

УДК 621.3.032.266

## ТРАЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОТЯЖЕННЫХ ВИНТОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С УЧЕТОМ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

*В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг*

Описан траекторный анализ интенсивных винтовых электронных пучков, базирующийся на методе вспомогательных источников. Исследован механизм возникновения разброса скоростей под действием сил пространственного заряда. Определена конфигурация электродов пушки, формирующей квазиламинарный винтовой пучок с существенно пониженным разбросом осцилляторных скоростей.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Увеличение разброса осцилляторных скоростей под влиянием сил объемного заряда является основным фактором, ограничивающим силу тока винтовых электронных пучков мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) [1]. В магнетронно-инжекторных пушках, которые преимущественно используются в МЦР, этот эффект становится заметным уже при токе порядка 0,1 лемгиуровского тока соответствующего диода [2]. Ослабление указанного фактора путем оптимизации геометрии электродов и распределения магнитного поля открывает возможности существенного увеличения полезного тока.

Сложность подобной оптимизации обусловлена неадиабатическим распределением поля объемного заряда, что делает неприменимой дрейфовую теорию пушек МЦР [3]. Поэтому необходимые детали механизма возникновения разброса скоростей под действием сил объемного заряда может дать только численный траекторный анализ. При выборе вычислительного алгоритма важное значение имеет возможность расчета протяженных пучков, в которых расстояние от катода до границы области формирования\* более чем на порядок превышает среднюю длину шага винтовой траектории. Подобные пучки реализуются, например, в следующих системах.

1) Пушки с большим отношением расстояния катод — анод к высоте первого максимума электронной траектории.

2) Системы с резко нарастающим осевым магнитным полем или большим углом наклона магнитного поля к поверхности катода.

3) Двухпотенциальные магнетронно-инжекторные пушки.

Использование в перечисленных случаях метода сеток [4] встречает определенные трудности. Например, в случае 1) снижение высоты 1-го максимума в  $n$  раз при заданном расстоянии катод — анод приводит к необходимости увеличения числа узлов разностной сетки в  $n^2$  раз, поскольку для сохранения точности число узлов на один виток должно поддерживаться постоянным. Вместе с тем, уже для режимов, близких

\*За область формирования принимается примыкающая к инжектору часть электронно-оптической системы, за пределами которой возмущения поперечного адиабатического инварианта  $J_{\perp} = v_{\perp}^2/B$  пренебрежимо малы.

к критическому, метод сеток по объему требуемой оперативной памяти находится на пределе возможностей ЭВМ типа М-220 и БЭСМ-6.

Более эффективными оказываются метод интегральных уравнений и особенно метод вспомогательных зарядов (источников) Овчарова и Вашковского [5], в котором искомое распределение плотности заряда на электродах аппроксимируется с помощью вспомогательных кольцевых зарядов, размещаемых за электродами. Существенная экономия машинного времени, требуемого при интегрировании уравнений движения, достигается введением прямоугольной сетки, покрывающей электронный пучок. В этом случае сначала вычисляется потенциал поверхностных и объемных зарядов в узлах сетки, а компоненты электрического поля в точках траекторий находятся интерполированием. Операция интерполирования, кроме того, выполняет роль алгоритма усреднения, снижающего ошибки дискретизации пространственного заряда.

Ниже кратко описан метод расчета и приведены результаты траекторного анализа нескольких конкретных систем, указывающие на возможности существенного снижения разброса скоростей.

## 2. УРАВНЕНИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Траекторный анализ проводится путем решения системы уравнений движения, уравнения Пуассона и уравнения непрерывности, которые при типичном для МЦР условии аксиальной симметрии имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{E_r}{2} + r \frac{d\varphi}{dt} B_z;$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{1}{r} \left( B_r \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dr}{dt} - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right), \quad (1)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{E_z}{2} - r \frac{d\varphi}{dt} B_r;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\rho; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) написаны для положительно заряженных частиц в безразмерных переменных

$$r = \frac{r'}{R_0'}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\eta' U_0'}} \frac{dr'}{dt'}, \quad t = \frac{\sqrt{2\eta' U_0'}}{R_0'} t',$$

$$E = E' \frac{R_0'}{U_0'}, \quad U = \frac{U'}{U_0'}, \quad \eta' = \frac{e'}{m'}, \quad B = \frac{\eta' R_0' B'}{\sqrt{2\eta' U_0'}},$$

$$\rho = \frac{\rho' R_0'^2}{\varepsilon_0' U_0'}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}' R_0'^2}{\varepsilon_0' \sqrt{2\eta' U_0'}}.$$

