

С О Д Е Р Ж А Н И Е

| | |
|---|------|
| Безродный В. Г., Шубова Р. С. Влияние геомагнитной активности на параметры волноводного канала Земля — ионосфера и статистические свойства СДВ-сигналов | 1237 |
| Аржевикин Ю. А., Пономарев Г. А., Фортес В. Б., Якубов В. П. Энергетический спектр задержек тропосферного канала связи | 1242 |
| Азаренков Н. А., Кондратенко А. Н. Возбуждение продольных волн в полуограниченной плазме наклонно падающими электромагнитными волнами | 1250 |
| Гавриленко В. Г., Кром М. Н., Степанов Н. С. О взаимодействии фотонов с турбулентной средой | 1254 |
| Туманов Б. Н., Левит Б. И., Бабич А. С. Автодинный эффект в газовых лазерах | 1260 |
| Богатырев Ю. К., Ямпурик Н. П. Самовоздействие волн в периодических структурах | 1268 |
| Таранович Т. М. О пространственной структуре поля в резонаторе, заполненном периодически неоднородной активной средой | 1275 |
| Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. О дифференциальном описании стохастических линейных систем с небелыми флюктуациями параметров | 1279 |
| Саичев А. И. О связи статистических характеристик проходящей и отраженной волн в среде с крупномасштабными случайными неоднородностями | 1290 |
| Максимов В. И., Четкарев В. А. О нелинейности термофотоиндикации СВЧ-поля на жидкокристаллических экранах | 1294 |
| Флаксман А. Г., Дорфман Я. М., Ермолаев В. Т. О собственных шумах линейной антенной решетки с взаимодействующими излучателями | 1303 |
| Колоколов А. А., Суров А. И. Отражение плоской волны от нелинейной поглощающей среды | 1309 |
| Ефимов С. П. Сжатие электромагнитных волн анизотропными средами (модель «неотражающего» кристалла) | 1318 |
| Петленко В. А., Хижняк Н. А. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящими телами в прямоугольном волноводе | 1325 |
| Гетманцева Т. Н., Раевский С. Б. О комплексных волнах в круглом диэлектрическом волноводе | 1332 |
| Гаврис И. Б. О поле идеально проводящей сферы, нагруженной на прямоугольную щель, в присутствии магнитного горизонтального диполя | 1338 |
| Ивашка В. П. Метод видоизмененной задачи Дирихле для расчета многопроводных линий | 1343 |
| Багдасарян О. В., Пермяков В. А. Ветвление режимов и эффект ограничения потока энергии ТЕ-волны в среде с ионизационной нелинейностью | 1352 |
| Лыгин В. К., Цимлинг Ш. Е. Траекторный анализ протяженных винтовых электронных пучков с учетом сил пространственного заряда | 1363 |
| Белянцев А. М., Юллатов В. К. Об отрицательной высокочастотной проводимости сред с неоднородным распределением подвижности в скрещенных E , H -полях | 1371 |

Краткие сообщения и письма в редакцию

| | |
|---|------|
| Карапетян Г. Г. Излучение заряда в волноводе с поперечными движущимися стенками | 1377 |
| Кириленко А. А., Рудь Л. А. Симметричный излом прямоугольного волновода как преобразователь типов волн | 1379 |

Информация

| | |
|---|------|
| Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэроноомия», т. XVIII, №№ 2, 3, 1978 г. | 1381 |
|---|------|

УДК 621.371.242.7

ВЛИЯНИЕ ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ВОЛНОВОДНОГО КАНАЛА ЗЕМЛЯ — ИОНОСФЕРА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СДВ-СИГНАЛОВ

В. Г. Безродный, Р. С. Шубова

Результаты измерений статистических характеристик амплитуды и фазы радиосигналов на частоте 17,8 кГц использованы для определения регулярных и случайных параметров волновода Земля — ионосфера и их связи с уровнем геомагнитной активности. Показано, что переход ионосферных условий от спокойных в магнитном отношении к возмущенным сопровождается уменьшением эффективной высоты ионосферы и ростом ее характерных вариаций.

Профили электронной концентрации нижних слоев ионосферы и их состояние в целом подвержены влиянию геомагнитной активности. Экспериментально обнаружено значительное увеличение электронной плотности в D-области при сильных магнитных возмущениях [1]. Поэтому можно ожидать, что характеристики СДВ-радиосигналов, распространяющихся в волноводном канале между Землей и нижней ионосферой, также будут зависеть от уровня геомагнитной активности. В литературе встречаются данные, которые могут рассматриваться как некоторое качественное подтверждение существования указанной зависимости (см., например, [2, 3]). Однако количественные сравнения в исследованиях такого sorta практически отсутствуют.

В течение последнего ряда лет нами предпринимались попытки обнаружить связь параметров СДВ-сигналов с характеристиками геомагнитной активности. Измерения проводились в ИРЭ АН УССР в диапазоне 10—20 кГц на трассах разной протяженности и ориентации. Для сравнения использовались всевозможные параметры сигнала и характеристики уровня геомагнитной активности. Однако установить соответствие между исследуемыми величинами никак не удавалось. Для примера на рис. 1 приведена одна из исследовавшихся зависимостей: стандарт флюктуаций фазы σ_ϕ как функция среднего (за время наблюдения ~ 8 часов) планетарного A_p -индекса. Приведенные на рисунке данные были получены на частоте 17,8 кГц (станция — NAA, США, дистанция — около 7000 км) в цикле измерений 1974—75 гг. в условиях полной ночи на всей трассе распространения. Из анализа этих данных трудно сделать какое-либо заключение о существовании или отсутствии связи между исследуемыми величинами. Соответствующее им значение коэффициента корреляции оказывается равным примерно 0,2.

Правильное истолкование указанных экспериментальных результа-

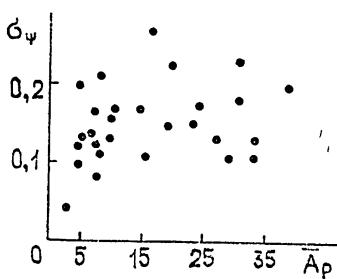


Рис. 1.

тов получено только сейчас, благодаря исследованиям, проведенным в работе [4]. В ней показано, что в условиях многомодового распространения (а именно такие условия имели место в измерениях) статистические характеристики СДВ-сигнала оказываются сильно зависящими от его регулярных параметров, т. е. от положения наблюдателя относительно интерференционной картины поля. Так как можно ожидать, что вариации магнитного поля влияют одновременно и на регулярные, и на случайные параметры волноводного канала, то трудно обнаружить какие-либо закономерности, не разделив в статистических характеристиках сигнала вкладов регулярного и случайного факторов.

С учетом высказанных соображений рассмотрим заново экспериментальные результаты упоминавшегося выше цикла измерений 1974—75 гг. Их анализ будем проводить в рамках двухмодовой модели волновода Земля — ионосфера. Согласно выполненным в [4] оценкам такая модель хорошо описывает статистические свойства сигнала для исследуемых частоты и дистанции. В двухмодовом волноводе положение наблюдателя относительно интерференционной картины поля полностью описывается двумя параметрами: соотношением амплитуд $a \equiv E_2/E_1$ и разностью фаз $\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ волноводных мод. В соответствии с методикой [4] указанные параметры удается определить по статистическим характеристикам сигнала — стандартам флуктуаций относительной амплитуды σ_A , фазы σ_φ и их взаимному коэффициенту корреляции $K_{A\varphi}$. Зная a и φ , можно разделить в результирующих статистических данных вклады регулярного и случайного факторов и проанализировать зависимость каждого из них в отдельности от геомагнитной активности.

Для применения указанной методики необходимо предварительно определить пределы изменений параметров a и φ . В соответствии с [5] можно ожидать, что переход от спокойных в магнитном отношении условий к возмущенным должен сопровождаться уменьшением эффективной высоты h ионосферы. Предполагая, что указанные изменения могут происходить в интервале $h = 80 \div 90$ км, на основании выполненных в [4] расчетов получим $a = 1,3 \div 2,4$, $\varphi = -(320 \div 100)$ *.

Проведенные оценки позволили также по соотношению стандартов флуктуаций σ_φ/σ_A и знаку коррелятора $K_{A\varphi}$ (подробнее об этом см. [4]) разделить весь набор экспериментальных данных на реализации «амплитудного», «фазового» и «смешанного» типов. К первым относились реализации, в которых основной вклад во флуктуации параметров результирующего поля давали случайные изменения соотношения амплитуд a волноводных мод, ко вторым — вариации разности фаз φ , к третьим — реализации, в которых оба механизма вариаций были равноценными. Всего из 32очных записей 14 было отнесено к «фазовым», 12 — к «амплитудным» и 6 — к «смешанным». Дальнейшей обработке подвергались только две первые группы, так как для третьей методика анализа [4] неприменима.

Для «амплитудных» и «фазовых» реализаций были определены параметры сигнала a и φ . Исключая регулярный фактор из статистических характеристик результирующего поля, найдены стандарты флуктуаций σ_a соотношения амплитуд (для «амплитудных» реализаций) или σ_φ разности фаз волноводных мод (для «фазовых»). В табл. 1, 2 для каждойочной записи приведены значения параметров σ_φ , σ_A , $K_{A\varphi}$, значения среднего индекса геомагнитной активности \bar{A}_p , а также полученные в результате расчета по описанной методике значения a , φ , σ_a , σ_φ . Статистическая погрешность экспериментального определе-

* Величина $|\varphi|$ приведена к интервалу $(0,2\pi)$.

ния величин σ_ψ и σ_A составляла примерно 15%, $K_{A\psi}$ — 40%. Разброс значений параметров сигнала, полученных в результате расчета, был обусловлен точностью определения исходных статистических данных, а также плавностью расчетных кривых. В нашем случае он не превышал 15% для φ и 25% для a , σ_a , σ_ψ . На основании этих данных построены приведенные на рис. 2, 3 зависимости.

Таблица 1
Вариации „ a “

| Дата | \bar{A}_p | σ_ψ | σ_A | $K_{A\psi}$ | a | φ | σ_a |
|----------|-------------|---------------|------------|-------------|------|-----------|------------|
| 26.03.74 | 31 | 0,226 | 0,116 | 0,3 | 1,05 | 235 | 0,2 |
| 11.04.74 | 5 | 0,1 | 0,2 | -0,46 | 2 | 130 | 0,125 |
| 22.01.75 | 10 | 0,155 | 0,183 | -0,68 | 1,8 | 140 | 0,17 |
| 24.01.75 | 3 | 0,42 | 0,13 | -0,09 | 2 | 170 | 0,08 |
| 25.01.75 | 7 | 0,126 | 0,17 | -0,59 | 1,5 | 120 | 0,16 |
| 29.01.75 | 6 | 0,1 | 0,134 | -0,27 | 1,5 | 110 | 0,17 |
| 30.01.75 | 7 | 0,081 | 0,11 | -0,13 | 1,6 | 135 | 0,1 |
| 31.01.75 | 33 | 0,126 | 0,148 | 0,67 | 1,2 | 290 | 0,29 |
| 2.02.75 | 16 | 0,114 | 0,17 | 0,74 | 1,5 | 200 | 0,114 |
| 13.02.75 | 27 | 0,134 | 0,189 | 0,4 | 1,5 | 250 | 0,14 |
| 16.02.75 | 19 | 0,141 | 0,145 | 0,61 | 1,4 | 240 | 0,165 |
| 17.02.75 | 20 | 0,209 | 0,091 | 0,8 | 1,1 | 225 | 0,175 |
| 24.02.75 | 29 | 0,105 | 0,11 | 0,31 | 1,3 | 250 | 0,16 |

Таблица 2
Вариации „ φ “

| Дата | \bar{A}_p | σ_ψ | σ_A | $K_{A\psi}$ | a | φ | σ_φ |
|----------|-------------|---------------|------------|-------------|-----|-----------|------------------|
| 23.03.74 | 38 | 0,193 | 0,206 | -0,15 | 1 | 270 | 0,4 |
| 23.03.74 | 31 | 0,183 | 0,122 | -0,44 | 1,3 | 280 | 0,3 |
| 25.03.74 | 24 | 0,15 | 0,098 | -0,32 | 1,8 | 240 | 0,16 |
| 12.04.74 | 5 | 0,2 | 0,06 | 0,3 | 2 | 160 | 0,1 |
| 13.04.74 | 6 | 0,135 | 0,073 | 0,09 | 1,5 | 170 | 0,075 |
| 17.04.74 | 8 | 0,202 | 0,11 | 0,052 | 1,5 | 170 | 0,1 |
| 23.01.75 | 11 | 0,159 | 0,105 | 0,14 | 1,5 | 160 | 0,09 |
| 1.02.75 | 33 | 0,1 | 0,123 | -0,23 | 1,1 | 275 | 0,22 |
| 15.02.75 | 24 | 0,17 | 0,099 | -0,33 | 1,8 | 250 | 0,2 |
| 19.02.75 | 10 | 0,135 | 0,083 | 0,012 | 1,5 | 170 | 0,067 |
| 21.02.75 | 7 | 0,162 | 0,115 | 0,25 | 1,6 | 155 | 0,1 |
| 22.02.75 | 20 | 0,22 | 0,135 | -0,48 | 1,8 | 215 | 0,24 |
| 23.02.75 | 17 | 0,264 | 0,097 | -0,22 | 2 | 205 | 0,16 |
| 25.02.75 | 15 | 0,168 | 0,162 | -0,32 | 1,5 | 220 | 0,145 |

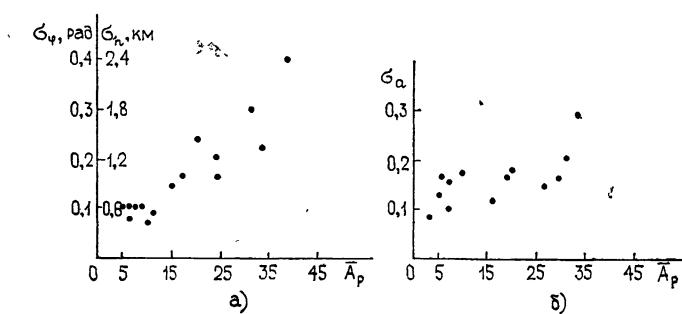


Рис. 2.

Как следует из рис. 2а, между стандартом вариаций разности фаз мод σ_ϕ и средним \bar{A}_p -индексом существует практически линейная связь. Соответствующий ей коэффициент корреляции оказывается около 0,9. Вариации σ_a соотношения амплитуд связаны с уровнем геомагнитной активности несколько слабее (рис. 2б). Им соответствует коэффициент корреляции порядка 0,6. Используя результаты работ [4, 6], вариации разности фаз волноводных мод были пересчитаны в вариации высоты волновода. В соответствии с этим каждому значению σ_ϕ на рис. 2а сопоставлен свой стандарт σ_h флуктуации высоты (вторая вертикальная шкала).

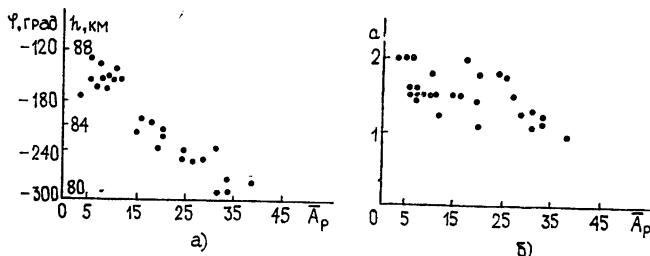


Рис. 3.

Поведение регулярных параметров сигнала a , φ в зависимости от уровня геомагнитной активности иллюстрируется рис. 3. Видно, что как и для случайных вариаций, для регулярных параметров лучшая корреляция с A_p -индексом наблюдается у фазы мод (рис. 3а) по сравнению с их амплитудой (рис. 3б). Приведенные результаты дают также возможность, используя расчеты регулярных полей (например, [7]), сопоставить величине \bar{A}_p эквивалентную высоту ионосферы h (вторая вертикальная шкала на рис. 3а).

Подводя итоги проведенного рассмотрения, можно отметить следующее.

1. Предложенная в работе [4] методика оказалась весьма полезной для анализа влияния уровня геомагнитной активности на параметры ионосферы и СДВ-сигналов.

2. Степень корреляции регулярных и случайных характеристик фазы с A_p -индексом оказалась выше, чем амплитудных.

3. При переходе от спокойных в магнитном отношении условий ($\bar{A}_p = 5$) к возмущенным ($\bar{A}_p = 35$) эффективная высота волновода уменьшается на величину порядка 8 км (от 88 до 80 км), а ее характеристические вариации увеличиваются от 0,6 до 2,5 км.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
- T. J. Rosenberg and F. A. Saus, ELF—VLF Radio Wave Propagation, edited by J. Holte.
- Г. Ришбет, О. К. Гарриот, Введение в физику ионосферы, Гидрометеониздат, Л., 1975.
- В. Г. Безродный, Р. С. Шубова, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
- Я. Л. Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972.
- В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 12, 1875 (1972).
- Г. Ф. Ременец, Геомагнетизм и аэрономия, 13, № 5, 857 (1973).

THE INFLUENCE OF GEOMAGNETIC ACTIVITY ON PARAMETERS OF THE
WAVEGUIDE CHANNEL EARTH—IONOSPHERE AND STATISTICAL
PROPERTIES OF VLF-SIGNALS

V. G. Bezrodnyj, R. S. Shubova

Measurement results of statistical characteristics amplitude and phase of the radio signal at the frequency 17.8 KHz are used to define the regular and random parameters of the waveguide Earth—ionosphere and their relation with the geomagnetic activity level. It is shown that the transition of ionosphere conditions from the quiet in the magnetic sense to the disturbed ones is followed by the decrease of the effective ionosphere height and by the increase of its characteristic variations.

УДК 621.371.24

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЗАДЕРЖЕК ТРОПОСФЕРНОГО КАНАЛА СВЯЗИ

Ю. А. Аржевикин, Г. А. Пономарев, В. Б. Фортес, В. П. Якубов

В приближении однократного рассеяния аналитически исследован энергетический спектр задержек тропосферного канала связи. Результаты предшествующих работ обобщаются на случай достаточно произвольных ориентации и ширины диаграмм направленности приемной и передающей антенн в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Выясняются условия, при которых зависимостью энергетического спектра задержек от направленных свойств антенн в горизонтальной плоскости пренебрегать нельзя.

В настоящее время все большее практическое значение приобретают вопросы прохождения через тропосферный канал связи сложных сигналов. В связи с этим представляет интерес построение достаточно универсального описания искажений этих сигналов. Как отмечается в работах [1, 2], для узкополосных входных сигналов, спектр которых ограничен полосой $\Delta\omega \ll \omega_0$ с центральной (несущей) частотой ω_0 , может быть введен так называемый энергетический спектр задержек (ЭСЗ) $D(t)$, позволяющий в определенной мере дать такое описание.

В основе существующих еще немногочисленных работ на эту тему лежит приближение однократного (борновского) рассеяния. В работе [3] получено аналитическое выражение для ЭСЗ в частном случае идентичных антенн при симметричной их ориентации в вертикальной плоскости, проведенной через передатчик и приемник (плоскость большого круга). Однако при этом выбран упрощенный способ описания направленных свойств антенн. В работе [2] аналитический расчет проведен лишь для случая широких (по сравнению с величиной угла рассеяния) диаграмм направленности (ДН) применяемых антенн.

В работе [4] на основе количественного анализа (расчет на ЭВМ) для заданного диапазона изменения параметров тропосфера, применяемых антенн и трасс дальнего тропосферного распространения (ДТР) волн была предложена аппроксимация ЭСЗ кривой типа гамма-распределения. При этом рассмотрен частный случай идентичных остронаправленных антенн при симметричной их ориентации в плоскости большого круга. Влияние свойств направленности антенн и их ориентации в горизонтальной плоскости не учитывалось.

Рис. 1. Геометрия трассы ДТР.

В настоящей работе рассматривается более общий случай различных приемной и передающей антенн с конечными направленными свойствами как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. В работе предлагается аналитический расчет ЭСЗ для остронаправленных

антенн ($\alpha^{\text{в, г}} \leq \theta$, где $\alpha^{\text{в, г}}$ — ширина ДН антенн в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно, θ — угол рассеяния (см. рис. 1)), что дает возможность полнее, чем в работах [3, 4], учесть физические особенности тропосферного канала рассеяния.

Если на вход линейного тропосферного канала подается сигнал $S(t)$ с частотным спектром $S(\omega)$, то корреляционная функция выходного сигнала определяется так:

$$U(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2) \times \\ \times W(\omega_1, \omega_2) S(\omega_1) S^*(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (1)$$

где в приближении борновского рассеяния (см., например, [5])

$$W(\omega_1, \omega_2) = \frac{k_1^2 k_2^2}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i\mu[R_1 + |r - R_1|]\}}{R_1^2 |r - R_1|^2} \Phi_{\epsilon}(K(R_1)) \times \\ \times |f_0(m(R_1))|^2 |f_1(n(R_1))|^2 d^3 R_1.$$

Здесь $k_1 = \omega_1/c$, $k_2 = \omega_2/c$, $\mu = k_1 - k_2$, $K(R_1) = \frac{k_1 + k_2}{2} [m(R_1) - n(R_1)]$, $m(R_1) = R_1/R_1$, $n(R_1) = R_2/R_1$, $R_2 = r - R_1$ (см. рис. 1), $\Phi_{\epsilon}(K(R_1))$ — пространственный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха ϵ , f_0 и f_1 — описывают ДН передающей и приемной антенн и определяют объем рассеяния как область пересечения этих ДН. Для узкополосных ($\Delta\omega \ll \omega_0$) входных сигналов функцию $W(\omega_1, \omega_2)$, стоящую под интегралом в (1), приближенно можно записать (см., например, [1, 2]) в виде

$$W(\omega_1, \omega_2) \approx \tilde{W}(\omega_1 - \omega_2, \omega_0) \equiv \\ \equiv \frac{k_0^4}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i\mu[R_1 + |r - R_1|]\}}{R_1^2 |r - R_1|^2} \Phi_{\epsilon}(K_0(R_1)) |f_0(m(R_1))|^2 \times \\ \times |f_1(n(R_1))|^2 d^3 R_1, \quad (2)$$

где $K_0(R_1) = k_0 [m(R_1) - n(R_1)]$, $k_0 = \omega_0/c$. Тогда для узкополосных сигналов выражение (1) с учетом (2) может быть записано так:

$$U(t_1, t_2) \approx \int_{-\infty}^{\infty} D(t) S(t_1 - t) S^*(t_2 - t) dt,$$

где

$$D(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\omega, \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Величина

$$D(t) = \frac{k_0^4}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\epsilon}(K_0(R_1)) |f_0(m(R_1))|^2 |f_1(n(R_1))|^2}{R_1^2 |r - R_1|^2} \times \\ \times \delta\left[t - \frac{R_1 + |r - R_1|}{c}\right] d^3 R_1 \quad (3)$$

соответствует ЭСЗ, введенному в [1, 2]. Функция $D(t)$ для узкой полосы частот вблизи ω_0 совпадает с энергетической импульсной реакцией (ЭИР) тропосферного канала.

Пусть ДН приемной и передающей антенн описываются функциями

$$|f_0|^2 = |f_0(\psi, \varphi)|^2 = \frac{a_0^B a_0^F}{\pi} \exp [-(a_0^B)^2 (\psi - \psi_0)^2 - (a_0^F)^2 (\varphi - \varphi_0)^2]; \quad (4)$$

$$|f_1|^2 = |f_1(\psi', \varphi')|^2 = \frac{a_1^B a_1^F}{\pi} \exp [-(a_1^B)^2 (\psi' - \psi_1)^2 - (a_1^F)^2 (\varphi' - \varphi_1)^2], \quad (5)$$

где $\psi_0, \varphi_0; \psi_1, \varphi_1$ — углы ориентации передающей и приемной антенн в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Смысл остальных углов в (4), (5) ясен из рис. 1. Связь углов ψ' и φ' с ψ и φ (рис. 1) находится с учетом того, что для реальных трасс ДТР все эти углы малы. Отсюда в малоугловом приближении ($\sin \psi \approx \psi, \cos \psi \approx 1 - \psi^2/2, \dots$) имеем

$$\psi' \approx 2(l-1) \frac{\psi}{\psi^2 + \varphi^2}, \quad \varphi' \approx 2(l-1) \frac{\varphi}{\psi^2 + \varphi^2},$$

где $l = (R_1 + R_2)/d$. В соответствии с этим формула (5) перепишется как

$$|f_1|^2 = \frac{a_1^B a_1^F}{\pi} \exp \left\{ -(a_1^B)^2 \left[\frac{2(l-1)\psi}{\psi^2 + \varphi^2} - \psi_1 \right]^2 - (a_1^F)^2 \left[\frac{2(l-1)\varphi}{\psi^2 + \varphi^2} - \varphi_1 \right]^2 \right\}.$$

В системе координат l, ψ, φ (рис. 1)

$$l = \frac{R_1 + R_2}{d}, \quad \sin \psi = \frac{z}{R_1}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{R_1^2 - z^2}},$$

свойства δ -функции делают результат интегрирования по переменной l в (3) очевидным и

$$D(t) = \frac{k_0^4 c}{32\pi^2 d} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\psi_{\min}(\varphi)}^{\psi_{\max}(\varphi)} B(\tau, \psi, \varphi) \Phi_e(\theta(\tau, \psi, \varphi)) |f_0(\psi, \varphi)|^2 \times \\ \times |f_1(\tau, \psi, \varphi)|^2 d\psi d\varphi, \quad (6)$$

где в малоугловом приближении

$$B(\tau, \psi, \varphi) \approx \frac{2}{d} \frac{1 - \psi^2/2}{\psi^2 + \varphi^2}$$

— множитель, определяемый геометрией рассеяния, $\theta(\tau, \psi, \varphi) \approx (2\sigma + \psi^2 + \varphi^2)/\sqrt{\psi^2 + \varphi^2}$ — угол рассеяния (см. рис. 1), $\sigma = \frac{c}{d}\tau + \theta_0^2/8$,

$t = \tau + \tau_0$, $\tau_0 = \frac{d}{c}(1 + \theta_0^2/8)$, τ — приращение задержки относительно минимального значения τ_0 (τ_0 соответствует пути распространения по касательным к Земле, проведенным в плоскости большого круга через точки передачи и приема), $\theta_0 = d/R_0$ — минимальный угол рассеяния, R_0 — эффективный радиус Земли.

Интегрирование в (6) проводится по части поверхности эллипсоида равных задержек τ , лежащей выше пересечения касательных к Земле плоскостей, проведенных через точки приема и передачи и определяемых уравнениями

$$(m, N) = 0, \quad (-n, N') = 0.$$

Здесь N и N' — нормали к касательным плоскостям, проведенным через точки передачи и приема соответственно. Тогда в малоугловом приближении

$$\psi_{\min} \approx \frac{\theta_0}{2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right),$$

$$\psi_{\max} \approx \frac{4\sigma}{\theta_0} \left(1 - \theta_0^2 \frac{8 - \theta_0^2}{64\sigma^2} \frac{\varphi^2}{2} \right),$$

$$\varphi_{\max} = -\varphi_{\min} \approx \frac{4}{\theta_0} \sqrt{\frac{\sigma(8\sigma - \theta_0^2)}{8 - 8\sigma - \theta_0^2}}.$$

Применим к оценке двойного интеграла в (6) асимптотический метод Лапласа. Рассмотрим случай остронаправленных антенн и будем считать, что основной вклад в интеграл (6) определяется областью пересечения ДН f_0 и f_1 , ширина которых в горизонтальной ($\alpha_{0,1}^r$) и вертикальной ($\alpha_{0,1}^b$) плоскостях удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_{0,1}^{b,r} \leq \theta_0.$$

Тогда можно существенно упростить вид показателя экспоненты, входящей в функцию $|f_1|^2$ — разложить показатель в ряд вблизи направления (ψ_0, φ_0) , обеспечивающего максимум функции $|f_1|^2$ (ДН приемной антенны). Таким образом,

$$D(t) \approx \frac{k_0^4 c}{32\pi^2 d} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int_{\psi_{\min}(\varphi)}^{\psi_{\max}(\varphi)} B(\tau, \psi, \varphi) \Phi_e(\theta(\tau, \psi, \varphi)) \times \\ \times |f_0(\psi, \varphi)|^2 |\tilde{f}_1(\tau, \psi, \varphi)|^2 d\psi d\varphi, \quad (7)$$

где

$$|\tilde{f}_1(\tau, \psi, \varphi)|^2 = \frac{\alpha_1^b \alpha_1^r}{\pi} \exp [-(\tilde{a}_1^b)^2 (\psi - \tilde{\psi}_0)^2 - (\tilde{a}_1^r)^2 (\varphi - \tilde{\varphi}_0)^2 + \\ + 2\tilde{a}^2 (\psi - \tilde{\psi}_0)(\varphi - \tilde{\varphi}_0)],$$

$$(\tilde{a}_1^b)^2 = [(a_1^b)^2 (\varphi_1^2 - \psi_1^2)^2 + 4(a_1^r)^2 \varphi_1^2 \psi_1^2]/4\sigma^2,$$

$$(\tilde{a}_1^r)^2 = [4(a_1^b)^2 \psi_1^2 \varphi_1^2 + (a_1^r)^2 (\varphi_1^2 - \psi_1^2)^2]/4\sigma^2,$$

$$\tilde{a}^2 = \psi_1 \varphi_1 (\varphi_1^2 - \psi_1^2) [(a_1^b)^2 - (a_1^r)^2]/2\sigma^2,$$

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{2\sigma\psi_1}{\psi_1^2 + \varphi_1^2}, \quad \tilde{\varphi}_0 = \frac{2\sigma\varphi_1}{\psi_1^2 + \varphi_1^2}.$$

Точка максимума диаграммной функции $f^2 = |f_0|^2 |\tilde{f}_1|^2$ определяется следующим образом:

$$\psi_m = \{\tilde{a}^2 (a_0^r)^2 (\psi_0 - \tilde{\psi}_0) - \tilde{a}^4 \tilde{\psi}_0 + [(a_0^b)^2 \psi_0 + (\tilde{a}_1^b)^2 \tilde{\psi}_0] \beta\}/(\alpha\beta - \tilde{a}^4),$$

$$\varphi_m = \{\tilde{a}^2 (a_0^r)^2 (\psi_0 - \tilde{\psi}_0) - \tilde{a}^4 \tilde{\varphi}_0 + [(a_0^r)^2 \varphi_0 + (\tilde{a}_1^r)^2 \tilde{\varphi}_0] \alpha\}/(\alpha\beta - \tilde{a}^4),$$

где $\alpha = (a_0^b)^2 + (a_1^b)^2$, $\beta = (a_0^r)^2 + (a_1^r)^2$. Тогда окончательное выражение для энергетического спектра задержек (энергетической импульсной реакции) тропосферного канала получим в виде

$$D(t) \approx \frac{k_0^4 c}{32 \pi d^2 V_{\alpha\beta-\tilde{a}^4}} \cdot \frac{2 - \psi_m^2}{\psi_m^2 + \varphi_m^2} \Phi_e(\theta(\tau, \psi_m, \varphi_m)) f^2(\tau, \psi_m, \varphi_m) V, \quad (8)$$

где

$$V = \frac{\sqrt{\alpha\beta - \tilde{a}^4}}{\pi} \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} \int_{\varphi_{\min}(\psi)}^{\varphi_{\max}(\psi)} \exp[-\alpha(\psi - \psi_m)^2 - \beta(\varphi - \varphi_m)^2 + 2\tilde{a}^2(\psi - \psi_m)(\varphi - \varphi_m)] d\psi d\varphi.$$

Поправочный множитель V изменяется от 0 до 1 и учитывает конечность пределов интегрирования по переменным ψ и φ . В случае, когда $\tilde{a} = 0$, выражение для V приближенно может быть представлено в виде комбинации интегралов вероятности:

$$V \approx \prod_{k=0}^1 \frac{\operatorname{erf}(x_1^k) - \operatorname{erf}(x_0^k)}{2}, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Здесь $x_{1,0}^0 = \sqrt{\alpha}(\psi_{\max, \min} - \psi_m)$, $x_{1,0}^1 = \sqrt{\beta}(\varphi_{\max, \min} - \varphi_m)$. Это справедливо, когда приемная антенна представляет собой параболоид вращения ($a_1^b = a_1^r$) либо ориентирована прямо на передатчик ($\varphi_1 = 0$) или же так, что $\psi_1 = \varphi_1$.

Пространственный спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости ϵ в (8) зададим в виде

$$\Phi_e(\theta) \sim \sigma_\epsilon^2(h) \theta^{-m}, \quad (9)$$

где высотная зависимость интенсивности флюктуаций $\epsilon - \sigma_\epsilon^2(h) \sim h^{-n}$.

В случае предельно узких ДН антенн в горизонтальной плоскости ($a_{0,1}^r \rightarrow \infty$) (антенны ориентированы в плоскости большого круга) выражение (7) содержит в себе результаты работы [4]. Различие в геометрических множителях, вычисленных в работе [4] и формуле (7), —

$$B_{[4]}(\sigma, \psi) \sim \frac{\psi + 2\sigma/\psi}{\sigma\psi},$$

$$B_{(7)}(\sigma, \psi) \sim \frac{2/\psi - \psi}{\psi}$$

— обусловлено учетом нами объемной геометрии трассы ДТР.

Интересно отметить далее, что, благодаря учету нами конечных размеров объема рассеяния, в горизонтальной плоскости

$$D(t) \sim \tau^{3/2} \text{ при } \tau \rightarrow 0$$

в отличие от результатов работ [1-4], где

$$D(t) \sim \tau \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

На рис. 2—6 полученные согласно (8) ЭСЗ приведены в зависимости от дальности (d), ориентации ($\psi_{0,1} = \psi_{0,1} - \theta_0/2, \varphi_{0,1}$) и шири-

ны ДН ($\alpha_{0,1}^B, \Gamma$) антенн по уровню половинной мощности. Они сопоставляются с экспериментальными данными, полученными на реальной морской трассе ДТР в 10-сантиметровом диапазоне [6]. Пунктиром на рис. 5 и 6 отмечены значения задержек ($\tau_{\text{ц}, \text{геом}}$), соответствующие геометрическому пути распространения по осям ДН антенн. Из рисун-

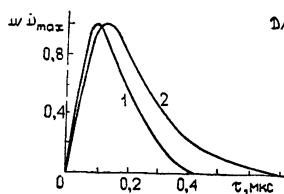


Рис. 2.

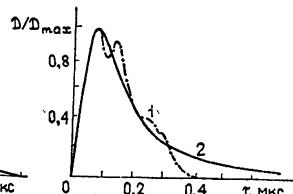


Рис. 3.

Рис. 2. Предельный случай бесконечно узких ДН антенн в горизонтальной плоскости ($\Phi_e \sim h^{-1} \theta^{-11/3}$, $d = 300 \text{ км}$, $\alpha_{0,1}^B = 1^\circ$, $\bar{\varphi}_{0,1} = 0^\circ$, $\alpha_{0,1}^T = \varphi_{0,1} = 0$). Кривая 1—из [4], двумерный вариант задачи; 2—расчетная, трехмерный вариант.

Рис. 3. Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов: кривая 1—экспериментальные данные из [6] ($d = 225 \text{ км}$, $\alpha_0^B = 4^\circ$, $\alpha_1^B = 2^\circ$, $\bar{\varphi}_0 = 2^\circ$, $\bar{\varphi}_1 = 1^\circ$, $\alpha_0^T = 1^\circ$, $\alpha_1^T = 1^\circ$, $\varphi_{0,1} = 0$); 2—расчетная при $\Phi_e \sim h^{-2} \theta^{-11/3}$.

ков видно, что чем уже ДН, тем ближе центральная задержка $\tau_{\text{ц}}$ ($D_{\text{max}} = D(\tau_{\text{ц}})$) к ее «геометрическому» значению ($\tau_{\text{ц}, \text{геом}}$). Поведение ЭСЗ при малых отворотах антенн объясняется экранирующим действием Земли, а при больших отворотах определяется влиянием спектра флюктуаций ϵ на уменьшение угла рассеяния. Влияние параметров антенн в горизонтальной плоскости заметно меньше, чем в вертикальной, однако влияние «горизонтальных» параметров становится существенным при отворотах антенн, соизмеримых или больших ширины ДН в этой плоскости ($\varphi_{0,1} \geq \alpha_{0,1}^T$).

Отметим, что для трасс протяженностью более 500—600 км при оценке максимальных задержек или ширины ЭСЗ необходимо учитывать конечные размеры толщи тропосферы в вертикальной плоскости, которые составляют, по литературным данным [7], 8—12 км. Рассмотрим, например, такой идеализированный случай, когда диэлектрическая проницаемость воздуха меняется скачком на границе тропосферы:

$$\epsilon(h) = \begin{cases} 1 + \Delta\epsilon(h) & (h < h_t), \\ 1 & (h \geq h_t), \end{cases}$$

где $h_t \leq 8 \div 12$ км над поверхностью Земли (высота эффективно рассеивающей тропосферы). Тогда конечные уровни сигналов в месте приема будут наблюдаться лишь при отражении (рассеянии) волн от неоднородностей, заключенных между высотами $h_0 = d^2/8R_0$ и h_t , где h_0 — высота над поверхностью Земли точки пересечения касательных,

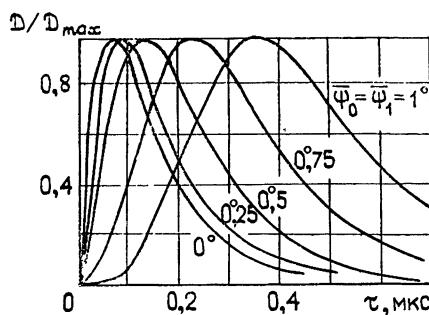


Рис. 4. Зависимость ЭСЗ от ориентации антенн в вертикальной плоскости ($\Phi_e \sim \theta^{-11/3}$, $d = 300 \text{ км}$; $\alpha_{0,1}^B = 1^\circ$, $\varphi_{0,1} = 0$).

проведенных в плоскости большого круга через точки приема и передачи, а h_v — высота верхней точки объема рассеяния над поверхностью Земли. Высота h_v определяется высотой части тропосферы, вне которой величина эффективной площади рассеяния ($S_{\text{эфф}}(\theta) \sim \Phi_e(\theta)$) принимает столь малые значения, что без ущерба для точности расчетов влиянием рассеяния в оставшейся части тропосферы можно пренебречь.

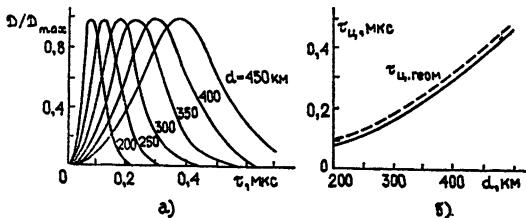


Рис. 5. Зависимость ЭСЗ (а) и центральной задержки (б) от протяженности трассы ($\Phi_e \sim \theta^{-11/3}$; $\alpha_{0,1}^B = \bar{\psi}_{0,1} = 0^\circ 5$, $\varphi_{0,1} = 0$).

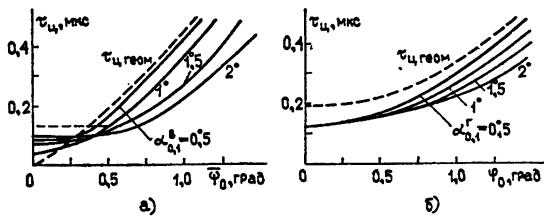


Рис. 6. Зависимость центральной задержки от ориентации и ширины ДН антенн в вертикальной (а) и горизонтальной (б) плоскостях ($\Phi_e \sim \theta^{-11/3}$, $d = 300$ км): а) $\alpha_{0,1}^B = 1^\circ$, $\varphi_{0,1} = 0$; б) $\alpha_{0,1}^B = 1^\circ$, $\bar{\psi}_{0,1} = 0^\circ 5$.

В работе [8] принято, что

$$h_v \approx 4 h_0. \quad (10)$$

Но соотношение (10) справедливо только для трасс средней протяженности, пока $h_v < h_t$. При увеличении дальности объем рассеяния сверху будет ограничиваться границей эффективно рассеивающей тропосферы. Тогда максимальная задержка τ_{\max} будет равна:

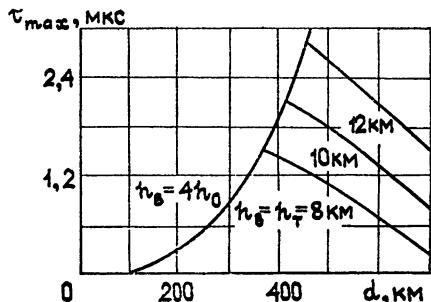


Рис. 7. Оценка величины максимальной задержки

$$\tau_{\max} \approx \frac{2}{dc} [(h_v + h_0)^2 - (2h_0)^2],$$

где $h_v = \min(h_t, 4h_0)$.

Зависимость τ_{\max} от длины трассы приведена на рис. 7. Так, при $h_t = 8$ км максимальные задержки сигналов для дальностей 500—600 км будут составлять величины меньше или порядка 1 мкс. В случае узких ДН антенн величины максимальных задержек меньше приведенных оценок и будут определяться толщиной слоя тропосферы, вырезаемого пересечением ДН антенн,

Суммируя сказанное, необходимо подчеркнуть, что использовать результаты работ [1-4] для оценки ширины ЭСЗ, полосы пропускания канала (радиуса частотной корреляции) и других связанных с ними характеристик канала и сигналов можно практически лишь для трасс средней протяженности ($d \leq 300 \div 400$ км). Полученное же нами выражение (8) для ЭСЗ позволяет учесть конечную высоту эффективно рассеивающей тропосферы. Для этого достаточно соответствующим образом задать высотную зависимость в $\sigma_e^2(h)$ (формула (9)). Численные расчеты для такой высотной зависимости в работе не проводятся из-за отсутствия надежных экспериментальных данных по виду функции $\sigma_e^2(h)$.

Таким образом, полученное нами выражение (8) позволяет описать ЭСЗ при более широком, чем в [1-4], диапазоне изменения основных параметров приемопередающих антенн, в частности, рассчитать ЭСЗ при отвороте антенн в горизонтальной плоскости, а также может быть применено для расчетов искажений относительно узкополосных ($\Delta\omega \ll \omega_0$) сигналов при прохождении их через тропосферу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Bell o, IEEE Trans. Comm., 17, № 2 (1969)
2. Ф. А. Белло, ТИИЭР, 59, № 1, 52 (1971).
3. Б. С. Романов, Труды учебных институтов связи, № 44, 141 (1969).
4. Я. А. Фикс, Труды научно-исследовательского института радио, № 4, 32 (1974).
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
6. В. А. Филоненко, В. В. Ручкин, Е. Д. Тельпуховский, В. Б. Фортес, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 7, 984 (1976).
7. Б. Р. Бин, Е. Дж. Даттон, Радиометеорология, Гидрометеоиздат, Л., 1971.
8. М. П. Долуханов, Дальнее распространение ультракоротких волн, изд. Связь, М., 1962.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
11 июля 1977 г.

ENERGETIC SPECTRUM OF DELAYS OF TROPOSPHERE COMMUNICATION CHANNEL

Yu. A. Arzhevikin, G. A. Ponomarev, V. B. Fortes, V. P. Yakubov

In the approximation of a single scattering the energetic spectrum of delays of the troposphere communication channel is analytically investigated. The results of the previous papers are generalized for the case of sufficiently arbitrary orientation and the radiation pattern width of receiving and transmitting antennas in the vertical and horizontal planes. Conditions are found out when the dependence of the delay energetic spectrum on the antenna directivity properties in the horizontal plane can not be neglected.

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ НАКЛОННО ПАДАЮЩИМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

H. A. Азаренков, A. N. Кондратенко

В кинетическом приближении при диффузном отражении частиц от границы магнитоактивной полуограниченной плазмы исследуется возбуждение продольных волн наклонно падающими электромагнитными на гибридных и циклотронных частотах. Рассмотрены случаи слабой и сильной пространственной дисперсии. Вычислены импедансы плазмы, определены коэффициенты трансформации поперечных волн в продольные.

В плазме поперек постоянного магнитного поля могут распространяться волны на гибридных и циклотронных частотах [1]. Одним из механизмов (а в некоторых случаях — и единственным) их возбуждения является трансформация электромагнитных волн в продольные на границе плазмы. С другой стороны, продольные волны на границе могут преобразовываться в электромагнитные, которые излучаются в вакуум. Это явление имеет важное значение для диагностики, так как в принципе позволяет судить об интенсивности продольных волн по параметрам излучаемых электромагнитных. Поскольку, в силу теоремы взаимности, коэффициенты трансформации прямой и обратной задач равны [2], достаточно рассмотреть только вопрос о возбуждении продольных волн.

Рассмотрим полуограниченную плазму, находящуюся в магнитном поле H_0 , которое параллельно границе. Систему координат выберем так, что плазма занимает область $x > 0$, а ось z направлена вдоль магнитного поля. При нормальном падении волны вектор электрического поля может быть ориентирован вдоль постоянного магнитного поля (обыкновенная волна), либо поперек него (необыкновенная волна). Обыкновенная волна продольных волн не возбуждает. В случае слабой пространственной дисперсии, когда глубина проникновения поля в плазму $\lambda_{\text{эфф}}$ много больше среднего ларморовского радиуса $r_\alpha = |v_{T\alpha}/\omega_\alpha|$ ($\omega_\alpha = e_\alpha H_0/m_\alpha c$ — циклотронная частота частиц сорта α), трансформация нормально падающей необыкновенной электромагнитной волны в продольные на гибридных и циклотронных частотах рассматривалась в работе [3]. В области сильной пространственной дисперсии ($\lambda_{\text{эфф}} \ll r_\alpha$) могут возбуждаться поперечные необыкновенные циклотронные волны [4], но не возбуждаются продольные. Эффективное их возбуждение возможно при наклонном падении необыкновенной волны, электрический вектор которой лежит в плоскости падения (рис.1). Ниже будет показано, что

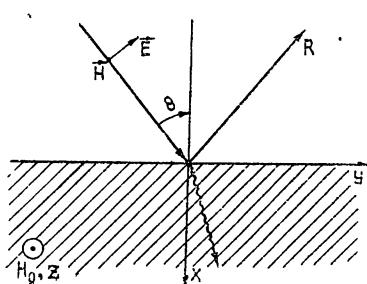


Рис. 1.

при больших углах падения могут сильно изменяться коэффициенты трансформации волн и на гибридных частотах.

Зависимость поля падающей волны от координат и времени будем определять множителем $\exp[i(k_1x + k_2y - \omega t)]$, где $k_1 = k \cos \theta$, $k_2 = k \sin \theta$, $k = \omega/c$, θ — угол падения. Поскольку вдоль оси y пространство однородно, то поле в плазме пропорционально множителю $\exp[i(k_2y - \omega t)]$.

Гибридные частоты. При возбуждении волн на гибридных частотах

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2}, \quad \omega_2 = \omega_e \sqrt{\frac{\Omega_i^2 + \omega_i^2}{\Omega_e^2 + \omega_e^2}}, \quad (1)$$

определеняемых из уравнения

$$\epsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2} = 0, \quad \Omega_{\alpha}^2 = \frac{4\pi e_{\alpha}^2 n_0}{m_{\alpha}}, \quad (2)$$

вычисление импеданса плазмы не отличается от вычисления импеданса в [3, 5]. Поэтому приведем окончательный результат:

$$Z = \frac{E_y(0)}{H_z(0)} = \frac{N_1^{-1} + N_2^{-1} - (N_1 + N_2)^{-1}(1 + B)^{-1} - \beta^2 A}{1 + i\beta\epsilon_2 A}, \quad (3)$$

где $\beta = \sin \theta$, $\epsilon_2 = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2}$, N_1 , N_2 — показатели преломления возбуждаемых в плазме продольных волн,

$$N_{1,2}^2 = (2\rho)^{-1} \left[\epsilon_1 \pm \sqrt{\epsilon_1^2 + 4\rho\epsilon_2^2} \right], \quad (4)$$

$$\rho = \sum_{\alpha} \frac{3}{2} \frac{\Omega_{\alpha}^2 \omega^2 v_{T\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^4 (\gamma_{\alpha}^2 - 1) (\gamma_{\alpha}^2 - 4) c^2}, \quad v_{T\alpha} = \left(\frac{2T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{1/2}$$

— тепловая скорость частиц сорта α , $\gamma_{\alpha} = \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{\omega_{\alpha}}$, ν_{α} — частота столкновений частиц.

По порядку величины $|A| \sim |B| \sim \frac{1}{\sqrt{|\epsilon_1|}} \gg 1$. При нормальном падении ($\theta = 0$) выражение (3) совпадает с соответствующей формулой работы [3]. Учитывая, что $|N_{1,2}| \gg 1$, при не слишком малых углах падения волны θ из (3) найдем

$$Z = N_1^{-1} + N_2^{-1} + i \frac{\beta}{\epsilon_2}. \quad (5)$$

Коэффициент отражения

$$R = (\cos \theta - Z)(\cos \theta + Z)^{-1} \quad (6)$$

определяет коэффициент трансформации

$$W = 4X_1 \cos \theta [(X_1 + \cos \theta)^2 + X_2^2]^{-1}, \quad (7)$$

где $X_1 = \operatorname{Re} Z$, $X_2 = \operatorname{Im} Z$.

Поскольку при нормальном падении коэффициент трансформации подробно исследован в работе [3], остановимся только на влиянии сла-

гаемого β/ϵ_2 в импедансе на W . Вблизи верхней гибридной частоты $\epsilon_2 = |\omega_e|/\omega_1 < 1$, поэтому с ростом угла падения W убывает от максимального значения при $\theta = 0$ до нуля при $\theta = \pi/2$. Вблизи нижней гибридной частоты $|\epsilon_2| \approx \frac{\Omega_e}{|\omega_e \omega_2|} \gg 1$, поэтому с ростом угла коэффициент трансформации возрастает до максимального значения

$$W_{\max} = 2X_1 [X_1 + \sqrt{X_1^2 + X_2^2}]^{-1} \quad (8)$$

при $\theta_{\max} = \pi/2 - \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, а затем убывает до нуля. Возрастание коэффициента трансформации может быть значительным. Так как $|X_{1,2}| \ll 1$, отношение W_{\max} к W при $\theta = 0$ порядка величины

$$(X_1 + \sqrt{X_1^2 + X_2^2})^{-1} \gg 1.$$

Циклотронные частоты. Рассмотрим сначала нормальное падение. Если частота необыкновенной волны $\omega \approx s|\omega_a|$ ($s = 1, 2, \dots$), то возможны два случая: циклотронный резонанс на поперечной волне, когда $q^2/k^2 - \epsilon_{22} = 0$ [4], и на продольной волне, когда $\epsilon_{11} = 0$ (ϵ_{11} и ϵ_{22} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости неограниченной плазмы [1]). Продольные волны могут возбуждаться только при наличии в плазме нормальной компоненты электрического поля, а она определяется малой величиной ϵ_{12} . Это следует из того обстоятельства, что ввиду неравенства $\lambda_{\text{эфф}} \ll |v_{T\alpha}/\omega_a| = r_a$ искривлением траекторий частиц в скин-слое вообще можно пренебречь. Таким образом, при нормальном падении необыкновенной волны в области сильной пространственной дисперсии возбуждаются только поперечные циклотронные волны. Эффективное возбуждение продольных циклотронных волн возможно при наклонном падении, поскольку в этом случае уже в падающей волне имеется составляющая электрического поля, нормальная к границе.

Импеданс для поперечной волны при нормальном падении ($k_2 = 0$) [4]

$$Z = -\frac{3k}{q_t} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right), \quad (9)$$

$$\frac{q_t}{k} = \frac{c}{s v_{T\alpha}} \left(\frac{v_{T\alpha}^2 \omega_a^2}{\sqrt{\pi} h \Omega_a^2 c^2} \right)^{1/3}, \quad h = \frac{s|\omega_a| - \omega - i v_a}{\omega}.$$

Действительная часть импеданса определяет коэффициент преобразования волн на границе $W \approx 4 \operatorname{Re} Z$ и амплитуду поперечной циклотронной волны в плазме

$$|E_z| \sim |\operatorname{Re} Z| E_0 \ll E_0. \quad (10)$$

Для продольных циклотронных волн при наклонном падении электромагнитной волны

$$Z_t = -\frac{2^{4/3} k \sin^3 \theta}{3 q_t} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \right), \quad (11)$$

где

$$\frac{q_t}{k} = -\frac{c}{s v_{T\alpha}} \left(\frac{2 \Omega_a^2}{-h \sqrt{\pi} \omega_a^2} \right)^{1/3}, \quad (12)$$

$\omega > s|\omega|$, так что $-h > 0$, а $q_t < 0$, поскольку является волновым числом обратной волны. В области углов падения $\theta \leq 1$ энергия возбужда-

емой в плазме волны определяется коэффициентом трансформации $W_l \approx 4\text{Re}Z_l/\cos\theta$. Несмотря на то, что W_l мало, амплитуда поля продольной циклотронной волны оказывается порядка амплитуды падающей волны: $|E_{x_l}| \approx \frac{4}{3} E_0 \sin\theta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер и др., Электродинамика плазмы, изд. Наука, М., 1974.
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. А. Н. Кондратенко, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 8, 1096 (1967).
4. М. Я. Азбель, Э. А. Канер, ЖЭТФ, 32, 896 (1957).
5. А. Н. Кондратенко, Плазменные волноводы, Атомиздат, М., 1976

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 мая 1977 г.

EXCITATION OF LONGITUDINAL WAVES IN SEMI-LIMITED PLASMA BY OBLIQUE INCIDENT ELECTROMAGNETIC WAVES

N. A. Azarenkov, A. N. Kondratenko

Excitation of longitudinal waves by oblique incident electromagnetic waves at hybrid and cyclotron frequencies is investigated in the kinetic approximation with diffuse particle reflection from the boundary of the magnetoactive semi-limited plasma. Cases of weak and strong spatial dispersion are considered. Plasma impedances are calculated, transformation coefficients of transverse waves into longitudinal ones are defined.

