

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Авербах В. С., Бетин А. А., Гапонов В. А., Макаров А. И., Пасманик Г. А., Таланов В. И. Эффекты вынужденного рассеяния и самовоздействия в газах и влияние их на распространение оптического излучения (Обзор)	1077
Безродный В. Г., Шубова Р. С. Статистические характеристики СДВ-сигналов в условиях многомодового распространения. Определение некоторых пара- метров сигнала и канала связи	1107
Пресняков И. Н., Смольянинов С. С., Кочкин М. И. Спектральный анализ сиг- налов некогерентного рассеяния	1114
Жевакин С. А. О радиотеплолокационном определении интегральной влажности облачной атмосферы и интегральной водности, температуры и высоты ка- пельной фазы облаков	1122
Доценко А. В., Ключан Е. Л., Ларионцев Е. Г., Федорович О. В. Режимы син- хронизации встречных волн и биений в кольцевом твердотельном лазере	1132
Бабин А. А., Беляев Ю. Н., Сущик М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И., Ще- локов А. Н. Процессы усиления и генерации при ВР на поляритонах и па- раметрическом взаимодействии убегающей и попутной с накачкой волн	1143
Богатырев Ю. К., Ямпурин Н. П. Преобразование спектра волн на пространст- венных гармониках	1156
Апресян Л. Об уравнениях для средних значений линейных стохастических опе- раторов, зависящих от марковских случайных процессов	1161
Хименко В. И. О среднем числе выбросов траектории негауссова случайного процесса над заданным уровнем	1170
Барабаненков Ю. Н. Об ослаблении среднего поля в среде с квазистатическими флуктуациями	1177
Музичук О. В., Саичев А. И. Эволюция спектрально-корреляционных харак- теристик поля в одномерной среде с пространственно-временными неоднород- ностями	1185
Яушкин И. Г. Моменты интенсивности поля, распространяющегося в случай- но-неоднородной среде, в области насыщения флуктуаций	1194
Дрофа А. С. Исследование спектров смещений центра тяжести световых пучков в турбулентной атмосфере	1202
Семенцов Д. И., Морозов А. М. Дифракция на цилиндрических магнитных до- менах	1210
Цвык А. И. Влияние динамических и статических смещений электронов на стар- товые токи генератора дифракционного излучения	1216

Краткие сообщения и письма в редакцию

Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Иткина М. А., Терина Г. И., Толмачева А. В. О возможности измерения электронной концентрации в ионосфере по рассеянию радиоволн на искусственных неоднородностях плазмы	1220
Информация	
Межвузовские сборники статей по радиофизике и электронике	1222
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XVIII, № 1, 1978 г.	1226

УДК 538.576 452.1

**ЭФФЕКТЫ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ
И САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В ГАЗАХ И ВЛИЯНИЕ ИХ
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

(Обзор)

*В. С. Авербах, А. А. Бетин, [В. А. Гапонов], А. И. Макаров,
Г. А. Пасманик, В. И. Таланов*

СОДЕРЖАНИЕ

I. Эффекты ВР в газах

1. Колебательное и вращательное ВКР в газах
- 2 Вынужденное молекулярное рассеяние в газах в области перехода от газодинамического к газокинетическому режиму
3. Вынужденное температурное рассеяние (ВТР), обусловленное поглощением света
4. Пороговые характеристики ВР одномодовых световых пучков
5. Экспериментальное исследование ВКР и ВМР в газах

II. Эффекты самовоздействия в газах

1. Основные выводы теории
2. Оценки критических параметров для газов и некоторые экспериментальные данные

III. Влияние ВР и самовоздействия на распространение световых пучков в газах

1. Прохождение одномодовых световых пучков через газы
2. ВР и тепловое самовоздействие многомодового и многочастотного излучения

ВВЕДЕНИЕ

Современные импульсные и непрерывные лазеры позволяют обнаружить и измерить оптические эффекты, связанные со сравнительно слабыми (при обычных плотностях) нелинейностями газов. Интерес к изучению этих эффектов связан с рядом причин. Изменением параметров газов (давления, температуры, концентрации компонент) можно не только количественно в широких пределах менять их нелинейные характеристики, но вносить в них и качественные изменения, например, осуществлять перестройку частотных зависимостей нелинейных восприимчивостей. В газах могут наблюдаться резонансные нелинейные эффекты. В частности, в воздухе возможен эффект резонансного охлаждения при поглощении оптического излучения [1]. Сюда же относятся эффекты самовоздействия при нелинейном поглощении или вынужденном комбинационном рассеянии [2]. Газы позволяют обнаружить нелинейные эффекты, характерные для свободных молекул (например, вращательное ВКР), наблюдение подобных эффектов в других агрегатных состояниях затруднено из-за значительного уширения спектральных линий. Слабая дисперсия газов при невысоких давлениях дает возможность наблюдать комбинационные процессы (например, четырехфотонные взаимодействия) в условиях точного синхронизма. Наконец, газы позволяют сравнительно легко подбирать условия, при которых нелинейные

эффекты разного типа существуют раздельно или, напротив, конкурируют друг с другом.

Из всего многообразия нелинейных оптических эффектов в газах в данном обзоре мы выделим только нерезонансные эффекты вынужденного рассеяния и самовоздействия световых пучков, причем, основное внимание будет сконцентрировано на наиболее низкогороговых эффектах. Среди эффектов ВР будут рассмотрены вынужденное молекулярное рассеяние (ВМР), вынужденное комбинационное рассеяние на колебательных (КВКР) и вращательных (ВВКР) переходах, а также вынужденное температурное рассеяние, обусловленное поглощением света. Среди эффектов самовоздействия — тепловые эффекты в слабопоглащающих газах как в стационарном, так и в нестационарном режимах. Наряду с обсуждением самих механизмов нелинейности будет уделено внимание вопросам распространения оптического излучения в надпороговых режимах.

I. ЭФФЕКТЫ ВР В ГАЗАХ

Процессы ВР света обусловлены резонансной раскачкой возмущений показателя преломления среды Δn при совместном воздействии на нее волн падающего (накачка) и рассеянного излучений. При этом в среде возникает наведенная поляризация, попадающая в синхронизм с одной из собственных волн. В результате рассеянное излучение начинает экспоненциально нарастать с инкрементом, зависящим от интенсивности накачки. Изменение Δn может быть связано с изменением плотности, температуры (или энтропии), колебательных и вращательных координат молекул, концентрации компонент в смесях и т. п. Соответственно различают и разные типы ВР. Для определения условий распространения оптического излучения в однокомпонентных газах представляют интерес следующие наиболее низкогороговые типы ВР.

1) Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) на колебательных или вращательных переходах молекул газа (соответственно различают колебательное (КВКР) и вращательное (ВВКР) вынужденное рассеяние).

2) Вынужденное рассеяние на колебаниях концентрации молекул газа, вызванных эффектом электрострикции (вынужденное молекулярное расеяние (ВМР), переходящее при больших плотностях в рассеяние Мандельштама—Бриллюэна — ВРМБ).

3) Вынужденное температурное рассеяние (ВТР) на изменениях плотности газа, вызванных возмущениями температуры при поглощении света.

1. Колебательное и вращательное ВКР в газах

ВКР в многоатомных, в частности двухатомных газах, таких, как N_2 , O_2 , при невысоких давлениях может происходить как на колебательных, так и на вращательных переходах. Легче, как правило, достигается порог КВКР, ВВКР по ряду причин наблюдать труднее. В области высоких давлений оно подавляется колебательным эффектом, порог которого с увеличением давления падает, в то время как порог ВВКР в широком диапазоне от давления не зависит. В области низких давлений сильно обуждается линия вращательного перехода, что предъявляет дополнительные требования к спектру накачки. Кроме того, необходимость исключения взаимодействия стоксовых и антостоксовых компонент для наблюдения ВВКР требует применения лазерных пучков с круговой поляризацией. Одновременно оба вида ВР наблюдались в водороде и дейтерии [3, 4], а также были получены в наших экспериментах с азо-

том [5]. В углекислом газе и кислороде ВВКР было получено при пико-секундной накачке [6].

При оценках пороговых накачек эффектов КВКР и ВВКР в газах в функции давления можно воспользоваться известным выражением для коэффициента усиления стоксовой компоненты (на единицу длины и единицу интенсивности):

$$g = \frac{1}{hn^2c^2} \frac{\Delta N}{v^3 v_0} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial v} \right)_{\max}, \quad (I.1)$$

где n — коэффициент преломления на стоксовой частоте, v и v_0 — частоты (в см^{-1}) соответственно стоксовой волны и накачки, ΔN — число активных молекул, участвующих в процессе ВР, $\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial v} \right)_{\max}$ — максимальное значение дифференциального поперечного сечения спонтанного рассеяния молекул, равное для одиночной лоренцовой линии с шириной $\Delta v_{\text{сп}}$,

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial v} \right)_{\max} = \frac{2}{\pi \Delta v_{\text{сп}}} \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}, \quad \Delta v_{\text{сп}} = \frac{\Delta \omega_{\text{сп}}}{2\pi c}. \quad (I.2)$$

Из экспериментов по спонтанному рассеянию, как правило, определяется величина $\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}$, а $\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial v} \right)_{\max}$ вычисляется по формуле (I.2), хотя здесь неизбежна ошибка из-за отличия формы линии от лоренцовой.

Для определения инкрементов стоксовой волны при КВКР наиболее интересна структура так называемой Q -ветви спектра спонтанного рассеяния, образованной переходами $\Delta v = 1$, $\Delta J = 0$, где v и J — соответственно колебательное и вращательное квантовые числа. Вследствие взаимодействия вращательного и колебательного движений молекулы расщепление основного ($v = 0$) и первого ($v = 1$) колебательных уровней молекулы на вращательные подуровни несколько различно, что приводит к зависимости частот компонент Q -ветви от вращательного квантового числа

$$v = v_0 - \tilde{\alpha} J(J + 1), \quad (I.3)$$

где α — постоянная взаимодействия. Ее значения для ряда газов приведены в табл. 1. При не слишком малых давлениях ширины вращательных подуровней определяются столкновениями и пропорциональны давлению газа:

$$\Delta v_{\text{сп}, J} = \beta_J \rho_a, \quad (I.4)$$

где ρ_a — плотность в атмосфере, а значения β_J для наиболее интенсивных переходов некоторых газов приведены в табл. 1. Для таких газов, как N_2 , O_2 , постоянная взаимодействия невелика, поэтому уже при сравнительно небольших давлениях (порядка единиц атмосфер) ударное уширение приводит к полному перекрытию компонент Q -ветви. В этом случае в формулах (I.1), (I.2) $\Delta N = N = \sum N_J$ (N_J — населенность вращательных подуровней), а $\Delta v_{\text{сп}}$ — полная ширина Q -ветви.

Если компоненты спектра не перекрыты, то в (I.1) и (I.2) следует подставлять значения $\Delta N = N_J$ и $\Delta v_{\text{сп}} = \Delta v_{\text{сп}, J}$ для наиболее населенного подуровня. Поскольку $\Delta N_J \sim \rho_a$ и $\Delta v_J \sim \rho_a$, то в этом случае инкремент КВКР, пропорциональный $\Delta N_J / \Delta v_J$, не зависит от давления. Так для водорода постоянство инкремента наблюдается вплоть до давлений в несколько сот атмосфер из-за сравнительно большого значения постоянной взаимодействия [7].

Таблица 1

Данные для расчета коэффициента усиления КВКР и ВВКР

Газы	ν_v , см^{-1}	$\tilde{\alpha}$, см^{-1}	$(\partial\sigma/\partial\Omega)_k$ относитель- но N_2	$\Delta\nu_{\text{сп. к.}}, \text{см}^{-1}$	B , см^{-1}	$(\partial\sigma/\partial\Omega)_{\text{вр}}$ относитель- но N_2	β_J , $\frac{\text{см}^{-1}}{\text{атм}}$	$\nu_{\text{вр.}}$, см^{-1}
N_2	2330	0,018	1	$1,3 (\Sigma Q, 10 \text{ атм} [9])$	2,00	1	$8 \cdot 10^{-2} (S_0(8) [16])$	76
O_2	1555	0,016	1,3	$1,3 \cdot 10^{-1} (Q_1(7), 1 \text{ атм} [11])$	1,44	2,6 [18]	$8 \cdot 10^{-2} (S_0(7) [15])$	49
CO	2145	0,017	1	$1,2 (\Sigma Q, 1 \text{ атм} [9])$	1,93	0,6 [19]	$1,3 \cdot 10^{-1} (S_0(7) [15])$	66
H_2	4155	3,06	1,6	$2,8 \cdot 10^{-3}, (Q_1(1), 1 \text{ атм} [16])$	60,87	0,18 [19]	$3,6 \cdot 10^{-3} (S_0(1) [17])$	610

Для азота при $\lambda = 0,58 \mu\text{мкм}$ по данным [18–20]

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{ВВКР}} = 3,7 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2/\text{стераид}, \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\text{КВКР}} = 3,7 \cdot 10^{-31} \text{ см}^2/\text{стераид}.$$

В области перекрытия компонент в зависимости ширины Q -ветви от давления существенную роль начинает играть эффект интерференции линий [8], который приводит к постоянству полной ширины Q -ветви при изменении давления и даже ее уменьшению при больших давлениях. Существование эффекта интерференционного обужения Q -ветви убедительно продемонстрировано в экспериментах по наблюдению спонтанного рассеяния в N_2 , CO и HD , хорошо согласующихся с теорией этого эффекта [9, 10]. В азоте эффект интерференционного обужения наблюдался при давлениях $p > 10 \text{ атм}$. В области давлений до 100 атм ширина линии азота почти постоянна ($\Delta\nu_{\text{сп.}} \text{ меняется от } 1,2 \text{ до } 0,9 \text{ см}^{-1}$ в этом диапазоне), далее линия сужается до $0,3 \text{ см}^{-1}$ при 500 атм [9].

В газах с малой постоянной взаимодействия (O_2 , N_2) расщепление компонент наступает при сравнительно низких давлениях ($p \sim 1 \text{ атм}$), что создает известные экспериментальные трудности в определении контура Q -линий. Структура Q -линий кислорода описана в [11]. Для азота до сих пор отсутствуют достаточно надежные сведения о структуре Q -линий в области давлений порядка одной атмосферы, несмотря на целый ряд попыток ее определения [12–14], в том числе с привлечением методов активной спектроскопии комбинационного рассеяния [13, 14].

Вынужденное рассеяние в газах на вращательных переходах молекул происходит между вращательными подуровнями $\nu_J = BJ(J+1)$ с изменением вращательного квантового числа на две единицы ($J \rightarrow J+2$). Частотные сдвиги рассеянного излучения при ВВКР существенно меньше, чем при КВКР (см. табл. 1). Линии вращательного спектра разрешены в широком диапазоне давления вплоть до нескольких сот атмосфер. Число активных молекул ΔN при ВВКР определяется формулой

$$\Delta N = N_J - \frac{(2J+1)}{(2J+5)} N_{J+2} \quad (I.5)$$

и пропорционально давлению газа. Поэтому в большом диапазоне инкременты ВВКР не зависят от давления. Для различных поляризаций накачки и рассеянного излучения при попутном ВВКР в двухатомных газах имеют место следующие связи инкрементов [21]:

$$g_0^B = 6g_0 = 2g_{\perp} = \frac{3}{2} g_{\parallel},$$

где g_0^B соответствует встречным циркулярным поляризациям накачки и стоксовой волны, g_0 — попутным циркулярным поляризациям, g_{\perp} — ортогональным линейным поляризациям, g_{\parallel} — параллельным линейным поляризациям. Таким образом, наибольший инкремент достигается при встречных круговых поляризациях накачки и стоксовой компоненты. Из-за малых частотных сдвигов при ВВКР начинают играть существенную роль эффекты четырехфотонного взаимодействия стоксовых и антостоксовых компонент, приводящие к уменьшению инкремента при малых волновых расстройках взаимодействующих волн $\Delta k = 2k_0 - k - k_a$. Однако при встречных циркулярных поляризациях такое взаимодействие полностью отсутствует [22] и подавления усиления не происходит.

2. Вынужденное молекулярное рассеяние в газах в области перехода от газодинамического к газокинетическому режиму

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию ВР света в газах на флуктуациях плотности в области применимости газодинамического описания [23–26]. С понижением давления необходим кинетический подход к анализу ВР. Он сравнительно просто осуществляется в случае сильно разреженного газа, когда можно полностью пренебречь столкновениями, однако в переходной области учет столкновений необходим. В теории спонтанного молекулярного рассеяния в газах (теория тонкой структуры линии Рэлея) широко используется представление Батнагара, Гросса, Крука (БГК) для интеграла столкновений [27–29]. Удовлетворительное согласие этой модели с экспериментом [30] дает основание для привлечения ее и к анализу эффектов ВР [31]. Модель БГК позволяет получить зависимость инкремента ВР от плотности газа во всем диапазоне давления от сильно разреженного газа до газодинамики, включая и переходную область, где существует учет вращательной релаксации.

Учет взаимодействия полей накачки и рассеянного (стоксова) излучения может быть проведен на основе линеаризованного уравнения Больцмана для функции распределения молекул $f_l(\mathbf{v}, \mathbf{R})$ по средним скоростям молекул \mathbf{v} , средним координатам \mathbf{R} и состояниям вращательного движения l (в многоатомных молекулах):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_l(\mathbf{v}, \mathbf{R}) + \frac{F_z}{mN} \frac{\partial [f_l]}{\partial v_z} = J(f_l),$$

где $F_z = \frac{\alpha}{4} \nabla_z |\mathcal{E}|^2$ — усредненная сила, действующая на молекулу в полях накачки \mathcal{E}_0 и рассеянного излучения \mathcal{E} , α — средняя поляризуемость молекул, N — их концентрация, m — масса молекул, $[f_l]$ — невозмущенная функция распределения, $J(f_l)$ — интеграл столкновений в представлении БГК [32].

Решение этого уравнения совместно с уравнением для рассеянного излучения при заданной волне накачки дает следующее выражение для инкремента обратного ВМР:

$$\Gamma = \frac{k(\epsilon_0 - 1)^2}{v_T^2 \rho} \frac{I_0}{c \epsilon_0} \operatorname{Im} R(x, y), \quad (I.6)$$

где $\rho = Nm$, k — волновое число рассеянной волны, I_0 — интенсивность накачки, ε_0 — диэлектрическая проницаемость газа, $v_T^2 = \frac{2k_B T_0}{m}$, T_0 — температура газа, k_B — постоянная Больцмана, $x = \Omega/2kv_T$ — безразмерная расстройка частот накачки и рассеянной волны ($\Omega = \omega_0 - \omega$), $y = \frac{\tau_e^{-1} + \tau_i^{-1}}{2kv_T}$ — безразмерная частота столкновений молекул, τ_e и τ_i — времена релаксации, обусловленные упругими и неупругими соударениями, $\bar{k} = \frac{k_0 + k}{2}$, $R(x, y)$ — известная комплексная функция, содержащая параметры газа $\alpha_\tau = \tau_e/\tau_i$ и $\Delta = c_v^i/c_v^{tr}$. Зависимость инкремента от частоты (контуры усиления) определяется функцией $\text{Im } R(x, y)$, причем области газодинамики отвечают условие $y \gg 1$, чистой кинетике $y \ll 1$, а переходной области $y \sim 1$.

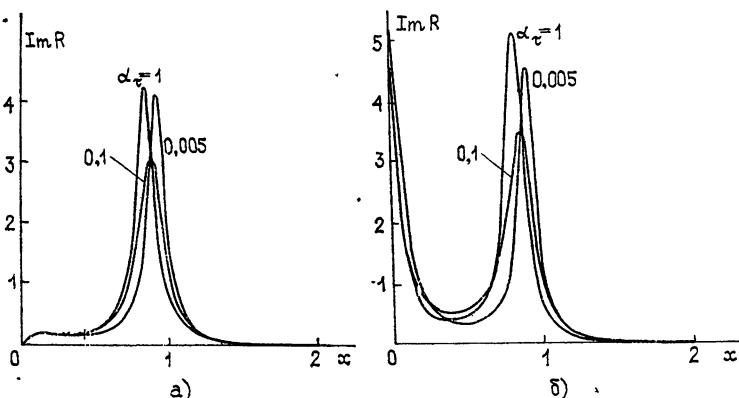


Рис. 1. Контуры линии вынужденного (а) и спонтанного (б) молекулярного рассеяния при различном вкладе вращательной релаксации для $y=8$.

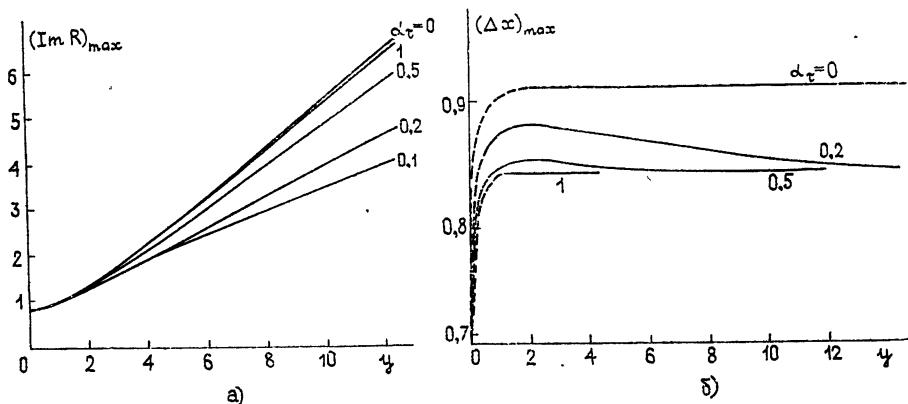


Рис. 2. Зависимость максимума контура ВМР (а) и его положения (б) от y при различных α_τ .

На рис. 1 для двухатомных газов приведены примеры контуров спонтанного и вынужденного рассеяния для $y = 8$ и различных значений параметра α_τ , характеризующего степень вращательной релаксации в газе. Видно, что влияние вращательной релаксации проявляется в из-

менении максимума усиления и его сдвиге по частоте. На рис. 2 приведено семейство зависимостей величины и положения максимума инкремента от y при разных α_t . При

$y \rightarrow 0$ $\text{Im } R(x, y)_{\max} \rightarrow 0,77$; при $y \gg 1$ $\text{Im } R(x, y)_{\max} \approx ay$,

причем коэффициент пропорциональности a есть функция α_t . Положение максимума усиления, определяемое как $\Omega_0 = \frac{1}{c} 2\omega v_{\text{зв}}(\alpha_t, y)$, соответствует при $y \gg 1$ адиабатической скорости звука двухатомного газа $\sqrt{1,4 \frac{k_B T_0}{m}}$, затем при уменьшении y и выключении внутренних степеней

свободы — адиабатической скорости звука одноатомного газа $\sqrt{\frac{5 k_B T_0}{3 m}}$.

При дальнейшем уменьшении $y \rightarrow 0$ скорость звука стремится к изотермической $\sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}$. Минимуму коэффициента усиления ВМР в зависимости от α_t при постоянном y (см. рис. 3), а также наибольшей дисперсии скорости звука соответствует условие $\Omega_0 \tau_i \sim 1$.

На рис. 4 приведены примеры расчета контура усиления вынужденного (а) и спонтанного (б) рассеяния $\text{Im } R(x, y)$ при $y = \text{const}$ для азота N_2 . Видно, что при $y \geq 1$ в линии СР обрисовываются две компоненты — несмещенная, соответствующая рассеянию на тепловых флюктуациях плотности, и смещенная, соответствующая рассеянию на акустических волнах (дублет Мандельштама—Бриллюэна). В контуре же ВР наблюдается вплоть до $y \sim 10$ одна смещенная компонента. Как отмечалось выше, максимум функции $\text{Im } R(x, y)$ линейно зависит от y при $y \gg 1$ и стремится к постоянному значению в области $y \ll 1$. Это приводит к квадратичной зависимости от плотности инкремента в первой области (газодинамика) и линейной — во второй (кинетика).

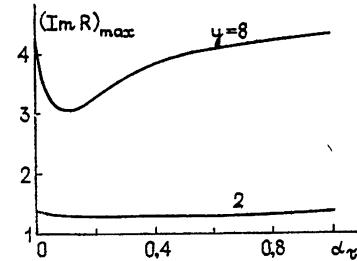


Рис. 3. Влияние вращательной релаксации на максимум контура линии ВМР.

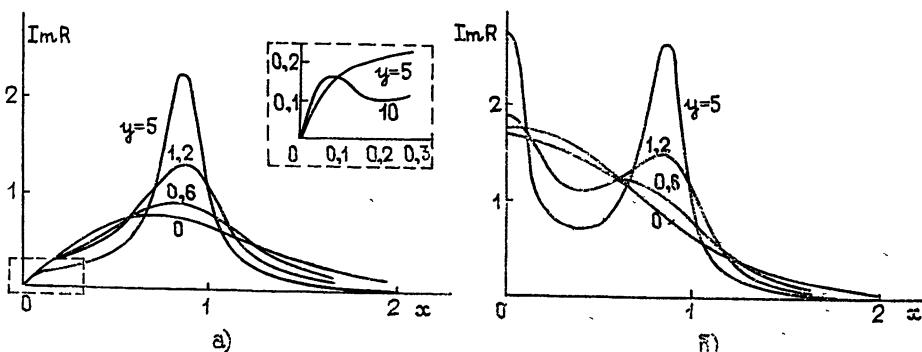


Рис. 4. Контур линии вынужденного (а) и спонтанного (б) молекулярного рассеяния в азоте ($\alpha_t = 0,2$).

Привязку параметра y к плотности конкретных газов можно осуществить, сопоставив инкременты, полученные при кинетическом под-

ходе в модели БГК с данными прямого газодинамического расчета в области $y \gg 1$. Такой расчет, как известно, приводит к следующему выражению для инкрементов ВРМБ:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{k_0 Y^2}{\rho \Omega_0 \Gamma_{3B} \varepsilon_0^{3/2} c} I_0, \quad (I.7)$$

где

$$Y = \left[\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_s \right]^2, \quad \Gamma_{3B} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{4}{3} \eta + \eta' + \frac{\kappa}{c_p} (\gamma - 1) \right]$$

— коэффициент, определяющий затухание гиперзвукка $\delta_{3B} = \frac{2k^2 \Gamma_{3B}}{v_{3B}}$, η и η' — сдвиговая и объемная вязкость, κ — теплопроводность, $\gamma = c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме.

Сравнение обоих выражений для инкремента дает связь

$$y = \frac{v_T^2}{2 \Gamma_{3B} \Omega_0 a(\alpha_c)}. \quad (I.8)$$

Например, для азота при нормальной температуре

$$y = 1,38 \lambda_0 \rho_a, \quad (I.9)$$

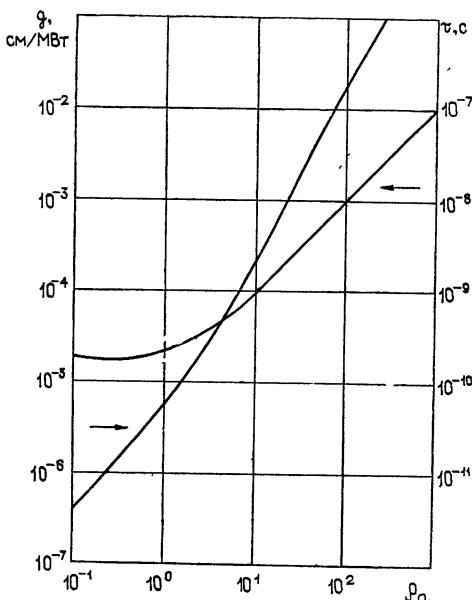
где λ_0 в микрометрах.