Здесь штрихованные величины размерны,  $R_0'$  и  $U_0'$  — соответственно радиус катода и потенциал анода,  $E$  — напряженность электрического поля,  $t'$  — время,  $B'$  — магнитная индукция,  $\eta'$  — удельный заряд элек-

трона,  $\rho'$  и  $j'$  — плотности пространственного заряда и тока,  $\epsilon'_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Введем  $N$  вспомогательных кольцевых зарядов  $q_i$  вблизи электродов [5] и заменим поток набором  $p$  трубок тока с дальнейшим разбиением каждой трубки тока на  $n$  участков (каждый протяженностью  $\Delta z$ ). Тогда потенциал

$$U = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^M \frac{Q_m K(t_m)}{\sqrt{(r+r_m)^2 + (z-z_m)^2}} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i K(t_i)}{\sqrt{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \quad (5)$$

где  $Q_m = \Delta J_k \Delta t$  — заряд участка  $\Delta z$ , помещенный в его среднюю точку  $v_m$ ,  $z_m$  ( $\Delta J_k$  — величина тока в  $k$ -й трубке тока,  $\Delta t$  — время прохождения частей отрезка  $\Delta z$ ),  $r$ ,  $z$  и  $r_i$ ,  $z_i$  — координаты точек наблюдения и вспомогательных зарядов соответственно,  $K(t)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $M = pn$  — общее число кольцевых объемных зарядов,

$$t_i^2 = \frac{4rr_i}{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}, \quad t_m^2 = \frac{4rr_m}{(r+r_m)^2 + (z-z_m)^2}.$$

Величины вспомогательных зарядов  $q_i$  вычисляются из (5) по известному распределению объемных зарядов  $Q_m$  и заданным потенциалам в соответствующем числе точек на поверхности электродов.

Решение (1) — (4) проводится методом последовательных приближений. На нулевой итерации электронные траектории находятся без учета поля объемного заряда\*. На каждом последующем приближении поле объемного заряда определяется по траекториям, найденным на предыдущей итерации. Процесс заканчивается, когда максимальная разность координат концевых точек траекторий, взятая по двум последующим итерациям, оказывается меньше заданной величины, которая выбиралась равной 0,25 шага сетки. При этом отношение максимальной разности координат к ларморовскому диаметру в конце траектории не превышает 10%\*\*.

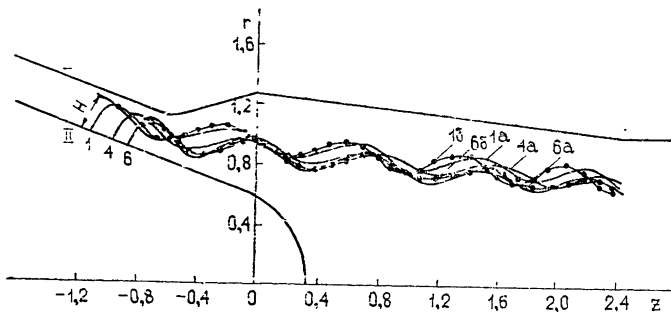


Рис. 1. Конфигурация электродов и электронные траектории в типичной пушке МЦР: а) сплошная кривая —  $-t_j = 0$ , б) кружки —  $-t_j = 0,1$ .

При вычислении электрического поля в правых частях уравнений движения (1) область, занятая пучком, покрывается вспомогательной прямоугольной сеткой с шагами  $h_r$  и  $h_z$  по соответствующим направлениям. Ориентировочные размеры сеточной области определяются по средней магнитной силовой линии и высоте  $H$  первого максимума элект-

\* Расчет магнитного поля и интегрирование уравнений движения выполняется по методике [6].

\*\* Указанное отношение далее принято в качестве величины погрешности траекторного анализа.

тронных траекторий. В первом приближении, следующем из адиабатической теории пушек МЦР [7], ведущие центры перемещаются по магнитным силовым линиям, выходящим из начальных точек каждой траектории. Тогда границы сеточной области параллельны магнитным силовым линиям, проходящим через края эмиттера, и отстоят от указанных силовых линий на расстояния, несколько превышающие  $H$  (рис. 1).