УДК 538.56 : 519.25

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОТОНОВ С ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДОЙ

В. Г. Гавриленко, М. Н. Кром, Н. С. Степанов

Для двух моделей сред — недиспергирующего диэлектрика с флюктуирующей проницаемостью и холодной плазмы с переменной концентрацией электронов — квантовомеханическим методом возмущений рассматривается вопрос о статистических характеристиках фотонов в турбулентной среде. В предположении об относительной медленности флюктуаций параметров среды получено кинетическое уравнение для функции распределения фотонов в пространстве импульсов, на основе которого, в частности, исследуются величина и знак смещения средней частоты и энергии фотонов.

Вопрос о преобразовании спектральных и энергетических характеристик волн во флюктуирующих в пространстве и времени средах рассматривался в [1, 2] на основе уравнений геометрической оптики, в основном в рамках первого приближения метода возмущений. Попытка выйти за рамки этого приближения, ограниченного требованием малости амплитудных флюктуаций, была предпринята в [3] путем перехода к кинетическому уравнению для некоторой функции распределения по частоте, которое при определенных условиях удается «замкнуть» (при этом также исходили из уравнений переноса в геометрооптическом приближении). Поскольку соответствующие выкладки и конечные уравнения в [3] получаются весьма громоздкими, а определение пределов применимости их вызывает затруднения, представляется полезным рассмотреть и другие возможные пути отыскания решений.

В настоящей работе мы приведем результаты квантового расчета взаимодействия фотонов с турбулентной средой, получаемые вполне традиционным в квантовой механике методом возмущений*. Для выяснения роли дисперсии среды и сравнения с результатами [1–3] мы обсудим два характерных случая — недиспергирующего диэлектрика с флюктуирующей диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r, t)$ и холодной изотропной плазмы с концентрацией $N(r, t)$. Заметим, что статистическое ускорение фотонов в турбулентной плазме (в результате взаимодействия с плазмонами) в литературе исследовано довольно подробно [5]. Однако известные методы и результаты этих расчетов непосредственно не применимы в интересующем нас случае, когда турбулентность среды имеет гидродинамический характер и частота и волновой вектор турбулентных пульсаций (в отличие от плазмонов) не связаны каким-либо дисперсионным соотношением.

1. НЕДИСПЕРГИРУЮЩАЯ СРЕДА

Пусть среда немагнитная и без джоулевых потерь, а диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon(r, t) = \epsilon_0 + \epsilon_t(r, t)$, где среднее значение ϵ_0 постоянно и флюктуирующую часть ϵ_t можно рассматривать

* Для акустических волн в недиспергирующей среде аналогичный вопрос рассматривался в работе [4].

как малое возмущение: $|\epsilon_t| \ll \epsilon_0$. Соответственно величина $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_0 E^2 + B^2)$ представляет собой невозмущенную плотность энергии электромагнитных волн, а величина $\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_t E^2$ — поправку, определяющую взаимодействие электромагнитного поля с турбулентными пульсациями.

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} выразим через векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, причем, интересуясь вихревыми полями, положим $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Величину $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ будем искать в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = c \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\epsilon_0}} \sum_{k, \alpha} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \{ a_{ka} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)] + a_{ka}^* \exp [-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)] \}, \quad (1)$$

где индекс $\alpha = 1, 2$ учитывает две возможные поляризации волн, $\omega_k = ck/\sqrt{\epsilon_0}$.

Далее, как обычно, от векторов полей перейдем к операторам соответствующих величин. С этой целью нормирующие множители в (1) выбраны так, чтобы a_{ka} и \hat{a}_{ka}^+ совпадали с операторами уничтожения и рождения фотонов, т. е. удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} n_{ka} |\hat{a}_{ka}^+| n_{ka} - 1 &= \sqrt{n_{ka}}, \\ n_{ka} - 1 |\hat{a}_{ka}| n_{ka} &= \sqrt{n_{ka}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя выражение для \mathcal{E}_0 и формулу (1), находим невозмущенный гамильтониан системы (поля в единичном объеме)

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{k, \alpha} \hbar \omega_k (\hat{a}_{ka} \hat{a}_{ka}^+ + \hat{a}_{ka}^+ \hat{a}_{ka}), \quad (3)$$

собственные значения которого суть $H_{0n} = \sum \left(n_{ka} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k$. Гамильтониан взаимодействия в том же представлении можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}' = -\frac{\hbar}{4\epsilon_0} \epsilon_t \sum_{\alpha} \{ \sum_k \sqrt{\omega_k} \{ \hat{a}_{ka} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)] - \\ - \hat{a}_{ka}^+ \exp [-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)] \} \sum_{k'} \sqrt{\omega_{k'}} \{ \hat{a}_{k'a} \exp [i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega_{k'} t)] - \\ - \hat{a}_{k'a}^+ \exp [-i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega_{k'} t)] \} \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы отыскать вероятности переходов под воздействием возмущения $\epsilon_t(\mathbf{r}, t)$, нужно усреднить (4) по единичному объему и по времени. Для этого разложим $\epsilon_t(\mathbf{r}, t)$ в четырехмерный ряд:

$$\epsilon_t = \sum_{\mathbf{x}, \Omega} [\epsilon(\mathbf{x}, \Omega) e^{i(\mathbf{x}\mathbf{r} - \Omega t)} + \epsilon^*(\mathbf{x}, \Omega) e^{-i(\mathbf{x}\mathbf{r} - \Omega t)}]. \quad (5)$$

Будем считать флуктуации среды достаточно медленными, так что для всех характерных частот в спектре $\epsilon(\mathbf{x}, \Omega)$

$$|\Omega| \ll \omega_k, \quad |\mathbf{x}| \ll |\mathbf{k}|. \quad (6)$$

При этом вероятность актов двухфотонного поглощения или рождения является исчезающе малой (члены $\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_{k'}^{\dagger}$ и $\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_{k'}^+$ при усреднении дают нуль) и остаются лишь процессы рассеяния фотонов на флюктуациях $\varepsilon_{\tau}(\mathbf{r}, t)$ (типа $\mathbf{k} \rightleftharpoons \mathbf{k} \pm \mathbf{x}$). Соответствующие вероятности переходов оказываются равными

$$W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} \pm \mathbf{x}} = \frac{\pi}{8\varepsilon_0^2} \omega_k \omega_{\mathbf{k} \pm \mathbf{x}} |\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega)|^2 \delta(\omega_k - \omega_{\mathbf{k} \pm \mathbf{x}} - \Omega). \quad (7)$$

В результате для функции распределения фотонов в \mathbf{k} -пространстве можно записать кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \sum_{\mathbf{x}, \Omega} W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{x}} (f_{\mathbf{k} + \mathbf{x}} - f_k) + W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{x}} (f_{\mathbf{k} - \mathbf{x}} - f_k). \quad (8)$$

Если функция f_k в масштабе \mathbf{x}_k достаточно плавная ($\left| \frac{\partial f_k}{\partial k} \mathbf{x} \right| \ll f_k$), то уравнение (8) сводится к диффузионному

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f_k}{\partial k_j} \right), \quad D_{ij} = \sum_{\mathbf{x}, \Omega} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{x}}. \quad (9)$$

Заменяя суммирование интегрированием, можно D_{ij} приближенно представить в виде

$$D_{ij} = \frac{\pi}{8\varepsilon_0^2} \omega_k^2 \int \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j u(\mathbf{x}, \Omega) \delta(\omega_k - \omega_{\mathbf{k} \pm \mathbf{x}} - \Omega) d\mathbf{x} d\Omega, \quad (10)$$

где $u(\mathbf{x}, \Omega)$ — спектр мощности турбулентных пульсаций $\varepsilon_{\tau}(\mathbf{r}, t)$ ($u(\mathbf{x}, \Omega) \sim |\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega)|^2$).

Уравнения (8) или (9) позволяют проследить за эволюцией спектра f_k и его усредненных характеристик из-за рассеяния фотонов при известном спектре флюктуаций $\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega)$. Нас прежде всего будет интересовать изменение средней частоты (и, соответственно, энергии) фотонов. Для этого можно получить из (9) уравнение для среднего значения частоты $\langle \omega_k \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_k \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial k_i} \left(D_{ij} \frac{\partial \omega_k}{\partial k_j} \right) \right\rangle. \quad (11)$$

Для изотропной турбулентности ($u(\mathbf{x}, \Omega) = u(|\mathbf{x}|, \Omega)$) в малом угловом приближении ($k_{\perp}/k \ll 1$, где k_{\perp} — составляющая вектора \mathbf{k} , перпендикулярная к начальному направлению пучка) вычисления дают

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_k \rangle = \frac{2\pi^2}{c \varepsilon_0^{3/2}} \int \mathbf{x} u(\mathbf{x}, \Omega) \Omega^2 d\mathbf{x} d\Omega \langle \omega_k \rangle. \quad (12)$$

Это выражение получено при условии

$$\frac{cT}{L} \ll \frac{L}{\lambda}, \quad (13)$$

где T и L — характерные масштабы временных и пространственных флюктуаций соответственно. Средняя частота будет расти по закону

$$\langle \omega_k \rangle = \langle \omega_{k0} \rangle e^{i\Omega t}, \quad \gamma = \frac{3\pi^2}{4c\varepsilon_0^{3/2}} \int \mathbf{x} u(\mathbf{x}, \Omega) \Omega^2 d\mathbf{x} d\Omega. \quad (14)$$

Поскольку число фотонов согласно вышесказанному не меняется, увеличивается и полная энергия электромагнитного поля. Одновременно происходит и уширение спектра волн. Аналогично (14) можно, например, получить

$$\langle \omega_k^2 \rangle = \langle \omega_{k0}^2 \rangle e^{3\Omega t}, \quad (15)$$

т. е. рост дисперсии частоты фотонов и соответствующее уширение спектра происходит быстрее, чем рост средней частоты, что естественно.

2. ХОЛОДНАЯ ПЛАЗМА

Перейдем теперь к случаю высокочастотных электромагнитных волн в холодной бесстолкновительной плазме. В этом случае исходным является выражение для плотности энергии в виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}, \quad (16)$$

где $\rho = Nm$, e , m , N , \mathbf{v} — соответственно заряд, нерелятивистская масса, концентрация и скорость электронов. Пусть $\rho = \rho_0 + \rho_t(\mathbf{r}, t)$, ρ_0 и ρ_t — соответственно невозмущенная и турбулентная составляющие плотности электронной компоненты, причем. $|\rho_t| \ll \rho_0$. Скорость электронов представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_s$, где \mathbf{v}_t и \mathbf{v}_s — соответственно низкочастотная (турбулентная) и высокочастотная (индуцированная полем) составляющие. Последняя из уравнения движения электронов может быть выражена через векторный потенциал как $\mathbf{v}_s = -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{A}}$.

Дальнейшая процедура вполне аналогична приведенной в предыдущем случае. Переходя от E и B к потенциалу $\hat{\mathbf{A}}$ и разделяя выражение (16) на невозмущенный член и энергию взаимодействия, после перехода к операторам находим собственный гамильтониан поля

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \hat{\mathbf{A}})^2 \right] + \frac{e^2 \rho_0}{2m^2 c^2} \hat{\mathbf{A}}^2$$

и гамильтониан взаимодействия

$$\hat{H}' = \frac{e^2}{2m^2 c^2} \rho_t \hat{\mathbf{A}}^2 - \frac{e}{mc} \rho \mathbf{v}_t \hat{\mathbf{A}}. \quad (17)$$

Формулы (1)–(3), а также уравнения (8), (9) и (11) остаются в силе, если в них положить $\varepsilon_0 = 1$, а дисперсионное соотношение теперь взять в виде $\omega^2 - \omega_p^2 = c^2 k^2$, где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$. По аналогии с (5) флукутирующую плотность среды $\rho_t(\mathbf{r}, t)$ представим в виде ряда:

$$\rho_t = \sum_{\mathbf{x}, \Omega} [\rho(\mathbf{x}, \Omega) e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)} + \rho^*(\mathbf{x}, \Omega) e^{-i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)}]. \quad (18)$$

* Используемое здесь значение для гамильтониана можно получить также из более общего выражения, найденного в [6] для нагретой плазмы и учитывающего как вихревые, так и потенциальные поля.

Что касается второго члена в (17), то в случае плавных флуктуаций $v_r(r, t)$ при усреднении его вклад исчезает, т. е. вероятности уничтожения и рождения одиночных квантов, как и двухфотонного уничтожения и рождения их, описываемые первым членом в (17), можно считать пренебрежимо малыми. В результате снова остаются существенными лишь процессы рассеяния фотонов на флуктуациях плотности среды, вероятности которых

$$W_{k \leftarrow k \pm z} = \frac{2\pi^3 e^4}{m^4} \frac{1}{\omega_k \omega_{k \pm z}} |\rho(z, \Omega)|^2 \delta(\omega_k - \omega_{k \pm z} - \Omega). \quad (19)$$

Коэффициент D_{ij} приближенно можно выразить в виде

$$D_{ij} = \frac{2\pi^3 e^4}{m^4 \omega^2} \int x_i x_j u(z, \Omega) \delta(\omega_k - \omega_{k \pm z} - \Omega) dz d\Omega, \quad (20)$$

где $u(z, \Omega)$ — спектр мощности турбулентных пульсаций.

Для изотропной турбулентности в малоугловом приближении вычисления аналогично (12) дают

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_k \rangle = - \frac{2\pi^4 e^4 c^2}{m^4} \int z^3 u(z, \Omega) \left\langle \frac{1}{k \omega_k^4} \right\rangle dz d\Omega < 0. \quad (21)$$

Это означает, что среднее значение частоты фотонов и энергии электромагнитного поля монотонно убывает в результате взаимодействия с флуктуациями электронной концентрации в плазме. Аналогичным образом получаем $\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega_k^2 \rangle < 0$, хотя, конечно, спектр уширяется:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle (\Delta \omega_k)^2 \rangle > 0, \text{ где } \Delta \omega_k = \omega_k - \omega_{k0}.$$

Подводя итоги, сравним результаты с приведенными в [1-3] выводами, полученными в приближении геометрической оптики. Найденные в данной работе формулы (12), (14) и (21) качественно согласуются с основным выводом [1] о том, что характер и знак энергообмена электромагнитных волн с флюктуирующей средой существенно зависят от закона дисперсии среды, в частности, в недиспергирующей среде средняя частота спектра мощности и плотность энергии растут, а в холодной плазме — убывают. Разумеется, это все справедливо лишь в рассматриваемом здесь линейном приближении, когда обратным влиянием электромагнитного поля на параметры среды можно пренебречь. При этом диффузионное уравнение (9), позволяющее распространять результаты на область больших флуктуаций, получается здесь, в отличие от [3], без привлечения аппарата геометрооптического приближения, связанного с определенными ограничениями (например, недопустимости каустик), и без громоздкой процедуры «замыкания» уравнений.

Вместе с тем, имеется и принципиальное отличие от результатов классического геометрооптического рассмотрения. В [2, 3] было показано, что в неодномерном случае результат существенно зависит также от статистической структуры флуктуаций параметров, в частности, от соотношения между продольным и поперечным масштабами корреляции последних. Физически это объясняется тем, что возмущения угла прихода волны приводят к флуктуациям амплитуды и интенсивности, корреляция которых с вариациями параметров в среднем дает вклад в энергообмен поля со средой [2]. В диспергирующей среде, кроме того, заметный вклад могут давать флуктуации интенсивности, возникающие

из-за перегруппировки частотно-модулированных волн, причем в плаズме с изотропными флуктуациями этот член положителен и является основным [2]. Таким образом, знак в (21) согласуется с результатами фактически одномерного геометрооптического анализа в [1], а вышеупомянутые сопутствующие эффекты, обусловленные флуктуациями угла прихода и дисперсионной перегруппировкой волн, здесь оказываются несущественными. Причина этого заключается в том, что по самой постановке задачи, отвечающей методу вторичного квантования, в данной работе полагается фиксированным число фотонов, а фаза электромагнитного поля оказывается неопределенной. На классическом языке это соответствует приближению хаотических фаз взаимодействующих волн (см. [5]), тогда как в [1, 2] падающая волна считалась строго монохроматической.

В заключение авторы выражают признательность В. Б. Цареградскому за полезное обсуждение затронутых выше вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 1, 69 (1973).
2. В. Г. Гавриленко, М. Н. Кром, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 8, 1181 (1977).
3. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, **19**, № 9, 1359 (1976).
4. В. А. Красильников, В. И. Павлов, ЖЭТФ, **68**, № 5, 1797 (1975).
5. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плаэмы, Атомиздат, М., 1971.
6. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **60**, № 5, 1714 (1971).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 июня 1977 г.

INTERACTION OF PHOTONS IN A TURBULENT MEDIUM

V. G. Gavrilenko, M. N. Krom, N. S. Stepanov

For two models of media — a nondispersive dielectric with the fluctuating permittivity and a cold plasma with variable electron concentration — a problem on the statistical photon characteristics in the turbulent medium is considered by quantum-mechanical perturbation method. In the assumption on the relative slowness of the medium parameter fluctuations a kinetic equation is obtained for the function of photon distribution in the space of pulses. On the basis of this equation the value and the sign of shifting of the average frequency and the photon energy are investigated.

УДК 621.373 826

АВТОДИННЫЙ ЭФФЕКТ В ГАЗОВЫХ ЛАЗЕРАХ

Б. Н. Туманов, Б. И. Левит, А. С. Бабич

Проведено теоретическое и экспериментальное изучение автодинного эффекта в одномодовых газовых лазерах. Показана существенная зависимость автодинного сигнала от скорости движения отражателя. Изучен процесс автодетектирования. По автодинному сигналу определены ненасыщенный коэффициент усиления и добротность резонатора Не-Не-лазера ЛГ-75 в режиме генерации.

В радиоволновом и СВЧ-диапазонах хорошо известны автодинные системы на базе электровакуумных и твердотельных генераторов, которые успешно применяют для решения различных задач ближней радиолокации [1–4] и радиоспектроскопии [5, 6]. Принцип работы указанных систем основан на автодинном эффекте, заключающемся в изменении параметров автоколебаний генератора при изменении характеристик его резонансной системы, происходящем за счет воздействия излучения, отраженного от объекта исследования. При этом обычно осуществляется автодетектирование, т. е. автодинный сигнал регистрируется в цепи питания генератора [7, 8]. В работах [9–12] теоретически и экспериментально изучено изменение генерируемой лазером мощности под воздействием отраженной волны в рамках модели связанных резонаторов. В патенте [13] предложено использовать лазер в качестве источника излучения и усилителя отраженной от подвижного объекта волны с последующей регистрацией сигнала биений на доплеровской частоте. Однако при таком подходе игнорируется поведение лазера как нелинейной системы.

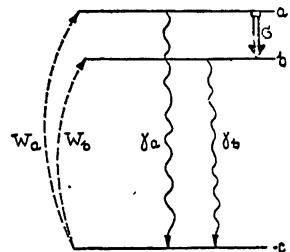
В работах [14–16] исследовано воздействие отраженной волны на процесс генерации лазера, показано изменение амплитуды и частоты генерируемой волны и возможность регистрации отраженного излучения с высокой чувствительностью. Следует отметить, что изученные в указанных работах процессы по смыслу являются проявлением автодинного эффекта в лазере. Целью настоящей работы является исследование механизма автодинного эффекта в газовом лазере и возможности автодетектирования, т. е. регистрации автодинного сигнала в цепи питания его разрядной трубки.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Метод, примененный нами для описания режима генерации одномодового газового лазера при попадании в его резонатор отраженной волны, заключается в решении полуклассической самосогласованной задачи по теории Лэмба [17] в модификации Ханина [18]. Решение первой части поставленной задачи — определение макроскопической поляризации активного вещества лазера — проведено в рамках трехуровневой модели для энергетических состояний атомов активного вещества (см. рис. 1). Используя приближения одномодовой стоячей волны в

резонаторе лазера, пренебрегая пространственной модуляцией населенности и считая, что время изменения амплитуды поля в резонаторе существенно больше времен релаксации элементов матрицы плотности (справедливость подобных приближений подробно обоснована в [18]),

Рис. 1. Модель энергетических уровней активного вещества лазера; a , b — уровни излучательного перехода, c — уровень основного состояния, W_a , W_b — вероятности накачки, γ_a , γ_b — вероятности спонтанных излучений уровней a , b , σ — комплексная амплитуда когерентности на излучательном переходе.



можно определить элементы матрицы плотности движущихся атомов активной среды в зависимости от напряженности поля в резонаторе. Это позволяет рассчитать макроскопическую поляризацию активного вещества лазера, медленно меняющаяся комплексная амплитуда которой равна [18]:

$$P(t) = \frac{8\pi N_e}{V_c} \mu \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_1 + \sigma_{-1}) f(u) du, \quad (1)$$

а также мощность, расходуемую на накачку,

$$P_n(t) = \frac{\hbar N_e}{V_c} \int_{V_c}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_a \omega_{ac} + W_b \omega_{bc}) \sigma_c f(u) du dV, \quad (2)$$

где σ_c — населенность основного состояния, а остальные обозначения соответствуют [18]. Указанные вычисления проведены при условии слабой накачки лазера, что эквивалентно методу Лэмба [17] в третьем порядке теории возмущений.

Отметим, что связь населенности основного состояния с напряженностью поля в резонаторе, проявляющаяся в рамках трехуровневой модели, позволяет в дальнейшем рассчитать по соотношению (2) автодинную модуляцию мощности, расходуемой на накачку, т. е. оценить возможность автодетектирования в газовом лазере.

Вторая часть самосогласованной задачи — определение электромагнитной волны в резонаторе лазера при наличии отраженного луча — заключается в решении укороченного уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд генерируемой волны E и макроскопической поляризации P , которое для одномодового режима имеет вид

$$\frac{dE}{dt} + \left[\frac{\omega_p}{2Q} + i(\omega_p - \omega) \right] E = i \frac{\omega}{2} P, \quad (3)$$

где ω_p и Q — собственная частота и нагруженная добротность резонатора лазера в присутствии отраженной волны. Отраженная волна, попадающая в резонатор лазера, имеет комплексную амплитуду

$$E_R = K_c R_3 (1 - R_2)^2 E(t) e^{i\delta(t)}, \quad (4)$$

где K_c — коэффициент согласования прямого и отраженного лучей, учитывающий рассеивание отраженного луча, R_3 — амплитудный коэф-

фициент отражения внешнего объекта, R_2 — амплитудный коэффициент отражения выводящего зеркала лазера, $\delta(t)$ — фазовый набег отраженной волны относительно генерируемой. Действие отраженной волны на резонатор лазера сводится к изменению его нагруженной добротности Q и собственной частоты ω_p . Этот эффект рассчитан в предположении малости отраженной волны, т. е. при

$$R = K_c R_3 (1 - R_2)^2 \ll 1. \quad (5)$$

Для расчета автодинного эффекта можно представить лазер в виде эквивалентного генератора, работающего на длинную линию с несогласованной нагрузкой. Тогда входную проводимость линии запишем в виде [19]

$$Y_{\text{вх}} = G_0 \frac{1 - Re^{-i\delta}}{1 + Re^{-i\delta}} \approx G_0 (1 - 2R \cos \delta) + i 2R G_0 \sin \delta. \quad (6)$$

Используя общие соотношения для нагруженной добротности и собственной частоты резонатора [19], в случае представления его эквивалентным параллельным контуром, с учетом (6), можно получить

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} \left(1 - 2R \frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}} \cos \delta \right); \quad (7)$$

$$\omega_p = \omega_{p0} \left(1 - R \frac{1}{Q_{\text{вн}}} \sin \delta \right), \quad (8)$$

где Q_0 , ω_{p0} — нагруженная добротность и собственная частота резонатора без отраженной волны, $Q_{\text{вн}}$ — внешняя добротность. Используя формулы для добротности резонатора Фабри — Перо, предложенные в работе [10], из (7) имеем

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} (1 - R f \cos \delta(t)), \quad (9)$$

где

$$f = 2 \frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}} = \frac{2}{1 + (1 - R_1^2)/(1 - R_2^2)}, \quad (10)$$

R_1 — амплитудный коэффициент отражения зеркала резонатора, не связанного с внешним отражателем.

Отметим, что относительное изменение нагруженной добротности согласно (7) больше относительного изменения собственной частоты резонатора по формуле (8) в $2Q_0$ раз, что позволяет при анализе амплитудных соотношений в уравнении (3) учитывать только изменение добротности резонатора.

Подставляя соотношение (1) с вычисленными через напряженность поля когерентностями, а также соотношения (8) — (10) в уравнение (3) и решая его методом итераций с точностью до первого порядка по параметру малости (5), можно определить амплитуду и частоту генерируемой в резонаторе лазера волны в присутствии отраженной:

$$A(t) = A_0 + a(t); \quad (11)$$

$$\frac{da}{dt} + \frac{1}{\tau} a = R f \frac{\omega_{p0}}{2 Q_0} A_0 \cos \delta(t); \quad (12)$$

$$\omega_p = \omega_0 - \Delta\omega_0 - \varepsilon; \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau} \frac{B''}{B'} \frac{a}{A_0} - \varepsilon_p, \quad (14)$$

где A_0 — амплитуда генерируемой волны в отсутствие отраженной, совпадающая с вычисленной по методу Лэмба [17]:

$$A_0^2 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (15)$$

α — ненасыщенный коэффициент усиления за один проход, β — разомерный параметр насыщения, $B = B' + iB''$ — комплексный интеграл насыщения, введенный в [18], Δ_0 — сдвиг генерируемой частоты за счет затягивания и выталкивания [17], $a(t)$ — составляющая амплитуды генерируемой волны, обусловленная присутствием отраженной, т. е. автодинная составляющая амплитуды генерируемой волны,

$$\tau = \frac{Q_0}{\alpha \omega_{p0}} \quad (16)$$

— время отклика автодина, определенное по уравнению (12) как время установления амплитуды автодинной составляющей генерируемой волны, ε — сдвиг частоты генерируемой волны, вызванный отраженной волной, или автодинный сдвиг частоты, ε_p — сдвиг частоты за счет перестройки собственной частоты резонатора, определенный по (8).

Рассчитав параметры генерируемой волны, из решения уравнений для матрицы плотности трехуровневой системы можно найти изменение населенности основного состояния и мощности накачки (2), обусловленные автодинным эффектом:

$$\Delta P_n = \hbar N_e (\gamma_a \omega_{ac} \Lambda_a + \gamma_b \omega_{bc} \Lambda_b) (\Lambda_a + \Lambda_b) \mu_0 \frac{z'}{\sqrt{\pi}} \frac{2 A_0 a(t)}{\hbar \gamma}, \quad (17)$$

где

$$\mu_0 = \frac{4 \pi^{3/2} |\mu|^2}{3 \hbar k u_0},$$

остальные обозначения — общепринятые в теории газовых лазеров [17, 18]. Выражение (17) описывает модуляцию мощности разрядного тока газового лазера, т. е. показывает возможность осуществления процесса автодетектирования, когда автодинный сигнал регистрируется в цепи питания разрядной трубки. Как видно из проведенного расчета, механизм автодетектирования в газовых лазерах обусловлен связью уровней излучательного перехода, модулированного отраженной волной, и уровня основного состояния атомов, с которого проводится накачка.

Расчеты по формулам (11)–(14) дают возможность исследовать как стационарный режим генерации, так и переходные процессы в лазере при попадании в его резонатор отраженной волны с фазовым набегом $\delta(t)$. Если внешний отражатель движется вдоль луча лазера с постоянной скоростью v , то стационарное решение уравнения (12) будет

$$a(t) = R K_a A_0 \cos(\omega_D t + \psi_0), \quad (18)$$

где ω_D — доплеровская частота,

$$K_a = \frac{f}{2 \alpha \sqrt{1 + (\omega_D \tau)^2}} \quad (19)$$

— коэффициент автодинного усиления, равный отношению амплитуды автодинной составляющей генерируемой волны к амплитуде отраженной волны, попавшей внутрь резонатора лазера, $A_R = RA_0$.

Из выражений (15), (18), (19) видно, что коэффициент автодинного усиления K_a , а также автодинная составляющая генерируемой волны $a(t)$ увеличиваются по мере приближения к порогу генерации за счет уменьшения коэффициента усиления α . Это присуще всем автодинным системам на любых автогенераторах. Из выражения (19) видно также, что коэффициент автодинного усиления уменьшается, если период доплеровской модуляции отраженной волны становится меньше времени отклика лазера — автодина τ , так как лазер, имея высокую добротность, не успевает реагировать на быстро изменяющиеся воздействия. Отметим также, что подобное уменьшение автодинного усиления при больших доплеровских частотах присуще и радиочастотным автодинным системам [2].

Если внешний отражатель совершают гармонические колебания вдоль луча с частотой Ω и амплитудой z , то для автодинной составляющей $a(t)$ из (12) получим

$$a(t) = RA_0 \left\{ K_a^{(0)} \cos \delta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [K_a^{(2n)} \cos \delta_0 \cos 2n\Omega(t-\tau) + K_a^{(2n-1)} \sin \delta_0 \sin (2n-1)\Omega(t-\tau)] \right\}, \quad (20)$$

где

$$K_a^{(n)} = \frac{f J_n(m)}{2 \alpha \sqrt{1 + (n\Omega\tau)^2}}, \quad (21)$$

$J_n(m)$ — функция Бесселя n -го порядка, $m = 2z\omega/c$ — индекс модуляции. Из выражений (20) и (21) следует, что автодинная составляющая имеет сложный спектр, причем для каждой спектральной компоненты коэффициент автодинного усиления будет различным. Это приводит в случае колеблющегося отражателя к специфической модуляции автодинного отклика лазера, легко наблюдаемой экспериментально.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки величин автодинного сигнала в газовом лазере при детектировании по излучаемой мощности (режим внешнего детектирования) и в режиме автодетектирования, коэффициента его усиления и области применения лазера-автодина использована экспериментальная установка, схема которой приведена на рис. 2. Излучение лазера ЛГ-75 (1) проходит со стороны плоского зеркала с коэффициентом отражения $R_2 \approx 0,94$ через диафрагму (Δ), пропускающую только одну поперечную моду, светофильтр (Φ), выделяющий продольную моду с длиной волны $\lambda \approx 0,63 \text{ мк}$ и имеющий коэффициент пропускания $K_\Phi \approx 0,68$, и отражается от плоского колеблющегося отражателя с амплитудным коэффициентом отражения $R_3 \approx 0,2$. Отражатель укреплен на мембране генератору, с помощью которого выбирается необходимая частота и амплитуда колебаний. Автодинный сигнал регистрируется ФЭУ-36 (2),

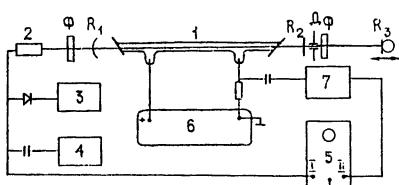


Рис. 2. Схема экспериментальной установки.

жатель укреплен на мембране генератору, с помощью которого выбирается необходимая частота и амплитуда колебаний. Автодинный сигнал регистрируется ФЭУ-36 (2),

на который падает луч, выходящий со стороны сферического зеркала лазера с коэффициентом отражения $R_1 \approx 0,99$. Постоянная и переменная составляющие напряжения на ФЭУ

$$U = k[A_0 + a(t)]^2 \approx kA_0^2 + 2kA_0a(t), \quad (22)$$

где k — коэффициент преобразования ФЭУ, измерялись вольтметрами (3) и (4). Одновременно автодинный сигнал регистрировался по изменению разрядного тока и снимался с резистора в катодной цепи питания трубки лазера. Форма автодинного сигнала наблюдалась на экране двухлучевого осциллографа (5) (6 и 7 — соответственно источник питания лазера и усилитель).

При вариации амплитуды и частоты колебаний отражателя, как следует из соотношений (20) и (22), можно получить симметричную форму автодинного сигнала, для которого $\delta_0 = 0$, $m = l\pi$, где l — число полных периодов на осциллограмме. Этот сигнал описывается формулой

$$u(t) = 2RkA_0^2 \left[K_a^{(0)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_a^{(2n)} \cos 2n\Omega(t - \tau) \right]. \quad (23)$$

Типичная осциллограмма автодинного сигнала при $l = 7$ и $\Omega = 2\pi \cdot 300 \text{ c}^{-1}$ приведена на рис. 3. Провал в центре осциллограммы, где скорость отражателя наибольшая, обусловлен уменьшением коэффициента автодинного усиления (21) при модулирующих воздействиях, период которых меньше времени τ . Расчетами на ЭВМ легко подобрать такую величину τ , при которой провал рассчитанной по (23) кривой совпадает с провалом на осциллограмме. В нашем случае подобранное значение времени отклика $\tau \approx 58 \text{ мкс}$. Величины сигнала, рассчитанные по формуле (23) при этом значении τ и приведенные к масштабу осциллограммы, отмечены на рис. 3 точками. Наблюданное хорошее совпадение расчетных значений с экспериментальной кривой свидетельствует о справедливости введенных в теоретическом анализе приближений.

Определив для лазера-автодина время отклика τ , можно из (22), (23) и (5) рассчитать ненасыщенный коэффициент усиления и добротность резонатора по глубине модуляции напряжения, снимаемого с ФЭУ. При этих вычислениях коэффициент согласования прямого и отраженного лучей K_c , входящий в (5), был определен по методике Берштейна [14] и составил $K_c \approx 0,95$. Таким образом, по автодинному эффекту для лазера типа ЛГ-75 при разрядном токе $I_p = 26 \text{ mA}$ определены следующие значения добротности и ненасыщенного коэффициента усиления: $Q_0 \approx 2,2 \cdot 10^8$; $a \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$. Тогда по формуле (25) можно определить максимальное значение основной характеристики автодиона на лазере — коэффициента автодинного усиления $K_a \approx 10^3$, достигаемое при $\omega_D \tau \ll 1$.

Поскольку теоретический анализ показал, что автодинный эффект, проявляющийся в изменении мощности, расходуемой на накачку (17), связан с изменением населенности основного состояния, то сигнал автодетектирования можно регистрировать по изменению разрядного тока лазера. Лазер ЛГ-75, блок питания которого содержит стабилизатор

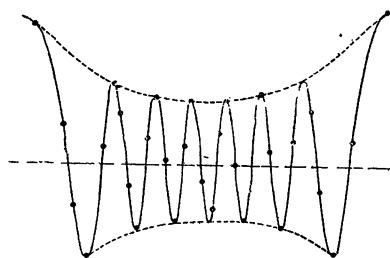


Рис. 3. Осциллограмма автодинного сигнала на ФЭУ для лазера ЛГ-75 при разрядном токе $I_p = 26 \text{ mA}$, $\Omega = 2\pi \cdot 300 \text{ c}^{-1}$ и $l=7$.

напряжения, достаточно удобен для исследования сигнала автодетектирования, так как изменение мощности накачки в этом случае однозначно связано с изменением разрядного тока. Отметим, что на лазере ЛГ-56 со стабилизатором тока СБП-5 сигнал автодетектирования не наблюдался.

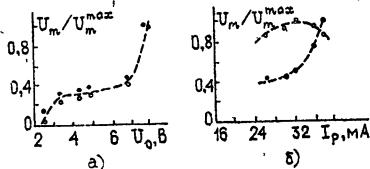


Рис. 4. Нормированные амплитуды автодинных сигналов:

- а) в зависимости от величины постоянного напряжения на ФЭУ U_0 при внешнем детектировании (светлые кружки) и автодетектировании (темные кружки),
 б) в зависимости от величины постоянной составляющей разрядного тока I_p при внешнем детектировании и автодетектировании.

При исследовании режима автодетектирования по разрядному току в лазере-автодине представляет интерес определение вида автодетекторной характеристики и сравнение с внешним детектированием на фотоприемнике. Экспериментальные результаты приведены на рис. 4. График на рис. 4а показывает зависимость нормированных амплитуд автодинных сигналов автодетектирования и внешнего детектирования от величины постоянного напряжения на ФЭУ U_0 , пропорционального уровню генерируемой мощности, изменение которого достигалось перестройкой добротности резонатора лазера за счет поворота зеркала R_2 . Совпадение рассмотренных зависимостей для двух режимов детектирования свидетельствует о квадратичности автодетекторной характеристики, что следует из выражения (17), полученного в теоретическом анализе.

На рис. 4б приведены аналогичные зависимости нормированных амплитуд автодинных сигналов от величины постоянной составляющей разрядного тока I_p . Увеличение автодинного сигнала при автодетектировании с ростом I_p обусловлено увеличением параметров накачки рабочих уровней Λ_a и Λ_b , что описывается выражением (17). Зависимость автодинного сигнала при внешнем детектировании определяется изменением коэффициента усиления α от разрядного тока I_p .

Одновременное наблюдение осциллограмм автодинных сигналов при автодетектировании и внешнем детектировании показывает, что отношение сигнал/шум при автодетектировании для данного типа лазера примерно на два порядка меньше, чем при внешнем детектировании,

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автодинный эффект в лазере количественно характеризуется автодинным коэффициентом усиления K_a , величина которого растет с приближением к порогу генерации и существенно зависит от радиальной скорости движения отражателя v . Для лазера типа ЛГ-75 при $v \leq 0,05 \text{ мм/с}$ максимальное значение $K_a \approx 10^3$, но при $v \geq 0,5 \text{ м/с}$ величина K_a становится меньше единицы.

В случае гармонически колеблющегося отражателя можно наблюдать специфическую модуляцию автодинного сигнала, по глубине которой легко определить добротность Q и ненасыщенный коэффициент усиления α . Указанное явление можно использовать для изучения локальных поверхностных вибраций различных отражателей.

Теоретически и экспериментально показана возможность автодетектирования, когда автодинный сигнал регистрируется в цепи питания разрядной трубки лазера. Однако в газовых лазерах чувствитель-

ность при автодетектировании на два порядка уступает внешнему детектированию автодинного сигнала вследствие больших шумов разрядного тока в газовой плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. D. Hupton and B. J. Miller, *Electronics*, **18**, № 12, 98 (1945).
2. И. Л. Берштейн, *Радиотехника*, **1**, № 9, 11 (1946).
3. И. М. Коган, *Теоретические основы радиолокации на малых расстояниях*, сб. *Радиотехника*, **13**, изд. Сов. радио, М., 1976.
4. И. М. Коган, *Ближняя радиолокация*, изд. Сов. радио, М., 1973.
5. Е. М. Гершензон, А. А. Негирев, Б. Н. Туманов, *ПТЭ*, **2**, 115 (1972).
6. Е. М. Гершензон, Е. М. Кулешов, А. А. Негирев, Л. А. Орлов, Б. Н. Туманов, *ПТЭ*, **3**, 148 (1975).
7. Е. К. Алаков, *Изв. вузов — Приборостроение*, **2**, № 2, 28 (1959).
8. Б. Н. Туманов, *Электронная техника, серия I, Электроника СВЧ*, № 9, 11 (1971).
9. P. T. Bolwijn, Th. H. Peek and C. Th. J. Alkemade, *Phys., Lett.*, **23**, 88 (1966).
10. Th. H. Peek, P. T. Bolwijn and C. Th. J. Alkemade, *Am. J. Phys.*, **35**, 820 (1967).
11. И. М. Белоусова, О. Б. Данилов, А. Ф. Запрягаев, *ЖТФ*, **41**, № 5, 1028 (1971).
12. А. Ф. Запрягаев, *ЖТФ*, **45**, № 1, 197 (1975).
13. Патент США, кл. 356 28 (G01P3/36, H01S3/00), № 3958881, заявл. 18.11.1970 (№ 90526), опубл. 25.05.1976.
14. И. Л. Берштейн, *Изв. вузов — Радиофизика*, **16**, № 4, 526 (1973).
15. И. Л. Берштейн, Д. П. Степанов, *Изв. вузов — Радиофизика*, **16**, № 4, 531 (1973).
16. М. С. Доманов, В. Д. Щербатых, *Квантовая электроника*, **2**, № 1, 99 (1975).
17. W. E. Lamb, *Phys. Rev.*, **134**, 1429 (1964).
18. Я. И. Ханин, *Динамика квантовых генераторов*, сер. *Квантовая радиофизика*, т. 2, изд. Сов. радио, М., 1975.
19. И. В. Лебедев, *Техника и приборы СВЧ*, т. I, изд. Высш. школа, М., 1970.

Н.-Тагильский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
5 июля 1977 г.

AUTODYNE EFFECT IN GAS LASERS

B. N. Tumanov, B. I. Levit, A. S. Babich

Investigation of autodyne effect in one-mode gas lasers is carried out theoretically and experimentally. The essential dependence of an autodyne signal on the reflector velocity of motion is shown. The process of autodetection is studied. According to the autodyne signal the unsaturated coefficient of amplification and the resonator quality of He-Ne-laser LG-75 in the oscillation regime are defined.

УДК 621.372 2

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Ю. К. Богатырев, Н. П. Ямпурин

Рассматривается распространение квазигармонических сигналов в волновой структуре, периодически нагруженной нелинейными резонансами и активными элементами. Асимптотическим методом получены и исследованы уравнения первого и второго приближений. Показано, что в таких структурах имеют место эффекты взаимного преобразования частотной модуляции в амплитудную, а также эффект самомодуляции волновых сигналов.

Самовоздействие модулированных волн достаточно полно рассмотрено в сплошных нелинейных средах применительно к задачам нелинейной оптики и плазмы [1, 2, 7]. Исследования таких процессов в электродинамических средах с пространственной периодичностью (электромагнитные и акустические волны в доменных и многослойных тонкопленочных и интегральнооптических структурах, нелинейных замедляющих системах и т. д.) до сих пор почти не проводились. Исключение составляют исследования неустойчивости волн в цепочечных LC -линиях задержки с реактивной нелинейностью [4, 5], по существу, моделирующих распределенную среду, а также подавления самофокусировки при усилении мощных световых импульсов путем разбиения непрерывной активной среды на периодическую [6, 7, 12].

В данной работе рассматриваются нелинейные эффекты, возникающие при распространении модулированных квазигармонических волн в периодической структуре радиодиапазона — распределенной линии передачи, равномерно нагруженной нелинейными резонансными контурами и элементами с отрицательной проводимостью (рис. 1). Исследуются амплитудно-частотные преобразования, неустойчивость и автомодуляция волн в условиях, когда на волновые процессы существенное влияние оказывает пространственная дисперсия, обусловленная периодичностью структуры.

1. Одномерная периодическая структура, представленная на рис. 1, в дискретных точках $x = n\Lambda$ описывается системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами:

$$u_n(\tau) - u_{n+1}(\tau + 1) = \delta \frac{\partial}{\partial \tau} U_n(\tau) + \frac{1}{\delta_1} \int U_n(\tau) d\tau + \mu f_1, \quad (1)$$

$$v_n(\tau) - v_{n+1}(\tau - 1) = - \delta \frac{\partial}{\partial \tau} U_n(\tau) - \frac{1}{\delta_1} \int U_n(\tau) d\tau - \mu f_1,$$

где $U_n(\tau) = u_n(\tau) + v_n(\tau)$ ($u = u(x - wt)$, $v = v(x + wt)$ соответствуют встречным волнам, w — скорость распространения волн); $\tau = \omega t / \Lambda$, $n = x / \Lambda$; $\delta = C_0 / 2\Lambda C$, $\delta_1 = 2L_0 / \Lambda L$ (L , C — погонные параметры ли-

нии передачи, L_0 , C_0 — линейные параметры контуров; $\mu \ll 1$ — малый параметр; нелинейная функция

$$f_1 = \frac{\delta}{C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} Q^*(U_n) + \frac{\rho}{2} \varphi(U_n). \quad (2)$$

Здесь $Q^*(U_n)$ — нелинейные члены полинома $Q(U_n) = C_0 U_n + \frac{1}{2} D_1 U_n^2 + \frac{1}{3} D_2 U_n^3 = C_0 U_n + Q^*(U_n)$, аппроксимирующего вольт-вольную характеристику емкости контура; $\varphi(U_n) = -g U_n + \beta U_n^2 + \alpha U_n^3$ — характеристика нелинейного активного элемента, типичная, например, для туннельных диодов, диодов Ганна и тому подобных СВЧ полупроводниковых устройств.

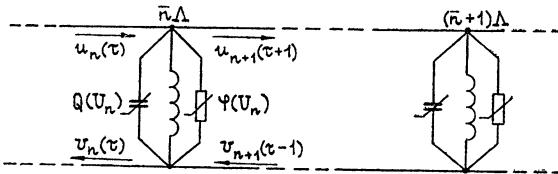


Рис. 1. Эквивалентная схема периодической структуры.

Прежде чем перейти к нелинейному анализу системы (1), (2), рассмотрим некоторые существенные особенности, связанные с распространением волн $u, v \sim \exp[j(\omega \tau \mp kn)]$ в линейной ($\mu = 0$) периодической структуре. Дисперсионная характеристика структуры в этом случае имеет вид

$$D(\omega, k) = \cos k - \cos \omega - (\omega \delta_1)^{-1} [1 - (\omega/\omega_0)^2] \sin \omega = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = (\delta \delta_1)^{-1} = \omega_p^2 \Lambda^2 / w^2$ ($\omega_p = (L_0 C_0)^{-1/2}$ — резонансная частота контура). Кривые, соответствующие (3), имеют типичную для периодических систем зонную структуру с шириной полос пропускания, уменьшающейся с увеличением разности частот $|\omega - \omega_0|$. Общий вид дисперсионных кривых (рис. 2) существенно зависит от величины параметров $\omega_0, \delta, \delta_1$. В случае сильной дисперсии, когда $\delta, \delta_1 \gg 1$, $\omega_0 < 1$, длины волн огибающей (λ_ω) и заполнения (λ) сигнала с частотой $\omega \sim \omega_0$ значительно пре- восходят период структуры Λ , резонансные свойства, обусловленные периодичностью структуры, не проявляются. Волновые процессы в структуре адекватны протекающим в однородной квазираспределенной системе.

Качественно иная картина наблюдается в слабодиспергирующей периодической структуре, где параметры $\delta, \delta_1 \ll 1, \omega_0 \gg 1$. В наиболее сложном случае, когда спектр модулированного сигнала охватывает большое число зон пропускания ($\lambda \ll \lambda_\omega \ll \Lambda$), между составляющими спектра возможны резонансные взаимодействия, приводящие к заметному расширению спектра сигнала и образованию существенно нели-

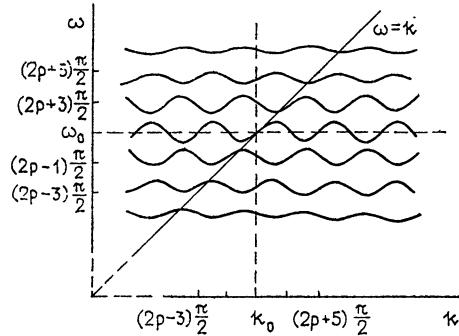


Рис. 2. Дисперсионные кривые структуры, изображенной на рис. 1.
 $\omega_0 = (2p+1)\pi/2, p \gg 1$.

нейных волн [8, 9]. Возможна и более простая ситуация, когда ширина спектра сигнала $\Delta S(\omega) \ll \omega_0$ значительно уже зоны пропускания структуры и условия фазового синхронизма для возбуждений на частотах $m\omega$, $m(\omega \pm \Omega)$ ($m = 2, 3, \dots$) не выполняются. В этом случае для пространственных масштабов волн и структуры характерны соотношения $\lambda \ll \Lambda$, $\Lambda \ll \lambda_\omega$, поэтому влияние пространственной дисперсии сохраняется заметным, даже если между составляющими спектра сигнала имеют место только несинхронные взаимодействия. Именно такая ситуация и будет рассмотрена ниже.

Решение системы (1), (2) с учетом влияния нелинейности элементов структуры в этом случае целесообразно искать в виде волны

$$U(u_n(\tau), v_n(\tau)) \approx \psi a(\mu n, \mu \tau) \exp[j(\omega \tau - kn)] + \text{к. с.},$$

комплексная амплитуда которой $a = A \exp(j\varphi)$ медленно меняется по n и τ . Здесь $\psi = \{1, -(1-jQ)\}$ — коэффициент распределения амплитуд волн u_n, v_n ; $Q = \omega \delta_1 (\omega^2 \delta \delta_1 - 1)^{-1} e^{j(\omega - k)} - 1$, $\omega \neq \omega_0$. Используя асимптотический метод, развитый в [10, 11], получим приближенные уравнения и исследуем их решения.

2. Амплитудно-частотная автомодуляция. Уравнение первого приближения системы (1), (2) имеет вид

$$\theta \frac{\partial a}{\partial \tau} + \Phi \frac{\partial a}{\partial n} = \mu F(a), \quad (4)$$

где

$$\theta = \{jQ - e^{2j\omega} - 2 - |Q|^2\} e^{-j(\omega+k)} - |Q|^2 (\delta^2 - \omega^2 \delta_1^{-1}) = b + jc,$$

$$\Phi = \{-e^{2j\omega} + j(Q - Q^*) + 1 + |Q|^2\} e^{-j(\omega+k)} = d + je,$$

$$F = \bar{g}(1 - h|a|^2)a + jq a|a|^2, \quad \bar{g} = -\rho g |Q|^2/2,$$

$$h = 3a|Q|^2/g, \quad q = \omega \delta D_2 |Q|^4/C_0.$$

После перехода к действительным переменным A и φ (4) распадается на два нелинейных уравнения

$$\begin{aligned} b \frac{\partial A}{\partial \tau} + d \frac{\partial A}{\partial n} - A \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + e \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) &= \bar{g} A (1 - h A^2), \\ c \frac{\partial A}{\partial \tau} + e \frac{\partial A}{\partial n} + A \left(b \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + d \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) &= q A^3, \end{aligned} \quad (5)$$

аналитическое решение которых удается найти лишь для стационарных во времени ($\partial/\partial\tau = 0$) режимов. В этом случае за амплитудно-фазовыми изменениями волны, распространяющейся вдоль n , удобно проследить, выделив решения, связанные с действием активной и реактивной нелинейностей отдельно. В активной ($g \neq 0, q = 0$) периодической структуре изменение амплитуды волн происходит по закону

$$A(n) = \{h + [A^{-2}(0) - h] \exp[-2\bar{g}nd/(e^2 + d^2)]\}^{-1/2}. \quad (6)$$

В зависимости от начальных условий $A(0)$ амплитуда волны $A(n)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению $A^* = h^{-1/2}$. Происходящее при этом изменение фазы волны

$$\varphi(n) = \frac{e}{d} \ln [A(0)/A(n)] + \varphi_0 \quad (7)$$

полностью определяется зависимостью $A(n)$, что свидетельствует о переходе в процессе распространения амплитудной модуляции волны в фазовую. В «распределенном», не учитывающем периодичность структуры, случае, когда параметры $e, c = 0, b, d = -1$, фаза волны не меняется: $\varphi(n) = \varphi(0) = \varphi_0$.

В структуре с реактивной нелинейностью ($\bar{g} = 0, q \neq 0$) ситуация существенно иная. Изменения амплитуды и фазы волны

$$A(n) = A(0) \exp\{e[\varphi(n) - \varphi_0]/d\}; \quad (8)$$

$$\varphi(n) = -\frac{d}{2e} \ln \left[1 - \frac{2eq A^2(0)}{e^2 + d^2} \right] + \varphi_0 \quad (9)$$

взаимосвязаны таким образом, что даже при постоянных начальных условиях $A(0), \varphi_0 = \text{const}$ в процессе распространения наблюдается нелинейное изменение фазы $\varphi(n)$ и, следовательно, частотная автомодуляция волны. В свою очередь, это обстоятельство, в отличие от предыдущего случая, приводит к качественно новому эффекту: преобразованию фазовой модуляции волны в амплитудную. Оба эффекта обусловлены, наряду с нелинейностью, периодичностью ($e, c \neq 0$) изменения свойств структуры вдоль направления распространения волн. Действительно, в распределенной системе согласно результатам, следующим из (8), (9) при $e = c = 0, b = d = -1$ и совпадающим с известными ранее, изменение фазы $\varphi(n) = qA^2(0)n + \varphi(0)$ прямо пропорционально n , поэтому эффекты частотной и, следовательно, амплитудной ($A(n) = A(0) = \text{const}$) модуляции волн в первом приближении отсутствуют [3].

3. Устойчивость и стационарные волны. Как показано выше, основные особенности поведения волн в активной периодической структуре определяются уже в первом приближении, тогда как в структуре с реактивной нелинейностью в этом смысле представляет интерес исследование уравнения и второго приближения:

$$\theta \frac{\partial a}{\partial \tau} + \Phi \frac{\partial a}{\partial n} - \gamma \frac{\partial^2 a}{\partial n^2} = jq|a|^2 a. \quad (10)$$

Вид уравнения (10) совпадает с полученным ранее при исследовании самовоздействия волн в сплошной среде [2, 3]. Имеются, однако, и существенные отличия, заключающиеся в том, что в (10) дисперсионный параметр $\gamma = \gamma_1 + j\gamma_2$ и параметры θ, Φ — комплексные величины, тогда как в уравнении для сплошных сред величина $\gamma = j\gamma_2$ мнимая ($\gamma_1 = 0$), а θ и Φ , как правило, действительные.

Для волн с действительными амплитудами A и фазами φ (10) сводится к системе нелинейных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} b \frac{\partial a}{\partial \tau} + d \frac{\partial a}{\partial n} - A \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + e \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) + \gamma_2 A^{-1} \frac{\partial}{\partial n} \left(A^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right) - \\ - \gamma_1 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial n^2} - A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right] = 0, \\ b \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + d \frac{\partial \varphi}{\partial n} + A^{-1} \left(c \frac{\partial A}{\partial \tau} + e \frac{\partial A}{\partial n} \right) + \gamma_2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 - \right. \\ \left. - A^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial n^2} \right] - \gamma_1 A^{-2} \frac{\partial}{\partial n} \left(A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = qA^2, \end{aligned} \quad (11)$$

позволяющей, в частности, судить об устойчивости волн, распространяющихся в структуре.

