катоде локального поля, величину которого можно оценить, допуская, что в области плазмы $x_p \sim \sqrt{S_0}$, вблизи эмиссионных пятен реализовано локальное термодинамическое равновесие электронов с температурой T_e порядка средней энергии эмиссионных автоэлектронов $T_e \sim 5 \text{ эВ}$ [4], а ионы неподвижны. Вне области x_p газ нейтрален. К газовому промежутку $d \approx 1 \text{ см}$ [1] приложена разность потенциалов $U = E_0 d$. Тогда из уравнения Пуассона для потенциала поля φ ,

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \begin{cases} -\frac{e}{\epsilon_0} \left[Zn_i - n_{e0} \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \right], & x \in [0, x_p]; \\ 0 & x \in [x_p, d], \end{cases} \quad (13)$$

полагая на катоде $\varphi(0) = 0$, на аноде $\varphi(d) = U$ и «сшивая» φ и $\frac{d\varphi}{dx}$ на границе плазмы и газа, получим для напряженности поля на катоде

$$E(0) = -\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = E_D \left\{ 2 \left[1 - \exp\left(\frac{e\varphi(x_p)}{T_e}\right) + \frac{Zn_i}{n_{e0}} \frac{e\varphi(x_p)}{T_e} \right] + \left[\frac{U - \varphi(x_p)}{d - x_p} \right]^2 E_D^{-2} \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где $n_{e0} \approx \frac{j_{кр}}{ev_{T_e}} \approx 0,7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ — плотность эмиссионных электронов,

$v_{T_e} = \sqrt{T_e/m}$, $Zn_i = i \alpha_d n_g$, i — степень ионизации и α_d — степень диссоциации молекулярного газа с плотностью n_g ,

$$E_D = \sqrt{\frac{n_{e0} T_e}{\epsilon_0}} \sim \sqrt{\frac{m^{1/2}}{e \epsilon_0} j_{кр} T_e^{1/2}} \approx 2.5 \cdot 10^7 \text{ В/см.} \quad (15)$$

Первый интеграл уравнений типа (13) приведен, например, в [13].

Так как внутри плазмы и на ее границе с газом поле относительно мало, то вся разность потенциалов, приложенная к ней, падает на границе с металлом на расстояниях порядка нескольких дебаевских радиусов

$d_{pe} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_{e0}}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}$, и в силу квазинейтральности плазмы

из (13) следует $\frac{e \varphi(x_p)}{T_e} \approx \ln \frac{Zn_i}{n_{e0}}$. Тогда, пренебрегая под корнем вторым членом, получим из (14)

$$E(0) \approx E_D \sqrt{2 \left[1 + \frac{Zn_i}{n_{e0}} \left(\ln \frac{Zn_i}{n_{e0}} - 1 \right) \right]}. \quad (16)$$

Согласно (16) $E(0)$ уменьшается при уменьшении Zn_i в соответствии с экспериментальными данными [3]: запаздывание токов проводимости увеличивается, а их амплитуда уменьшается при понижении давления. Полагая для воздуха [1, 3] нормальной плотности при $T_e = 5 \text{ эВ}$ $\alpha_d = 2$, $i = 1.5$ [14], находим из (16) $E(0) \approx 10^7 \text{ В/см}$, что ниже величины 10^8 В/см , необходимой для протекания токов критической плотности. Занижение $E(0)$ могло произойти по следующим причинам. Во-первых, плотность среды вблизи эмиссионного пятна определяется не только плотностью газа в объеме, но и сублимацией адсорбированных газов и паров, а также атомов металла с поверхности катода. Например, при взрыве только одного микровыступа размером $a \sim 1 \text{ мк}$ в промежутке поступает порядка $\sim 6 \cdot 10^{10}$ атомов металла, что равно количеству атомов газа в объеме $S_3^{3/2}$ при атмосферном давлении. Любопытно, что $S_3^{1/2} \approx v \tau_j$, где $v = 2 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ — скорость разлета паров металла в вакуум [15]. Во-вторых, T_e может превышать среднюю энергию эмиссионных электронов [1]; $E(0) = 10^8 \text{ В/см}$ получается из (15), (16), если $T_e \approx 25 \text{ эВ}$, когда $i = 5$ [14]. В связи с этим заметим, что $E_0 \sqrt{S_3} \approx 100 \text{ В}$. В-третьих, (13) является одномерным уравнением, не учитывающим поперечную диффузию электронов. Не учтена также группировка ионов в области эмиссионного пятна. В действительности плотность всех компонентов, составляющих плазму — ионов, электронов и нейтральных атомов, — уменьшается в сторону анода.

Таким образом, возрастание напряженности электрического поля в течение 1 нс до критического значения 10^8 В/см за счет пространственного заряда ионов представляется реальным. В дальнейшем предполагается количественное рассмотрение процесса усиления локального поля на катоде.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, Л. В. Тарасова, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 637 (1977).
- 2 Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, А. Ф. Шубин, Изв. вузов — Физика, № 4, 147 (1970).
- 3 Л. П. Бабич, И. А. Березин, Т. В. Лойко, М. Д. Тарасов, Л. В. Тарасова, Р. С. Чикина, ЖТФ, 47, 195 (1977).

4. R. H. Good, E. W. Müller, Field Emission, Handbuch der Physik, bd. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1956.
5. Г. Рёттер, Электронные лавины и пробой в газах, изд. Мир, М., 1968.
6. В. В. Кремнев, Г. А. Месяц, Ю. Б. Янкелевич, Изв. вузов — Физика, № 2, 81 (1970).
7. Г. А. Месяц, Ю. И. Бычков, В. В. Кремнев, УФН, 107, 201 (1972).
8. И. Н. Сливков, Электроизоляция и разряд в вакууме, Атомиздат, М., 1972.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
10. В. С. Фоменко, И. А. Подчерняева, Эмиссионные свойства веществ и материалов, Атомиздат, М., 1975.
11. Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов, Теория искры, Атомиздат, М., 1975.
12. H. Schlumbohm, Zs. Phys., 184, 492 (1965).
13. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1976.
14. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. Наука, М., 1966.
15. С. П. Бугаев, Е. А. Литвинов, Г. А. Месяц, Д. И. Проскуровский, УФН, 115, 101 (1975).