При заданных размерах анализируемой области объем оперативной памяти и время вычислений, необходимые для реализации всего алгоритма, зависят от величин  $\Delta z$ ,  $h_r$  и  $h_z$  и числа трубок тока, которые, в свою очередь, определяются характером поставленной задачи. Как показано в [3], основной вклад в разброс скоростей вносит своеобразный резонансный механизм (см. [4]), обусловленный упорядоченным пересечением электронных траекторий. При этом действие объемного заряда накапливается за время, составляющее несколько циклотронных периодов. Поэтому для адекватного описания механизма возникновения скоростного разброса целесообразно включить в вычислительный алгоритм операции усреднения, а при выборе шага сетки использовать в качестве масштаба малости радиус ларморовской окружности в анализируемой области. Размеры сетки, в свою очередь, определяют и выбор  $\Delta z$ . Увеличение  $\Delta z$  при сохранении  $h_r$  и  $h_z$  приводит к возрастанию ошибок дискретизации\*, тогда как уменьшение  $\Delta z$  до значений  $\Delta z \ll h_r, h_z$  не дает увеличения точности, поскольку электрическое поле определяется квадратичным интерполированием по узлам вспомогательной сетки. Эта операция усредняет поле пространственного заряда по объему нескольких ячеек сетки. Отметим, что, поскольку потенциал вспомогательных зарядов на электродах вычисляется в узлах сетки практически точно, увеличение шага сетки сравнительно слабо снижает точность расчета электрического поля поверхностных зарядов, пока  $h_r/H \sim 0,1$ .

Конкретные величины параметров сетки и числа разбиений пучка на дискретные элементы выбирались с помощью численных экспериментов на модели пушки рис. 1, которая рассматривалась в [9], что позволяет провести сравнение с методом сеток (см. разд. 3). Результаты расчетов подтверждают, что сходимость итерационного процесса существенно зависит от соотношения между  $\Delta z$  и  $h_z \approx h_r$ . В частности, выбор  $\Delta z$  меньшим или незначительно превышающим  $h_z$  гарантирует при соответствующих  $h_z$  достаточную точность (см. разд. 3) уже на второй итерации. Увеличение  $\Delta z$  или уменьшение  $h_z$  до значений, соответствующих  $\Delta z \approx 2h_z$ , приводит к быстрому ухудшению точности.

Если принять в качестве допустимой указанную выше погрешность (порядка 10% при  $t_j = 0,1^{**}$ ), то максимальные размеры сетки составляют  $h_z = 0,08$ ,  $h_r = 0,05$  при использовании шести трубок тока. Удвоение числа трубок тока при сохранении размеров сетки практически не сказывается на величине погрешности (см. примечание к стр. 1365).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ТРАЕКТОРНОГО АНАЛИЗА ПУШЕК МЦР

а) Система, изображенная на рис. 1. В табл. 1 приведены результаты расчета системы рис. 1 методом вспомогательных зарядов (верх-

\* Сошлемся на указанную в [8] альтернативу между правильным описанием взаимодействия машинных частиц и правильным описанием их движения. В рассматриваемой здесь задаче функции машинных частиц выполняют кольцевые заряды, появляющиеся при разбиении трубок тока.

\*\* Параметр пространственного заряда  $t_j = J/J_d$ , где  $J$  — ток пучка,  $J_d$  — ленточный ток диодного промежутка. При  $t_j = 0,1$  разброс осцилляторных скоростей в модели рис. 1 достигает примерно 30% (ср. с 9% при  $t_j = 0$  (см. разд. 3)).