Динамику неустойчивости волны с амплитудой A_0 и фазой φ_0 можно проследить, рассматривая развитие ее малых возмущений [1]. Полагая в (11) $A = A_0 + A' \exp[j(\Omega\tau - Kn)]$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi' \exp[j(\Omega\tau - Kn)]$ и оставляя только члены первого порядка малости, получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &[j(b\Omega - dK) + \gamma_1 K^2]^2 + [j(c\Omega - eK) + \gamma_2 K^2]^2 - \\ &- 2qA_0^2 [j(c\Omega - eK) + \gamma_2 K^2] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

относительно $\Omega(K) = \Omega_1(K) + j\Omega_2(K)$, по виду корней которого можно судить о развитии возмущений A' , φ' .

Решение уравнения (12) имеет вид

$$\Omega = \frac{M + \sqrt[4]{G^2 + N^2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + m\pi \right) + j \sin \left(\frac{\varphi}{2} + m\pi \right) \right]}{b^2 + c^2}, \quad (13)$$

где

$$M = (bd + ce)K + j[(b\gamma_1 + c\gamma_2)K^2 - qA_0^2c],$$

$$G = K^4(\gamma_2 b - \gamma_1 c)^2 - K^2(dc - be)^2 + 2qA_0^2(c\gamma_1 - b\gamma_2)bK^2 - q^2A_0^4c^2,$$

$$N = 2K(dc - be)[K^2(\gamma_2 b - \gamma_1 c) - qA_0^2b],$$

параметр $m = 0,1$, $\varphi = \arctg(N/G)$ при $G > 0$ или $\varphi = \arctg(N/G) + \pi$ при $G < 0$.

В общем виде исследование (13) затруднительно ввиду непринципиальных трудностей вычисления параметра γ для произвольных соотношений ω и ω_0 . Поэтому специфические особенности самовозействия волны в периодической структуре исследуем для более простого случая $\omega = \omega_0$. В этом случае в (12) $b = d = -1$, $e = c = 0$ и решение (13) принимает вид

$$\Omega = K - j\gamma_1 K^2 \pm K(\gamma_2^2 K^2 - 2q\gamma_2 A_0^2)^{1/2}, \quad (14)$$

где $\gamma_1 = -1/2$, $\gamma_2 = x(x^2 - 1)/(x^2 + 1)\omega_0^2$, $x = \rho/\rho_0$ — отношение волнового сопротивления линии ρ к характеристическому сопротивлению контура ρ_0 .

Из равенства (14) следует, что достаточные для распределенных сред условия неустойчивости волны $(\gamma_2^2 K^2 - 2q\gamma_2 A_0^2) < 0$, $q\gamma_2 > 0$ для периодических структур являются лишь необходимыми. Дело в том, что присутствие слагаемого $-j\gamma_1 K^2$ в (14) указывает на затухание малых амплитудно-фазовых возмущений не только при выполнении прямого неравенства $(\gamma_2^2 K^2 - 2q\gamma_2 A_0^2) > 0$, но и обратного. Поэтому неустойчивость волн возникает, если величина $K[-(2q\gamma_2 A_0^2 - \gamma_2^2 K^2)]^{1/2} < 0$ превзойдет некоторый «порог», равный $|\gamma_1 K^2|$, т. е. когда будет выполнено неравенство

$$|\gamma_1 K^2| - K(2q\gamma_2 A_0^2 - \gamma_2^2 K^2)^{1/2} < 0. \quad (15)$$

Пороговое значение интенсивности волны при этом равно

$$A_{0 \text{ пор}}^2 = \frac{K^2}{2q\gamma_2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \quad q\gamma_2 > 0. \quad (16)$$

* Подобная ситуация имеет место также и в распределенных активных средах [3], где, однако, параметры порядка $\sim \gamma_{1,2}$ удовлетворяют неравенству $\gamma_1 \ll \gamma_2$.

Нетрудно видеть, что величина A_0 зависит от одного из основных параметров структуры — Λ . Действительно, в рассматриваемой задаче параметр $\omega = \omega_p \Lambda / w \gg 1$, поэтому в (16) величина $\gamma_2^2 \sim \omega_0^{-4}$ много меньше $\gamma_1^2 = 1/4$ и, следовательно, значение $A_0 \sim \gamma_2^{1/2} \sim \omega_0 \sim \Lambda$ тем выше, чем больше период структуры.

Заметим, что из решения (13) в общем случае следует условие неустойчивости волны

$$| (b \gamma_1 + c \gamma_2) K^2 - q A_0^2 c | + \sqrt[4]{G^2 + N^2} \sin \left(\frac{\varphi}{2} + m\pi \right) < 0,$$

совпадающее с (15) при $\omega = \omega_0$.

Рассмотрим теперь стационарные решения системы (11). Переядя к бегущей координате $\eta = \tau - n/V$ и без ограничения общности положив $V = 1$ ($\omega = \omega_0$), преобразуем (11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} &= -\frac{2}{A} \frac{dA}{d\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} (qA^2 + C_1), \\ \frac{d^2A}{d\eta^2} &= A \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \frac{\gamma_2 A}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} (qA^2 + C_1), \end{aligned} \quad (17)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. В фазовом пространстве переменных $A, \varphi, dA/d\eta, d\varphi/d\eta$ система (17) имеет две особые точки $A_{01}, A_{02} = \pm (-C_1/q)^{1/2}$, $dA/d\eta = 0$, расположенные в плоскости $A, dA/d\eta$, соответствующие состояниям равновесия типа центра (рис. 3а), для значений параметров $\gamma_2, C_1 < 0, q\gamma_2 > 0$. Замкнутым интегральным кривым соответствуют решения (17) в виде амплитудно-модулированных волн с различными индексами модуляции (рис. 3б). Кривым, более удаленным от центра, соответствуют волны с большими индексами модуляции (автомодуляции).

Строгое определение длины огибающей модулированной волны λ_ω затруднительно. Однако приближенную оценку ее величины нетрудно получить, решив систему (17), линеаризованную вблизи одного из состояний равновесия A_{01}, A_{02} . В результате имеем

$$\lambda_\omega \approx 2\pi w/A_{01} [2q\gamma_2/(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)]^{1/2} \quad (\gamma_1 \ll \gamma_2). \quad (18)$$

Из равенства (18) видно, что величина λ_ω обратно пропорциональна среднему амплитудному уровню (A_{01}) волны, а также существенно зависит (через параметр γ_2) от отношения волновых сопротивлений $\rho/\rho_0 = \kappa$ и периода структуры Λ . Последнее обстоятельство может быть использовано, в частности, для получения амплитудно-модулированных волн с заранее заданными параметрами.

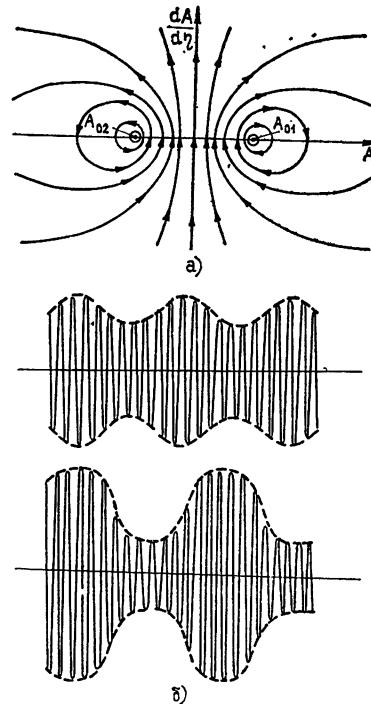


Рис. 3 а) Фазовый портрет системы (17); б) возможные виды нелинейных волн,

В заключение отметим, что все рассмотренное выше справедливо как для бегущих ($\psi \approx \{1, 0\}$, $u_n \gg v_n$), так и для стоячих ($\psi \approx \{1, 1\}$, $u_n \approx v_n$) волн, поскольку переменная $a(n, \tau)$ характеризует «суммарное» взаимодействие встречных волн u_n и v_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 471 (1966).
2. В. И. Беспалов, Л. Г. Литвак, В. И. Таланов, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Новосибирск, 1968.
3. Л. А. Островский, Доклад на II Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, Новосибирск, 1968.
4. Л. А. Островский, Л. В. Соустов, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 2, 242 (1972); 18, № 5, 700 (1975).
5. Я. Н. Муллер, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 2, 25 (1975).
6. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1116 (1972).
7. Н. Б. Баранова, Н. Е. Быковский, Б. Я. Зельдович, Ю. В. Сенатский, Квантовая электроника, 1, № 24, 35 (1974).
8. Ю. К. Богатырев, К. А. Горшков, Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 458 (1976).
9. Ю. К. Богатырев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 366 (1977).
10. Ю. К. Богатырев, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1173 (1972).
11. М. И. Рабинович, Д. Д. Розенблум, Межвузовский сб. Динамика систем, вып. 4, Горький, 1974.
12. С. Н. Власов, Квантовая электроника, 3, № 2, 451 (1976).

Горьковский политехнический
инstitut

Поступила в редакцию
2 июня 1977 г.

SELF-ACTION OF WAVES IN PERIODIC STRUCTURES

Yu. K. Bogatyrev, N. P. Yampurin

Propagation of quasi-harmonic signals is considered in a wave structure periodically loaded by the nonlinear resonance and active elements. Equations of the first and the second approximation are obtained and investigated by the asymptotic method. It is shown that effects of mutual transformation of the frequency modulation into the amplitude one and also the effect of self-modulation of the wave signals take place in such structures.

УДК 621.373 · 621.385 6

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЕ ПОЛЯ В РЕЗОНАТОРЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

T. M. Таранович

Исследуются стационарные режимы — результат взаимодействия в системе двух встречных волн с одинаковыми частотами — при малой расстройке от пространственного синхронизма. Показано, что пространственно-однородные режимы возможны только в генераторах с кольцевым резонатором. Для кольцевых систем указаны возможные распределения амплитуд встречных волн вдоль резонатора.

Для получения режима квазисинусоидальных волн в распределенных и квазираспределенных генераторах радиодиапазона необходимо работать в области сильной дисперсии системы, где генерация гармоник невозможна. Во многих случаях подобный генератор представляет собой систему с периодически меняющимися вдоль резонатора параметрами (например, из-за того, что дискретные активные элементы включены через определенные интервалы). В такой среде невозможен режим одноволновой стационарной генерации [1], так как неоднородность приводит к дополнительной связи встречных волн (кроме связи из-за нелинейности, обусловливающей эффект конкуренции). В работе [1] показано, что наличие периодической неоднородности линейных реактивных параметров при взаимодействии двух встречных волн с одинаковыми частотами может привести к установлению режима модулированных колебаний с периодической перекачкой энергии из одной волны в другую, сопровождающейся скачками фазы. На существование подобных режимов в кольцевых газовых лазерах, где связь между волнами появляется за счет рассеяния от зеркал, указывалось в работе [2]. Устойчивость такого режима по отношению к частотной расстройке между волнами исследовалась в [3]. Оказалось, что достаточно большая расстройка стабилизирует модуляционную неустойчивость: начиная с некоторой критической расстройки, величина которой зависит от степени неоднородности, режим модулированных колебаний становится неустойчивым, и в системе устанавливается режим генерации двух волн с неравными амплитудами. Однако все перечисленные результаты относятся лишь к пространственно-однородным режимам работы. При этом остается неясным, могут ли реализоваться такие пространственно-однородные режимы в системах с периодически изменяющимися параметрами.

В данной работе исследуются стационарные режимы — результат взаимодействия в системе двух встречных волн с одинаковыми частотами ($\omega_1 = \omega_2$) — при малой расстройке от пространственного синхронизма, вызванной неоднородностью ($k_2 = -k_1 + k_H + \xi$, $|k_1| = |k_2|$). Найдены возможные пространственно-однородные режимы, определена зависимость амплитуд встречных волн от величины расстройки и сте-

пени неоднородности. Исследована устойчивость таких режимов по отношению к пространственно-однородным возмущениям при произвольной расстройке, а в случае $\xi = 0$ и по отношению к произвольным пространственно-неоднородным возмущениям (выяснить устойчивость по отношению к неоднородным возмущениям при любом ξ не удается из-за больших математических трудностей). Показано, что пространственно-однородные режимы возможны только в генераторах с кольцевым резонатором. Для некольцевых систем при отсутствии расстройки указаны возможные распределения амплитуд встречных волн вдоль резонатора.

Уравнения для амплитуд и фаз двух встречных волн, распространяющихся в среде с меняющимися по гармоническому закону линейными реактивными параметрами, имеют вид

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} \pm V \frac{\partial A_{1,2}}{\partial x} = h (1 - A_{1,2}^2 - 2A_{2,1}^2) A_{1,2} \pm \gamma A_{2,1} \sin \Phi; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} \pm V \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x} = -\gamma \frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} \cos \Phi, \quad (1b)$$

где коэффициент γ характеризует величину неоднородности, V — групповая скорость волн, $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - \xi x$. Границные условия учтем ниже.

Стационарный процесс взаимодействия волн описывается тремя уравнениями из (1). При $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ вместо (1b) получим уравнение для Φ :

$$V \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \gamma \frac{A_1^2 + A_2^2}{A_1 A_2} \cos \Phi + \xi \quad (\xi = V \bar{\xi}). \quad (2)$$

Пространственно-однородные режимы системы — состояния равновесия (1a) и (2) — определяются из уравнений

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \xi^2 = \gamma^2 - h^2 \frac{m_2}{m_1} (1 - m_2 - 2m_1)^2,$$

$$m_2 = 0,5 [1 - 4m_1 + (1 - 4m_1 + 12m_1^2)^{1/2}]$$

при граничных условиях

$$m_{1,2}|_{x=0, l} = r_{0,l}^2 m_{2,1}|_{x=0, l},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2|_{x=0, l} = 2kx|_{x=0, l} + \Delta_{0,l} + 2n\pi,$$

где $m_{1,2} = A_{1,2}^2$, l — длина резонатора, $|r_{0,l}| \exp(j\Delta_{0,l})$ — коэффициенты отражения на границах.

Зависимость квадрата амплитуды первой волны от расстройки для различных γ и $h = 1$ графически изображена на рис. 1. Соотношение между амплитудами волн определяется из рис. 2. На рис. 1 нанесены также границы устойчивости (пунктирные кривые) рассматриваемых режимов по отношению к пространственно-однородным возмущениям, вычисленные с помощью ЭВМ по методу Раута—Гурвица. Неустойчивые области заштрихованы.

Проанализируем эти результаты.

1) В случае слабой неоднородности ($\gamma/h < 0,2$) в кольцевом резонаторе при любой расстройке существуют два устойчивых пространственно-однородных режима с разными амплитудами волн (кривые 1

и 2 на рис. 1). Реализация того или иного режима зависит от начальных условий. Режим встречных волн с равными амплитудами хотя и существует при наличии расстройки, но оказывается неустойчивым по отношению к рассматриваемому классу возмущений.

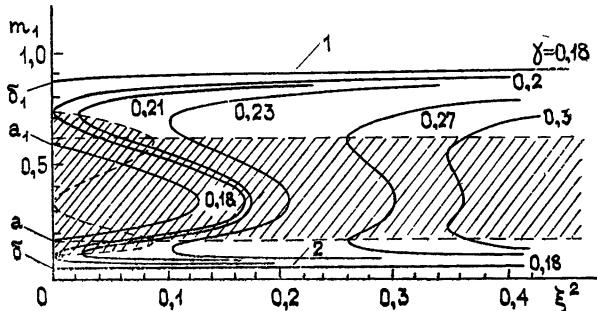


Рис. 1.

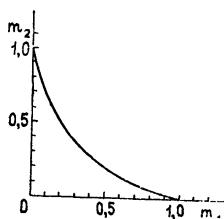


Рис. 2.

При отсутствии расстройки удается рассмотреть также устойчивость пространственно-однородных режимов и по отношению к неоднородным в пространстве возмущениям. Отыскивая решение для возмущений в виде e^{jKx} , что соответствует граничным условиям $m_{1,2}(x, t) = m_{1,2}(x + l, t)$, найдем характеристическое уравнение системы (1). Оно распадается на множители

$$\begin{aligned} & \{p^2 + K^2 V^2 + j KV h(m_2 - m_1) - ph[2 - 5(m_1 + m_2)] + \\ & + h^2 [(1 - 3m_1 - 2m_2)(1 - 3m_2 - 2m_1) - 16m_1m_2 + \gamma^2/h^2]\} \times \\ & \times \left(p^2 + K^2 V^2 + p \gamma \frac{m_2 - m_1}{A_1 A_2} \sin \Phi + j KV \gamma \frac{m_2 + m_1}{A_1 A_2} \sin \Phi \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $K = 2\pi/\lambda$, где $\lambda = l/n$ — длина волны огибающей. С помощью D -разбиения по параметрам K и γ удается показать, что пространственно-однородные режимы, неустойчивые по отношению к пространственно-однородным ($K = 0$) возмущениям (например, точки a и a_1 на рис. 1), будут устойчивыми для достаточно коротковолновых возмущений. Границы устойчивости на плоскости K , γ для различных значений h изображены на рис. 3.

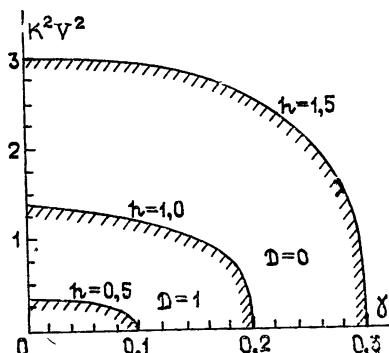


Рис. 3.

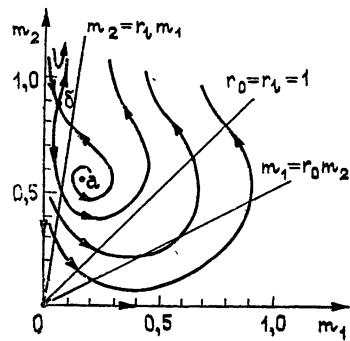


Рис. 4.

Ясно, что рассматриваемые режимы могут существовать только в кольцевых системах. При $\xi = 0$ и $\Phi = \pi/2$ это наглядно поясняется фазовым портретом системы для стационарных процессов (рис. 4). Выбранному значению Φ соответствуют режимы с $m_1 < m_2$ (например, точки а и б на рис. 1). На рис. 4 граничным условиям соответствуют прямые $m_2 = r_l m_1$, $m_1 = r_0 m_2$, а в случае идеального резонатора ($r_0 = r_l = 1$) — биссектриса. Физический смысл имеют фазовые траектории, начинающиеся и кончающиеся на прямых граничных условий. Отсюда следует, что пространственно-однородные режимы в резонаторе, даже идеальном, реализоваться не могут, так как не удовлетворяют граничным условиям. Фазовый портрет позволяет видеть характер изменения амплитуд встречных волн вдоль резонатора.

2) В случае сильной неоднородности ($\gamma/h > 0,2$) при нулевой расстройке пространственно-однородные режимы вообще не могут существовать. Не может быть и режимов с периодически меняющимися в пространстве амплитудами волн (отсутствует предельный цикл в фазовом пространстве, так как единственное состояние равновесия в нуле — седло). Поэтому результаты, полученные ранее [1, 3] для сосредоточенной модели, на этот случай обобщать нельзя.

При величинах неоднородности $0,21 < \gamma < 0,27$ существует диапазон расстроек, где в зависимости от начальных условий может реализоваться любой из четырех пространственно-однородных режимов. При больших расстройках (тем больших, чем сильнее неоднородность), а также при $0,2 < \gamma < 0,21$ и $\gamma > 0,27$ только два различных режима оказываются устойчивыми по отношению к пространственно-однородным возмущениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Богатырев, В. П. Пасхин, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 5, 693 (1975).
2. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, ЖЭТФ, 52, вып. 6, 1616 (1967).
3. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, под ред. Ю. Л. Климонтовича, изд. Наука, М., 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
2 февраля 1977 г.,
после доработки
3 января 1978 г.

SPATIAL FIELD STRUCTURE IN A RESONATOR FILLED BY PERIODICALLY INHOMOGENEOUS ACTIVE MEDIUM

T. M. Tarantovich

Stationary regimes as a results of interaction of two opposite waves with similar frequencies in a system are investigated with small detuning from the spatial synchronism. It is shown that spatially homogeneous regimes are possible only in generators with a ring resonator. For non-ring systems the possible distribution of opposite wave amplitudes along the resonator are indicated.

УДК 538.56 : 519.25

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПИСАНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕБЕЛЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

A. H. Малахов, O. B. Музичук, I. E. Позументов

Рассматривается функциональный подход к отысканию среднего значения выходной координаты линейной системы N -го порядка с гауссовыми флуктуациями параметров. Показано, что в случае марковских параметрических воздействий возможно статистическое описание системы с помощью цепочки чисто дифференциальных уравнений. Установлено соответствие такого описания с применением аппарата многомерных марковских процессов и кумулянтных приближений по совокупности: флуктуации параметров — выходная координата. На простом примере стохастического уравнения первого порядка показана быстрая сходимость приближенных решений, построенных указанным методом, к точному в области, где диффузионное приближение неприменимо. В качестве нетривиального примера получено точное решение для средней энергии броуновского движения осциллятора с флуктуациями собственной частоты в форме цепной дроби, оценены условия применимости известных приближенных решений. Рассмотрено влияние флуктуаций потерь на среднюю энергию осциллятора.

1. При статистическом описании динамических систем с флуктуирующими параметрами широко используется диффузионное (марковское) приближение, позволяющее анализировать замкнутые дифференциальные уравнения для искомых статистических характеристик (см., например, [1, 2] и библиографию в [2]). Это приближение хорошо работает в случае достаточно быстрых (мелкомасштабных) флуктуаций. Если же время корреляции параметрического воздействия больше или порядка характерного времени системы, то анализ существенно усложняется, поскольку приходится обращаться в общем случае к интегро-дифференциальным уравнениям даже для простейших статистических характеристик.

Мы рассмотрим дифференциальное статистическое описание динамической системы, заданной линейным стохастическим уравнением общего вида

$$\left[L \left(\frac{d}{dt} \right) + \alpha_k(t) \frac{d^k}{dt^k} \right] y(t) = x(t), \quad y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad (1)$$

с не дельта-коррелированными флуктуациями параметров $\alpha_k(t)$, где $L \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^N}{dt^N} + \alpha_k \frac{d^k}{dt^k}$ — «невозмущенный» оператор N -го порядка, $\{\alpha_k(t)\}$ — гауссова совокупность флуктуаций с $\langle \alpha_k \rangle = 0$ и корреляционными функциями определенного (см. ниже) вида. По повторяющимся индексам здесь и в дальнейшем предполагается суммирование в пределах от 0 до $N - 1$.

Преимущества статистического описания системы дифференциальными уравнениями достаточно очевидны, особенно при отыскании стационарных значений вероятностных характеристик, при численном рас-

чете на ЭВМ. Хорошо известно, что дифференциальное описание стохастических систем с небольшими параметрическими воздействиями может быть осуществлено с помощью аппарата многомерных марковских процессов (ниже мы коснемся такой методики), однако этот универсальный аппарат становится чрезвычайно громоздким при рассмотрении стохастических операторов высокого порядка. Предлагаемый же здесь метод свободен от такого недостатка, хотя он эффективно применим лишь для линейных стохастических систем. Будем использовать способ построения высших приближений и точного решения для среднего значения выходной координаты $\langle y(t) \rangle$, учитывающий ненулевое время корреляции параметрических воздействий $\alpha_k(t)$, основанный на замыкании уравнений для средних значений вариационных производных решения на некотором шаге [2-4]; диаграммная интерпретация этого метода дана в [5].

2. Пусть флуктуации параметров системы (1) экспоненциально коррелированы, положим также для простоты совместные корреляции равными нулю, т. е.

$$\langle \alpha_k(t) \alpha_j(t-\tau) \rangle = \delta_{kj} \sigma_k^2 \exp(-\Pi |\tau|) = \delta_{kj} B_k(\tau), \quad (2)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Усредним (1) с помощью формулы Фуркуц—Новикова [6, 7], учитывая (2). Полученное уравнение можно записать в виде

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) \langle y(t) \rangle - \sigma_k^2 \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right)^k w_k(t) = \langle x(t) \rangle, \quad (3)$$

где введена новая переменная

$$w_k(t) = - \int \left\langle \frac{\delta_n y(t)}{\delta \alpha_k(\tau)} \right\rangle d\tau, \quad \frac{\delta_n}{\delta \alpha_k(\tau)} \equiv e^{-\Pi(t-\tau)} \frac{\delta}{\delta \alpha_k(\tau)},$$

а $\delta/\delta \alpha_k$ — оператор вариационного дифференцирования. Здесь мы использовали известную формулу операционного исчисления

$$M \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) f(t) e^{-vt} = e^{-vt} M \left(\frac{d}{dt} + \Pi - v \right) f(t), \quad (4)$$

где M — произвольный линейный оператор, $f(t)$ — дифференцируемая функция.

Из (4) следует, что оператор $\delta_n/\delta \alpha_k$ обладает следующим коммутационным соотношением:

$$M \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) \frac{\delta_n y(t)}{\delta \alpha_k(\tau)} = e^{-\Pi(t-\tau)} M \left(\frac{d}{dt} \right) \frac{\delta y(t)}{\delta \alpha_k(\tau)}. \quad (5)$$

Последовательно применяя к уравнению (1) оператор $\delta_n/\delta \alpha_k$, используя формулу Фуркуц—Новикова и (4), (5), можно прийти к следующей системе «зацепляющихся» дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L \left(\frac{d}{dt} \right) \langle y(t) \rangle - \sigma_{k_1}^2 \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right)^{k_1} w_{k_1}(t) &= \langle x(t) \rangle, \\ L \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) w_{k_1}(t) - \sigma_{k_2}^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\Pi \right)^{k_2} w_{k_1 k_2}(t) &= \langle y^{(k_1)}(t) \rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$L \left(\frac{d}{dt} + (s-1) \Pi \right) w_{k_1 \dots k_{s-1}}(t) - \sigma_{k_s}^2 \left(\frac{d}{dt} + s \Pi \right)^{k_s} w_{k_1 \dots k_s}(t) = \\ = (s-1) \left\{ \left(\frac{d}{dt} + (s-2) \Pi \right)^{k_m} w_{k_1 \dots k_{m-1} k_{m+1} \dots k_{s-1}}(t) \right\}_m,$$

Здесь введены переменные

$$w_{k_1 \dots k_s}(t) = (-1)^s \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^s y(t)}{\delta x_{k_1}(\tau_1) \dots \delta x_{k_s}(\tau_s)} \right\rangle d\tau_1 \dots d\tau_s, \quad s=1, 2, \dots \quad (7)$$

(интегрирование выполняется по области, определяемой принципом причинности, где вариационные производные отличны от нуля), $s\{\dots\}_m$ — скобка симметризации по индексу m , содержащая s членов. Все начальные условия для определенных таким образом функций $w_{k_1 \dots k_s}(t)$ являются нулевыми:

$$w_{k_1 \dots k_s}^{(r)}(0) = 0, \quad r = \overline{0, N-1}.$$

Система (6) полностью эквивалентна системе интегродифференциальных уравнений для $\langle y(t) \rangle$ и вариационных производных высших порядков [2-4], однако практическое использование дифференциальных уравнений (6) явно предпочтительнее. Переходя к преобразованиям Лапласа, отсюда нетрудно получить точное выражение для статистического среднего выходной координаты в форме цепной дроби [4], причем использованный здесь метод значительно быстрее приводит к цели. Это связано с тем, что функции $w_{k_1} \dots w_{k_s}(t)$, в отличие от соответствующих вариационных производных, зависят лишь от одной переменной.

Точное решение в форме цепной дроби обычно малопригодно для практического использования, поэтому остановимся на построении приближенных решений, основанных на размыкании системы (6) на некотором шаге. Осуществить это можно двумя путями: а) опустить функцию $w_{k_1 \dots k_n}(t)$ в последнем (n -м) уравнении системы (6)*; б) формально воспользоваться δ -коррелированностью параметрических воздействий для замыкания этого уравнения. Соответствующие решения для $\langle y(t) \rangle$ будем называть результатами n -го и n -го диффузионного приближений. Для получения n -го диффузионного приближения нужно сначала вернуться от уравнения для функции $w_{k_1 \dots k_{n-1}}(t)$ к уравнению для вариационной производной $(n-1)$ -го порядка, замкнуть последнее в диффузионном приближении [4] и вновь перейти к «дифференциальным» переменным $w_{k_1 \dots k_s}(t)$, используя (7). При этом мы получим

$$\begin{aligned} & \overline{L}_d \left[\frac{d}{dt} + (n-1) \Pi \right] w_{k_1 \dots k_{n-1}}(t) = \\ & = (n-1) \left\{ \left[\frac{d}{dt} + (n-2) \Pi \right] \left|_{k_m}^{\hat{k}_m} w_{k_1 \dots k_{m-1} \hat{k}_m+1 \dots k_{n-1}}(t) \right. \right\}_m, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\bar{L}_d \left(\frac{d}{dt} \right) = L \left(\frac{d}{dt} \right) - \frac{D_{N-1}}{2} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}, \quad D_{N-1} = 2 \sigma_{N-1}^2 / \Pi$$

* На физическом смысле такой операции остановимся ниже.

— оператор диффузионного приближения. Систему уравнений (6) для значений $s = 0, n - 2$ плюс уравнение (8) будем называть системой n -го диффузионного приближения для среднего значения $\langle y(t) \rangle$. Система n -го приближения отличается лишь заменой оператора \bar{L}_d на L в уравнении (8). Отметим, что если в стохастическом уравнении (1) отсутствуют флуктуации диссипативного параметра $\alpha_{N-1}(t)$, то $D_{N-1}=0$ и, следовательно, результаты n -го и n -го диффузионного приближений при отыскании $\langle y(t) \rangle$ совпадают для любого значения n .

В частности, применив формулу (8) для переменной $w_k(t)$, придем к следующей замкнутой системе второго диффузионного приближения:

$$\begin{aligned} L \left(\frac{d}{dt} \right) \langle y(t) \rangle - \sigma_k^2 \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right)^k w_k(t) &= \langle x(t) \rangle, \\ \bar{L}_d \left(\frac{d}{dt} + \Pi \right) w_k(t) &= \langle y^{(k)}(t) \rangle, \quad y^{(r)}(0) = y_0^{(r)}, \\ w_k^{(r)}(0) &= 0, \quad r = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда легко вернуться к более привычной интеграло-дифференциальной форме [2-4]. Выразим из последнего уравнения $w_k(t)$:

$$w_k(t) = \int_0^t \bar{g}_d(t-\tau) e^{-\Pi(t-\tau)} \langle y^{(k)}(\tau) \rangle d\tau, \quad (10)$$

где $\bar{g}_d(t)$ — средняя функция Грина в диффузионном приближении (ядро оператора \bar{L}_d^{-1}). Подставив (10) в первое уравнение (9), получим, учитывая (2),

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) \langle y(t) \rangle - \int_0^t B_k(t-\tau) \bar{g}_d^{(k)}(t-\tau) \langle y^{(k)}(\tau) \rangle d\tau = \langle x(t) \rangle. \quad (11)$$

Последнее уравнение отличается от приближения Бурре (которое является вторым приближением в нашей терминологии) лишь заменой невозмущенной функции Грина на \bar{g}_d и является в общем случае более точным.

3. Рассмотрим использование дифференциального статистического описания сначала на примере простого уравнения

$$\frac{dy}{dt} + ay + \beta(t)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad (12)$$

имеющего при гауссовых $\beta(t)$ с корреляционной функцией (2) следующее точное решение для $\langle y(t) \rangle$:

$$\langle y(t) \rangle = \exp \left[- \left(a - \frac{D_\beta}{2} \right) t - \frac{D_\beta}{2\Pi} (1 - e^{-\Pi t}) \right], \quad D_\beta = \frac{2\sigma^2}{\Pi}. \quad (13)$$

Система (6) в данном случае такова:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + a + s\Pi \right) w_{(s)}(t) &= \sigma^2 w_{(s+1)}(t) + sw_{(s-1)}(t), \\ w_{(s)}(t) &= (-1)^s \int_s \dots \int \left\langle \frac{\delta_{\Pi}^s y(t)}{\delta \alpha(\tau_1) \dots \delta \alpha(\tau_s)} \right\rangle d\tau_1 \dots d\tau_s, \end{aligned} \quad (14)$$

$$s = 0, 1, \dots, n, \quad w_0(t) = \langle y(t) \rangle,$$

а соотношение (8), осуществляющее диффузионное замыкание на $(n+1)$ -м шаге, имеет вид

$$\left(\frac{d}{dt} + a - \frac{D_\beta}{2} + n\Pi \right) w_{(n)}(t) = n w_{(n-1)}(t).$$

Наряду с предложенным рассмотрим на этом простом примере другой способ решения, основанный на использовании аппарата многомерных марковских процессов и кумулянтных приближений для размыкания смешанных моментов. Пусть параметрическое воздействие $\beta(t)$ описывается вспомогательным стохастическим уравнением

$$\frac{d\beta}{dt} + \Pi\beta = \xi(t), \quad (15)$$

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t-\tau) \rangle = D_\xi \delta(\tau).$$

Тогда установившаяся корреляционная функция флюктуаций $\beta(t)$ имеет вид (2), где $\sigma^2 = \langle \beta^2 \rangle = D_\xi/2\Pi$. На основании (12), (15) легко прийти к следующей системе для смешанных моментов марковской совокупности $\{\beta, y\}$:

$$\left(\frac{d}{dt} + a + s\Pi \right) \langle y \beta^s \rangle = - \langle y \beta^{s+1} \rangle + s(s-1)\sigma^2 \Pi \langle y \beta^{s-2} \rangle, \quad (16)$$

$$\langle y \beta^{2s+1} \rangle|_0 = 0, \quad \langle y \beta^{2s+2} \rangle|_0 = (2s+1)!! \sigma^2, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Запишем также соответствующую (16) систему уравнений для смешанных кумулянтов $\langle y, \beta^{[s]} \rangle$, используя обозначения и аппарат [8]:

$$\left(\frac{d}{dt} + a + s\Pi \right) \langle y, \beta^{[s]} \rangle = - \langle y, \beta^{[s+1]} \rangle - s\sigma^2 \langle y, \beta^{[s-1]} \rangle, \quad (17)$$

$$\langle y, \beta^{[s+1]} \rangle|_0 = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Сравнивая (17) с системой (14), видим, что определенные выше переменные $w_s(t)$ совпадают с точностью до нормировки с совместными кумулянтами:

$$w_{(s)} = (-1)^s \frac{\langle y, \beta^{[s]} \rangle}{\sigma^{2s}}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (18)$$

Таким образом, пренебрежение функцией $w_{(n)}(t)$ на некотором шаге, лежащее в основе построения n -го приближения для $\langle y(t) \rangle$, есть не что иное, как пренебрежение старшим совместным кумулянтом $\langle y, \beta^{[n]} \rangle$, ответственным за наиболее «тонкую» статистическую связь выходной координаты и параметрического воздействия. Применительно к системе (16) это означает, что для построения n -го приближения высший момент $\langle y \beta^n \rangle$ следует разложить по всем низшим $\langle y \beta^s \rangle$, $s = 0, n-1$, пренебрегая только старшим кумулянтом $\langle y, \beta^{[n]} \rangle$. Подчеркнем, что любое другое разложение смешанных моментов, осуществляющееся для замыкания систем, подобных (16), приводит в общем случае к некорректным результатам.

Обратимся к сравнению приближенных решений с точным. Результаты численного решения систем (14), (17), замкнутых на некотором шаге, показаны на рисунках 1а, б ($\gamma = 1$, $\mu = 1,6$; 2 соответственно). Расчет осуществлялся в безразмерных параметрах $\theta = \Pi t$, $\gamma = a/\Pi$,

$\mu = D_\beta/a$, причем значения последних выбраны за пределами применимости диффузионного приближения (которое работает в области $\gamma\mu \ll 1$). На обоих рисунках кривая 1 — 1-е диффузионное приближение $\exp[(D_\beta/2 - a)t]$, 2 — точное решение (13); пунктирные линии 3, 4 — соответственно кривые 2-го (Бурре) и 3-го приближений, а точками и крестиками отмечены результаты 2-го и 3-го диффузионных приближений. Из рис. 1а видно, что результаты высших приближений существенно ближе к точному, чем первое диффузионное приближение.

Рис. 1б соответствует «критическому» значению $\mu = 2$ (при больших значениях μ система неустойчива в среднем). Хотя диффузионное приближение в этом случае работает очень плохо, уже третье диффузионное приближение практически совпадает с точным решением при любых θ . Здесь также заметно преимущество диффузионного замыкания в уравнениях для $w_{(n)}$ по сравнению с простым отбрасыванием последних.

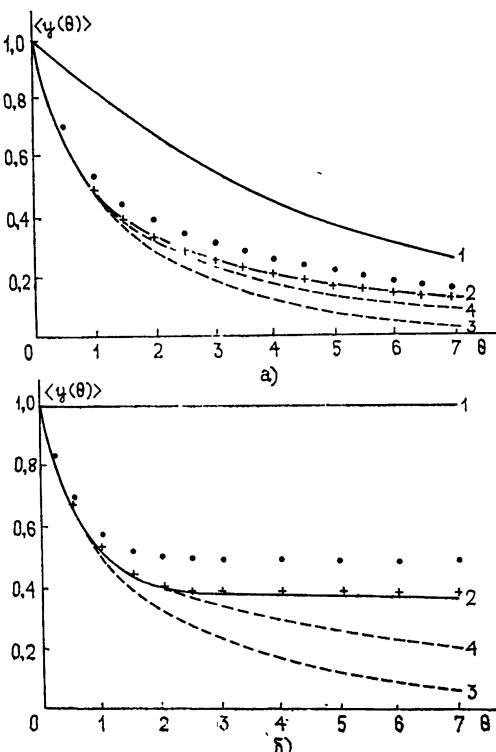


Рис. 1.

4. Нетрудно показать, что и для стохастической линейной системы общего вида (1) имеет место соответствие переменных $w_{k_1 \dots k_s}(t)$, определенных формулой (7), кумулянтам совокупности: флюктуации параметров — выходная переменная*. Это соответствие является очевидным следствием формулы

$$\langle \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_s), Z(t) \rangle = \int d\tau_1 \dots \int d\tau_s B_\alpha(t_1 - \tau_1) \dots B_\alpha(t_s - \tau_s) \left\langle \frac{\delta^s Z(t)}{\delta \alpha(\tau_1) \dots \delta \alpha(\tau_s)} \right\rangle, \quad (19)$$

где $Z(t)$ — некоторый функционал гауссова случайного процесса $\alpha(t)$ с $\langle \alpha \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \alpha(t) \alpha(t - \tau) \rangle = B_\alpha(\tau)$ (здесь $B_\alpha(\tau)$ — корреляционная функция любого вида). Выражение (19) есть функциональный аналог следующей формулы размыкания кумулянтных скобок [8]:

$$\langle x^{[s]}, f(y) \rangle = \langle x, y \rangle^s \langle f^{(s)}(y) \rangle, \quad (19a)$$

* В работе [9] строились высшие приближения уравнения Дайсона для стохастической системы общего вида на основании последовательного учета отклонения вероятностного распределения совокупности $\{\alpha(t), y(t)\}$ от гауссова. Соответствие такой процедуры методу замыкания уравнений для средних значений вариационных производных [2-4] установлено в [8]. Следует отметить, однако, что в [9] эти приближения основывались на пренебрежении кумулянтными функциями с упорядоченным временем $\langle \alpha(t_n), \dots, \alpha(t_1), y(t_1) \rangle$, $t_1 > t_2 > \dots > t_n$, а не кумулянтами $\langle y, \alpha^{[n]} \rangle$. Это отличие приводит, например, к тому, что «экспессное» приближение в терминах [9] является только «асимметричным» по отношению к одноточечным кумулянтам $\langle y, \alpha^{[n]} \rangle$,

где x , y — гауссова совокупность, f — произвольная функция (дифференцируемая хотя бы в обобщенном смысле). При $s = 1$ выражение (19) совпадает с формулой Фуруцу—Новикова. В справедливости его при $s = 2$ легко убедиться, непосредственно применяя формулу Фуруцу—Новикова для «размыкания» среднего $\langle \alpha(t_1)\alpha(t_2)Z(t) \rangle$; доказать (19) для произвольного значения s можно, например, математической индукцией.

5. Рассмотрим в качестве нетривиального примера отыскание средней энергии колебаний стохастического осциллятора

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2[h + \beta(t)]\frac{dy}{dt} + [\Omega^2 + \alpha(t)]y = x(t). \quad (20)$$

Пусть внешняя сила $x(t)$ дельта-коррелирована, а параметрические воздействия $\alpha(t)$, $\beta(t)$ имеют корреляционные функции (2). Получим сначала точное выражение для средней энергии $\langle y^2(t) \rangle$ в случае $\beta(t) = 0$. При этом заменой переменной $I = \frac{1}{2} e^{2\eta t} y^2$ легко перейти от (20) к стохастическому уравнению для величины $I(t)$, которое после усреднения примет вид

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)\langle I \rangle + 2\left\langle \alpha(t) \frac{dI}{dt} \right\rangle + 2\frac{d}{dt}\langle \alpha(t) I \rangle = D_x e^{2ht}, \quad (21)$$

где обозначено

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\omega_0^2 \right), \quad \omega_0^2 = \Omega^2 - h^2.$$

Замыкая уравнение (21) в первом диффузионном приближении, легко получить

$$\left[L \left(\frac{d}{dt} \right) - 2 D_a \right] \langle I(t) \rangle = D_x e^{2ht},$$

где $D_\alpha = 2 \langle u^\alpha \rangle / \Pi$ — спектральная плотность флуктуаций $u(t)$ на нулевой частоте. Возвращаясь к переменной $\langle u^2(t) \rangle$, для стационарного значения энергии $\langle u^2 \rangle = \langle u^2(t) \rangle |_{t \rightarrow \infty}$ приходим к выражению

$$\langle y^2 \rangle = D_x (4 h \Omega^2 - D_a)^{-1}, \quad (22)$$

откуда следует известное условие среднеквадратичной устойчивости осциллятора с белыми флуктуациями собственной частоты $D_\alpha < 4h\Omega^2$ [10].

Точная система уравнений для отыскания $\langle I(t) \rangle$, аналогичная (6), имеет вид

где переменные $\omega_{(s)}(t)$ обладают нулевыми начальными условиями $\omega_{(s)}^{(k)}(0) = 0$, $k = \overline{0,2}$. На основании (23), для стационарного значения средней энергии можно прийти к следующему выражению в форме цепной дроби:

$$\langle y^2 \rangle = \frac{2D_x}{L(2h) - \frac{R_1}{\Delta(2h+\Pi) - \frac{R_2}{L(2h+2\Pi)-...}}}, \quad (24)$$

$$R_s = 2s D_\alpha \Pi |(2s-1)\Pi + 4h|^2, \quad s = 1, 2, \dots$$

Для получения из точного результата (24) n -го приближения достаточно ограничиться подходящей дробью соответствующего порядка; n -е диффузионное приближение находится диффузионным замыканием в уравнении для $\omega_{(n-1)}(t)$.

В частности, результат 2-го приближения (приближения Бурре) для средней энергии имеет вид

$$\langle y^2 \rangle = \frac{D_x}{4h\Omega^2} \left\{ 1 - \frac{D_\alpha \Pi (\Pi + 4h)^2}{4h\Omega^2 (\Pi + 2h)[4\Omega^2 + \Pi(\Pi + 4h)]} \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Отметим, что это выражение совпадает с точным результатом, полученным в работе [11] для осциллятора с «телеграфным» параметрическим воздействием $\alpha(t)$ с пуассоновой статистикой перескоков. Для рассматриваемого случая гауссовых $\alpha(t)$ это выражение является приближенным, хотя при достаточно быстрых $\alpha(t)$ оно близко к точному решению (см. ниже). При выполнении довольно слабого ограничения $h \ll \Pi$ формула (25) примет физически наглядный вид*:

$$\langle y^2 \rangle = D_x [4h\Omega^2 - S_\alpha(2\Omega)]^{-1}, \quad (26)$$

где $S_\alpha(\omega) = D_\alpha \Pi^2 (\Pi^2 + \omega^2)^{-1}$ — спектр мощности флуктуаций собственной частоты. Отсюда ясно, что увеличение средней энергии осциллятора обусловлено, в первую очередь, спектральными компонентами флуктуаций $\alpha(t)$ вблизи основной параметрической частоты 2Ω . Отметим, что этот физически очевидный результат получается лишь во втором приближении, поскольку диффузионное приближение не различает структуру спектра флуктуаций параметрического воздействия, полагая его равномерным. В самом деле, из формулы (22) можно лишь догадываться, привлекая физические соображения, что под величиной D_α следует понимать спектральную плотность на параметрической, а не на нулевой частоте.

Сравним теперь результаты различных приближений для средней энергии. Введем безразмерные переменные

$$\mu_\alpha = D_\alpha / 4h\Omega^2, \quad \gamma = \Omega/\Pi, \quad \langle y^2 \rangle_0 = D_x / 4h\Omega^2, \quad q = \Omega/2h,$$

представляющие собой соответственно эффективную мощность и относительное время корреляции параметрического воздействия, энергию «невозмущенного» броуновского движения и добротность системы. В этих переменных оценка условий применимости приближения Бурре, как показывает сравнение с более точными результатами, такова:

* К подобному результату можно прийти и другими способами [12, 13], однако предложенная методика выгодно отличается простотой и возможностью получения более точных приближений, учитывающих также влияние высших параметрических зон в спектре флуктуаций собственной частоты.

$$\begin{aligned} 4 \mu_\alpha \gamma^3/q &\ll 1 \quad \text{при } \gamma \ll 1, \\ \mu_\alpha \gamma/q &\ll 1 \quad \text{при } \gamma \gg 1 \end{aligned} \quad (27)$$

($\mu_\alpha/q = (1/4)\langle \dot{\alpha}^2 \rangle \gamma$, где $\langle \dot{\alpha}^2 \rangle = \sigma^2 \Omega^{-4}$ — дисперсия относительных флуктуаций), причем первое неравенство в (27) дает фактически условия применимости первого диффузационного приближения (см. также [13]).

Зависимость средней энергии $\langle y^2 \rangle$ от величин μ_α, γ показана на рис. 2 (отложена нормированная на $\langle y^2 \rangle_0$ величина). Кривая 1 — результат диффузационного приближения (22) ($\gamma = 0$), кривые 2—4 — результаты 2-го—4-го приближений соответственно, построенные для $\gamma = 1$. Кривые 2а, 3а — соответственно 2-е и 3-е приближения для $\gamma = 0,5$ (добротность q выбрана равной 40). Отсюда видно, что если отличие результатов 1-го диффузационного и 2-х приближений при $\mu_\alpha \sim 1$ весьма существенное, то кривые второго и высших приближений довольно близки вплоть до критических значений μ_α , где система становится неустойчивой в среднеквадратичном.

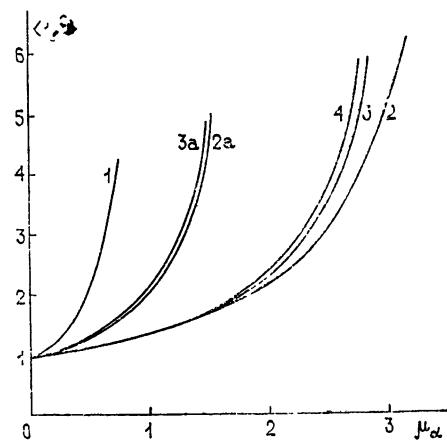


Рис. 2.

6. Исследуем влияние «небелых» флуктуаций затухания $\beta(t)$ на среднюю энергию осциллятора, положив в (20) $\alpha(t) \equiv 0$. От уравнения (20) с учетом (15) перейдем к системе стохастических уравнений для квадратичных величин $U = y^2$, $V = \dot{y}^2$, $W = y\dot{y}$, которая после усреднения примет вид

$$\begin{aligned} \langle \dot{U} \rangle &= 2 \langle W \rangle, \\ \langle \dot{V} \rangle &= -4h \langle V \rangle - 4 \langle \beta V \rangle - 2\Omega^2 \langle W \rangle + D_x, \\ \langle \dot{W} \rangle &= -\Omega^2 \langle U \rangle + \langle V \rangle - 2h \langle W \rangle + 2 \langle \beta W \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

При δ -коррелированных флуктуациях $\beta(t)$ отсюда легко получить следующее стационарное значение средней энергии:

$$\langle y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle_0 (1 - \mu_\beta)^{-1}, \quad \mu_\beta = 2D_\beta/h. \quad (29)$$

Для получения высших приближений, учитывающих ненулевое время корреляции параметрического воздействия, дополним (28) уравнениями для совместных кумулянтов $\langle \beta, Z \rangle = \langle \beta Z \rangle$, $Z = U, V, W$:

$$\begin{aligned} \langle \beta, \dot{U} \rangle &= -\Pi \langle \beta, U \rangle + 2 \langle \beta, W \rangle, \\ \langle \beta, \dot{V} \rangle &= -(\Pi + 4h) \langle \beta, V \rangle - 2\Omega^2 \langle \beta, W \rangle - 4(\langle \beta^2 \rangle \langle V \rangle + \langle \beta, \beta, V \rangle), \\ \langle \beta, \dot{W} \rangle &= -(\Pi + 2h) \langle \beta, W \rangle - \Omega^2 \langle \beta, U \rangle + \langle \beta, V \rangle - 2(\langle \beta^2 \rangle \langle W \rangle + \langle \beta, \beta, W \rangle). \end{aligned} \quad (30)$$

Опуская совместные кумулянты третьего порядка, придем ко второму приближению для средней энергии; для построения третьего приближения нужно дополнить (29), (30) уравнениями для третьих кумулянтов

и т. д.*. В частности, результат второго приближения для средней энергии $\langle y^2 \rangle$ можно записать в виде

$$\langle y^2 \rangle = \langle y^2 \rangle_0 \left[1 - \mu_\beta \frac{1 + 2\gamma^2 + \gamma/q}{(1 + \gamma/q)(1 + 4\gamma^2 + 2\gamma/q)} \right]^{-1}. \quad (31)$$

Условия применимости этого выражения оценим, исходя из более точного второго диффузационного приближения; как показывает анализ, они таковы:

$$\mu_\beta \gamma/q = \mu_\beta (h/\Pi) \ll 1$$

(ср. с (27)).

Зависимость средней энергии осциллятора с флюктуациями затухания от параметров μ_β , γ показана на рис. 3. Здесь кривая 1 — первое диффузационное приближение, 2, 3 — результаты второго приближения для $\gamma = 0,5$; 1 соответственно, 4 — результат второго диффузационного приближения для $\gamma = 1$ ($q = 10$). Отсюда видно, что, как и в случае флюктуаций собственной частоты, диффузационное приближение дает при $\gamma \neq 0$ завышенное значение для средней энергии.

Отметим, однако, что в случае флюктуаций потерь эта ошибка не столь велика. Дело в том, что увеличение энергии здесь связано в основном с медленными, а не с параметрическими спектральными компонентами флюктуаций и, следовательно, диффузационное приближение в данном случае качественно верно описывает поведение системы, а высшие

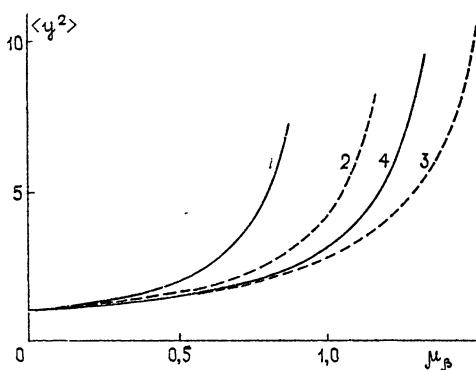


Рис. 3.

приближения дают лишь некоторые количественные поправки.

Отметим в заключение, что рассмотренный метод дифференциального описания применим не только для стохастических систем с экспоненциально коррелированными параметрическими воздействиями, являемыми одномерными марковскими процессами. Подобное описание можно в принципе осуществлять при любых гауссовых флюктуациях параметров, преобразование Лапласа корреляционных функций которых представимо рациональной дробью, в частности, для функций корреляции вида

$$B_k(\tau) = \sigma_k^2 e^{-\pi |\tau|} \cos \omega \tau,$$

соответствующих двумерным марковским процессам с резонансным спектром мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, вып. 4, 499 (1973).
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
4. О. В. Музычук, Теор. и матем. физика, 28, № 3, 371 (1976).
5. А. А. Дубков, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 6, 901 (1977).

* Совершенно аналогично можно было бы строить высшие приближения и в случае флюктуаций собственной частоты $\alpha(t)$.

6. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
7. E. A. Новиков, ЖЭТФ, 47, вып. 5(11), 1919 (1964).
8. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978
9. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 202 (1976).
10. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 5, № 5, 863 (1960).
11. R. C. Voigget, U. Frisch and A. Roquett, Physica, 65, 303 (1973).
12. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв вузов—Радиофизика, 16, № 1, 45 (1973).
13. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 3, 373 (1977).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 июля 1977 г

DIFFERENTIAL DESCRIPTION OF STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS WITH NON-WHITE FLUCTUATIONS OF PARAMETERS

A. N. Malakhov, O. V. Muzychuk, I. E. Pozumentov

A functional approach is considered to the deriving of the output coordinate average value of N -order linear system of with Gaussian parameters fluctuations. It is shown that in the case of continuous Markov parametric effects the statistic description of the system is possible by a chain of purely differential equations. The confirmity of such description is stated with the use of an apparatus of multidimensional Markov process and cumulant approximation in the set the parameter fluctuation—output coordinate. By a simple example of the first order stochastic equation it is shown that approximate solutions built by the given method are quickly converged into the exact one in the region where the diffuse approximation can not be used. As a less trivial example an exact solution is obtained for the average energy of Brownian oscillator motion with fluctuations of the natural frequency in the form of a chain fraction. Conditions of application of the known approximate solutions are estimated. The influence of fluctuation losses on the average oscillator energy is considered.