Поступила в редакцию
9 января 1978 г.

ON THE PROBLEM OF THE FIELD AMPLIFICATION IN NEAR-CATHODE REGION OF NANOSECOND DISCHARGES IN DENSE GASES

L. P. Babich, T. V. Loyko, B. N. Shamraev

The problem of the electric field amplification in the region of the cathode emission spots for nanosecond discharges in dense gases is qualitatively considered. The possibility is shown for the field strength to increase from the $\sim 10^5$ to the value $\sim 10^8$ V/cm which provides emission currents of the critical density.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 519.217

**О ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ
РАЗРЫВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ**

А. А. Дубков, А. А. Мальцев

1. Целый ряд задач в теории марковских случайных процессов сводится к вычислению производящей функции моментов аддитивного функционала [1-3].

Для произвольного марковского процесса $x(t)$ она определяется как

$$R_\lambda(x_0, t_0 | x, t) = W(x_0, t_0 | x, t) \times \langle \exp \{-\lambda \int_{t_0}^t \Phi(x(s), s) ds\} | x(t_0) = x_0, x(t) = x \rangle, \tag{1}$$

где $W(x_0, t_0 | x, t)$ — плотность вероятности переходов, $\Phi(x(s), s)$ — произвольная интегрируемая функция. Можно показать (см., например, [1]), что производящая функция моментов удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial t} = [\hat{L}(x, t) - \lambda \Phi(x, t)] R_\lambda \tag{2}$$

с граничным условием

$$R_{\lambda=0}(x_0, t_0 | x, t) = W(x_0, t_0 | x, t).$$

Здесь $\hat{L}(x, t)$ — кинетический оператор марковского процесса $x(t)$.

Если $\Phi(x, t) \equiv \Phi(x)$ и процесс $x(t)$ — однородный во времени $\hat{L}(x, t) = \hat{L}(x)$, то функция R_λ зависит лишь от разности $\tau = t - t_0$:

$$R_\lambda(x_0, t_0 | x, t) = R_\lambda(x_0 | x, \tau),$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial R_\lambda}{\partial \tau} = [\hat{L}(x) - \lambda \Phi(x)] R_\lambda, \tag{3}$$

причем $R_\lambda(x_0 | x, 0) = W(x_0 | x, 0) = \delta(x - x_0)$.

Уравнение (3) (или соответствующее ему интегральное уравнение [1]) для произвольного марковского процесса точно решить не удастся. Мы рассмотрим его решение для чисто разрывных марковских процессов Колмогорова—Феллера [4]

2. От уравнения (3) с помощью преобразования Лапласа легко перейти к уравнению в обыкновенных производных.

$$[\hat{L}(x) - \lambda \Phi(x) - p] R_\lambda(x_0 | x, p) = -\delta(x - x_0). \tag{4}$$

Для чисто разрывных марковских процессов кинетический оператор $\hat{L}(x)$ является интегральным [4], и уравнение (4) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(y) Q(y | x) R_\lambda(x_0 | y, p) dy - [\lambda \Phi(x) + p + \nu(x)] R_\lambda(x_0 | x, p) = -\delta(x - x_0). \tag{5}$$

Здесь $Q(y | x)$ — плотность вероятности перехода из состояния y в состояние x при условии, что происходит скачок; $\nu(x)$ — средняя частота перескоков.

Пусть $x(t)$ является обобщенным телеграфным сигналом, который в случайные моменты времени скачком меняет свои значения на статистически независимые. При этом число перескоков в интервале $[0, t]$ предполагается распределенным по закону Пуассона со средней частотой $\nu(x) = \nu = \text{const}$, а принимаемые значения распределены непрерывно с плотностью вероятности $W(x)$. Плотность вероятности переходов для такого сигнала имеет вид

$$W(x_0 | x, \tau) = e^{-\nu\tau} \delta(x - x_0) + (1 - e^{-\nu\tau})W(x),$$

а условная плотность вероятности $Q(y | x)$ равна

$$Q(y | x) = W(x).$$

В этом случае уравнение (5) принимает довольно простой вид:

$$\nu W(x)\theta(x_0, p) - [\lambda\Phi(x) + p + \nu]R_\lambda = -\delta(x - x_0), \quad (6)$$

где

$$\theta(x_0, p) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(x_0 | y, p) dy.$$

Выражая $R_\lambda(x_0 | x, p)$ из (6) и интегрируя по x , находим

$$\theta(x_0, p) = \frac{1}{[p + \nu + \lambda\Phi(x_0)][1 - \nu k_\lambda(p)]}, \quad (7)$$

где

$$k_\lambda(p) = \left\langle \frac{1}{p + \nu + \lambda\Phi(x)} \right\rangle.$$

Подставив (7) в (6), получим

$$R_\lambda(x_0 | x, p) = \frac{\delta(x - x_0)}{p + \nu + \lambda\Phi(x_0)} + \frac{\nu W(x)}{[p + \nu + \lambda\Phi(x)][p + \nu + \lambda\Phi(x_0)][1 - \nu k_\lambda(p)]}. \quad (8)$$

Очевидно, что выражение (8) в принципе решает поставленную задачу. Однако аналитическое проведение обратного преобразования Лапласа из-за сложного вида функции $k_\lambda(p)$ не всегда возможно.

3. Нетрудно показать, что для чисто разрывных марковских процессов, принимающих конечное число значений, исходное интегральное уравнение (5) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы имеет вид дробно-рациональной функции от p , и поэтому обратное преобразование Лапласа здесь легко выполняется.

Рассмотрим, например, обычный телеграфный сигнал, принимающий с одинаковой вероятностью всего два значения $\pm a$. Плотность вероятности переходов телеграфного сигнала имеет вид

$$W(x_0 | x, \tau) = e^{-\nu\tau} \text{ch } \nu\tau\delta(x - x_0) + e^{-\nu\tau} \text{sh } \nu\tau\delta(x + x_0), \quad (9)$$

а условная плотность вероятности $Q(y | x)$ равна*

$$Q(y | x) = \delta(y + x).$$

В результате линейное интегральное уравнение (5) переходит в систему двух алгебраических уравнений для функций $R_\lambda^+ = R_\lambda(x_0 | x, p)$, $R_\lambda^- = R_\lambda(x_0 | -x, p)$:

$$[p + \nu + \lambda\Phi(x)]R_\lambda^+ - \nu R_\lambda^- = \delta(x - x_0), \quad -\nu R_\lambda^+ + [p + \nu + \lambda\Phi(-x)]R_\lambda^- = \delta(x + x_0). \quad (10)$$

Положим далее без ограничения общности, что $\Phi(x) = x^{**}$. Решая систему (10) и выполняя обратное преобразование Лапласа, имеем***

* Вероятность принять противоположное значение при условии, что происходит скачок, равна единице.