ние строки) и методом сеток (нижние строки). Число трубок тока для обеих систем выбиралось одинаковым и равным шести. Каждая трубка тока разбивалась на 40 участков длиной  $\Delta z = 1,1 h_z$ . Использование указанных в табл. 1 величин  $h_r$  и  $h_z$  приводит к погрешности, меньшей 6%, уже после второй итерации. В таблице указаны также конечные величины осцилляторных скоростей ( $v_{\perp M}$ ) для каждой из шести трубок тока;  $E_{r_k}$  и  $E_{z_k}$  — компоненты электрического поля на катоде,  $v_{\perp a}$  — величина осцилляторной скорости, согласно адиабатической теории МЦР [7], равная

$$v_{\perp a} = \frac{E_{\perp k}}{B_k} \sqrt{\alpha}, \quad (6)$$

что справедливо, если электрическое поле в области инжектора слабо-неоднородно. В (6)  $B_k$  — магнитная индукция на катоде,  $E_{\perp k}$  — перпендикулярная к  $B_k$  компонента электрического поля,  $\alpha$  — отношение конечной магнитной индукции к  $B_k$ . Значения  $E_{\perp k}$  находились из результатов траекторного анализа. Последний столбец представляет разброс скоростей  $\delta v_{\perp}$ , определенный как отношение максимальной разности осцилляторных скоростей к средней осцилляторной скорости  $\bar{v}_{\perp}$  (по шести трубкам тока).

Таблица 1

$h_r = 0,05, \quad h_z = 0,08, \quad n = 40, \quad \Delta z = 0,088$

$t_j$		1	2	3	4	5	6	$\bar{v}_{\perp}$	$\delta v_{\perp}$
0	$E_{r_k}$	1,0766 1,0710	1,0826 1,0840	1,1171 1,0980	1,1216 1,1100	1,1273 1,1200	1,1443 1,1280	0,276 0,280 0,300	9% 9% 1,3%
	$E_{z_k}$	0,3971 0,3940	0,4002 0,4000	0,4007 0,4040	0,4125 0,4080	0,4125 0,4100	0,4082 0,4110		
	$v_{\perp M}$	0,291 0,294	0,275 0,278	0,267 0,270	0,266 0,270	0,271 0,276	0,284 0,290		
	$v_{\perp a}$	0,299	0,300	0,302	0,302	0,299	0,298		
0,1	$E_{r_k}$	1,0399 1,0310	1,0334 1,0340	1,0575 1,0410	1,0576 1,0480	1,0626 1,0580	1,0804 1,0670	0,254 0,265 0,284	32,7% 34% 2,8%
	$E_{z_k}$	0,3834 0,3760	0,3834 0,3790	0,3813 0,3810	0,3888 0,3850	0,3909 0,3890	0,3876 0,3950		
	$v_{\perp M}$	0,308	0,268	0,246	0,225	0,225	0,248		
	$v_{\perp a}$	0,324 0,288	0,288 0,285	0,255 0,286	0,234 0,282	0,236 0,280	0,256 0,282		

Согласно табл. 1 оба метода дают близкие (для  $\delta v_{\perp}$  — практически одинаковые) результаты. При токе пучка, соответствующем  $t_j = 0,1$ , разброс скоростей возрастает в среднем в 4 раза по сравнению с  $t_j = 0$  и превышает 30%. Величины  $\delta v_{\perp}$ , получаемые обоими методами, сильно отличаются от определяемых по «адиабатической» формуле (6). Последняя (ср. табл. 1) даже при подстановке величин  $E_{\perp k}$ , взятых из численного расчета, не дает заметного роста разброса скоростей под действием сил пространственного заряда.

Аналогичные расчеты показывают, что дальнейшее увеличение тока вызывает прогрессирующее снижение осцилляторной средней скорости и возрастание разброса  $\delta v_{\perp}$  (при  $t_j = 0,2$   $\delta v_{\perp} = 67\%$ ,  $\bar{v}_{\perp} = 0,225$ , при  $t_j = 0,3$   $\bar{v}_{\perp} = 0,196$ ,  $\delta v_{\perp} = 110\%$  — ср. с табл. 1).

Согласно данным табл. 1 в распределении осцилляторных скоро-

стей по длине эмиттера имеется минимум. Повышение тока пучка смещает минимум к правому концу, что объясняется экранирующим действием дрейфующего вправо электронного пучка.

С увеличением  $t_j$  сходимость достигается на большем числе итераций (на 3-й и 4-й при  $t_j = 0,2$  и  $0,3$  соответственно). В отличие от метода конечных разностей [4] каждая итерация (кроме, естественно, нулевой) требует одинакового времени счета и при указанных выше параметрах вспомогательной сетки занимает на ЭВМ типа БЭСМ-4 около 30 мин. Отметим, что траекторный анализ с 12 трубками тока не дает существенных различий с  $p = 6$  и при  $t_j = 0,3$ .