УДК 538.56 : 519.25

О СВЯЗИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОХОДЯЩЕЙ И ОТРАЖЕННОЙ ВОЛН В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

A. I. Саичев

Предложен метод вывода уравнений для моментов случайных волн, отраженных от препятствий, помещенных в среде с крупномасштабными случайными неоднородностями. В качестве примера приведены уравнения для первых двух моментов отраженной от бесконечного плоского зеркала волны. Обсуждаются некоторые следствия полученных уравнений.

1. Исследование статистических характеристик световых волн, отраженных от препятствий в крупномасштабной случайно-неоднородной среде, представляет большой интерес. Комплексные амплитуды таких волн удовлетворяют параболическому уравнению квазиоптики. Поэтому при анализе их статистики можно, казалось бы, воспользоваться уравнениями для моментов световых волн, полученными в диффузационном приближении (см., например, [1, 2]). Однако непосредственно вывести уравнения для моментов отраженных волн не удается, так как для них не выполняется принцип причинности [1]. Таким образом, основной задачей исследования статистики отраженных в случайно-неоднородной среде волн является запись их в форме, удовлетворяющей условию причинности. В данной работе при решении этой задачи используются некоторые фундаментальные свойства функций Грина параболических уравнений. В результате вычисление моментов отраженной волны удалось свести к решению известных [1, 2] уравнений для моментов волны без отражений. В частном случае статистически однородной по поперечным координатам средней отраженной волны полученные в данной работе соотношения совпадают с найденными в [3] с помощью функционального подхода.

2. Пусть распространение волны в случайно-неоднородной среде описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho) u, \quad (1)$$

а в плоскости $x = L$ помещен экран с локальным коэффициентом отражения $f(\rho)$. При этом отраженная от экрана волна с учетом теоремы взаимности (см., например, [4, 5]) может быть записана в виде

$$v_L(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} u(L, q) f(q) G(x, \rho; L, q) dq, \quad (2)$$

где $G(x_0, \rho_0; x, \rho)$ — решение уравнения (1) с граничным условием $u_0(x, \rho) = \delta(\rho - \rho_0)$. Формула (2) замечательна тем, что моменты ее левой части выражаются через моменты волн, распространяющихся в одну сторону без отражений.

Приведем вначале несколько следующих из (2) полезных соотношений, не ограниченных требованиями на $\epsilon(x, \rho)$, используемыми при выводе уравнений для моментов волн [1, 2]. Отметим, что некоторые статистические следствия соотношений типа (2) указаны также в [5].

Домножив равенство (2) на комплексно-сопряженное, проинтегрировав по ρ и воспользовавшись ортогональным свойством функций Грина, получим равенство, выражающее закон сохранения энергии отраженной волны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_L(x, \rho) d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\rho)|^2 I(L, \rho) d\rho,$$

где $I_L(x, \rho)$, $I(L, \rho)$ — соответственно интенсивности отраженной и падающей волн. В частности, усреднив его и считая падающую волну статистически однородной по ρ , получим, что средняя энергия отраженной волны не зависит от вида случайных неоднородностей среды.

Из (2) следует также следующий полезный инвариант:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_L(x, \rho) u(x, \rho) d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) u^2(L, \rho) d\rho.$$

Считая, что размеры экрана меньше радиуса когерентности падающей волны, нетрудно показать отсюда, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v_L(0, \rho_1) v_L^*(0, \rho_2) \rangle d\rho_1 d\rho_2 = \langle I^2 \rangle \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho) d\rho \right|^2.$$

Таким образом, интеграл от функции когерентности отраженной волны в $\langle I^2 \rangle$ больше соответствующего интеграла в однородной среде, что является следствием эффекта усиления обратного рассеяния в случайно-неоднородной среде [6].

Отметим, что отражение от экрана не всегда можно описать локальным коэффициентом отражения, как в (2) (см., например, [5]). Так, для волны, отраженной от помещенного в точке (L, ρ_1) уголкового отражателя, можно пользоваться приближенной формулой $v_L(x, \rho) = u^*(L, \rho_1) G(x, \rho; L, \rho_1)$. Для плоской при $x = 0$ падающей волны ($u(0, \rho) = 1$) отсюда следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle v_L(0, \rho) \rangle d\rho = \langle I(L, \rho_1) \rangle,$$

также выражающее эффект усиления обратного рассеяния [6].

3. Приведем здесь уравнения для первых двух моментов отраженной волны, так как уравнения для моментов более высокого порядка составляются аналогично. Кроме того, в (2) будем для простоты считать, что $f(\rho) \equiv 1$ и $x = 0$. Среднее $\langle v_L(0, \rho) \rangle$ при этом определяется функцией

$$\Phi(L, s, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle u \left(L, R + \frac{s}{2} \right) G \left(0, \rho; L, R - \frac{s}{2} \right) \right\rangle dR.$$

Зная ее, можно согласно (2) найти среднюю отраженную волну по формуле

$$\langle v_L(0, \rho) \rangle = \Phi(L, s = 0, \rho).$$

Функция $\Phi(L, s, \rho)$ в диффузационном приближении удовлетворяет уравнению, которое получим, варьируя расстояние до экрана L [1, 2]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = \frac{i}{k} \Delta_s \Phi - \frac{k^2}{4} [A + A(s)] \Phi, \quad \Phi(0, s, \rho) = \langle u(0, \rho + s) \rangle.$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\varepsilon(x, \rho)$ — гауссово поле с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1) \varepsilon(x_1 + x, \rho_1 + \rho) \rangle = A[\rho] \delta(s), \quad A = A[0].$$

Для плоских при $x = 0$ падающих волн отсюда следует полученная ранее [3] функциональным методом формула

$$\langle v_L(0, \rho) \rangle = \langle u^2(L, \rho) \rangle \quad (\text{при } u(0, \rho) \equiv 1).$$

4. Аналогично легко получить уравнение, определяющее второй момент отраженной волны. Он полностью определяется функцией

$$M(L, s_1, s_2, R, \rho_1, \rho_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle u\left(L, y + \frac{R+s_1}{2}\right) u^*\left(L, y - \frac{R-s_2}{2}\right), G\left(0, \rho_1, L, y + \frac{R-s_1}{2}\right) G^*\left(0, \rho_2, L, y - \frac{R+s_2}{2}\right) \right\rangle dy,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial L} &= \frac{i}{k} (\Delta_{s_1} - \Delta_{s_2}) M - \frac{k^2}{4} \left[D\left(R + \frac{s_1 - s_2}{2}\right) + D\left(R - \frac{s_1 - s_2}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + D\left(R - \frac{s_1 + s_2}{2}\right) + D\left(R + \frac{s_1 + s_2}{2}\right) - D(s_1) - D(s_2) \right] M, \\ D(s) &= A - A[s], \quad M(0, s_1, s_2, R, \rho_1, \rho_2) = \\ &= \langle u(0, \rho_1 + s_1) u^*(0, \rho_2 + s_2) \rangle \delta\left(\rho_2 - \rho_1 + R + \frac{s_2 - s_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, функция когерентности отраженной волны равна

$$\langle v_L(0, \rho_1) v_L^*(0, \rho_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} M(L, s_1 = 0, s_2 = 0, R, \rho_1, \rho_2) dR.$$

Отметим, что поперечные координаты отраженных волн входят только в граничные условия полученных уравнений. Поэтому, если интересоваться только средней интенсивностью отраженной волны, уравнение (3) следует решать с более простым граничным условием:

$$M_0 = \langle u(0, \rho + s_1) u^*(0, \rho + s_2) \rangle \delta\left(R + \frac{s_2 - s_1}{2}\right).$$

Уравнение (3) легко решается лишь в случае, когда $D(\rho) = D\rho^2$. Пусть для определенности $u(0, \rho) = 1$. Тогда решение уравнения (3) имеет вид

$$\langle v_L(0, \rho_1) v_L^*(0, \rho_2) \rangle = \exp[-k^2 D(\rho_2 - \rho_1) L].$$

Оно равно функции когерентности первоначально плоской волны, прошедшей в случайно-неоднородной среде без отражений трассу длиной $4L$. Последнее объясняется когерентным сложением неоднородностей, которые отраженная волна прошла два раза — до и после отражения.

Отметим, что $D(p) = Dp^2$ соответствует «клинообразным» неоднородностям среды, не приводящим к случайным фокусировкам волны. В общем же случае на вид функции когерентности волны оказывают существенное влияние эффекты фокусировки и дифракции. В результате уравнение (3) оказывается существенно сложнее уравнения для функции когерентности волны, распространяющейся без отражений.

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
3. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 65, 234 (1973).
4. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, изд. Высшая школа, М., 1961.
5. В. И. Гельфгат, Акуст. ж., 22, 123 (1976)
6. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 7, 1064 (1973).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 октября 1977 г.

THE RELATION OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF TRANSMITTED AND REFLECTED WAVES IN A MEDIUM WITH LARGE-SCALE RANDOM INHOMOGENEITIES

A. I. Saichev

A method of deriving equations is suggested for the moments of random waves reflected from obstacles placed in a medium with large-scale random inhomogeneities. As an example equations are given for the first two moments of a wave reflected from an infinite plane mirror of a wave. Some consequences of equations obtained are discussed.

УДК 532.783 : 621.371

О НЕЛИНЕЙНОСТИ ТЕРМОФОТОИНДИКАЦИИ СВЧ-ПОЛЯ НА ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ЭКРАНАХ

B. I. Максимов, B. A. Четкарев

Оценивается линейность преобразования СВЧ-поля в температурное поле жидкокристаллического экрана. Найдены выражения для коэффициента преобразования и темпа нагрева. В силу зависимости темпа нагрева экрана от координат интерференционного поля и времени, прошедшего с начала облучения экрана, имеет место нелинейность преобразования в переходном режиме. Эта нелинейность уменьшается по мере приближения во времени к установившемуся режиму. Результаты исследования подтверждаются данными эксперимента.

В связи с применением методов голографии в антенной технике [1] возникает необходимость визуализации интерференционных СВЧ-полей в ближней зоне излучения антенн. С целью упрощения процесса визуализации в качестве индикаторов СВЧ-полей могут применяться жидкокристаллические (ЖК) экраны-детекторы с большой поверхностью [2–5]. В этой связи большой интерес представляет оценка степени линейности преобразования интерференционного СВЧ-поля в тепловой рельеф ЖК-экрана. Вопросы совпадения температурного рельефа экрана и закона распределения СВЧ-энергии рассмотрены в [6–9], где предлагается ряд способов повышения разрешающей способности теплового метода записи в миллиметровом диапазоне волн. В настоящей работе оценивается линейность преобразования СВЧ-поля в температурное поле ЖК-экрана в зависимости от условий теплообмена его участков. Найдены выражения для коэффициента преобразования и темпа нагрева ЖК-экрана при визуализации интерференционного СВЧ-поля двух плоских волн. Экспериментальная визуализация произведена в 3-сантиметровом диапазоне волн.

Распределение энергии интерференционного СВЧ-поля плоских волн в плоскости вектора электрического поля вдоль линий, соединяющей источники, запишется в виде

$$\Pi = \Pi_0 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} y, \quad (1)$$

где Π_0 — наибольшее значение плотности энергии суммарного поля, равное его величине в пучностях стоячих волн; λ — длина радиоволн; y — координата поля вдоль линий, соединяющей источники.

При размещении ЖК-экрана в этой же плоскости энергия СВЧ-поля на нем преобразуется в тепловую энергию. Ввиду того, что интерферируют плоские волны, в направлениях, перпендикулярных y , температуру экрана можно считать постоянной и равной температуре $T(y)$ на оси y . Указанное условие позволяет для нахождения распределения температуры экрана $T(y)$ использовать одномерное уравнение теплового баланса.

Для экранов с большой поверхностью, размеры которой больше

размеров визуализируемого участка поля, можно пренебречь краевыми эффектами. Тогда температурное распределение $T(y, t)$ в зависимости от координаты y и времени t запишется в виде решения одномерного уравнения теплового баланса для тонкой термочувствительной пластины [9]. Это решение в принятых в настоящей работе обозначениях имеет следующий вид:

$$T(y, t) = \frac{k \Pi_0}{2} \left(\frac{1 - e^{-\eta t}}{\eta} + \frac{1 - e^{-vt}}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right), \quad (2)$$

где $\eta = \frac{2\alpha}{c\rho L}$, $v = \frac{2\alpha + \beta L}{c\rho L}$, $k = \frac{A}{c\rho L}$, α — усредненный по толщине экрана коэффициент теплообмена, β — усредненная по толщине экрана удельная теплопроводность, L — толщина экрана, c — усредненная по толщине экрана удельная теплоемкость, ρ — усредненная по толщине экрана удельная плотность, A — интегральный коэффициент поглощения, $4\pi/\lambda$ — масштабный коэффициент перехода от линейных координат экрана к фазовым координатам интерференционного поля. Первое слагаемое в (2) выражает равномерный нагрев экрана с темпом η [10], а второе — описывает распределение теплового рельефа относительно уровня температуры, определяемого первым слагаемым, и выражает нагрев экрана с темпом v .

Для оценки соответствия температурного рельефа закону распределения интенсивности интерференционного поля и определения темпа нагрева экрана преобразуем (2) в выражение, содержащее исходное распределение вида $\cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} y$ интерференционного СВЧ-поля и множитель в виде показательной функции $x e^{-\mu t}$, где x и μ — параметры, зависящие от η , v и y . С этой целью в (2) вынесем за скобку $1/\eta$ и сумму слагаемых при показательных функциях запишем в виде множителя $x e^{-\mu t}$:

$$T(y, t) = \frac{k \Pi_0}{2\eta} \left(1 + \frac{\eta}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y - x e^{-\mu t} \right), \quad (3)$$

где

$$x e^{-\mu t} = e^{-\eta t} + \frac{\eta}{v} e^{-vt} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y. \quad (4)$$

Параметр x найдем как величину, не зависящую от времени t . Для этого, приравняв $t = 0$, из (4) получим

$$x = 1 + \frac{\eta}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), имеем

$$\left(1 + \frac{\eta}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right) e^{-\mu t} = e^{-\eta t} + \frac{\eta}{v} e^{-vt} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y. \quad (6)$$

Для определения μ продифференцируем (6) по времени t :

$$-\mu \left(1 + \frac{\eta}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right) e^{-\mu t} = -\eta e^{-\eta t} - \eta e^{-vt} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y. \quad (7)$$

Подставив (6) в (7) и разрешив (7) относительно μ , получим выражение для темпа нагрева экрана:

$$\mu = \eta \left\{ 1 + \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right\} / \left\{ 1 + \frac{\eta}{v} \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right\}. \quad (8)$$

С учетом (5) и (8) температура экрана (3) запишется в виде

$$T(y, t) = \frac{k \Pi_0}{2\eta} \left(1 + \frac{\eta}{v} \cos \frac{4\pi}{\lambda} y \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\eta \frac{1 + \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{1 + \frac{\eta}{v} \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y} t \right) \right]. \quad (9)$$

Подставив значение η и v в (9) и применив формулы приведения, запишем температурное распределение на ЖК-экране через исходное распределение интенсивности СВЧ-поля:

$$T(y, t) = \frac{A \Pi_0}{2\alpha + \beta L} \left(\frac{\beta L}{4\alpha} + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\eta \frac{1 + \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{1 + \frac{2\alpha}{2\alpha + \beta L} \left[\exp \left(-\frac{\beta}{c\rho} t \right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y} t \right) \right]. \quad (10)$$

Распределение температуры (10) на ЖК-экране во времени по-разному отображает распределение интенсивности интерференционного СВЧ-поля. В установившемся режиме при $t \rightarrow \infty$ температура ЖК-экрана может быть представлена в виде двух слагаемых: постоянного приращения ΔT относительно температуры окружающей среды и изменяющегося по закону распределения интерференционного СВЧ-поля температурного рельефа $T(y)$. Слагаемые имеют вид

$$\Delta T = A \Pi_0 \beta L / (2\alpha + \beta L) 4\alpha; \quad (11)$$

$$T(y) = \frac{A \Pi_0}{2\alpha + \beta L} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} y. \quad (12)$$

Следовательно, распределение температуры в установившемся режиме теплообмена с точностью до постоянного слагаемого ΔT повторяет закон распределения плотности энергии интерференционного СВЧ-поля. Отношение величины приращения постоянной температуры к амплитуде переменной составляющей

$$\frac{\Delta T}{T(y=0)} = \frac{\beta L}{4\alpha} \quad (13)$$

определяется отношением теплопроводности экрана βL к коэффициенту 4α .

Распределения $\Pi(y)$ и $T(y)$ в установившемся режиме для различных значений $\beta L / 4\alpha$ приведены на рис. 1. Кривая 1 соответствует $\frac{\beta L}{4\alpha} = 2$, $2 - \frac{\beta L}{4\alpha} = 1$, $3 - \frac{\beta L}{4\alpha} = 0,5$, $4 - \frac{\beta L}{4\alpha} = 0$. Из рис. 1 видно, что с увеличением $\beta L / 4\alpha$ амплитуда переменной составляющей температурного рельефа по сравнению с ΔT уменьшается. Это соответствует

аналогичной зависимости контрастности теплового изображения от величины $\beta L/4\alpha$.

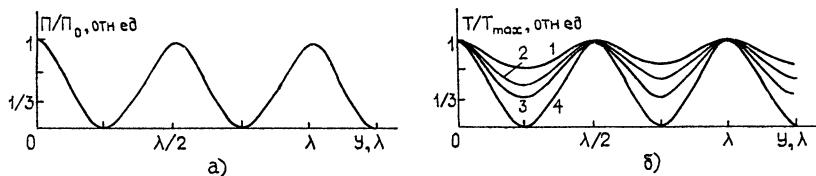


Рис. 1. Распределение энергии интерференционного СВЧ-поля по оси y :

$\frac{\Pi}{\Pi_0} = f_1(y)$ (а) и его тепловое отображение $T/T_{\max} = f(y)$ на ЖК-экране (б) при различных значениях $\beta L/4\alpha$, равных 2 (кривая 1), 1 (кривая 2), 0,5 (кривая 3), 0 (кривая 4).

Полученное решение распределения температуры экрана (10) позволяет выразить коэффициент прообразования ЖК-экрана $p(y, t)$. Разделив (10) на (1), получим

$$p(y, t) = \frac{k}{\mu(t=0)} (1 - \exp[-\mu(t)]). \quad (14)$$

Выражение (14) позволяет представить распределение температуры $T(y, t)$ по известному распределению плотности энергии $\Pi(y)$ в виде

$$T(y, t) = \Pi(y) \frac{k}{\mu(t=0)} (1 - \exp[-\mu(t)]). \quad (15)$$

В процессе установления температурного рельефа распределение температуры на ЖК-экране отличается от рассмотренного в установившемся режиме не только величиной, но и характером распределения. Последнее обусловлено зависимостью темпа нагрева μ экрана как от координат интерференционного СВЧ-поля, так и от времени t , прошедшего с начала облучения. Если в выражении для μ (8) t велико, в пределе $t \rightarrow \infty$, то $\mu = \eta$, т. е. с течением времени темп нагрева μ по всему экрану стремится к постоянной величине.

Характер изменения μ во времени свидетельствует о существовании двух режимов в процессе установления температуры экрана [11]: «дорегулярного» режима, когда $\mu = v\alpha t$, т. е. меняется во времени, и регулярного режима, когда $\mu = \eta = \text{const}$, т. е. остается постоянным. Время установления регулярного режима t_0 , т. е. длительность дорегулярного режима, найдем из (8) как время t , в течение которого разность между темпом нагрева μ и его установившимся значением η будет величиной малой по сравнению с η :

$$\mu - \eta = \varepsilon\eta, \quad (16)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Величину ε следует выбирать равной величине приведенной погрешности измерения температуры с помощью ЖК-экрана.

Подставив в (16) вместо μ его выражение (8) и заменив t на t_0 , получим уравнение для вычисления t_0 :

$$\eta \frac{1 + \left[\exp\left(-\frac{\beta}{c\rho} t_0\right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{1 + \frac{\eta}{v} \left[\exp\left(-\frac{\beta}{c\rho} t_0\right) \right] \cos \frac{4\pi}{\lambda} y} - \eta = \varepsilon\eta, \quad (17)$$

Найдем приближенное решение (17). Для этого показательные функции, входящие в (17), разложим в ряд [12], ограничимся линейными членами разложения и, пренебрегая в решении слагаемыми порядка ϵ , получим

$$t_0 = \frac{c\rho}{\beta} \left[1 - \frac{\frac{\epsilon/\cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{v - \eta}}{v} \right]. \quad (18)$$

Для сравнения с постоянной времени экрана $\tau = 1/\eta$ рассмотрим отношение

$$\frac{t_0}{\tau} = \frac{2\alpha}{\beta L} \left[1 - \frac{\frac{\epsilon/\cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{v - \eta}}{v} \right], \quad (19)$$

равное в нашем случае

$$\frac{t_0}{\tau} = \frac{2\alpha}{\beta L} \left[1 - \frac{\frac{\epsilon/\cos \frac{4\pi}{\lambda} y}{v - \eta}}{1 + \frac{2\alpha}{\beta L}} \right]. \quad (20)$$

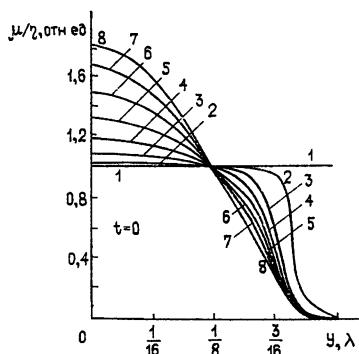


Рис. 2. Зависимость темпа нагрева μ от координаты y интерференционного СВЧ-поля при $t = 0$ (кривая $1 - \beta L/2\alpha = 0$; $2 - 0,05$; $3 - 0,25$; $4 - 0,5$; $5 - 1$; $6 - 2$; $7 - 5$; $8 - 10$).

в начале облучения определяется отличием теплопроводности экрана βL от нуля и зависит от величины $\beta L/2\alpha$.

Изменение μ во времени для различных значений $\beta L/2\alpha$ приведено на рис. 3 (а, б, в, г). При этом на рис. 3 (а, б) различные значения $\beta L/2\alpha$ обусловлены изменением α при $\beta L/2 = \text{const}$, а на рис. 3 (в, г) — изменением β при $L/2\alpha = \text{const}$.

Наличие зависимости μ от координат интерференционного СВЧ-поля в дорегулярном режиме приводит к нелинейности преобразования СВЧ-энергии в тепло. В результате с началом облучения греются только те участки экрана, которые соответствуют пучностям. Остальные участки остаются холодными. Это явление используется для увеличения контрастности записи теплового изображения интерференционного СВЧ-поля в миллиметровом диапазоне волн [9]. Однако распре-

Выражение (20) позволяет оценить длительность дорегулярного режима в масштабе постоянной времени ЖК-экрана и в зависимости от отношения $2\alpha/\beta L$. Из (20) следует, что длительность дорегулярного режима уменьшается с уменьшением отношения $2\alpha/\beta L$, а также по мере приближения координат экрана от узлов к пучностям интерференционного поля.

В начале дорегулярного режима темп нагрева экрана μ зависит от координат интерференционного поля. Эта зависимость при $t = 0$ и для различных величин отношения $\beta L/2\alpha$ приведена на рис. 2. Величина μ нормирована по его установившемуся значению τ . Из сравнения кривой 1 ($\beta L/2\alpha = 0$) с кривыми 2—8 ($\beta L/2\alpha > 0$) следует, что неравномерность темпа нагрева участков экрана

деление теплового поля на экране в этом режиме отличается от распределения интенсивности СВЧ-поля.

В регулярном режиме участки ЖК-экрана нагреваются с одинаковым темпом. Нелинейность преобразования в этом режиме определяется той долей тепла, которая получена ЖК-экраном в дорегулярном режиме. По мере приближения во времени к установившемуся режиму эта доля тепла уменьшается по сравнению с количеством тепла, возникшим в ЖК-экране за время регулярного режима. Поэтому для обеспечения линейности записи интерференционного СВЧ-поля, особенно в длинноволновой области, когда пространственный период СВЧ-поля больше длины пространственного разрешения индикатора, целесообразно регистрировать изображение на индикаторе в установленном режиме.

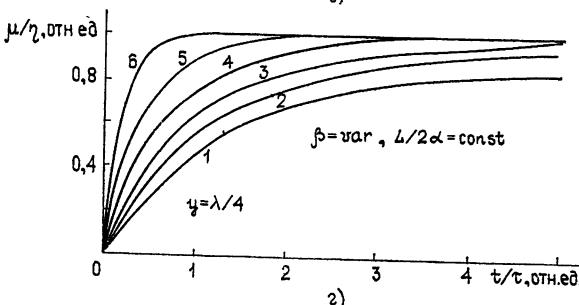
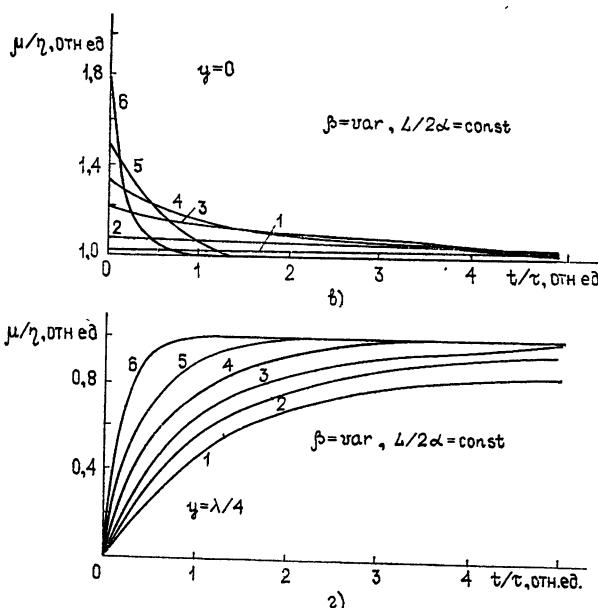
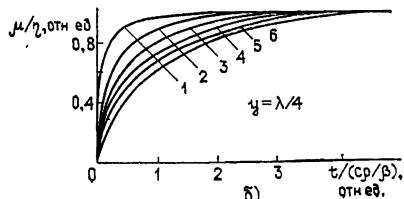
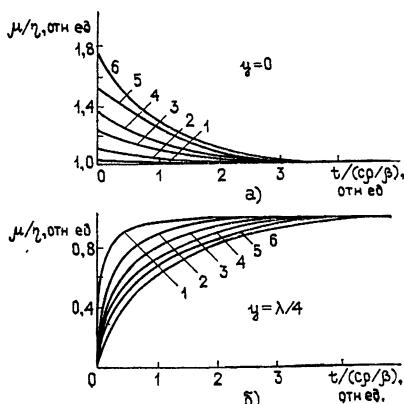


Рис. 3. Зависимость темпа нагрева μ от времени нагрева t ЖК-экрана. Значения кривых на рис. а), б), в), г) соответствуют:
1— $\beta L/2\alpha=0,05$; 2—0,25; 3—0,5; 4—1; 5—2; 6—5.

Влияние постоянной составляющей температуры экрана исключается выбором границ температурных интервалов жидкокристаллического состояния экранов, равных соответственно верхнему и нижнему значениям температуры теплового рельефа. Такой способ регистрации целесообразно использовать при снятии радиоголографм в апертуре антенны или в ее ближней зоне с целью достаточно точного получения характеристик направленности [1].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЖК-ЭКРАНА

Визуализация интерференционного СВЧ-поля с помощью ЖК-экрана осуществлялась на установке, изображенной на фотографии рис. 4. В качестве источника СВЧ-энергии использовался магнетронный генератор 1, описанный в [5]. СВЧ-энергия излучалась рупором 2 с поперечными размерами $9 \times 13,5 \text{ см}^2$. Излученная рупором энергия отражалась от металлической пластины 3, установленной параллельно раскрыту рупору на расстоянии 0,5 м от него. Между рупором и пластиной создается интерференционное поле электромагнитных волн. Для его визуализации в качестве ЖК-экрана 4 использовались термофотоиндикаторы [5], представляющие собой две прямоугольные пленки размером $9 \times 12 \text{ см}^2$ каждая. Пленки углами приклеивались к радиопрозрачной пластине пенопласта 5 толщиной около 5 мм. Такой экран устанавливался вдоль оси рупора в плоскости вектора электрического поля.

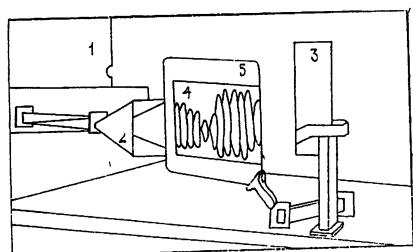


Рис. 4. Внешний вид измерительной установки:

1—магнетронный генератор; 2—излучающий рупор; 3—металлическая пластина; 4—ЖК-экран; 5—пластина из пенопласта.

В исходном состоянии ЖК-экран с помощью инфракрасного прожектора был нагрет до температуры 34°C. Прожектор размещался на расстоянии от экрана порядка 5 м. Температура участков экрана измерялась путем регистрации их цвета при освещении экрана белым некогерентным светом галогенной лампы от типовых проекторов «Альфа». Соответствие цвета экрана его температуре изображено в виде зависимости длины волны λ_m отраженного света от ЖК-экрана с максимальной интенсивностью от температуры $T^\circ\text{C}$ на рис. 5.

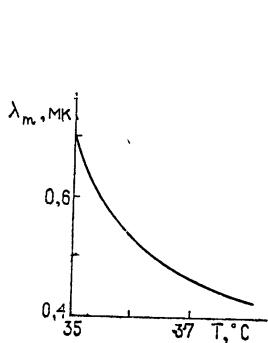


Рис. 5.

Рис. 5. Зависимость длины волны отраженного света от ЖК-экрана с максимальной интенсивностью от температуры экрана.

Рис. 6. Зависимость температуры ЖК-экрана от времени нагрева при различных значениях y , равных 0 (кривая 1), $\lambda/8$ (кривая 2), $\lambda/4$ (кривая 3).

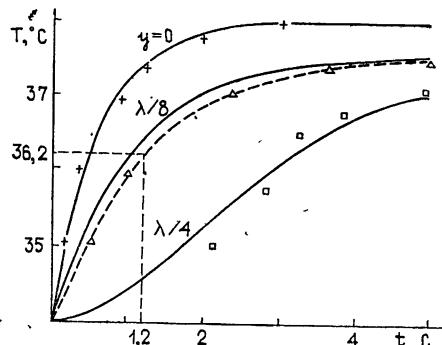


Рис. 6.

С началом облучения через 0,5 с одновременно вырисовывались в красном цвете все участки экрана, соответствующие максимумам интенсивности интерференционного СВЧ-поля. С течением времени эти участки окрашивались сначала в зеленый, а затем в синий цвета. Одновременно цветовые пятна увеличивались в размере, сохраняя радиальное изображение, переходящее от участков максимума к участкам

минимума в виде цветовых переходов от синего цвета к красному. При малых уровнях средней мощности излучения цветовые пятна друг друга не касаются. Это обусловлено выбором нижней границы зоны чувствительности по температуре, равной 35°C. Это позволило при записи интерференционной картины исключить влияние тепла, выделенное в ЖК-экране в период времени, соответствующее дорегулярному режиму.

С увеличением среднего значения излученной мощности границы цветовых пятен приближаются друг к другу, цветовые пятна сливаются, и интерференционная картина наблюдается на фоне красного цвета в виде зеленых и синих пятен. С последующим увеличением излученной мощности цветовой фон достигал зеленого цвета, а максимумы интерференционного поля наблюдались в условиях насыщения, т. е. жидкокристаллический слой в этих местах становился прозрачным. При уровнях плотности энергии в пучностях, равных 5 Bt/cm², ЖК-экран разрушался в результате перегрева.

Изображение в переходном режиме с ЖК-экрана снималось на цветную обратимую кинопленку со скоростью 12 кадров в секунду. Такая регистрация позволяла измерять температуру различных зон интерференционной картины в различные моменты времени. Графики зависимости температуры участков ЖК-экрана от времени для трех точек интерференционного поля приведены на рис. 6. Кривая 1 соответствует пучностям интерференционного поля ($y = 0$), 2 — $y = \lambda/8$, 3 соответствует узлам интерференционного поля ($y = \lambda/4$).

Для проверки расчетной формулы на соответствие полученных по ней результатов данным эксперимента предварительно с помощью последних были определены приращения температуры в установившемся режиме в пучности — $\Delta T_p = 4^\circ\text{C}$ и в узле — $\Delta T_y = 3,05^\circ\text{C}$. Эти измерения позволяют определить обобщенные параметры:

$$T_{y=0} = \Delta T_p - \Delta T_y = 0,95^\circ; \quad (21)$$

$$\frac{\beta L}{4\alpha} = \frac{\Delta T}{T_{y=0}} = 3,3; \quad (22)$$

$$\frac{\beta L}{2\alpha} = 6,6. \quad (23)$$

Кроме того, по данным измерений температуры посредине между точками максимума и минимума интерференционного поля, т. е. при $y = \lambda/8$, определялась постоянная времени экрана τ . Для этого строилась кривая зависимости температуры экрана от времени, которая на рис. 6 обозначена пунктирной линией. Максимальное значение температуры в установившемся режиме для $y = \lambda/8$ равно 3,5°C. Последнее отсчитано от уровня 34°C, т. е. от исходного состояния ЖК-экрана. Время, в течение которого температура в этой точке изменится на 63% от 3,5°, т. е. на 2,2°, принято за постоянную времени ЖК-экрана. Это время, согласно рис. 6, равно 1,2 с.

Если показатели степени e в (10) нормировать на величину $\frac{2\alpha\eta}{c_p L} = 1$,

то, задавая время t в единицах постоянной времени экрана, можно рассчитать изменение температуры экрана во времени t . Сплошные линии на рис. 6 построены по данным расчета (10), а экспериментальные результаты показаны точками и согласуются с теорией.

С изменением положения плоскости экрана относительно плоскости вектора электрического поля интенсивность цветового изображения уменьшалась и, когда угол между ними составлял 90°, изображение

на экране исчезало. Это свидетельствует о чувствительности ЖК-экрана к электрическому вектору СВЧ-поля.

Проведенные исследования подтверждают целесообразность применения ЖК-экранов для сокращения времени снятия интерферограмм СВЧ-полей в сантиметровом диапазоне волн.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Бахрах, Г. Х. Фридман, Современное состояние и перспективы развития голограммии, изд. Наука, Л., 1974, стр. 14.
- К. Ф. Огастин, У. Е. Кок, ТИИЭР, 57, № 3, 111 (1969).
- К. Ф. Огастин, К. Дейч, Д. Фрицлер, Е. Марот, ТИИЭР, 57, № 7, 180 (1969).
- Е. Л. Барташевский, В. М. Долгов, В. А. Красовский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 5, 735 (1974).
- В. И. Максимов, В. А. Четкарев, ПТЭ, 2, 154 (1977).
- Н. В. Котосонов, Б. И. Власов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 2, 311 (1968).
- Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Ю. М. Пьяных, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 3, 446 (1970).
- О. А. Свирилова, И. А. Хрипченко, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 6, 929 (1974).
- И. А. Хрипченко, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 3, 425 (1975).
- Теоретические основы тепло- и хладотехники. Часть 2. Теплообмен Под ред. Э. И. Гуйго, ЛГУ, Л., 1976.
- П. В. Новицкий, Электрические измерения неэлектрических величин, изд. Энергия, Л., 1975.
- М. Я. Выгодский, Справочник по высшей математике, ГИФМЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию
2 июля 1977 г.

NONLINEAR THERMOINDICATION OF VHF-FIELD ON CRYSTALLINE LIQUID SCREENS

V. I. Maksimov, V. A. Chetkarev

The linearity of VHF-field transformation in a temperature field of the crystalline liquid screen is estimated. Expressions have been found for the transformation coefficient and the heating rate. Due to the dependence of the screen heating rate on the coordinates of the interference field and time passing from the beginning of the screen irradiation the transformation nonlinear takes place in the transition regime. This nonlinearity decreases with the time approximation to the regime stated. Investigation results are confirmed by the experimental data.

УДК 621.396.677.494 : 621.391.822

О СОБСТВЕННЫХ ШУМАХ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ИЗЛУЧАТЕЛЯМИ

А. Г. Флаксман, Я. М. Дорфман, В. Т. Ермолаев

Исследуются собственные шумы линейной антенной решетки с взаимодействующими между собой излучателями. Найдена функция корреляции флуктуационных токов в вибраторах при любых собственных и взаимных импедансах и произвольном расстоянии между излучателями. Получено выражение для температуры собственных шумов антенной решетки.

В связи с использованием малошумящих приемных устройств все большее значение приобретает исследование шумов, наводимых в антenne. Эти шумы обусловлены флуктуационными токами в самой антенне или окружающих ее телах. Обычно представляет интерес величина спектральной плотности мощности шума на согласованной нагрузке, которая, как известно, определяет шумовую температуру антенны. В случае многоэлементной антенной решетки (АР) эта температура зависит от мощности некоторого суммарного тока. При этом, так как токи в элементах АР связаны по полю излучения, расчет мощности в нагрузке необходимо производить с учетом их функции корреляции. Если АР является многофункциональным устройством и имеет несколько выходов, то интерес представляет не только мощность шумов в каждом из них, но и их функции взаимной корреляции. Корреляция шумов, поступающих на разные выходы АР, обусловлена, во-первых, тем, что суммируются в различных комбинациях шумы от одних и тех же элементов, и, во-вторых, наличием взаимной связи между излучателями. Здесь также необходимо знать функцию взаимной корреляции токов в элементах АР.

Задача о корреляции флуктуационных токов рассматривалась в [1] для антенны, состоящей из двух взаимодействующих тонких полуволновых вибраторов. Показано, что корреляция собственных шумов, шумов, наводимых нагретой полостью, и шумов, принятых от дискретного источника, различна. В [2] находилась функция корреляции флуктуационных токов в излучателях многоэлементной АР $B_1(l, m) = \langle I_l I_m \rangle$ (I_l, I_m — токи в l -м и m -м излучателях, косыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций) при учете взаимодействия только соседних элементов (приближение попарного взаимодействия). Задача решалась путем непосредственного вычисления этой функции на основе имеющихся в [3] решений системы уравнений Кирхгофа с флуктуационными ЭДС в правых частях. Однако определенную таким образом функцию корреляции нельзя использовать для отыскания энергетических характеристик флуктуационных токов. Кроме этого, результаты работы не применимы в случае АР с периодом $d < \lambda/2$ (λ — длина волны).

В настоящей работе в приближении попарного взаимодействия без учета краевого эффекта при любых собственных и взаимных сопротивлениях излучателей и произвольном расстоянии между ними, с ис-

пользованием флюктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ), найдена функция корреляции в элементах АР:

$$B(l, m) = \langle I_l I_m^* \rangle . \quad (1)$$

С помощью этой функции корреляции получено выражение для шумовой температуры АР при параллельном соединении ее элементов. Температура собственных шумов АР найдена также без предположения о попарном взаимодействии между вибраторами, что дало возможность сделать косвенную оценку точности этого приближения.

1. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛЮКТУАЦИОННЫХ ТОКОВ

Рассмотрим линейную эквидистантную АР, состоящую из N одинаковых, взаимодействующих между собой по полю излучения, тонких элементов. Предположим, что взаимодействуют только соседние излучатели (попарное взаимодействие). Пределы применимости данного приближения обсуждаются в [3]. Функцию $B(l, m)$ можно найти двумя различными способами. Первый заключается в непосредственном вычислении $B(l, m)$ по формуле (1). Для этого необходимо решить систему уравнений Кирхгофа с флюктуационными ЭДС в правых частях. Такие решения, полученные в [3], имеют достаточно сложный вид. Значительно проще найти функцию корреляции вторым способом, развитым в [1], который заключается в использовании электродинамической ФДТ. При этом [1]

$$B(l, m) = \frac{2kT_0}{\pi E_{0l} E_{0m}^*} Q_0(l, m) , \quad (2)$$

где T_0 — температура материала вибраторов, k — постоянная Больцмана, E_{0l} , E_{0m} — вспомогательные ЭДС, помещенные в l -й и m -й излучатели, $Q_0(l, m)$ — смешанные потери регулярных токов $I_{0n}(l)$ и $I_{0n}(m)$, создаваемых соответственно E_{0l} и E_{0m} во всех элементах АР (n — номер элемента). Для настроенной АР с синусоидальным распределением тока по излучателям

$$Q_0(l, m) = \frac{1}{4} R_\sigma \sum_{n=1}^N I_{0n}(l) I_{0n}^*(m) , \quad (3)$$

где R_σ — сопротивление скин-слоя вибраторов.

Теперь для нахождения $I_{0n}(l)$ достаточно решить систему уравнений Кирхгофа, в которых все ЭДС, кроме E_{0l} , равны нулю. Такое решение имеет вид [3]

$$I_{0n}(l) = \frac{(-1)^{n+l} E_{0l}}{Z_{12} C_N^1(x)} \begin{cases} C_{n-1}^1(x) C_{N-l}^1(x) & (n \leq l) \\ C_{N-n}^1(x) C_{l-1}^1(x) & (n > l) \end{cases} . \quad (4)$$

Здесь $C_l^1(x)$ — электросферический полином Гегенбауэра 1-го рода, $x = Z_0/2Z_{12}$; Z_0 , Z_{12} — собственные и взаимные импедансы излучателей. Подставляя (3) и (4) в (2), пренебрегая краевым эффектом и используя известные представления полиномов Гегенбауэра [4], можно получить для функции корреляции флюктуационных токов следующие выражения:

$$a) |x| = |x_1 + ix_2| \geqslant 1 -$$

$$B(l, m) = B(t) = \frac{kT_0 R_\sigma}{2\pi |Z_0|^2 |\operatorname{th} \vartheta|^2} e^{-|t| \vartheta_1} \times \\ \times (\operatorname{cth} \vartheta_1 \cos t \vartheta_2 + \operatorname{ctg} \vartheta_2 \sin |t| \vartheta_2) \begin{cases} (-1)^t & (x_1 > 0) \\ 1 & (x_1 < 0) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = \operatorname{arcln}(|x_1| + ix_2), \quad \vartheta_1 > 0, \quad t = m - l;$$

$$b) |x| < 1 -$$

$$B(l, m) = B(t) = \frac{kT_0 R_\sigma}{2\pi |Z_0|^2 |\operatorname{tg} \vartheta|^2} (-1)^t e^{-|t| \vartheta_2} \times \\ \times (\operatorname{cth} \vartheta_2 \cos t \vartheta_1 + \operatorname{ctg} \vartheta_1 \sin |t| \vartheta_1), \quad (6)$$

$$\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = \operatorname{arccos}(x_1 + ix_2), \quad \vartheta_2 > 0.$$

На рис. 1 представлены графики коэффициента корреляции $\gamma(t)$ флюктуационных токов в элементах АР, построенные с помощью (5) и (6) для АР, состоящей из параллельных элементов, при $d/\lambda = 0,7; 0,8; 1,22$ (кривые 1, 2, 3 соответственно, d — расстояние между излучателями, λ — длина волны). Значения Z_{12} взяты из [5], $Z_0 = 75 \Omega$. Видно, что, если $d/\lambda < 1$, токи в соседних элементах АР достаточно сильно коррелированы. Характер корреляции полностью определяется параметром x . Если $\operatorname{Re} x = x_1 < 0$, то коэффициент корреляции токов положительная величина, а при $x_1 > 0$ — знакопеременная. Этот вывод особенно очевиден для случая двух взаимодействующих излучателей, для которых согласно [1]

$$\gamma(t) = -2\operatorname{Re} \frac{Z_{12}}{Z_0} \left(1 + \left|\frac{Z_{12}}{Z_0}\right|^2\right)^{-1} \quad (7)$$

и знак $\gamma(t)$ определяется только знаком $\operatorname{Re} \frac{Z_{12}}{Z_0}$.

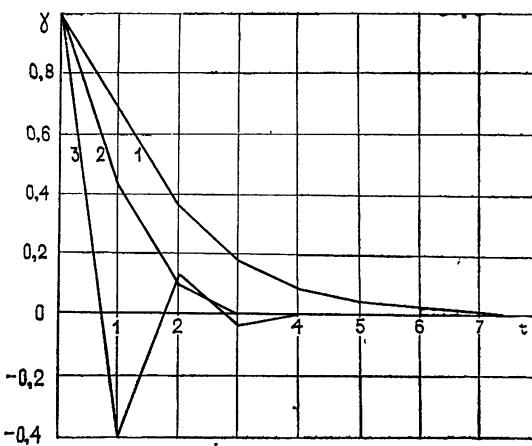


Рис. 1.

Корреляционная функция $B(l, m)$ (5), (6) найдена в приближении попарного взаимодействия. Получить более точные приближения для корреляционных функций флюктуационных токов в аналитическом виде

не представляется возможным из-за трудности нахождения решений системы уравнений Кирхгофа. Что касается численных методов, то, усредняя на ЭВМ отдельные реализации флюктуационных токов, можно, в принципе, получить их корреляционные функции с учетом всей матрицы взаимных сопротивлений. Однако при этом число считаемых элементов АР будет ограничено возможностями ЭВМ. Кроме того, как будет показано ниже, приближение попарного взаимодействия дает значение шумовой температуры АР с достаточно хорошей точностью.

Отметим, что примененный способ нахождения функции корреляции токов справедлив для тепловых флюктуаций. Как уже отмечалось, $B(l, m)$ можно искать непосредственно по формуле (1), используя решение системы уравнений Кирхгофа. При этом нет необходимости делать предположения о природе флюктуационных ЭДС. Вычисленная таким способом функция корреляции совпадала с соответствующей функцией, полученной путем вычисления смешанных потерь (см. (5), (6)), в случае, когда флюктуационные ЭДС статистически независимы.

2. ТЕМПЕРАТУРА СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ АР

Рассмотрим линейную эквидистантную АР, эквивалентная схема которой изображена на рис. 2. Такое соединение излучателей часто встречается на практике. Дисперсия флюктуационной ЭДС в каждом излучателе, обусловленная его потерями, определяется известным выражением [1]:

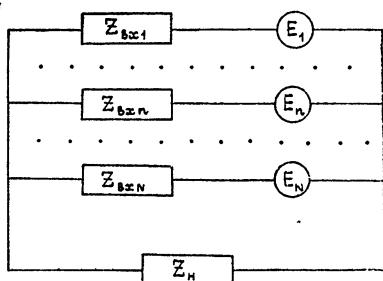


Рис. 2.

$$\overline{|E_n|^2} = \frac{kT_0}{2\pi} R_\sigma. \quad (8)$$

Входное сопротивление n -го излучателя является случайной величиной и равно [5]

$$Z_{bx,n} = \sum_{k=1}^N Z_{nk} \frac{I'_k}{I'_n}, \quad (9)$$

где Z_{nk} — матрица собственных и взаимных импедансов излучателей, I'_k — флюктуационный ток в k -м элементе, зависящий от величины согласованной нагрузки Z_h .

Из эквивалентной схемы нетрудно получить формулу для тока I_h в Z_h :

$$I_h = \frac{\sum_{n=1}^N E_n}{Z_{bx,0} + NZ_h}, \quad (10)$$

где $Z_{bx,0}$ — входное сопротивление элементов АР при ее равномерном возбуждении. Из (10) следует, что $Z_h = Z_{bx,0}^*/N$.

Теперь можно найти шумовую температуру АР:

$$T_a = T_{a0} \frac{R_0}{R_{bx,0}}, \quad (11)$$

где $R_0 = \operatorname{Re} Z_0$, $R_{bx,0} = \operatorname{Re} Z_{bx,0}$, $T_{a0} = \frac{R_\sigma}{2R_0} T_0$ — шумовая температура АР с невзаимодействующими излучателями. Сравнение T_{a0} с выражением

для температуры собственных шумов отдельного вибратора [6] показывает, что эти величины равны друг другу. На рис. 3 (сплошная линия) представлен график отношения T_a/T_{a0} как функции параметра d/λ для АР, состоящей из параллельно расположенных элементов. При этом учитывалось взаимодействие каждого вибратора с восемью окружающими. Необходимые значения взаимных сопротивлений взяты из [5].

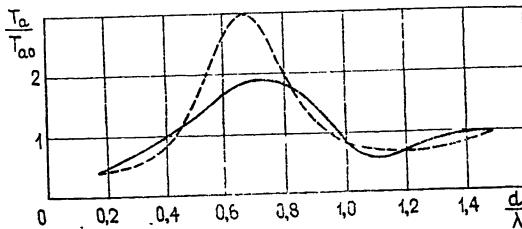


Рис. 3.

Так как функцию корреляции флюктуационных токов в элементах АР в аналитическом виде можно получить только в приближении попарного взаимодействия, то представляет интерес оценить точность приближения. Для этого найдем температуру собственных шумов АР в приближении попарного взаимодействия. Как известно, спектральная плотность мощности собственных шумов АР на согласованной нагрузке определяется следующим выражением (см., например, [6]):

$$P_\omega = \frac{\overline{|I|_\omega^2} |Z'_1|^2}{4R'_1}, \quad (12)$$

где $Z'_1 = R'_1 + iX'_1$ — входное сопротивление всей АР, $\overline{|I|_\omega^2}$ — спектральная плотность среднего квадрата тока в месте подключения нагрузки при коротком замыкании зажимов АР. В приближении попарного взаимодействия имеем

$$Z'_1 = \frac{Z_0 + 2Z_{12}}{N}, \quad (13)$$

$$\overline{|I|_\omega^2} = 2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N B(l, m),$$

где $B(l, m)$ определяется выражениями (5), (6).

Подставляя (5), (6), (13) в (12), получим для температуры собственных шумов АР в приближении попарного взаимодействия следующее равенство:

$$T'_a = T_{a0} \frac{R_0}{R_0 + 2R_{12}}. \quad (14)$$

На рис. 3 (пунктирная линия) представлено отношение T'_a/T_{a0} в зависимости от параметра d/λ для АР, состоящей из параллельных элементов.

Сравнивая (11) и (14), можно оценить погрешность (δ) приближения попарного взаимодействия:

$$\delta = \left| \frac{T_a - T'_a}{T_a} \right| = \left| \frac{2(R_{13} + R_{14} + R_{15} + \dots)}{R_0 + 2R_{12}} \right|. \quad (15)$$

В заключение отметим еще раз следующее.

1) При $d/\lambda < 1$ флуктуационные токи в соседних элементах АР, обусловленные потерями в излучателях, достаточно сильно коррелированы. Радиус корреляции может составлять 3—4 и более периодов АР.

2) Взаимодействие элементов АР приводит к зависимости температуры собственных шумов от периода решетки. При некоторых значениях d/λ шумовая температура АР может увеличиваться примерно в 2 раза по сравнению с соответствующей величиной в случае отсутствия взаимодействия.

3) При решении подобного рода задач в большинстве практических случаев можно ограничиваться приближением попарного взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
2. Я. М. Дорфман, Радиотехника и электроника, 22, № 1, 53 (1977).
3. Я. М. Дорфман, Радиотехника и электроника, 17, № 11, 2423 (1972).
4. Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.
5. Г. Т. Марков, Д. М. Сазонов, Антенны, изд. Энергия, М., 1975
6. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966

Поступила в редакцию
22 июля 1977 г.

INHERENT NOISES OF A LINEAR ANTENNA ARRAY WITH INTERACTING RADIATORS

A. G. Flaksman, Ya. M. Dorfman, V. T. Ermolayev

Inherent noises of a linear antenna array with interacting radiators are investigated. The correlation function of fluctuation currents has been found in vibrators at any inherent and mutual impedances and at an arbitrary distance between radiators. An expression is obtained for the temperature of inherent noises of the antenna array.

УДК 538.574.2

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

A. A. Колоколов, A. I. Суков

На основе вариационной формулировки принципа излучения и критерия устойчивости преломленной волны относительно изменения граничных условий на поверхности раздела линейной и нелинейной сред развита теория отражения плоской монохроматической волны от нелинейной среды. Выводы теории проверены с помощью численных экспериментов, проведенных для отражающей среды с кубической безынерционной нелинейностью.

Отражение электромагнитных волн от нелинейных сред, первоначально рассмотренное для случая плазмы [1–3], в последнее время снова привлекло внимание [4–7]. Анализ формул Френеля для среды с безынерционной нелинейностью показал, что одному значению интенсивности I_i , падающего излучения могут соответствовать преломленные волны разного вида. Установление определенного распределения поля преломленной волны зависит от изменения I_i во времени, что в некоторых случаях приводит к гистерезисной зависимости коэффициента отражения от интенсивности [1–6].

Хорошо известно, что нахождение преломленной волны с помощью граничных условий на поверхности раздела двух сред является неоднозначным и требует дополнительного граничного условия в виде принципа излучения [8]. Корректная постановка задачи об отражении плоской волны от нелинейной среды по существу сводится к введению обоснованного принципа излучения. Подробное обсуждение принципа излучения для нелинейной среды до сих пор не проводилось. Существование гистерезиса обычно связано с неустойчивостью преломленной волны относительно изменения граничных условий на поверхности раздела сред. Однако соответствующий анализ устойчивости в литературе отсутствует.