** Любое нелинейное преобразование телеграфного сигнала даст опять телеграфный сигнал с измененными значениями, а это без труда учитывается непосредственно в (1).

*** Можно показать, что в данном случае производящая функция $R_\lambda(x_0 | x, \tau)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка (по τ), совпадающему по виду при $\lambda = \nu/i$ с полученным в [5] уравнением для характеристической функции от интеграла телеграфного процесса. Заметим, что В. И. Клячкиным рассматривались и более сложные средние от телеграфных сигналов.

$$R_\lambda(x_0 | x, \tau) = e^{-\nu\tau} \left\{ \left[\operatorname{ch} \mu\tau - \frac{\lambda x_0}{\mu} \operatorname{sh} \mu\tau \right] \delta(x - x_0) + \frac{\nu}{\mu} \operatorname{sh} \mu\tau \delta(x + x_0) \right\}, \quad (11)$$

где $\mu = \sqrt{\nu^2 + \lambda^2 a^2}$.

С помощью полученного соотношения (11) легко, например, найти следующие средние, часто встречающиеся в практических задачах [2]:

$$\begin{aligned} \langle \exp \left\{ -\lambda \int_{t_0}^{t_0+\tau} x(s) ds \right\} | x(t_0) = x_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_\lambda(x_0 | x, \tau) dx = \\ &= e^{-\nu\tau} \left[\operatorname{ch} \mu\tau + \frac{\nu - \lambda x_0}{\mu} \operatorname{sh} \mu\tau \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\langle \exp \left\{ -\lambda \int_{t_0}^{t_0+\tau} x(s) ds \right\} \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} R_\lambda(x_0 | x, \tau) W(x_0) dx_0 dx = e^{-\nu\tau} \left[\operatorname{ch} \mu\tau + \frac{\nu}{\mu} \operatorname{sh} \mu\tau \right].$$

Заметим, что в формулах (11), (12) параметр x_0 может принимать лишь два значения $+a$ и $-a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория связи, перевод с англ. под ред. Б. Р. Левина, изд. Связь, М., 1972, стр. 89.
2. М. Лэкс, Флуктуации и когерентные явления, изд. Мир, М., 1974.
3. D. A. Darling and A. Siegel, IRE Trans., IT-3, № 3, 32 (1957).
4. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, изд. Наука, М., 1965.
5. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 562 (1977).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 июля 1977 г.

УДК 539.143.43

ЯДЕРНАЯ МАГНИТНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Б. Ф. Алексеев, А. И. Мамыкин

Впервые Редфилд [1] указал на то, что во вращающейся системе координат (ВСК) релаксация продольной и поперечной по отношению к эффективному в ВСК полю

$$H_{\text{эфф}} = \{ [(\omega - \omega_0) / \gamma]^2 + H_1^2 \}^{1/2} = (\Delta H^2 + H_1^2)^{1/2}$$

(обозначения общепринятые) компонент намагниченности осуществляется с временами T_{1p} и T_{2p} , отличающимися от идентичных времен T_1 и T_2 в лабораторной системе координат (ЛСК). В работах [2-6] проведен подробный квантостатистический расчет времен T_{1p} и T_{2p} (T_{2p} — только в [4]) для ряда моделей спин-решеточного взаимодействия и спинового движения. Для обширного класса блоховских систем возможно на основе феноменологических представлений установить строгую взаимосвязь между временами T_{1p} , T_{2p} и T_1 , T_2 . Несмотря на это соответствующие выражения приведены только для ряда частных ситуаций [7-9]. Ниже установлены соотношения между временами релаксации в ВСК и ЛСК блоховских спиновых систем в общем случае.

Времена затухания и частоту нутационного резонанса возможно найти из нестационарного решения уравнения Блоха, которое в ВСК и пространстве изображений имеет вид

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ I_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) + \omega_1^2 & \Delta\omega\left(p + \frac{1}{T_1}\right) & \Delta\omega\omega_1 \\ -\Delta\omega\left(p + \frac{1}{T_1}\right) & \left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) & \omega_1\left(p + \frac{1}{T_2}\right) \\ \Delta\omega\omega_1 & -\omega_1\left(p + \frac{1}{T_2}\right) & \left(p + \frac{1}{T_2}\right)^2 + \Delta\omega^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ I_{z0} + \frac{I_0}{pT_1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь p — оператор Лапласа,

$$\det A = \left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) + \Delta\omega^{*2} \left(p + \frac{1}{T^*}\right),$$

$$\Delta\omega^* = \Delta\omega(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \operatorname{tg} \theta = H_1/\Delta H, \quad (2)$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{1}{T_2} \frac{(T_2/T_1) + \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Для того, чтобы переходный процесс в спиновой системе был колебательным, детерминант (2) должен иметь комплексные корни, т. е. сводиться к виду

$$\det A = \left(p + \frac{1}{T_{1\rho}}\right) \left[\left(p + \frac{1}{T_{2\rho}}\right)^2 + \Omega^2 \right], \quad (3)$$

где Ω — частота нутаций.