Из (I.9), в частности, следует, что для азота при $\lambda_0 \approx 1 \text{ мкм}$ переходная область $y \sim 1$ приходится на давление около 1 атм. Зависимости инкремента $g(\rho_a)$ и времени релаксации $\tau(\rho_a)$, определяемого обратной шириной линии, для азота показаны на рис. 5 ($\lambda_0 = 0,53 \text{ мкм}$). Для произвольной длины волны зависимость $g(\rho_a)$ в азоте имеет вид

$$g = 1,7 \cdot 10^{-6} \rho_a^2 [\text{см}/\text{МВт}] \quad (y \gg 1), \quad (I.10)$$

$$g = 2,34 \cdot 10^{-6} \frac{\rho_a}{\lambda_0 [\text{мкм}]} [\text{см}/\text{МВт}] \quad (y \ll 1).$$

Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления и времени релаксации ВРМБ в азоте от плотности в единицах амага.



Коэффициенты усиления и времена жизни фононов для других газов можно связать с данными для азота через молекулярные постоянные. Заметим, что в выражении для Γ_{3B} второй и третий члены могут быть выражены через сдвиговую вязкость, последнюю же удобно представить через τ_c — среднее время между соударениями молекулы [33],

$$\eta = \frac{1,27}{3} \rho \bar{v}^2 \tau_c, \quad \bar{v}^2 = \frac{3k_B T_0}{m}.$$

Тогда

$$\Gamma_{3B} = \frac{1,27}{3} v_{3B}^2 \tau_c f(\gamma) \left(1 + \frac{A}{\alpha_c} \right),$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \left[1 + \frac{3}{16} \frac{(\gamma - 1)(9\gamma - 5)}{\gamma} \right],$$

где член $(1 + A/\alpha_\tau)$ дает вклад вращательной релаксации в затухание звука. Для двухатомных молекул $A = 0,074$. Подставив эти величины в выражение для инкремента, получим, что

$$g \sim \frac{\alpha^2 m^{1/2}}{\tau_{c0} T_0^{1/2}} \frac{1}{\gamma^{1/2} f(\gamma) (1 + A/\alpha)} \rho_a^2, \quad (I.11)$$

где τ_{c0} — среднее время между соударениями при нормальных условиях $\tau_{c0} = \tau_c / \rho_a$. Время жизни фононов при $y \gg 1$

$$\tau = \frac{2}{\Delta\omega_{\text{сп}}} \sim \frac{\lambda_0^2 m^2}{\tau_{c0} T_0} \frac{1}{\gamma f(\gamma) (1 + A/\alpha)} \rho_a.$$

При $y \ll 1$ максимум инкремента пропорционален величине $\frac{\alpha^2}{\lambda_0 T_0} \rho_a$, а время жизни фононов $\sim \lambda_0 m^{1/2} / T_0^{1/2}$.

Приведенные соотношения позволяют получить относительные значения коэффициентов усиления ВМР в областях $y \gg 1$ и $y \ll 1$ (табл. 2). В переходной области инкремент подсчитывается непосредственно по графику рис. 2, связь y с ρ_a можно определить из последнего столбца табл. 2. Таким образом, развитый подход позволяет определить инкременты ВМР во всей области давлений.

Таблица 2

Коэффициенты усиления ВМР различных газов
для газодинамической и бесстолкновительной областей

Газы	$\frac{\alpha}{\alpha_{N_2}}$	$\frac{m}{m_{N_2}}$	$\frac{\tau_{c0}}{\tau_{c0 N_2}}$	α_τ	g/g_{N_2} $y \gg 1$	g/g_{N_2} $y \ll 1$	y/y_{N_2}
O ₂	0,92	1,14	1,15	0,3	0,84	0,85	0,86
CO	1,12	1,00	1,02	0,7	1,50	1,26	0,87
H ₂	0,47	0,072	0,51	0	0,15	0,22	0,45
He	0,12	0,143	1,11	0	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	0,27
Ne	0,23	0,72	1,78	0	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	0,36
Ar	0,96	1,43	1,27	0	0,96	0,92	0,69
Kr	1,44	3,00	1,40	0	2,1	2,1	0,67
Xe	2,36	4,70	1,27	0	11,2	5,6	1,33

Известно, что интегральное (по частотам) сечение спонтанного рэлеевского рассеяния в пересчете на одну молекулу от давления не зависит. Как показывают расчеты, модель БКГ приводит к аналогичному результату, независимо от α_τ , в том числе и для области $\Omega\tau_i \sim 1$, где наиболее сильно проявляется вращательная релаксация. Интегральный по частотам инкремент ВР в этой модели меняется в зависимости от α_τ и y на несколько процентов, причем наибольшее изменение его в функции y наблюдается при $\alpha_\tau = 0$. Для оценок инкремента ВМР в пучках с широкополосной накачкой можно считать интегральный по частотам инкремент в пересчете на одну молекулу практически не зависящим от давления,

3. Вынужденное температурное рассеяние (ВТР), обусловленное поглощением света

Оптическое поглощение может явиться причиной ряда нелинейных тепловых эффектов, связанных с изменением температуры, а следовательно, и плотности среды в области, занятой световым пучком. Крупномасштабные (по сравнению с длиной волны) возмущения температуры, возникающие при поглощении излучения основного пучка и попутной с ним затравочной компоненты на той же частоте, вызывают перерассеяние исходного излучения под малыми углами (эффекты попутного ВТР и теплового самовоздействия). При наложении на основной пучок встречной волны примерно той же частоты возможна мелкомасштабная (с периодом $\lambda_0/2$) модуляция температуры и плотности среды, приводящая к перерассеянию излучения во встречном направлении (обратное ВТР). Возмущения плотности, модулирующие показатель преломления газа, связаны локально в пространстве и времени с возмущениями температуры в том случае, если последние изменяются достаточно медленно за время установления равновесного

давления $t_\Delta = \Lambda/v_{\text{зв}}$ на их характерном масштабе Δ , т. е. $\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T$

($t \gg t_\Delta$). Для обратного рассеяния ($\Delta = \lambda_0/2$) условие $t \gg t_\Delta$ практически всегда выполняется, в то время как для попутного ВТР выполнение этого условия зависит от угла рассеяния $\Theta \approx \lambda_0/\Delta$. Для импульсов длительностью t_0 , меньшей или порядка времени установления равновесного давления t_Δ , плотность среды меняется мало и, следовательно, модуляция показателя преломления, вызывающая рассеяние света, незначительна. Приравнивая t_0 и t_Δ , находим критическое значение угла рассеяния $\Theta_{\text{кр}} = \Delta/v_{\text{зв}}t_0$; для $\Theta \gg \Theta_{\text{кр}}$ ВТР достаточно мощного лазерного импульса развивается наиболее интенсивно.

Для импульсов длительностью несколько миллисекунд и короче практически можно не учитывать диффузию температуры из области светового пучка. В этом случае полный инкремент попутного ВТР, характеризующий экспоненциальное нарастание интенсивности рассеянного света, равен [34]

$$M = \left(g_T \int_0^z w_0 dz \right)^{1/2}, \quad (\Theta \gg \Theta_{\text{кр}}), \quad (I.12)$$

где $g_T = \frac{4k_0(\partial\varepsilon/\partial T)_p \delta}{\rho c_p \varepsilon_0} = \frac{4(\varepsilon_0 - 1)k_0 \delta}{\rho c_p T_0 \varepsilon_0}$ — коэффициент нелинейности,

δ — коэффициент поглощения света (по интенсивности), $w_0 = \int_0^t I_0 dt$

— плотность энергии светового луча.

Формула (I.12) не учитывает так называемого четырехфотонного взаимодействия, приводящего к взаимному перерассеянию в поле лазерной накачки компонент, распространяющихся под углами Θ и $-\Theta$ по отношению к лучу накачки. Указанный процесс не играет существенной роли, если различие в продольных составляющих волновых векторов накачки и стоковой компоненты превышает обратный масштаб усиления, т. е. $k_0 \Theta^2 \gg g_T w_0$, или $\Theta \gg \frac{M}{\sqrt{k_0 z}}$. Соотношение (I.12)

дает оценку инкремента также для обратного нестационарного ВТР в том случае, если длительность импульса меньше времени переходного

процесса $t_{\text{п}} = \frac{\Gamma z}{\Delta\omega_{\text{сп}}}$, где $\Delta\omega_{\text{сп}} = 4\chi k_0^2$. При $t > t_{\text{п}}$ инкремент Γ зависит от мощности импульса и равен

$$\Gamma = \frac{(\partial e/\partial T)_p \delta I_0}{8\rho c_p \epsilon_0 \chi k_0} = g I_0, \quad (\text{I.13})$$

где $\chi = z/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности. В обычных условиях для обратного ВТР значение локального инкремента g ($\approx 10^{-8} - 10^{-9} \text{ см}/MBT$) существенно меньше, чем для BMP, и поэтому наблюдение соответствующего эффекта в газах затруднено.

4. Пороговые характеристики ВР одномодовых световых пучков

Поскольку пороги ВР в газах достигаются при сравнительно высоких значениях интенсивности, то экспериментальное исследование процессов ВР проводится, как правило, со сфокусированными световыми пучками. В этих условиях существенную роль могут играть дифракционные эффекты, связанные с ограниченностью поперечных размеров лазерного луча. Эти же эффекты проявляются, очевидно, и в коллимированных пучках, если только длина трассы сравнима с длиной дифракционного расплывания $k_0 r_0^2$. При длительности импульса t_0 значительно большей обратной ширины линии $\Delta\omega_{\text{сп}}$ спонтанного рассеяния, нарастание стоксовой компоненты \mathcal{E} в поле монохроматической накачки \mathcal{E}_0 описывается в квазиоптическом приближении уравнением

$$\left(v \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} - \frac{g}{2} I_0 \right) \mathcal{E} = 0. \quad (\text{I.14})$$

Здесь $\eta = t - z/u_0$, $v = \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}$, u_0 и u — скорости накачки и стоксовой компоненты, $g = \Gamma/I_0$ — рассчитанное выше значение локального инкремента (на единицу длины и единицу интенсивности). Уравнение (I.14) описывает усиление при заданном на границе значениях затравочного поля \mathcal{E} (при исследовании BMP поле на границе можно считать равным нулю, а в правую часть (I.14) следует добавить источник шума, характеризующий распределенный вклад спонтанного рассеяния [34]).

При учете ослабления возбуждающего луча из-за перекачки его энергии в рассеянную компоненту уравнение (I.14) необходимо решать совместно с уравнением для лазерного поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} + \frac{g}{2} \frac{\omega_0}{\omega} I \right) \mathcal{E}_0 = 0. \quad (\text{I.15})$$

Если же ограничиться исследованием усиления стоксовой волны вблизи порога ВР, то можно воспользоваться лишь уравнением (I.14), считая поле накачки заданным. Для одномодового сфокусированного в среду пучка гауссова профиля

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{I_{00}}{(1-z/F)^2 + z^2/z_0^2} \exp \left\{ -\frac{r_{\perp}^2}{r_0^2[(1-z/F)^2 + z^2/z_0^2]} \right\} \approx \\ &\approx I_{00} \left[\left(1 - \frac{z}{F} \right)^2 + \frac{z^2}{z_0^2} \right]^{-1} \left\{ 1 - \frac{r_{\perp}^2}{r_0^2 \left[\left(1 - \frac{z}{F} \right)^2 + \frac{z^2}{z_0^2} \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

$$z_0 = k_0 r_0^2.$$

Параболическая аппроксимация (I.16) справедлива при больших значениях инкремента, когда стоксово излучение локализовано вблизи оси пучка. Подставляя (I.16) в (I.14), можно найти решение полученного уравнения. В стационарных условиях, когда на длине трассы стоксов импульс не выйдет за пределы импульса накачки ($t_0 \gg v z$), полный инкремент, характеризующий экспоненциальное нарастание мощности P стоксова сигнала, равен [35]

$$M(z) = \ln \frac{P}{P_{\text{ш}}} = \left\{ \arctg \left[\left(1 + \frac{z_0^2}{F^2} \right) \frac{z}{z_0} - \frac{z_0}{F} \right] + \right. \\ \left. + \arctg \frac{z_0}{F} \right\} (g I_{00} z - \sqrt{2 g I_{00} z_0}). \quad (\text{I.17})$$

Учитывая, что предэкспоненциальный множитель $P_{\text{ш}}$, характеризующий мощность шумового источника в полосе усиления, составляет величину порядка $\hbar \omega \Delta \omega$ (для ВКР) или $\frac{kT}{\omega_0 - \omega} \Delta \omega$ (для ВМР) [34],

где $\Delta \omega = \frac{\Delta \omega_{\text{сп}}}{VM}$ — ширина линии усиления, нетрудно оценить пороговое

значение инкремента $M_{\text{п}}$, достижение которого обеспечивает усиление затравочного шума до уровня накачки. При $\Delta \omega \sim 10^9 - 10^{10} \text{ c}^{-1}$ (ВКР или ВМР в газах при давлении $1 - 10 \text{ atm}$) и $P \sim 10^1 - 10^2 \text{ MBt}$ получим, что в оптическом диапазоне $M_{\text{п}} \approx 30$. При длине трассы, существенно превышающей длину фокальной перетяжки, полный инкремент равен

$$M \approx \pi (g I_{00} z_0 - \sqrt{2 g I_{00} z_0}). \quad (\text{I.18})$$

Приравнивая полный инкремент (I.18) значению $M_{\text{п}}$, находим пороговое значение мощности сфокусированного лазерного пучка

$$P_{\text{п}} = \frac{\pi}{k_0 g} \left(1 + \frac{M_{\text{п}}}{\pi} + \sqrt{1 + \frac{2 M_{\text{п}}}{\pi}} \right) \quad (\text{I.19})$$

(при $F = \infty$ в формуле (I.19) $\pi \rightarrow \pi/2$).

При попутном ВР из-за малой дисперсии газов скорости стоксовой компоненты и накачки почти не различаются и поэтому условие $t_0 > v z$ практически всегда выполняется. В то же время при обратном ВР ($v = 2/u_0$) это условие может нарушиться. В этом случае длина взаимодействия уменьшается с укорочением импульса. Тогда при $\frac{g I_0 u_0}{\Delta \omega_{\text{сп}}} < 1$ полный инкремент оценивается также по формуле (I.17) с заменой $z \rightarrow \frac{u_0 t_0}{2}$.

Одной из особенностей попутного ВКР в газах является увеличение четырехфотонного взаимодействия стоксовых и антистоксовых компонент при понижении давления вследствие уменьшения дисперсии. Такое взаимодействие может повышать порог возникновения ВВКР (при линейно поляризованной накачке) и КВКР по сравнению с порогом чисто стоксова рассеяния. В приближении плоских волн при попутном распространении накачки, стоксовой и антистоксовой компонент инкремент определяется мнимой частью поправки к волновому числу стоксовой компоненты [36]:

$$h = \frac{\Delta k}{2} - \sqrt{\frac{\Delta k^2}{4} - i\Gamma\Delta k}, \quad (I.20)$$

где Γ — инкремент стоксовой компоненты в отсутствие взаимодействия, $\Delta k = 2k_0 - k_a - k$ — расстройки волновых чисел. На рис. 6 показано относительное значение инкремента

$$\gamma_0 = \frac{\operatorname{Im} h}{\Gamma} = \frac{1}{2\eta_0} \sqrt[4]{1 + 16\eta_0^2} \left| \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4\eta_0 \right| \quad (I.21)$$

в функции параметра $\eta_0 = \Gamma/\Delta k$. При $\eta_0 \ll 1$ $\gamma_0 \leq 1$, однако с уменьшением расстройки ($\Delta k \rightarrow 0$) $\gamma_0 \sim \frac{1}{\sqrt[4]{2\eta_0}} \rightarrow 0$. Таким образом, в газах

при низких давлениях, где $g = \text{const}$, эффективное усиление попутной стоксовой компоненты будет функцией давления из-за зависимости Δk (p).

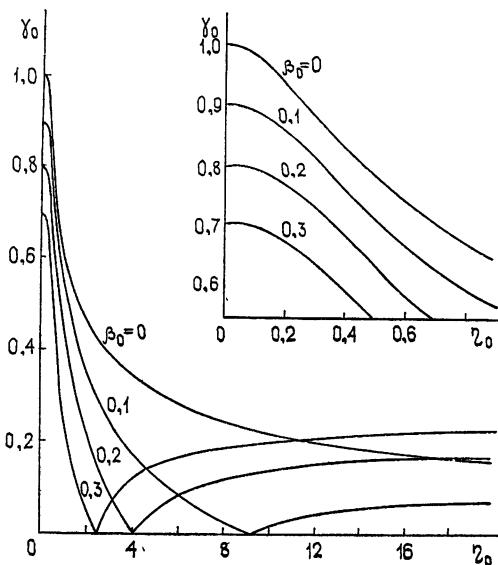


Рис. 6. Относительный инкремент при взаимодействии стоксовых и антистоксовых компонент в гауссовом пучке накачки.

При использовании для наблюдения ВКР сильно ограниченных пучков накачки взаимодействие ее с рассеянными компонентами может измениться из-за волновых расстроек мод накачки и рассеянного излучения. Расчет основных мод рассеянного излучения в цилиндрическом пучке накачки гауссова профиля радиуса r_0 дает в условиях 4-фотонного взаимодействия следующие значения инкремента для центра линии колебательного перехода:

$$\operatorname{Im} \frac{h}{\Gamma} = \frac{1}{2\eta_0} \sqrt[4]{[1 + 4\beta_0\eta_0(1 + \eta_0)]^2 + 16\eta_0^2[1 + \beta_0(\eta_0 - 1)]^2} \times \\ \times \left| \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4\eta_0(1 + \beta_0\eta_0 - \beta_0)}{1 + 4\beta_0\eta_0(1 + \eta_0)} \right|, \quad (I.22)$$

где наряду с η_0 фигурирует параметр

$$\beta_0 = (\Gamma kr_0^2)^{-1/2}, \quad (I.23)$$

характеризующий степень ограниченности пучка. При $\beta_0 = 0$ формула (I.22) переходит в (I.20). Формула (I.22) получена в предположении $\beta_0 \ll 1$. Заметим, что $\text{Im } h = 0$ в точке $\eta_0 = -\frac{1 - \beta_0}{\beta_0}$, что может выполняться при $\Delta k < 0$. Именно для этого случая зависимости $\text{Im } \frac{h}{\Gamma}$ от $|\eta_0|$ показаны на рис. 6. Для реальных гауссовых пучков полный инкремент можно найти, интегрируя (I.22) по всей длине трассы с учетом зависимости $r_0(z)$ и $\Gamma(z)$.

5. Экспериментальное исследование ВКР и ВМР в газах

В настоящее время имеется значительное число работ по экспериментальному исследованию эффектов ВР в газах. При изучении ВМР (или ВРМБ) основное внимание уделялось определению частотных сдвигов рассеянных компонент с целью уточнения закона дисперсии гиперзвука при различных плотностях [26, 37–39]. Данные по порогам относятся в основном к газодинамической стадии рассеяния [25, 40]. Попытка определения порогов ВМР в азоте в переходной области была предпринята в [31].

Измерения проводились с импульсами длительностью около 1 нс в области давлений 1–3 атм, что позволило определить только зависимость пороговой энергии нестационарного ВМР от давления. Позднее были исследованы характеристики ВМР в условиях, близких к стационарным, при длительности импульса накачки 7 нс с шириной спектра $0,01 \text{ см}^{-1}$ [72]. Полученная зависимость пороговой мощности от давления ($1 < p < 4 \text{ атм}$) хорошо совпадает с данными теории, развитой в разд. 2 настоящей работы. Порог ВМР при $p = 1 \text{ атм}$ и $\lambda = 0,53 \text{ мкм}$ оказался равным 67 МВт.

При давлениях $p = 1,5 \div 4 \text{ атм}$ было проведено измерение характеристик рассеянного излучения в надпороговом режиме. Для мощности накачки, превышающей в 1,5 раза пороговую величину, коэффициент преобразования энергии накачки в рассеянное излучение достигает 25% при длительности импульса рассеяния 1,2 нс.

Эффекты ВКР в газах при давлении в десятки атмосфер исследовались преимущественно с целью использования их для создания ВКР-генераторов [41]. Гораздо меньше данных по исследованию физических особенностей этих эффектов при невысоких давлениях, когда, с одной стороны, труднее выполняются пороговые условия, а, с другой, большую роль начинает играть конкуренция разных эффектов. Ряд данных по конкуренции эффектов ВР приведен в работе [4]. Как правило, при ВР наблюдаются эффекты, отвечающие максимальным инкрементам. Это связано с тем, что нарастание рассеянного поля от уровня спонтанного шума требует больших полных инкрементов ($M_p \approx 30$), поэтому даже небольшая разница в локальных инкрементах разных типов рассеяния приводит к значительной разнице в коэффициентах усиления. Перекачка энергии основного излучения в рассеянную компоненту в надпороговых режимах, вообще говоря, уменьшает накачку тех типов ВР, которые имеют более низкие локальные инкременты, в результате пороговые условия для них не достигаются. Однако, в принципе, возможны случаи, когда рассеянное излучение вместе с основным может стимулировать слабые процессы. В упомянутой работе [4] экспериментально изучалась конкуренция эффектов КВКР между собой, КВКР — ВВКР и ВКР — ВРМБ. Конкуренция КВКР исследовалась для переходов $Q_1(1)$ и $Q_1(2)$ вдейтерии при давлении, соответствующем $p_a = 30 \text{ амага}$, при изменении температуры

газа в диапазоне 100—300 К. Здесь за исключением узкой области пересечений пороговых кривых возбуждения линий $Q_1(1)$ и $Q_1(2)$ слабый эффект подавляется сильным. Подавление связано не с изменением населенности уровней (переходы идут с разных вращательных подуровней), а, по-видимому, с истощением накачки более сильным типом рассеяния. Конкуренция КВКР (переходы $Q_1(1)$ и $Q_1(2)$) и ВВКР (переходы $S_0(0)$ и $S_0(2)$) в дейтерии носит не столь явный характер — оба вида рассеяния ($Q - S$) могут существовать в широком интервале температур и только в области очень низких температур $S_0(0)$ давит $Q_1(1)$ из-за большой разницы (в 2—3 раза) в погонных инкрементах. В CH_4 наблюдалось полное отсутствие конкуренции между ВКР и ВРМБ в широком диапазоне давлений, включающем и область пересечения пороговых кривых. В водороде при 77 К положение оказалось сложнее — при высоких давлениях преобладающее нестационарное ВРМБ не влияло на возникновение ВКР (линия $Q_1(1)$), с понижением давления преобладающим становилось ВКР, а эффект ВРМБ полностью подавлялся.

В работе [5] изучались конкуренция $Q - S$ в азоте при низких давлениях ($p \gtrsim 1 \text{ atm}$), где оба эффекта могут наблюдаться одновременно. Пучок второй гармоники неодимового лазера фокусировался в кювету длиной 8 метров таким образом, что в центр кюветы приходилась перетяжка пучка. На входе в кювету импульс длительностью около 1 μs имел мощность до 300 MWt при радиусе пучка 0,9 мм , расходности, близкой к дифракционной, и ширине частотного спектра 0,05 cm^{-1} . Полученные зависимости порогов КВКР и ВВКР от давления показаны на рис. 7. При циркулярной поляризации накачки ВВКР наблюдается при давлениях 1—3 atm , КВКР — в диапазоне 2,5—5 atm , причем в области давлений $2,5 < p < 3 \text{ atm}$ пороги обоих видов ВР совпадают*. При давлениях $1 < p < 2,5 \text{ atm}$ наблюдается только ВВКР, а при $3 < p < 5 \text{ atm}$ — только КВКР. Для ВВКР при циркулярной поляризации нет связи стоксовой волны с антистоксовой, поэтому в эксперименте определялся непосредственно порог стоксовой компоненты. Связь этих компонент в КВКР при давлениях $p > 2,5 \text{ atm}$ достаточно мала из-за дисперсии показателя преломления, поэтому здесь полученные значения порога тоже относятся к возбуждению чисто стоксовой компоненты. Постоянство и уровень пороговой мощности ВВКР в области $1 < p < 2,5 \text{ atm}$ согласуются с теорией этого эффекта. Снижение его на участке $2,5 < p < 3 \text{ atm}$ объясняется, по-видимому, связью обоих эффектов через изменение населенности общих для них уровней нижнего колебательного состояния. При линейной поляризации пороговая мощность КВКР та же, что и при циркулярной, но теперь этот эффект наблюдается вплоть до 1 atm из-за отсутствия ВВКР. При низких давлениях КВКР происходит с одновременным возбуждением стоксовой и антистоксовой компонент, что приводит к

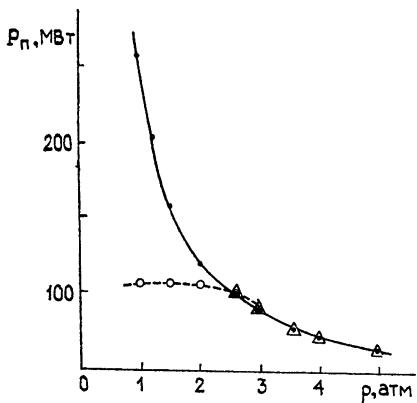


Рис. 7. Порог ВВКР (светлые кружки) и КВКР (треугольники) для циркулярной и КВКР для линейной (темные кружки) поляризаций накачки в азоте.

* В описываемых экспериментах порог ВВКР фиксировался при достижении энергии рассеянного излучения $\sim 10^{-3} \text{ Дж}$, а КВКР — $\sim 10^{-5} \text{ Дж}$.

повышению пороговой мощности*. Однако объяснить зависимость пороговой мощности КВКР в азоте от давления при $p < 2,5 \text{ atm}$ только четырехфотонным взаимодействием компонент не удается. По всей вероятности, имеет место и неполное разрешение составляющих Q -полосы вплоть до $p = 1 \text{ atm}$, но такое предположение требует дальнейшей экспериментальной проверки.

Интересны спектральные характеристики КВКР в азоте в области конкуренции [42] (рис. 8). В отсутствие ВВКР спектр КВКР содержит одну линию, смещенную на 2330 см^{-1} от частоты накачки. В области одновременного возбуждения ВВКР и КВКР ($2,5 < p < 3 \text{ atm}$) на циркулярной поляризации спектр КВКР состоит из большого числа комбинационных частот $\nu_v \pm 4B(J + 3/2)$ и $\nu_v \pm 8Bn$.