Цель настоящей работы заключается в анализе принципа излучения для нелинейной среды и исследовании устойчивости преломленной волны. Полученные результаты позволяют единым методом рассмотреть все случаи отражения плоской волны от нелинейной среды и определить условия существования гистерезисов.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРИНЦИПА ИЗЛУЧЕНИЯ

Пусть плоская волна частоты ω , поляризованная перпендикулярно плоскости падения, падает на линейную прозрачную среду, занимающую полупространство $z \geq 0$. Исключая из граничных условий на поверхности $z = 0$ поле отраженной волны, можно получить одно граничное условие, связывающее напряженности электрического поля падающей E_i - и преломленной E -волн:

$$2ik_{1z} E_i = ik_{1z} E + \frac{dE}{dz}, \quad z = 0, \quad (1.1)$$

Волновое уравнение для E имеет обычный вид:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + (k_2^2 - k_x^2)E = 0. \quad (1.2)$$

Здесь k_{1z} и k_x — проекции волнового вектора падающей волны соответственно на оси z и x (ось x параллельна границе раздела сред), $k_2^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, ε — диэлектрическая проницаемость отражающей среды, c — скорость света в вакууме.

Уравнение (1.2) — второго порядка, поэтому его общее решение содержит две комплексные постоянные. Граничное условие (1.1) позволяет определить только одну неизвестную постоянную, поэтому для нахождения второй постоянной необходим принцип излучения. Отметим, что в области полного отражения, где $k_x \geq k_2$, для однозначного нахождения преломленной волны достаточно условия ограниченности решения.

Вне области полного отражения общее решение уравнения (1.2) $E = A \exp(i\varphi)$ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + I_2 \int_0^z \frac{dz'}{A^2(z')}, \quad (1.3)$$

$$A = \left\{ \frac{I_1}{2(k_2^2 - k_x^2)} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4(k_2^2 - k_x^2)I_2^2/I_1^2} \cos \left[2\sqrt{k_2^2 - k_x^2}(z + z_0) \right] \right) \right\}^{1/2},$$

где величины

$$I_1 = \left| \frac{dE}{dz} \right|^2 + (k_2^2 - k_x^2)|E|^2, \quad I_2 = \frac{i}{2} \left(E \frac{dE^*}{dz} - E^* \frac{dE}{dz} \right) \quad (1.4)$$

в случае прозрачной среды не зависят от z , а φ_0 и z_0 — произвольные постоянные. Интеграл I_2 описывает плотность потока энергии вдоль оси z .

Для однозначного определения преломленной волны уравнения (1.1) и условия $I_2 > 0$ недостаточно. Необходимо дополнительно потребовать, чтобы искомое решение максимизировало величину I_2 при фиксированном значении I_1 . Согласно (1.3) максимальное значение I_2 равно $I_1/2\sqrt{k_2^2 - k_x^2}$, при этом общее решение (1.3) переходит в обычную плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси z :

$$\varphi = \varphi_0 + \sqrt{k_2^2 - k_x^2}z, \quad A = \sqrt{I_1/2(k_2^2 - k_x^2)}.$$

Таким образом, в случае прозрачной линейной среды реализуется преломленная волна, максимизирующая отношение I_2/I_1 . Вариационная формулировка принципа излучения не связана с конкретной функциональной зависимостью преломленной волны и просто означает, что при распространении преломленная волна не испытывает отражений. Ниже будет показано, что вариационный принцип излучения может успешно применяться для анализа отражения от нелинейной среды.

2. УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕЛОМЛЕННОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗМЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Допустим, что некоторой комплексной амплитуде E_i электрического поля падающей волны соответствует преломленная волна E_0 , удовлетворяющая всем граничным условиям. Если амплитуда E_i изменяется на малую величину δE_i , то соответствующее изменение амплитуды δE_0 пре-

ломленной волны, найденное методом теории возмущений, описывается выражением

$$\delta E_0 = i c_1 E_0 + c_2 \frac{dE_0}{dz}, \quad (2.1)$$

где c_1 и c_2 — вещественные постоянные. Величина c_2 , найденная из граничного условия (1.1), имеет вид

$$c_2 = 4k_{1z}^2 - \frac{\delta |E_0|^2}{\Phi'_z(0)}, \quad (2.2)$$

где

$$\Phi(z) = \left| ik_{1z} E_0 + \frac{dE_0}{dz} \right|^2. \quad (2.3)$$

Согласно формулам (2.2) и (2.3) преломленная волна является устойчивой относительно изменения граничных условий, если

$$\Phi'_z(0) \neq 0. \quad (2.4)$$

При $\Phi'_z(0) = 0$ изменение интенсивности падающего излучения или угла падения вызывает скачкообразное изменение амплитуды преломленной волны. В случае плоской волны, когда $dA/dz \equiv 0$, условие устойчивости принимает вид

$$\Phi'_A \neq 0, \quad (2.5)$$

где A — амплитуда плоской волны. Полученные критерии устойчивости справедливы как для линейных, так и для нелинейных безынерционных сред, прозрачных или обладающих поглощением.

3. ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

Наш анализ будет ограничен простейшим случаем нелинейной кубической среды, когда диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon'_0 + i\epsilon'' + + \epsilon_2 |E|^2$ и уравнение для напряженности электрического поля преломленной волны принимает вид

$$\frac{d^2E}{dz^2} + (k_z^2 - k_x^2)E + ik_0^2 \epsilon'' E + k_0^2 \epsilon_2 |E|^2 E = 0. \quad (3.1)$$

При $\epsilon'' > 0$ на решения уравнения (3.1) накладывается дополнительное граничное условие

$$E \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Предельный переход $\epsilon'' \rightarrow 0$ может служить проверкой правильности принципа излучения для прозрачной среды.

Теперь величины I_2 и

$$I_1 = \left| \frac{dE}{dz} \right|^2 + (k_z^2 - k_x^2) |E|^2 + \frac{1}{2} k_0^2 \epsilon_2 |E|^4$$

монотонно уменьшаются с увеличением z , поэтому общее решение уравнения (3.1) определяется следующими вещественными постоянными: φ_0 , φ_0 , $I_1(z=0)$ и $I_2(z=0)$. Постоянные φ_0 и φ_0 связаны с инвариантностью уравнения (3.1) относительно сдвига по оси z и умножения E на произвольный фазовый множитель и используются для согласования граничного условия (1.1). Величины $I_1(0)$ и $I_2(0)$ определяют функциональную зависимость $E(z)$, а для их нахождения требуется граничное

условие на бесконечности. Из асимптотики решений (3.2) следует, что при $\epsilon'' > 0$ $I_1(z) \geq 0$.

В зависимости от знаков величин $k_2^2 - k_x^2$ и ϵ_2 возможны четыре различных случая, которые удобно рассмотреть по отдельности.

а) *Дефокусирующая среда* $\epsilon_2 < 0$, $k_x > k_2$. В безразмерных переменных

$$\xi = \sqrt{k_2^2 - k_x^2} z, \gamma'' = k_0^2 \epsilon'' / |k_2^2 - k_x^2|, \mathcal{E} = \sqrt{k_0^2 |\epsilon_2| / |k_2^2 - k_x^2|} E \quad (3.3)$$

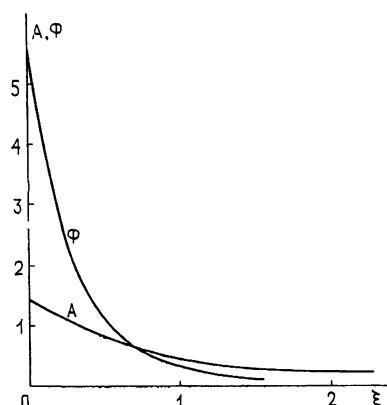


Рис. 1.

уравнение (3.1) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d \xi^2} - \mathcal{E} + i \gamma'' \mathcal{E} - |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.4)$$

При $\gamma'' = 0$ уравнение (3.4) имеет только одно решение без особенностей, соответствующее $I_1 = I_2 = 0$ и описывающее полное отражение [10],

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh}(\xi + \xi_0)} e^{i\varphi_0}, \quad \xi_0 > 0. \quad (3.5)$$

Согласно критерию (2.4), решение (3.5) устойчиво относительно изменения граничных условий. Очевидно, что учет слабого поглощения $\gamma'' \ll 1$

не изменит существенно распределения поля преломленной волны (3.5).

Уравнение (3.4) интегрировалось численно на ЭВМ БЭСМ-4 с использованием известной асимптотики решения для $|\mathcal{E}| \ll 1$. На рис. 1 приведены зависимости амплитуды $A(\xi)$ и функции $\Phi(\xi) = |i k_{1z} \mathcal{E} + d\mathcal{E}/d\xi|^2$, полученные для $\gamma'' = 0,05$ и $k_{1z}^2 = k_{1z}^2 / |k_2^2 - k_x^2| = 0,5$. Зная интенсивность падающей волны I_i , можно с помощью соотношения $4k_{1z}^2 |\mathcal{E}|^2 = \Phi$ определить значение $\Phi(I_i)$, которому соответствует исходное распределение амплитуды $A(\xi - \xi_0)$, $\xi \geq \xi_0$. Величина ξ_0 находится из уравнения $\Phi(\xi_0) = \Phi(I_i)$.

Как и следовало ожидать, $A(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ являются монотонно убывающими функциями ξ , причем $d\Phi/d\xi \neq 0$ для всех значений Φ . Задача имеет однозначное устойчивое решение, для нахождения которого достаточно потребовать его ограниченности.

б) *Дефокусирующая среда* $\epsilon_2 < 0$, $k_x < k_2$. В безразмерных переменных уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d \xi^2} + \mathcal{E} + i \gamma'' \mathcal{E} - |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.6)$$

Можно показать [10], что в случае прозрачной среды ограниченные решения существуют лишь для $0 < I_1 \leq 2/3$. Анализ этих решений имеется в [5, 6, 11, 12]. Мы лишь отметим, что требования ограниченности решения в этом случае уже недостаточно для нахождения преломленной волны.

Для выбора решения, реализующегося в случае прозрачной среды, применим вариационный принцип излучения из разд. 1. Расчет показывает, что для $0 < I_1 < 2/3$ максимум отношения I_2/I_1 соответствует плоской волне

$$\mathcal{E} = A \exp[i\sqrt{1 - A^2}(\xi + \xi_0)], \quad (3.7)$$

амплитуда которой удовлетворяет условию $0 < A < \sqrt{2/3}$. При $I_1 = 2/3$ максимум отношения I_2/I_1 достигается сразу у двух решений: у плоской волны — (3.7), и у бегущей волны —

$$\mathcal{E} = A \exp \left\{ i \left[\varphi_0 + I_2 \int_0^\xi \frac{d\xi'}{A^2(\xi')} \right] \right\}, \quad (3.8)$$

где $A = [2/3 + 2/(\xi + \xi_0)^2]^{1/2}$, $I_2 = 2/3\sqrt{3}$. Следовательно, преломленная волна может описываться только двумя выражениями — (3.7) и (3.8): при $A < \sqrt{2/3}$ реализуется волна (3.7), а при $A > \sqrt{2/3}$ — волна (3.8).

Относительные изменения граничных условий решения (3.7) и (3.8) являются неустойчивыми, поскольку для функции (3.7)

$$\Phi'_A = 0 \quad \text{при } A = A_1 = \left[1 - 4/\left(\tilde{k}_{1z} + \sqrt{8 + \tilde{k}_{1z}^2}\right) \right]^{1/2}$$

а для функции (3.8) —

$$\Phi'_\xi(0) = 0 \quad \text{при } A = A_2 = \left(1 - \tilde{k}_{1z}^2\right)^{1/2}.$$

Амплитуда волны (3.8) не меньше $\sqrt{2/3}$, поэтому последнее уравнение имеет решение при $\tilde{k}_{1z} < \sqrt{1/3}$. Кроме того, при $\tilde{k}_{1z} > \sqrt{1/3}$ $A_1 > \sqrt{2/3}$ и соответствующая плоская волна уже не максимизирует отношение I_2/I_1 и не реализуется. Следовательно, при $\tilde{k}_{1z} > \sqrt{1/3}$ преломленная волна, описываемая выражениями (3.7) и (3.8), является устойчивой, а переход одного распределения в другое при изменении граничных условий происходит непрерывным образом. Неустойчивость преломленной волны и скачкообразная смена распределений (3.7) и (3.8) возможна лишь при $\tilde{k}_{1z} < \sqrt{1/3}$ т. е. при $k_2 > k_1$ и достаточно больших углах падения, где $k_x^2 > (3k_1^2 - k_2^2)/2$. Данное условие неустойчивости совпадает с найденным в [12] другим методом*.

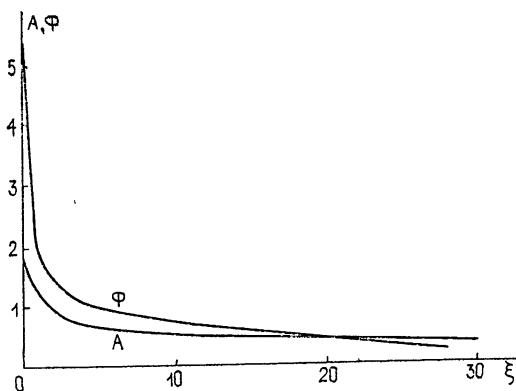


Рис. 2.

Эти выводы проверялись путем численного решения уравнения (3.4) с $\gamma'' \neq 0$. На рис. 2 изображены зависимости амплитуды $A(\xi)$ и функции $\Phi(\xi)$ для $\tilde{k}_{1z}^2 = 0,5 > 1/3$ и $\gamma'' = 0,05$. В соответствии с приве-

* Возможность гистерезисов лишь при достаточно больших углах падения и $k_2 > k_1$ отмечалась также в докладе А. Е. Каплана на семинаре кафедры волновых процессов МГУ.

денным выше анализом преломленная волна является устойчивой, поскольку производная $d\Phi/d\xi \neq 0$ для всех значений Φ . При $\gamma'' \rightarrow 0$ распределение амплитуды $A(\xi)$ в области $A < \sqrt{2/3}$ соответствует плоской волне (3.7), а в области $A > \sqrt{2/3}$ — волне (3.8).

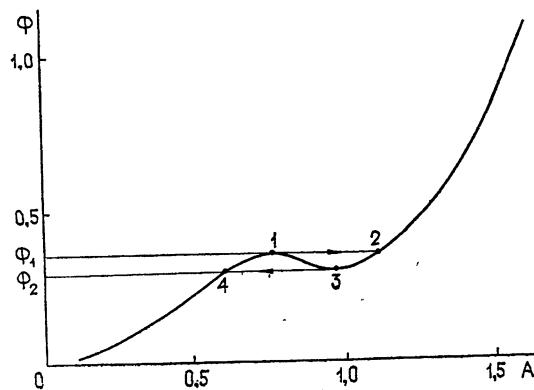


Рис. 3.

Численные расчеты для $\tilde{k}_{1z} < \sqrt{1/3}$ показали неустойчивость преломленной волны. На рис. 3 приведена зависимость $\Phi(A)$, полученная для $\tilde{k}_{1z} = 10^{-3}$ и $\gamma'' = 0,01$. Из характера этой зависимости видно, что при изменении Φ от 0 до Φ_1 амплитуда A меняется непрерывным образом. В точке $\Phi = \Phi_1$ происходит скачок амплитуды, соответствующий переходу от волны (3.7) к волне (3.8). (Скачки амплитуды A при увеличении и уменьшении интенсивности падающего излучения указаны стрелками $1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ соответственно.) При дальнейшем увеличении Φ амплитуда A снова меняется непрерывным образом. Если Φ уменьшается, то скачок амплитуды происходит в точке $\Phi = \Phi_2$. В области $\Phi_2 (\tilde{k}_{1z}, \gamma'') < \Phi < \Phi_1 (\tilde{k}_{1z}, \gamma'')$ реализация определенного режима отражения зависит от временного изменения Φ , что приводит к гистерезису коэффициента отражения. Если поглощение велико, преломленная волна является устойчивой при всех значениях \tilde{k}_{1z} , и гистерезис исчезает. Согласно расчетам гистерезис возможен при $\gamma'' < 0,06$ ($\epsilon'' < 0,06(k_x^2 - k_z^2)/k_0^2$).

Отметим, что при скачке амплитуды относительное изменение I_2 (и, следовательно, коэффициента отражения) всегда невелико и не превышает 0,08. Область изменения Φ , соответствующая гистерезису, также невелика и не превышает $1/12$. В случае $\Phi > \Phi_1$ и $\gamma'' \rightarrow 0$ величина I_2 стремится к конечному значению $2/3\sqrt{3}$ соответствующему волне (3.8). На рис. 4 приведены зависимости потока энергии I_2 , переносимой волной в глубь отражающей дефокусирующей среды вне области полного отражения, от Φ для $\gamma'' = 0,05$ (1), 0,01 (2), 0,002 (3), которые показывают, что полное отражение не происходит даже при $\Phi \rightarrow \infty$.

в) *Фокусирующая среда* $\epsilon_2 > 0$, $k_x > k_z$. Уравнение (3.1) в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\xi^2} - \mathcal{E} + i\gamma''\mathcal{E} + |\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = 0. \quad (3.9)$$

Без учета поглощения и при $I_2 \geq 0$ уравнение (3.9) имеет периодические решения, выражаемые через эллиптические функции Якоби

$\text{сп}(\xi; \lambda)$. В частном случае $I_1 = I_2 = 0$ (модуль $\lambda = 1$) эти решения переходят в гиперболическую функцию

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(\xi + \xi_0)} e^{i\varphi_0}. \quad (3.10)$$

Существует также решение в виде плоской волны

$$\mathcal{E} = A \exp[i\sqrt{A^2 - 1}(\xi + \xi_0)], \quad A > 1, \quad (3.11)$$

которое максимизирует отношение I_2/I_1 .

Согласно вариационному принципу излучения преломленная волна в прозрачной среде может описываться только функциями (3.10) и (3.11). Согласно критерию (2.4) решение (3.10) при $\tilde{k}_{1z} < 1$ неустойчиво в двух точках: $A_1 = \sqrt{(1 + \tilde{k}_{1z}^2)/2}$ и $A_2 = \sqrt{2}$, а при $\tilde{k}_{1z} > 1$ — в одной точке: $A_2 = \sqrt{2}$. Согласно критерию (2.5) плоская волна (3.11) устойчива при всех значениях \tilde{k}_{1z} . Однако введение сколь угодно слабого поглощения радикально изменяет ситуацию. Если $\gamma'' \neq 0$, любое решение при $\xi \rightarrow \infty$ переходит в выражение (3.10). Для этого необходимо, чтобы функция, описывающая поле около границы раздела двух сред, с любой степенью точности, определяемой величиной γ'' , «сшивалась» с функцией (3.10). Легко видеть, что решение (3.11) этому условию не удовлетворяет, поэтому просветление нелинейной среды в виде плоской волны невозможно, если $\gamma'' \neq 0$. С другой стороны, решение (3.10) и функцию Якоби $\text{сп}(\xi, \lambda)$ можно «сшить» с любой степенью точности, когда $\lambda \rightarrow 1$. Отсюда следует, что проникновение поля в нелинейную среду должно иметь осциллирующий характер [1–3, 12].

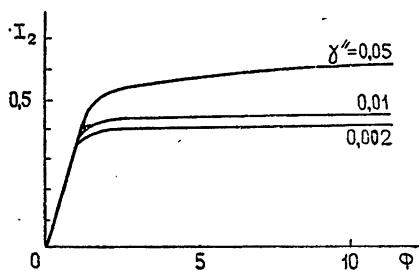


Рис. 4.

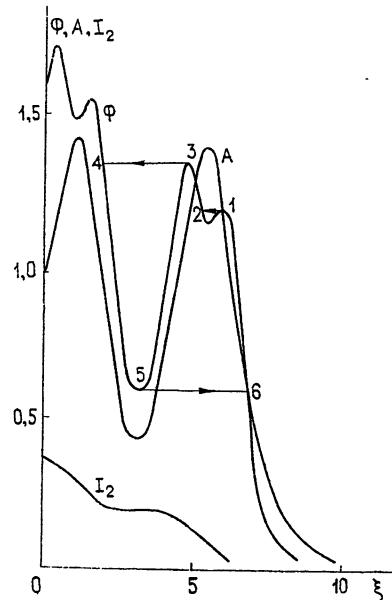


Рис. 5.

На рис. 5 приведены зависимости потока энергии (I_2), амплитуды (A) электрического поля и функции (Φ) от ξ в области полного отражения для $\gamma'' = 0,05$ и $\tilde{k}_{1z} = 0,5$, полученные путем численного решения уравнения (3.9). Из рис. 5 видно, что уравнение $\Phi = \text{const}$ при достаточно большом значении Φ имеет несколько решений, которым соответствуют различные распределения амплитуды A . (Отметим, что двугорбые максимумы кривой зависимости $\Phi(\xi)$ имеют место лишь

при $\tilde{k}_{1z}^2 > 1$.) Для нахождения реализующегося распределения $A(\xi)$ необходимо учесть изменение во времени интенсивности падающего излучения. Направление смены распределений $A(\xi)$ при монотонном увеличении Φ от нуля указано стрелками $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. В точках 1 и 3 $d\Phi/d\xi = 0$ и происходит скачкообразное изменение распределения $A(\xi)$. Смена распределений $A(\xi)$ при монотонном уменьшении Φ указана стрелками $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. С уменьшением поглощения период и глубина осцилляций A и Φ увеличиваются.

Из рис. 5 следует, что перенос энергии вдоль границы раздела линейной и нелинейной сред имеет волноводный характер. Переход от одной волноводной моды к другой происходит скачкообразно. При этом изменение I_2 пропорционально γ'' , поэтому скачки коэффициента отражения также пропорциональны γ'' . Соответствующие изменения потока энергии вдоль границы раздела сред слабо зависят от γ'' и остаются конечными при $\gamma'' \rightarrow 0$.

г) *Фокусирующая среда* $\epsilon_2 > 0$, $k_x < k_2$. Уравнение для преломленной волны, записанное в безразмерных переменных, имеет вид

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\xi^2} + \mathcal{E} + i\gamma''\mathcal{E} + |\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = 0. \quad (3.12)$$

В случае $\gamma'' = 0$ и $I_1 > 0$ уравнение (3.12) имеет ограниченные периодические решения, выражаемые через эллиптические функции Якоби $\text{sn}(\xi, \lambda)$. Единственным непериодическим решением является плоская волна

$$\mathcal{E} = A \exp[i\sqrt{1 + A^2}(\xi + \xi_0)], \quad (3.13)$$

которая максимизирует отношение I_2/I_1 . Поскольку амплитуда волны (3.13) изменяется от 0 до ∞ , то распределение поля в прозрачной среде будет всегда описываться выражением (3.13). Для решения (3.13) $\Phi'_A \neq 0$, поэтому оно устойчиво относительно изменения граничных условий. Учет слабого поглощения не меняет этих выводов [12].

Результаты численного решения уравнения (3.12) вне области полного отражения приведены на рис. 6 в виде зависимостей $A(\xi)$ и $\Phi(\xi)$

для $\gamma'' = 0,05$ и $\tilde{k}_{1z}^2 = 0,5$. Функции $A(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ монотонно убывают с ростом ξ , причем $d\Phi/d\xi \neq 0$ для всех значений Φ . При $A \leq 1$ амплитуда поля убывает экспоненциально, а при $A \geq 1$ — линейно с увеличением ξ :

$$A = A_0 - \frac{1}{3}\gamma''\xi, \quad \varphi = \varphi_0 + \sqrt{1 + A_0^2}\xi - \frac{1}{6}\gamma''\xi^3.$$

При $\gamma'' \rightarrow 0$ решение уравнения (3.12) переходит непрерывным образом в плоскую волну (3.13).

Использование принципа излучения в вариационной форме и условия устойчивости преломленной волны относительно изменения граничных условий позволяет единым образом рассмотреть все случаи

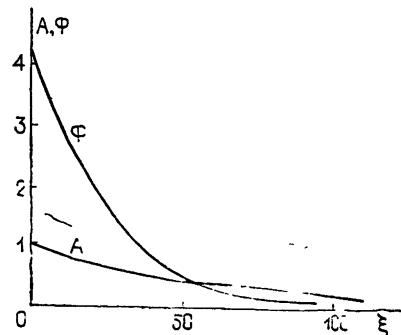


Рис. 6.

отражения плоской волны от нелинейной среды. Преимущество данного подхода заключается в том, что он в принципе позволяет решать задачу об отражении на основе весьма общих свойств решений волнового уравнения.

Показано, что гистерезис коэффициента отражения возможен в случае как фокусирующей, так и дефокусирующей нелинейных сред. В области полного отражения от фокусирующей среды распространение преломленной волны вдоль границы раздела сред имеет волноводный характер. Смена режимов отражения происходит скачкообразно и соответствует изменению волноводной структуры преломленной волны. Наши выводы согласуются с результатами, полученными в [6, 12] другим методом.

Во всех работах, посвященных отражению света от нелинейной среды, рассмотрение ограничено случаем плоских волн. Несомненный интерес представляет анализ отражения световых пучков. В нашей работе не учитывалась релаксация нелинейной поляризации, которая важна для корректного описания смены режимов отражения. Таким образом, интересная и важная задача об отражении света от нелинейной среды требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, вып. 5, 1662 (1967).
2. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 10, 1480 (1968).
3. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда, изд. Наука, М., 1975.
4. Б. Б. Бойко, И. З. Джилавдари, Н. С. Петров, ЖПС, 23, вып. 5, 888 (1975).
5. А. Е. Каплан, Письма в ЖЭТФ, 24, вып. 3, 132 (1976); ЖЭТФ, 72, вып. 5, 1710 (1977).
6. Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ, 3, вып. 12, 583 (1977).
7. M. Lequime, J. Milupek and J. P. Negmatapp, Opt. Comm., 19, № 3, 423 (1976).
8. Л. И. Мандельштам, Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, изд. Наука, М., 1972, стр. 435.
9. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, ЖЭТФ, 18, вып. 12, 243 (1948).
10. Г. Джеффрис, Б. Свирлс, Методы математической физики, изд. Мир, М., вып. 3, 1970.
11. А. Е. Каплан, Квантовая электроника, 5, № 1, 166 (1978).
12. Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ, 4, вып. 2, 74 (1978).

Научно-исследовательский институт
органических полупродуктов и красителей

Поступила в редакцию
2 мая 1977 г.

REFLECTION OF A PLANE WAVE FROM THE NONLINEAR ABSORBING MEDIUM

A. A. Kolokolov, A. I. Sukov

A theory is developed of a plane monochromatic wave reflected from the nonlinear medium. It is based on the variational formulation of the radiation principle and the criterion of the refracted wave stability relative to the variation of the boundary conditions on the surface of the linear and nonlinear media separation. The theory conclusions are verified by numerical experiments carried out for the reflected medium with a cubic inertialess nonlinearity.

УДК 538 574.2

СЖАТИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН АНИЗОТРОПНЫМИ СРЕДАМИ (МОДЕЛЬ «НЕОТРАЖАЮЩЕГО» КРИСТАЛЛА)

C. P. Ефимов

В работе сформулированы условия, при которых однородный анизотропный кристалл полностью согласован с изотропной средой. Коэффициент отражения волны от кристалла равен тождественно нулю при всех углах. Показано, что среда, состоящая из полупространства с изотропной средой и полупространства, заполненного кристаллом, «электромагнитно» подобна однородной среде. Таким образом, в кристалле происходит «сжатие» волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласование двух сред, как правило, возможно для данного угла падения электромагнитной волны. Коэффициент отражения при этом для других углов тем больше, чем значительней относительный коэффициент преломления. Известно, что, усложняя структуру преломляющей среды, можно, в принципе, расширять область углов согласования, в пределе приближаясь к абсолютному согласованию [1]. Однако такой подход не позволяет указать, какая среда идеально согласована с однородной средой, содержащей падающую волну (за исключением среды, тождественной ей).

В данной работе показано, что можно подобрать параметры однородной анизотропной среды (кристалла), при которых коэффициент отражения падающей волны тождественно равен нулю при всех углах. Физическая сущность этого эффекта заключается в том, что моды в кристалле вырождены по фазовой скорости, поэтому условия согласования волн не зависят от угла падения.

Выберем систему координат так, чтобы плоскость раздела между кристаллом и вакуумом совпадала с плоскостью $z = 0$, а ось z была направлена в глубь кристалла. Если кристалл обладает проницаемостями $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \mu_{xx} = \mu_{yy} = 1/\alpha$, $\epsilon_{zz} = \mu_{zz} = \alpha$, то элементарный расчет по формулам Френеля показывает, что коэффициент отражения равен нулю, т. е. наблюдается полное согласование независимо от малости коэффициента α . Чем меньше (или больше) α , тем сильнее преломление на границе с кристаллом. Коэффициент α может быть комплексным, тогда среда является активной анизотропной и волна экспоненциально затухает внутри кристалла ($\operatorname{Im} \alpha < 0$).

Задача настоящей работы — не только указать на принципиальную возможность существования «неотражающего» кристалла, но и проанализировать, с каким свойством уравнений Максвелла этот эффект связан.

Структура уравнений Максвелла, как известно (рассматриваются гармонические поля $e^{-i\omega t}$), не меняется при преобразованиях координат: при этом меняются тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей и поля E , H [2]. Такое преобразование можно рассматривать локально как сжатие или растяжение волнового поля: одна среда

«электромагнитно» подобна другой. Поставим следующий вопрос: может ли быть преобразование координат «не гладким», в частности, если левое полупространство ($z < 0$) не менять, а волновое поле в правом полупространстве «сжать», оставляя границу $z = 0$ на месте, то является ли такое преобразование обоснованным? Если это так, то мы получим анизотропный кристалл, «электромагнитно» подобный среде из полупространства $z < 0$, и отражение волны от него не происходит.

В работе на примере простейшего преобразования, $z = z' \alpha$ ($z > 0$), показано, что такие преобразования возможны, т. е. «неотражающее» свойство кристалла связано со сжатием электромагнитной волны в полупространстве $z > 0$. Так как степень сжатия $1/\alpha$ принципиально не ограничена, то можно предложить макроскопическую модель черного тела безотносительно к соотношению между его размерами и длиной волны. Для этого необходимо покрыть тело слоем среды с сильным сжатием (и обладающим диссипацией). В статье рассмотрена модельная задача дифракции на черном (в указанном смысле) шаре.

Согласующая вставка между двумя волноводами, заполненная «неотражающим» кристаллом, как показано в работе, эквивалентна вставке большей длины, так как граничное условие $E_t = 0$ не меняется при растяжении. Подчеркнем, что этот результат является строгим независимо от длины волны и размеров вставки. Разумеется, вставку имеет смысл выбирать с такими параметрами, чтобы эквивалентный (растянутый) переход с вакуумным заполнением удовлетворял стандартным требованиям, предъявляемым к плавным переходам. Таким образом, согласующая вставка в принципе может быть сколь угодно малой (если кристалл — с малым значением α).

2. СУЩНОСТЬ ЭФФЕКТА СЖАТИЯ ВОЛН

Для того, чтобы получить уравнения для анизотропной среды, эквивалентные уравнениям волн в изотропной среде, изменим масштаб по оси z' в уравнениях Максвелла с $\epsilon = \mu = 1$. При таком сжатии преобразуем поля E' и H' так, чтобы оставались инвариантными энергетические величины: энергия в данном объеме и поток энергии через данную поверхность. Поперечные к оси z' координаты обозначим через $r' = (x', y')$. (Все величины, относящиеся к изотропной среде, отмечены штрихами.)

При замене $\alpha z' = z$ ($\alpha < 1$) элемент поверхности, параллельный плоскости $z = \text{const}$, не изменится. Из равенства элементарных потоков энергии через этот элемент, $[E' H']_z dx' dy' = [E H]_z dx dy$, следует, что компоненты полей, параллельные плоскости $z = 0$ (τ -компоненты), не меняются:

$$E_t = E'_t, \quad H_t = H'_t. \quad (1)$$

Элемент поверхности, перпендикулярный к плоскости $z = 0$, сжимается в $1/\alpha$ раз. Приравнивая элементарные потоки энергии через данные площадки,

$$[E' H']_{(x', y')} d(x', y') dz' = [E H]_{(x, y)} d(x, y) dz,$$

найдем правило изменения z -составляющих полей для преобразования $\alpha z' = z$:

$$E'_z = \alpha E_z, \quad H_z = \alpha H'_z. \quad (2)$$

Таким образом, поток энергии при «сжатии» волн вдоль оси z прижимается к плоскости $z = 0$.

Рассмотрим преобразование энергии электромагнитного поля при сжатии $\alpha z' = z$. Используя (1) и (2), энергию в данном элементе объема изотропной среды ($\epsilon' = \mu' = 1$) можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{8\pi} (E'^2 + H'^2) dr' dz' = \frac{1}{8\pi\alpha} (E_\tau^2 + H_z^2) dr dz + \frac{\alpha}{8\pi} (E_z^2 + H_z^2) dr dz. \quad (3)$$

Правое выражение совпадает с выражением для энергии поля в анизотропной среде с проницаемостями

$$\epsilon_\tau = \mu_\tau = 1/\alpha, \quad \epsilon_z = \mu_z = \alpha. \quad (4)$$

(Индекс τ указывает на направления, перпендикулярные оси z .)

Преобразования (1), (2), $\alpha z' = z$ меняют форму уравнений Максвелла. Получим уравнения для полей E и H . Условия отсутствия источников принимают следующий вид:

$$\frac{1}{\alpha} \nabla E_\tau + \alpha \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{\alpha} \nabla H_\tau + \alpha \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Сравнивая (5) и (4), можно заметить, что (5) есть условия соленоидальности для векторов индукции $D = \epsilon \hat{E}$, $B = \mu \hat{H}$. В уравнениях для вихрей гармонических полей ($\sim e^{-i\omega t}$) изменяются только правые части:

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= ik \left(\frac{1}{\alpha} H_\tau + \alpha H_z \right), \\ \text{rot } H &= -ik \left(\frac{1}{\alpha} E_\tau + \alpha E_z \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) совпадают с уравнениями полей в анизотропной среде с проницаемостями (4). Таким образом, по отношению к соответствующей фиктивной изотропной среде волны в анизотропной среде (4) сжаты в $1/\alpha$ раз. Это соответствие чрезвычайно облегчает изучение волн в рассматриваемой анизотропной среде, так как структура их в среде изотропной значительно проще.

Рассмотрим, используя это обстоятельство, преломление волны, падающей из среды с $\epsilon = \mu = 1$ (проницаемости среды принимаются равными единице) на анизотропную среду. Ось z направим перпендикулярно плоскости раздела так, что граница раздела лежит в плоскости $z = 0$. Произведя эквивалентное растяжение анизотропной среды, перейдем к среде изотропной. Граница раздела останется на месте. Условия сшивки с изотропной средой, содержащей источники, не изменятся, так как тангенциальные компоненты полей при растяжении не меняются. Мы получили два соприкасающихся между собой «электромагнитно» подобных полупространства.

Отсюда следует, что в анизотропной среде возможен только один тип волн (волны вырождены по v_F). Плоская волна преломляется на границе раздела без отражения. Вектор потока энергии прижимается к плоскости $z = 0$; связь между углом падения луча ψ_1 и углом его преломления ψ_2 , как нетрудно видеть из (2), следующая:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \alpha \operatorname{tg} \psi_2. \quad (7)$$

Сжатие волн оставляет инвариантным фазу волны $kr + k_z z$, поэтому волновой вектор (по отношению к изотропной среде) прижимается к нормали:

$$\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k}'_\tau, \quad k_z = (1/\alpha) k'_z. \quad (8)$$

Отношение тангенсов углов падения и преломления, определяемых по волновому вектору, равно

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = (1/\alpha) \operatorname{tg} \varphi_2. \quad (9)$$

Учитывая, что угол преломления луча связан с вектором Пойнтинга, можно утверждать, что при больших значениях $1/\alpha$ луч сильно преломляется на границе раздела, не отражаясь от его поверхности.

Если в анизотропной среде есть малое поглощение, которое можно описать введением мнимой части k'' у волнового вектора изотропной среды ($k'' \ll k$), то эффективная глубина поглощающего слоя в анизотропной среде есть α/k'' и может быть сделана сколь угодно малой при $\alpha \rightarrow 0$. Это означает, что абсолютно черную поверхность можно осуществить, покрывая тело тонким, сильно преломляющим слоем анизотропной среды.

Эффект сжатия волн можно использовать для уменьшения длины плавного перехода между двумя волноводами, если условия для полей на границе волновода одинаковы как в физическом волноводе, так и в эквивалентном ему, заполненном однородной средой. Покажем, что условие $E\mathbf{a} = 0$, где \mathbf{a} — произвольный вектор, касательный к стенке волновода, инвариантно по отношению к преобразованию (1), (2). Направим ось τ вдоль оси волновода. В соответствии с (1) и (2) имеем равенство $E\mathbf{a}_\tau = E_\tau \mathbf{a}_\tau + E_z \mathbf{a}_z = E' \mathbf{a}'$. Отсюда следует, что металлическим стенкам соответствуют металлические стенки: условие $E_\tau = 0$ остается неизменным.

Создание (или обнаружение) анизотропных сред с описанными свойствами весьма проблематично, так как кристалл должен обладать высокими проницаемостями в одном направлении и малыми в другом (по отношению к соприкасающейся с ним средой, которая не обязательно вакуум). При этом проницаемости должны быть взаимно-обратными величинами. Не исключено, что указанную трудность можно преодолеть, используя мелкослоистые среды, которые, как известно, обладают эффективной анизотропией [3, 4].

Найдем проницаемости двух сред, тонкие слои которых периодически чередуются и образуют кристалл с необходимыми свойствами. Толщина каждого из слоев h гораздо меньше длины волны λ , так что внутри слоев можно пользоваться методами электро- и магнитостатики. Обозначим через ϵ_1, μ_1 проницаемости одной среды, а через ϵ_2, μ_2 — проницаемости другой среды. Ось z направлена, как и в разд. 1, нормально к границе раздела. Нормальные составляющие индукций \mathbf{B} и \mathbf{D} непрерывны на каждой из границ раздела двух сред. Поэтому скачкообразный характер изменения вдоль оси z имеют величины E_z и H_z . Усредняя их, получим

$$\begin{aligned} \langle H_z \rangle &= \frac{H_{1z} + H_{2z}}{2} = \frac{B_z}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \\ \langle E_z \rangle &= \frac{E_{1z} + E_{2z}}{2} = \frac{D_z}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно из (10), в направлении z усредняются обратные проницаемости. Для определения средних проницаемостей полей вдоль границы раздела используем непрерывность тангенциальных составляющих \mathbf{E}_τ и \mathbf{H}_τ . При этом \mathbf{B}_τ и \mathbf{D}_τ меняются скачком. Усредняя их значения, найдем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B}_\tau \rangle &= \frac{\mathbf{B}_{1\tau} + \mathbf{B}_{2\tau}}{2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \mathbf{H}_\tau, \\ \langle \mathbf{D}_\tau \rangle &= \frac{\mathbf{D}_{1\tau} + \mathbf{D}_{2\tau}}{2} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \mathbf{E}_\tau.\end{aligned}\quad (11)$$

Результирующие проницаемости полей вдоль границы раздела равны средним проницаемостям. Эти выводы, разумеется, следуют из общей теории [3, 4]. Выберем проницаемости сред взаимно-обратными величинами: $\mu_1 = \epsilon_1 = 1/\mu_2 = 1/\epsilon_2$ (либо $\epsilon_1 = \mu_2$). Тогда среднее значение проницаемостей равно среднему значению обратных величин, т. е. результирующие проницаемости ϵ_τ и ϵ_z (μ_τ и μ_z) — взаимно-обратные величины.

3. ДИФРАКЦИЯ НА ЧЕРНОМ ТЕЛЕ

Как правильно считалось, модель черной поверхности в рамках макроскопической теории невозможна. Введение анизотропной среды с указанными свойствами позволяет сформулировать понятие черной поверхности. Для этого необходимо рассматривать анизотропный слой с малым поглощением, которое можно описать мнимой частью волнового вектора $k = k' + ik''$, соответствующего изотропному пространству. Появившееся при этом отражение от анизотропной среды с плоской границей раздела несущественно, если $k'' \ll k'$. Толщину поглащающего слоя, пропорциональную величине α/k'' , можно сделать сколь угодно малой при $\alpha \rightarrow 0$.

Покроем тело тонким слоем с указанными параметрами (внутри слоя волна, разумеется, подчиняется законам геометрической оптики). Такое тело можно назвать черным. Для оценки эффектов дифракции на теле с черной, в указанном смысле, поверхностью рассмотрим задачу дифракции на черном шаре. Считаем, что радиус шара гораздо больше «сжатой» длины волны $\alpha\lambda$. Найдем уравнения полей внутри шара, заполненного анизотропной средой с проницаемостями

$$\epsilon_r = 1/\mu_r = \alpha, \quad \epsilon_\tau = 1/\mu_\tau = 1/\alpha,$$

где индекс r указывает на радиальные составляющие тензоров проницаемостей, а индекс τ — на угловые (в сферической системе координат). Для такой анизотропной среды, как нетрудно проверить, можно ввести потенциалы Дебая [5]. Мы будем пользоваться не традиционным определением потенциалов, а потенциалами, отличающимися на множитель α . Представляя потенциал в виде суммы сферических гармоник ${}^e\Pi_{l,n}$ порядка l, n , можно получить для радиальных составляющих уравнение

$$\frac{a^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2 {}^e\Pi_{l,n} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] {}^e\Pi_{l,n} = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \quad (12)$$

с условиями сшивки на границе шара

$${}^e\Pi_{l,n}|_{a+0} = {}^e\Pi_{l,n}|_{a-0}, \quad \frac{\partial (r {}^e\Pi_{l,n})}{\partial r} \Big|_{a+0} = \alpha \frac{\partial (r {}^e\Pi_{l,n})}{\partial r} \Big|_{a-0}. \quad (13)$$

(Для магнитного потенциала ${}^m\Pi_{l,n}$ уравнения те же.)

Произведем в (12) растяжение координаты r внутри шара, оставляя точку a на месте: $(r-a)/\alpha \rightarrow r-a$. Тогда, в пределе $\alpha \rightarrow 0$, уравнения (12) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Pi_{l,n} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{a^2} \right] {}^e\Pi_{l,n} = 0 \quad (-\infty < r \leq a), \quad (14)$$

$${}^e\Pi_{l,n}|_{a=0} = {}^e\Pi_{l,n}|_{a=0}, \quad \frac{\partial {}^e\Pi}{\partial r}|_{a=0} \stackrel{def}{=} \frac{1}{a} \frac{\partial (r{}^e\Pi)}{\partial r}|_{a=0}.$$

Интервал изменения радиальной координаты внутри шара выбран так, чтобы координата r менялась непрерывно на границе шара.

Уравнения для полей E и H , соответствующих потенциалам $\Pi_{l,n}$, аналогичны традиционным и отличаются только тем, что проницаемости для r - и τ -компонент не равны между собой:

$$E_r = \alpha \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r{}^e\Pi) + \frac{k^2}{\alpha} (r{}^e\Pi),$$

$$E_\theta = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r{}^e\Pi) - \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r{}^m\Pi), \quad (15)$$

$$E_\varphi = \frac{\alpha}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r{}^e\Pi) - \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r{}^m\Pi).$$

Соотношения для магнитных полей можно получить из (15) заменой индексов ($l \neq m$), знаков суммирования и разности для угловых составляющих. При $\alpha \rightarrow 0$ целесообразно перейти в (15) к новой координате, как и в соответствующем уравнении (12). Заменяя E_r на E_r/α и $(r-a)/\alpha$ на $r-a$, из (15) получим

$$E_r = a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} {}^e\Pi + k^2 {}^e\Pi \right),$$

$$E_\theta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} {}^e\Pi + \frac{k}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} {}^m\Pi \right), \quad (16)$$

$$E_\varphi = \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} {}^e\Pi - k \frac{\partial}{\partial \theta} {}^m\Pi \right).$$

Решениями уравнения (14) являются входящие внутрь тела волны вида $\exp(-iVk^2 - l[(l+1)/a^2]r)$, так как волновое число имеет малую мнимую добавку. Гармоники с номерами $l(l+1) > (ka)^2$ не поглощаются шаром. Найдем амплитуду рассеянной и амплитуду внутренней волн при $l=1$. Для случая низкочастотной дифракции ($(ka) \ll 1$) существенны только эти волны. Пользуясь традиционным определением амплитуд, из условий сшивки нетрудно найти амплитуды, соответствующие рассеянию, ${}^eB_s = {}^mB_s = \frac{3}{2}(ka)^3$, и поглощению,

${}^eB_a = {}^mB_a = \frac{3}{2}(ka)^3$. Точно такие же амплитуды рассеяния создают дипольные моменты

$$P = a^3 E_0, \quad M = a^3 H_0, \quad (17)$$

которые совпадают с соответствующими моментами металлического и идеального магнитного шариков радиуса a . Сечение рассеяния и сечение поглощения равны соответственно

$$\sigma_s = \frac{16}{3} \pi a^2 (ka)^4, \quad \sigma_a = 12\pi a^2 (ka)^4. \quad (18)$$

Черный шарик имеет рассеянное поле того же порядка, что и отражающий шарик.

В заключение отметим, что возможно не только линейное сжатие волн, но и нелинейное. Для этого необходимо использовать нелинейное преобразование уравнений Максвелла, оставляющее границу раздела неизменной. Структура подобных преобразований подробно описана в работе [2].

Автор глубоко признателен М. Л. Левину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бrehovskikh, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957, стр. 74.
2. М. А. Миллер, Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, УФН, 121, вып. 3, 524 (1977).
3. М. Л. Левин, ЖТФ, 18, 1899 (1948).
4. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, вып. 5(11), 71 (1956).
5. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970, стр. 694.

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию
29 июля 1977 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE COMPRESSION BY ANISOTROPIC MEDIA (A MODEL OF «REFLECTIONLESS CRYSTAL»)

S. P. Efimov

Conditions when a homogeneous anisotropic crystal is completely correlated with the isotropic medium are formulated in the paper. The coefficient of the wave reflection from the crystal is equal identically to zero at all angles. It is shown that the medium consisting of a half-space with the isotropic medium and a half-space filled by the crystal is electromagnetically identical to a homogeneous medium. Thus, the «compression» of a wave occurs in the crystal

УДК 621.372.852

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ТЕЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

B. A. Петленко, Н. А. Хижняк

Рассмотрено решение задачи о рассеянии электромагнитных волн идеально проводящими телами в прямоугольном волноводе, основанное на интегральных уравнениях макроскопической электродинамики. Рассчитаны коэффициенты отражения основной волны для конкретных препятствий.

Определение электромагнитного поля, рассеянного произвольным препятствием ограниченных размеров, расположенным в волноводе, является одной из ключевых задач прикладной электродинамики. Хотя формально все рассеиватели отличаются только размерами, конфигурацией и материалом, из которого они сделаны, с точки зрения выбора метода решения задачи эти параметры как раз и являются определяющими. Наиболее сложной для анализа является резонансная область, в которой размеры тела соизмеримы с длиной рассеиваемой волны.

Задачу о рассеянии сформулируем следующим образом. Пусть в бесконечном прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками существует электромагнитное поле $E_0(r) e^{i\omega t}$ и $H_0(r) e^{i\omega t}$. Внесение тела объема V с проницаемостями ϵ и μ изменяет это поле. Можно считать, что $E^{\text{расc}} = \hat{\eta}^e E_0$ и $H^{\text{расc}} = \hat{\eta}^m H_0$, где $E^{\text{расc}}$ и $H^{\text{расc}}$ — поле рассеянной волны. Основное внимание в настоящей работе и сосредоточено на определении элементов матрицы $\hat{\eta}$.

Полное поле $E(r) e^{i\omega t}$ и $H(r) e^{i\omega t}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям на стенах волновода, определяется интегральными уравнениями макроскопической электродинамики [1, 2]:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0(r) + (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \Pi^e(r) - ik \mu_1 \text{rot} \Pi^m(r), \\ H(r) &= H_0(r) + (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \Pi^m(r) + ik \epsilon_1 \text{rot} \Pi^e(r), \end{aligned} \quad (1)$$

где Π^e и Π^m — электрический и магнитный векторы Герца, равные

$$\begin{aligned} \Pi^e(r) &= \frac{\epsilon/\epsilon_1 - 1}{4\pi} \int_V \hat{G}^e(r | r') E(r') dr', \\ \Pi^m(r) &= \frac{\mu/\mu_1 - 1}{4\pi} \int_V \hat{G}^m(r | r') H(r') dr', \end{aligned} \quad (2)$$

\hat{G}^e и \hat{G}^m — электрическая и магнитная аффинорные функции Грина, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta \hat{G}(r | r') + k^2 \epsilon_1 \mu_1 \hat{G}(r | r') = -4\pi i \delta(|r - r'|), \quad (3)$$

ϵ_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды. Компоненты аффинорных функций Грина отличаются между

собой лишь характером граничных условий, которым они удовлетворяют на стенах волновода. Если точка наблюдения лежит вне объема V , то решение уравнения (3) можно представить в виде ряда по собственным функциям прямоугольного волновода. Электрическая функция Грина в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{G}(r | r') = & 2\pi \sum_{m, n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab k_z} \exp(-k_z |z - z'|) \times \\ & \times [e_x e_x \cos k_x x \cos k_x x' \sin k_y y \sin k_y y' + \\ & + e_y e_y \sin k_x x \sin k_x x' \cos k_y y \cos k_y y' + \\ & + e_z e_z \sin k_x x \sin k_x x' \sin k_y y \sin k_y y'], \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2 \epsilon_1 \mu_1}$, $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$, a и b — размеры волновода, ϵ_m и ϵ_n — множители Неймана, а e_x , e_y , e_z — единичные орты осей декартовых координат, связанных с волноводом.

Для идеально проводящего препятствия в интегральных членах (2) целесообразно произвести замену, пользуясь дифференциальным законом Ома для монохроматических полей,

$$J(r) = \sigma E(r), \quad (5)$$

где $J(r)$ — полный ток на препятствии, а $\sigma = \frac{i\omega}{4\pi} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right)$. Полагая также $\Pi^m = 0$, приходим к следующим уравнениям для полного поля:

$$E(r) = E_0(r) + \frac{1}{i\omega} (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \int_V \hat{G}(r | r') J(r') dr', \quad (6)$$

$$H(r) = H_0(r) + \frac{\epsilon_1}{c} \text{rot} \int_V \hat{G}(r | r') J(r') dr',$$

которые и определяют с учетом (4) матрицы η , если известен ток $J(r)$, наводимый на препятствия полем падающей волны $E_0(r)$.

Уравнение для тока получим, локализуя точку наблюдения в непосредственной близости от поверхности тела. В этом случае решение уравнения (3) представим в виде

$$\hat{G}(r | r') = I \frac{\exp(i k |r - r'| \sqrt{\epsilon_1 \mu_1})}{|r - r'|} + \hat{G}_0(r | r'), \quad (7)$$

где $\hat{G}_0(r | r')$ — регулярная всюду функция, удовлетворяющая однородному уравнению (3).

Представление (7), с математической точки зрения, является следствием того, что функция Грина ограниченной области имеет такую же особенность при совпадении аргументов, как и в свободном пространстве [3]. Задача теперь заключается в надлежащем выборе функции \hat{G}_0 . Необходимо так подобрать коэффициенты, входящие в \hat{G}_0 , чтобы выражение (7) удовлетворяло граничным условиям на стенах волновода. Иными словами, функция \hat{G}_0 должна быть такой, чтобы для внешних точек (7) переходило в (4). Сделать это легко, если экспоненту в (7) разложить по плоским волнам в волноводе;

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|V_{\epsilon_1 \mu_1})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 2\pi \sum_{m, n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{abk_z} \times \\ \times \exp[ik_x(x - x')] \exp[ik_y(y - y')] \exp(-k_z|z - z'|). \quad (8)$$

Тогда \hat{G}_0 имеет вид

$$\hat{G}_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = 2\pi \sum_{m, n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{abk_z} \exp(-k_z|z - z'|) \times \\ \times \{ e_x e_x [\sin k_x(x - x') \sin k_y(y - y') - \\ - \cos k_y(y - y') \sin k_x x \sin k_x x' - \cos k_x x \cos k_x x' \cos k_y y \cos k_y y' - \\ - i \cos k_x(x - x') \sin k_y(y - y') - i \sin k_x(x - x') \cos k_y(y - y') + \\ + e_y e_y [\sin k_x(x - x') \sin k_y(y - y') - i \sin k_x(x - x') \cos k_y(y - y') - \\ - \cos k_x(x - x') \sin k_y(y - y') \cos k_x x \cos k_x x' \cos k_y y \cos k_y y' - \\ - i \cos k_x(x - x') \sin k_y(y - y')] + e_z e_z [\sin k_x(x - x') \sin k_y(y - y') - \\ - \cos k_y(y - y') \cos k_x x \cos k_x x' - i \cos k_x(x - x') \sin k_y(y - y') - \\ - \sin k_x x \sin k_x x' \cos k_y y \cos k_y y' - i \sin k_x(x - x') \cos k_y(y - y')]\}. \quad (9)$$

Аналогичное выражение можно получить и для магнитной функции Грина.

Следует отметить, что представление аффинорной функции Грина (4) в области источника в виде (7), (9) согласуется с результатами работ [4, 5].

С учетом (7) первое из уравнений (6) перепишем следующим образом, полагая для простоты $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$:

$$E(\mathbf{r}) = E_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{i\omega} (\text{grad div} + k^2) \int_V \left[J(\mathbf{r}') \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \right. \\ \left. + \hat{G}_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}'. \quad (10)$$

Непосредственное решение полученного уравнения относительно тока представляет известные трудности. Можно, однако, выделить большой и важный для приложений класс препятствий, для которых уравнение (10) значительно упрощается. Такими препятствиями являются достаточно тонкие проводники произвольного поперечного сечения, имеющие в общем случае криволинейную осевую конфигурацию. Для них полный ток имеет лишь продольную составляющую и не зависит от поперечных координат.