Соответствие между временами релаксации в ВСК и ЛСК может быть найдено согласно (2) и (3) из выражений

$$\frac{1}{T_1} + \frac{2}{T_2} = \frac{1}{T_{1\rho}} + \frac{2}{T_{2\rho}},$$

$$\frac{1}{T_2^2} + \frac{2}{T_1 T_2} + \Delta\omega^{*2} = \frac{1}{T_{2\rho}^2} + \frac{2}{T_{1\rho} T_{2\rho}} + \Omega^2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{T_1 T_2^2} + \frac{\Delta\omega^{*2}}{T^*} = \frac{1}{T_{1\rho} T_{2\rho}^2} + \frac{\Omega^2}{T_{1\rho}}.$$

Совместное решение уравнений (4) позволяет найти выражения для $T_{1\rho}$, $T_{2\rho}$ и частоты нутаций Ω , которые при условии $\Omega > 2\pi/T_2$ (наблюдаемости нутационных колебаний) имеют вид

$$\frac{1}{T_{1\rho}} = \frac{1}{T_2} \frac{(T_2/T_1) + \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{T^*}; \quad (5)$$

$$\frac{1}{T_{2\rho}} = \frac{1}{T_2} \left[\frac{1 + 0,5(1 + T_2/T_1) \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right]; \quad (6)$$

$$\Omega^2 = \Delta\omega^{*2} + \left(\frac{T_{1\rho}}{T_1 T_2^2} - \frac{1}{T_{2\rho}^2} \right). \quad (7)$$

Заметим, что в случае $\gamma H_{\text{эфф}} > \frac{2\pi}{T_2}$ частота нутаций $\Omega = \gamma H_{\text{эфф}}$.

Выражения (5) и (6) позволяют проследить зависимость времен $T_{1\rho}$ и $T_{2\rho}$ от угла наклона θ эффективного поля в ВСК к оси z (статическому полю H_0 в ЛСК). При $\theta \rightarrow 0$ ($H_{\text{эфф}} \parallel z$) $T_{1\rho} \rightarrow T_1$; $T_{2\rho} \rightarrow T_2$. При $\theta \rightarrow \pi/2$ ($H_{\text{эфф}} \perp z$) имеем

$$\frac{1}{T_{1\rho}} \rightarrow \frac{1}{T_2}, \quad \frac{1}{T_{2\rho}} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right). \quad (8)$$

Оба эти результата совпадают с данными [8, 9].

На рис. 1 приведена зависимость времен $T_{1\rho}$, $T_{2\rho}$ от угла θ для ряда значений T_1/T_2 . Заметим, что при «магическом угле» $\theta_m = \arctg \sqrt{2} = 54^\circ 44'$ времена $T_{1\rho}$ и $T_{2\rho}$ становятся равными независимо от отношения T_1/T_2 :

$$\frac{1}{T_{1p}} = \frac{1}{T_{2p}} = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{2}{T_2} \right). \quad (9)$$

Вывод о равенстве времен T_{1p} и T_{2p} при применимости блоховских уравнений и $\theta = \theta_m$ следует и из квантовомеханического расчета Блехарски [4].

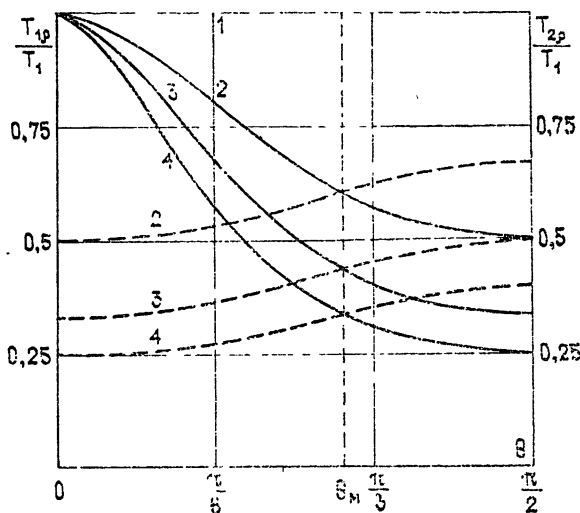


Рис. 1. Зависимость T_{1p} и T_{2p} (пунктир) от θ — угла наклона эффективного поля в ВСК к оси z при $T_1/T_2 = 1$ (1); 2 (2); 3 (3); 4 (4).

Из (6) и рис. 1 видно, что для $T_1 > T_2$ при увеличении угла θ всегда $T_{2p} > T_{2}$. Так, при $T_1 \gg T_2$, что типично для вязких жидкостей, и «магическом угле» имеем $T_{2p} \approx 1,5 T_2$. Нутационные колебания (если они возбуждены) являются экспоненциально затухающими с характерным временем T_{2p} ; их фурье-свертка представляет лоренцеву функцию. Увеличение времени T_{2p} по сравнению с T_2 означает, таким образом, сужение линии нутационного резонанса. Этот эффект может оказаться полезным при решении отдельных задач ЯМР высокого разрешения в жидкостях.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Redfield, Phys. Rev., **98**, 1787 (1955).
2. D. C. Look and I. J. Lowe, J. Chem. Phys., **44**, 2995 (1966).
3. G. P. Jones, Phys. Rev., **148**, 332 (1966).
4. J. S. Blicharski, Acta Phys. Polonica, **A41**, 223 (1972).
5. D. C. Ailion and C. P. Slichter, Phys. Rev., **137**, A235 (1965).
6. D. Wolf and P. Yung, Phys. Rev., **12**, 3596 (1975).
7. H. C. Torrey, Phys. Rev., **76**, 1059 (1949).
8. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
9. Т. Фаррар, Э. Беккер, Импульсная и фурье-спектроскопия ЯМР, изд. Мир, М., 1973.

Ленинградский электротехнический институт
имени В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
1 февраля 1978 г.

УДК 538.574 : 530.18

О МЕТОДЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ

А. А. Новиков

Большое число задач современной радиофизики приводит к рассмотрению волн в нелинейных средах. Цель настоящей заметки — обратить внимание на то, что применение для исследования волновых систем метода нормальных форм Пуанкаре [1, 2], состоящего в поэтапном уничтожении загромождающих задачу маловажных слагаемых в уравнениях с помощью замен переменных, позволяет не только добиться

существенного упрощения выкладок за счет решения задачи по частям адекватными для каждой из них методами, но и получить важную физическую информацию.