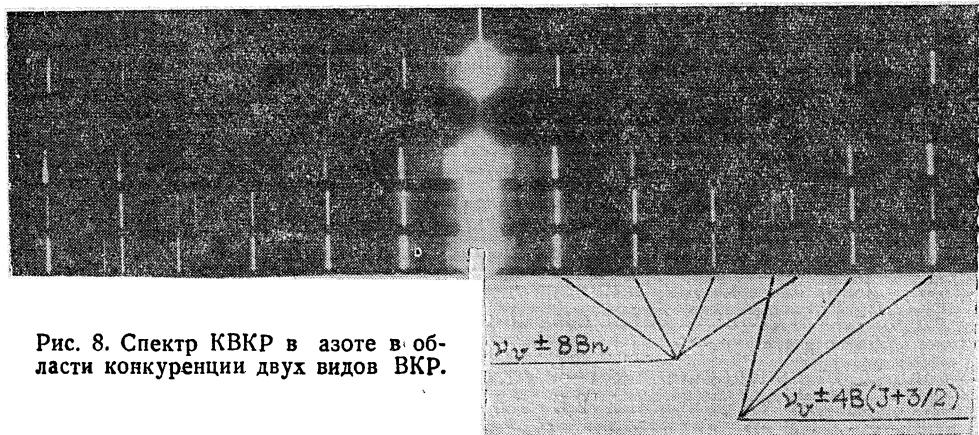


Рис. 8. Спектр КВКР в азоте в области конкуренции двух видов ВКР.

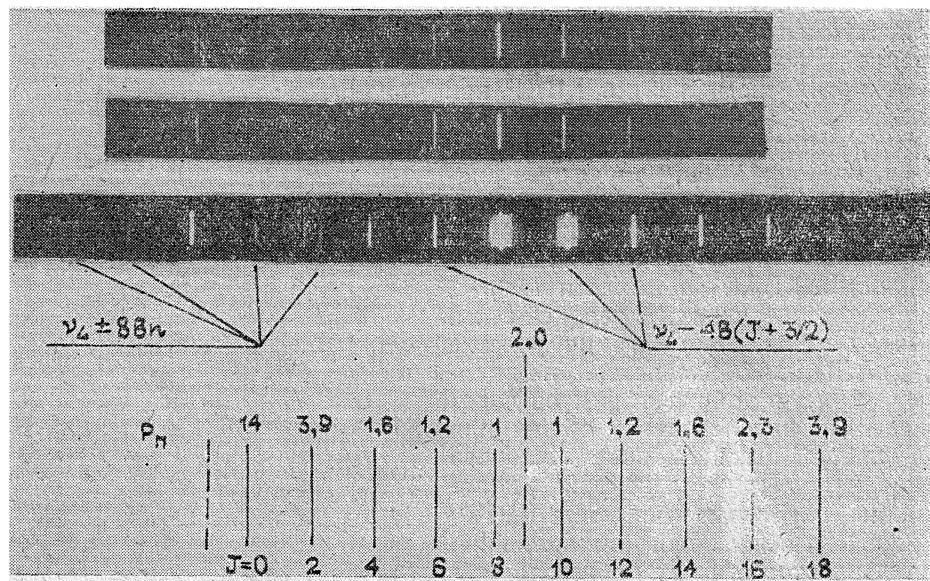


Рис. 9. Спектр вращательного ВВКР в азоте при $p = 1 \text{ atm}$.

* Оценки показывают, что в отсутствие взаимодействия компонент пороговая мощность при $p = 1 \text{ atm}$ была бы ниже примерно в 1,5 раза.

Полученные спектры объясняются, по-видимому, рассеянием основной стоксовой компоненты v_y на изменениях поляризуемости, обусловленных вынужденным вращением молекул. Спектр чистого ВВКР в азоте в сильной степени зависит от превышения пороговой накачки (рис. 9). На пороге наблюдаются линии, соответствующие наиболее интенсивным переходам с уровней $J = 8$ и 10 . Дальнейшее увеличение накачки приводит к появлению всех линий $J = 0 \div 18$, кроме того, появляются сателлиты, отстоящие от накачки в обе стороны на величину, кратную разности $8B$ соседних вращательных линий. Такие компоненты в спонтанном спектре вообще не наблюдаются. Вероятной причиной генерации широкого спектра линий при ВВКР являются четырехфотонные параметрические процессы. Линии вращательного спектра при ВР могут возникать также из-за быстрого насыщения интенсивных переходов в надпороговом режиме, в результате чего создаются условия для возбуждения слабых линий.

Таким образом, процессы ВР в газах имеют ряд специфических особенностей спектральных и пороговых характеристик, особенно в области конкуренции разных типов ВР. Эти особенности требуют дальнейшего теоретического и экспериментального исследования.

II. ЭФФЕКТЫ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В ГАЗАХ

1. Основные выводы теории

В первом приближении изменение показателя преломления газа в присутствии интенсивного оптического излучения можно аппроксимировать квадратичным по полю слагаемым

$$\Delta n = \hat{n}_2 |\mathcal{E}|^2,$$

где n_2 — линейный оператор, зависящий в общем случае от временных и пространственных производных. Если длительность импульса превышает характерное время релаксации возмущений показателя преломления τ , а ширина пучка больше масштаба локализации нелинейного отклика, оператор \hat{n}_2 вырождается в численный коэффициент. Характерный пример нелинейности указанного типа — эффект Керра. Наибольший вклад в этот эффект в газах вносят такие процессы, как ориентационный поворот молекул ($\tau \approx 10^{-11} \text{ с}$) и смещение электронных уровней ($\tau \approx 10^{-16} \text{ с}$) в оптическом поле [43, 44].

В зависимости от знака Δn рефракция световых лучей идет в область сильного ($\Delta n > 0$) или слабого ($\Delta n < 0$) поля. В первом случае нелинейная рефракция может привести к компенсации дифракционного расплывания лучей, т. е. к самофокусировке; во втором случае расходимость лучей увеличивается, происходит их самофокусировка.

При безынерционной нелинейности самофокусировка ведет к схлопыванию пучка, если его мощность больше критической $P_{\text{кр}}$ (при $P_0 = P_{\text{кр}}$ нелинейная расходимость равна дифракционной). Для однодомового пучка гауссова профиля $P_{\text{кр}} = 0,23 \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k_0^2 n_2}$ [45]. При $P_0 \gg P_{\text{кр}}$

изменение поперечной структуры пучка вдоль трассы в существенной степени зависит от малых возмущений в распределении поля на входе. В частности, возмущения пучка с постоянной по сечению интенсивностью I_0 являются неустойчивыми, если их угловой спектр лежит в пределах $0 < k_\perp < k_{\perp m}$ ($k_{\perp m} = 5 (I_0/P_{\text{кр}})^{1/2}$) [45, 46]. Наиболее сильно на-

растают возмущения с $k_{\perp} = \frac{k_{\perp} m}{\sqrt{2}}$ (их инкремент $\Gamma = \frac{5,8 I_0}{k_0 P_{kp}}$). Соответствующий эффект в экспериментах проявляется как распад пучка на нити.

К нерезонансным нелинейностям безынерционного типа, кроме эффекта Керра, можно отнести также и стрикцию—эффект, обусловленный действием на среду квадратичной по полю стрикционной силы $f = -\nabla \left(\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{|\mathcal{E}|^2}{16\pi}$ [45]. Если длительность лазерного импульса t_0 больше времени пробега звука поперек светового пучка $t_{zv} = r_0/v_{zv}$, то стрикционная сила приводит к локальному изменению плотности газа и, следовательно, к локальному изменению показателя преломления

$$\Delta n = n_2 |\mathcal{E}|^2, \text{ где } n_2 = \frac{\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2}{32\pi n_0 v_{zv}^2} \quad (n_2 > 0). \text{ Однако при длительности}$$

импульса, меньшей времени пробега звука поперек пучка, стрикционная нелинейность становится инерционной и связанный с ней эффект самофокусировки ослабевает.

Наибольший интерес среди инерционных нелинейных эффектов представляет нестационарная тепловая самофокусировка в слабопоглощающих газах*. Этот эффект связан с выталкиванием световых лучей из приосевой области, где показатель преломления падает из-за более сильного нагрева газа лазерным излучением. При длительности импульса, большей, чем время пробега звука поперек пучка, но меньшей времени диффузии температуры $t_d = r_0^2/\chi$ на этом же масштабе,

изменение температуры $\Delta T = \frac{\delta u_0 \epsilon_0}{8\pi\rho c_p} \int_0^t |\mathcal{E}|^2 dt$ приводит к изменению

показателя преломления:

$$\Delta n = \frac{(\epsilon_0 - 1) \delta u_0 \epsilon_0}{16\pi\rho T_0 c_p} \int_0^t |\mathcal{E}|^2 dt, \quad n_2 = \frac{(\epsilon_0 - 1) \delta u_0 \epsilon_0}{16\pi\rho c_p T_0} \int_0^t dt \times \dots \quad (\text{II.1})$$

Для характеристики тепловой самофокусировки вводится критическая энергия лазерного пучка $w_{kp} = \frac{8\rho c_p T_0}{k_0^2 \delta(\epsilon_0 - 1)}$, при достижении которой

сравниваются дифракционная и нелинейная расходимости (предполагается, что оптическое поглощение на длине трассы мало).

В том случае, когда длительность импульса t_0 превышает время диффузии температуры на масштабе пучка, изменение показателя преломления нелокально в пространстве. При этом уравнение изменения температуры записывается в виде

$$\rho c_p (\dot{T} + V \nabla T) = \kappa \Delta T + \frac{u \epsilon_0 \delta |\mathcal{E}|^2}{8\pi}. \quad (\text{II.2})$$

Здесь V —скорость потока движущегося газа. Движение может быть как независимым (например, вызванное внешним потоком газа), так и вынужденным (конвекция в поле тяжести). В последнем случае к

* Здесь имеется в виду истинное молекулярное поглощение (поглощение излучения на отдельных макрочастицах в газах [47] нами не рассматривается).

уравнению (II.2) должно быть добавлено уравнение для поля скоростей

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = -\frac{1}{\rho} \nabla p + v_d \Delta V - \frac{g T}{T_0}, \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{div} V = 0,$$

где v_d — коэффициент динамической вязкости, \mathbf{g} — ускорение свободного падения. Механизм теплопереноса, связанный с внешними потоками газа, становится преобладающим над диффузионным при $r_0 > x/\rho c_p V_{\text{вн}}$, а конвективный перенос тепла — при $r_0 > x/\rho c_p V_k$ ($V_k \approx \sqrt{\frac{\rho c_p T_0}{\delta g P_0}}$) — скорость индуцированного излучением конвективного потока газа при распространении луча поперек поля тяжести). В стационарных условиях в отсутствие внешнего и конвективного теплопереноса изменение температуры описывается уравнением $x \Delta T = -\frac{u_0 \epsilon_0}{8\pi} \delta |\mathcal{E}|^2$. Критическое значение мощности, превышение которой приводит к преобладанию нелинейной расходимости над дифракционной, оценивается в этом случае из соотношения $P_{\text{кр}} \approx \frac{(d\epsilon/dT)_p r_0^2 \delta k_0^2}{4\pi x}$ (если на длине дифракционного расплывания пучка оптическое поглощение велико, то в соотношении для $P_{\text{кр}}$ параметр δk_0^2 заменяется на единицу) [48].

2. Оценки критических параметров для газов и некоторые экспериментальные данные

Характер нелинейных эффектов, преобладающих при прохождении интенсивных световых пучков через газы, зависит как от параметров самого оптического излучения (длины волны, длительности импульса, радиуса луча), так и от свойств газовой среды (молекулярного состава, плотности и т. п.). Для выделения того или иного превалирующего процесса необходимо, прежде всего, оценить параметры, определяющие нелинейные эффекты в газах. В табл. 3 в единицах CGSE приведены нормированные на нормальное давление значения n_2 ($n_2 = n_{20} p [\text{атм}]$) для эффекта Керра (по обработке данных [44, 49–53]).

Таблица 3

Газ	Вид нелинейности	
	ориентационная	электронная
Азот	$6 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$
Кислород	$12,5 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$
Водород	$1 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-17}$
CO ₂	$60 \cdot 10^{-17}$	$18 \cdot 10^{-17}$

Значение n_2 для стрикционной самофокусировки оценивается по соотношению n_2 (ед. CGSE) $\approx 0,6 \cdot 10^{16} \frac{\alpha^2 N}{T_0}$ (α — поляризуемость молекулы газа). Из этого соотношения и таблицы следует, что стрикционная нелинейность на 1—2 порядка выше ориентационной и электронной. Однако, как уже упоминалось, время ее установления ($\sim r_0/v_{\text{зв}}$) может оказаться существенно большим длительности импульса, что

приводит к сильному ослаблению эффекта. Критическая мощность самофокусировки для ориентационной и электронной нелинейности, как правило, выше, чем значения мощности, при которых наблюдается ВМР и ВКР в газах (см. гл. I, разд. 5). Поэтому при прохождении достаточно коротких лазерных импульсов через газы, в первую очередь, следует ожидать появления ВМР и ВКР, а не эффектов самофокусировки. С этим связана, в частности, сложность экспериментального обнаружения нерезонансной самофокусировки в газах (для избежания пробоя в эксперименте необходимо использовать достаточно широкие пучки и большие длины трасс, что также ведет к дополнительным трудностям).

Критическая энергия тепловой самофокусировки при $t_0 > r_0/v_{\text{вн}}$ составляет относительно небольшую величину $W_{\text{кр}} = 9 \cdot 10^{-8} \frac{\lambda_0^2 [\text{мкм}] p [\text{атм}]}{\delta [\text{м}^{-1}] (\epsilon_0 - 1)}$ (для $T \approx 3 \cdot 10^2$ К). Для квазинепрерывного излучения критическая мощность стационарной тепловой самофокусировки в неподвижной газовой среде (в отсутствие внешних потоков и конвекции) при нормальном давлении и температуре составляет (в Bt) величину порядка $(10^{-4} - 10^{-5}) r_0^{-2} [\text{см}] \delta^{-1} [\text{м}^{-1}] \lambda_0^2 [\text{мкм}]$. Внешние потоки преобладают над диффузионным механизмом теплопереноса при $r_0 [\text{см}] \geq 0,1 v_{\text{вн}}^{-1} [\text{см}/\text{с}] \times \times \rho^{-1} [\text{амага}]$, а конвекционные — при $r_0 [\text{см}] \geq 0,1 (\delta [\text{м}^{-1}] P_0 [Bt] \times \times \rho^2 [\text{амага}])^{-1/3}$, т. е. в реальных экспериментах диффузионный теплоперенос практически не играет роли.

Таким образом, сравнивая приведенные в этом и в предыдущем разделе данные, можно заключить, что для распространяющихся в газовой среде коротких световых импульсов ($t_0 = 10^{-7} \div 10^{-8}$ с) наиболее существенны эффекты вынужденного комбинационного и молекулярного рассеяния. В то же время для длинных импульсов ($t_0 = 10^{-3} \div 10^{-5}$ с) более вероятны тепловая самофокусировка или попутное ВТР. При прохождении непрерывного излучения через газы наиболее низкопороговыми оказываются эффекты теплового самовоздействия.

III. ВЛИЯНИЕ ВР И САМОВОЗДЕЙСТВИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ГАЗАХ

Выше было показано, что наиболее низкопороговыми нелинейными эффектами, которые могут проявляться при распространении лазерного излучения в газах, являются обратное ВМР, попутные ВКР и ВТР (из-за малого смещения частоты попутное ВТР можно трактовать также как тепловое самовоздействие). Основные особенности, связанные с влиянием этих эффектов на прохождение световых пучков через газы, типичны также для других прозрачных сред (жидкости, твердые тела), однако в ряде случаев специфика газов оказывается весьма существенной и будет оговорена особо. Вначале остановимся на распространении одномодовых пучков, а затем обсудим основные черты ВР и самовоздействия в многомодовых многочастотных пучках*.

1. Прохождение одномодовых световых пучков через газы

Особенности прохождения оптического излучения через среды в условиях развитого ВР зависят, прежде всего, от направления распро-

* Под многомодовым имеется в виду лазерное излучение с малым (по сравнению с радиусом огибающей r_0) масштабом поперечной корреляции ρ_0 , а под многочастотным — излучение с малым (по сравнению с длительностью импульса t_0) временем корреляции амплитуды или фазы поля τ_0 .

странения рассеянной компоненты. С превышением порога обратного ВР основная доля энергии лазерного луча переотражается во встречном направлении [34]. В стационарных условиях, когда длительность импульса существенно превышает обратную ширину линии спонтанного рассеяния $\Delta\omega_{\text{сп}}$ и удвоенное время пробега света через характерную длину нелинейного взаимодействия, обратное ВР приводит к ограничению интенсивности проходящего излучения примерно на пороговом уровне $I_{\text{п}}$, определяемом из условия достижения полным инкрементом M значения $M_{\text{п}} \sim 30$, соответствующего нарастанию затравочного шума до мощности накачки. Если предельная длина нелинейного взаимодействия определяется длиной дифракционного расплывания коллимированного лазерного пучка $z_0 = k_0 r_0^2$ (концентрация газа постоянна вдоль трассы и поглощение отсутствует), то $M_{\text{п}} = \frac{\pi}{2} g I_0 z_0$ (см. (I.17) при $z = F = \infty$) и

$$I_{\text{п}} = \frac{2M_{\text{п}}}{\pi g z_0}. \quad (\text{III.1})$$

В нестационарном случае, когда длительность импульса t_0 меньше удвоенного времени пробега света на трассе z_0 , эффективная длина усиления стоксовой волны порядка $u_0 t_0 / 2$ (при $g I_0 \frac{u_0}{\Delta\omega_{\text{сп}}} \ll 1$) и

$$I_{\text{п}} = \frac{2M_{\text{п}}}{g u_0 t_0} \quad \text{или} \quad w_{\text{п}} = \int_0^{t_0} I_{\text{п}} dt = \frac{2M_{\text{п}}}{g u_0}. \quad (\text{III.2})$$

При попутном ВКР с превышением порога энергия лазерного луча практически полностью перекачивается в стоксову компоненту, расходимость которой определяется динамикой формирования затравочного сигнала в области, где интенсивность накачки еще не ослабла. Длина этой области $z_{\text{н}}$ определяется из условия $g I_0 z_{\text{н}} = M_{\text{п}}$ и при $I_0 > I_{\text{п}}$ равна $z_{\text{н}} = \frac{\pi}{2} \frac{z_0 I_{\text{п}}}{I_0}$. Если порог превышен не более чем в $M_{\text{п}}$ раз, то на расстояниях, меньших $z_{\text{н}}$, в поле одномодовой накачки формируется одномодовый стоксов сигнал с радиусом $r = r_0 \left(\frac{2}{g I_0 z_0} \right)^{1/4} = r_0 \left(\frac{M_{\text{п}}}{\pi} \frac{I_0}{I_{\text{п}}} \right)^{-1/4}$ и кривизной фазового фронта $R = kr^2$ [35]. В результате нелинейного преобразования в слое шириной $\frac{1}{g I_0} \left(\frac{1}{g I_0} \ll z_{\text{н}} \right)$ радиус стоксовой компоненты, в которой сосредоточивается практически вся энергия проходящего излучения, уширяется до радиуса накачки, а кривизна фазового фронта почти не изменяется. Поэтому на трассах $z > z_{\text{н}}$ расходимость излучения возрастает до значения $\frac{2r_0}{R} = \frac{2}{k_0 r_0} \left(\frac{M_{\text{п}}}{\pi} \frac{I_0}{I_{\text{п}}} \right)^{1/2}$, т. е. плотность мощности в дальней зоне насыщается. (Соответствующее значение интенсивности меньше линейного значения в $\frac{M_{\text{п}}}{\pi} \frac{I_0}{I_{\text{п}}}$ раз.)

Приведенные качественные соображения подтверждаются результатами численных экспериментов, показывающих, что превышение порога попутного ВКР приводит к ограничению приосевой интенсивности проходящего через нелинейную среду излучения (рис. 10) [54].

Интересно отметить, что попутное ВКР может сопровождаться тепловыделением в среде из-за перехода заметной доли лазерной энергии ($\sim \Omega/\omega_0$) в энергию молекулярных колебаний с последующей диссипацией. Время жизни молекулярных колебаний T_1 , определяющее инерционность процесса диссипации, зависит от вида ВКР. При КВКР это время обычно существенно больше, чем при ВВКР (например, для азота при $T \approx 3 \cdot 10^2$ К времена жизни на колебательных и вращательных уровнях в секундах по порядку величины соответственно равны $10^{-1}/p$ [атм] и $10^{-9}/p$ [атм]) [7]. Наиболее сильное тепловыделение происходит в области нелинейной перекачки (вблизи

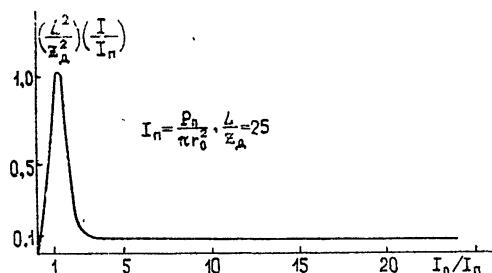


Рис. 10. Нормированная зависимость суммарной приосевой интенсивности накачки и стоксовой компоненты в дальней зоне ($z=25z_0$) от превышения над порогом.

плоскости $z=z_h$), где при $t_0 > T_1$ изменение температуры достигает величины

$$\Delta T = \frac{g \int_0^t I_0 dt}{4 \rho c_p} \frac{\Omega}{\omega}.$$

Если длительность импульса превышает время пробега звука по-перек области тепловыделения, то увеличение температуры на оси пучка приводит к уменьшению показателя преломления и дефокусировка излучения. Критическая плотность энергии стоксова импульса, при превышении которой нелинейная расходимость, связанная с влиянием дефокусирующей линзы, сравнивается с дифракционной, при $t_0 > T_1$ равна [55] $w_{kp} = \frac{k_B T_0}{2\pi^2 a(v_0 - v)}$, или по порядку величины $w_{kp} [\text{Дж/см}^2] \sim \frac{10^3}{(v_0 - v) [\text{см}^{-1}]}$.

Специфические особенности ВР в газах могут быть связаны с насыщением инициируемых полем нелинейных возмущений показателя преломления. Например, при ВКР в разреженном газе насыщение проявляется в том случае, если число стоксовых квантов, рожденных за время жизни T_1 колебательных или вращательных возбуждений, сравнивается с числом молекул, на которых происходит рассеяние данной стоксовой компоненты. Интенсивность накачки, начиная с которой сказывается насыщение числа молекул при ВКР, по порядку величины равна

$$I_n \sim \left[\frac{\hbar \omega_0 \Delta N}{g \min(t_0 T_1)} \right]^{1/2}, \quad (\text{III.3})$$

где ΔN — число комбинационно активных молекул газа в единице объема. Для импульсов, длительность которых меньше T_1 , значение I_n равно $I_n [\text{МВт/см}^2] = 1/V t_0 [\text{с}]$. Из этой оценки видно, что для наносекундных импульсов интенсивность $I_n \approx 10^4 \text{ МВт/см}^2$, т. е. сравнима с величиной, при которой сказывается штарковское смещение линий [42]. При $I_0 \gg I_n$ молекул, необходимых для рассеяния всех квантов накачки, уже не хватает и поэтому возможно «просветление» газа. Для

ВВКР оценка по формуле (III.3) дает большую величину, чем при КВКР из-за сильного различия во временах жизни T_1 . Однако структура линии ВВКР такова, что за рассеяние стоксовой компоненты с определенной частотой отвечает лишь малое число всех молекул (для азота при нормальном давлении $\Delta N/N = 0,03$). Это может привести к последовательному насыщению отдельных линий вращательного спектра. Другой специфический аспект ВКР в газах связан с малой дисперсией, приводящей к четырехфотонному взаимодействию стоксовых и антистоксовых компонент и увеличению порога. С превышением порога в этом случае возрастает не только стоксова, но и антистоксова компонента, так как параметрическая перекачка в нее энергии из стоксовой волны превышает чисто комбинационное преобразование антистоксовой компоненты в накачку [56]. С ослаблением накачки, однако, рост антистоксовой компоненты замедляется, она достигает максимума и может даже уменьшиться. В то же время стоксова компонента растет, накачка убывает до малой величины, взаимодействие волн прекращается и устанавливается постоянный уровень антистоксовой компоненты. Эти особенности взаимодействия стоксовых и антистоксовых компонент наблюдались экспериментально в водороде [56].

Эффект теплового самовоздействия, или тепловой самодефокусировки, описывается совместным решением параболического уравнения для комплексной амплитуды поля

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} + \frac{ik_0 \Delta n}{n_0} \right) \mathcal{E}_0 = 0 \quad (\text{III.4})$$

и уравнения для Δn . Характер процессов при этом, как уже отмечалось в главе II, существенно зависит от длительности лазерного импульса. В случае, когда длительность импульса меньше времени пробега звука поперек пучка $t_{\text{зв}}$, изменение показателя преломления описывается волновым уравнением с источником в правой части [59]. Результаты экспериментальных исследований [60], теоретического рассмотрения в приближении геометрической оптики [62, 63] и численного моделирования [59] показали, что в процессе распространения импульса происходит «выталкивание» поля из приосевой области с образованием резкого максимума из периферии. Следует, однако, подчеркнуть, что при $t_0 \ll t_{\text{зв}}$ нелинейное изменение показателя преломления приблизительно в $(t_{\text{зв}}/t_0)^2$ раз меньше, чем в режиме установившегося давления ($t_0 > t_{\text{зв}}$) при той же энергии импульса. Это затрудняет экспериментальное наблюдение эффекта в наносекундном диапазоне длительностей.

При длительностях импульса, превышающих $t_{\text{зв}}$, но меньших времени релаксации температурного профиля, основные особенности процесса самодефокусировки удается рассмотреть в безабберационном приближении. Пренебрегая поглощением на длине трассы, уравнение для безразмерной ширины пучка $r'_0 = k r_0$ можно записать в виде [57]

$$\frac{d^2 r'_0}{dz'^2} = \frac{1}{r'_0{}^3} + r'_0 \int_0^U \frac{dU}{r'_0{}^4}, \quad (\text{III.5})$$

где $U = W_0/W_{\text{кр}}$, $z' = z/z_0$, $z_0 = kr'_0(0)$. Для импульсов с энергией $W \gg W_{\text{кр}}$ можно пренебречь первым членом в правой части (III.5), характеризующим дифракционное расплывание пучка (приближение геометрической оптики). Тогда решение (III.5) записывается в виде $r'_0 = f(\xi)$, где $\xi = z'/\sqrt{U}$ [58]. Функция $f(\xi)$, найденная с помощью чис-

ленного интегрирования, приведена на рис. 11. Используя зависимость $f(\xi)$, можно оценить предельное значение приосевой плотности энергии прошедшего через нелинейную среду излучения в фиксированной плоскости z . Это значение в режиме нестационарной самодефокусировки не зависит от длительности импульса и равно

$$w_{\text{пп}} = \frac{W_{\text{kp}}}{r_0^2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2.$$

Более детальное исследование нестационарной тепловой самодефокусировки с учетом нелинейных aberrаций, проведенное в приближении геометрической оптики [61–63], а также выполненное нами численное моделирование процесса показали, что по мере распространения первоначально гауссова структура пучка существенно исказяется. В центре пучка образуется плато, поникающееся с ростом z , а на периферии — сначала одно, а потом несколько колец (рис. 12). В области плато поле представляет волну, близкую к сферической. Распределение поля в произвольном сечении можно характеризовать двумя величинами: значением поля на оси пучка и эффективной шириной $a_{\text{эфф}}^2 =$

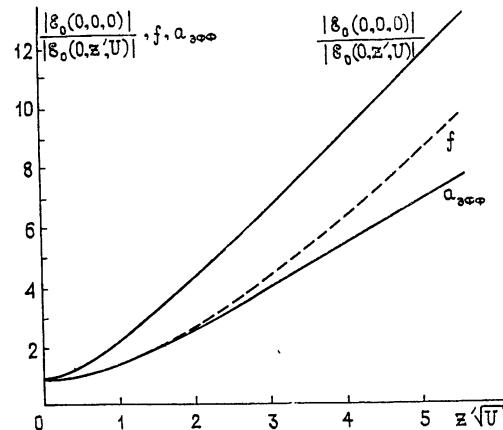


Рис. 11.