б) *Пушки с малой высотой первого максимума электронных траекторий.* В ряде случаев (особенно для электронно-оптических систем МЦР коротковолновой части миллиметрового диапазона и субмиллиметрового диапазона длин волн) целесообразно использовать пушки, в которых высота  $H$  подъема электронов над поверхностью эмиттера значительно меньше расстояния  $d$  катод—анод. Одна из подобных систем\* и центральные траектории трех (из шести) трубок тока показаны на рис. 2. Как видно, здесь  $t_h \equiv H/d \sim 0,2 \div 0,3$ . Длина анализируемой области, за пределами которой можно считать движение электронов происходящим в слабонеоднородном магнитном поле, т. е. удовлетворяющим условию сохранения поперечного адиабатического инварианта, здесь составляет около восьми периодов (см. рис. 2). Для траекторного анализа подобной системы методом конечных разностей с постоянным шагом сетки во всей области понадобилось бы около  $4 \cdot 10^4$  узлов, что соответствует объему оперативной памяти примерно  $10^5$ . Численная реализация метода вспомогательных зарядов в применении к обсуждаемой задаче требует  $8 \cdot 10^3$  ячеек.

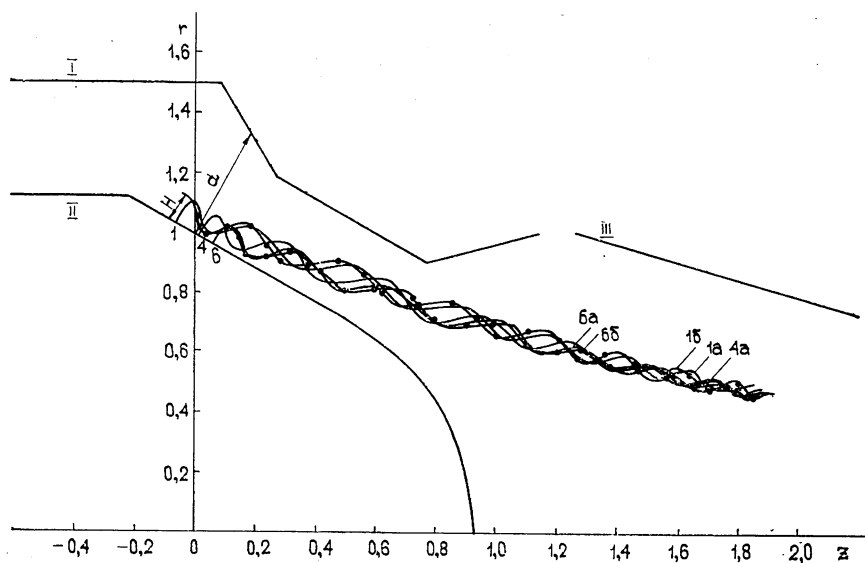


Рис. 2. Конфигурация электродов и электронные траектории в пушке с сильной закрученностью пучка (I—0; II—0,5; III—0):

а) сплошная кривая— $t_j = 0$ , б) кружки— $t_j = 0,1$ .

\* Конфигурация электродов находилась методом, описанным в [6], из условия получения минимального позиционного скоростного разброса при нулевом пространственном заряде. Отличия геометрии по сравнению с системой рис. 1 обусловлены спецификой распределения магнитного поля на эмиттере обеих систем.

Согласно расчетным данным прирост скоростного разброса, вызванный действием пространственного заряда, для системы рис. 2 составляет 12% при  $t_j = 0,1$ , что вдвое меньше соответствующей величины для системы рис. 1 (ср. табл. 1). Этот эффект обусловлен, по-видимому, существенным укорочением «резонансной» области [4] (перемешивание траекторий происходит уже на первом витке (см. рис. 2)).

в) Пушка с протяженным квазиламинарным пучком. Как показано в [4, 10], радикальное ослабление влияния пространственного заряда на скоростной разброс может быть достигнуто в пушках с непересекающимися электронными траекториями. Конфигурации электронных пушек, формирующих квазиламинарные пучки, характеризуются значительно большими углами наклона магнитных силовых линий к поверхности эмиттера [6, 11]. В табл. 2 приведены результаты траекторного анализа одной из таких систем (рис. 3).