Если s — продольная, а ζ — поперечные координаты, связанные с проводником, то справедливо уравнение

$$E(s) = E_0(s) + \frac{1}{i\omega} \int_0^L \left\{ \left[e_s \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial J(s')}{\partial s'} + k^2 e_{s'} J(s') \right] \frac{e^{ikR}}{R} + \right. \\ \left. + J(s') \left[e_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 e_{s'} \right] \hat{G}_0(s | s') \right\} ds', \quad (11)$$

которое является квазиодномерным приближением уравнения (10). В уравнении (11)

$$J(s) = \int_{\zeta} J_s(s) \times(\zeta) d\zeta, \quad (12)$$

где J_s — плотность тока, а $\times(\zeta)$ — нормированная функция поперечных координат,

$$R = \sqrt{(s - s')^2 + r_e^2}, \quad (13)$$

где r_e — эквивалентный радиус проводника [6], удовлетворяющий условию

$$k r_e \ll 1, \quad (14)$$

e_s и $e_{s'}$ — единичные орты касательной соответственно в точках s и s' , а L — длина проводника.

Считая для определенности проводник незамкнутым и не имеющим точки касания со стенками волновода, полагаем, что краевые условия для тока

$$J(0) = J(L) = 0 \quad (15)$$

выполнены. Используя также граничное условие равенства нулю тангенциальной составляющей суммарного электрического поля на поверхности идеально проводящего препятствия, после несложных преобразований получим интегродифференциальное уравнение для определения тока:

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_0^L J(s') \frac{e^{ikR}}{R} ds' = -i\omega E_{0s}(s) - F[J(s)], \quad (16)$$

в котором E_{0s} — касательная составляющая электрического поля падающей волны, а

$$F[J(s)] = \left(\frac{d^2}{ds^2} + k^2 \right) \int_0^L J(s') e_s (\hat{G}_0(s | s') e_s) ds'. \quad (17)$$

В уравнении (16) учтено, что $(e_s e_{s'}) \approx 1$, поскольку выражение (13) предполагает локальную цилиндричность проводника.

Полученное уравнение отличается от известного уравнения тонкой антенны наличием дополнительного слагаемого $F[J(s)]$, которое определяет поле, отраженное от стенок волновода, поэтому для его решения можно воспользоваться одним из методов теории тонких антенн [7].

Учитывая (14), уравнение (16) преобразуем к виду

$$\frac{d^2 J(s)}{ds^2} + k^2 J(s) = \alpha \{ i\omega E_{0s}(s) + f[J(s)] + F[J(s)] \}, \quad (18)$$

где $f[J(s)]$ — интегродифференциальный оператор, равный собственному полю проводника, за вычетом квазистационарного члена, $\alpha = 1/2 \ln pr_e$ — логарифмический параметр малости, а p — постоянная, зависящая от отношения L/λ . Приближенное решение уравнений (18) найдем методом малого параметра. Представляя искомую функцию в виде ряда по степеням малого параметра α ,

$$J(s) = J_0(s) + \alpha J_1(s) + \alpha^2 J_2(s) + \dots, \quad (19)$$

и ограничиваясь первым приближением, получим следующее выражение для тока;

$$J(s) = -\alpha \frac{i\omega}{k \sin kL} \left\{ \sin k(L-s) \int_0^s E_{0s}(s') \sin ks' ds' + \right. \\ \left. + \sin ks \int_s^L E_{0s}(s') \sin k(L-s') ds' \right\}, \quad (20)$$

которое применимо для нерезонансных проводников, когда $\sin kL \neq 0$.

Уравнение (16) справедливо и для проводников, касающихся одним из концов стенки волновода. Полагая точку касания началом отсчета координаты s , условия (15) запишем следующим образом:

$$J(-L) = J(L) = 0, \quad (21)$$

где $J(-L)$ — значение тока в зеркальной относительно стенки касания точке. В этом случае выражение для тока имеет вид

$$J(s) = -\alpha \frac{2i\omega}{k \sin 2kL} \left\{ \sin k(L-s) \int_{-L}^s E_{0s}(s') \sin k(L+s') ds' + \right. \\ \left. + \sin k(L+s) \int_s^L E_{0s}(s') \sin k(L-s') ds' \right\}. \quad (22)$$

Формула (22) теряет смысл, когда $\sin 2kL = 0$. Это означает, что резонансные свойства проявляются в данном случае при длине проводника вдвое меньшей, чем в предыдущем.

Применим теперь полученные формулы к решению конкретных задач. Для этого вычислим элементы матрицы $\hat{\gamma}$ для кругового стержня радиуса $r = r_e$, ось которого параллельна узким стенкам волновода и расположена в плоскости $z = 0$, а концы стержня не касаются стенок (рис. 1). Предполагая, что в волноводе распространяется основная H_{10} -волна, касательную составляющую электрического поля на оси стержня запишем в виде

$$E_{0s} = C \sin \frac{\pi}{a} x_0, \quad (23)$$

где C — постоянная возбуждения. Подставляя (23) в (20) и производя необходимые вычисления, получим ток

$$J(s) = -\alpha C \frac{i\omega \sin \frac{\pi}{a} x_0}{k^2 \sin kL} \{ \sin k(L-s) + \sin ks - \sin kL \}, \quad (24)$$

который и определяет, согласно (6), рассеянное стержнем поле:

$$E_y^{\text{расc}}(x, y, z) = \frac{2\pi}{i\omega} \sum_{m, n} \frac{\epsilon_m \epsilon_n}{abk_z} \left[k^2 + \frac{m\pi}{b} (k_z - k_x - k_y) \right] \times \\ \times \sin \frac{n\pi}{a} x_0 \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y \exp(-k_z|z|) \int_0^L J(s) \cos \frac{m\pi}{b} s ds \quad (25)$$

($z < 0$ — отраженная волна, $z > 0$ — прошедшая волна).

Отметим, что вблизи препятствия рассеянное поле представляет собой суперпозицию полей всех типов волн волновода, но уже на рас-

стояниях порядка нескольких длин волн не затухнут лишь волны, для которых

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 < k^2. \quad (26)$$

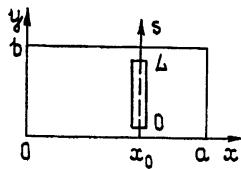


Рис. 1.

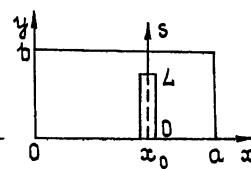


Рис. 2.

Если частота падающей волны такова, что в волноводе может распространяться только основная волна, то рассеянное поле можно представить, полагая в (25) $m = 0$ и $n = 1$, в виде

$$E_y^{\text{расc}}(x, z) = \alpha C \frac{16\pi}{ab} \left(\frac{kL}{4} - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\sin kL} \right) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{a} x_0}{k \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}} \times \\ \times \sin \frac{\pi}{a} x \exp \left(-\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2} |z| \right). \quad (27)$$

В этом случае матрица η^3 имеет единственный от нуля элемент, который при $z < 0$ определяет коэффициент отражения:

$$\eta = \frac{E_y^{\text{отp}}}{E_y^{\text{пад}}} = \frac{2\pi}{ab \ln kr_e} \left(kL - 2 \operatorname{tg} \frac{kL}{2} \right) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{a} x_0}{k \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}} \quad (28)$$

(в качестве постоянной p , определяющей малый параметр α выбрано значение $p = k$).

Если же стержень касается одним из концов широкой стенки волновода (рис. 2), то ток найдем, подставляя (23) в (22). В результате получим следующее выражение:

$$J(s) = \alpha C \frac{2i \omega \sin \frac{\pi}{a} x_0}{k^2 \cos kL} \{ \cos kL - \cos ks \}, \quad (29)$$

которое с точностью до постоянного множителя совпадает с известной вариационной формулой для тока [8]. Аналогично [8] записывается и поле рассеянной волны, которое позволяет определить коэффициент отражения в виде

$$\eta = \frac{4\pi}{ab \ln kr_e} (kL - \operatorname{tg} kL) \frac{\sin^2 \frac{\pi}{a} x_0}{k \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2}}. \quad (30)$$

Полученные формулы справедливы, в частности, и для проводящей полоски, ширина которой значительно больше ее толщины. В этом случае $r_e = d/4$, где d — ширина полоски.

На рис. 3, 4 представлены графики характерной величины $|η_1|/(1 + |η_1|)$ в диапазоне длин волн $λ/λ_{kp}$ ($λ_{kp}$ — критическая длина волны) одномодового режима стандартного волновода для стержней

(полосок), изображенных соответственно на рис. 1, 2. Приведенные кривые соответствуют центральному расположению стержней (полосок) — $x_0 = a/2$ — для $r/b = 0,05$ ($d/b = 0,2$) при различных значениях L (величины отношений L/b указаны на графиках). Эти кривые показывают, что структура на рис. 2 существенно резонансна, в то время как препятствие на рис. 1 таковым

не является. Это различие обусловлено, как уже указывалось, неодинаковыми резонансными множителями в формулах для тока.

В заключение заметим, что не встречает особых трудностей и вычисление коэффициента отражения от наклонных стержней, а также от проводников сложной осевой конфигурации.

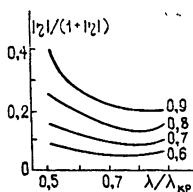


Рис. 3.

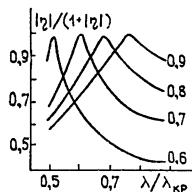


Рис. 4.

не является. Это различие обусловлено, как уже указывалось, неодинаковыми резонансными множителями в формулах для тока.

В заключение заметим, что не встречает особых трудностей и вычисление коэффициента отражения от наклонных стержней, а также от проводников сложной осевой конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, № 7, 1592 (1958).
2. Н. А. Хижняк, сб. Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, 1967, вып. 4, стр. 88.
3. Ф. М. Морс, Г. Фещбах, Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, М., 1960.
4. Y. Rahmat-Samii, IEEE Trans., MTT-23, № 9, 762 (1975).
5. C. T. Tai and P. Rosenfeld, IEEE Trans., MTT-24, № 9, 597 (1976).
6. R. W. P. King, Theory of Linear antennas, Cambridge — Massachusetts, 1956.
7. Г. Д. Малушков, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1563 (1975).
8. L. Lewin, Theory of Waveguides, London, 1975.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 июля 1977 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY BODIES WITH IDEAL CONDUCTIVITY IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

V. A. Petlenko, N. A. Khizhnyak

Based on the integral equation of macroscopic electrodynamics the solution of a problem is considered on the scattering of electromagnetic waves by bodies with the ideal conductivity in a rectangular waveguide. Coefficients of the fundamental wave reflection have been calculated for concrete obstacles.

УДК 621.372.823

О КОМПЛЕКСНЫХ ВОЛНАХ В КРУГЛОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Т. Н. Гетманцева, С. Б. Раевский

Рассмотрены вопросы распространения волн с комплексными волновыми числами в круглом открытом диэлектрическом волноводе без потерь. Представлены результаты решения комплексного дисперсионного уравнения для вытекающих волн типа $EH_{n,m-1}$.

В работе [1] на основе анализа комплексной плоскости поперечных волновых чисел произведена классификация волн, возможных в открытых направляющих системах. Отмечено, что комплексные волны в таких системах могут быть двух типов: собственные комплексные волны, которым соответствуют решения дисперсионного уравнения, расположенные в нижней полуплоскости поперечных волновых чисел (соответствующих внешней среде) симметрично относительно мнимой оси (такие волны существуют парами), и вытекающие волны, существование которых объясняется частичным излучением поля в открытое пространство.

Вопросы, касающиеся распространения в круглом диэлектрическом волноводе (ДВ) без потерь симметричных волн с комплексными волновыми числами, рассматривались в работах [2, 3]. В статье Арнбака [3] были представлены результаты приближенного решения дисперсионного уравнения, свидетельствующие о возможности существования в круглом ДВ симметричных вытекающих волн, поле которых нарастает при удалении от волновода. В отношении возможностей распространения в таком волноводе комплексных волн, удовлетворяющих условию Зоммерфельда [4], в статье определенных высказываний не было. Не рассматривались в ней и несимметричные вытекающие волны.

Покажем, прежде всего, принципиальную невозможность существования в круглом ДВ симметричных комплексных волн, удовлетворяющих условию излучения. Разделяя в дисперсионном уравнении для симметричных волн, полученным Арнбаком [3], действительную и мнимую части, получаем

$$\sin 2\varphi \ln(0,89R) + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos 2\varphi = 0, \\ R^2 \left[\cos 2\varphi \ln(0,89R) - \sin 2\varphi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] = -kx \frac{J_0(x)}{J_1(x)}, \quad (1)$$

где $x = a_1 a$, $\operatorname{Re}^{i\varphi} = a_2 a$, $a_{1,2} = \gamma_{1,2} + i\delta_{1,2}$ — поперечные волновые числа, a — радиус волновода,

$$k = \begin{cases} \epsilon_2/\epsilon_1 & \text{для } E\text{-волн} \\ \mu_2/\mu_1 & \text{для } H\text{-волн} \end{cases}$$

Второе уравнение (1) с учетом первого можно привести к виду

$$R^2 \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{1}{\varphi - \pi/2} \left\{ R^2 \ln (0,89 R) + \frac{kx}{\cos 2\varphi} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \right\}. \quad (2)$$

Поскольку Арнбак временную зависимость полагал в виде $e^{-i\omega t}$ (описывал поле в окружающей среде функциями Ханкеля 1-го рода), решения дисперсионного уравнения, соответствующие комплексным волнам, удовлетворяющим условию излучения, должны лежать в верхней полуплоскости (α_2). При этом они должны располагаться симметрично относительно мнимой оси. Покажем, что, например, во II квадранте плоскости (α_2) таких решений в принципе быть не может.

Во II квадранте $\gamma_2 < 0$, $\delta_2 > 0$, $\varphi > \pi/2$. Тогда вблизи критической частоты поверхности волн (а именно там нужно искать решения, соответствующие собственным комплексным волнам) имеем

$$\operatorname{tg} 2\varphi > 0, \quad \varphi - \frac{\pi}{2} > 0, \quad \ln (0,89 R) < 0,$$

$$\cos 2\varphi < 0, \quad J_0(x)/J_1(x) \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что во II квадранте плоскости (α_2) мы не можем удовлетворить уравнению (2). Таким образом, можно сделать вывод об отсутствии в круглом диэлектрическом волноводе собственных комплексных волн с симметричной структурой поля.

Обратимся теперь к несимметричным волнам HE_{nm} (EH_{nm}). При временной зависимости поля в виде $e^{i\omega t}$ дисперсионное уравнение для этих волн —

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} \frac{J_n'(\alpha_1 a)}{J_n(\alpha_1 a)} - \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \frac{H_n^{(2)\prime}(\alpha_2 a)}{H_n^{(2)}(\alpha_2 a)} \right] \left[\frac{\mu_1}{\alpha_1} \frac{J_n'(\alpha_1 a)}{J_n(\alpha_1 a)} - \right. \\ & \left. \frac{\mu_2}{\alpha_2} \frac{H_n^{(2)\prime}(\alpha_2 a)}{H_n^{(2)}(\alpha_2 a)} \right] = \frac{n^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4} (\varepsilon_2 \mu_2 \alpha_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \alpha_2^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Численные исследования уравнения (3) производились для случая $n = 1$. Уравнения, получающиеся после разделения в (3) действительной и мнимой частей, решались совместно в плоскости γ_1, γ_2 при δ_1 в качестве параметра. Кривая 1 решений первого уравнения пересекалась (рис. 1a) кривой 2 решений второго уравнения в двух точках A_i и B_i . При увеличении δ_1 кривая 2 смещалась относительно кривой 1 до точки касания C вниз (рис. 1b). В результате точки пересечения (точки A_i) кривой 2 с правой ветвью кривой 1 давали одну часть дисперсионных характеристик (рис. 2, участки AC). При уменьшении δ_1 кривая 2 смещалась относительно кривой 1 из точки касания C вверх, и пересечения (точки B_i) ее с левой ветвью кривой 1 давали вторую часть дисперсионных характеристик (участки BC). Таким образом, точка касания C объединяет две части дисперсионной характеристики.

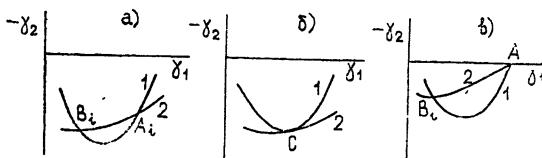


Рис. 1. Плоскость решения уравнения (3).

Значения частоты, соответствующие найденным γ_1 и γ_2 при фиксированном δ_1 и учете соотношения

$$\gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2, \quad |(4)$$

определялись из уравнения, связывающего поперечные волновые числа:

$$\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \delta_2^2 - \delta_1^2 = \omega^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2). \quad |(5)$$

Таким образом, при каждом значении частоты решалась система четырех уравнений: уравнения (4) и (5) совместно с условиями обращения в нуль действительной и мнимой частей (3). Решения указанной системы располагались в первых квадрантах комплексных плоскостей $(\alpha_{1,2})$. Такие решения соответствуют несобственным волнам.

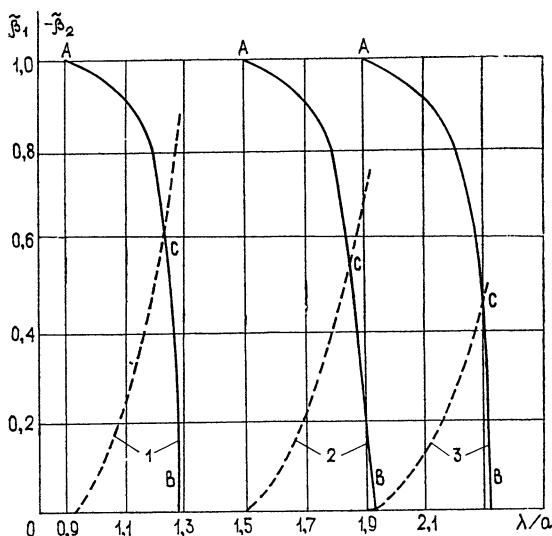


Рис. 2. Дисперсионные характеристики (сплошная линия, $\tilde{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{2\pi} \lambda$) и характеристики затухания (штриховая, $\tilde{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{2\pi} \lambda$) вытекающей волны EH_{14} .

Кривая 1— $\tilde{\epsilon} = 5$, 2— $\tilde{\epsilon} = 12$, 3— $\tilde{\epsilon} = 18$.

На рис. 2 приведены дисперсионные характеристики и характеристики затухания найденных комплексных волн, соответствующие различным значениям $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1/\epsilon_2$ (β_1 и β_2 — действительная и мнимая части продольного волнового числа $\beta = \beta_1 + i\beta_2$). Для того, чтобы решить вопрос о классификации этих волн, обратимся к работе [5]. В ней показано, что критические частоты поверхностных волн HE_{1m} ($m \geq 2$) и $EH_{1,m-1}$, определяемые из уравнения $J_1(\alpha_1 a) = 0$, совпадают. Рассматривая предельные точки A дисперсионных характеристик, видим, что в них $\delta_1 a \rightarrow 0$, $\gamma_1 a \rightarrow 13,32$. Такое значение поперечного волнового числа во внутренней области соответствует критическому значению его для волн EH_{14} , HE_{15} . Остается решить вопрос, какая из этих волн в точке A переходит в найденную комплексную волну. Для этого проведем дополнительное рассмотрение.

Дисперсионное уравнение (3) вблизи точки A , соответствующей критической частоте, запишем в виде

$$\frac{J'_1(\alpha_1 a)}{J_1(\alpha_1 a)} = P(\alpha_1, \alpha_2) [1 \pm \sqrt{1 + Q(\alpha_1, \alpha_2)}], \quad (6)$$

где

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2 a} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right), \quad Q(\alpha_1, \alpha_2) = -4 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{-2}.$$

Для поверхностных волн $P > 0, Q > 0$.

На рис. 3 показан качественный ход кривых $F(\alpha_1 a) = J'_1(\alpha_1 a)/J_1(\alpha_1 a)$. Полюсы соответствуют критическим частотам поверхностных волн. Из (6) видно, что (+) перед радикалом соответствует значению функции $F(\alpha_1 a) > 0$, (-) — значению $F(\alpha_1 a) < 0$. Как видно из рис. 3, вблизи критических (для поверхностных волн) частот $\alpha_1^+ > \alpha_1^-$ (α_1^+ — значение поперечного волнового числа, найденное из (6) при знаке (+) перед радикалом, α_1^- — значение при знаке (—) перед радикалом).

Обращаясь к работе [5], видим, что дисперсионные характеристики волн EH_{nm-1} проходят над характеристиками волн HE_{nm} , следовательно $\beta^+ < \beta^-$ ($\beta^+ \leftrightarrow \alpha_1^+$, $\beta^- \leftrightarrow \alpha_1^-$). Таким образом, можно сделать вывод, что (+) перед радикалом в (6) соответствует волне HE_{nm} , (—) — волне EH_{nm-1} .

Выясним, какой знак обеспечивает наличие комплексных решений дисперсионного уравнения, расположенных в первых квадрантах плоскостей α_1, α и соответствующих найденным комплексным волнам. Для этого обратимся к случаю $|\alpha_1 a| \gg 1$, который соответствует волнам с большим вторым индексом (m). Поскольку свойства всех несимметрических волн круглого ДВ с $m \geq 2$ одинаковы, полученные в результате выводы можно считать общими.

В рассматриваемом случае больших аргументов α, a дисперсионное уравнение (6) при знаке (+) перед радикалом после разделения действительных и мнимых частей вблизи точки A (рис. 2) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2 \left(\gamma_1 a - \frac{3}{4} \pi \right)}{\operatorname{ch}^2(\delta_1 a) - \sin^2 \left(\gamma_1 a - \frac{3}{4} \pi \right)} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 - \delta_2^2) + 2 \gamma_2 \delta_2 \delta_1}{a (\gamma_2^2 + \delta_2^2)}, \\ \frac{\operatorname{sh} 2 \delta_1 a}{\operatorname{ch}^2(\delta_1 a) - \sin^2 \left(\gamma_1 a - \frac{3}{4} \pi \right)} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \frac{\delta_1 (\gamma_2^2 - \delta_2^2) - 2 \gamma_1 \gamma_2 \delta_2}{(\gamma_2^2 + \delta_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

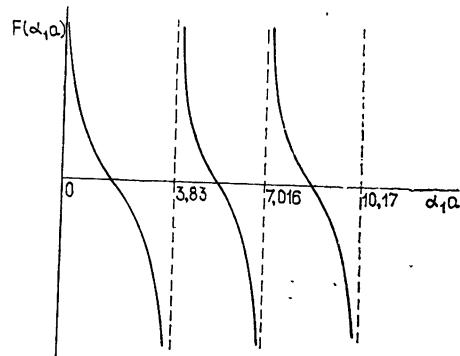


Рис. 3. Левая часть дисперсионного уравнения (6).

Нетрудно убедиться в том, что второе уравнение (7) не может иметь

решений $\gamma_{1,2} > 0$, $\delta_{1,2} > 0$. Следовательно, уравнение (6) не имеет комплексных решений в первых квадрантах плоскостей $\alpha_{1,2}$. Записывая уравнение (6) при знаке (—) перед радикалом, приходим после разделения действительной и мнимой частей к системе, подобной (7), которая имеет решения $\gamma_{1,2} > 0$, $\delta_{1,2} > 0$, соответствующие найденным комплексным волнам. Таким образом, можно сделать вывод, что представленные на рис. 2 дисперсионные характеристики и характеристики затухания соответствуют несобственным комплексным волнам типа EH_{nm-1} (ср. [6]).

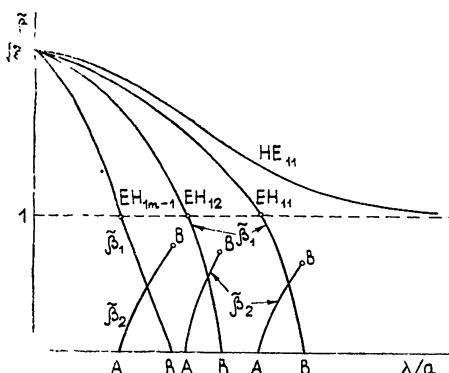


Рис. 4.

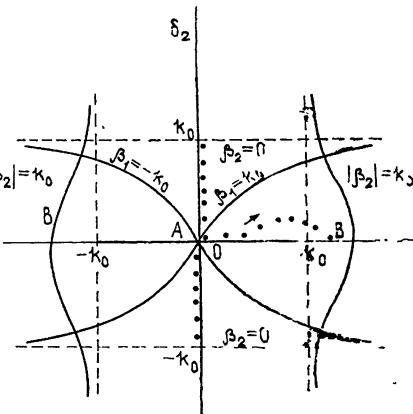


Рис. 5.

Рис. 4. Картина перехода поверхностных волн в вытекающие.

Рис. 5. Движение корней уравнения (3) при изменении частоты, соответствующих вытекающим волнам, в плоскости (α_2). Стрелка направлена в сторону уменьшения частоты.

Из рис. 2 видно, что найденные комплексные волны являются быстрыми, их фазовая скорость больше скорости света в окружающей среде. С увеличением ϵ дисперсионные характеристики и характеристики затухания смешаются в область более низких частот. При этом, как можно было предположить, при больших ϵ дисперсионные характеристики обрываются (справа) при меньших частотах. Поскольку в предельных точках A фазовая скорость равна скорости света в окружающей среде, с увеличением ϵ значения β_1 в этих точках уменьшаются (уменьшается граничная частота, соответствующая точке A). Найденные быстрые несобственные волны классифицируются [6] как вытекающие.

Качественная картина перехода — в частотном диапазоне — вытекающих волн в обычные поверхностные волны изображена на рис. 4.

На рис. 5 показано движение при изменении частоты волновых чисел рассмотренных вытекающих волн в плоскости α_2 . Так как продольное волновое число β является двузначной функцией α_2 , плоскость α_2 является двулистной. Ее разрез по линии $\beta_2 = 0$ показан на рисунке. Вдоль мнимой оси при $\delta_2 < 0$ на левом берегу разреза располагаются решения дисперсионного уравнения, соответствующие поверхностным волнам, при $\delta_2 > 0$ — решения, соответствующие несобственным волнам. Встреча двух ветвей решений в круглом волноводе без потерь происходит [6] в точке $\gamma_2 = \delta_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шевченко, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1768 (1969).
- 2 В В Шевченко, Изв вузов — Радиофизика, 15, № 2, 257 (1972).
3. J. Agpavak, Electron. Lett., 5, № 11, 952 (1969).
4. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М, 1953
- 5 M. M. Z. Khagadly, C Eng and J. E Lewis, Proc. IEE, 116, № 2, 214 (1969).
6. В. В. Шевченко, Диссертация, Институт радиотехники и электроники АН СССР, М, 1977.

Горьковский политехнический
институт

Поступила в редакцию
2 июня 1977 г.

COMPLEX WAVES IN A CIRCULAR DIELECTRIC WAVEGUIDE

T. N. Getmantseva, S. B. Raevskij

Problems of propagation of waves with complex wave numbers in a circular open dielectric waveguide without losses are considered. Results of solution of a complex dispersive equation are presented for escaping waves of the type $EH_{nm=1}$.

УДК 621.396.67

О ПОЛЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ, НАГРУЖЕННОЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ЩЕЛЬ, В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ

И. Б. Гаврис

Приводятся некоторые результаты исследования решения задачи о поле идеально проводящей сферы, нагруженной на прямоугольную щель, в присутствии магнитного горизонтального диполя. Результаты представлены диаграммами направленности и графиками изменения нагрузки на щели, обеспечивающей излучающей системе «диполь + нагруженная сфера» максимум излучаемой мощности.

В [1] приведены некоторые результаты исследования влияния поля радиального электрического диполя на поле идеально проводящей сферы, нагруженной на круговую щель в предположении, что мощность поля, излучаемая системой «диполь + нагруженная сфера», — максимальная для заданных значений параметров задачи. В данной работе рассматриваются аналогичные вопросы для случая магнитного горизонтального диполя и идеально проводящей сферы, нагруженной на прямоугольную щель.

Интерес к подобным задачам обусловлен целым рядом причин. Например, в [2] исследовано состояние ракеты с эллиптической щелью на ее поверхности (она моделируется идеально проводящим цилиндром), облучаемой извне электромагнитным полем, возникшим в электрическом импульсе, генерируемом вспышкой молнии или ядерным взрывом (последние моделируются дипольными источниками). Показано, что эти поля, облучающие ракету извне и поступающие в эллиптическую щель, возбуждают во внутренних схемах нежелательные и опасные токи, способные вывести из строя внутренние схемы и тем самым вызвать взрыв ракеты. Далее, идеально проводящая сфера с нагрузкой на щели является моделью сферической антенны (сферического спутника и др.). Теоретическое решение этой задачи для случая произвольной по форме щели и общенных граничных условий приведено в [3]. В связи с этим ниже опущено изложение всех вопросов, связанных с нахождением величины нагрузки на щели, при которой мощность излучаемого системой поля является максимальной для заданных параметров задачи, а приведены лишь расчетные формулы,

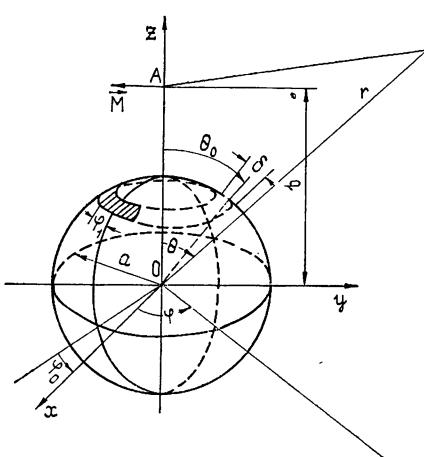


Рис. 1.

определяющие величину нагрузки на щели и значения комплексных амплитуд рассеянного поля в волновой зоне, позволяющие рассчитывать диаграммы направленности и строить графики изменения нагрузки на щели.

Предполагается, что на поверхности сферы (рис. 1) касательные составляющие вектора электрической напряженности суммарного поля заданы в виде

$$E_\theta = \begin{cases} -\frac{V}{\delta a} \sin \frac{\pi(\varphi - \varphi_0)}{2\varphi_1} & \text{при } |\theta - \theta_0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |\varphi - \varphi_0| \leq \varphi_1 \\ 0 & \text{при } |\theta - \theta_0| > \frac{\delta}{2}, \quad |\varphi - \varphi_0| > \varphi_1 \end{cases},$$

$$E_\varphi = 0.$$

Здесь a — радиус сферы, θ_0, φ_0 — углы, определяющие положение центра щели на сфере, δ — ширина щели, $2\varphi_1$ — угловая длина щели, V — некоторое комплексное напряжение в щели.

Как показано в [3], максимальная мощность излучения достигается при значении проводимости нагрузки на щели

$$Y_t = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{2}{\pi} i \sin^2 \theta_0 \left(\frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi_1}{l^2 - 1} \right)^2 \frac{C - D}{F} T_2(\theta_0) - Y_r,$$

и напряжений в щели

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{km}{b} \frac{2 \cos \varphi_0 \cos \varphi_1}{l^2 - 1} \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin \theta_0 T_2(\theta_0)}{Y_t + Y_r},$$

где $Y_r, T_2(\theta_0), C, D, F$ определяются формулами, приведенными в [3] (см. стр. 7 и формулу (18)), при указанных выше размерах щели, а $l = \pi/2\varphi_1$.

Комплексные амплитуды суммарного поля излучающей системы «диполь + нагруженная сфера» задаются выражениями

$$S_\theta(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{km}{b} \sin \varphi S_\theta^{(i)}(\theta) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{km}{b} \sin \varphi S_\theta^{(r)}(\theta) + V \frac{\sin \theta_0}{\pi} S_\theta^{(s)}(\theta, \varphi),$$

$$S_\varphi(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{km}{b} \cos \varphi S_\varphi^{(i)}(\theta) + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{km}{b} \cos \varphi S_\varphi^{(r)}(\theta) + V \frac{\sin \theta_0}{\pi} S_\varphi^{(s)}(\theta, \varphi),$$

где $S_\theta^{(i)}(\theta), S_\theta^{(r)}(\theta), S_\theta^{(s)}(\theta, \varphi), S_\varphi^{(i)}(\theta), S_\varphi^{(r)}(\theta), S_\varphi^{(s)}(\theta, \varphi)$ определяются по формулам (1) из [3]. Диаграммы направленности суммарного поля для значений параметров задачи, обеспечивающих максимальную мощность излучения, рассчитываются по формуле

$$|S(\theta, \varphi)|^2 = |S_\theta(\theta, \varphi)|^2 + |S_\varphi(\theta, \varphi)|^2.$$

Ниже обсуждаются результаты численного решения задачи, полученные с помощью ЭВМ. На рис. 2, 3 приведены диаграммы направлен-

ности, нормированные на свой максимум, для различных значений параметров ka , kb , θ_0 , φ_0 , φ_1 . Сплошной линией изображены диаграммы направленности суммарного поля излучающей системы, а пунктирной линией — диаграммы направленности нагруженной на щель сферы в отсутствие диполя при тех же значениях ka , θ_0 , φ_0 , φ_1 . На рис. 4а—д построены графики изменения нагрузки на щели при тех же значениях параметров, при которых строились диаграммы направленности на рис. 2а—в, и на рис. 3а, б соответственно. Диаграммы направленности, изображенные на рис. 2, рассчитаны при $ka = 2, 3, 4$ (соответственно а, б, в) и различных значениях угла θ_0 , определяющего смещение центра щели по меридиану. Во всех случаях полагалось, что $b = 1,5 a$, $2\varphi_1 = 80^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$ и $\varphi = 0^\circ$.

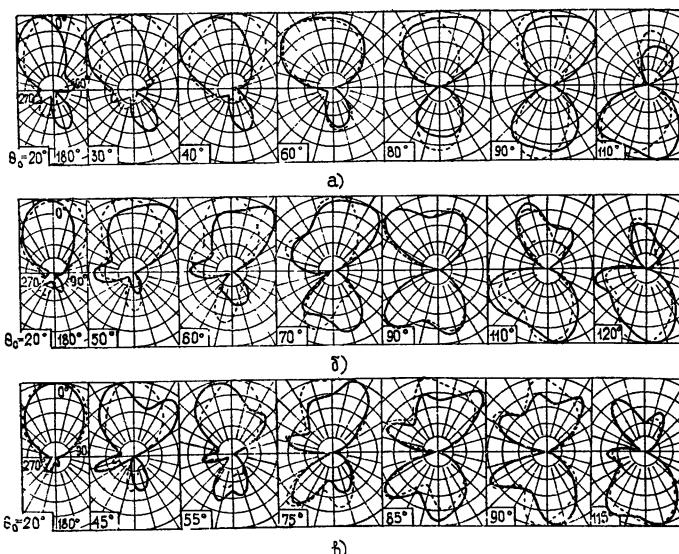


Рис. 2.

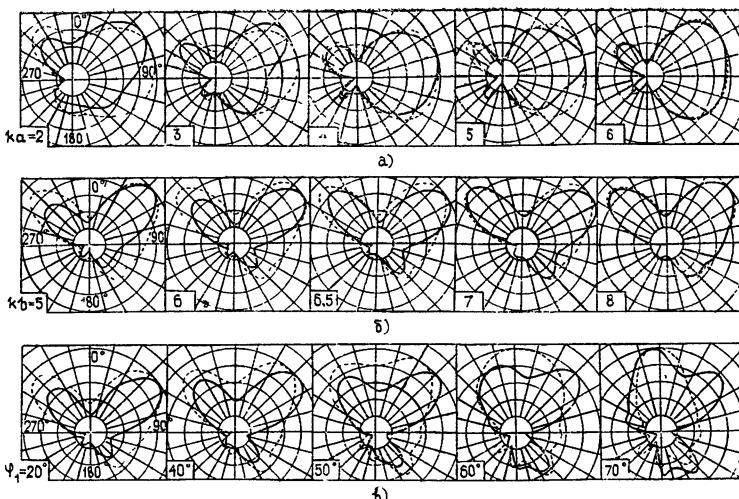


Рис. 3.

Из анализа результатов, представленных на рис. 2, следует, что влияние поля диполя как на форму диаграммы направленности нагруженной на щель сферы, так и на направленность излучения ее, наиболее существенно для положений щели, соответствующих, как это видно на рис. 4а—в, максимальным значениям активной составляющей нагрузки. Вместе с тем, следует особо отметить, что это влияние почти несущественно для положений щели со значениями $\theta_0 = 60^\circ$ (рис. 2а), $\theta_0 = 90^\circ$ (рис. 2б) и $\theta_0 = 20^\circ$ (рис. 2в). Этим случаям, как видно из рис. 4а—в, соответствуют значения активной составляющей нагрузки на щели, близкие к нулю, и реактивной составляющей — равные нулю. Это влияние менее существенно также при смещении щели в область тени.

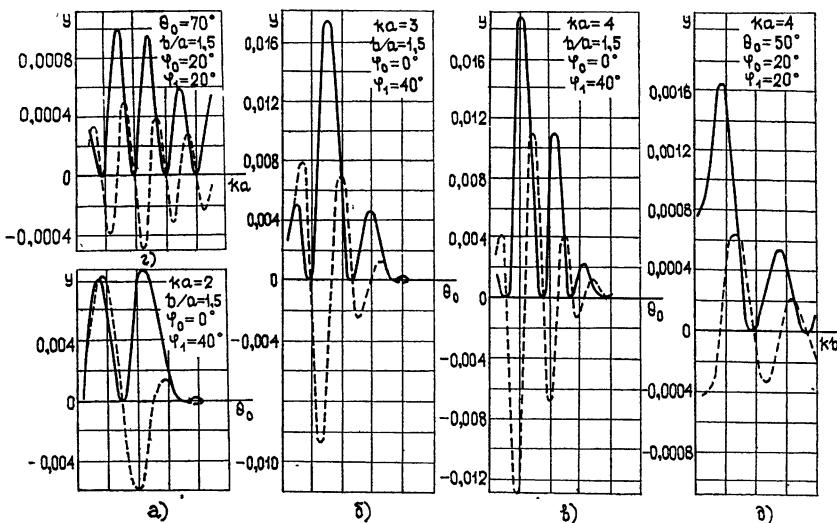


Рис. 4.

На рис. 3а изображены диаграммы направленности в зависимости от изменения частоты колебаний при $b/a = 1,5$ и $\theta_0 = 70^\circ$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\varphi_1 = 20^\circ$. Видно, что влияние диполя на диаграмму направленности нагруженной на щель сферы оказывается в большей степени при малых значениях ka (например, при $ka = 2$, $ka = 3$). По мере увеличения значения ka влияние диполя уменьшается. Так, при $ka \geq 6$ влияние поля диполя на форму диаграммы направленности нагруженной сферы почти несущественно.

На рис. 3в изображены диаграммы направленности суммарного поля, характеризующие изменение формы диаграммы направленности сферы с нагрузкой на щели по мере удаления диполя от поверхности сферы. Видно, что влияние диполя на диаграмму направленности нагруженной сферы (полагалось, что $ka = 4$, $\theta_0 = 50^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\varphi_1 = 20^\circ$) уменьшается по мере удаления его от поверхности сферы. Так, уже при $kb \geq 8$ (что соответствует удалению диполя от поверхности сферы на 1,2 длины волны и больше) диаграмма направленности рассматриваемой нами излучающей системы почти не отличается от диаграммы направленности нагруженной на щель сферы в отсутствие диполя. Влияние диполя на изменение диаграммы направленности нагруженной сферы как в сторону изменения ее формы, так и в сторону изменения направленности излучения заметно (см. рис. 3в) и в случае увеличения угловой длины щели при фиксированных значениях $ka = 4$, $kb = 6$, $\theta_0 = 50^\circ$, $\varphi_0 = 20^\circ$, $\varphi_1 = 20^\circ$.

Расчет диаграмм направленности осуществлялся при условии, чтобы в каждом конкретном случае задаваемая на щель нагрузка обеспечивала максимальную для рассматриваемой системы мощность излучения. Из графиков изменения нагрузки на рис. 4 видно, что как активная, так и реактивная составляющие нагрузки носят осциллирующий характер. При этом значения активной составляющей остаются положительными, в то время как реактивная составляющая, изменяясь, принимает как положительные, так и отрицательные значения. В тех случаях, когда значения составляющих нагрузки приближаются к нулю, преимущественное влияние на формирование диаграммы направленности оказывает собственное поле сферической антенны. Это значит, что путем соответствующего выбора параметра ka , kb , θ_0 , Φ_0 , Φ_1 (а через них и значений нагрузок Y_l , Y_r) можно добиться такого режима работы сферической антенны, при котором влиянием дипольного источника можно пренебречь, т. е. осуществлять управление излучением системы «диполь + нагруженная сфера», обеспечивая в каждом конкретном случае максимальную мощность излучения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е. А. Иванов, И. Б. Гаврис, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 576 (1977).
- 2 C. W. Haggison and R. W. King, IEEE, EMC-14, 107 (1972).
- 3 И. Б. Гаврис, Вестник БГУ, 1, № 3, 3 (1974).

Белорусский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 декабря 1977 г.

THE FIELD OF IDEALLY CONDUCTING SPHERE WITH LOADED BY THE RECTANGULAR GAP IN THE PRESENCE OF THE MAGNETIC HORIZONTAL DIPOLE

I. B. Gavris

Some investigation results are given of the problem solution on the field of ideally conducting sphere loaded by the rectangular gap in the presence of the magnetic horizontal dipole. The results are presented by directivity diagrams and graphs of the load variation providing the maximum of the radiating power of the system «dipole+loaded sphere».

УДК 621.372 821

МЕТОД ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

В. П. Ивашика

Предложен метод расчета параметров многопроводных линий, поперечное сечение которых заполнено кусочно-однородным магнитодиэлектриком. Предполагается, что в линии распространяется ТЕМ-волну. Толщина проводников конечная. Границы раздела между областями с различными магнитодиэлектриками произвольные. Линия может быть закрытой или открытой. Метод позволяет рассчитать параметры линий, когда на проводниках заданы потенциалы или заряды произвольным образом. Расчет сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, ядро которого строится элементарно. Приведен пример численной реализации метода. Дана оценка точности численных результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], многопроводные передающие линии находят широкое применение в технике СВЧ, в частности, полосковые линии. В данной работе исследуется многопроводная линия, поперечное сечение которой показано на рис. 1. В частном случае эта линия может быть открытой, т. е. без экрана с контуром L_0 . Все исследования проводятся для ТЕМ-волн. Потери в металле и магнитодиэлектрике не учитываются.

Если поставить электродинамическую задачу точно, то в линии, заполненной кусочно-однородным магнитодиэлектриком, ТЕМ-волну не может существовать и, следовательно, расчеты нельзя свести к решению уравнения Лапласа. Основанием для применения «ТЕМ-приближения» служат как результаты многочисленных экспериментальных работ в довольно широком диапазоне частот, так и теоретические исследования дисперсии в отдельных линиях. Например, для наиболее полно исследованной несимметричной полосковой линии установлено, что учет дисперсии по сравнению с «ТЕМ-приближением» дает поправку в 2,8% при отношении наибольшего характерного размера линии к длине волны 0,1 [2]. Следует ожидать, что погрешность будет того же порядка величины и для произвольной линии, если отношение наибольшего характерного геометрического размера линии к длине волны будет порядка 0,1 и меньше. Для микрополосковой техники это означает, что «ТЕМ-приближение» пригодно до длин волн порядка сантиметров. Как следует из теоретических и эксперимен-

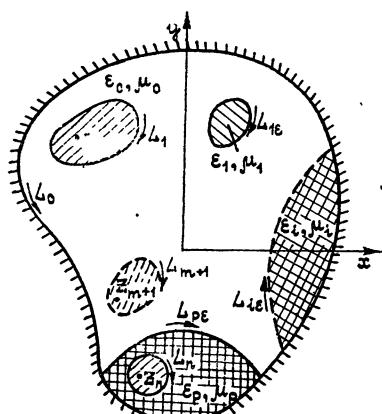


Рис. 1.

тальных результатов, приведенных в [3], параметры многих СВЧ устройств, основным элементом которых является многопроводная линия, определяются с точностью в несколько процентов. Поэтому характеристики линии, рассчитанные в «ТЕМ-приближении», вполне пригодны для расчета таких устройств.

Электродинамические свойства многопроводных линий с ТЕМ-волной можно описать, зная матрицы погонных емкостей и индуктивностей [4]. В данной работе будет рассматриваться расчет только погонных емкостей. Индуктивности всегда можно получить таким же способом, используя принцип двойственности [5]. Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем предполагаем, что $\mu_1 = \dots = \mu_i = \dots = \mu_p = \mu_0$.

Часто не бывает обязательным знать всю матрицу погонных емкостей, а достаточно рассчитать линию с заранее заданными условиями возбуждения. Например, в последнее время выяснилась перспективность полосковых линий с полосками, имеющими свободный потенциал [6, 7]. В отношении таких полосок (проводников) заранее известно, что погонная плотность заряда на них равна нулю. Поэтому необходимо иметь метод, который позволил бы сравнительно легко рассчитать линию любой конфигурации, независимо от того, что известно на проводниках — значение потенциала или заряда. Под потенциалом здесь и в дальнейшем понимается потенциальная функция ТЕМ-волны, как она определена в [8], под зарядом и емкостью — погонная плотность заряда и погонная емкость.

Задачу, которая решается в данной работе, можно сформировать так: для линии, изображенной на рис. 1, заданы потенциалы V_0, V_1, \dots, V_m проводников с контурами L_0, L_1, \dots, L_m ($m \leq n$), на остальных ($n - m$) проводниках известны заряды Q_{m+1}, \dots, Q_n . Требуется определить потенциал во всей области, заряды на проводниках L_1, L_2, \dots, L_m и потенциалы проводников L_{m+1}, \dots, L_n . Для открытой линии дополнительно задано, что общий заряд $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$ равен нулю, или, что эквивалентно, потенциал на бесконечности ограничен. После того как поставленная задача решена, расчет любых электродинамических параметров линии очевиден.

Для решения задачи будет применен метод сингулярных интегральных уравнений [9], который в [10] использовался для приближенного исследования полосковых линий с кусочно-однородным ферритовым заполнением. Согласно [10] интегральные уравнения получаются непосредственно с помощью граничных условий для полей, а не потенциалов. Необходимость вычислять поля в явном виде приводит к тому, что исчезает прямая связь между физическими параметрами линии и решением интегральных уравнений. Возникают и численные осложнения, так как поля (вместе с ними и ядра интегральных уравнений) в угловых точках стремятся в бесконечность согласно граничным условиям на ребре [11]. Для линий с ферритовым заполнением прямое применение потенциалов затруднено наличием недиагональных элементов у тензора магнитной проницаемости, которые приводят к перемешиванию реальной и мнимой частей комплексного потенциала. Это означает, что ядра соответствующих интегральных уравнений будут многозначными функциями, что является серьезным осложнением задачи. Для линий с изотропным диэлектрическим заполнением затруднений с многозначностью не возникает, и, следовательно, более удобно работать с потенциалом, который везде остается ограниченным. Кроме того, будет показано, что, используя иные, чем в [10], интегральные представления, можно получить прямые соотношения между зарядом (или потенциалом) проводников

и решением сингулярного интегрального уравнения. Последнее обстоятельство позволяет значительно упростить задачу как с аналитической, так и с вычислительной точки зрения. Поэтому цель настоящей работы — указать наиболее простой и общий способ определения параметров многопроводных линий из решения соответствующих сингулярных интегральных уравнений, без явного вычисления электромагнитных полей.

Перед тем, как приступить к решению поставленной задачи, заметим, что если линия заполнена однородной средой, то задача данной работы есть не что иное как электродинамическая переформулировка видоизмененной задачи Дирихле, решение которой дано в [9]. От этого и название предлагаемого метода.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

По причинам, указанным ниже, приведем интегральное представление потенциала электрической индукции, а не электрического поля. Этот потенциал $\varphi(x, y)$ будем искать в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t) dt}{t - z} + \sum_{j=1}^n P_j \ln |z - z_j| + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\epsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - z}, \quad (1)$$

где $L = L_0 + L_1 + \dots + L_n$, $L_\epsilon = L_{1\epsilon} + L_{2\epsilon} + \dots + L_{p\epsilon}$ (см. рис. 1), $z = x + iy$ — комплексная координата точки, где ищется $\varphi(x, y)$, t — комплексная координата точек контуров L и L_ϵ соответственно, z_j — комплексная координата произвольным образом фиксированной точки в области ограниченной контуром L_j ($j = 1, 2, \dots, n$),

$$P_j = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} Q_j & (j = m + 1, \dots, n) \\ \int_{L_j} \mu(t) ds & (j = 1, 2, \dots, m) \end{cases},$$

$\mu(t)$ — реальная функция, подлежащая определению, $ds = |dt|$.

Если точка z принадлежит контурам L или L_ϵ , то, чтобы выделить это в явном виде, вместо z будем писать $t_0 = x_0 + iy_0$. Направления обхода контуров показаны на рис. 1. Все величины, определенные слева от контура, обозначаются знаком «+», а справа — «—». Например, $\epsilon^+(t_0)$ означает, что диэлектрическая проницаемость берется на L или L_ϵ (точнее бесконечно близко), но так, что к контуру точка $z \rightarrow t_0$ приближается слева.

После этого граничные условия для $\varphi(x, y)$ записываются так:

$$\frac{1}{\epsilon^+(t_0)} \varphi^+(t_0) = \begin{cases} V_j & (t_0 \in L_j, j = 0, 1, \dots, m) \\ U_j & (t_0 \in L_j, j = m + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\frac{1}{\epsilon^+(t_0)} \varphi^+(t_0) = \frac{1}{\epsilon^-(t_0)} \varphi^-(t_0); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi^+(t_0)}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^-(t_0)}{\partial n} \quad (4)$$

при $t_0 \in L_\epsilon$.

В последних формулах U_j — неизвестный потенциал (константа), подлежащий определению. Здесь следует отметить, что представление (1) обеспечивает тождественное выполнение граничного условия (4).

Это следует из того, что $\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\epsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - z}$ является потенциалом двойного слоя [9]. Этим и объясняется выбор потенциала индукции, а не поля.

Приступим к выводу интегрального уравнения для определения неизвестной функции $\mu(t)$ и потенциалов U_j .

Сначала положим, что потенциал U_j известен. Тогда, подставляя (1) в граничные условия и применяя формулы Сохоцкого—Племеля [9] после элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} p(t_0) \mu(t_0) + q(t_0) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n P_j \ln(z - z_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\epsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} \right] = F(t_0), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} p(t_0) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^+(t_0)} \left(1 - \frac{\alpha(t_0)}{2\pi} \right) & (t_0 \in L) \\ \varepsilon^-(t_0) \left(1 - \frac{\alpha(t_0)}{2\pi} \right) + \frac{\varepsilon^+(t_0) \alpha(t_0)}{2\pi} & (t_0 \in L_\epsilon) \end{cases}, \\ q(t_0) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^+(t_0)} & (t_0 \in L) \\ \varepsilon^-(t_0) - \varepsilon^+(t_0) & (t_0 \in L_\epsilon) \end{cases}, \\ F(t_0) &= \begin{cases} V_j & (t_0 \in L_j, j = 0, 1, \dots, m) \\ U_j & (t_0 \in L_j, j = m+1, \dots, n) \\ 0 & (t_0 \in L_\epsilon) \end{cases}, \end{aligned}$$

$\alpha(t_0)$ — угол, на который поворачивается бесконечно малый вектор t_0, t , когда точка t , оставаясь слева от контура, обходит точку t_0 . Если t_0 не угловая точка, $\alpha(t_0) = \pi$ [9].

Для непосредственного расчета интегральное уравнение (5) не-пригодно, так как неизвестно, как определить константы (потенциалы) U_j . Следуя общей методике решения видоизмененной задачи Дирихле [9], U_j будем искать в следующем виде:

$$U_j = \int_{L_j} \rho_j(t) \mu(t) ds, \quad (6)$$

где, согласно [9], функция $\rho_j(t)$ ограничена условием $\int_{L_j} \rho_j(t) ds \neq 0$, а в остальном — произвольная. Подставляя выражение неизвестных констант (6) в (5), получаем следующее интегральное уравнение для нахождения функции $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} p(t_0) \mu(t_0) + q(t_0) \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} + \sum_{j=1}^n \ln(z_j - t_0) \int_{L_j} \mu(t) ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\epsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - t_0} \right] - \int_L k(t_0, t) \mu(t) ds = K(t_0), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$K(t_0) = \begin{cases} V_i - q(t_0) \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{2\pi} Q_j \ln |z_j - t_0| & (t_0 \in L_i, i = 0, 1, \dots, m) \\ -q(t_0) \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{2\pi} Q_j \ln |z_j - t_0| & (t_0 \in L_i, i = m+1, \dots, n) \\ \text{и } t_0 \in L_\varepsilon \end{cases},$$

$$k(t_0, t) = \begin{cases} \rho_j(t) & (t_0, t \in L_j, j = m+1, \dots, n) \\ 0 & (\text{в остальных случаях}) \end{cases}.$$

После того, как интегральное уравнение (7) решено, т. е. $\mu(t)$ и, следовательно, потенциал $\varphi(x, y)$ определен, нахождение неизвестных величин, входящих в формулировку задачи настоящей работы, не представляет труда. Неизвестные потенциалы U_j определяются по формуле (6). Используя метод, примененный в [12], легко показать, что заряды на проводниках $L_j, j = 1, \dots, m$ даются формулой

$$Q_j = 2\pi \int_{L_j} \mu(t) ds. \quad (8)$$

Здесь следует отметить, что функция $\mu(t)$ определенного физического смысла не имеет. Но соответствующие функционалы (6) и (8) от этой функции уже представляют реальные физические величины.