Рассмотрим в качестве примера волновые процессы в многоэлементных квазираспределенных автогенераторах с эквивалентной схемой элементарной ячейки, изображенной на рис. 1. Уравнения системы имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + Z(p)J = 0; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} + Y(p)U + I = 0; \quad (1б)$$

$$b(p)U + c(p)I = v; \quad (1в)$$

$$d(p)U + h(p)I = i_d(p, v). \quad (1г)$$

Здесь $Z(p)$, $Y(p)$ — эквивалентные погонные импеданс и проводимость линии в операторной форме, b , c , d , h ($bh - cd = 1$) — параметры четырехполюсника связи $S(p)$, в который удобно включить и линейные элементы эквивалентной схемы диода, $i_d(p, v)$ — мгновенная ВАХ активного элемента, $p = \frac{\partial}{\partial t}$.

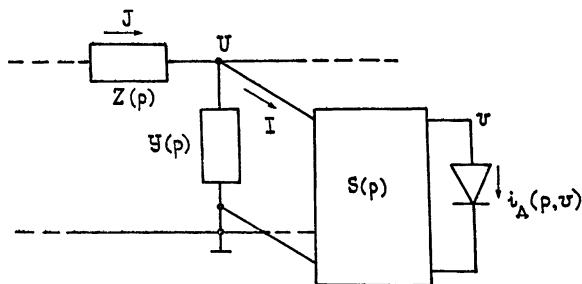


Рис. 1.

При решении задачи естественно выделить три части и рассматривать отдельно. 1) линейные эффекты, приводящие к формированию малосигнальных элементарных возбуждений, 2) нелинейные взаимодействия возмущений на каждой из дисперсионных ветвей, приводящие при слабой дисперсии к существенной несинусоидальности волн, и 3) взаимодействие нелинейных волн, соответствующих разным ветвям. Эти подзадачи будем решать последовательно, каждую своим методом, оформляя результат в виде замены переменных, позволяющей исключить в исходных уравнениях соответствующие слагаемые, и тем самым выделяя следующую по сложности подзадачу в «чистом виде».

Упрощение линейной части достигается переходом к уравнениям связанных нормальных волн [3], которые в нашем случае имеют вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \pm ik(p) \right] v_{1,2}(x, t) = \mp \frac{p}{2h^2} i_d(p, v_1 + v_2), \quad (2)$$

где $\pm k(p)$ — операторные постоянные распространения встречных волн с напряжением $v_{1,2}$ — есть решения дисперсионного уравнения системы

$$k^2 + Z(p)(Y(p) - d(p)/h(p)) = 0, \quad (3)$$

$\rho = Z(p)/ik(p)$ — волновое сопротивление линии.

Уравнения (2) вместе с легко получаемыми из (1a)–(1в) линейными операторами, выражающими все токи и напряжения в системе через v , эквивалентны системе (1). Кроме максимальной упрощенности линейной части и универсальности вида их преимущество связано с адекватностью содержащихся в них физических характеристик системы (закона дисперсии, волнового сопротивления и т. п.) волновому характеру процессов. Это позволяет путем подходящих аппроксимаций существенно упростить уравнения с сохранением их качественных особенностей (см., например, [4]) и синтезировать непосредственно уравнения связанных волн типа (2) на базе данных эксперимента или численного счета, минуя запись исходных уравнений в форме (1).

Выделение эффектов, отвечающих за формирование нелинейных волн, осуществляется «занулением» амплитуд «чужих» волн в правых частях (2). При этом система (2) распадается на несвязанные нелинейные уравнения одноволновых приближений

типа КДВ, Бюргерса и т. п. для каждой из ветвей со слабой дисперсией. Для получения одноволновых уравнений в каждом конкретном случае достаточно подставить в (2) выражения для постоянной распространения и волнового сопротивления линии, коэффициента преобразования тока схемой связи и ВАХ диода. Эти уравнения решаются обычными способами [5, 6].

Третья часть задачи — исследование взаимодействия нелинейных волн, соответствующих различным дисперсионным ветвям, — в общем случае наталкивается на серьезные трудности и допускает достаточно эффективное упрощение только в приближении фиксированной формы профилей волн [7]. Как показано в [8], для реализующегося в рассматриваемой системе взаимодействия встречных волн одинаковой формы это предположение справедливо, и решение системы (2) можно искать в виде

$$v_{1,2} = A_{1,2}(x, \tau) f_{1,2} [t \mp x/V + \varphi_{1,2}(x, \tau)], \quad (4)$$

где $f_{1,2}(t \mp x/V + \varphi_{1,2}^0)$ — периодические стационарные решения одноволновых уравнений, $\chi = \mu x$, $\tau = \mu t$, $\mu \ll 1$, μ — параметр, характеризующий взаимодействие. Подставляя (4) в (2) и отбрасывая слагаемые с μ в степени выше первой, после усреднения по $\theta_{1,2} = t \mp x/V + \varphi_{1,2}$ получим

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial \chi} \pm \frac{1}{V} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \tau} = \langle f_{1,2}^2 \rangle^{-1} \left\langle f_{1,2} \left[\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) i \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, A_1 f_1 + A_2 f_2 \right\} - A_{1,2} \sigma \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) i \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, f_{1,2} \right\} \right] \right\rangle, \quad (5)$$

$$A_{1,2} \left(\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial \chi} \pm \frac{1}{V} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial \tau} \right) = \left\langle \left(\frac{df_{1,2}}{d\theta} \right)^2 \right\rangle^{-1} \times \\ \times \left\langle \frac{df_{1,2}}{d\theta} \left[\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) i \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, A_1 f_1 + A_2 f_2 \right\} - A_{1,2} \sigma \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) i \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, f_{1,2} \right\} \right] \right\rangle,$$

где $\sigma = \rho/2h^2$, символ $\langle \dots \rangle$ означает $\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \dots d\theta_1 d\theta_2$.

В результате преобразований получились уравнения, содержащие в «чистом виде» наиболее глубокие эффекты взаимодействия нелинейных волн, а все остальные свойства системы отражены в формулах замен переменных. По виду полученные уравнения отличаются от нормальной формы уравнений в обыкновенных производных [1] лишь заменой производных по времени на волновые операторы.

Уравнения (5) обобщают результаты работы [9] на случай произвольной (в том числе динамической) ВАХ диодов и произвольной схемы их подключения. Для получения уравнений взаимодействия нелинейных волн в каждом конкретном случае достаточно вычислить стоящие в правых частях средние величины.