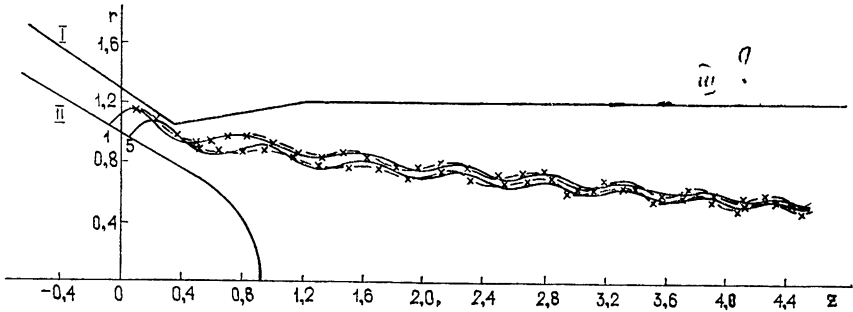


Рис. 3. Конфигурация электродов и электронные траектории в пушке с квазиламинарным пучком:

а) сплошная кривая— $t_j = 0$ , б) крестики— $t_j = 0,2$ .

Таблица 2

$t_j$		1	2	3	4	5	$\bar{v}_\perp$	$\delta v_\perp$
0	$v_{\perp M}$	0,392	0,402	0,414	0,426	0,463	0,420	17%
0,1	$v_{\perp M}$	0,389	0,378	0,388	0,398	0,442	0,399	16%
0,2	$v_{\perp M}$	0,380	0,366	0,368	0,366	0,423	0,380	16%

Согласно табл. 2 увеличение тока вплоть до  $t_j = 0,2$  в отличие от всех рассмотренных выше случаев не вызывает заметного возрастания скоростного разброса. На рис. 3 показаны соответствующие электронные траектории. Как видно, ламинарность траекторий сохраняется во всем исследованном диапазоне токов пучка.

Отметим, что значения осцилляторных скоростей, определяемых по адиабатической формуле (6), почти на 50% превышают величины, следующие из траекторного анализа. Большой угол между поверхностью катода и магнитным полем обуславливает быстрый в масштабе циклотронного периода уход электронов от катода, что нарушает условия корректности адиабатического приближения.

Результаты расчета свидетельствуют о целесообразности применения метода вспомогательных зарядов и описанной выше его численной реализации для траекторного анализа протяженных винтовых электрон-

ных пучков с учетом сил пространственного заряда. Параметры пучка типичной пушки МЦР, вычисленной указанным методом; практически идентичны с теми, которые дает метод сеток [4] при существенно меньшем объеме оперативной памяти и требуемом числе итераций.

Траекторный анализ вновь подтвердил, что механизм возникновения разброса по скоростям при увеличении тока винтовых пучков в основном связан с резонансным замедлением или ускорением электронов в области регулярного пересечения электронных траекторий. Согласно расчетным данным использование пушек с квазиламинарным пучком в окрестности инжектора способствует радикальному снижению скоростного разброса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
2. Н. И. Зайцев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, **19**, № 5, 1056 (1974).
3. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 1, 41 (1973).
4. В. И. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 4, 67 (1977).
5. А. В. Вашковский, В. Т. Овчаров, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 9, 34 (1971).
6. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, **63**, вып. 8, 1695 (1973).
7. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 9, 81 (1971).
8. Л. А. Вайнштейн, Н. В. Назарова, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, **22**, № 2, 327 (1977).
9. В. К. Лыгин, В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Тезисы докладов на V Всесоюзном семинаре по методам расчета ЭОС, вып. 4(34), М., 1974, стр. 30.
10. В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Радиотехника и электроника, **23**, № 7, 1450 (1978).
11. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, **60**, вып. 11, 2278 (1971).

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 июня 1977 г.

#### TRAJECTORY ANALYSIS OF EXTENT SCREW ELECTRON BEAMS TAKING ACCOUNT OF FORCES OF A SPACE CHARGE

*V. K. Lygin, Sh. E. Tsimring*

Based on the method of auxiliary sources the trajectory analysis of intense screw electron beams is described. The mechanism of the velocity spread occurrence under the action of forces of a space charge is investigated. Gun electrode configuration is defined which forms the quasi-laminar screw beam with the essentially lowered spread of oscillation velocities.