Если линия открытая, т. е. контур L_0 отсутствует, тогда, согласно общей методике решения видоизмененной задачи Дирихле [9], потенциал $\varphi(x, y)$ следует искать в виде

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t) dt}{t - z} + \sum_{j=1}^n P_j \ln |z - z_j| + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - z} + A, \quad (9)$$

где A — константа, подлежащая определению.

Для определения этой константы следует использовать условие электронейтральности линии, которое в данном случае записывается так:

$$2\pi \sum_{i=1}^m \int_{L_j} \mu(t) ds + \sum_{j=m+1}^n Q_j = 0. \quad (10)$$

Интегральное уравнение получается аналогично уравнению (7), только его следует решать совместно с уравнением (10), чтобы определить константу A . В заключение приведем еще одно представление потенциала, которое удобно использовать при расчетах полосовых линий с полосками малой толщины:

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t) dt}{t - z} + \sum_{j=1}^n \frac{P_j}{\int_{L_j} \sigma_j(t) ds} \int_{L_j} \sigma_j(t) \ln |t - z| ds + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\mu(t) dt}{t - z}, \quad (11)$$

где $\sigma_j(t)$ удовлетворяет таким же условиям, как $\rho_j(t)$, а в остальном — произвольная.

Используя представление (11), задача решается так же, как с представлением (1). Неизвестные заряды и потенциалы определяются по тем же формулам (6) и (8). Удобство представления (11) заключается в том, что при численном решении интегрального уравнения для линии с тонкими проводниками всегда появятся точки, в которых $|z_j - t_0| \rightarrow 0$, и, следовательно, логарифм, входящий в (1), по абсолютной величине в этих точках будет большим. Это может привести к вычислительным погрешностям [12]. Представление (11) от указанного недостатка свободно, но оно и более сложно, чем (1).

В заключение несколько слов о первоисточниках представлений (1) и (11). Эти представления являются своеобразной комбинацией представлений голоморфных функций, которые даны Векуа [13], Мусхелишвили [9] и Шерманом [14]. Поэтому их следовало бы называть представлениями Векуа—Мусхелишвили—Шермана (В.—М.—Ш.).

Таким образом, поставленная задача решена в том смысле, что расчет линий, как и в методике функций Грина, сведен к решению интегрального уравнения. Отличие от метода функций Грина заключается в том, что ядро уравнения — элементарная функция, и, что самое главное, всегда известная в явном виде.

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

Как пример применения выше описанного метода рассчитана пологонная емкость и эффективная диэлектрическая проницаемость полосковой линии, поперечное сечение которой показано на рис. 2. На этом рисунке даны сечения двух вариантов линии *a* и *b*. Как видно из рис. 2, сечение *b* получается из *a* при $p \geq h + t$. При $p = h$ имеем линию с воздушным заполнением, а при $p = 0$ диэлектрик касается заземленной металлической подложки. Полоски линии брались тонкими, поэтому применялось представление потенциала, даваемое формулой (11). Линия рис. 2 открытая, поэтому представление (11) дополнительно будет иметь константу A , аналогично представлению (9). Из-за симметрии линии эта константа была равна нулю, а неизвестную функцию $\mu(t_0)$ было достаточно определить только при $x, y \geq 0$. Интегральное уравнение, к которому приводит представление (11), совпадает с уравнением (7), только везде вместо $\ln(z_j - t_0)$ следует писать

$$\frac{1}{\int_{L_j} \sigma_j(t) ds} \times \times \int_{L_j} \sigma_j(t) \ln(t - t_0) ds. \text{ Функции } \sigma_j(t) \text{ и } \rho_j(t), \text{ входящие в интегральное уравнение, были выбраны равными единице. Для определения } \mu(t) \text{ интегральное уравнение по методу Крылова и Боголюбова [15] заменялось системой линейных уравнений, которая решалась на ЭВМ. На вычислительной стороне не останавливается, так как метод Крылова и Боголюбова достаточно подробно описан в [15], а в остальном использовались стандартные методы вычислительной математики.}$$

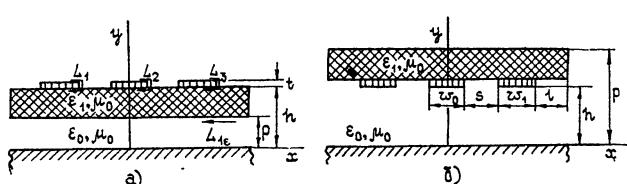


Рис. 2.

Погонная емкость C и эффективная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{\text{эфф}}$ определялись только для средней полоски линии (рис. 2) при двух различных подсоединениях боковых полосок. Первое — боковые полоски заземлены, второе — боковые полоски имеют свободный потенциал. На рис. 3 и 4 дана зависимость погонной емкости (рис. 3) и эффективной диэлектрической проницаемости (рис. 4) от отношения s/h линии с параметрами $w_0 = w_1 = 0,5$, $t = 0,001$, $l = h = 1$, $p = 0$, $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (Φ/m). Эффективная диэлектрическая проницаемость определялась как отношение $\epsilon_{\text{эфф}} = C/C_0$, где C — погонная емкость линии при соответствующем возбуждении, C_0 — емкость той же линии с воздушным заполнением. Номера кривых на рисунках соответствуют подсоединению боковых полосок.

На рис. 4 представлена эффективная диэлектрическая проницаемость только для линии с заземленными боковыми полосками. Когда эти полоски имеют свободный потенциал, эффективная диэлектрическая проницаемость с точностью расчетов не зависит от отношения s/h и равна 6,36. Нужно отметить, что к такому же значению стремится и эффективная диэлектрическая проницаемость линии с заземленными полосками при $s/h \rightarrow \infty$.

Для данной линии достаточно было взять $s/h \geq 2,5$, чтобы как погонная емкость ($C = 125,5$ ($n\Phi/m$)), так и эффективная диэлектрическая проницаемость ($\epsilon_{\text{эфф}} = 6,36$) для обоих подсоединений были равными, т. е. линию рис. 2 можно было рассматривать как состоящую из трех невзаимодействующих микрополосковых линий. Интересной оказалась зависимость погонной емкости от параметра p . На рис. 5 представлены характерные результаты расчета этой зависимости для линии с параметрами $w_0 = w_1 = 0,5$, $t = 0,001$, $l = h = 1$, $s = 0,25$, $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$. Оказалось, что когда $h + 0,2 \geq p \geq h - 0,2$ и боковые полоски заземлены, наблюдается очень сильная зависимость от толщины диэлектрика. Для линии со свободными полосками эта зависимость более плавная. Расчеты показали, что для обоих подсоединений при $p > 3$,

т. е. когда толщина диэлектрической пластиинки для сечения рис. 2б становится большей $2h$, дальнейшее ее увеличение практически не меняет электрических параметров линии. Как следует из рис. 3 и 5, для линии с боковыми полосками, имеющими свободный потенциал, погонная емкость всегда меньше, чем емкость, когда эти полоски заземлены. Последний результат хорошо согласуется с выводом из теоремы Томсона о том, что наличие незаряженных проводников ведет к уменьшению энергии электрического поля [16].

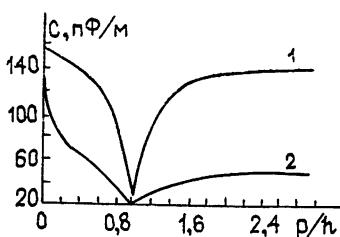


Рис. 5.

уменьшению энергии электрического поля [16].

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА

Теоретические исследования точности численного расчета много связанных линий являются сложными и редко дают практический результат. Поэтому имеет смысл разрабатывать методы оценки точности, основанные на численных экспериментах. В данной работе предложен-

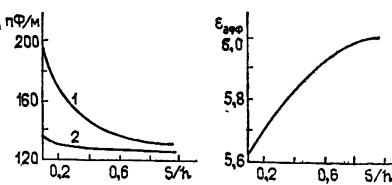


Рис. 3.

Рис. 4.

ный метод открывает некоторые возможности в этом направлении. Идея такой оценки следующая. Метод позволяет независимым способом определить для любой линии как матрицу погонных емкостей \hat{C} (на всех проводниках заданы потенциалы), так и матрицу потенциальных коэффициентов \hat{P} (на всех проводниках заданы заряды). Если соответствующие интегральные уравнения решать точно, то произведение матриц \hat{C} и \hat{P} должно давать единичную матрицу \hat{I} , так как $\hat{P} = \hat{C}^{-1}$ [17]. Из-за приближенного решения интегральных уравнений всегда получается отклонения от единичной матрицы. Эти отклонения и служат критерием точности решения интегральных уравнений. Таким образом, имеет смысл образовать матрицу $\hat{C}\hat{P} - \hat{I} = \hat{\Delta}$, которую естественно назвать матрицей погрешности. Наибольший по модулю элемент этой матрицы и будет давать информацию о наименьшей возможной погрешности. В действительности погрешности могут быть и больше, так как элементы матрицы \hat{C} могут вычисляться увеличенными (уменьшенными), а матрицы \hat{P} — уменьшенными или наоборот, но так, что результат произведения будет близким к единичной матрице.

Другая возможность оценки основана на вычислении матрицы \hat{C} двумя независимыми способами. Как известно [17], матрицу \hat{C} можно определить как коэффициенты следующей системы линейных уравнений:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Если на всех проводниках заданы потенциалы V_j , то (12), используя (8), можно переписать так:

$$2\pi \int_{L_j} \mu(t) ds = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (13)$$

Когда на проводниках заданы заряды, на основе (6) имеем

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \int_{L_j} \rho_j(t) \mu(t) ds. \quad (14)$$

Если удается установить, что решение интегрального уравнения (7) приближается к точному, так что $\int_{L_j} \mu(t) ds$ во всех случаях остается

ограниченным сверху или снизу, то (13) и (14) даст оценку точности сверху и снизу. Если же решение при заданных потенциалах дает ограничение $\int_{L_j} \mu(t) ds$ с одной стороны, а при заданных зарядах — с другой,

тогда, как и с произведением \hat{C} и \hat{P} , можно получить представление только о наименьшей возможной погрешности. Выбор функций $\rho_j(t)$ и $\sigma_j(t)$ на выше приведенные рассуждения не влияет, так как в зависимости от $\rho_j(t)$ или $\sigma_j(t)$, $\mu(t)$ могут измениться только на константу [9]. По выше описанной методике были проведены соответствующие вычисления, которые показали, что метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова работает так, что при заданных потенциалах инте-

грали $\int_L \mu(t) dS$ приближается к точному, оставаясь ограниченным сверху, а при заданных зарядах — снизу. Поэтому указанным методом удалось установить, что точность сильно падает, когда s/h уменьшается. При $s/h = 0,1$ эта точность не выше 4%. С увеличением s/h точность быстро увеличивается, и при $s/h \geq 0,2$ отклонение от единичной матрицы начинает колебаться около 1% и заметно не зависит от s/h . Аналогичный результат дала оценка точности, проведенная, используя (13) и (14).

Выше указанные оценки точности получены, когда интегральное уравнение по методу Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова заменялось системой из 80 линейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Л. Маттей, Л. Янг, Е. М. Т. Джонс, Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи, т. 1, 2, изд. Связь, М., 1971, 1972.
2. А. Т. Фиалковский, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 441 (1976).
3. Фильтры и цепи СВЧ (сб. статей под ред А. Матсумото), изд. Связь, М., 1976.
4. В. С. Ховратович, Радиотехника и электроника, 20, № 3, 468 (1975).
5. R. A. Rusele and D. J. Masse, IEEE Trans., MTT-20, № 5, 304 (1972).
6. А. А. Гительсон, В. Н. Иванов, А. Г. Шугинский, Радиотехника и электроника, 20, № 3, 626 (1975).
7. Л. Г. Малоракций, Микроминиатюризация элементов и устройств СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1976.
8. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.
9. И. Н. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1962.
10. В. П. Ивашка, Ю. А. Лачюс, В. К. Шугуров, Радиотехника и электроника, 22, № 9, 1803 (1977).
11. Р. Миттра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов, изд. Мир, М., 1974.
12. В. П. Ивашка, В. К. Шугуров, Литовский физический сборник, 14, № 3, 507 (1974).
13. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
14. Д. И. Шерман, ПММ, 17, № 6, 685 (1953).
15. Л. В. Конторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959.
17. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, ИЛ, М., 1954.

Вильнюсский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 марта 1977 г.

METHOD OF MODIFIED DIRICHLE PROBLEM TO CALCULATE MULTICONDUCTING LINES

V. P. Ivashka

A method is suggested for the calculation of parameters of multiconducting lines the transverse section of which is filled by a piecewise homogeneous magnetodielectric. It is assumed that a transverse electromagnetic wave (TEM) propagates in the line. The conductor thickness is finite separation boundaries between regions with different magnetodielectrics are arbitrary. The line may be both closed and open. The method permits to calculate the line parameters when the conductor potentials or charges are taken arbitrarily. The calculation is reduced to the solution of a singular integral equation the core of which is built elementary. An example of numerical realization of the method is shown. The estimation of accuracy of numerical results is given.

УДК 621.372.821.2

ВЕТВЛЕНИЕ РЕЖИМОВ И ЭФФЕКТ ОГРАНИЧЕНИЯ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ТЕ-ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ИОНИЗАЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

O. B. Багдасарян, B. A. Пермяков

Показано, что с увеличением амплитуды сильной электромагнитной волны режим однородной плоской волны в ионизирующей среде сменяется режимом ограничения потока энергии, для которого характерна независимость плотности потока энергии волны от амплитуды падающего поля. Переход от одного режима к другому в зависимости от соотношений между амплитудой падающего поля (углом падения волны) и начальной диэлектрической проницаемостью среды может происходить как непрерывно, так и гистерезисным скачком.

1. Целью настоящей работы является изучение стационарных режимов при самовоздействии сильной электромагнитной волны в среде с ионизационной нелинейностью, диэлектрическая проницаемость которой положительна в отсутствие поля и убывает с ростом поля.

Стационарные режимы плоских волн в однородных нелинейных средах рассматривались ранее в ряде работ [1–5], однако интересующий нас случай до сих пор подробно не исследован (за исключением некоторых результатов [5], применимость которых ограничена)**.

Характерной особенностью распространения волн в нелинейных средах является многозначность режимов [4]. В настоящей работе вначале изучены многозначность и ветвление возможных стационарных режимов в неограниченной недиссипативной среде. Далее, путем сопоставления с численными и асимптотическими решениями для среды с малыми потерями выделены те решения для среды без потерь, которые позволяют описать в среде с исчезающими малыми потерями зависимость основных характеристик отраженной и прошедшей волн от параметров падающей волны. Оказывается, что наиболее существенные физические результаты связаны с учетом режимов ограничения потока энергии (ОПЭ).

2. Стационарные режимы в недиссипативной среде. Рассмотрим распространение монохроматической ТЕ-волны

$$E_x(y, z, t) = \frac{1}{2} [u(z) \exp(-ik_0 S(z) - ik_0 hy + i\omega t) + \text{к. с.}] \quad (1)$$

в среде с вещественной проницаемостью $\epsilon(u)$. Интегралы u и S известны при нормальном падении волны [3, 4] и очевидным образом обобщаются на наклонное заменой $\epsilon(u)$ на $\epsilon_{\text{эфф}}(u) = \epsilon(u) - h^2$, где $h = \sin \theta$, θ — угол падения однородной плоской волны. В связи с этим

* Основные результаты работы доложены на VII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн [9].

** После завершения работы мы ознакомились с публикациями [14–16], в которых также вводятся в рассмотрение режимы, названные нами режимами ограничения потока энергии, и кратко обсуждаются связанные с ними гистерезисные переходы.

далее при анализе распространения волн в неограниченной среде мы будем полагать $\theta = 0$ и вернемся к наклонному падению волны при анализе влияния границы.

Для определения условий на бесконечности и выбора решений рассмотрим уравнение [6]

$$\frac{dY}{du} = \frac{M^2 - \epsilon u^4}{u^3 Y}, \quad Y = \frac{du}{dk_0 z}, \quad (2)$$

где M — константа, пропорциональная плотности потока энергии в направлении $z \rightarrow +\infty$ [4]. В дальнейшем нам понадобится также интеграл уравнения (2) [4]

$$\frac{Y^2}{2} + \int_0^u \epsilon(u) u du + \frac{M^2}{2u^2} = W, \quad (3)$$

где W — константа, пропорциональная zz -компоненте тензора потока импульса (подробнее см. [7]).

Ограничимся изучением таких случаев изменения ϵ , для которых уравнение (2) имеет два простых состояния равновесия при $0 < M < M_b$ (центр $-M'(\bar{u}) > 0$ при $\bar{u} < u_b$ и седло $-M'(\bar{u}) < 0$ при $\bar{u} > u_b$), где $M(u) = \sqrt{\epsilon(\bar{u}) \bar{u}^2}$, \bar{u} — координата состояния равновесия и единственное сложное состояние равновесия при $M = M_b$, $\bar{u} = u_b$, $M'(\bar{u}) = 0$. Наибольший интерес при этом представляют монотонно убывающие и переходящие через нулевое значение зависимости ϵ , характерные для ионизирующихся сред (частично ионизованная газовая или полупроводниковая плазма), которые и будут иметься в виду ниже при физической интерпретации результатов, причем при конкретных оценках будет предполагаться кубическая нелинейность: $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_2 u^2$, $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_2 < 0$.

Картинки фазовых траекторий для указанных ϵ [6] приведены на рис. 1.

Все решения (2) делятся на неограниченно растущие при $Y \rightarrow \pm\infty$, периодические, с постоянной амплитудой и сепаратрисы. Решения с постоянной амплитудой точно соответствуют состояниям равновесия (2), т. е., как следует из (1), описывают однородные волны (ОВ) [4]. Сепаратрисами в данной работе мы называем решения, асимптотически стремящиеся к состояниям равновесия при $z \rightarrow \pm\infty$ *.

Установим связь между бесконечно удаленной точкой фазовой плоскости и пространственной координатой. В средах с насыщением ϵ при $u \rightarrow \infty$ ($\epsilon(\infty) < 0$), как и в однородной линейной среде, точке $u = \infty$, $|Y| = \infty$ соответствует $|z| = \infty$. Для степенных законов изменения ϵ с ростом u и более быстрых, чем степенные, бесконечно удаленной точке фазовой плоскости соответствует конечная пространственная координата. Действительно, при $\epsilon \sim -u^n$ и $u \rightarrow +\infty$ из интегральной зависимости $z(u)$ (см. [4]) имеем $Y \sim \pm u^{(n+2)/2}$, $z \sim$

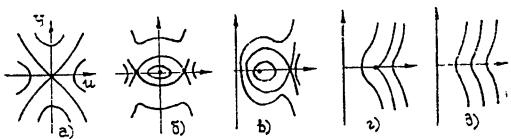


Рис. 1.

* Асимптотика этих решений изучена [3, 4] для простых состояний равновесия.

$\sim z_0 \mp \frac{\sqrt{2(n+2)}}{n} u^{-n/2}$, где z_0 — произвольная константа. Учитывая

это и выбрав $z_0 < 0$, будем рассматривать для всех указанных законов изменения ε решения, удовлетворяющие условию ограниченности поля в полупространстве $z \geq 0$, тем самым мы исключаем из рассмотрения неограниченно растущие при $|Y| \rightarrow \infty$ решения (2) и сепаратрисы, неограниченно растущие при $Y \rightarrow +\infty$.

Примем далее следующую классификацию режимов в нелинейной среде, соответствующую качественно различным картинам фазовых траекторий:

- а) полное внутреннее отражение (ПВО), рис. 1а, $\varepsilon(0) \leq 0, M = 0, W = 0$ и рис. 1б, $M = 0, W \neq 0, \varepsilon(0) > 0$;
- б) режим прохождения, рис. 1в, $0 < M < M_b$;
- в) режим ограничения потока энергии (ОПЭ), рис. 1г, $M = M_b$;
- г) режим просачивания, рис. 1д, $M > M_b$.

Отметим теперь, что плоские ОВ, соответствующие особым точкам типа центр, устойчивы по Ляпунову, а ОВ, соответствующие седлам и сложным состояниям равновесия, — неустойчивы. Эту неустойчивость ОВ мы будем называть пространственной. Она физически проявляется в том, что при распространении неустойчивой ОВ, например, в направлении $z \rightarrow +\infty$ малое возмущение параметров среды, введенное на достаточно большой дистанции l от сечения $z = 0$, приведет к формированию отраженной волны, заметно уклоняющейся по амплитуде от ОВ. На языке фазовых траекторий это означает, что возмущение выведет решение из состояния равновесия на одну из сепаратрис*.

Если исключить из рассмотрения тривиальные решения, то условиям ограниченности поля в полупространстве и пространственной устойчивости удовлетворяют: сепаратрисы, стремящиеся к состоянию равновесия при $z \rightarrow +\infty$ (в режимах ПВО, прохождения и ОПЭ), устойчивая ОВ (в режиме прохождения) и периодические решения (режим ПВО, рис. 1б и режим прохождения). В режиме просачивания не существует решений, удовлетворяющих условиям ограниченности в полупространстве.

Перестройка картин фазовых траекторий происходит при условиях $M'(u_b) = 0, \varepsilon(0) = 0$, определяющих точки ветвления данной динамической системы при изменении какого-либо параметра [8].

Из анализа фазовых траекторий следует, что сформулированным выше условиям при заданной амплитуде поля u в сечении $z = 0$ удовлетворяют единственная устойчивая ОВ (при $0 \leq u < u_b$) и континуальные множества (по параметрам M и W) сепаратрис и периодических решений, причем в рамках модели стационарной недиссилиативной однородной (в отсутствие поля) среды процедура их выбора не определена. Тем не менее, даже в условиях многозначности решений из анализа фазовых траекторий следует общий вывод, что плотность потока энергии распространяющихся волн не превосходит максимальной величины, соответствующей режиму ОПЭ и определяемой условием $M'(u_b) = 0$. Для кубичной нелинейности значения плотности потока энергии в режиме ОПЭ, амплитуды поля и диэлектрической проницаемости на бесконечности определяются условиями [9]

* Отметим, что пространственная неустойчивость ОВ в седловых точках проявляется при численном интегрировании уравнений поля по пространственной координате в среде без потерь на достаточно больших дистанциях интегрирования решение выходит из седловой точки на одну из сепаратрис за счет возмущений, вызванных вычислительной погрешностью.

$$M_b = \frac{\epsilon_0^{3/2}}{3\sqrt{3}a}, \quad u_b = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{3a}}, \quad \epsilon_b = \frac{\epsilon_0}{3}, \quad (4)$$

где $a = -\epsilon_2/2$, а пространственная зависимость амплитуды и фазы поля для сепаратрисы режима ОПЭ с учетом (3), (4) дается формулами

$$u = \sqrt{u_b^2 + \frac{1}{k_0^2 a (z - z_0)^2}}, \quad (5)$$

$$k_0 S = k_0 S_0 + \sqrt{\frac{\epsilon_b}{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2 - u_b^2}} + \frac{1}{u_b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u^2 - u_b^2}{u_b^2}} \right),$$

где z_0 и S_0 — произвольные константы.

3. Стационарные режимы в неограниченной среде с малыми потерями. Для устранения континуальной неоднозначности режимов в недиссипативной среде, следуя [1], рассмотрим распространение волн при учете малых потерь. При этом рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dY}{du} = \frac{M^2 - \epsilon' u^4}{u^3 Y}, \quad \frac{dM}{du} = -\frac{\epsilon'' u^2}{Y}, \quad (6)$$

в случае кубичной нелинейности $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$, $\epsilon' = \epsilon'_0 + \epsilon'_2 u^2$, $\epsilon'' = \epsilon''_0 + \epsilon''_2 u^2$.

Система (6) имеет единственное состояние равновесия: $u = 0$, $Y = 0$, $M = 0$. Решение (6), удовлетворяющее условию убывания поля на бесконечности ($u \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$), при малых амплитудах поля ищется в виде степенных рядов и имеет вид

$$M = n_0 u^2 + \frac{\epsilon'_2 n_0 + 2\epsilon''_2 x_0}{2n_0^2 + 8x_0^2} u^4 + O(u^6), \quad (7)$$

$$Y = -x_0 u + \frac{2\epsilon'_2 x_0 - \epsilon''_2 n_0}{2n_0^2 + 8x_0^2} u^3 + O(u^5),$$

где n_0 и x_0 — показатели преломления и затухания линейной среды ($n_0 - i x_0 = \sqrt{\epsilon'_0 - i \epsilon''_0}$).

Рассмотрим теперь асимптотику (6) при малых потерях. Вводя малый параметр $\alpha = \epsilon''_0$ и функцию $\beta = \epsilon''(u)/\epsilon''_0$ и разлагая Y и M в ряды по степеням α , получим два вида асимптотических разложений:

$$\text{I. } M = M_0 + M_2 \alpha^2 + O(\alpha^4), \quad Y = Y_1 \alpha + Y_3 \alpha^3 + O(\alpha^5), \quad (8)$$

$$\text{где } M_0 = \sqrt{\epsilon'(u)} u^2, \quad Y_1 = -\beta u^2 \frac{du}{dM_0}, \quad M_2 = \frac{u^3 Y_1}{2M_0} \frac{dY_1}{du}, \quad Y_3 = -\frac{Y_1}{2} \frac{dM_2}{dM_0}.$$

$$\text{II. } M = M_0 + M_1 \alpha + O(\alpha^2), \quad Y = Y_0 + Y_1 \alpha + O(\alpha^2), \quad (9)$$

где $M_0 = \text{const}$, Y_0 — решение уравнения (2) ($Y_0 \neq \text{const}$),

$$M_1 = - \int \frac{\beta u^2}{Y_0} du, \quad Y_1 = \frac{2M_0}{Y_0} \int \frac{M_1}{u^3} du.$$

Асимптотика (8) описывает слабозатухающую волну в среде с малыми потерями и положительной вещественной частью ϵ^* . Она пригодна, однако, не при любых $\epsilon'(u) > 0$, а только в области $\epsilon'(u) > \epsilon_b$ ($u < u_b$), так как при $u \rightarrow u_b$ $\frac{dM_0}{du} \rightarrow 0$ и асимптотика (8) теряет смысл.

При $\alpha \rightarrow 0$ асимптотика (8) переходит в устойчивую ОВ в среде без потерь, при $u \rightarrow 0$ согласуется с решением (7).

Перестройка асимптотики (8) в асимптотику (9) происходит в окрестности точки $u = u_b$, ширину которой можно оценить из условия применимости разложения $Y(\alpha)$ в (8) или непосредственно из анализа размерности по α коэффициентов системы (6): $u - u_b \sim \alpha^{2/5}$. Отсюда следует, что в окрестности точки ветвления $M = M_b + O(\alpha^{4/5})$, $Y = O(\alpha^{3/5})$. Используя эти оценки в качестве начальных условий для асимптотики (9), можно определить характер поведения решений в области за точкой ветвления при $\epsilon'_0 > 0$. Асимптотика (9) пригодна также для описания поля в области ПВО при $\epsilon'_0 < 0$. Условие применимости (9) в области больших амплитуд имеет вид $u \ll \alpha^{-1}$.

При численном исследовании полей в среде с потерями оказалось удобным перейти от (6) к системе относительно переменных $Y(M)$ и $u(M)$ **. Начальные условия задавались главными членами рядов (7) с контролем влияния отброшенных членов на точность решения. При построении асимптотик были учтены только члены наименьшего порядка малости по α , в качестве главного члена асимптотики (9) при $\epsilon'_0 > 0$ использовано решение (5), при $\epsilon'_0 < 0$ — решение, соответствующее сепаратрисе режима ПВО, определенное условиями $M_0 = 0$,

$$Y_0 = \int_0^u \epsilon'(u) u du. \quad \text{Результаты расчета } M(u) \text{ (сплошная линия в верхней части рис. 2) и } Y(u) \text{ (сплошная линия в нижней части рис. 2) хорошо согласуются с асимптотикой (8) (крестики) и асимптотикой (9) (кружки) всюду, кроме окрестности точки ветвления. На оси абсцисс}$$

указана также полученная численным интегрированием связь u с координатой z (точке $z = 0$ соответствует значение $u = 0,1$ при $\epsilon'_0 = 1$, $\epsilon'_2 = -1$, $\epsilon''_0 = 10^{-4}$, $\epsilon''_2 = 0$, рис. 2а и $u = 5 \cdot 10^{-3}$ при $\epsilon'_0 = -1$, $\epsilon'_2 = -1$, $\epsilon''_0 = 10^{-4}$, $\epsilon''_2 = 0$, рис. 2б), из которой следует однозначность зависимости $u(z)$ ***.

Поскольку с уменьшением потерь ширина пограничного слоя (по амплитуде u) $u - u_b$ убывает как $\alpha^{2/5}$ и члены высших порядков малости по α в асимптотиках (8), (9) стремятся к нулю, то на основании анализа асимптотических и численных решений можно сделать вывод, что решение для среды с исчезающими малыми потерями описывается следующей «склейкой» решений для среды без потерь:

$$M = \sqrt{\epsilon(u)} u^2, \quad Y = 0 \quad \text{при} \quad u \ll u_b, \quad \epsilon_0 > 0; \quad (10a)$$

* Главный член (8) соответствует приближению, приведенному в [3, 4].

** Эта система в пограничном слое сводится к уравнению для трансцендентной функции Пенлеве. Как сообщил нам А. Е. Каплан, функция Пенлеве была использована им для асимптотического исследования поля при малых потерях.

*** Особое внимание было обращено на возможность существования периодических решений. Интегрирование системы велось методом Рунге—Кутта с абсолютной точностью $10^{-6} \div 10^{-8}$, при выборочном контроле зависимостей $M(z)$, $u(z)$, $Y(z)$ с шагом, малым по сравнению с длиной волны в среде. Пространственные осцилляции этих функций по порядку величины не выходили за пределы точности. Поэтому ниже мы будем говорить о непериодических зависимостях $M(z)$, $u(z)$, $Y(z)$, имея в виду ограниченность этого утверждения рамками точности расчетов.

$$M = M_b, \quad Y = -\frac{\sqrt{a}(u^2 - u_b^2)^{3/2}}{u} \quad \text{при } u \geq u_b, \quad \epsilon_0 > 0; \quad (10b)$$

$$M = 0, \quad Y = \int_0^u \epsilon(u) u du \quad \text{при } u \geq 0, \quad \epsilon_0 \leq 0. \quad (10c)$$

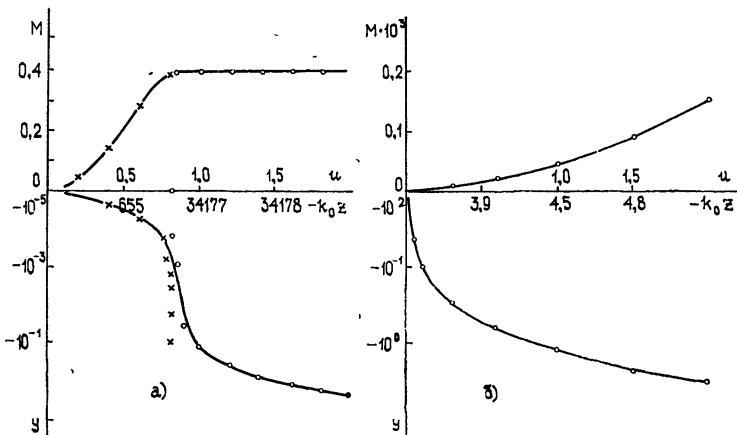


Рис. 2.

Решение (10) является однозначной функцией u , т. е. явление континуальной многозначности решений полностью устраняется введением малых потерь, при этом исключаются следующие решения для недиссипативной среды: пространственно неустойчивые ОВ, периодические решения и все сепаратрисы, за исключением сепаратрисы режима ОПЭ при $\epsilon_0 > 0$ и сепаратрисы режима ПВО при $\epsilon_0 \leq 0$. Отметим, что решения типа ОВ (10a) и ПВО (10b) переходят в соответствующие решения для однородной среды при $u \rightarrow 0$. Решение, соответствующее режиму ОПЭ (10b), является существенно нелинейным.

4. Рассмотрим теперь влияние границы раздела на поведение отраженного и прошедшего в среду полей при исчезающие малых потерях в среде, когда можно использовать аналитическое решение (10). При этом будем анализировать наклонное падение волны, учитывая, что все приведенные выше соотношения (2) \div (10) переносятся на наклонное падение заменой $\epsilon(u)$ на $\epsilon(u) - h^2$, где $h = \sin \theta$.

Коэффициент отражения $r = R \exp(i\varphi)$ и амплитуда E_0 падающей из свободного пространства волны связаны с амплитудой поля на границе среды и ее производной:

$$r = R \exp(i\varphi) = \frac{u^2 \sqrt{1 - h^2} - M - iuY}{u^2 \sqrt{1 - h^2} + M + iuY}; \quad (11)$$

$$E_0 = \frac{u^2 \sqrt{1 - h^2} + M + iuY}{2u \sqrt{1 - h^2}} e^{ik_0 S_0}. \quad (12)$$

В (12) S_0 — фазовый сдвиг прошедшего поля, выбираемый из условия $\operatorname{Im} E_0 = 0$.

В зависимости M и R от E_0 (рис. 3), помимо точки ветвления,

определенной условиями (4) и (12), появляются петли гистерезиса, содержащие неустойчивые участки (временная неустойчивость)*.

Для кубической нелинейности амплитуда поля в среде в точке начала гистерезиса u_{g1} определяется выражением

$$u_{g1}^2 = -\frac{1}{8\varepsilon_2} [4\varepsilon_0 - 3h^2 - 1 + \sqrt{8(1-h^2)(\varepsilon_0-h^2)+(1-h^2)^2}] . \quad (13)$$

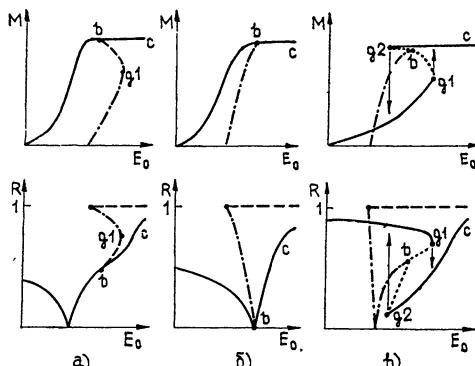


Рис. 3.

Для того, чтобы наглядно описать зависимости потока энергии прошедшей волны и коэффициента отражения от параметров падающего поля, будем обозначать кривые $M(E_0)$ и $R(E_0)$ в области временной устойчивости сплошными линиями, а в областях временной неустойчивости — пунктиром. Кроме того, на рис. 3 показана и нереализуемая ветвь решения, соответствующая пространственно неустойчивой ОВ (штриховой линией для области временной устойчивости и штрихпунктиром для области времен-

ной неустойчивости). Последнее позволяет наглядно проследить перестройку режимов при изменении E_0 , поскольку характер перестройки меняется в зависимости от соотношения между амплитудами поля в среде, соответствующими точке ветвления (u_b) и точке гистерезиса (u_{g1}), точка ветвления разделяет ветви пространственно устойчивой и неустойчивой ОВ, а точка гистерезиса перемещается по этим ветвям при изменении параметров падающего поля.

С ростом E_0 в зависимости от соотношения между амплитудами поля u_b и u_{g1} на границе среды следует различать три случая. При $u_b < u_{g1}$ ($E_b > 0$, $\theta < \arcsin \sqrt{\varepsilon_0}$ при $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, $E_b > E_f = \sqrt{(1-\varepsilon_0)/\varepsilon_2}$, $\theta < \theta_f = \arcsin \sqrt{(3-\varepsilon_0)/2}$ при $1 < \varepsilon_0 < 3$), когда точка ветвления достигается раньше точки гистерезиса, переход от режима пространственно устойчивой ОВ к режиму ОПЭ непрерывен по M и R (рис. 3а)**. Случай $u_b = u_{g1}$ является промежуточным, ему соответствует полное просветление среды при совпадении амплитуд поля для точки гистерезиса и точки ветвления***, при этом $\varepsilon(u) = 1$, $R = 0$, когда $E_0 = E_f$, $\theta = \theta_f$ (рис. 3б) и переход от устойчивой ОВ к режиму ОПЭ также непрерывен. Наконец, при $u_b > u_{g1}$ ($E_{g1} > E_f$, $\theta > \theta_f$ при $1 < \varepsilon_0 < 3$, $\theta \geq 0$ при $\varepsilon_0 > 3$) раньше точки ветвления достигается точка временной неустойчивости и переход в режим ОПЭ и обратно происходит гистерезисными скачками (рис. 3в).

Физический смысл режима ОПЭ наглядно вскрывается при анализе неоднородного распределения $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_z u^2(z)$, формирующегося в среде под действием поля (см. (5) и рис. 2а). С ростом амплитуды поля проницаемость среды вблизи границы убывает, переходя через нуль и принимая большие отрицательные значения (растет кон-

* Все приведенные в настоящем пункте зависимости $M(E_0, \theta)$, $R(E_0, \theta)$ носят качественный характер, поскольку количественные оценки дают малые и ненаглядные в изображении области гистерезиса.

** Зависимость $R(E_0)$ на рис. 3а приведена для случая $1 < \varepsilon_0 < 3$.

*** Просветление среды и гистерезисы при переходе от ОВ к ПВО изучались в [5] без учета режима ограничения потока энергии.

центрация электронов в плазме), т. е. поле создает себе все больший барьер для проникновения в среду. В результате приращение потока энергии падающей волны компенсируется отражением, а плотность потока энергии в среде, величины прошедшего поля и проницаемости на бесконечности остаются неизменными. Аналогичный эффект уменьшения глубины проникновения поля с ростом его амплитуды в среде с ионизационно-рекомбинационной нелинейностью отмечался в [2], однако прохождение поля при этом отсутствовало, так как изучался случай $\epsilon(0) < 0$.

Поясним подробнее случай гистерезиса. Анализ показывает, что гистерезисный переход в режим ОПЭ наступает, когда $\epsilon_{\text{эфф}}(u_b) > \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}0}} = 1 - h^2$, где $\epsilon_{\text{эфф}0}$ имеет смысл эффективной проницаемости свободного пространства для наклонно падающей волны, т. е. когда нелинейная среда при значении ϵ в точке ветвления остается оптически более плотной, чем линейное полупространство. В частности, для кубической нелинейности при $\theta = 0$ $\epsilon_0 > 3$, $\epsilon(u_b) > 1$. При этом с ростом E_0 проницаемость среды убывает, приближаясь к единице, коэффициент отражения падает, что приводит к росту производных коэффициента отражения и потока энергии, пока не наступают скачки отраженного и прошедшего полей.

С уменьшением амплитуды падающего поля переход из режима ОПЭ к ОВ происходит в точке $g2$ (рис. 3в), в которой достигается минимально возможное значение коэффициента отражения — ему соответствует профиль $\epsilon(u)$ с граничным значением $\epsilon(u_{g2}) = 1$. Приведем значение амплитуды внутреннего поля и его производной в точке $g2$:

$$u_{g2} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon_0}{\epsilon_2}}, \quad Y_{g2} = -\frac{\sqrt{a}}{u_{g2}}(u_{g2}^2 - u_b^2)^{3/2}, \quad (14)$$

которые совместно с (12) определяют амплитуду падающего поля E_{g2} , соответствующую гистерезисному скачку из режима ОПЭ в режим ОВ.

Зависимости M и R от θ (рис. 5) оказываются более сложными по сравнению с аналогичными зависимостями от E_0 , так как с изменением θ меняется не только нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости среды, но и линейные характеристики системы.

При анализе зависимостей R и M от θ целесообразно одновременно рассматривать поведение проекций на плоскость E_0, θ (рис. 4) линий ветвления $E_b(\theta)$ (сплошная линия) и линий скачков $E_{g1}(\theta)$ (штриховая), $E_{g2}(\theta)$ (штрих-пунктир), определенных соотношениями (4), (13), (14) совместно с (12). Укажем наиболее характерные случаи. При $\epsilon_0 \leq 1$ и $E_b(0) > E_0 > 0$ с ростом θ происходит непрерывный переход от ОВ к ОПЭ на линии $E_b(\theta)$ и от ОПЭ к ПВО на линии $\theta = \arcsin \sqrt{\epsilon_0}$ (рис. 4 и 5а). При $3 > \epsilon_0 > 1$ и $E_b(0) > E_0 > E_f$ вначале ($\theta < \theta_f$) имеет место непрерывный переход от ОВ в режим ОПЭ на линии $E_b(\theta)$, затем ($\theta > \theta_f$) гистерезисный скачок из режима ОПЭ к ОВ на линии $E_{g2}(\theta)$ (рис. 4 и 5б). С уменьшением θ от скользящих углов к нормальным гистерезисный переход из режима ОВ в режим ОПЭ происходит на линии $E_{g1}(\theta)$. Наконец, при $E_0 > E_b(0)$, $3 \geq \epsilon_0 > 1$

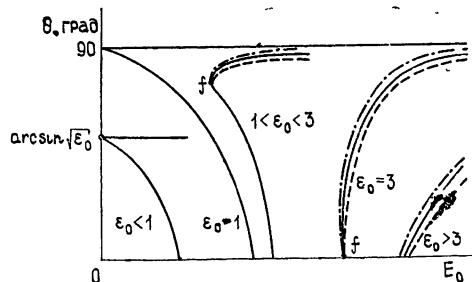


Рис. 4.

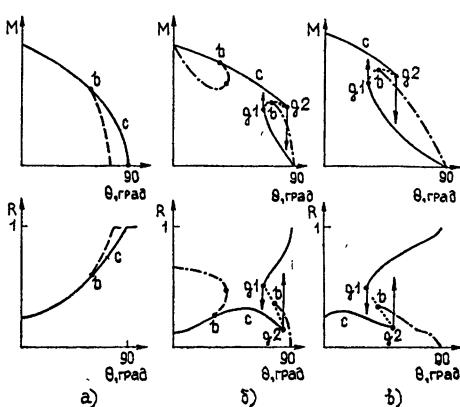


Рис. 5.

параметрами $\epsilon'_0 = 10$, $\epsilon'_2 = -1$, $\epsilon''_0 = 10^{-4}$, $\epsilon''_2 = 0$ (рис. 6б). Область гистерезиса выделена на рис. 6б крупным планом в масштабе 4:1. Аналитическое решение ($10 \div 12$) (крестики) с графической точностью согласуется с численными результатами (сплошная линия). Отметим, что ранее [9] нами был применен другой метод расчета уравнений поля по пространственной координате z с заданием начальных условий поля с помощью асимптотики слабозатухающей волны в среде с малыми потерями [4]. Результаты расчетов M и R обоими методами согласуются при выборе дистанции интегрирования l в методе [9] порядка длины волны и более.

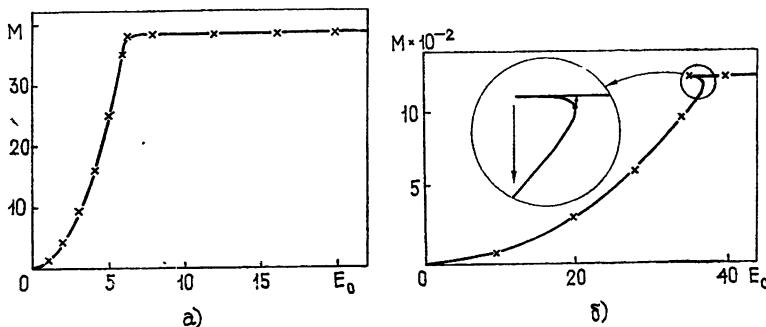


Рис. 6.

6. Мы рассмотрели описание процессов стационарного отражения и преломления плоской волны в нелинейной среде с малыми потерями в предположении адиабатического изменения параметров падающего поля во времени. Обоснование применимости полученных результатов для квазимохроматических полей и, в частности, условий адиабатичности поля в неограниченной среде требует нестационарного рассмотрения*. Ограничимся ниже качественными оценками. Из уравнения параболического типа

$$-2i \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon E = 0$$

* На необходимость обоснования условий адиабатичности поля в неограниченной среде обратил наше внимание С. М. Рытов.

и $E_0 > E_{g1}(\theta)$, $\epsilon_0 > 3$ существует только гистерезисный переход из режима ОВ в режим ОПЭ и обратно с изменением θ (рис. 4 и 5в).

5. Выявленные выше закономерности отражения прохождения плоской волны были подтверждены численными экспериментами для среды с малыми потерями, проведенными по методике, описанной в п. 3. В качестве примера приведем результаты расчетов плотности потока энергии, прошедшей в полупространство с параметрами $\epsilon'_0 = 1$, $\epsilon'_2 = -1$, $\epsilon''_0 = 10^{-4}$, $\epsilon''_2 = 0$ (рис. 6а) и с па-

для квазимохроматической волны с комплексной амплитудой $E(z, t) = u(z, t) \exp(-ik_0S(z, t))$ получим следующие условия применимости стационарного рассмотрения:

$$\epsilon''(u) \gg \left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} \right|, \quad (15)$$

$$M^2 - \epsilon'(u) u^4 \gg u^4 \left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial S}{\partial t} \right|.$$

Так как для стационарной задачи в среде с потерями $M^2 - \epsilon' u^4 = u^3 Y \frac{dY}{du} > 0$ (см. асимптотику (8) и результаты расчета рис. 2), а $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} \frac{du}{dE_0}$, где $E_0(t)$ — амплитуда падающего поля, то условия (15) могут быть выполнены при малых потерях, если $\frac{dE_0}{dt} \rightarrow 0$,

и гистерезисы в среде отсутствуют $\left(\left| \frac{du}{dE_0} \right| < \infty \right)$. В случае гистерезисов $\frac{du}{dE_0} \rightarrow \infty$ и условия (15) нарушаются. Таким образом, предварительные оценки показывают, что результаты настоящей работы должны быть справедливы для квазимохроматических полей в случае непрерывного перехода от одного режима к другому. Вместе с тем, необходим и детальный анализ нестационарных явлений в ионизирующих средах, который должен основываться на теории нестационарных нелинейных волн [10, 11] и требует самостоятельного исследования. В этом аспекте полученные результаты можно рассматривать как необходимый этап дальнейшего нестационарного рассмотрения.

В заключение укажем, что эффект ограничения уровня прошедшего поля является общим свойством сред с ионизационной нелинейностью, не зависящим от конкретного механизма ионизации. Как показывают расчеты, он имеет место и для слоев конечной толщины [9]. Таким образом, среда в режиме ОПЭ представляет собой распределенный аналог нелинейных ограничителей на сосредоточенных элементах.

Известно, что эффект ограничения прошедшей мощности лежит в основе работы газовых СВЧ-разрядников [12], а также наблюдается при СВЧ-разряде вблизи излучающих систем [13].

Однако до сих пор детальный анализ этого эффекта не проводился с помощью нелинейных электродинамических моделей без конкретизации механизмов нелинейности. Поэтому результаты настоящей работы могут быть полезны при анализе с общих позиций различных экспериментальных данных по воздействию мощного электромагнитного излучения на вещество, в частности, по стационарному бездиффузионному СВЧ и оптическому разряду в газе и пробою полупроводников СВЧ-полем.

Авторы выражают глубокую благодарность С. М. Рытову, В. Б. Гильденбургу, А. Г. Литваку, В. И. Таланову за полезные замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, 1662 (1967).
2. М. А. Либерман, А. Т. Рахимов, ЖЭТФ, 61, 1047 (1971).
3. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Изв. вузов — Радиофизика, 11, 1480 (1968).

4. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда, изд. Наука, М., 1975
5. А. Е. Каплан, Письма в ЖЭТФ, 24, 132 (1976); ЖЭТФ, 72, 1710 (1977).
6. О. В. Багдасарян, В. А. Пермяков, Труды МЭИ, вып. 301, 71 (1976)
7. Б. Я. Зельдович, Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, № 5, 20 (1970).
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959
9. В. А. Пермяков, О. В. Багдасарян, Теория дифракции и распространения волн, изд. АН СССР, М., т. 1, 1977, стр. 139.
10. И. А. Горшков, Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ТИИЭР, 62, № 11, 113 (1974).
11. Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Нелинейные и нестационарные волны, изд. РПТИ, Рязань, 1975
12. Резонансные разрядники антенных переключателей (под ред. И. В. Лебедева), изд. Сов. радио, М., 1976
13. W. C. Taylor, W. E. Scharffman and T. Morita, Adv. Microwave, 7, 59 (1971).
14. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, Резонансные взаимодействия света с веществом, изд. Наука, М., 1977.
15. Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ, 3, № 12, 583 (1977)
16. Н. Н. Розанов, Письма в ЖТФ, 4, № 2, 74 (1978).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
15 февраля 1977 г.,
после доработки
9 марта 1978 г.

REGIME BRANCHINGS AND THE EFFECT OF THE ENERGY FLUX LIMITATION OF A TE WAVE IN A MEDIUM WITH IONIZATION NONLINEARITY

O. V. Bagdasaryan, V. A. Permyakov

It is shown that with the amplitude increase of a strong electromagnetic wave the regime of a homogeneous plane wave in the ionization medium is replaced by the regime of the energy flux limitation. The independence of the wave energy flux density on the amplitude of an incident field is characteristic of this regime. The transition from one regime to the other depending on the relation between the amplitude of the incident field (the angle of the wave incidence) and the initial dielectric permittivity of the medium may occur both continuously and with a hysteresis jump.

УДК 621.3 032 266

ТРАЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОТЯЖЕННЫХ ВИНТОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С УЧЕТОМ СИЛ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг

Описан траекторный анализ интенсивных винтовых электронных пучков, базирующийся на методе вспомогательных источников. Исследован механизм возникновения разброса скоростей под действием сил пространственного заряда. Определена конфигурация электродов пушки, формирующей квазиламинарный винтовой пучок с существенно пониженным разбросом осцилляторных скоростей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Увеличение разброса осцилляторных скоростей под влиянием сил объемного заряда является основным фактором, ограничивающим силу тока винтовых электронных пучков мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) [1]. В магнетронно-инжекторных пушках, которые преимущественно используются в МЦР, этот эффект становится заметным уже при токе порядка 0,1 ленгмюровского тока соответствующего диода [2]. Ослабление указанного фактора путем оптимизации геометрии электродов и распределения магнитного поля открывает возможности существенного увеличения полезного тока.

Сложность подобной оптимизации обусловлена неадиабатическим распределением поля объемного заряда, что делает неприменимой дрейфовую теорию пушек МЦР [3]. Поэтому необходимые детали механизма возникновения разброса скоростей под действием сил объемного заряда может дать только численный траекторный анализ. При выборе вычислительного алгоритма важное значение имеет возможность расчета протяженных пучков, в которых расстояние от катода до границы области формирования* более чем на порядок превышает среднюю длину шага винтовой траектории. Подобные пучки реализуются, например, в следующих системах.

1) Пушки с большим отношением расстояния катод — анод к высоте первого максимума электронной траектории.

2) Системы с резко нарастающим осевым магнитным полем или большим углом наклона магнитного поля к поверхности катода.

3) Двухпотенциальные магнетронно-инжекторные пушки.

Использование в перечисленных случаях метода сеток [4] встречает определенные трудности. Например, в случае 1) снижение высоты 1-го максимума в n раз при заданном расстоянии катод — анод приводит к необходимости увеличения числа узлов разностной сетки в n^2 раз, поскольку для сохранения точности число узлов на один виток должно поддерживаться постоянным. Вместе с тем, уже для режимов, близких

*За область формирования принимается примыкающая к инжектору часть электронно-оптической системы, за пределами которой возмущения поперечного адиабатического инварианта $J_{\perp} = v_{\perp}^2/B$ пренебрежимо малы.

к критическому, метод сеток по объему требуемой оперативной памяти находится на пределе возможностей ЭВМ типа М-220 и БЭСМ-6.

Более эффективными оказываются метод интегральных уравнений и особенно метод вспомогательных зарядов (источников) Овчарова и Вашковского [5], в котором искомое распределение плотности заряда на электродах аппроксимируется с помощью вспомогательных кольцевых зарядов, размещаемых за электродами. Существенная экономия машинного времени, требуемого при интегрировании уравнений движения, достигается введением прямоугольной сетки, покрывающей электронный пучок. В этом случае сначала вычисляется потенциал поверхностных и объемных зарядов в узлах сетки, а компоненты электрического поля в точках траекторий находятся интерполированием. Операция интерполирования, кроме того, выполняет роль алгоритма усреднения, снижающего ошибки дискретизации пространственного заряда.

Ниже кратко описан метод расчета и приведены результаты траекторного анализа нескольких конкретных систем, указывающие на возможности существенного снижения разброса скоростей.

2. УРАВНЕНИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Траекторный анализ проводится путем решения системы уравнений движения, уравнения Пуассона и уравнения непрерывности, которые при типичном для МЦР условии аксиальной симметрии имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &\rightarrow r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{E_r}{2} + r \frac{d\varphi}{dt} B_z, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{1}{r} \left(B_r \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dr}{dt} - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{E_z}{2} - r \frac{d\varphi}{dt} B_r;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\rho; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla U. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) написаны для положительно заряженных частиц в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} r &= \frac{r'}{R'_0}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\eta' U'_0}} \frac{dr'}{dt'}, \quad t = \frac{\sqrt{2\eta' U'_0}}{R'_0} t', \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}' \frac{R'_0}{U'_0}, \quad U = \frac{U'}{U'_0}, \quad \eta' = \frac{e'}{m'}, \quad B = \frac{\eta' R'_0 B'}{\sqrt{2\eta' U'_0}}, \\ \rho &= \frac{\rho' R'^2_0}{\epsilon'_0 U'_0}, \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}' R'^2_0}{\epsilon'_0 \sqrt{2\eta' U'_0}}. \end{aligned}$$

Здесь штрихованные величины размерны, R'_0 и U'_0 — соответственно радиус катода и потенциал анода, \mathbf{E}' — напряженность электрического поля, t' — время, B' — магнитная индукция, η' — удельный заряд элек-

трана, ρ' и j' — плотности пространственного заряда и тока, ϵ'_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Введем N вспомогательных кольцевых зарядов q_i вблизи электродов [5] и заменим поток набором p трубок тока с дальнейшим разбиением каждой трубки тока на n участков (каждый протяженностью Δz). Тогда потенциал

$$U = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^M \frac{Q_m K(t_m)}{\sqrt{(r+r_m)^2 + (z-z_m)^2}} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^N \frac{q_i K(t_i)}{\sqrt{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \quad (5)$$

где $Q_m = \Delta J_k \Delta t$ — заряд участка Δz , помещенный в его среднюю точку v_m , z_m (ΔJ_k — величина тока в k -й трубке тока, Δt — время прохождения частей отрезка Δz), r , z и r_i , z_i — координаты точек наблюдения и вспомогательных зарядов соответственно, $K(t)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $M = pn$ — общее число кольцевых объемных зарядов;

$$t_i^2 = \frac{4rr_i}{(r+r_i)^2 + (z-z_i)^2}, \quad t_m^2 = \frac{4rr_m}{(r+r_m)^2 + (z-z_m)^2}.$$

Величины вспомогательных зарядов q_i вычисляются из (5) по известному распределению объемных зарядов Q_m и заданным потенциалам в соответствующем числе точек на поверхности электродов.