Предоставляемая методом нормальных форм возможность поэтапного решения задачи с применением методов возрастающей сложности особенно ценна при исследовании сложных систем (океан, многоэлементные устройства СВЧ и т. п.), когда возникает необходимость проведения громоздких выкладок, трудно обозримых целиком.

В заключение автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу за внимание к работе и обсуждение результатов и Е. И. Пелиновскому за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Брюно, Труды ММО, 25, 119 (1971); 26, 199 (1972).
2. В. М. Старжинский, Прикладные методы нелинейных колебаний, М., 1977.
3. А. А. Новиков, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 321 (1976).
4. А. А. Новиков, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 179 (1977).
5. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, № 2 (1971).
6. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
7. Г. М. Заславский, УФН, 111, 395 (1973).
8. М. И. Рабинович, Л. Е. Штильман, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 11, 1680 (1973).
9. М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 2, 214 (1967).

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ

М. И. Калинин

1. В задачах взаимодействия света с веществом бывает важно знать поведение молекулярной системы под действием последовательности импульсов когерентного резонансного [1] излучения, которые следуют друг за другом, вообще говоря, в случайные моменты времени. Если поле излучения является линейно-поляризованным, а размеры молекулярной системы малы, так что применимо электродипольное приближение, то уравнение Шредингера для молекулярной системы можно записать в виде

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = i\omega_j z_j(t) + \theta(t) \sum_{k=1}^N B_{jk} z_k(t) \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где N — число уровней молекулярной системы, удовлетворяющих условиям резонанса [1]. Величины $i\omega_j \delta_{jk}$ и B_{jk} образуют постоянные и неслучайные матрицы A и B соответственно. Случайный процесс $\theta(t)$ (поле излучения в месте локализации молекулярной системы) представляется в виде случайной стационарной последовательности импульсов

$$\theta(t) = \sum_j \theta_0(t - \tau_j). \quad (2)$$

Статистические свойства этой последовательности задаются, согласно [2], функциями орреляции $g_1(\tau_1)$, $g_2(\tau_1, \tau_2)$, ... между «центрами» τ_1, τ_2, \dots импульсов $\theta_0(t)$.

Обобщим задачу, отказываясь от условия антиэрмитовости матрицы B и полагая импульс $\theta_0(t)$ произвольным. Исследуется второй статистический момент $\langle \hat{Z}(t) \rangle \equiv \langle z(t) \times z^*(t) \rangle$ динамической системы (для молекулярной системы — средняя матрица плотности) и, в частности, диагональные элементы $\langle \hat{Z}_{jj}(t) \rangle$ (средние населенности уровней).

В [3] получено кинетическое уравнение для $\langle \hat{Z}_{jj}(t) \rangle$ при действии на динамическую систему (1) пуассоновской последовательности импульсов (2). Эти результаты обобщаются здесь на случай произвольно коррелированных импульсов.

2. В работе [3] введены в рассмотрение операторы $T(t, t')$ и $\hat{T}(t, t')$, определяющие поведение вектора $z(t)$ и бивектора $\hat{Z}(t)$ соответственно при действии на динамическую систему одного неслучайного импульса $\theta_0(t)$ с центром в момент времени $\tau = 0$. Здесь нам потребуются аналогичные операторы $T^{(1, \dots, n)}(t, t')$ и $\hat{T}^{(1, \dots, n)}(t, t')$, определяющие поведение вектора $z(t)$ и бивектора $\hat{Z}(t)$ при действии на систему последовательности n импульсов $\theta_n(t) = \theta_0(t - \tau_1) + \dots + \theta_0(t - \tau_n)$ с центрами в неслучайные моменты времени τ_1, \dots, τ_n . Эти операторы удовлетворяют уравнениям вида (7) и (9) из [3], если заменить в них один импульс $\theta_0(t)$ на группу $\theta_n(t)$. Оператор $T^{(1, \dots, n)}(t, t')$ назовем, как и в [3], оператором параметрического возбуждения динамической системы (1) последовательностью n импульсов.

Вводим в рассмотрение также амплитуду параметрического возбуждения

$$S^{(1, \dots, n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \exp(-At') T^{(1, \dots, n)}(t', t'') \exp(At'')$$

и аналогичную величину $\hat{S}^{(1, \dots, n)}$ для $\hat{T}^{(1, \dots, n)}(t, t')$.

Далее нам потребуются следующие свойства (3)—(5):

$$\hat{T}^{(1, \dots, n)}(t, t') = \hat{T}^{(1+\tau_1, \dots, n+\tau)}(t + \tau, t' + \tau), \quad (3)$$

и такое же свойство для $T^{(1, \dots, n)}(t, t')$:

$$\hat{S}^{(1, \dots, n)} = S^{(1, \dots, n)} \times I + I \times S^{(1, \dots, n)*} + S^{(1, \dots, n)} \times S^{(1, \dots, n)*}, \quad (4)$$

где I — единичная $N \times N$ матрица. Если матрица B антиэрмитова, то

$$2\text{Re } S_{jj}^{(1, \dots, n)} = - \sum_{k=1}^N \left| S_{jk}^{(1, \dots, n)} \right|^2 = - \sum_{k=1}^N \left| S_{kj}^{(1, \dots, n)} \right|^2. \quad (5)$$

Свойство (4) аналогично интегральному соотношению (11) из [3], а (5) есть условие унитарности, аналогичное (22) из [3].

3. В [4] получено усредненное по времени уравнение для второго статистического момента $\hat{Z}(t)$ системы (1) с произвольными стационарными флуктуациями $\theta(t)$.