нами: значением поля на оси пучка и эффективной шириной $a_{\text{эфф}}^2 = \frac{\int |\mathcal{E}_0|^2 r^2 dS_\perp}{\int |\mathcal{E}_0|^2 dS_\perp}$. Результаты численного моделирования показывают, что при $U > 1$ обе характеристики зависят только от «геометрооптической» переменной $\xi = z'VU$ (рис. 11). При $z' > 1/VU$ пучок выходит на режим нелинейной геометрической расходимости. Дальнейшее его распространение описывается двумя значениями расходимости: $\Theta_0^{\text{нл}}$, характеризующей изменение осевой интенсивности, и $\Theta_{\text{эфф}}^{\text{нл}}$, характеризующей изменение эффективной ширины пучка. Апроксимация результатов численных счетов дает простые зависимости значений нелинейной расходимости от прошедшей энергии:

$$\Theta_0^{\text{нл}} = 2,5 VU \Theta_d,$$

$$\Theta_{\text{эфф}}^{\text{нл}} = 1,4 VU \Theta_d.$$

Существенно, что поле на оси изменяется значительно быстрее, чем ширина пучка «в целом».

Для более длинных лазерных импульсов, как уже указывалось в разд. 1 гл. II, существенную роль начинают играть процессы диффузационного или конвективного теплопереноса, причем, в реальных условиях, для не слишком узких лазерных пучков ($r_0 [\text{cm}] \geq 10^{-4} [\delta \text{ cm}^{-1}] \times P_0 [\text{Bt}] \rho^2 [\text{амага}]$) $^{-1/3}$ конвективные потоки преобладают над диффузационными. Не обсуждая подробно влияние указанных факторов на процесс тепловой самодефокусировки (см., например, [64]), заметим, что

они достаточно наглядно проявляются в эксперименте и легко могут наблюдаться визуально в реальном масштабе времени. Укажем, например, на эксперименты [65] с пучком непрерывного CO₂-лазера, проходящим через кювету, заполненную азотом с малой добавкой пропана, обеспечивающей небольшое поглощение излучения. После включения импульса в режим локального нагрева газа, когда эффекты теплопереноса пренебрежимо малы, поперечный профиль пучка с превышением энергии над критической приобретал вид кольца с провалом на оси. Далее с течением времени в условиях достаточно сильного поглощения из-за развития конвекции пучок искался: точка максимальной интенсивности смешалась вниз навстречу конвективному потоку. Время достижения максимального отклонения τ_k изменялось пропорционально параметру $(p/\delta P_0)^{1/3}$ в соответствии с теоретической оценкой по формуле $\tau_k = r_0/v_k$. Если поглощение мало, то конвекция отсутствовала и в стационарном режиме наблюдалось обычное уширение пучка при малом искажении формы поперечного профиля. Выполненные в [64] численные расчеты самодефокусировки лазерного луча в присутствии фотоабсорбционной конвекции хорошо согласуются с экспериментально наблюдаемой картиной.

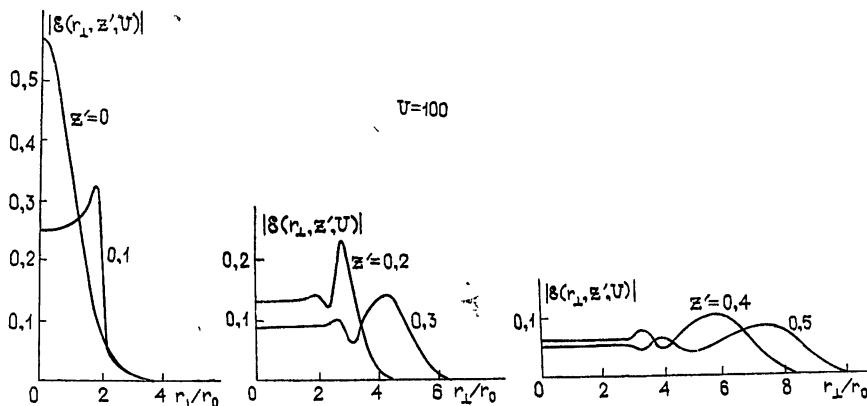


Рис. 12 Изменение поперечной структуры пучка в процессе нестационарной тепловой самодефокусировки (по результатам численного моделирования).

2. ВР и тепловое самовоздействие многомодового и многочастотного излучения

Рассмотрим вначале особенности ВР при многомодовой и одночастотной накачке. При ВР с малым смещением частоты (ВМР, врачающееся ВКР) расстройка волновых векторов стоковой компоненты и накачки составляет относительно небольшую величину и поэтому

длина взаимной корреляции этих волн* $l = \frac{p_0^2}{k^{-1} - k_0^{-1}}$ может превышать

расстояние z_n , на котором происходит нелинейная перекачка энергии (для ВМР $\frac{k_0 - k}{k_0} \sim 10^{-5}$, для ВВКР $\frac{k_0 - k}{k_0} \sim 10^{-2}$). В этом случае среди всех компонент затравочного (шумового) сигнала преимущест-

* Значение l определяет расстояние, в пределах которого пространственное распределение комплексной амплитуды волн с волновым вектором k_0 примерно совпадает с распределением комплексной амплитуды той же волны с волновым вектором k .

венным усилением будут обладать такие компоненты, у которых максимумы амплитуды поля в достаточно больших пределах области взаимодействия будут совпадать с максимумами коэффициента усиления (локального инкремента) $g\bar{I}_0$ ^{[66]*}. Порог ВР для коллимированных на входе в среду многомодовых пучков определяется из условия равенства полного инкремента на бесконечной трассе $M = \beta \frac{\pi}{2} g\bar{I}_0 z_0$

пороговому значению $M_{\text{п}} = 25 \div 30$:

$$I_{\text{п}} = \frac{2M_{\text{п}}}{\pi \beta g z_0}. \quad (\text{III.6})$$

Здесь β — коэффициент, показывающий, во сколько раз полный инкремент M у компонент, обладающих преимущественным усилением, больше инкремента \bar{M} других, слабокоррелированных с накачкой компонент (значение \bar{M} выражается через интеграл от усредненного профиля приосевой интенсивности и равно $\bar{M} = g \int_0^z \bar{I}_0(0, z) dz$). Величина β зависит от полного инкремента на длине дифракционного расплывания многомодового пучка $M_0 = g\bar{I}_0 z_0$ и параметра $\delta = \frac{k_0 - k}{k} \Theta_0 / \Theta_d$,

определенного через расстройку волновых векторов и превышение расходимости над дифракционной. Так, например, для пучка с гауссовой огибающей $\beta = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{M_0} - \frac{\delta^2}{M_0^2}$ [55]. При превышении порога попутного ВКР расстояние $z_{\text{нл}}$, на котором начинается нелинейная перекачка энергии, так же, как и в случае одномодовых пучков, определяется из условия $M = M_{\text{п}}$, или

$$\beta g\bar{I}_0 z_{\text{нл}} = M_{\text{п}}. \quad (\text{III.7})$$

Поскольку расходимость компонент, обладающих преимущественным усилением, практически совпадает с Θ_0 , то перекачка лазерной волны в стоксову в режиме развитого попутного ВКР не приведет к заметному изменению расходимости и уменьшению приосевой интенсивности проходящего излучения в дальней зоне**. (При обратном ВР, как указывалось выше, превышение порога приводит к переотражению основной доли энергии в обратном направлении, а в направлении лазерного луча проходит лишь пороговая доля энергии.) Однако этот режим сохраняется только до тех пор, пока мало усиление стоксова сигнала $M_k = g\bar{I}_0 z_k$ на длине продольной корреляции лазерного поля $z_k = k_0 \rho_0^2$ [68]. С увеличением мощности накачки, когда усиление на длине z_k становится существенным, расходимость рассеянного излучения в режиме развитого попутного ВКР может превысить расходимость лазерного пучка, поскольку перекачка энергии в стоксову волну, так же, как и в поле одномодовой накачки, происходит на длинах, малых по сравнению с продольным размером одной лучевой трубки z_k . В этом

* На трассах, превышающих $z_0 = r_0/\Theta_0$ ($\Theta_0 = 2/k_0 \rho_0$ — расходимость накачки), эффект преимущественного усиления приводит к формированию в рассеянном излучении структуры, повторяющей исходный лазерный пучок (эффект воспроизведения) [67].

** Этот вывод справедлив лишь в том случае, если влияние тепловых эффектов, связанных с диссиляцией энергии возбужденных при ВКР молекул, пренебрежимо мало.

случае в дальней зоне следует ожидать ограничения приосевой интенсивности проходящего через среду излучения. Из условия $M_k = g\bar{I}_0 z_k \sim 1$ находим, что в режиме развитого ВКР передача энергии в лазерных пучках без существенного уширения диаграммы направленности возможна вплоть до

$$I_{\max} \approx I_{\pi} \frac{\Theta_0}{\Theta_A M_{\pi}} \quad \text{или} \quad P_{\max} \approx \frac{\Theta_0^2}{k_0 g \Theta_{\pi}^2}. \quad (\text{III.8})$$

При ВР многомодовой накачки с большим смещением частоты (например, при ВКР в водороде) длина l может оказаться меньше характерной длины перекачки энергии в стоксову компоненту $z_{\text{нл}}$. В частности, если усиление на длине l относительно мало ($g\bar{I}_0 l \ll 1$), то рассеянное излучение слабокоррелировано с накачкой. Превышение порога в случае попутного ВКР приводит к перекачке энергии лазерного пучка в стоксову компоненту, распространяющуюся в пределах угла порядка $\frac{r_0}{z_{\text{нл}}} \approx \Theta_0 \frac{\bar{I}_0}{I_{\pi}}$, т. е. приосевая интенсивность излучения в дальней

зоне падает с ростом \bar{I}_0/I_{π} . Однако при дальнейшем увеличении интенсивности накачки параметр $g\bar{I}_0 l$ превышает единицу и характер процесса существенно изменяется из-за выхода на режим преимущественного усиления, при котором расходимость рассеянного излучения сравнивается с Θ_0 .

С уширением временного спектра накачки $\Delta\omega_0$ до значений, превышающих ширину линии спонтанного рассеяния $\Delta\omega_{\text{сп}}$, проявляются новые особенности ВР. Длина взаимной корреляции лазерной и стоксовой волн l определяется теперь еще одним параметром $\frac{\tau_0}{|u_0^{-1} - u^{-1}|}$.

Для попутного ВР этот параметр обычно несуществен, так как из-за малой дисперсии газов $u_0 = u$ и $l \rightarrow \infty$. В то же время для обратного ВР значение $l = \frac{u_0 \tau_0}{2}$ может составлять относительно небольшую величину.

При $l > z_{\text{нл}}$ наибольший инкремент в случае попутного ВКР имеют компоненты затравочного сигнала, у которых максимумы амплитуды поля будут совпадать с максимумами коэффициента усиления не только в пространстве, но и во времени. При $g\bar{I}_0 z_k \ll 1$ полный инкремент этих компонент для накачки с нормальным законом распределения поля равен $M = \frac{\beta}{2} \int_0^z dz g\bar{I}_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega_{\text{сп}}}{\Delta\omega_{\text{сп}} + \Delta\omega_0}\right)$. Это значение в

$\frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{\Delta\omega_{\text{сп}} + \Delta\omega_0}{\Delta\omega_{\text{сп}}}\right)$ раз превышает полный инкремент других слабо-

коррелированных с накачкой компонент*. При $\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_{\text{сп}}} \gg 1$ дискриминация

* Для обратного ВР при $l > z_{\text{нл}}$ зависимость инкремента воспроизводящих накачку стоксовых компонент от ширины линии $\Delta\omega_0$ определяется видом ее статистики. Например, для накачки с нормальным законом распределения поля \mathcal{E}_0 и лоренцевой линией в частотном спектре $M = \beta \int_0^z dz g\bar{I}_0 (1 + 2\Delta\omega_0/\Delta\omega_{\text{сп}})^{-1}$. В то же

время для накачки вида $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(z, r_{\perp}) e^{i\varphi(t)}$ как для обратного, так и попутного

ВР инкремент $M = \beta \int_0^z dz g\bar{I}_0$ вообще не зависит от ширины линии.

инкрементов достаточно велика, и в рассеянном пучке будут представлены компоненты с расходимостью Θ_0 . Поэтому в результате нелинейного преобразования расходимость проходящего излучения практически не изменяется. При увеличении интенсивности лазерного пучка до значений $g\bar{I}_0 z_k > 1$ расходимость рассеянного излучения, так же, как и в случае монохроматической накачки, может возрасти из-за сравнительно большого усиления в одной лучевой трубке.

При $l \ll z_{\text{нл}}$ характер рассеяния изменяется. Например, при $g\bar{I}_0 l \ll 1$ стоксово излучение слабо коррелировано с накачкой и полный инкремент $\bar{M} = g \int_0^z dz \bar{I}_0 \frac{\Delta\omega_{\text{сп}}}{\Delta\omega_{\text{сп}} + \Delta\omega_0}$ падает с увеличением $\Delta\omega_0$. Поскольку

в разреженных газах ширины линий спонтанного рассеяния обычно невелики ($\sim 10^9 - 10^{10} \text{ c}^{-1}$), то на протяженных трассах ($z_{\text{нл}} \gg l$) уже небольшое уширение временного спектра приводит к сравнительно быстрому подавлению обратного ВР. В то же время с увеличением мощности накачки и перехода к условию $g\bar{I}_0 l \gg 1$ возможен выход на режим преимущественного усиления с инкрементом M , слабо зависящим от $\Delta\omega_0/\Delta\omega_{\text{сп}}$ [69].

Интересные особенности имеет попутное ВР с малым смещением частоты ($l \rightarrow \infty$, $\Delta\omega_{\text{сп}} \rightarrow 0$). При накачке лазерными импульсами, длительность которых больше времени пробега звука на масштабе поперечной корреляции пучка r_0 , но меньше времени диффузии температуры на этом же масштабе, ВР нестационарно и полный инкремент M_k на длине продольной корреляции z_k равен $(g_T w_0 z_k)^{1/2}$ (см. (I.12)). При $(g_T \bar{w}_0 z_k)^{1/2} \sim \left(\frac{W_n}{W_{kp}}\right)^{1/2} \ll 1$ ($W_n = \pi r_0^2 \bar{w}$ — энергия пучка на масштабе поперечной корреляции, W_{kp} — введенное выше значение критической энергии) компоненты, обладающие преимущественным

усилением, имеют не зависящий от $\Delta\omega_0$ инкремент $M = \left(g_T \frac{\theta}{2} \int_0^z \bar{w}_0 dz\right)^{1/2}$

(предполагается, что $\Delta\omega_0 t_0 \gg 1$). Пороговая энергия оценивается из условия $M = M_{\text{п}}$. Учитывая, что для попутного ВР $M_{\text{п}} \approx 2$, находим $W_{\text{п}} = \frac{\Theta_0}{\Theta_d} W_{kp}$. Превышение этой величины хотя и приводит к перекачке энергии вверх по частоте (при $(\partial e / \partial T)_p < 0$), однако, так же, как и в рассмотренных выше случаях, практически не изменяет расходимость проходящего излучения. В то же время, если $(W_n/W_{kp})^{1/2} > 1$, возможно существенное увеличение расходимости. Особенности такого процесса удобно проследить, рассматривая попутное ВР как эффект теплового самовоздействия. Антистоксово смещение частоты в этом случае есть следствие обычного нагрева среды, а уменьшение приосевой интенсивности в дальней зоне можно оценить, используя полученное в безаберрационном приближении уравнение для эффективного радиуса светового луча [70]. Соответствующее уравнение, записанное в безразмерных переменных, совпадает с (III.5) с той лишь разницей, что значение $U = W_n/W_{kp}$ определяется теперь как отношение энергии пучка на масштабе неоднородности $W_n = \frac{r_0^2}{r_0^2} W_0$ к критической, а координата $z' = z/z_0$ нормирована на дифракционную длину $z_0 = r_0/\Theta_0$ (для многомодового многочастотного излучения уравнение (III.5) спра-

ведливо при $U < (\Delta\omega_0 t_0)^{1/2}$ [70]. Поэтому все выводы, касающиеся решения (III.5), сохраняются и для многомодовых пучков. В частности, при $W_n \gg W_{kp}$ приосевая плотность энергии проходящего в дальную зону излучения насыщается на уровне $\omega_{pr} = \frac{W_{kp} z_0^2}{\rho_0^2 z^2} = \frac{W_{kp} k_0' r_c^2}{z^2}$.

Исследования нерезонансных эффектов ВР и самовоздействия в газах, частично отраженные в настоящей работе, далеки от завершения. В теоретическом плане, например, представляется важным изучение процессов насыщения при ВКР, в частности, в условиях, когда существенны эффекты параметрического смешения квазимохроматических стоксовых компонент. Необходимо выяснение роли эффекта Штарка в процессе развития ВР, в первую очередь, в газах при низком давлении, когда ширины спонтанных линий составляют относительно небольшую величину. Интересно экспериментальное исследование влияния указанных факторов на распространение оптического излучения.

В газах, помимо рассмотренных в этой работе, возможно большое число других нелинейных эффектов, как резонансного (резонансные ВКР, самофокусировка, параметрические процессы в газах с наложенным постоянным полем и т. п.), так и нерезонансного типа (например, оптический пробой и связанные с ним эффекты самовоздействия). Изучение этих явлений, их зависимости от давления, длительности импульса и других параметров представляет самостоятельный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. A: D. Wood et al., *Appl. Opt.*, **10**, № 8, 1877 (1971).
2. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопулло, *ЖЭТФ*, **61**, 2(8), 520 (1971); Изв. вузов—Радиофизика, **12**, № 12, 1792 (1969).
3. N. Bloembergen et al., *IEEE, QE-3*, № 5, 197 (1967).
4. R. W. Minck, E. E. Hagenlocker and W. G. Rado, *Appl. Phys.*, **38**, № 5, 2254 (1967).
5. В. С. Авербах, А. И. Макаров, В. И. Таланов, *Квантовая электроника*, **5**, № 4, 823 (1978).
6. M. E. Mack et al., *Appl. Phys. Lett.*, **16**, № 5, 209 (1970).
7. E. E. Hagenlocker, R. W. Minck and W. G. Rado, *Phys. Rev.*, **154**, № 2, 154 (1967).
8. В. А. Алексеев, И. И. Собельман, *ЖЭТФ*, **55**, № 5, 1874 (1968).
9. A. D. May, S. C. Stryland and G. Varghese, *Canad. J. Phys.*, **48**, № 19, 2331 (1970).
10. P. Dion and A. D. May, *Canad. J. Phys.*, **51**, № 1, 36 (1973).
11. W. H. Fletcher and J. S. Rysdyk, *J. Raman Spectr.*, **2**, № 3. (1974).
12. J. Bendisen, *J. Raman Spectr.*, **2**, 133 (1974).
13. A. Hirth and K. Vollrath, *Opt. Commun.*, **18**, № 2, 71 (1976).
14. J. P. Taran, *Tunable laser and applications*, Springer, N. Y., 1976.
15. K. S. Jammn, G. E. St. John and H. L. Welsh, *Canad. J. Phys.*, **44**, № 4, 797 (1966).
16. E. J. Allina et al., *Appl. Opt.*, **6**, № 10, 1597 (1966).
17. B. K. Gupta and A. D. May, *Canad. J. Phys.*, **50**, № 1, 1747 (1972).
18. C. M. Penney, R. L. St. Peters and M. Lapp, *JOSA*, **64**, № 5, 712 (1974).
19. W. R. Fenniger et al., *JOSA*, **63**, № 1, 73 (1973).
20. H. A. Huatt et al., *JOSA*, **63**, № 12, 1064 (1973).
21. Ю. А. Ильинский, Р. В. Хохлов, *ЖЭТФ*, **64**, № 4, 1216 (1973).
22. Ю. А. Ильинский, В. Д. Тарапухин, *Квантовая электроника*, **1**, № 2, 401 (1974).
23. В. В. Морозов, *Труды ФИАН*, **58**, 80 (1972).
24. E. E. Hagenlocker, R. W. Minck and W. G. Rado, *Phys. Rev.*, **154**, 226 (1967).
25. В. И. Ковалев, В. И. Поповичев, В. В. Рагульский, Ф. С. Файзуллов, сб. *Квантовая электроника*, под ред. Н. Г. Басова, № 1(7), 78 (1972).
26. T. T. Saito et al., *J. Opt. Soc. Amer.*, **60**, 749 (1970).
27. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**, 511 (1954).
28. S. Yip and M. Nelkin, *Phys. Rev.*, **135**, 1241 (1964).
29. A. Sugawara and S. Yip, *Phys. Fluids*, **10**, 1911 (1967).

30. T. J. Greytak and G. B. Венедек, Phys. Rev. Lett., 17, 179 (1966).
 31. В. С. Авербах, А. И. Макаров, В. И. Таланов, Квантовая электроника, 2, № 10, 2207 (1975).
 32. T. F. Morse, Phys. Fluids, 7, 159 (1964).
 33. Г. Кнезер, в кн. Физическая акустика, под ред. Н. Мэзона, 2, часть А, изд. Мир, М., 1968, стр. 155.
 34. В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 10, 1433 (1970).
 35. А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, сб. Квантовая электроника, 4(16), 60 (1973).
 36. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
 37. M. P. Lallewand and A. M. Longequene, C. R. Acad. Sci., Paris, 269, № 21, 1101 (1969).
 38. A. M. Longequene and M. P. Lallewand, C. R. Acad. Sci., Paris, 269, № 22, 1173 (1969).
 39. A. M. Cazabat-Longequene, C. R. Acad. Sci., Paris, 272, № 10, 607 (1971).
 40. D. H. Rank et al., JOSA, 56, № 2, 174 (1966).
 41. А. З. Грасюк, Квантовая электроника, 1, № 3, 485 (1974).
 42. В. С. Авербах, А. И. Макаров, В. И. Таланов, Письма в ЖТФ, 3, № 7, 322 (1977).
 43. M. Paillette, Ann. Phys., 4, 671 (1969).
 44. И. Л. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965.
 45. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1968.
 46. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 471 (1966).
 47. В. И. Букатый, Ю. Д. Копытин, С. С. Хмелевцов, сб. Квантовая электроника, № 1(13) (1973).
 48. А. П. Сухоруков, сб. Нелинейные процессы в оптике, изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1970.
 49. A. O. Bickingham, M. P. Bogaard, D. A. Dunmire, C. R. Hobbs and B. J. Orr, Trans. Far. Soc., 66, 1548 (1970).
 50. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика, Гостехиздат, М., 1951.
 51. R. L. Rowell, G. M. Aval and J. J. Vaggett, J. Chem. Phys., 54, 1960 (1971).
 52. J. F. Ward and G. H. C. New, Phys. Rev., 185, 57 (1969).
 53. N. G. Rado, Appl. Phys. Lett., 2, 123 (1967).
 54. А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, Л. В. Пискунова, Квантовая электроника, 2, № 11, 2403 (1975).
 55. В. И. Беспалов, А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 7, 961 (1978).
 56. В. С. Бутылкин, Г. В. Венкин, В. П. Протасов, Н. Д. Смирнов, Ю. Г. Хронопулло, М. Ф. Шалеев, Письма в ЖЭТФ, 9, № 8, 400 (1973).
 57. В. А. Петрищев, В. И. Таланов, сб. Квантовая электроника, № 6, 36 (1971).
 58. В. А. Алешкевич и др., Письма в ЖЭТФ, 13, № 1, 55 (1971).
 59. P. B. Ulrich and J. Wallace, JOSA, 63, 8 (1973).
 60. R. W. O'Neil, H. Kleiman and Lowder, Appl. Phys. Lett., 24, 118 (1974).
 61. J. R. Kepemuth, C. B. Hodge and P. V. Avizonis, Appl. Phys. Lett., 18, 220 (1970).
 62. J. H. Hayes, Appl. Opt., 11, 455 (1972).
 63. A. H. Aitken, J. N. Hayes and P. B. Ulrich, Appl. Opt., 12, 193 (1972).
 64. В. А. Петрищев, Диссертация, Горький, 1975.
 65. В. А. Петрищев, Н. М. Шеронова, В. Е. Яшин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 963 (1975).
 66. Б. Я. Зельдович, В. И. Поповичев, В. В. Рагульский, Ф. С. Файзуллов, Письма в ЖЭТФ, 15, 160 (1972).
 67. В. И. Беспалов, А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, Письма в ЖТФ, 3, № 5, 215 (1977).
 68. В. И. Беспалов, А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 5, 791 (1977).
 69. Г. А. Пасманик, Г. И. Фрейдман, Квантовая электроника, 1, № 3, 547 (1974).
 70. Г. А. Пасманик, ЖЭТФ, 66, № 2, 490 (1974).
 71. M. A. Kovacs and M. E. Mack, Appl. Phys. Lett., 20, № 12, 487 (1972).
 72. В. С. Авербах, А. И. Макаров, А. К. Потемкин, Тезисы докладов на IX Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, г. Ленинград, 1978 г., т. 2, стр. 197.

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СДВ-СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ МНОГОМОДОВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА И КАНАЛА СВЯЗИ

В. Г. Безродный, Р. С. Шубова

В работе показано, что при многомодовом распространении статистические свойства СДВ-сигнала зависят от его регулярных параметров. Предложена методика, позволяющая по набору статистических характеристик сигнала — дисперсии флуктуаций амплитуды, фазы и их взаимному коэффициенту корреляции — определить его регулярные параметры и (выделив вклад регулярного фактора из результирующих статистических данных) перейти от случайных изменений сигнала к вариациям параметров неоднородной ионосферы.

При распространении сверхдлинных радиоволн в волноводном канале Земля — ионосфера существуют достаточно протяженные интервалы дистанций (порядка тысяч километров), на которых поле носит многомодовый характер. Экспериментальные исследования показали, что на таких дистанциях статистические характеристики сигнала очень сильно изменяются от суток к суткам. Весьма хаотический, на первый взгляд, характер этих изменений можно, однако, систематизировать. Для этого необходимо учесть, что на статистические свойства сигнала в условиях многомодового распространения, кроме случайных факторов, существенно влияют регулярные параметры канала, определяющие положение наблюдателя по отношению к интерференционной картине поля [1]. Настоящая работа ставит своей целью разделение в указанных статистических характеристиках регулярного и случайного факторов, определение регулярных параметров сигнала и характеристик неоднородностей нижней ионосферы.

Аналогично работе [2], в которой исследовалось влияние интерференционного характера поля на корреляционные соотношения параметров сигнала, воспользуемся для анализа двухмодовой моделью волновода. Такая модель широко используется для описания регулярных явлений в волноводе Земля — ионосфера (см., например, [3]). В данном же случае ее применимость необходимо обосновать особо, поскольку, как будет показано ниже, одной лишь малости уровня высших мод оказывается недостаточно для пренебрежения их вкладом во флуктуации результирующего поля.