Решение (1)–(4) проводится методом последовательных приближений. На нулевой итерации электронные траектории находятся без учета поля объемного заряда*. На каждом последующем приближении поле объемного заряда определяется по траекториям, найденным на предыдущей итерации. Процесс заканчивается, когда максимальная разность координат концевых точек траекторий, взятая по двум последующим итерациям, оказывается меньше заданной величины, которая выбиралась равной 0,25 шага сетки. При этом отношение максимальной разности координат к ларморовскому диаметру в конце траектории не превышает 10%**.

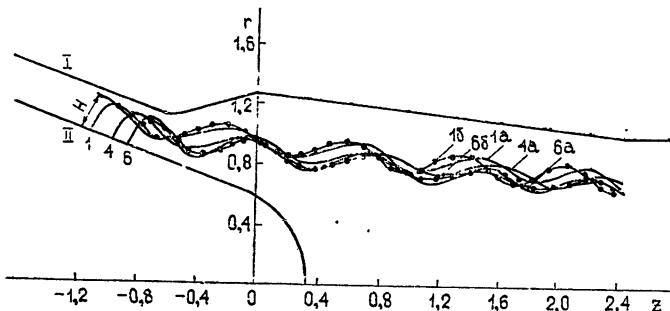


Рис. 1. Конфигурация электродов и электронные траектории в типичной пушке МЦР:
а) сплошная кривая — $t_j = 0$, б) кружки — $t_j = 0,1$.

При вычислении электрического поля в правых частях уравнений движения (1) область, занятая пучком, покрывается вспомогательной прямоугольной сеткой с шагами h_r и h_z по соответствующим направлениям. Ориентировочные размеры сеточной области определяются по средней магнитной силовой линии и высоте H первого максимума элек-

* Расчет магнитного поля и интегрирование уравнений движения выполняется по методике [6].

** Указанное отношение далее принято в качестве величины погрешности траекторного анализа.

тронных траекторий. В первом приближении, следующем из адиабатической теории пушек МЦР [7], ведущие центры перемещаются по магнитным силовым линиям, выходящим из начальных точек каждой траектории. Тогда границы сеточной области параллельны магнитным силовым линиям, проходящим через края эмиттера, и отстоят от указанных силовых линий на расстояния, несколько превышающие H (рис. 1).

При заданных размерах анализируемой области объем оперативной памяти и время вычислений, необходимые для реализации всего алгоритма, зависят от величин Δz , h_r и h_z и числа трубок тока, которые, в свою очередь, определяются характером поставленной задачи. Как показано в [3], основной вклад в разброс скоростей вносит своеобразный резонансный механизм (см. [4]), обусловленный упорядоченным пересечением электронных траекторий. При этом действие объемного заряда накапливается за время, составляющее несколько циклотронных периодов. Поэтому для адекватного описания механизма возникновения скоростного разброса целесообразно включить в вычислительный алгоритм операции усреднения, а при выборе шага сетки использовать в качестве масштаба малости радиус ларморовской окружности в анализируемой области. Размеры сетки, в свою очередь, определяют и выбор Δz . Увеличение Δz при сохранении h_r и h_z приводит к возрастанию ошибок дискретизации*, тогда как уменьшение Δz до значений $\Delta z \ll h_r$, h_z не дает увеличения точности, поскольку электрическое поле определяется квадратичным интерполированием по узлам вспомогательной сетки. Эта операция усредняет поле пространственного заряда по объему нескольких ячеек сетки. Отметим, что, поскольку потенциал вспомогательных зарядов на электродах вычисляется в узлах сетки практически точно, увеличение шага сетки сравнительно слабо снижает точность расчета электрического поля поверхностных зарядов, пока $h_r/H \sim 0,1$.

Конкретные величины параметров сетки и числа разбиений пучка на дискретные элементы выбирались с помощью численных экспериментов на модели пушки рис. 1, которая рассматривалась в [9], что позволяет провести сравнение с методом сеток (см. разд. 3). Результаты расчетов подтверждают, что сходимость итерационного процесса существенно зависит от соотношения между Δz и $h_z \approx h_r$. В частности, выбор Δz меньшим или незначительно превышающим h_z гарантирует при соответствующих h_z достаточную точность (см. разд. 3) уже на второй итерации. Увеличение Δz или уменьшение h_z до значений, соответствующих $\Delta z \approx 2h_z$, приводит к быстрому ухудшению точности.

Если принять в качестве допустимой указанную выше погрешность (порядка 10% при $t_j = 0,1^{**}$), то максимальные размеры сетки составляют $h_z = 0,08$, $h_r = 0,05$ при использовании шести трубок тока. Удвоение числа трубок тока при сохранении размеров сетки практически не сказывается на величине погрешности (см. примечание к стр. 1365).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ТРАЕКТОРНОГО АНАЛИЗА ПУШЕК МЦР

а) Система, изображенная на рис. 1. В табл. 1 приведены результаты расчета системы рис. 1 методом вспомогательных зарядов (верх-

* Сошлемся на указанную в [8] альтернативу между правильным описанием взаимодействия машинных частиц и правильным описанием их движения. В рассматриваемой здесь задаче функции машинных частиц выполняют кольцевые заряды, появляющиеся при разбиении трубок тока.

** Параметр пространственного заряда $t_j = J/J_{\text{л}}$, где J — ток пучка, $J_{\text{л}}$ — ленгмюровский ток диодного промежутка. При $t_j = 0,1$ разброс осцилляторных скоростей в модели рис. 1 достигает примерно 30% (ср. с 9% при $t_j = 0$ (см. разд. 3)).

ние строки) и методом сеток (нижние строки). Число трубок тока для обеих систем выбиралось одинаковым и равным шести. Каждая трубка тока разбивалась на 40 участков длиной $\Delta z = 1,1 h_z$. Использование указанных в табл. 1 величин h_r и h_z приводит к погрешности, меньшей 6%, уже после второй итерации. В таблице указаны также конечные величины осцилляторных скоростей ($v_{\perp m}$) для каждой из шести трубок тока; E_{r_k} и E_{z_k} — компоненты электрического поля на катоде, $v_{\perp a}$ — величина осцилляторной скорости, согласно адиабатической теории МЦР [7], равная

$$v_{\perp a} = \frac{E_{\perp k}}{B_k} \sqrt{\alpha}, \quad (6)$$

что справедливо, если электрическое поле в области инжектора слабо-неоднородно. В (6) B_k — магнитная индукция на катоде, $E_{\perp k}$ — перпендикулярная к B_k компонента электрического поля, α — отношение конечной магнитной индукции к B_k . Значения $E_{\perp k}$ находились из результатов траекторного анализа. Последний столбец представляет разброс скоростей δv_{\perp} , определенный как отношение максимальной разности осцилляторных скоростей к средней осцилляторной скорости \bar{v}_{\perp} (по шести трубкам тока).

Таблица 1

$h_r = 0,05, h_z = 0,08, n = 40, \Delta z = 0,088$

| t_j | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | \bar{v}_{\perp} | δv_{\perp} |
|-------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------------|--------------------|
| 0 | E_{r_k} | 1,0766 | 1,0826 | 1,1171 | 1,1216 | 1,1273 | 1,1443 | | |
| | | 1,0710 | 1,0840 | 1,0980 | 1,1100 | 1,1200 | 1,180 | | |
| | E_{z_k} | 0,3971 | 0,4002 | 0,4007 | 0,4125 | 0,4125 | 0,4082 | | |
| | | 0,3940 | 0,4010 | 0,4040 | 0,4080 | 0,4100 | 0,4110 | | |
| | $v_{\perp m}$ | 0,291 | 0,275 | 0,267 | 0,266 | 0,271 | 0,284 | 0,276 | 9% |
| | $v_{\perp a}$ | 0,294 | 0,278 | 0,270 | 0,270 | 0,276 | 0,290 | 0,280 | 9% |
| 0,1 | E_{r_k} | 1,0399 | 1,0334 | 1,0575 | 1,0576 | 1,0626 | 1,0804 | | |
| | | 1,0310 | 1,0340 | 1,0410 | 1,0480 | 1,0580 | 1,0670 | | |
| | E_{z_k} | 0,3834 | 0,3834 | 0,3813 | 0,3888 | 0,3909 | 0,3876 | | |
| | | 0,3760 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3850 | 0,3890 | 0,3950 | | |
| | $v_{\perp m}$ | 0,308 | 0,268 | 0,246 | 0,225 | 0,225 | 0,248 | 0,254 | 32,7% |
| | $v_{\perp a}$ | 0,324 | 0,288 | 0,255 | 0,234 | 0,236 | 0,256 | 0,265 | 34% |

Согласно табл. 1 оба метода дают близкие (для δv_{\perp} — практически одинаковые) результаты. При токе пучка, соответствующем $t_j = 0,1$, разброс скоростей возрастает в среднем в 4 раза по сравнению с $t_j = 0$ и превышает 30%. Величины δv_{\perp} , получаемые обоими методами, сильно отличаются от определяемых по «адиабатической» формуле (6). Последняя (ср. табл. 1) даже при подстановке величин $E_{\perp k}$, взятых из численного расчета, не дает заметного роста разброса скоростей под действием сил пространственного заряда.

Аналогичные расчеты показывают, что дальнейшее увеличение тока вызывает прогрессирующее снижение осцилляторной средней скорости и возрастание разброса δv_{\perp} (при $t_j = 0,2 \delta v_{\perp} = 67\%$, $\bar{v}_{\perp} = 0,225$, при $t_j = 0,3 \bar{v}_{\perp} = 0,196$, $\delta v_{\perp} = 110\%$ — ср. с табл. 1).

Согласно данным табл. 1 в распределении осцилляторных скоро-

стей по длине эмиттера имеется минимум. Повышение тока пучка смещает минимум к правому концу, что объясняется экранирующим действием дрейфующего вправо электронного пучка.

С увеличением t_j сходимость достигается на большем числе итераций (на 3-й и 4-й при $t_j = 0,2$ и $0,3$ соответственно). В отличие от метода конечных разностей [4] каждая итерация (кроме, естественно, нулевой) требует одинакового времени счета и при указанных выше параметрах вспомогательной сетки занимает на ЭВМ типа БЭСМ-4 около 30 мин. Отметим, что траекторный анализ с 12 трубками тока не дает существенных различий с $p = 6$ и при $t_j = 0,3$.

б) Пушки с малой высотой первого максимума электронных траекторий. В ряде случаев (особенно для электронно-оптических систем МЦР коротковолновой части миллиметрового диапазона и субмиллиметрового диапазона длин волн) целесообразно использовать пушки, в которых высота H подъема электронов над поверхностью эмиттера значительно меньше расстояния d катод — анод. Одна из подобных систем* и центральные траектории трех (из шести) трубок тока показаны на рис. 2. Как видно, здесь $t_h \equiv H/d \sim 0,2 \div 0,3$. Длина анализируемой области, за пределами которой можно считать движение электронов происходящим в слабонеоднородном магнитном поле, т. е. удовлетворяющим условию сохранения поперечного адиабатического инварианта, здесь составляет около восьми периодов (см. рис. 2). Для траекторного анализа подобной системы методом конечных разностей с постоянным шагом сетки во всей области понадобилось бы около $4 \cdot 10^4$ узлов, что соответствует объему оперативной памяти примерно 10^6 . Численная реализация метода вспомогательных зарядов в применении к обсуждаемой задаче требует $8 \cdot 10^3$ ячеек.

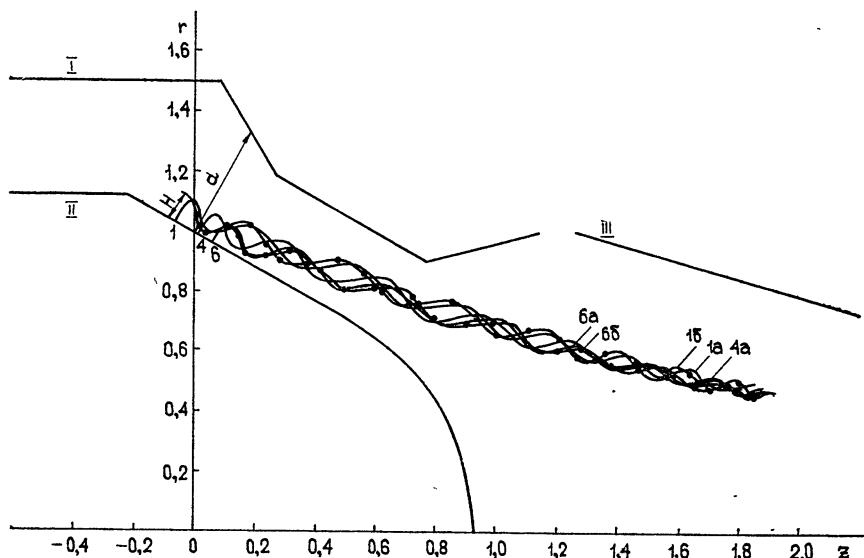


Рис. 2. Конфигурация электродов и электронные траектории в пушке с сильной за-
критичностью пучка (I—0; II—0,5; III—0):
а) сплошная кривая $t_j = 0$, б) кружки $t_j = 0,1$.

* Конфигурация электродов находилась методом, описанным в [6], из условия получения минимального позиционного скоростного разброса при нулевом пространственном заряде. Отличия геометрии по сравнению с системой рис. 1 обусловлены спецификой распределения магнитного поля на эмиттере обеих систем.

Согласно расчетным данным прирост скоростного разброса, вызванный действием пространственного заряда, для системы рис. 2 составляет 12% при $t_j = 0,1$, что вдвое меньше соответствующей величины для системы рис. 1 (ср. табл. 1). Этот эффект обусловлен, по-видимому, существенным укорочением «резонансной» области [4] (перемешивание траекторий происходит уже на первом витке (см. рис. 2)).

в) *Пушка с протяженным квазиламинарным пучком.* Как показано в [4, 10], радикальное ослабление влияния пространственного заряда на скоростной разброс может быть достигнуто в пушках с непересекающимися электронными траекториями. Конфигурации электронных пушек, формирующих квазиламинарные пучки, характеризуются значительно большими углами наклона магнитных силовых линий к поверхности эмиттера [6, 11]. В табл. 2 приведены результаты траекторного анализа одной из таких систем (рис. 3).

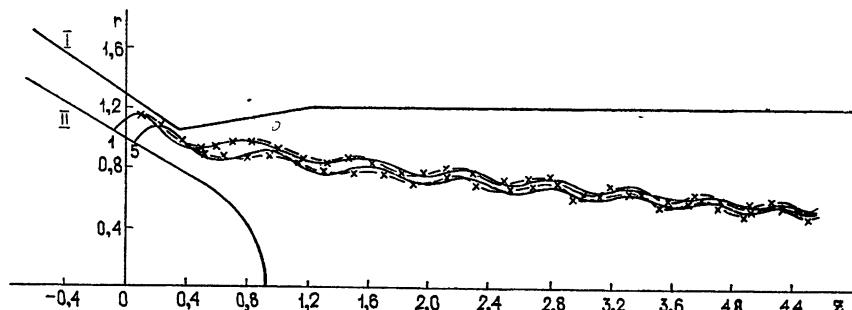


Рис. 3. Конфигурация электродов и электронные траектории в пушке с квазиламинарным пучком:

а) сплошная кривая— $t_j = 0$, б) крестики— $t_j = 0,2$.

Таблица 2

| t_j | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | \bar{v}_\perp | δv_\perp |
|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|------------------|
| 0 | $v_{\perp m}$ | 0,392 | 0,402 | 0,414 | 0,426 | 0,463 | 0,420 | 17% |
| 0,1 | $v_{\perp m}$ | 0,389 | 0,378 | 0,388 | 0,398 | 0,442 | 0,399 | 16% |
| 0,2 | $v_{\perp m}$ | 0,380 | 0,366 | 0,368 | 0,366 | 0,423 | 0,380 | 16% |

Согласно табл. 2 увеличение тока вплоть до $t_j = 0,2$ в отличие от всех рассмотренных выше случаев не вызывает заметного возрастания скоростного разброса. На рис. 3 показаны соответствующие электронные траектории. Как видно, ламинарность траекторий сохраняется во всем исследованном диапазоне токов пучка.

Отметим, что значения осцилляторных скоростей, определяемых по адиабатической формуле (6), почти на 50% превышают величины, следующие из траекторного анализа. Большой угол между поверхностью катода и магнитным полем обуславливает быстрый в масштабе циклотронного периода уход электронов от катода, что нарушает условия корректности адиабатического приближения.

Результаты расчета свидетельствуют о целесообразности применения метода вспомогательных зарядов и описанной выше его численной реализации для траекторного анализа протяженных винтовых электрон-

ных пучков с учетом сил пространственного заряда. Параметры пучка типичной пушки МЦР, вычисленной указанным методом, практически идентичны с теми, которые дает метод сеток [4] при существенно меньшем объеме оперативной памяти и требуемом числе итераций.

Траекторный анализ вновь подтвердил, что механизм возникновения разброса по скоростям при увеличении тока винтовых пучков в основном связан с резонансным замедлением или ускорением электронов в области регулярного пересечения электронных траекторий. Согласно расчетным данным использование пушек с квазиламинарным пучком в окрестности инжектора способствует радикальному снижению скоростного разброса.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
2. Н. И. Зайцев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, **19**, № 5, 1056 (1974).
3. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 1, 41 (1973).
4. В. И. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып 4, 67 (1977).
5. А. В. Вашковский, В. Т. Овчаров, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып 9, 34 (1971).
6. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, **63**, вып 8, 1695 (1973).
7. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 9, 81 (1971).
8. Л. А. Вайнштейн, Н. В. Назарова, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, **22**, № 2, 327 (1977).
9. В. К. Лыгин, В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Тезисы докладов на V Всесоюзном семинаре по методам расчета ЭОС, вып 4(34), М., 1974, стр. 30.
10. В. Н. Мануилов, Ш. Е. Цимринг, Радиотехника и электроника, **23**, № 7, 1450 (1978).
11. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, **60**, вып. 11, 2278 (1971).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
13 июня 1977 г.

TRAJECTORY ANALYSIS OF EXTENT SCREW ELECTRON BEAMS TAKING ACCOUNT OF FORCES OF A SPACE CHARGE

V. K. Lygin, Sh. E. Tsimring

Based on the method of auxiliary sources the trajectory analysis of intense screw electron beams is described. The mechanism of the velocity spread occurrence under the action of forces of a space charge is investigated. Gun electrode configuration is defined which forms the quasi-laminar screw beam with the essentially lowered spread of oscillation velocities.

УДК 538.56 : 621.3 032 266

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СРЕД С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОДВИЖНОСТИ В СКРЕЩЕННЫХ E - $, H$ -ПОЛЯХ

A. M. Белянцев, B. K. Юллатов

Показано, что в проводящем слое с неоднородным распределением подвижности в присутствии постоянных скрещенных электрического и магнитного полей, в отличие от случая однородной среды, возможны устойчивые прямолинейные и трохоидальные пучки электронов, а реальная часть высокочастотной проводимости в области частот ниже частоты столкновений может быть отрицательной

1. В недавних работах [1, 2] сообщалось об обнаружении невзаимной токовой неустойчивости в чистых пленках GaAs с неоднородным распределением параметров по толщине в присутствии внешних скрещенных E - и H -полей, параллельных поверхности пленки. Токовая неустойчивость наблюдается в полях, значительно ниже ганновских, и лишь при смещении носителей силой Лоренца в область высокой подвижности. Невзаимный характер наблюданной неустойчивости указывает на существенную роль в ее возникновении неоднородности в распределении частоты столкновений носителей и концентрации по толщине пленки. Ниже на примере простой модели среды с неоднородным трением предлагается одно из возможных объяснений невзаимной неустойчивости в неоднородных полупроводниковых пленках в присутствии сильных скрещенных E - и H -полей.

2. Модель и исходные уравнения. Рассмотрим движение электрона под действием скрещенных E - и H -полей в слое ($0 \leq y \leq d$) среды с неоднородным трением, зависящим для определенности только от одной координаты y . При этом для большей наглядности будем считать, что на некотором интервале y частоту столкновений ν можно аппроксимировать линейной функцией y , т. е.

$$\nu = \nu_0 + \nu'_0 y. \quad (1)$$

При выбранной ориентации постоянных полей E_{z0} и H_{x0} (см. рис. 1) электроны будут отклоняться к границе слоя и создадут поле Холла с $E_{y0} > 0$. Движение электронов, создающих поле Холла, в дальнейшем рассматривать не будем, т. е. будем считать, что электроны, достигшие поверхности, захвачены, к примеру, ловушками и в проводимость слоя вносят малый вклад. Поток электронов в «обедненном» слое будем полагать слабым.

Эти рассуждения весьма условны, их следует рассматривать лишь как некоторое обоснование модели среды с неоднородным трением, в которой электронный поток

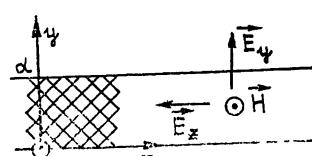


Рис. 1.

движется под действием электрического $\vec{E}_0(0, E_{y0}, -E_{z0})$ и магнитного $\vec{H}_0(-H_0, 0, 0)$ полей. Такое модельное рассмотрение оправдано тем, что оно позволяет просто выяснить роль неоднородности трения в возникновении отрицательной проводимости на высоких частотах.

Уравнения движения электронов в присутствии высокочастотного поля $\vec{\mathcal{E}} = \vec{z}_0 \operatorname{Re} \{ \mathcal{E} e^{i\omega t} \}$ при сделанных выше предположениях имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_y + v(y) v_y - \omega_H v_z &= -\frac{e}{m} E_{y0}, \\ \dot{v}_z + v(y) v_z + \omega_H v_y &= \frac{e}{m} E_{z0} - \frac{e}{m} \operatorname{Re} \{ \mathcal{E} e^{i\omega t} \}, \\ \dot{y} &= v_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь v_y, v_z — составляющие скорости, $\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$ — гирочастота.

3. Невозбужденные состояния равновесия. Найдем состояния равновесия электронного пучка при отсутствии высокочастотного поля, соответствующие прямолинейному равномерному движению электронов вдоль оси z . При $E_{y0} = \text{const}$ имеется одно невозбужденное состояние равновесия $y_0 = \text{const}, v_{y0} = 0, v_{z0} = \text{const}$, в частности,

$$v_{y0} = 0, \quad v_{z0} = \frac{eE_{y0}}{m\omega_H} = \frac{eE_{z0}}{m\nu_0}, \quad y_0 = 0. \quad (3)$$

Когда $E_{y0} = E_{y0}(y)$, число невозбужденных состояний равновесия определяется действительными корнями уравнения:

$$E_{y0}(y_{0q}) \nu(y_{0q}) = \omega_H E_{z0}, \quad (4)$$

при $v_{y0} = 0, v_{z0q} = \frac{\nu_0 v_{z0}}{\nu(y_{0q})}$. Очевидно, что от вида функции $E_{y0}(y)$ будет

зависеть и устойчивость состояний равновесия. Однако качественное исследование устойчивости состояний равновесия можно провести, не конкретизируя функцию $E_{y0}(y)$, так как в линеаризованную систему уравнений входит только первая производная от поля E_{y0} . Последняя определяется уравнением Пуассона

$$\epsilon \frac{dE_{y0}}{dy} = 4\pi e (n_0 - n)$$

и в обедненном носителями тока слое, т. е. при $n_0 \gg n$, положительна. Здесь n_0 — концентрация ионов, n — электронов.

Линеаризуем систему уравнений (2) вблизи q -го невозбужденного состояния равновесия:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y^{(1)} + \nu_{0q} v_y^{(1)} - \omega_H v_z^{(1)} + \omega_0^2 y^{(1)} &= 0, \\ \dot{v}_z^{(1)} + \nu_{0q} v_z^{(1)} + \omega_H v_y^{(1)} + \nu'_0 v_{z0q} y^{(1)} &= 0, \\ \dot{y}^{(1)} &= v_y^{(1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v_{0q} = v_0 + v'_0 y_{0q}$, $\omega_0^2 = \frac{e}{m} E'_{y0} = \frac{4\pi e^2 n_0 (y_{0q})}{\epsilon m}$. Полагая $v_y^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $y^{(1)} \sim e^{pt}$, найдем характеристическое уравнение

$$\alpha_0 p^3 + \alpha_1 p^2 + \alpha_2 p + \alpha_3 = 0.$$

Здесь $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2v_{0q}$, $\alpha_2 = v_{0q}^2 + \omega_H^2 + \omega_0^2$, $\alpha_3 = v'_0 v_{z0q} + v_{0q} \omega_0^2$.

Согласно критерию Гурвица состояние равновесия устойчиво, если

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 > 0.$$

Из (4) видно, что при $E_{y0} > 0$ для всех корней y_{0q} $v(y_{0q}) = v_{0q} > 0$, т. е. $v'_0 > 0$. При $v'_0 > 0$ α_3 всегда положительно и q -е состояние равновесия устойчиво при условии

$$2v_{0q}(\omega_{0q}^2 + \omega_H^2) + v_{0q}\omega_0^2 > v'_0 v_{z0q} \omega_H. \quad (6)$$

При $v'_0 < 0$ q -е состояние равновесия устойчиво, когда

$$v_{0q}\omega_0^2 > -v'_0 v_{z0q} \omega_H. \quad (7)$$

Заметим, что число состояний равновесия при $v'_0 > 0$ и $v'_0 < 0$ может быть различным. В частности, если все электроны сосредоточены около границы слоя $y = d$, а концентрация ионов $n_0 = \text{const}$, то $E_{y0} = \frac{4\pi e n_0}{\epsilon} y$. В этом случае при $v'_0 > 0$ возможно одно устойчивое состояние, а при $v'_0 < 0$ — два, если кроме условия (7) выполняется неравенство

$$v_0 \omega_0^2 > -4v'_0 v_{z0} \omega_H.$$

Найдем высокочастотную проводимость, связанную с устойчивыми пучками электронов. Будем считать, что поле E_{y0} — линейная функция y^* , тогда для высокочастотных составляющих $v_y^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $y^{(1)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{v}_y^{(1)} + v_{0q} v_y^{(1)} - \omega_H v_z^{(1)} + \omega_0^2 y^{(1)} &= 0, \\ \dot{v}_z^{(1)} + v_{0q} v_z^{(1)} + \omega_H v_y^{(1)} + v'_0 v_{z0q} y^{(1)} &= -\frac{e}{m} \mathcal{E} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{y}^{(1)} = v_y^{(1)}.$$

Из (8) найдем $v_z^{(1)}$:

$$v_z^{(1)} = -\frac{e}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega v_{0q}) \mathcal{E} e^{i\omega t}}{2\omega^2 v_{0q} - \omega_0^2 v_{0q} - v'_0 \omega_H v_{z0q} - i(\omega^2 - v_{0q}^2 - \omega_H^2 - \omega_0^2)}. \quad (9)$$

Так как

$$j_z^{(1)} = -en v_z^{(1)},$$

* Для произвольного поля $E_{y0}(y) > 0$ система линейных уравнений получается простой заменой ω_0^2 на $\tilde{\omega}_0^2 = \frac{e}{m} \{E'_{y0}(y_{0q}) + E''_{y0}(y_{0q}) y_{0q} + \dots\}$.

то интересующая нас действительная часть проводимости равна

$$\sigma' = \frac{e^2 n}{m} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(2\omega^2 v_{0q} - \omega_0^2 v_{0q} - v'_0 v_{z0q} \omega_H) - \omega^2 v_{0q} (\omega^2 - v_{0q}^2 - \omega_H^2 - \omega_0^2)}{(2\omega^2 v_{0q} - \omega^2 v_{0q} - v'_0 v_{z0q} \omega_H)^2 + \omega^2 (\omega^2 - v_{0q}^2 - \omega_H^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что при $v'_0 > 0$ имеется полоса частот $\omega_1^{(+)} < \omega < \omega_2^{(+)}$, где $\sigma' < 0$. Границные частоты $\omega_1^{(+)}$ и $\omega_2^{(+)}$ определяются соотношением

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^{(+)2} &= \frac{1}{2} \{ \Omega_1^2 + 2\omega_0^2 \mp [\Omega_1^4 - 4\omega_0^2(v_{0q}^2 + \omega_H^2)]^{1/2} \}, \\ \Omega_1^2 &= \frac{v'_0 v_{z0q} \omega_H}{v_{0q}} - v_{0q}^2 - \omega_H^2 > 2\omega_0(v_{0q}^2 + \omega_H^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие устойчивости пучка (7) ограничивает величину Ω_1 сверху:

$$2\omega_0(v_{0q}^2 + \omega_H^2)^{1/2} < \Omega_1^2 < v_{0q}^2 + \omega_H^2 + \omega_0^2. \quad (12)$$

Согласно (11) и (12) высокочастотная граница области $\sigma' < 0$ лежит на частотах порядка Ω_1 .

При $v'_0 < 0$ также имеется полоса частот $\omega_1^{(-)} < \omega < \omega_2^{(-)}$, в которой $\sigma' < 0$. Границные частоты $\omega_1^{(-)}$ и $\omega_2^{(-)}$ равны

$$\omega_{1,2}^{(-)2} = \frac{1}{2} \{ 2\omega_0^2 - \Omega_2^2 \mp [\Omega_2^4 - 4\omega_0^2(v_{0q}^2 + \omega_H^2)]^{1/2} \}, \quad (13)$$

где $\Omega_2^2 = v_{0q}^2 + \omega_H^2 - \frac{v'_0 v_{z0q} \omega_H}{v_{0q}}$, а ω_0 удовлетворяет неравенству

$$v_{0q}^2 + \omega_H^2 < -\frac{v'_0 v_{z0q} \omega_H}{v_{0q}} < \omega_0^2 < \frac{\Omega_2^4}{4(v_{0q}^2 + \omega_H^2)}. \quad (14)$$

В этом случае область $\sigma' < 0$ ограничивается сверху частотой порядка ω_0 . Заметим, что необходимым условием отрицательности является неоднородность частоты столкновения ($v'_0 \neq 0$).

В присутствии высокочастотного поля электроны отклоняются от равновесной прямолинейной траектории и периодически попадают то в область с большей, то с меньшей подвижностью. Из-за различного времени пребывания электронов в тормозящем и ускоряющем высокочастотном поле в среднем их работа при выполнении условий (6) и (7) в полосе частот $\omega_1^{\pm} < \omega < \omega_2^{\pm}$ будет отрицательной.

Приведем оценки предельных частот ω_2^{\pm} , при которых высокочастотная проводимость может быть отрицательной, для слоя GaAs с неоднородным распределением параметров. Пусть на толщине слоя $d = 1 \text{ мк}$ имеется перепад частоты столкновений на порядок, а средние параметры слоя при 77 К $n_0 \sim 10^{13} \div 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\omega_0 \sim 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\mu_0 \sim 10^5 \text{ см}^2/B \cdot c$ ($v_0 \sim 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$). Тогда $v'_0 \sim v_0 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, а $v'_0 v_{z0} \sim 3 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-2}$, при $v_{z0} \sim 10^7 \text{ см/с}$. Если гирочастота лежит в интервале $10^{11} \text{ с}^{-1} < \omega_H < 10^{12} \text{ с}^{-1}$, то $\Omega_1 \sim 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Высокочастотная граница области отрицательных σ' лежит в данном случае в миллиметровом диапазоне длин волн. Так как в рассмотренном примере ω_2^{\pm} порядка v_0 , то эти частоты, вообще говоря, находятся вблизи частотной границы применимости усредненных уравнений.

4. Возбужденные состояния равновесия. Если частота столкновений $v_0 \ll \omega_H$ (замагниченная плазма), то непрямолинейные траектории заряженных частиц под действием скрещенных E - и H -полей также могут быть найдены из усредненных уравнений. При отыскании непрямолинейных устойчивых траекторий частиц (возбужденных состояний равновесия) ограничимся случаем $E_y = \text{const}$. С помощью соотношений

$$\begin{aligned} y &= Y + a \cos \theta, \\ v_y &= -\omega_H a \sin \theta, \\ v_z &= v_{z0} - \omega_H a \cos \theta, \\ \theta &= \omega_H t + \varphi \end{aligned} \tag{15}$$

введем новые переменные Y , a и φ . После подстановки (15) в (2), приведения уравнений для Y , a , φ к стандартной форме и усреднения по фазе θ нетрудно получить уравнения для составляющих новых переменных, мало изменяющихся за период циклотронной частоты:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{v'_0}{2} a^2 - \frac{v'_0 v_{z0}}{\omega_H} Y, \\ \dot{a} &= -v_0 a + \frac{v_0 v_{z0}}{2\omega_H} a - v'_0 a Y, \\ \dot{a} \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

В данном случае, как легко видеть из (16), имеется единственное состояние равновесия:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{v_{z0}}{2\omega_H} - \frac{v_0}{v'_0}, \\ a_1^2 &= \frac{2v_{z0}}{\omega_H} Y_1, \end{aligned} \tag{17}$$

которое существует только при $v'_0 > 0$ и $v_0 < \frac{v'_0 v_{z0}}{2\omega_H}$. Рассмотрим его устойчивость. Линеаризованная вблизи состояния равновесия a_1 , Y_1 система уравнений (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{Y}^{(1)} &= v'_0 a_1 a^{(1)} - \frac{v'_0 v_{z0}}{\omega_H} Y^{(1)}, \\ \dot{a}^{(1)} &= -v'_0 a_1 Y^{(1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая $a^{(1)}$, $Y^{(1)} \sim e^{pt}$, найдем характеристическое уравнение системы:

$$p = -\frac{v'_0 v_{z0}}{2\omega_H} \pm \left[2 \frac{v'_0 v_{z0} v_0}{\omega_H} - 3 \left(\frac{v'_0 v_{z0}}{2\omega_H} \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{19}$$

Из (19) видно, что состояние равновесия a_1 , Y_1 устойчиво. При $\nu_0 < \frac{3}{4} \left(\frac{\nu'_0 v_{z0}}{2\omega_H} \right)$ это устойчивый фокус (рис. 2а), при $\frac{3}{4} \left(\frac{\nu'_0 v_{z0}}{2\omega_H} \right) < \nu_0 < \left(\frac{\nu'_0 v_{z0}}{2\omega_H} \right)$ — устойчивый узел (рис. 2б). Таким образом, устойчивое возбужденное состояние равновесия существует при $\nu'_0 > 0$ и $\nu_0 < \frac{\nu'_0 v_{z0}}{2\omega_H}$.

Высокочастотную проводимость в этом интересном случае «воздорожденной системы», т. е. на частотах, близких к ω_H , в рамках данной процедуры усреднения корректно рассчитать нельзя, так как применимость ее ограничена областью частот $\omega \leqslant \nu_0 \ll \omega_H$. На частотах $\omega \approx \omega_H$ при исследовании высокочастотных эффектов необходим более детальный учет механизмов рассеяния.

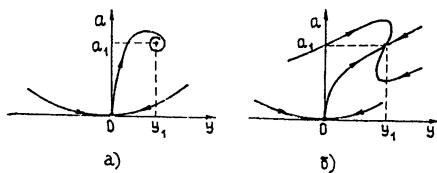


Рис. 2.

5. Итак, в проводящих средах с неоднородным распределением частоты столкновений ν в присутствии скрещенных электрического и магнитного полей возможны устойчивые прямолинейные и трохоидальные пучки электронов. Реальная часть высокочастотной проводимости таких систем на частотах $\omega \leqslant \nu_0$ может быть отрицательной. Величина и условия возникновения отрицательной высокочастотной проводимости различны при отклонении электронов силой Лоренца в область более высокой или более низкой подвижности. Неустойчивость в таких системах невзаимна по отношению к смене направления силы Лоренца. Такая невзаимность и наблюдалась экспериментально в работах [1, 2] при исследовании неоднородных эпитаксиальных пленок арсенида галлия в скрещенных электрическом и магнитном полях. В рассмотренной выше модели устойчивые электронные пучки и отрицательность реальной части высокочастотной проводимости присущи только системам с неоднородным распределением трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Belyantsev, V. A. Kozlov and V. A. Valov, Phys. Stat. Sol. (a) **28**, 279 (1975).
2. А. М. Белянцев, В. А. Валов, В. А. Козлов, ЖЭТФ, **70**, вып. 2, 569 (1976).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
21 мая 1977 г.

THE NEGATIVE HIGH FREQUENCY CONDUCTIVITY OF MEDIA WITH INHOMOGENEOUS DISTRIBUTION OF A MOBILITY IN CROSSED E-, H- FIELDS

A. M. Belyantsev, V. K. Yulpatov

It is shown that in a conducting layer with inhomogeneous distribution of the mobility in the presence of constant crossed electric and magnetic fields there are possible the stable straightforward and trochoidal electron beams in contrast to the case of a homogeneous medium. The real part of the high frequency conductivity in the region of frequencies below the collision one may be negative.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 361.372.8

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В ВОЛНОВОДЕ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ СТЕНКАМИ

Г. Г. Карапетян

Известно, что излучение заряда, движущегося по периодической траектории в волноводе, обладает резонансным характером из-за взаимодействия заряда с отраженными от стёнок волновода волнами [1]. Этот эффект можно использовать на практике, например для усиления с помощью волноводов ондуляторного излучения [2], поэтому представляют интерес дальнейшие исследования подобных резонансных явлений в волноводных структурах.

Рассмотрим точечный заряд e , движущийся с постоянной продольной скоростью βc по спиральной траектории в круглом волноводе, где спереди и сзади на расстояниях $D/2$ от заряда имеются две поперечные стенки, также движущиеся со скоростью βc . Поперечные стенки и стени волновода — идеально проводящие. Заряд движется с угловой скоростью Ω время T , совершив при этом N полных оборотов; радиусы волновода и спирали соответственно a и R . Наша цель — найти излученную энергию и сравнить ее с энергией, излученной в отсутствие волновода и стенок, т. е. в свободном пространстве.

Вычисление удобно проводить в сопутствующей системе координат (относительно которой стены неподвижны), где имеем заряд, врачающийся по окружности в резонаторе, цилиндрическая стена которой движется со скоростью $-\beta c$. Ввиду того, что нормальная компонента скорости при этом отсутствует, граничные условия на движущейся цилиндрической стенке те же, что и на неподвижной [3]. Поэтому, воспользовавшись известным методом расчета полей в резонаторах [4], найдем компоненты полей и затем полную энергию, преобразуя которую в лабораторную систему, получим искомую энергию, возбуждаемую зарядом в волноводе между поперечными движущимися стенками:

$$W = W_1 + W_2,$$

$$W_1 = \sum_{s, n, p=1}^{\infty} \left[\frac{4 \gamma e s \Omega J_s \left(\frac{v_1}{a} \right)}{\sqrt{D} v_1 J'_s(v_1)} \right]^2 \frac{2 s^2 \Omega^2 (1 - \alpha_1^2)}{(\omega_1^2 - \gamma^2 s^2 \Omega^2)^2} \sin^2 \frac{\omega_1 T}{2 \gamma}, \quad (1)$$

$$W_2 = \sum_{s, n, p=1}^{\infty} \left[\frac{4 \gamma e \Omega R J'_s \left(\frac{v_2}{a} \right)}{\sqrt{D} a \sqrt{1 - \frac{s^2}{v_2^2}} J_s(v_2)} \right]^2 \frac{\omega_2^2 + \gamma^2 s^2 \Omega^2}{(\omega_2^2 - \gamma^2 s^2 \Omega^2)^2} \sin^2 \frac{\omega_2 T}{2 \gamma}.$$

Здесь $\omega_{1,2} = c \sqrt{(v_{1,2}/a)^2 + (\pi n/\gamma D)^2}$, $\alpha_{1,2} = c v_{1,2}/\gamma s \Omega a$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $v_{1,2}$ — p -е корни функций Бесселя $J_s(z)$ и $J'_s(z) = dJ_s(z)/dz$; индексы 1 и 2 соответствуют E - и H -типу колебаний.

Как следует из (1), энергия будет непрерывно возрастать со временем (причем, этот резонансный рост пропорционален T^2) только на собственных частотах движущегося резонатора $s \Omega = \omega_{1,2}/\gamma$; при этом остальными членами суммы, для которых это условие уже невыполнимо, можно пренебречь. Рассматривая отдельно резонансы на первых гармониках ($s = 1$) E - и H -колебаний, из (1) получим для полной энергии в этих случаях:

$$W \approx W_1 = N \frac{8ce^2 T}{\beta_0 n R^2 v_1^2 J_1'^2(v_1)} g_1(x_1) \quad (\Omega = \omega_1/\gamma), \quad (2)$$

$$W \approx W_2 = N \frac{8 \beta_0 ce^2 T}{n R^2 (v_2^2 - 1) J_1^2(v_2)} g_2(x_2) \quad (\Omega = \omega_2/\gamma),$$

где

$$g_1(x) = (\beta_0^2 - x^2)^{3/2} J_1^2(x), \quad g_2(x) = x^2 (\beta_0^2 - x^2)^{1/2} J_1'^2(x),$$

$$x < \beta_0 \equiv \gamma \Omega R/c, \quad x_{1,2} = v_{1,2} R/a.$$

Для сравнения (2) с энергией, излученной в свободном пространстве, зафиксируем $\beta_0 \approx 1/\sqrt{2}$ (при этом излучение в свободном пространстве в основном происходит на первой гармонике с энергией [5] $W_0 \approx 4 ce^2 T / 27 R^2$) и вычислим максимумы функций g_1 и g_2 :

$$\begin{aligned} g_1^{\max} &= g_1(0,440) = 7,82 \cdot 10^{-3}, \\ g_2^{\max} &= g_2(0,549) = 2,65 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выбирая далее $n = p = 1$ (чтобы резонанс приходился на наименшие типы колебаний E_{111} и H_{111}) и используя табличные значения $v_1 = 3,84$, $v_2 = 1,84$, $J_1'(3,84) = -0,403$, $J_1(1,84) = 0,582$, найдем максимальные энергии:

$$W_2^{\max} \approx 0,131 N \frac{ce^2 T}{R^2}, \quad W_1^{\max} \approx \frac{1}{10} W_2^{\max}. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с энергией излучения в свободном пространстве, получим

$$\left(\frac{W}{W_0}\right)^{\max} \approx 0,884 N \sim N. \quad (5)$$

Резонансные размеры структуры определяются из уже использованных условий $\beta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\Omega = \omega_2/\gamma$, $x_2 = 0,549$, откуда

$$a = 3,35 R, \quad D = 2,24 \frac{\pi}{\gamma} R. \quad (6)$$

Таким образом, при излучении заряда в волноводе с поперечными движущимися стенками можно добиться существенного выигрыша в энергии по сравнению с излучением в свободном пространстве. На практике в качестве поперечных движущихся стенок можно использовать, по-видимому, плазменные густоты. При этом, однако, из-за конечной проводимости плазмы резонансный рост энергии в резонаторе будет ограничен. Оценим величину N_{\max} , начиная с которой резонансный рост энергии (пропорционально N^2) пропадает. Так как свободные колебания резонатора затухают пропорционально $\exp(-N/Q)$, где Q — добротность резонатора, то, очевидно, $N_{\max} \sim Q$. В нашем случае $Q \sim \gamma a^2 D/a^2 \approx a/\delta$, δ — толщина скин-слоя покоящейся плазмы. Предполагая, что концентрация электронов плазмы стенок много больше критической, т. е. коэффициент отражения волн, падающих на стенки, близок к единице, имеем [6] $\delta \sim 5 \cdot 10^5 / \sqrt{n}$ (см) и, следовательно, $N_{\max} \sim 10^{-6} a \sqrt{n}$. Исходя из этой оценки, можно выбрать параметры a и n , при которых $N_{\max} \gg 1$, т. е. наличие волноводной структуры может существенно усилить излучение заряда.

В заключение автор выражает благодарность Г. В. Воскресенскому за обсуждения

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Левин, ЖТФ, 15, № 7, 1159 (1945).
2. Г. Г. Карапетян, ДАН Арм. ССР, 63, № 4, 239 (1976).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
4. Г. В. Кисунько, Основы теории электромагнитных полых резонаторов, вып. 1, Воениздат, Л., 1947.
5. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов, ЖТФ, 46, № 11, 2392 (1976).
6. В. Е. Голант, Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы, изд. Наука, М., 1968.

СИММЕТРИЧНЫЙ ИЗЛОМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА КАК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ТИПОВ ВОЛН

A. A. Кириленко, Л. А. Рудь

В антенной, измерительной технике и технике СВЧ-связи часто возникает потребность в эффективных возбудителях высших типов волн прямоугольного волновода. Известен ряд устройств, выполняющих $H_{10} \rightarrow H_{m0}$ -преобразование, например, [1-3]. Чаще всего такие преобразователи критичны в настройке, недостаточно широкополосны и имеют конструкцию, существенно зависящую от требуемого на выходе типа волны. Основными требованиями, предъявляемыми к таким приборам, являются хорошее согласование и малый уровень паразитных (нежелательных) H_{n0} ($n \neq m$) -модов на выходе, т. е. высокая «чистота» преобразования. При этом зачастую, например в измерительной технике, второе требование является решающим в характеристике устройства.

Ниже описывается преобразователь H_{10} -в H_{m0} -волну, действие которого основано на рассеянии H_{10} -волны сверхразмерного прямоугольного волновода на изломе в H -плоскости. В работе [4] предложен метод расчета угловых неоднородностей в прямоугольных волноводах, позволяющий вести анализ их электродинамических свойств в полном объеме изменения угловых и частотных параметров. В частности, для симметричных изломов волноводного тракта (рис. 1) авторами исследованы свойства матриц рассеяния в диапазоне $20^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0,5 < x = a/\lambda < 6$ (a — ширина волновода, α — угол излома, λ — длина волны падающего поля).

При анализе многомодовой области обнаружено, что существуют области частот и углов излома, характеризующиеся высокой степенью преобразования волн низших типов в волны высших типов и наоборот, и минимальным уровнем потока мощности на паразитных модах. Обозначим W_{21}^T относительный (к падающей) уровень мощности H_{n0} -волны, возбужденной в выходном волноводе. Сначала рассмотрим $H_{10} \rightarrow H_{20}$ -преобразование. На рис. 1 представлены полученные расчетным путем линии уровня коэффициента преобразования по мощности W_{21}^T в координатах x , α . Пунктирные кривые иллюстрируют величину потока мощности нежелательной в данном случае H_{10} -волны. Хорошее преобразование наблюдается в области $1,31 < x < 1,37$, $117^\circ < \alpha < 123^\circ$. В этой зоне в H_{20} -волну преобразуется не менее 87% всей мощности; уровень паразитного потока на H_{10} -волне — W_{11}^T — от 1% до 6%. Наилучшая точка — $x = 1,35$, $\alpha = 120^\circ$; здесь $W_{21}^{T\max} = 90\%$ при $W_{11}^T \approx 2,5\%$. При этом в отраженном сигнале присутствуют примерно в равной мере волны H_{10} и H_{20} ($W_{11}^R \approx 3,3\%$ и $W_{21}^R \approx 4,2\%$); с ростом x отражение уменьшается.

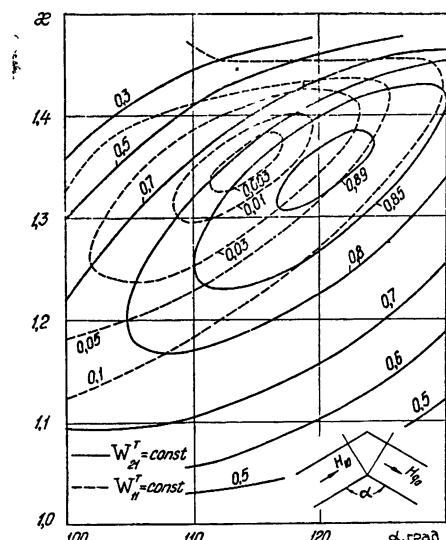


Рис. 1.

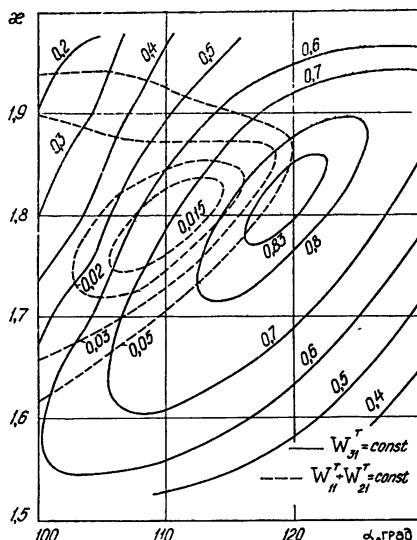


Рис. 2.

Как видно из сопоставления сплошных и пунктирных кривых на рис. 1, максимум преобразования и минимум мощности паразитного мода на выходе, к сожалению, не совпадают. Мощность прошедшей H_{10} -волны держится на малом уровне при $1,3 < \chi < 1,4$; $110^\circ < \alpha < 119^\circ$, где W_{11}^T не более 1%, а W_{21}^T в этой зоне — от 60% до 90%. Точка наиболее «чистого» преобразования, т. е. минимума W_{11}^T , расположена при $\chi = 1,35$, $\alpha = 114^\circ$; здесь $W_{11 \min}^T < 0,1\%$ при $W_{21}^T \approx 84\%$ ($W_{11}^R \approx 8,5\%$, $W_{21}^R \approx 7,5\%$).

На рис. 2 представлены линии уровня коэффициента преобразования по мощности W_{31}^T в H_{30} -волну и величины паразитного потока мощности уже на двух волнах — $W_{11}^T + W_{21}^T$. Как и в предыдущем случае, зона высокого коэффициента преобразования — $W_{31}^T > 83\%$ ($1,79 < \chi < 1,83$, $117^\circ < \alpha < 122^\circ$) — смещена относительно зоны минимального паразитного потока — $W_{11}^T + W_{21}^T < 1,5\%$ ($1,78 < \chi < 1,82$; $107^\circ < \alpha < 113^\circ$) — в сторону более слабых изломов. Наилучшее преобразование — в точке $\chi = 1,825$, $\alpha = 120^\circ$, где $W_{31}^T \approx 84\%$ при $W_{11}^T + W_{21}^T = 5\%$. Наиболее «чистый» H_{30} -мод — на выходе при $\chi = 1,8$, $\alpha = 112^\circ$, где $W_{11}^T + W_{21}^T \approx 1\%$ при $W_{31}^T \approx 75\%$.

С увеличением m характеристики преобразования ухудшаются. Однако при $m = 4$ еще существует область $2,28 < \chi < 2,38$, $113^\circ < \alpha < 121^\circ$, где $W_{41}^T \approx 78\%$ при $W_{11}^T + W_{21}^T + W_{31}^T < 5 \div 15\%$. Линии малых уровней паразитных модов еще более сдвинулись в сторону меньших углов и лежат в области $100^\circ < \alpha < 109^\circ$, $2,2 < \chi < 2,3$.

Надо отметить еще одну общую закономерность: уровень паразитного потока уменьшается в левой верхней части рисунков вида рис. 1 и рис. 2, т. е. приближении частоты к критической для $H_{m+1,0}$ -волны и при углах $\alpha = 100 \div 110^\circ$.

Экспериментальное исследование макета $H_{10} \rightarrow H_{20}$ -преобразователя проводилось в 4-миллиметровом диапазоне. Входное плечо преобразователя запитывалось через трапециoidalный переход от одномодового волновода. Измеренная диаграмма направленности открытого конца выходного волновода характеризовалась нулевым провалом вдоль оси волновода, положение максимумов хорошо совпадало с известными данными (см., например, [5]).

Таким образом, явление преобразования волн на H -изломе прямоугольного волновода, обычно нежелательное при традиционном использовании такой неоднородности в качестве узла для изменения оси тракта, в данном случае оказалось настолько существенным, что позволило использовать его для создания преобразователя типов волн, выгодно отличающегося малыми габаритами и максимально простой конструкцией. Сам преобразующий элемент — излом — обладает, как видно, плавной частотной характеристикой и малым уровнем паразитных модов на выходе. Параметры преобразователя в целом могут быть несколько хуже в силу неидеальности переходов к волноводам увеличенного сечения.

Авторы благодарят С. Д. Андренко за обсуждение результатов и экспериментальную проверку преобразователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Буряк, Авт. свид. № 155188, Офиц. бюллетень, № 12, 1963, стр. 17.
2. С. Д. Шулика, Г. А. Шаров, С. С. Фел, Авт. свид. № 236570, Офиц. бюллетень, № 7, 1969, срт. 44.
3. М. В. Персиков, В. В. Удалов, Авт. свид. № 233036, Офиц. бюллетень, № 3, 1970, стр. 199.
4. А. А. Кириленко, Л. А. Рудь, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 19, № 4, 687 (1974).
5. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
3 мая 1977 г.