Согласно (14) и (15) из [3] для диагональных элементов $\hat{Z}_{jj}(t)$ получается, при условии невырожденности ($\omega_j \neq \omega_k$, если $j \neq k$) системы (1), замкнутая система уравнений

$$\frac{d}{dt} \bar{Z}_{jj}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{C}_{jjkk} \bar{Z}_{kk}(t), \quad (6)$$

где

$$\hat{C}_{jjkk} = \int_0^\infty \hat{M}_{jjkk}(t, 0) dt, \quad (7)$$

$\hat{M}(t, t')$ — массовый оператор уравнения Дайсона в одногрупповом приближении [5] для второго статистического момента. В случае импульсных флуктуаций $\theta(t)$ вида (2) имеем согласно [6]

$$\hat{M}(t, t') = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 \dots d\tau_\nu g_\nu(\tau_1, \dots, \tau_\nu) \hat{T}_{gr}^{(1, \dots, \nu)}(t, t'). \quad (8)$$

Величины $\hat{T}_{gr}^{(1, \dots, \nu)}(t, t')$ определяются через операторы $\hat{T}^{(1, \dots, n)}(t, t')$ выражениями (см. (14) из [6])

$$\hat{T}_{gr}^{(1, \dots, \nu)}(t, t') = \sum_{n=1}^\nu \sum_{1 < l_1 < \dots < l_n < \nu} (-1)^{\nu-n} \hat{T}^{(l_1, \dots, l_n)}(t, t') \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Это соотношение позволяет записать массовый оператор $\hat{M}(t, t')$ в виде

$$\hat{M}(t, t') = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 \dots d\tau_n \tilde{g}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \hat{T}^{(1, \dots, n)}(t, t'), \quad (10)$$

где

$$\tilde{g}_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!} \int_{-\infty}^\infty d\eta_1 \dots d\eta_m g_{n+m}(\tau_1, \dots, \tau_n, \eta_1, \dots, \eta_m). \quad (11)$$

Подставляя (10) в (7) и используя свойства (3), (4) и стационарность процесса (2), получаем выражения для \hat{C}_{jjkk} в виде

$$\begin{aligned} \hat{C}_{jjkk} = & \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 \dots d\tau_n \tilde{g}_{n+1}(0, \tau_1, \dots, \tau_n) \times \\ & \times [2\text{Re } S_{jj}^{(0, 1, \dots, n)} \delta_{jk} + |S_{jk}^{(0, 1, \dots, n)}|^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения (12) позволяют записать систему уравнений (6) в виде кинетического уравнения

$$\frac{d}{dt} \bar{Z}_{jj}(t) = \sum_{k=1}^N [W_{jk} \bar{Z}_{kk}(t) - W_{kj} \bar{Z}_{jj}(t)] + \gamma_j \bar{Z}_{jj}(t) \quad (j=1, 2, \dots, N). \quad (13)$$

Коэффициенты W_{jk} и γ_j равны

$$W_{jk} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^\infty d\tau_1 \dots d\tau_n \tilde{g}_{n+1}(0, \tau_1, \dots, \tau_n) |S_{jk}^{(0, 1, \dots, n)}|^2; \quad (14)$$

$$\gamma_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_n \tilde{g}_{n+1}(0, \tau_1, \dots, \tau_n) \times$$

$$\times \left[2\operatorname{Re} S_{jj}^{(0,1, \dots, n)} + \sum_{k=1}^N |S_{kj}^{(0,1, \dots, n)}|^2 \right]. \quad (15)$$

Если процесс $\theta(t)$ является пуассоновским, то результаты (13)—(15) переходят в соответствующие результаты работы [3]. Для взаимодействия излучения с веществом, в силу условия унитарности (5), все $\gamma_j \equiv 0$ и уравнение (13) описывает перераспределение населенностей с сохранением полной вероятности $\sum_{j=1}^N \bar{Z}_{jj}(t)$.

4. Оценки применимости кинетического уравнения (13) выводятся из оценок работы [4] с помощью формул, связывающих кумулянтные функции процесса $\theta(t)$ с функциями корреляции [2]. Для основного малого параметра $2t_0/t_M$ (см. [4]) в общем случае получается оценка в виде бесконечного ряда. Для краткости приведем здесь оценки для случая парно-коррелированных импульсов (2):

$$2t_M \leq n_1 \alpha e^\alpha + n_2 \alpha^2 e^{2\alpha}, \quad (16)$$

$$2t_0/t_M \leq 2n_1 \tau_0 \alpha^2 e^\alpha + n_2 \alpha^2 [2\tau_0(\alpha + 1) + \vartheta_2] e^{2\alpha},$$

где длительность импульса τ_0 и интенсивность возмущения α одним импульсом определены в [3]. Величины n_j и ϑ_j , характеризующие величину и масштаб корреляции между импульсами, равны

$$n_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_{j-1} |g_j(0, \tau_1, \dots, \tau_{j-1})|, \quad (17)$$

$$\vartheta_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{j-2} |\tau| |g_j(0, \tau, \tau_1, \dots, \tau_{j-2})| / n_j.$$

Если флуктуации (2) являются пуассоновскими, то результаты (16), (17) переходят в соответствующие оценки работы [3].

Таким же образом, как и для динамических систем, можно учесть корреляции между рассеивателями в задаче о распространении волн в параболическом приближении в среде со случайно-распределенными рассеивателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронополо, Е. И. Якубович, Резонансные взаимодействия света с веществом, изд. Наука, М., 1977.
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов радио, М., 1961.
3. М. И. Калинин, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 10, 1516 (1977)
4. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 373 (1977)
5. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 7, 981 (1974).
6. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып 1(7), 401 (1967).

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
28 апреля 1978 г.

УДК 538.573

О РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

М. И. Калинин

Задачи взаимодействия излучения с веществом привлекают большое внимание в связи с развитием источников мощного когерентного излучения (лазеры, мазеры). При большой мощности излучения важную роль начинают играть многофотонные резонансные процессы [1, 2].

В данной работе рассматривается взаимодействие стохастического электромагнитного излучения с веществом. Используется метод, предложенный в [3], позволяющий учесть влияние резонансных процессов всех порядков.

На молекулярную (или атомную) систему, описываемую матрицей плотности $\rho(t)$, действует импульсное линейно-поляризованное электромагнитное поле

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = e \mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t - \tau_j),$$

где τ_j — «центры» импульсов на оси времени — предполагаются случайными и статистически независимыми, следующими друг за другом со средней плотностью n_1 . $\mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t)$ — неслучайный импульс когерентного излучения, e — вектор поляризации. Взаимодействие, как обычно [2], берется в электродипольном приближении

$$V(t) = -d\vec{\mathcal{E}}(0, t) = -(de) \mathcal{E}(0, t),$$

где d — дипольный момент молекулярной системы. Матрица плотности удовлетворяет уравнению Лиувилля—Неймана:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho], \quad H = H^0 + V(t). \quad (1)$$

Здесь H^0 — гамильтониан невозмущенной системы, имеющий спектр E_1, E_2, E_3, \dots , а [...] обозначает коммутатор. Отметим, что здесь рассматривается система без диссипации.