Сформулируем соответствующие ограничения. Для этого воспользуемся данными работы [1], в которой исследовались флуктуации сигнала, вызванные случайными изменениями высоты волновода. Согласно полученным в ней результатам, вклад отдельной нормальной волны в вариации суммарного поля оказывается пропорциональным величине $E_i \left| \frac{dx_i}{dh} \right|$, где E_i и $\frac{dx_i}{dh}$ — соответственно амплитуда i -й волноводной

моды и производная по высоте ее постоянной распространения. Сказанное позволяет записать ограничения на уровень нормальных волн высших номеров, допускающие использование двухмодового приближения. Формулируя соответствующие условия применительно к первой из неучтенных мод, третьей, как максимальной по величине, приходим в итоге к неравенству

$$\frac{E_3}{E_2} \left| \frac{d\mathbf{x}_3/dh}{d\mathbf{x}_2/dh} \right| \ll 1. \quad (1)$$

Везде в дальнейшем будем считать соотношение (1) выполненным, в соответствии с чем поле в точке приема представим в виде

$$E = E_1 e^{i\varphi_1} (1 + ae^{i\varphi}) = A e^{i\Psi}, \quad (2)$$

где $a = E_2/E_1$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз первой и второй мод. Как и в работе [2], будем полагать, что вследствие большей изменчивости второй моды флуктуации результирующего поля обусловлены лишь случайными изменениями δE_2 , $\delta\varphi_2$ или, что то же, вариациями δa соотношения амплитуд и $\delta\varphi$ разности фаз:

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial a} \delta a + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \delta\varphi, \\ \delta\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial a} \delta a + \frac{\partial\Psi}{\partial \varphi} \delta\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует, что вариации δA амплитуды и $\delta\Psi$ фазы результирующего поля связаны с регулярными параметрами сигнала a и φ посредством входящих в формулу производных. На рис. 1 приведены зависимости $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial a}$, $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial\varphi}$, $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a}$ от разности фаз мод φ при различных фиксированных значениях соотношения амплитуд a ($\varphi < 0$), так как фазовая скорость второй моды v_Φ , всегда больше v_{Φ_1}). Видно, что сложный немонотонный характер приведенных зависимостей может существенно повлиять на результирующие статистические данные.

Разделить вклады регулярного и случайного факторов в статистических характеристиках величин δA и $\delta\Psi$ удается только в тех случаях, когда мы располагаем некоторой априорной информацией о статистике величин δa и $\delta\varphi$. Из общих положений теории распространения волн в случайно-неоднородных средах [1, 4] следует возможность существования трех предельных случаев:

$$1) \sigma_a^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\delta a}{a} \right)^2 \right\rangle = 0, \quad \sigma_\varphi^2 \equiv \langle (\delta\varphi)^2 \rangle \neq 0; \quad (4)$$

$$2) \sigma_a^2 \neq 0, \quad \sigma_\varphi^2 = 0; \quad (5)$$

$$3) \sigma_a^2 = \sigma_\varphi^2, \quad \langle \delta a \delta\varphi \rangle = 0 \quad (6)$$

(здесь косые скобки означают статистическое усреднение). Два первых случая реализуются, когда флуктуации параметров сигнала обусловлены неоднородностями с характерными горизонтальными масштабами l , значительно превышающими поперечный размер $\sim V\lambda D$ зоны Френеля (λ — длина волны, D — дистанция). Третий — при выполнении обратного неравенства. Причем, (4) имеет место, когда при единичном акте рассеяния нормальной волны на случайных неоднородностях,

флуктуирует только ее фазовая скорость, (5) — только поглощение. Раздельное существование ситуаций (4) и (5) является особенностью волновода Земля — ионосфера и оказывается возможным благодаря тому, что основной вклад в вариации амплитуд и фаз нормальных волн вносят разные по высоте области ионосферы [3].

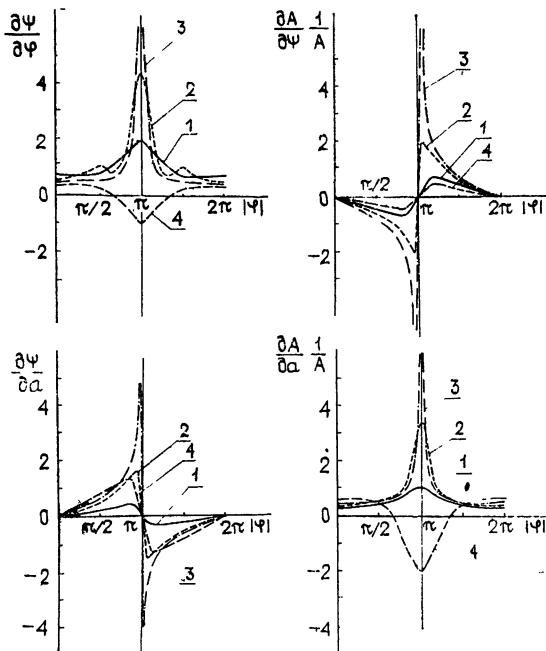


Рис. 1. Производные амплитуды и фазы результирующего поля как функции параметров α и φ ($1 - \alpha = 2$; $2 - \alpha = 1,3$; $3 - \alpha = 1,1$; $4 - \alpha = 0,5$).

В соответствии с предельными случаями (4) — (6) формула (3) приводит к выражениям

$$1) \sigma_\Psi \equiv \sqrt{\langle (\delta\Psi)^2 \rangle} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \sigma_\varphi, \\ \sigma_A \equiv \sqrt{\langle \left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 \rangle} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \sigma_\varphi, \\ K_{A\Psi} \equiv \frac{1}{\sigma_A \sigma_\Psi} \left\langle \frac{\delta A}{A} \delta\Psi \right\rangle = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right); \quad (7)$$

$$2) \sigma_\Psi = a \frac{\partial \Psi}{\partial a} \sigma_a, \quad \sigma_A = \frac{a}{A} \frac{\partial A}{\partial a} \sigma_a, \quad (8)$$

$$K_{A\Psi} = \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial a} \right);$$

$$3) \sigma_\Psi = \sigma_A = \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(a \frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)^2 \right\}^{1/2} \sigma_\varphi = \frac{1}{A} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(a \frac{\partial A}{\partial a} \right)^2 \right\}^{1/2} \sigma_\varphi, \\ K_{A\Psi} \equiv 0. \quad (9)$$

Из (7)–(9) следует, что такие статистические характеристики сигнала, как соотношение стандартов флуктуаций σ_ψ / σ_A и коэффициент корреляции $K_{A\psi}$, в предельных случаях (4)–(6) от случайных факторов не зависят и определяются только регулярными параметрами a , φ .

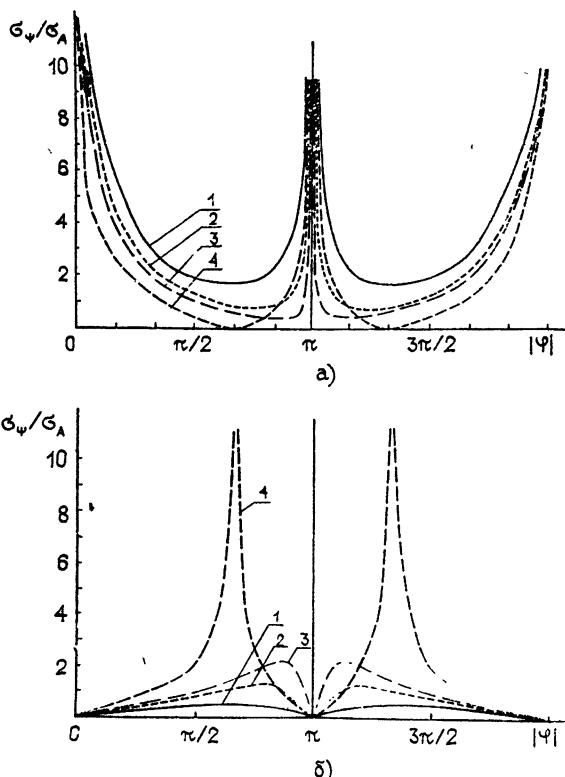


Рис. 2. Соотношение стандартов вариаций σ_ψ / σ_A при «фазовых» (а) и «амплитудных» (б) флуктуациях волноводных мод ($1 - a = 2$; $2 - a = 1,3$; $3 - a = 1,1$; $4 - a = 0,5$).

Зависимость σ_ψ / σ_A от a и φ при «фазовых» (4) и «амплитудных» (5) флуктуациях в модах приведены на рис. 2 (в случае (6) $\sigma_\psi / \sigma_A \equiv 1$). Из графиков видно, что кривые в случаях (4) и (5) ведут себя существенно разным образом. Наибольшие отличия наблюдаются в окрестности точек $|\varphi| = 0, \pi, 2\pi$, где при «фазовых» изменениях имеют место максимальные, а при «амплитудных» — минимальные отношения. Для соотношения амплитуд мод $a \geq 1,3$ (при любых значениях $|\varphi|$) в случае (4) $\sigma_\psi / \sigma_A > 1$, в случае (5) — $\sigma_\psi / \sigma_A < 1$.

Так как в случаях (4), (5) $|K_{A\psi}| = 1$ (в случае (6) $K_{A\psi} = 0$), то исследование корреляционных зависимостей сводится лишь к анализу поведения знака $K_{A\psi}$. На рис. 3 в плоскости $a, |\varphi|$ показаны области положительных и отрицательных значений функции $K_{A\psi}$. Из рисунка видно, что при $a > 1$ смена знака $K_{A\psi}$ при изменении величины $|\varphi|$ от 0 до 2π происходит только при $|\varphi| = \pi$. Более подробное исследование вопроса о знаках корреляционных соотношений можно найти в работе [2].

Полученные результаты могут быть использованы для решения обратной задачи — определения по экспериментальным статистическим

данным регулярных параметров сигнала и параметров, характеризующих неоднородность волноводного канала. Проиллюстрируем указанную возможность на примере. Для этого воспользуемся результатами измерений амплитуды и фазы сигналов станции НАА (частота $f = 17,8 \text{ кГц}$), полученными в ИРЭ АН УССР на трассе протяженностью $D \sim 7000 \text{ км}$ в ночные времена суток.

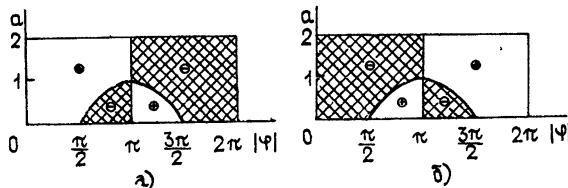


Рис. 3. Знак коэффициента взаимной корреляции $K_{A\Psi}$:
а) „амплитудные“ флюктуации, б) „фазовые“ флюктуации.

Предварительно грубо оценим возможные пределы изменений регулярных параметров a и φ в точке наблюдения, а также установим соответствие условий эксперимента расчетной модели. Обратимся с этой целью к данным работ [3, 5, 6]. Как показал их анализ, характеристики распространения СДВ-полей, приведенные в каждой из работ, существенно отличаются друг от друга. В частности, согласно [6] нормальные волны высших номеров должны затухать в волноводе Земля—ионосфера значительно слабее, чем это следует из [5]. Данные [3] занимают в этом смысле промежуточное положение между [5] и [6]. Не углубляясь в обсуждение достоинств и недостатков каждой из цитированных работ, определим возможность использования приведенных в них результатов для описания интересующих нас экспериментальных наблюдений. При этом будем руководствоваться тем, насколько хорошо расчет позволяет воспроизвести регулярные суточные изменения амплитуды и фазы сигнала. Приведенные оценки такого рода показали, что непосредственное применение данных [3, 5, 6] не позволяет описать условий измерений. Тем не менее, основываясь на их результатах, удалось подобрать параметры распространения нормальных волн, наилучшим образом удовлетворяющие сформулированному выше критерию. В итоге, в предположении о том, что колебания средней высоты ночной ионосферы от суток к суткам могут происходить в интервале $80 \div 90 \text{ км}$, получаем следующие значения искомых регулярных параметров: $a \sim 1,3 \div 2,4$; $\varphi \sim -(320 \div 100)^\circ$. Наконец, оценим возможность применения двухмодового приближения для интерпретации данных наблюдений. Подставляя для этого в (1) соответствующие величины, получим $\frac{E_3}{E_2} \left| \frac{d\kappa_3/dh}{d\kappa_2/dh} \right| \sim 0,3$, что в общем удовлетворительно согласуется с требованиями указанного неравенства.

Выберем теперь два набора величин σ_A , σ_Ψ , $K_{A\Psi}$. Один из них — $\sigma_A = 0,14$, $\sigma_\Psi = 0,22$, $K_{A\Psi} = -0,48$ (22.02.1975 г.) — будем сопоставлять случаю «фазовых» вариаций. Второй — $\sigma_A = 0,15$, $\sigma_\Psi = 0,14$, $K_{A\Psi} = 0,61$ (16.02.1975 г.) — случаю «амплитудных» вариаций. Такое разделение удается сделать, поскольку ранее было показано, что при $a > 1,3$ критерием принадлежности реализации к одному из случаев (4) или (5) является неравенство $\sigma_\Psi/\sigma_A > 1$, либо $\sigma_\Psi/\sigma_A < 1$. Погрешности определения используемых экспериментальных данных составля-

*Величина $|\varphi|$ приведена к интервалу $(0,2\pi)$.

ют $\sim 15\%$ для стандартов флуктуаций и $\sim 40\%$ — для коэффициентов корреляции. В результате поставленная задача сводится к определению по трем измеренным величинам σ_A , σ_Ψ , $K_{A\Psi}$ трех параметров сигнала: a , φ , σ_φ — в первом случае, a , φ , σ_a — во втором.

Используя приведенные на рис. 3 зависимости для знака $K_{A\Psi}$, находим, что в обоих случаях возможные значения $|\varphi|$ лежат между $|\varphi| = \pi$ и $|\varphi| = 2\pi$. Нанеся экспериментальные значения σ_Ψ/σ_A на кривые рис. 2, получаем две области параметров a и φ (в окрестности $|\varphi| = \pi$ и вдали от нее). Руководствуясь достаточно большой величиной $|K_{A\Psi}|$, выберем вторую из указанных областей, так как вблизи от $|\varphi| = \pi$ за счет смены знака коррелятора его модуль должен быть мал. В результате искомые регулярные параметры оказываются следующими: в случае «фазовых» вариаций $a = 1,8 \pm 0,5$; $\varphi = -(215^\circ \pm 10^\circ)$; в случае «амплитудных» — $a = 1,4 \pm 0,2$; $\varphi = -(240^\circ \pm 20^\circ)$; разброс величин a и φ обусловлен погрешностями экспериментального определения исходных статистических данных, а также плавностью расчетных кривых.

Зная параметры сигнала a и φ , с помощью кривых рис. 1 определяем значения входящих в формулы (7), (8) производных (соответствующих центральным значениям a и φ). Исключая их из экспериментальных значений σ_A и σ_Ψ , характерный размах флуктуаций параметров второй моды оценим величинами $\sigma_{\varphi_2} \sim 0,24$ («фазовые» вариации), $\sigma_E \sim 0,16$ («амплитудные» вариации). От флуктуаций фазы второй моды можно попытаться перейти к флуктуациям параметров волноводного канала. Так, предполагая, что «фазовые» флуктуации (4) сигнала обусловлены случайными изменениями высоты волновода, определим характерный размах σ_h этих изменений. Согласно результатам работы [1]

$$\sigma_{\varphi_2} = V \overline{Dl} \frac{d \kappa_2}{dh} \sigma_h, \quad (10)$$

откуда при горизонтальных масштабах неоднородностей ионосферы $l \sim 300$ км получаем оценку $\sigma_h \sim 2$ км.

Таким образом, результаты проведенного рассмотрения, проиллюстрированные анализом экспериментальных данных, показали следующее.

1) Совместное исследование статистических свойств амплитуды и фазы СДВ-сигнала позволяет получить информацию как о параметрах самого сигнала, так и о некоторых характеристиках неоднородностей ионосферы.

2) В волноводе Земля — ионосфера возможны условия, когда в статистические свойства результирующего сигнала преобладающий вклад вносят вариации либо только амплитуд, либо только фаз волноводных мод.

3) Предложена методика (в модели двухмодового распространения), которая позволяет разделить в статистических характеристиках результирующего поля вклады регулярного и случайного факторов, что в свою очередь открывает возможность для их раздельного исследования.

В заключение авторы выражают благодарность Л. Н. Моисеенко за помощь в представлении графического материала и сотрудникам кафедры радиофизики НИИФ ЛГУ за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 12, 1875 (1972)
2. В. Г. Безродный, Р. С. Шубова, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 3, 337 (1977)
3. П. Е. Краснушкин, Н. А. Яблочкин, Теория распространения сверхдлинных волн в применении к проблемам дальней связи и навигации, Тр. Гос. НИИ, 4(12), 5, М., 1955.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. А. Б. Орлов, Г. В. Азарин, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, № 10, 3 (1970).
6. Г. Ф. Ременец, Геомагнетизм и аэрономия, **13**, № 5, 857 (1973).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
13 июня 1977 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF VLF-SIGNALS UNDER MULTI-MODE PROPAGATION CONDITIONS. DETERMINATION OF SOME PARAMETERS OF THE SIGNAL AND COMMUNICATION CHANNEL

V. G. Bezrodny, R. S. Shubova

It is shown that with the multi-mode propagation the statistic properties of VLF-signals depend on its regular parameters. The method is suggested which allows one to determine its regular parameters according to a set of statistic characteristics of the signal — the dispersion of the amplitude and phase fluctuations and their mutual correlation coefficient. Having defined the contribution of the regular factor from resulting statistical data one can also pass from random changes of the signal to the inhomogeneous ionosphere parameter variations.

УДК 621.391 244

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ

И. Н. Пресняков, С. С. Смольянинов, М. И. Кочкин

Рассматриваются особенности представления и первичной обработки сигналов некогерентного рассеяния радиоволн в ионосфере. Оценивается возможность использования универсальных ЭВМ для первичной обработки сигналов некогерентного рассеяния (НР). Анализируется метод первичной обработки с применением промежуточного спектрального базиса. На основе предлагаемого метода синтезируется структура устройства первичной обработки, состоящая из специализированного процессора, вычисляющего спектральные коэффициенты в промежуточном базисе, и универсальной ЭВМ. Приводятся результаты моделирования предлагаемого устройства на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Из теории метода некогерентного рассеяния (НР), применяемого для исследования ионизированного околоземного пространства (ионосферы), следует, что информация о большом числе параметров среды может быть получена на основе тщательно выполненного анализа общей структуры и формы ионной компоненты спектра (корреляционной функции), рассеянного ионосферной плазмой зондирующего сигнала радиолокатора (см., например, [1]).

Потенциальные возможности в точности измерений в условиях, обусловленных спецификой метода НР (длительное усреднение результатов измерений порядка 10—15 мин и более, большие массивы входных данных и большой их динамический диапазон, наличие большого числа измерительных каналов и требование строгой идентичности их характеристик и т. д.), могут быть достигнуты, вероятно, только при применении цифровых методов обработки сигналов. Однако многие теоретические оптимальные алгоритмы обработки сигналов НР еще не могут быть реализованы на существующих ЭВМ. Ограничивающим фактором здесь является необходимость выполнения большого числа вычислительных операций в реальном масштабе времени. Поэтому при технической реализации измерений спектральных характеристик сигналов НР в настоящее время применяют неоптимальные методы спектрального анализа, позволяющие сократить число вычислительных операций, либо повысить быстродействие за счет существенного их упрощения. К таким методам относится метод знаковой корреляции, метод квантования сигнала на малое число уровней (грубого квантования) [2], метод излучения последовательности импульсов малой длительности и определения корреляции между отраженными сигналами, соответствующими этим импульсам [3] и др.

Одновременно с упрощением вычисления спектра все эти методы приводят к существенному увеличению дисперсии измерений, что требует, в конечном итоге, увеличения времени усреднения данных примерно в 2 раза и более, и к появлению присущих этим методам систематическим ошибкам измерения и нелинейным искажениям сигнала.

С другой стороны, при выполнении исследований возмущенной ионосферы (например, в периоды восхода и захода Солнца, при исследовании ионосферы полярных широт и др.) желательно уменьшить время измерений, так как упомянутое выше разрешение измерений по времени становится неприемлемым.

1. ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В действующих станциях НР, описанных в литературе (см., например, [1]), с целью сокращения объема вычислений частота квантования выбирается минимально возможной. При этом, однако, исключается возможность измерения асимметрии спектра и доплеровских сдвигов сигналов НР, т. е. таких параметров сигнала, которые заключают в себе весьма важную информацию о характере и скорости дрейфа ионосферной плазмы. Для сохранения этой информации необходимо несущую частоту $f_{\text{пр.ч.вых}}$ сигнала на входе аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и частоту квантования f_t его выбрать из условий

$$f_{\text{пр.ч.вых}} \geq \frac{1}{2} \Delta f_{\text{a max}}, \quad f_t \geq 2 \Delta f_{\text{a max}},$$

где $\Delta f_{\text{a max}}$ — максимальная активная ширина ионной компоненты спектра сигнала НР в пределах исследуемого диапазона высот ΔH ионосферы, ограниченного высотами H_{\min} и H_{\max} . Для радиолокатора, работающего на несущей частоте f_0 около 1000 Гц при $H_{\max} \approx 1000 \text{ км}$ и $H_{\min} \approx 100 \text{ км}$, величина $\Delta f_{\text{a max}}$ практически не должна превышать 50 кГц, т. е. для такого радиолокатора $f_{\text{пр.ч.вых}}$ и f_t могут быть выбраны соответственно 25 и 100 кГц.

В пределах периода радиолокационной развертки дискретизуется только часть ее длительностью Δt , соответствующая диапазону высот ΔH . При вертикальном импульсном зондировании частота повторения f_p импульсов передатчика обычно выбирается равной 50 Гц (период повторения $T_p = 20 \text{ мс}$). Если $H_{\max} = 1000 \text{ км}$, то $\Delta t = 6 \text{ мс}$ и, следовательно, устройство обработки должно в течение интервала времени около 12 мс, следующего за исследуемым участком развертки, осуществить анализ $\Delta t f_p = 6.0 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^3 = 600$ чисел.

Разрядность каждого числа определяется количеством уровней квантования n , которое в рассматриваемых здесь исследованиях может быть рассчитано по формуле [4]

$$n = \alpha \sqrt{\frac{3}{\delta_{\max}^2} \left(1 + \frac{1}{q_{\min}^2} \right)},$$

где δ_{\max} — максимальная относительная погрешность определения автокорреляционной функции сигнала НР в точке τ , $q^2 = \sigma_s^2 / \sigma_N^2$ — отношение сигнал/шум по мощности на входе АЦП, σ_s^2 , σ_N^2 — соответственно дисперсии сигнала и шума на входе АЦП, q_{\min} — минимальная величина q в пределах исследуемого диапазона высот ΔH , α — коэффициент нестабильности напряжения на входе АЦП.

При $\delta_{\max}^2 = 1\%$ (приемлемая ошибка для измерения большого числа параметров в методе НР), $q_{\min}^2 = 0.01$ (характерная величина для области H_{\max}), $\alpha \approx 1.3$ получим $n = 225$, что соответствует 256 (2^8) уровням квантования АЦП.

На форму представления входных данных устройства обработки, в частности длительность выборки, накладывает ограничение разре-

шающая способность измерений по высоте. Последняя, как известно, ограничена из-за наличия аппаратурных эффектов сглаживания энергетического спектра $G_\Phi(f)$ флюктуаций плотности ионосферной плазмы временными окнами длительностью τ_c , соответствующими операциям коммутации радиосигнала в передатчике и приемнике, и частотным окном фильтров спектра-анализатора. Временное окно (стробирование) и частотное окно с его расширением и отклонением от прямоугольной формы увеличивают степень сглаживания спектра и при наличии шума существенно ухудшают точность определения параметров ионосферы по измеренному спектру $G_e(f)$. Легко показать, что для измерения большей части важных параметров ионосферы с приемлемой для практики точностью величину τ_c необходимо аналогично [1] выбирать из условия

$$\tau_c \geq 3/\Delta f_{a\min}, \quad (1)$$

где $\Delta f_{a\min}$ — минимальная активная ширина ионной компоненты спектра НР-сигналов.

Для радиолокатора с несущей частотой $f_0 \approx 1000 \text{ МГц}$ $\Delta f_{a\min}$ в пределах диапазона высот ΔH равна примерно 8 кГц . Из (1) следует, что при этом $\tau_c \geq 400 \text{ мкс}$, т. е. минимальный объем элементарной выборки для данного радиолокатора равен: $\tau_c f_t = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^3 = 40$ числам.

2. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ СПЕКТРА И ПОЛНЫЙ ОБЪЕМ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

Полный объем выборки входных данных для одного сеанса измерений может быть найден из требуемой точности оценки спектра. Определим для этого дисперсию $\sigma^2 \{\hat{G}(f_i)\}$ спектральной плотности мощности $G(f_i)$, где f_i — i -й частотный интервал дискретного спектра одной элементарной выборки входных данных. Исходя из того, что ионная компонента спектра сигналов НР имеет форму, достаточно близкую к прямоугольной, в качестве адекватной оценки дисперсии можно рассматривать ее значение $\sigma^2 \{\hat{G}(f_0)\}$ на центральной частоте спектра $f_i = f_0$. Так как НР-сигнал представляет собой гауссов случайный процесс, воспользуемся методикой определения дисперсии, предложенной в [5]. В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 \{\hat{G}(f_0)\} &= \frac{1}{\pi^2 \tau_c^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[G_\Phi(x+y) G_\Phi(x-y) \times \right. \\ &\times \left. \frac{4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \tau_c \sin \frac{1}{2}(x-y) \tau_c}{(x+y)(x-y)} - \frac{\sin x \tau_c}{x} \hat{G}(f_0) \right]^2 dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

где $G_\Phi(x)$ — энергетический спектр флюктуаций плотности ионосферной плазмы, рассматриваемых как случайный гауссов процесс $\varphi(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией, равной единице. Принимая допущение, что спектр $G_\Phi(x)$ имеет прямоугольную форму, причем,

$$G_\Phi(x) = \frac{1}{\Delta f_a} \quad \text{для} \quad -\pi \Delta f_a \leq x \leq \pi \Delta f_a,$$

и, кроме того, $\Delta f_a \tau_c \gg 1$, выражение (2) можно привести к виду

$$\Delta^2 \{ \hat{G}(f_0) \} = \frac{\sigma^2 \{ \hat{G}(f_0) \}}{[\hat{G}(f_0)]^2} = 4, \quad (3)$$

где $\Delta^2 \{ z \}$ — есть относительная дисперсия величины z . При усреднении N независимых оценок спектра, вычисленных для каждой из N радиолокационных разверток, получим

$$\Delta^2 \{ G(f_0) \} = 4/N. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) дают оценку относительной дисперсии при учете только того факта, что сигнал НР является шумоподобным и производится накопление конечного числа независимых отсчетов его спектра. В реальных условиях сигнал НР принимается на фоне шумов приемника, и, кроме того, для калибровки измерительной аппаратуры выполняется операция вычитания шумовой выборки длительностью τ_c , расположенной в конце радиолокационной развертки. При этом дисперсия оценки $\sigma^2 \{ G_{SN}(f) \}$ спектра сигнала при наличии шума должна быть вычислена по формуле

$$\sigma^2 \{ \overline{G_{SN}(f)} \} = \sigma^2 \{ \overline{G_S(f)} \} + \frac{2}{q^2} \sigma^2 \{ \overline{G_N(f)} \}, \quad (5)$$

где $\overline{G_S(f)}$ и $\overline{G_N(f)}$ — соответственно усредненные оценки энергетических спектров сигнала и шума.