Предполагается, что каждый импульс содержит набор квазимонохроматических компонент

$$\mathcal{E}_0(0, t) = \theta_0(t) \sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \exp(i \Omega_{\alpha} t),$$

удовлетворяющих резонансным условиям (см. уравнение (**)) на стр. 11 из [2]) для системы N уровней, которые обозначим через E_1, E_2, \dots, E_N и будем называть резонансными. $\theta_0(t)$ — видеоимпульс, длительность которого τ_0 удовлетворяет условиям квазимонохроматичности $|\Omega_{\alpha} \tau_0| \gg 1$. В этом случае для описания молекулярной системы можно использовать N -уровневую модель, так как вынужденные переходы будут осуществляться только между резонансными уровнями (конечно, с учетом правил отбора). Уравнение Лиувилля—Неймана (1) сводится к системе N^2 уравнений:

$$\frac{d\rho_{mn}}{dt} = i(\omega_m - \omega_n) \rho_{mn} + \mathcal{E}(0, t) \sum_{k, l=1}^N \Lambda_{mnkl} \rho_{kl} \quad (m, n = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

$$\Lambda_{mnkl} = \frac{i}{\hbar} (d_{mk}e) \delta_{nl} - \frac{i}{\hbar} (d_{ln}e) \delta_{mk}, \quad \omega_n = -\frac{E_n}{\hbar}.$$

Здесь d_{mn} — матричные элементы дипольного момента.

Согласно [3] для средних населенностей уровней $w_n \equiv \langle \rho_{nn} \rangle$ при условии невырожденности можно записать кинетическое уравнение

$$\frac{dw_n}{dt} = \sum_{k=1}^N (W_{nk} w_k - W_{kn} w_n) \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

коэффициенты W_{nk} которого представляются в виде произведения средней плотности n_1 следования импульсов на вероятность перехода $|S_{nk}|^2$ с уровня E_k на уровень E_n под действием одного неслучайного импульса излучения

$$W_{nk} = n_1 |S_{nk}|^2 = W_{kn}. \quad (4)$$

Уравнение (3) описывает релаксацию молекулярной системы к равновесному распределению $w_n^0 = 1/N$. Коэффициенты W_{nk} определяют скорость перераспределения населенностей уровней. Отметим, что для недиагональных элементов матрицы плотности (например, лежащих выше главной диагонали) в этом случае также получается замкнутая система уравнений. Их коэффициенты будут также определяться средней плотностью следования импульсов и амплитудами вероятностей переходов.

Важным свойством кинетического уравнения (3) с коэффициентами (4) является то, что его можно применять для исследования взаимодействия мощного импульсного излучения с веществом при достаточно малой плотности n_1 (см. оценки в [3]), тогда как наиболее распространенное приближение Бурре [4] можно использовать только в случае излучения малой мощности.

Второй очень существенной особенностью полученного уравнения является возможность учета резонансных процессов всех порядков. Резонансы высших порядков учитываются при вычислении вероятностей переходов под действием одного импульса. Приближение же Бурре учитывает только основной (однофотонный) резонанс, что отмечалось еще в [5].

Рассмотрим простейший пример, когда на двухуровневую систему действует случайная последовательность прямоугольных импульсов монохроматического излучения

$$\mathcal{E}_0(0, t) = \mathcal{E} \theta_0(t) \cos \Omega t, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}^*, \quad \theta_0(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ 0 & (t < 0, t > \tau_0) \end{cases}, \quad (5)$$

удовлетворяющего условию точного резонанса второго порядка $2\Omega = \omega$. Частота ω соответствует переходу $E_1 \leftrightarrow E_2$. Вычисляя S_{12} , согласно [2], во втором порядке метода усреднения по времени, получим

$$W_{12} = n_1 \frac{|a|^2}{2b^2} (1 - \cos 2b \Omega \tau_0) \sim n_1, \quad (6)$$

где

$$a = 2i\mathcal{E}^2 (d_{12}e) \operatorname{Re} [(d_{11}e) - (d_{22}e)] / \hbar^2 \Omega^2,$$

$$b = 2\mathcal{E}^2 |d_{12}e|^2 \sqrt{\{\operatorname{Re} [(d_{11}e) - (d_{22}e)]\}^2 + \frac{16}{9} |d_{12}e|^2 / \hbar^2 \Omega^2}.$$

Если же при исследовании системы (2) исходить из приближения Бурре (см. (36) из [3]), то

$$W_{12} \approx n_1 \mathcal{E}^2 |d_{12}e| / 2\hbar \Omega^2 \left\{ \left[\frac{4}{3} - \cos \Omega \tau_0 - \frac{1}{3} \cos 3\Omega \tau_0 \right]^2 + \left[\sin \Omega \tau_0 + \frac{1}{3} \sin 3\Omega \tau_0 \right]^2 \right\} \ll n_1 \quad (7),$$

так как энергия взаимодействия много меньше энергии перехода. Согласно (7) система будет оставаться практически неизменной, тогда как (6) указывает на наличие довольно быстрой релаксации к равновесному распределению $w_1^0 = w_2^0 = 1/2$ вследствие двухфотонного резонансного взаимодействия импульса излучения с двухуровневой системой.

В заключение отметим, что если характерные времена диссипативных процессов сравнимы с временем релаксации, то их необходимо учитывать при исследовании взаимодействия излучения с веществом. Изложенный метод позволяет сделать это, включая, например, спонтанное и индуцированное излучение в динамическую систему, на которую действует внешнее стохастическое электромагнитное поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оптические и кинетические эффекты в сильном электромагнитном поле, изд. Штиница, Кишинев, 1974.
2. В. С. Бутылкин, А. В. Каплан, Ю. Г. Хронополо, Е. И. Якубович, Резонансные взаимодействия света с веществом, изд. Наука, М., 1977.
3. М. И. Калинин, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 10, 1516 (1977).
4. R. C. Vougeot, Canad. J. Phys., 43, № 4, 619 (1965).
5. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 202 (1976).

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
21 марта 1978 г.