Выражение (5) отражает тот факт, что сигнал и источники шума взаимно независимы. Применяя вышеописанный метод для расчета дисперсии оценки спектра шума, получим

$$\sigma^2 \{ \overline{G_N(f)} \} = \frac{4}{N \Delta f_{\text{ш}}^2}, \quad (6)$$

где $\Delta f_{\text{ш}}$ — шумовая полоса пропускания тракта приемника до входа спектр-анализатора.

Объединяя (6) и (4), получим

$$\Delta^2 \{ \overline{G_{SN}(f_0)} \} \approx \frac{4}{N} \left(1 + \frac{2\Delta f_a^2}{q^2 \Delta f_{\text{ш}}^2} \right). \quad (7)$$

Учитывая, что для измерения большей части ионосферных параметров приемлемыми являются величины $\Delta^2 \{ G_{SN}(f_0) \} \leq 0,03$, из (7) найдем, что при $q_{\min}^2 = 0,01$ необходимо усреднить результаты оценок спектра по $N \geq 27000$ элементарным выборкам входных данных. Предварительные расчеты показывают, что обработка выборки указанного выше объема, соответствующей одному участку радиолокационной развертки, по алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ) для 32 оценок $\hat{G}_{SN}(f_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 32$) на ЭВМ типа ЕС-1030 занимает время, примерно равное 25 минутам, т. е. спектральный анализ сигналов НР может производиться на ЭВМ данного типа не в реальном масштабе времени при условии, что объем ее памяти будет увеличен настолько, чтобы иметь возможность запоминания всех значений сигнала за время усреднения.

3. СТРУКТУРА УСТРОЙСТВА ПЕРВИЧНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ НР

Проведенный выше анализ вопросов реализации спектрального анализа сигналов НР показал, что устройство их первичной цифровой обработки должно быть в среднем рассчитано на выполнение вычислений спектральных коэффициентов примерно для $3 \cdot 10^4$ элементарных выборок размером 64 восьмиразрядных числа за время, равное 10—15 минутам. В качестве такого устройства может быть использована универсальная ЭВМ весьма высокого быстродействия.

Требования к быстродействию ЭВМ, однако, могут быть существенно снижены, если устройство обработки построить по принципу сочетания универсальной ЭВМ со специализированным процессором, выполняющим определенную совокупность математических операций. При этом ЭВМ также может быть вы свобождена для целей управления и предварительной вторичной обработки сигнала с целью определения некоторых параметров ионосферы. Такой метод обработки нашел широкое распространение в методе НР, однако до настоящего времени здесь в качестве специализированных процессоров используются простейшие малобитовые и знаковые коррелометры [2], позволяющие достичь необходимую скорость обработки данных при сравнительно небольших аппаратурных затратах, но и требующие увеличения времени накопления (минимум в 2 раза) по сравнению с оптимальным для достижения адекватной статистической ошибки измерения.

Реализация процессоров многобитовых сигналов в основном затруднительна из-за необходимости выполнения большого числа операций умножения в реальном масштабе времени. Поэтому в случае многобитовых сигналов предпочтительнее вычисление спектральных характеристик сигналов вместо корреляционных с использованием алгоритма БПФ, в особенности, если вычисления выполняются на универсальной ЭВМ. Применение специализированного процессора, осуществляющего алгоритм БПФ в устройстве обработки сигналов НР, однако, может оказаться малоэффективным в основном из-за сравнительно малого объема элементарной выборки и, следовательно, из-за недостаточного сокращения числа операций умножения.

Особенности обработки сигналов НР, а именно, необходимость выполнения большого числа операций пересчета элементарных выборок в частотную область, накопление этих спектральных коэффициентов, а затем наличие большого отрезка времени (равного длительности измерительного сеанса, т. е. 10—15 мин), в течение которого универсальная ЭВМ не загружена, позволяют сделать вывод о целесообразности использования двух базисных систем функций в процессе получения усредненной оценки спектра сигналов НР.

При этом операцию пересчета выборок в частотную область можно реализовать в сравнительно небольшом по объему специализированном процессоре в промежуточном базисе, позволяющем заменить операцию умножения на сложение и вычислять спектральные коэффициенты наиболее простым путем. С другой стороны, так как интерпретация результатов первичной обработки и их дальнейший анализ вплоть до оценки параметров ионосферы в базисе, отличном от Фурье, встречает массу принципиальных трудностей, возникает необходимость перевода этих результатов в базисе Фурье. Эта операция может быть возложена на универсальную ЭВМ и выполняется в течение последующего измерительного сеанса.

Исходя из вышеуказанного, предпочтительно выбрать в качестве промежуточного базиса, например, систему функций Уолша, для которой существует однозначная матричная связь между энергетическими

спектрами в базисе Фурье и Уолша [6], которая позволяет наиболее упростить вычисление спектральных коэффициентов и обладает достаточной скоростью сходимости спектрального разложения сигналов данного вида [7]. Учитывая, что размер элементарной выборки сигнала НР невелик, переход [6] может быть осуществлен простым матричным перемножением на универсальных ЭВМ.

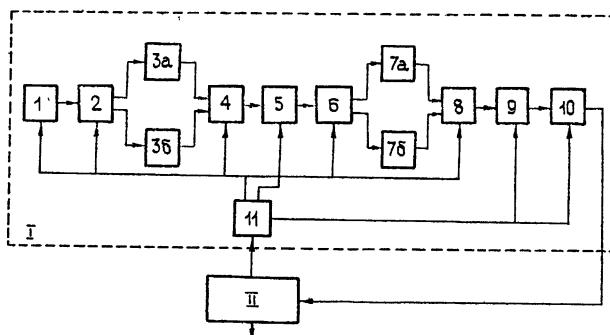


Рис. 1.

Одна из возможных структур специализированного устройства обработки сигналов НР, реализующего оценку коэффициентов энергетического спектра с применением промежуточного базиса функций Уолша, представлена на рис. 1 (I — специализированный процессор спектрального анализа, 1 — АЦП, 2, 4, 6, 8 — мультиплексоры (коммутаторы), 3а, 3б, 7а, 7б — оперативное запоминающее устройство (ОЗУ), 5 — процессор быстрого преобразования Уолша (БПУ), 9 — постоянное запоминающее устройство (ПЗУ), 10 — накопитель, 11 — синхронизатор, II — универсальная ЭВМ).

Временная диаграмма функционирования отдельных составных частей этого устройства изображена на рис. 2.

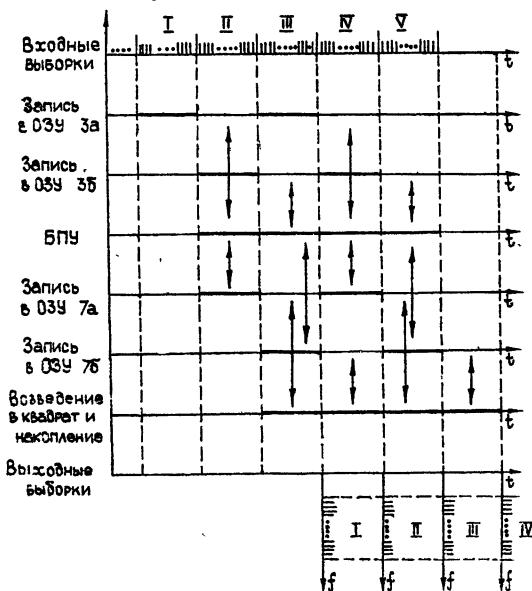


Рис. 2.

Воспользовавшись рис. 1 и 2, рассмотрим процесс обработки сигналов НР данным устройством. В течение сеанса измерения специализированный процессор I производит операцию БПУ и накопления квадратов спектральных коэффициентов в реальном масштабе времени. Процессор БПУ (5) выполняет операции сложения и вычитания в соответствии с графиком алгоритма БПУ. Для реализации обработки в реальном масштабе времени ОЗУ входных данных За и Зб и ОЗУ спектральных коэффициентов 7а и 7б разделено на два параллельных канала, в которые поочередно (см. рис. 2) записываются данные. Стрелками на рис. 2 показано взаимодействие отдельных блоков специализированного устройства (рис. 1). Для упрощения и ускорения операции возведения в квадрат в качестве квадратора в структуре устройства рис. 1 используется ПЗУ, которое применяется как таблица квадратов многоразрядных чисел. При требуемой разрядности чисел (см. разд. 1) для метода НР необходим объем памяти в 256 8-разрядных слов. С поступлением на адресный вход ПЗУ n -разрядного числа на выходных шинах появляется квадрат этого числа. Быстродействие такого квадратора ограничивается только циклом обращения к памяти и существенно не снизит скорости первичной обработки входных данных. Из рис. 2 видно, что при такой организации процесса обработки сигналов НР темп выдачи спектральных коэффициентов может осуществляться в реальном масштабе времени с постоянным запаздыванием на два интервала времени элементарной выборки, что практически не увеличит полный цикл оценки энергетического спектра за один сеанс измерения.

Оценим необходимое быстродействие отдельных блоков специализированного процессора, реализующего метод оценки энергетического спектра НР-сигналов с применением базисной системы функций Уолша. При тактовой частоте $f_t = 100 \text{ кГц}$ объем элементарной выборки размеров $N = 64$ записывается в ОЗУ за время $t_y = 64 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 640 \text{ мкс}$. Следовательно, процессор БПУ должен производить спектральное преобразование одной элементарной выборки также за 640 мкс при количестве операций типа сложения по алгоритму БПУ, равному $2N \log_2 N = 768$. Таким образом, цикл вычислений процессора БПУ составляет $640/768 \approx 0,84 \text{ мкс}$. Такое быстродействие может быть достигнуто, например, на элементарной базе из серий 100, 500 или 155. При реализации же процессора по алгоритму БПФ за время $0,84 \text{ мкс}$ необходимо было бы произвести операцию перемножения двух входных многоразрядных чисел, что практически нереализуемо на указанной элементарной базе.

Управление специализированным процессором I спектрального анализа (рис. 1) осуществляется универсальной ЭВМП совместно с управлением всем приемопередающим трактом. Кроме того, ЭВМ может производить вторичную обработку коэффициентов энергетического спектра, поскольку темп поступления данных в нее увеличивается до длительности сеанса измерения.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Моделирование на ЭВМ представляло собой процесс оценки энергетического спектра случайного сигнала с применением промежуточного базиса функций Уолша и было выполнено на ЭВМ типа ЕС-1020. Оно включало в себя выполнение следующих операций:

- генерация случайной последовательности типа «белый шум»;
- цифровая фильтрация «белого шума» с целью формирования энергетического спектра, аналогичного спектру НР-сигнала;
- перевод сигнала в спектральную область в базисе Уолша,

- возвведение в квадрат и накопление коэффициентов энергетического спектра в базисе Уолша,
- матричное преобразование энергетического спектра в базисе Уолша в энергетический спектр Фурье.

Для сравнения результатов при исследовании процесса спектральной обработки было предусмотрено вычисление энергетического спектра Фурье без применения промежуточного базиса.

Результаты моделирования представлены на рис. 3. Для моделирования процесса обработки использовалась выборка с размером $N = 8$. Цикл накопления составлял 1000.

На рис. 3 введены обозначения: $H(k)$ — частотная характеристика цифрового фильтра, $G_F(k)$ — дискретный энергетический спектр, полученный при оценивании.

Крестиками представлены результаты оценки энергетического спектра Фурье без применения промежуточного базиса.

Из рис. 3 следует, что результаты оценки энергетического спектра с применением промежуточного базиса совпадают с оценками энергетического спектра, полученными обычным путем, в пределах статистической ошибки.

Спектральный анализ с применением промежуточного базиса занял 0,2 мин машинного времени, в то время как непосредственная оценка энергетического спектра Фурье заняла 1,5 мин машинного времени на ЭВМ ЕС-1020.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Эванс, ТИИЭР, 57, № 4, 139 (1969).
2. D. T. Farley, Radio Sci., 4 № 10, 935 (1969).
3. R. F. Woodman and T. Hagfors, J. Geophys. Res., 74, 1205 (1969).
4. Ю. И. Грибанов и др., Автоматические цифровые корреляторы, изд. Энергия, М., 1971, стр. 240.
5. R. B. Blackman and J. W. Tukey, The measurement of Power Spectra, Dover Publications, N. Y., 1959.
6. В. Н. Пойда, Автоматика, Научно-технический журнал ин-та кибернетики АН УССР, № 5, 35 (1976).
7. Н. М. Блэчмен, ТИИЭР, 62, № 3, 72 (1974).

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию
21 мая 1977 г.

SPECTRAL ANALYSIS OF INCOHERENT SCATTERING SIGNALS

I. N. Presnyakov, S. S. Smol'yaninov, M. I. Kochkin

The peculiarities of presentation and primary processing of signals from incoherent radio wave scattering in the ionosphere are considered. The possibility of using universal electron computers for the primary processing using the intermediate spectral base is analysed. Based upon the method suggested the structure of the device of the primary processing is synthesized. It consists of specialized processor calculating the spectral coefficients in the intermediate basis and universal computer. The modelling results computer the device of suggested are given.

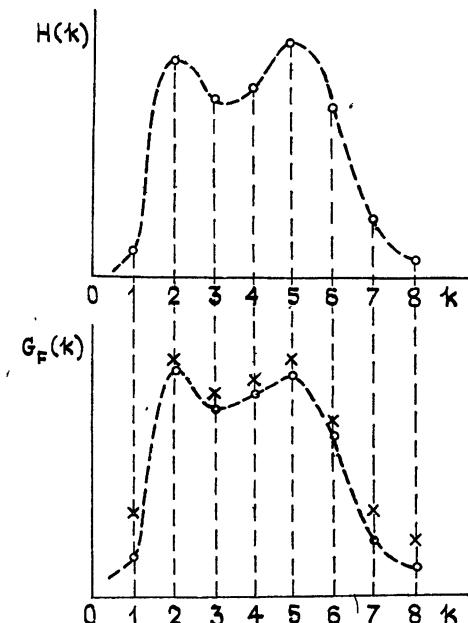


Рис. 3.

УДК 551.510.5

О РАДИОТЕПЛОЛОКАЦИОННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВЛАЖНОСТИ ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЫ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВОДНОСТИ, ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЫСОТЫ КАПЕЛЬНОЙ ФАЗЫ ОБЛАКОВ

C. A. Жевакин

Предлагается методика радиотеплолокационных наземных измерений интегральной влажности облачной атмосферы, интегральной водности капельной фазы облаков и ее температуры. При помощи измерения яркостной температуры атмосферы на двух волнах λ_1 и λ_2 (волна λ_1 выбирается так, чтобы яркостная температура атмосферы на ней не зависела от высотного профиля влажности: она равна либо 1,44, либо 1,26 см), на которых коэффициент поглощения капельной фазы облаков χ может при существующей температуре облаков, оцениваемой с точностью $\pm 10^\circ$ по приземной температуре атмосферы, считаться обратно пропорциональным квадрату длины волны, определяется интегральная влажность облачной атмосферы. Затем на волне $\lambda_{\text{опт}}$, на которой коэффициент χ практически не зависит от температуры облаков (в пределах $\pm 10^\circ$), с учетом найденной величины интегральной влажности определяется интегральная водность облаков, после чего по измеренной ранее на волнах λ_1 , λ_2 оптической толще облаков определяется температура капельной фазы облаков. Указываются длины волн λ_2 и $\lambda_{\text{опт}}$ и оцениваются точности измерения интегральной влажности атмосферы, интегральной водности, температуры и высоты капельных облаков для «летних» и «зимних» условий. Обсуждаются возможности, предоставляемые измерениями не на трех, а только на двух волнах: 1,44 см (либо 1,26 см) и $\lambda_{\text{опт}}$.

1. Так как коэффициент поглощения льда в миллиметровом и сантиметровом диапазоне в $10^3 \div 10^4$ раз меньше коэффициента поглощения воды (см., например, рис. 2 и 3 работы [1]), а водность твердой фазы облаков, как правило, меньше водности жидкой фазы (см., например, табл. 1.3.3 монографии [2]), то в случае облаков смешанной структуры радиотеплолокационными методами будет лишь определяться интегральная водность, температура и высота жидкокапельной фазы облаков. Жидко-капельная фаза облаков может существовать до температур -41°C [3].

Определение интегрального содержания водяного пара атмосферы и интегральной водности облаков (т. е. полной массы капельной фазы, содержащейся в вертикальном столбе атмосферы с основанием 1 м²) по совместным измерениям яркостной температуры облачной атмосферы на двух волнах $\lambda \approx 1,35$ см и $\lambda \approx 0,8$ см (волна 0,8 см выбирается по тем соображениям, что для этой волны вклад водяного пара и молекулярного кислорода в яркостную температуру атмосферы в сравнении с вкладом облаков оказывается минимальным) наталкивается на то затруднение, что коэффициент поглощения водяных капель на волне 0,8 см сильно зависит от их температуры.

В работе [4] предлагается методика совместного измерения трех величин: интегральной влажности атмосферы, интегральной водности облаков и температуры облаков по яркостным температурам облачной

атмосферы на трех частотах: $\nu_1 = 21,5 \div 23 \text{ ГГц}$ ($\lambda_1 = 1,40 \div 1,30 \text{ см}$), $\nu_2 = 32 \div 45 \text{ ГГц}$ ($\lambda_2 = 0,94 \div 0,67 \text{ см}$) и $\nu_3 = 75 \div 110 \text{ ГГц}$ ($\lambda_3 = 0,40 \div 0,27 \text{ см}$).

В настоящей работе существенно используется то обстоятельство, что при температуре облаков, заключенной в интервале «неопределенности» $\pm 10^\circ$, существует такая длина волны $\lambda_{\text{опт}}$, для которой коэффициент поглощения облаков «практически не зависит от их температуры в указанном пределе $\pm 10^\circ$. Интервал «неопределенности» температуры облаков шириной $\pm 10^\circ$ устанавливается по приземной температуре атмосферы и, грубо говоря, для средней европейской полосы отвечает летним и зимним условиям.

В отличие от [4], в настоящей работе определение интегральной влажности летней облачной атмосферы предлагается выполнять по измерениям ее яркостной температуры на двух волнах: $\lambda = 1,44 \text{ см}$ (или $\lambda = 1,26 \text{ см}$) и $\lambda \approx 0,8 \text{ см}$, после чего интегральная водность облаков определяется по измерению яркостной температуры на одной — третьей длине волны $\lambda_{\text{опт}} = 0,27 \div 0,37 \text{ см}$ (оптимальная волна в этом диапазоне выбирается по интервалу неопределенности температуры облаков, задаваемому приземной температурой атмосферы; отметим, что линии поглощения кислорода 0,25 и 0,5 см не препятствуют сколько-нибудь существенно измерениям в этом диапазоне). Используя затем найденное значение интегральной водности облаков, по измеренным на волнах 1,44 и 0,8 см яркостным температурам оказывается возможным определить температуру облаков.

Если приземная температура атмосферы равна, скажем, -25°C и, соответственно этому, интервал неопределенности температуры облаков принимается $-20 \div -40^\circ\text{C}$ (зимние условия), то определение интегральной влажности атмосферы может быть выполнено совместными измерениями на двух длинах волн 1,44 и 1,26 см, после чего интегральная водность облаков может быть определена по измерениям яркостной температуры на одной из длин волн $\lambda_{\text{опт}} \approx 0,4 \text{ см}$, $\lambda_{\text{опт}} = 0,6 \div 0,8 \text{ см}$ (интервал $\lambda = 0,4 \div 0,6 \text{ см}$ исключается из-за сильного в нем поглощения молекулярным кислородом). Используя затем найденное значение интегральной водности облаков, температура облаков может быть найдена по яркостной температуре атмосферы на волне 1,44 см.

Таким образом, удается, так сказать, «разделить переменные». Такое раздельное использование двух и одной волн позволит повысить точность измерений в сравнении с измерениями по методике работы [4]. В частности, из результатов настоящей работы легко усмотреть оптимальную длину волны $\lambda_{\text{опт}}$ в диапазонах $0,28 \div 0,40 \text{ см}$, $0,6 \div 0,8 \text{ см}$, определяемую интервалом неопределенности температуры облаков (который устанавливается по приземной температуре). Мы полагаем также, что учет возможных ошибок в определении интегральной водности, температуры и высоты облаков в настоящей работе выполнен более тщательно.

2. Согласно [5] комплексный коэффициент поглощения \tilde{m} водяных капель для случая, когда длина волны λ много больше радиуса капель r , $2\pi r/\lambda \ll 1$ (это условие соблюдается во всем интересующем нас диапазоне длин волн $\lambda \geq 0,3 \text{ см}$, ибо размер капель облаков не превышает, как правило, 30 мкм , см., например, [2]), есть

$$\tilde{m} = 1 - iS(0) 2\pi N k^{-3},$$

где N — число капель в см^3 , $k = 2\pi/\lambda \text{ см}^{-1}$, $S(0) = ik^3 \alpha$, $\alpha = [(\epsilon_c - 1)/(\epsilon_c + 2)] r^3$ — коэффициент поляризуемости водяной капли с комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ_c .

Мнимая часть \tilde{m} , равная $n_2 = 2\pi Nk^{-3} \operatorname{Re} S(0)$, определяет коэффициент поглощения среды x :

$$x = 2 \frac{2\pi}{\lambda} n_2 = \frac{4\pi}{\lambda} 2\pi Nk \operatorname{Re} S(0) = \frac{6\pi}{\lambda} \operatorname{Im} \left(\frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c + 2} \right) w \frac{\text{Непер}}{\text{см}}, \quad (1)$$

где водность облаков $w = (4\pi/3)r^3N$ выражена в г/см^3 , $\operatorname{Im}[(\epsilon_c - 1)/(\epsilon_c + 2)]$ — мнимая часть величины $(\epsilon_c - 1)/(\epsilon_c + 2)$.

Используя для диэлектрической проницаемости воды выражение Дебая

$$\epsilon_c = \epsilon_1 - i\epsilon_2 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i(\Delta\lambda/\lambda)} + \epsilon_\infty, \quad (2)$$

где ϵ_0 есть статическое значение ϵ_c при частоте $\omega = 0$, ϵ_∞ — оптическое значение ϵ_c , $\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_\infty + 2} \tau_p$ (τ_p — дебаевское время релаксации), легко находим из (1) и (2)

$$\frac{x}{w} = \frac{6\pi\Delta\lambda}{\lambda^2} \frac{(\epsilon_0 + 2)(\epsilon_\infty - 1) - (\epsilon_0 - 1)(\epsilon_\infty + 2)}{(\epsilon_0 + 2)^2 + (\Delta\lambda/\lambda)^2 (\epsilon_\infty + 2)^2} \frac{\text{Непер}}{\text{см} \cdot \text{г/см}^3}. \quad (3)$$

На рис. 1, 2 представлены сосчитанные по формуле (3) величины x/w (в $\text{Непер}/(\text{г/см}^3 \cdot \text{см})$) в зависимости от λ (см) и температуры капель $t^\circ\text{C}$. При этом, согласно [6, 7], принималось $\epsilon_0 = 88,2 - 0,4t^\circ$, $\epsilon_\infty = 5,5$, $\tau_p = \exp[7,6(273/T - 0,95)] \cdot 10^{-12} \text{ с}$ (в более поздней работе [13] вместо множителя 7,6 авторы дают множитель 10). Были выполнены также и расчеты по формулам (4.23), (4.24) монографии [8]; они дали практически неотличимые результаты. Полученные в [6] для сантиметрового диапазона параметры воды и применимость формулы Дебая сохраняются вплоть до волны $\lambda = 0,1 \text{ см}$, как то было выяснено последующими работами (см. сводку [9], а также [1]).

Из графиков рис. 1 видно, что, например, при температуре облаков $t_{обл} > -20^\circ\text{C}$ на волне $0,8 \text{ см}$ неопределенность в температуре облаков в пределах $\pm 10^\circ$ приводит к неопределенности значений x в пределах $\pm 25\%$ и, соответственно, к неточности определения интегральной водности облаков по яркостной температуре атмосферы тоже в $\pm 25\%$. При этом использование дополнительных длин волн в диапазоне $\lambda > 0,7 \text{ см}$ не даст никаких дополнительных сведений, ибо в этом диапазоне формула (3) при $t_{обл} > -20^\circ\text{C}$ принимает вид $x/w = (\Delta\lambda/\lambda) C = f(T)/\lambda^2 C$, где величину C можно считать постоянной, и система соответствующих уравнений для определения величин интегральной водности и температуры облаков по значениям яркостной температуры на двух или более длинах волн вырождается.

Как видно из рис. 1, 2, при $t_{обл} > -20^\circ\text{C}$ иная ситуация возникает в диапазоне длин волн $0,28 \div 0,4 \text{ см}$. Полагая, что по приземной температуре атмосферы мы можем судить о температуре облаков с точностью $\pm 10^\circ$, из рис. 1, 2 мы видим, что возможен выбор такой длины волны $\lambda_{опт}$, для которой величина x/w оказывается с точностью $\pm 2,5\%$ не зависящей от температуры облаков. В таком случае становится возможным прямое определение интегральной водности облаков по их яркостной температуре — влияние температуры облаков оказывается практически исключенным*.

* Заметим, что если получающийся при неопределенности температуры облаков $\pm 10^\circ$ разброс значений величины x в $2,5\%$ лимитирует точность измерений (например, в случае большой интегральной водности облаков, см. ниже), то после определения температуры облаков применением метода итераций этот разброс может быть уменьшен.

Оценим открывающиеся здесь перспективы.

3. Рассмотрим сначала летние условия. Пусть температура атмосферы у поверхности Земли $T_0 = 288$ К, абсолютная влажность у поверхности Земли $\rho_0 = 12 \text{ г}/\text{м}^3$, эффективная высота водяного пара равна $2,5 \text{ км}$, т. е. интегральная влажность атмосферы $Q = 30 \text{ кг}/\text{м}^2$.

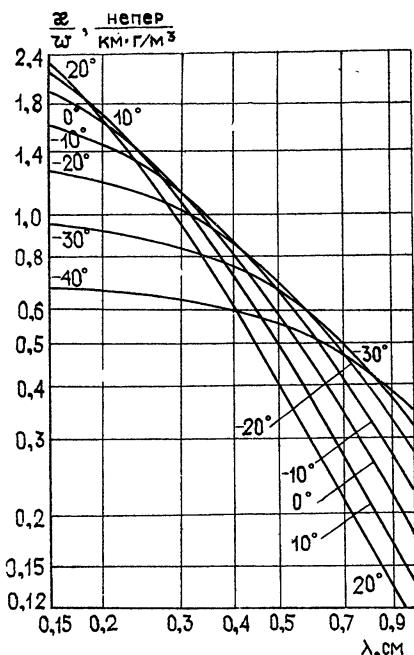


Рис. 1. Зависимость приведенного коэффициента поглощения капельной фазы облаков x/w от длины волны λ . Числа на кривых указывают температуру в градусах Цельсия.

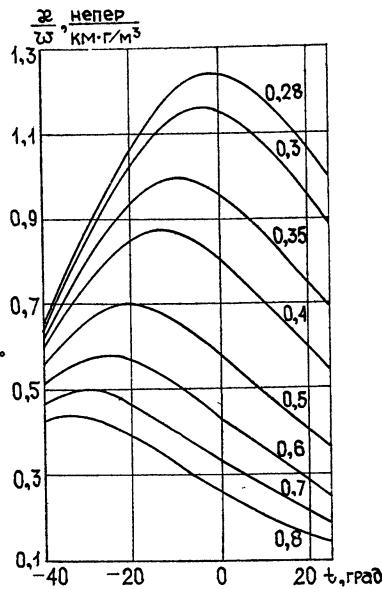


Рис. 2. Зависимость приведенного коэффициента поглощения капельной фазы облаков x/w от температуры в градусах Цельсия. Числа справа от кривых указывают длину волны λ .

Оценим точность измерения интегральной влажности облачной атмосферы.

Пусть при помощи совместных измерений яркостной температуры облачной атмосферы на двух длинах волн — на одной из волн $\lambda = 1,26 \text{ см}$ или $\lambda = 1,44 \text{ см}$, на которых влияние высотного профиля влажности атмосферы на её яркостную температуру исключается (для определенности примем $\lambda = 1,44 \text{ см}$), и на длине волны $0,8 \text{ см}$ — определено интегральное содержание водяного пара. Следует подчеркнуть, что такое определение становится возможным благодаря тому, что на волнах $1,44$ и $0,8 \text{ см}$ температура облаков (которая нам пока известна по предположению с точностью $\pm 10^\circ$) не влияет на зависимость коэффициента поглощения капель воды x от длины волны (при $t_{\text{обл}} > -20^\circ \text{C}$ $x \sim \lambda^{-2}$, см. рис. 1, 2). Кроме того, легко убедиться, что, хотя на длине волны $0,8 \text{ см}$ высотный профиль влажности атмосферы и влияет (незначительно) на яркостную температуру, при совместном использовании для определения интегральной влажности длин волн $1,44$ и $0,8 \text{ см}$ это влияние оказывается ослабленным раз в пять и может считаться пренебрежимо малым.

Яркостная температура (в зенит) на волне 1,44 см, отвечающая принятой интегральной влажности $Q = 12 \cdot 2,5 = 30 \text{ кг}/\text{м}^2$ (т. е. яркостная температура атмосферы за вычетом вклада облаков и молекулярного кислорода), будет $37,8^\circ$. Если принять, что абсолютная точность измерения яркостной температуры радиометром $\lambda = 1,44 \text{ см}$ составляет $\pm 1^\circ$, то, учитывая малость вклада молекулярного кислорода и облаков на этой длине волны, можно считать точность измерения интегральной влажности атмосферы равной $\pm 3\%$.

Хотя влияние высотного профиля влажности на яркостную температуру, вообще говоря, невелико, с целью увеличения точности измерения интегральной водности облаков в условиях возможных аномально больших отклонений профиля влажности от средних значений (см. об этом ниже) следует также, для учета влияния профиля влажности, выполнить измерение приземной влажности атмосферы.

Принимая интервал априорной неопределенности температуры облаков $-10 \div +10^\circ\text{C}$ (что отвечает принятой нами температуре атмосферы у поверхности Земли $t = 15^\circ\text{C}$), из графиков рис. 1 и особенно рис. 2 видим, что оптимальной волной для этого случая, на которой влияние температуры облака на его коэффициент поглощения практически исключается, будет $\lambda_{\text{опт}} = 0,28 \text{ см}$. На этой волне, согласно рис. 1, 2, разброс значений x/w составляет $\pm 2,5\%$ при изменении температуры облаков на $\pm 10^\circ$.

Учитывая, что при абсолютной влажности у поверхности Земли $\rho_0 = 12 \text{ г}/\text{м}^3$ и при эффективной высоте водяного пара $2,5 \text{ км}$ оптическая толщина водяного пара на волне $\lambda_{\text{опт}} = 0,28 \text{ см}$ составляет $\tau_{\text{H}_2\text{O}} = 0,432 \text{ Непер}$, а оптическая толщина молекулярного кислорода атмосферы летом на этой же волне равна $\tau_{\text{O}_2} = 0,056 \text{ Непер}$, находим, что яркостная температура безоблачного неба (в зените) будет

$$T_{\text{я. безобл}} = T_{\text{эфф}} (1 - e^{-(0,432 + 0,056)}), \quad (4)$$

где $T_{\text{эфф}}$ может быть определена по приближенной формуле:

$$T_{\text{эфф}} = T_0 - a H_{\text{H}_2\text{O}} - a (H_{\text{O}_2} - H_{\text{H}_2\text{O}}) \frac{\tau_{\text{O}_2}}{\tau_{\text{H}_2\text{O}} + \tau_{\text{O}_2}}. \quad (5)$$

Здесь $T_0 = 288 \text{ К}$ есть температура атмосферы у поверхности Земли, $a = 6,5 \text{ град}/\text{км}$ — температурный градиент атмосферы, $H_{\text{H}_2\text{O}} = 2,1 \text{ км}$ [10] — характеристическая высота коэффициента поглощения атмосферного водяного пара (отвечающая характеристической высоте абсолютной влажности $2,5 \text{ км}$), $H_{\text{O}_2} = 4,8 \text{ км}$ [11] — летняя характеристическая высота коэффициента поглощения кислорода.

Подставляя в (5) эти значения, получаем $T_{\text{эфф}} = 272,4 \text{ К}$. При изменении $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$ на $\pm 50\%$ изменение $T_{\text{эфф}}$ составит 2° . Поэтому точность формулы (4) с использованием значения $T_{\text{эфф}} = 272,4 \text{ К}$ будет лучше 1% .

Из графиков рис. 2 видно, что для $\lambda = 0,28 \text{ см}$ $x/w = 1,2 \pm 0,01$, где разброс значений $\pm 0,01$ отвечает неопределенности значений температур облака в пределах $-10 \div +10^\circ\text{C}$.

Средняя толщина облаков летом $d = 0,5 \text{ км}$ [2]. Согласно табл. 1, 2.4 [2] такой толщине облаков типа St—Sc отвечает средняя водность $w = 0,3 \text{ г}/\text{м}^3$, т. е. средняя летняя интегральная водность облаков этого типа будет $0,15 \text{ кг}/\text{м}^2$. Используя эти значения, находим среднюю оптическую толщу облаков типа St—Sc в летних условиях:

$$\tau_{\text{обл}} = 1,2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,18 \text{ Непер}.$$

Так как температура облаков близка к найденной нами эффективной температуре $T_{\text{эфф}} = 272,4 \text{ К}$, для яркостной температуры облачного неба можно писать

$$T_{\text{я. обл}} = 272,4 (1 - e^{-(0,488 + 0,18)}) = 132,7 \text{ К.}$$

Таким образом, эффект средней летней облачности типа St—Sc составит $132,7 - 105,1 = 27,6^\circ$.

Оценим возможные ошибки в определении эффекта облачности.

Так как интегральная влажность атмосферы радиометром 1,44 см была измерена по предположению с точностью $\pm 3\%$, то, учитывая, что на волне $\lambda = 0,28 \text{ см}$ $\tau_{\text{H}_2\text{O}} = 0,432$, находим, что это последнее значение известно нам с точностью $0,432 \cdot 0,03 = \pm 0,013 \text{ Непер}$. Нужно оценить и влияние возможной, скажем в пределах $\pm 3^\circ$, неопределенности температуры атмосферы на коэффициенты поглощения кислорода и водяного пара, которые приблизительно пропорциональны T^{-2} . Разброс температуры атмосферы $\pm 3^\circ$ приводит к разбросу значений $\tau_{\text{H}_2\text{O}} + \tau_{\text{O}_2}$ на

$$(0,432 + 0,056) \cdot 2 \frac{3}{288} = 0,010 \text{ Непер.}$$

Следует оценить и ошибку, возникающую из-за влияния высотного профиля влажности на яркостную температуру. Если профиль абсолютной влажности $\rho(h)$ задан выражением $\rho(h) = \beta Q \exp(-\beta h)$ (Q —фиксированная измерением на $\lambda = 1,44 \text{ см}$ интегральная влажность), то изменение параметра β в пределах $\Delta\beta/\beta = \pm 0,3$ изменит $\tau_{\text{H}_2\text{O}}$ на волне 0,28 см на 0,04 Непер, что составит 20% от эффекта облачности. Поэтому, с целью учесть влияние профиля влажности, следовало, как было указано выше, выполнить измерение приземной влажности атмосферы. Это позволит при абсолютной точности $\pm 1^\circ$ радиометра 1,44 см уменьшить ошибку из-за профиля влажности примерно в 3 раза, т. е. возможная ошибка из-за аномально больших отклонений профиля влажности от среднего профиля станет 0,013 Непер.

Таким образом, полная ошибка составит

$$\frac{0,013 + 0,010 + 0,013}{0,18} \cdot 100 = \frac{0,036}{0,18} \cdot 100 = \pm 20\%,$$

или в градусах $\pm 5^\circ$.

Наряду с найденной сейчас ошибкой 0,036 Непер ($\pm 5^\circ$) будет существовать ошибка из-за «рассогласования» теоретических значений поглощения кислорода и водяного пара на волнах 1,44 и 0,28 см. Эту ошибку в настоящее время несложно оценить. Однако можно надеяться, что при экспериментальном осуществлении привязки значений поглощения на этих волнах в условиях безоблачного неба ее удастся исключить. Поэтому мы не будем принимать здесь эту ошибку во внимание.

Отметим, что при заданных ошибках абсолютных измерений радиометров с заданными длинами волн в пределах применимости формул (4), (5) (погрешность которых порядка 1%) точность определения интегральной водности облаков определяется двумя параметрами, скажем, Q и W/Q .

Мы видели, что точность измерения интегральной водности W для средней летней облачности типа St—Sc с $W \approx 0,15 \text{ кг}/\text{м}^2$ при интегральной влажности атмосферы $Q = 30 \text{ кг}/\text{м}^2$, т. е. при $W/Q = 0,005$, в нашем примере будет не хуже $\pm 20\%$. При увеличении интегральной водности облачности (точнее, при увеличении отношения W/Q) точность ее измерения будет увеличиваться, приближаясь к $\pm 2,5\%$ (пределу, определяемому разбросом значений w/w , отвечающему принятому нами интервалу неопределенности температуры облаков $\pm 10^\circ$). Замечаем, однако, что при абсолютной точности $\pm 2^\circ$ радиометра $\lambda = 0,28 \text{ см}$ минимальная ошибка $\pm 2,5\%$ достигается при десятикратной интегральной водности облаков $1,5 \text{ кг}/\text{м}^2$, т. е. при $\tau_{\text{обл}} = 1,8 \text{ Непер}$ (интеграль-

ная влажность атмосферы предполагается фиксированной и равной $Q = 30 \text{ кг}/\text{м}^2$; при дальнейшем же увеличении облачности точность ее определения начнет падать из-за того, что абсолютная точность $\pm 2^\circ$ радиометра $\lambda = 0,28 \text{ см}$ окажется недостаточной для выявления изменения яркостной температуры, отвечающей $\pm 2,5\%$ изменения интегральной водности облаков при $t_{\text{обл}} > 1,8 \text{ Непер}$. При абсолютной точности $\pm 4^\circ$ радиометра $\lambda = 0,28 \text{ см}$ оказывается, что минимальная величина ошибки определения интегральной водности облаков достигается уже только при пятикратном увеличении интегральной водности облаков до $0,75 \text{ кг}/\text{м}^2$, т. е. при $t_{\text{обл}} = 0,90 \text{ Непер}$, и составит $\pm 20\% / 5 = \pm 4\%$.

После того, как интегральная водность облаков определена, по значению уже известной яркостной температуре атмосферы на длине волны $0,8 \text{ см}$ можно будет определить температуру облаков.

При интегральной водности облаков $0,3 \text{ кг}/\text{м}^2$ отвечающая им на длине волны $0,8 \text{ см}$ яркостная температура будет $\sim 25^\circ$. Точность же измерения такой интегральной водности в летних условиях и сделанных нами предположениях, как мы видели, составит $\pm 10\%$, или в градусах $\pm 2,5^\circ$. Отсюда видно, что точность абсолютной калибровки радиометра $0,8 \text{ см } 1 \div 2^\circ$ будет достаточна.

Из графиков рис. 1 видно, что точности измерения интегральной водности облаков $\pm 10\%$ отвечает на длине волны $0,8 \text{ см}$ точность определения температуры облаков $\pm 5^\circ$. Соответствующая этому точность определения высоты облаков (при известном температурном профиле с градиентом $\sim 6 \text{ град}/\text{км}$) будет $\pm 1 \text{ км}$.

Если интегральная водность облачности велика ($0,8 \div 1,5 \text{ кг}/\text{м}^2$), то точность ее измерения приближается к $\pm 2,5\%$, точность определения температуры облаков при совместном использовании трех радиометров $1,44; 0,8; 0,28 \text{ см}$ — к $\pm 1^\circ$, а точность определения их высоты (при известном высотном профиле температуры атмосферы с градиентом $\sim 6 \text{ град}/\text{км}$) — к $0,2 \text{ км}$.

Разумеется, под температурой и высотой облачности следует понимать температуру и высоту, относящуюся к некоторому уровню эффективного поглощения облачности.

Итак, при $Q = 30 \text{ кг}/\text{м}^2$, $W/Q \approx 0,005$ и точности абсолютных измерений на длине волны $1,44 \text{ см}$ (в зените) $\pm 1^\circ$ ошибка в определении интегральной водности облаков W при измерениях на трех длинах волн составит $\pm 20\%$. Между тем, при измерениях на двух длинах волн $1,44$ и $0,8 \text{ см}$ эта же ошибка из-за неопределенности температуры облаков $\pm 10^\circ$ оказывается примерно такой же — $\pm 25\%$. Отсюда следует, что в летних условиях измерения на трех длинах волн могут иметь преимущество в сравнении с измерениями на двух длинах волн лишь при $W/Q > 0,005$. Отметим, что летом для кучево-дождевых облаков $W/Q > 0,03$.

4. Рассмотрим теперь вкратце те изменения, которые отличают зимние измерения от летних.

Во-первых, при низких температурах облаков оптимальная длина волны $\lambda_{\text{опт}}$, для которой коэффициент поглощения капельной фазы оказывается практически не зависящим от температуры, сдвигается в длинноволновую область. Так, согласно рис. 1, 2 при температуре облаков $t_{\text{обл}} = -10 \div -30^\circ\text{C}$ $\lambda_{\text{опт}} = 0,5 \text{ см}$; при $t_{\text{обл}} = -20 \div -40^\circ\text{C}$ $\lambda_{\text{опт}} = 0,7 \div 0,8 \text{ см}$.

Но волна $\lambda_{\text{опт}} = 0,5 \text{ см}$ попадает в центр сильной линии поглощения O_2 и непригодна для измерений. Если учесть, однако, что зимой температурный градиент атмосферы обычно в $2 \div 3$ раза меньше летнего и что поэтому интервал неопределенности температуры облаков от $\pm 10^\circ$ может быть уменьшен до $\pm 5^\circ$, то при $t_{\text{обл}} = -10 \div -20^\circ\text{C}$ получаем

$\lambda_{\text{опт}} = 0,4 \text{ см}$, а при $t_{\text{обл}} = -20 \div -30^\circ\text{C}$ получаем $\lambda_{\text{опт}} = 0,6 \text{ см}$. Таким образом, сужение интервала неопределенности температуры облаков выводит нас с непригодной волны $0,5 \text{ см}$.

Совместное использование волн $1,44 \text{ см}$ (или $1,26 \text{ см}$) и $0,8 \text{ см}$ для определения интегральной влажности атмосферы, как было предложено для летних условий, при низкой температуре облаков оказывается не-пригодным, ибо зависимость коэффициента поглощения капельной фазы от длины волны начинает при $\lambda \approx 0,8 \text{ см}$ определяться температурой.

Но здесь приходит на помощь то обстоятельство, что зимой интегральная влажность атмосферы в $6 \div 10$ раз меньше летней, тогда как средняя водность облаков зимой только в $1,5 \div 2$ раза меньше летней (см. табл. 17.27 монографии [12]). Учитывая, что средняя толщина облаков зимой и летом одна и та же [2], оказывается возможным определять интегральную влажность облачной атмосферы по совместным измерениям яркостной температуры на длинах волн $1,44 \text{ см}$ и $1,26 \text{ см}$. При этом, для учета влияния профиля влажности в последующем пересчете интегрального поглощения водяным паром к волне $\lambda_{\text{опт}}$ желательно (как и в летних условиях) измерение приземной влажности атмосферы.

Ввиду малости зимних яркостных температур атмосферы при наблюдении на длинах волн $1,44$ и $1,35 \text{ см}$ в зенит (порядка $5 \div 10^\circ$) и связанной с этим потерей точности в определении интегральной влажности, следует для увеличения точности выполнять измерения яркостных температур на длинах волн $1,44$ и $1,35 \text{ см}$ в наклон с $S\theta \approx 5 \div 7$ (θ — зенитный угол наблюдения). Этот прием может иногда оказаться полезным и в летних условиях.

Определив интегральную влажность атмосферы, подобно тому, как то уже обсуждалось для летних условий, определяем измерением на длине волны $\lambda_{\text{опт}}$ интегральную водность облаков и затем по ней, используя результаты измерения $\tau_{\text{обл}}$ на длинах волн $1,44$ и $1,35 \text{ см}$, находим температуру облаков.

Так как средняя зимняя интегральная водность облаков в $1,5 \div 2$ раза меньше летней, тогда как средняя зимняя интегральная влажность Q в $6 \div 10$ раз меньше летней, так что зимой в среднем $W/Q = 0,03 \div 0,05$, условия зимних измерений интегральной водности облаков будут в $4 \div 5$ раз благоприятнее летних условий (когда $W/Q = 0,005 \div 0,05$).

Отсюда следует, что в зимних условиях измерения на трех длинах волн (включающие измерение на длине волны $\lambda_{\text{опт}}$) имеют преимущество в сравнении с измерениями на двух длинах волн, не включающих в себя $\lambda_{\text{опт}}$, при которых точность измерений интегральной водности облаков заведомо не может быть лучше $\pm 13\%$ (при неопределенности температуры облаков $\pm 5^\circ$).

Отметим, что точность определения высоты облаков (точнее, высоты эффективного уровня поглощения их жидкокапельной фазы) в зимних условиях будет существенно хуже из-за малости зимнего градиента температуры атмосферы.

5. Можно поставить вопрос: что мы потеряем (кроме, разумеется, возможности определения температуры облаков), если будем измерять интегральную влажность облачной атмосферы и интегральную водность облаков не на трех, а только на двух длинах волн $1,44 \text{ см}$ (или $1,26 \text{ см}$) и $\lambda_{\text{опт}}$, равной либо $0,28 \div 4 \text{ см}$ (лето—осень—весна), либо $0,6 \div 0,8 \text{ см}$ (зима)?

Легко видеть, что летом ($Q \approx 30 \text{ кг}/\text{м}^2$) точность определения интегральной водности облаков в этом случае не будет повышаться с увеличением интегральной водности облаков, как то было в случае измерений на трех длинах волн. Действительно, если, например, интегральная водность облаков увеличится в 5 раз и станет $0,15 \cdot 5 = 0,75 \text{ кг}/\text{м}^2$,

то вклад облачности на волне 1,44 см составит $4 \cdot 5 = 20^\circ$, а возможная ошибка из-за неизвестности температуры облаков $\pm 10^\circ$ составит $T_y = 20 \cdot 0,25 = 5^\circ$, т. е. ошибка определения интегральной влажности атмосферы увеличится до 15%. При переходе к длине волны 0,28 см это поведет к увеличению ошибки в определении интегральной водности облаков в 5 раз, что скомпенсирует уменьшение ошибки в 5 раз из-за увеличения их интегральной водности. Таким образом, интегральная водность облаков при измерении на двух длинах волн 1,44 см и 0,28 см будет определяться с одной и той же точностью $\sim 20\%$ независимо от ее величины; т. е. в летних условиях ($Q \approx 30 \text{ кг}/\text{м}^2$) измерение на двух длинах волн 1,44 см и $\lambda_{opt} = 0,28 \text{ см}$ не дает никаких преимуществ в сравнении с измерениями на длинах волн 1,44 и 0,8 см.

Легко видеть, что в зимних условиях ($Q \approx 3 \text{ кг}/\text{м}^2$) в противоположность летним условиям ($Q \approx 30 \text{ кг}/\text{м}^2$) измерения интегральной водности облаков на длинах волн 1,44 и λ_{opt} дают существенное преимущество перед измерениями интегральной водности облаков на двух длинах волн, не включающих в себя λ_{opt} , когда точность измерений при неопределенности температуры облаков $\pm 10^\circ$ будет заведомо не лучше $\pm 25\%$. Можно показать, что зимой точность определения интегральной водности облаков будет определяться, главным образом, ошибкой абсолютной калибровки Δ радиометра на волну λ_{opt} . При $\Delta = 1,5^\circ$ и $W = 0,15 \text{ кг}/\text{м}^2$ эта точность составит 5%, увеличиваясь до 2,5% с увеличением W .

ЛИТЕРАТУРА

1. P. S. Ray, Appl. Opt., 11, 1836 (1972).
2. Е. М. Фейгельсон, Лучистый теплообмен и облака, Гидрометеоиздат, Л., 1970.
3. Б. Дж. Мейсон, Физика облаков, Гидрометеоиздат, Л., 1961.
4. Л. М. Митник, Труды Гидрометеоцентра СССР, вып. 148, стр. 115, 1974.
5. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
6. С. Н. Colie J. В. Hasted and D. M. Ritson, Proc. Phys. Soc., 60, 145 (1948), см. перевод в сб. Распространение сантиметровых радиоволн в тропосфере, ИЛ, М., 1950.
7. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутузов, Труды ГГО, вып. 222, 100 (1968).
8. В. И. Розенберг, Рассеяние и ослабление электромагнитного излучения атмосферными частицами, Гидрометеоиздат, Л., 1972.
9. J. E. Chamberlain, G. W. Chantry, N. A. Gebbie, N. W. Stone, T. B. Taylor and G. Wyllie, Nature, 210, 791 (1966).
10. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
11. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 9, 431 (1966).
12. Л. Т. Матвеев, Курс общей метеорологии, Гидрометеоиздат, Л., 1976.
13. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутузов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, 52 (1974).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 мая 1977 г.

DEFINITION OF THE INTEGRAL HUMIDITY OF THE CLOUD ATMOSPHERE AND THE INTEGRAL MOISTURE, TEMPERATURE AND THE HEIGHT OF THE DROP CLOUD PHASE BY REMOTE SENSING METHOD

S. A. Zhevakin

The method is suggested of remote sensing ground-based measurements of the integral humidity of the cloud atmosphere, integral moisture, drop cloud phase and its temperature. The integral humidity of the cloud atmosphere is defined by measurements of the atmosphere brightness temperature at two wavelengths λ_1 and λ_2 . The wavelength λ_1 is chosen so that the atmosphere brightness temperature measured does not depend on the height humidity profile: it is equal either 1.44 or 1.26 cm. The absorption coefficient of the cloud drop phase κ at these wavelengths for the cloud temperature (which is

estimated with the accuracy $\pm 10^\circ$ according to the near the ground temperature), consideres to be inversely proportional to the wavelength square. Then, at the wavelength λ_{opt} where the coefficient α does not practically depend on the cloud temperature (in the limits $\pm 10^\circ$) the integral moisture is defined taking into account the integral humidity found. After this according to the optical cloud depth measured earlier at the wavelengths λ_1 , λ_2 the temperature of the cloud drop phase is defined. The wavelengths λ_2 and λ_{opt} are indicated and the accuracies of measurements of the integral atmosphere humidity, integral moisture, the temperature and the height of drop clouds for «summer» and «winter» conditions are estimated. Possibilities are discussed given by measurements not at three but only at two wavelengths 1.44 cm (either 1.26 cm) and at λ_{opt} .

УДК 621.373 826

РЕЖИМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН И БИЕНИЙ В КОЛЬЦЕВОМ ТВЕРДОТЕЛЬНОМ ЛАЗЕРЕ

A. V. Доценко, Е. Л. Клочан, Е. Г. Ларионцев, О. В. Федорович

Теоретически исследуется влияние связи встречных волн через обратное рассеяние и скорости вращения на режимы генерации твердотельного кольцевого лазера с однородно-уширенной линией усиления.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования непрерывно действующих кольцевых лазеров на твердом теле [1–6] показали возможность существования нескольких качественно различных режимов генерации. Возникновение того или иного режима определяется, прежде всего, величиной связи между встречными волнами и разностью собственных частот резонатора для встречных волн Ω . Как известно, расстройка собственных частот резонатора Ω может быть обусловлена различными эффектами. Для удобства будем считать, что Ω определяется лишь вращением лазера, и кольцевой лазер с $\Omega = 0$ будем называть покоящимся.

Режимы генерации покоящегося твердотельного кольцевого лазера (ТКЛ) в настоящее время исследованы теоретически достаточно подробно [1, 2]. Характеристики вращающихся ТКЛ были изучены лишь в случае коэффициентов связи встречных волн, близких к комплексно-сопряженным [3, 6], кроме того, в этом случае использовалось приближение «сильной связи». Проведенные исследования показали, что ТКЛ обладают рядом особенностей, отличающих их от газовых кольцевых лазеров (ГКЛ) (существование режимов синхронизации встречных волн с неограниченной полосой синхронизации, переход режима биений в режим синхронизации при увеличении скорости вращения).

Представляет интерес провести исследование режимов генерации вращающихся ТКЛ при произвольной величине связи встречных волн. В данной работе с этой целью 1) проведено аналитическое исследование режимов синхронизации встречных волн и биений в области больших расстроек собственных частот резонатора Ω , 2) проведены численные расчеты характеристик режимов синхронизации вращающихся ТКЛ при изменении в широком диапазоне модулей и разности фаз коэффициентов связи встречных волн.

Теоретический анализ проводится в данной работе при следующих предположениях: 1) в каждом из направлений генерация является однодомовой, 2) частоты встречных волн близки к центру однородно-уширенной линии усиления, и расстройкой частоты относительно центра линии пренебрегается.

Используется стандартная система уравнений для комплексных амплитуд встречных волн $\tilde{E}_{1,2} = E_{1,2} \exp(-i\varphi_{1,2})$ и плотности инверсной населенности N [1]:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{E}}_{1,2} = & -\frac{\omega}{2Q}\tilde{E}_{1,2} + \frac{i}{2}\tilde{m}_{1,2}\tilde{E}_{2,1} \mp i\frac{\Omega}{2}\tilde{E}_{1,2} + \\ & + \frac{\sigma}{2T}\left(\tilde{E}_{1,2}\int_0^l N dz + \tilde{E}_{2,1}\int_0^l Ne^{\pm ikz} dz\right),\end{aligned}\quad (1)$$

$$\dot{N} = W - N/T_1 - a(N/T_1)|\tilde{E}_1 e^{-ikz} + \tilde{E}_2 e^{ikz}|^2.$$

Здесь $\tilde{m}_{1,2} = m_{1,2} \exp(\pm i\vartheta_{1,2})$ — комплексные коэффициенты связи через обратное рассеяние, ω/Q — ширина полосы резонатора, T — время обхода светом резонатора, σ — сечение перехода, W — скорость накачки, T_1 — продольное время релаксации, l — длина активного элемента, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ — разность собственных частот резонатора для встречных волн, $a = \sigma c T_1 / 8\pi \hbar \omega$.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ГЕНЕРАЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Режимы генерации вращающегося ТКЛ можно исследовать аналитически при произвольных коэффициентах связи встречных волн $\tilde{m}_{1,2}$ в области больших расстроек собственных частот резонатора Ω , удовлетворяющих неравенствам

$$|\Omega| \gg m_{1,2}; \quad (2a)$$

$$|\Omega| \gg \frac{\omega}{Q} \eta. \quad (2b)$$

Здесь $\eta = (W - W_{\text{пор}})/W_{\text{пор}}$ — относительное превышение скорости накачки над ее пороговым значением, которое будем считать малым ($\eta \ll 1$).

В области больших расстроек Ω , в принципе, возможны режимы двух типов: с существенно неравными интенсивностями встречных волн и с близкими по величине интенсивностями. Исследуем сначала случай генерации с существенно неравными интенсивностями волн. Пусть подавляется волна с амплитудой E_1 , т. е.

$$E_1/E_2 \ll 1.$$

В дальнейшем будет показано, что $E_1/E_2 \sim m_1/\Omega$.

Опуская в исходных уравнениях (1) малые члены порядка $m_{1,2}/\Omega$ и $\frac{\omega}{Q} \eta/\Omega$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 = & \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma l}{T} N - \frac{\omega}{Q} \right) E_2, \\ \dot{N} = & W_{\text{пор}}(1 + \eta) - \frac{N}{T_1} - \frac{N_{\text{пор}}}{T_1} a E_2^2,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\dot{E}_1 = -\frac{m_1}{2} E_2 \sin(\Phi + \vartheta_1),$$

$$\dot{\Phi} = \Omega - \frac{m_1}{2} \frac{E_2}{E_1} \cos(\Phi + \vartheta_1).$$

Здесь $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз встречных волн.

Установившееся решение уравнений (3), описывающее режим синхронизации встречных волн, имеет вид

$$\begin{aligned} aE_{20}^2 &= \eta, & N_0 &= \frac{\omega}{Q} \frac{T}{\sigma l}, \\ \sin(\Phi_0 + \vartheta_1) &= 0, & E_{10} &= \left| \frac{m_1}{2\Omega} \right| E_{20}. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с (4) в режиме синхронизации встречных волн при больших скоростях вращения происходит подавление одной из волн, причем степень подавления увеличивается с ростом Ω .

Анализ устойчивости решения (4), проведенный в Приложении, показывает, что при соотношении релаксационных параметров

$$\frac{1}{T_1} \ll \frac{\omega}{Q} \eta, \quad (5)$$

характерном для твердотельных лазеров, рассматриваемый режим устойчив при условии

$$\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \Omega > 0. \quad (6)$$

Если бы мы рассматривали режим синхронизации, соответствующий подавлению волны E_2 ($E_2 \ll E_1$), то получили бы условие устойчивости этого режима, противоположное (6),

$$\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) \Omega < 0. \quad (7)$$

Это означает, что асимптотически, в случае больших Ω , в ТКЛ всегда существует устойчивый режим синхронизации встречных волн с существенно неравными интенсивностями.

Перейдем теперь к асимптотическому исследованию режимов генерации с мало отличающимися средними значениями интенсивностей встречных волн. Как известно, в ГКЛ при больших Ω существует режим биений с равными средними значениями интенсивностей. В связи с важностью этого режима для практики представляет интерес выяснить вопрос о возможности его существования в ТКЛ.

При асимптотическом исследовании режима биений с почти равными интенсивностями встречных волн мы не делали каких-либо ограничений на скорость релаксации инверсии населенностей (не требовали выполнения неравенства (5)). Это позволило дополнительно рассмотреть случай быстрой релаксации инверсии населенностей $\left(\frac{1}{T_1} \gg \frac{\omega}{Q} \eta \right)$, характерный для ГКЛ. Выражения для интенсивностей встречных волн в асимптотической области больших Ω можно представить в виде суммы постоянных составляющих и малых, осциллирующих с частотой Ω членов. Для отношения постоянных составляющих разности и суммы интенсивностей встречных волн можно получить выражение

$$K = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1^2 + E_2^2} = \frac{m_1 m_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Omega \frac{\omega}{Q} \eta} (1 + \Omega^2 T_1^2). \quad (8)$$

При получении (8) предполагалось, что средние значения интенсивностей встречных волн мало отличаются, т. е. выражение (8) является справедливым при условии $|K| \ll 1$.

В случае твердотельных лазеров скорость релаксации населенности удовлетворяет неравенству $\frac{1}{T_1} \ll \frac{\omega}{Q} \eta$. Учитывая неравенство (26), в рассматриваемой области больших расстроек имеем

$$\Omega^2 T_1^2 \gg 1. \quad (9)$$

В этом случае

$$K = \frac{m_1 m_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\frac{\omega}{Q} \eta \Omega} T_1^2 \Omega^2. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в ТКЛ в области больших расстроек Ω , удовлетворяющих неравенствам (2), режима биений с равными интенсивностями встречных волн не существует. С увеличением скорости вращения происходит подавление одной из встречных волн. Этот результат подтверждается экспериментальными исследованиями [1-3].

В случае газового кольцевого лазера ситуация оказывается иной. В этом случае можно удовлетворить неравенству (26) и одновременно иметь

$$\Omega^2 T_1^2 \ll 1. \quad (11)$$

В этом случае в соответствии с (11)

$$K = \frac{m_1 m_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\frac{\omega}{Q} \eta \Omega}, \quad (12)$$

т. е. при увеличении скорости вращения происходит выравнивание постоянных составляющих интенсивностей встречных волн.

3. РЕЖИМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

В разд. 2 при асимптотическом исследовании характеристик ТКЛ был получен вывод об устойчивости, в области больших расстроек Ω режима синхронизации встречных волн независимо от величины связи через рассеяние. В покоящемся ТКЛ в зависимости от величины связи возможны различные режимы генерации: 1) стоячей волны, 2) режим с неравными интенсивностями встречных волн, 3) автомодуляционный режим. Представляется интересным проследить изменение режимов генерации покоящегося лазера при увеличении скорости вращения. Этот вопрос исследуется в данном разделе.

Было проведено численное исследование режимов синхронизации встречных волн и их устойчивости. Для описания режимов синхронизации исходную систему уравнений нужно переписать в виде уравнений для амплитуд $E_{1,2}$ встречных волн и их разности фаз $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ и положить производные $\dot{E}_{1,2} = \dot{\Phi} = 0$. В результате получается система трансцендентных уравнений для $E_{1,2}$ и Φ , которую мы приводить здесь не будем. При исследовании устойчивости режима синхронизации можно получить следующее характеристическое уравнение (для возмущений, зависящих от времени, как $e^{\lambda t}$):

$$\left(-\lambda + \Delta - \frac{1}{2} \frac{\sigma l}{T} W_{\text{нор}} T_1 y \frac{1}{1 + \lambda T_1} \right) \left[(\lambda - \Delta) \left(\lambda + \frac{3}{2} \frac{\sigma l}{T} W_{\text{нор}} T_1 y \frac{1}{1 + \lambda T_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma l}{T} W_{\text{нор}} T_1 x \right)^2 \frac{1}{(1 + \lambda T_1)^2} \right] - \quad (13)$$

$$-\left(\lambda + \frac{\sigma l}{T} W_{\text{поп}} T_1 y \frac{1}{1 + \lambda T_1}\right) M_0^2 - \frac{\sigma l}{T} W_{\text{поп}} T_1 y \frac{1}{1 + \lambda T_1} M_1^2 = 0,$$

где

$$\Delta = -\frac{\omega}{Q} + \frac{\sigma l}{T} W_{\text{поп}} T_1 (1 + \eta - y), \quad x = E_1^2 - E_2^2, \\ y = E_1^2 + E_2^2; \quad (14)$$

$$M_0^2 = \frac{1}{4} \left\{ [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) + m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \right. \\ \left. - [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) - m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \right\}^2; \quad (15)$$

$$M_1^2 = \frac{1}{8} \left\{ [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) + m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)]^2 - \right. \\ \left. - [m_1^2 \cos^2(\Phi + \vartheta_1) - m_2^2 \cos^2(\Phi + \vartheta_2)] \frac{x}{y} \right\}. \quad (16)$$

Характеристическое уравнение (13) получено в приближении слабого поля ($\eta \ll 1$). Коэффициенты связи при получении характеристического уравнения считались произвольными, никаких предположений о стационарных значениях интенсивностей встречных волн не делалось. Характеристическое уравнение (13) сводится к алгебраическому уравнению шестого порядка, которое в общем случае аналитически не решается.

При численных расчетах полагались фиксированными параметры $\omega/Q = 10^6 \text{ c}^{-1}$, $T_1 = 10^{-3} \text{ с}$, $\eta = 0,1$ и варьировались значения $m_{1,2}$ и $\vartheta_{1,2}$.

Численные расчеты показали, что в ТКЛ при достаточно больших значениях модулей коэффициентов связи $m_{1,2}$ существуют режимы синхронизации встречных волн с неограниченной шириной полосы синхронизации, не переходящие в режим биений при увеличении расстройки частот Ω . В случае равных модулей коэффициентов связи ($m_1 = m_2 = m$) условие существования таких режимов совпадает с условием устойчивости стоячей волны в покоящемся ТКЛ [1]:

$$m \left| \sin \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \right| \geq \frac{1}{3} \frac{\omega}{Q} \eta. \quad (17)$$

Если в покоящемся лазере генерируется устойчивая стоячая волна, то при вращении лазера изменяется разность фаз встречных волн и происходит подавление одной из встречных волн. Направление распространения подавляемой волны определяется направлением вращения и знаком разности фаз коэффициентов связи (при $\Omega > 0$, $\vartheta_1 - \vartheta_2 > 0$ $E_2^2 < E_1^2$); степень подавления увеличивается с ростом скорости вращения. Вычисления проводились при различных скоростях вращения вплоть до скоростей, при которых интенсивность подавляемой волны в 200 раз меньше интенсивности сильной волны. При этом режим синхронизации встречных волн оставался устойчивым при всех скоростях вращения и выхода из области синхронизации не происходило.

Если в покоящемся ТКЛ имеет место автомодуляционный режим (величина связи выбрана так, что стационарный режим генерации в

покоящемся ТКЛ невозможен), то при некоторой скорости вращения автомодуляционный режим переходит в режим синхронизации встречных волн с неравными интенсивностями встречных волн. При дальнейшем увеличении скорости вращения слабая волна еще больше подавляется.

Режим синхронизации встречных волн с неограниченной полосой синхронизации и переход автомодуляционного режима в режим синхронизации при увеличении скорости вращения проиллюстрированы на рис. 1, 2. На этих рисунках построены зависимости стационарных значений интенсивностей (рис. 1а, 2а) и разности фаз (рис. 1б, 2б) встречных волн от скорости вращения при различных значениях модулей связь, $m_1 = m_2 = m$. Графики на рис. 1 построены для разности фаз коэффициентов связи $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,5\pi$; графики на рис. 2 — для $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,9\pi$; величина $\tilde{a} = 3a/\eta$.

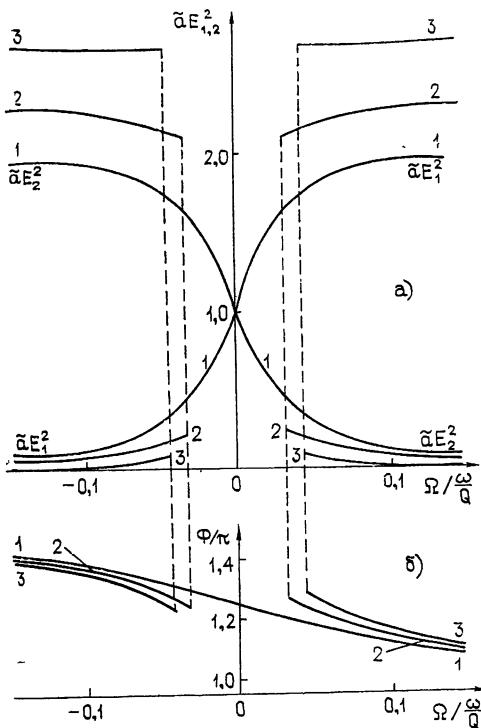


Рис. 1. 1 — $m = 0,05 \frac{\omega}{Q}$, 2 — $m = 0,03 \frac{\omega}{Q}$,
3 — $m = 0,01 \frac{\omega}{Q}$.

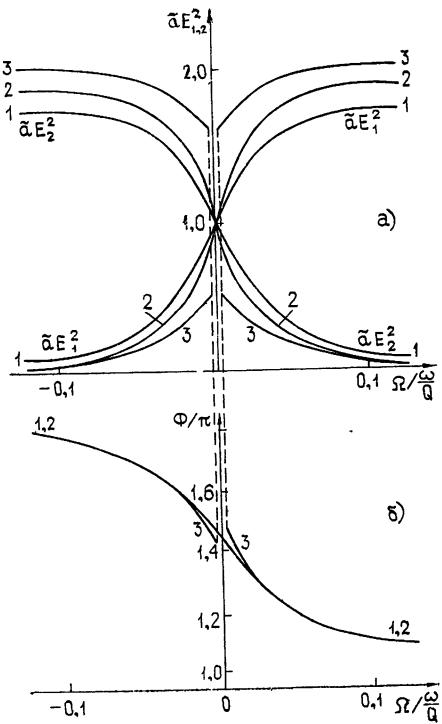


Рис. 2. 1 — $m = 0,04 \frac{\omega}{Q}$, 2 — $m = 0,035 \frac{\omega}{Q}$,
3 — $m = 0,03 \frac{\omega}{Q}$.

Отметим, что режим с неограниченной полосой синхронизации и автомодуляционный режим, переходящий в режим синхронизации встречных волн при увеличении скорости вращения, были также получены аналитически в случае сильной связи с близкими фазами коэффициентов [3, 6].

Режим синхронизации встречных волн с ограниченной полосой синхронизации, полученный ранее в работе [1], может иметь место только при антикомплексно-сопряженных коэффициентах связи ($m_1 = m_2 = m$; $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \pm \pi$). Вычисления показали, что значения разности фаз коэффициентов связи $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \pm \pi$ представляют собой

особую точку; при малых отклонениях $|\vartheta_2 - \vartheta_1|$ от π происходит быстрое подавление одной из встречных волн с увеличением скорости вращения, и ширина полосы синхронизации становится неограниченной.

Отсутствие выхода из области синхронизации при увеличении скорости вращения является особенностью ТКЛ и в газовых лазерах не имеет места. Отличие условий устойчивости режимов синхронизации в ТКЛ от соответствующих условий в ГКЛ связано с различием во временах релаксации инверсной населенности. Как уже отмечалось ранее, время релаксации инверсной населенности в ТКЛ много больше времени релаксации интенсивности поля. В газовых лазерах, наоборот, время релаксации поля много больше времени релаксации инверсной населенности.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда в покоящемся кольцевом лазере имеет место стационарный режим с неравными интенсивностями встречных волн. Вначале рассмотрим некоторые характерные особенности этого режима в покоящемся ТКЛ при равных модулях коэффициентов связи, $m_1 = m_2 = m$. Стационарный режим с неравными интенсивностями в покоящемся ТКЛ может существовать и быть устойчивым вне области устойчивости режима стоячей волны, определяемой неравенством (17). На рис. 3 показаны границы областей устойчивости режимов с неравными интенсивностями и стоячей волны в зависимости от модуля и разности фаз коэффициентов связи. Режим стоячей волны устойчив в области выше кривой 2, а режим с неравными интенсивностями — ниже кривой 1. В области между кривыми 1 и 2 в покоящемся ТКЛ режимы со стационарными значениями амплитуд и разности фаз встречных волн неустойчивы и имеет место автомодуляционный режим генерации.

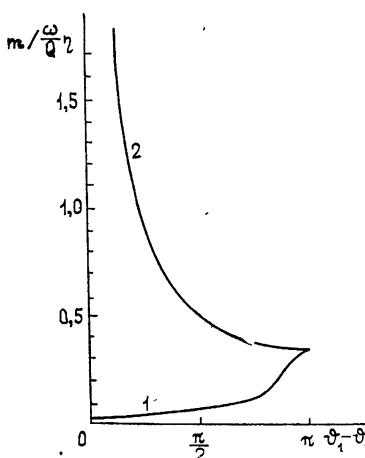


Рис. 3.

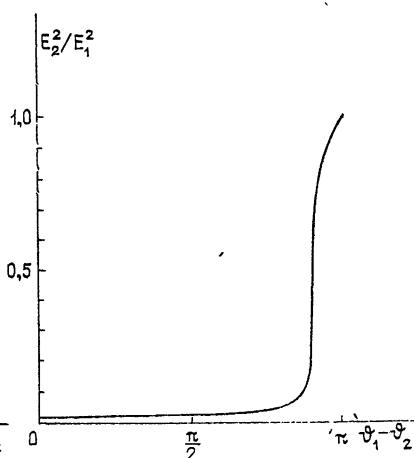


Рис. 4.

Отношение интенсивностей встречных волн в режиме с неравными интенсивностями зависит от модуля связи. При $m \rightarrow 0$ режим с неравными интенсивностями переходит в режим бегущей волны. С увеличением m степень подавления слабой волны уменьшается. Наименьшая степень подавления одной из волн (при фиксированной разности фаз коэффициентов связи) имеет место на границе области устойчивости. На рис. 4 показано отношение интенсивностей встречных волн на границе области устойчивости в зависимости от разности фаз коэффициентов связи. Из полученных результатов следует, что если разность

фаз коэффициентов связи не близка к π ($|\vartheta_2 - \vartheta_1| \leq 0,8\pi$), то во всей области устойчивости режим с неравными интенсивностями близок к режиму односторонней генерации (отношение интенсивностей встречных волн более 50). При разности фаз коэффициентов связи, близкой к π , интенсивности встречных волн выравниваются при приближении к границе устойчивости.

Если величина связи выбрана так, что в покоящемся ТКЛ возбуждается режим с неравными интенсивностями встречных волн, то при вращении меняется разность фаз встречных волн и увеличивается степень подавления слабой волны. Отметим, что в покоящемся ТКЛ могут возбуждаться два устойчивых режима с неравными интенсивностями встречных волн: режим с $E_1^2 > E_2^2$ и режим с $E_2^2 > E_1^2$, причем отношение интенсивностей сильной и слабой волн в обоих режимах одинаково. Во вращающемся ТКЛ режим с $E_2^2 > E_1^2$ устойчив при всех расстройках собственных частот, $\Omega < \Omega_1$ ($\Omega_1 > 0$), а режим с $E_1^2 > E_2^2$ устойчив при $\Omega > -\Omega_1$, если $\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) > 0$.

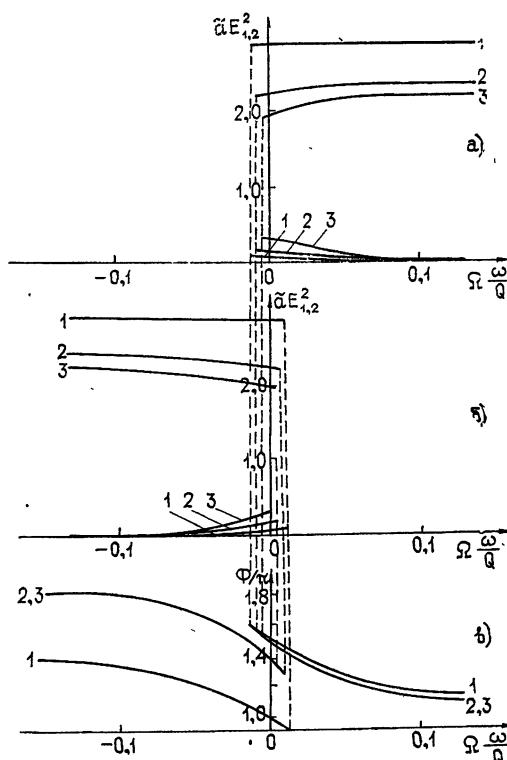


Рис. 5.

На рис. 5 построены графики интенсивностей встречных волн (рис. 5а в случае $E_1^2 > E_2^2$, рис. 5б в случае $E_2^2 > E_1^2$) и разности фаз встречных волн (рис. 5в) для различных значений коэффициентов связи. Кривые 1 построены при $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,5\pi$, $m = 0,005 \frac{\omega}{Q}$; при этом $\Omega_1 = 0,011 \frac{\omega}{Q}$. Кривые 2 и 3 построены при $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,9\pi$ и при разных

значениях модуля связь: кривые 2 — при $m = 0,020 \frac{\omega}{Q}$, кривые 3 — при $m = 0,025 \frac{\omega}{Q}$. Видно, что при уменьшении модулей коэффициентов связи режим с неравными интенсивностями встречных волн приближается к режиму односторонней генерации. Величина Ω_1 при уменьшении m увеличивается: при $m = 0,025 \frac{\omega}{Q}$ $\Omega_1 = 0,004 \frac{\omega}{Q}$, при $m = 0,020 \frac{\omega}{Q}$ $\Omega_1 = 0,01 \frac{\omega}{Q}$.

На рис. 1—5 иллюстрировались характеристики ТКЛ в режимах синхронизации встречных волн в случае равных модулей коэффициентов связи. Рассмотрим теперь, к каким особенностям может привести неравенство модулей коэффициентов связи.

При неравных модулях коэффициентов связи режим стоячей волны может существовать только при некоторой расстройке частот $\Omega = \Omega_0 \neq 0$, где

$$\Omega_0 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}} \operatorname{sgn} [\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)].$$

В покоящемся лазере ($\Omega = 0$) при $m_1 \neq m_2$ интенсивности встречных волн не равны между собой.

Если при $\Omega = \Omega_0$ режим стоячей волны устойчив, то имеет место режим синхронизации встречных волн с неограниченной полосой синхронизации. При этом зависимость стационарных значений интенсивностей и разности фаз встречных волн от скорости вращения аналогична показанным на рис. 1 и 2. Неравенство модулей коэффициентов связи приводит к смещению графиков интенсивностей встречных волн вдоль оси скоростей вращения на величину $\Omega_0 / \frac{\omega}{Q}$ и незначительномуискажению формы как этих графиков, так и графиков для разности фаз встречных волн.

Если режим стоячей волны неустойчив, то интенсивности встречных волн не равны всюду в области устойчивости режимов синхронизации встречных волн. При $\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) > 0$ режимы синхронизации встречных волн с $E_1^2 > E_2^2$ устойчивы при $\Omega > \Omega_1$, а режимы с $E_2^2 > E_1^2$ устойчивы при $\Omega < \Omega_2$. В случае, когда $\Omega_1 > \Omega_2$, в области скоростей вращения, $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$, устойчивых стационарных режимов генерации ТКЛ не существует. При скоростях вращения, соответствующих расстройкам собственных частот резонатора $\Omega = \Omega_1$ и $\Omega = \Omega_2$, имеет место переход от автомодуляционного режима генерации к режиму синхронизации встречных волн. Отметим, что при неравенстве модулей коэффициентов связи область существования автомодуляционного режима $\Omega_2 < \Omega < \Omega_1$ несимметрична относительно Ω_0 .

Если $\Omega_2 > \Omega_1$, то в области частот $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ возможно существование двух устойчивых режимов синхронизации встречных волн с неравными интенсивностями, отличающихся направлением распространения более сильной волны (области устойчивости режимов с $E_1^2 > E_2^2$ и $E_2^2 > E_1^2$ перекрываются). Случай $\Omega_2 > \Omega_1$ возможен лишь при малых модулях коэффициентов связи, когда в покоящемся ТКЛ устойчив стационарный режим с неравными интенсивностями встречных волн. Кроме того, модули коэффициентов связи должны мало отличаться.

Например, при $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,9\pi$, $\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2} = 0,02 \frac{\omega}{Q}$ перекрывание областей устойчивости режимов синхронизации имеет место только при $m_2/m_1 \leq 1,1$.

Изложенные в этом разделе результаты полностью согласуются с проведенным в разд. 2 асимптотическим исследованием режимов генерации ТКЛ. Сравним полученные результаты с известными результатами экспериментальных исследований [1-3]. Экспериментальные исследования показали, что при увеличении скорости вращения в ТКЛ происходит подавление одной из встречных волн. Наблюдался переход автомодуляционного режима в режим синхронизации встречных волн при увеличении скорости вращения. Эти результаты качественно согласуются с полученными в данной главе теоретическими выводами.

При экспериментальном исследовании величины области захвата в ТКЛ [3] были получены режимы синхронизации как с неограниченной, так и с конечной шириной области синхронизации. При теоретическом исследовании оказалось, что устойчивые режимы синхронизации встречных волн возможны лишь при неограниченной ширине области синхронизации. Это расхождение теории с экспериментом, по-видимому, связано с тем, что теоретически исследовалась только устойчивость стационарных режимов генерации по отношению к малым возмущениям. Мы предполагаем, что переход от режима синхронизации к режиму биений в ТКЛ может происходить «жестко», за счет сильных флуктуаций. Косвенно это предположение подтверждается тем, что в экспериментах граница полосы синхронизации нестабильна.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исследование устойчивости режима синхронизации встречных волн (4) проведем, используя характеристическое уравнение (13). При больших Ω , удовлетворяющих неравенствам (2), коэффициенты M_0^2 , M_1^2 и Δ имеют приближенные значения:

$$M_0^2 = \Omega^2, \quad M_1^2 = \frac{1}{4} m_1^2, \quad \Delta = \frac{m_1 m_2}{2\Omega} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Характеристическое уравнение (13) при подстановке M_0^2 , M_1^2 , Δ , x и y примет вид

$$\left(-\lambda + \Delta - \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{1 + \lambda T_1} \right) \left[(\lambda - \Delta) \left(\lambda + \frac{3}{2} \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{1 + \lambda T_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{1 + \lambda T_1} \right)^2 \right] - \left(\lambda + \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{1 + \lambda T_1} \right) \Omega^2 - \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{1 + \lambda T_1} \frac{m_1^2}{4} = 0.$$

В случае больших Ω , удовлетворяющих неравенствам (2), и при выполнении неравенства (5), справедливого для твердотельных лазеров, корни характеристического уравнения существенно различаются по величине ($|\lambda_{1,2}| \gg |\lambda_{3,4}| \gg |\lambda_{5,6}|$) и имеют следующие приближенные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega + \Delta,$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{Q} \frac{\eta}{T_1}} + \Delta \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{8\Omega^2 T_1},$$

$$\lambda_{5,6} = - \frac{1}{T_1} \left(1 \pm i \frac{\frac{\omega}{Q} \eta}{2\Omega} \right).$$

Решение (4) устойчиво при $\Delta < 0$, т. е. при $\Omega \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Клоchan, Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, А. Н. Шелаев, ЖЭТФ, 65, 1344 (1973).
2. Е. Л. Клоchan, Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, А. Н. Шелаев, ДАН СССР, 215, 313 (1974).
3. Е. Л. Клоchan, Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, А. Н. Шелаев, Письма в ЖЭТФ, 21, 30 (1975).
4. А. А. Мак, В. И. Устюгов, В. А. Фромзель, М. М. Халеев, ЖТФ, 44, 868 (1974).
5. А. А. Мак, В. И. Устюгов, Письма в ЖЭТФ, 18, 253 (1973).
6. А. В. Доценко, Е. Г. Ларионцев, Квантовая электроника, 4, 1099 (1977).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики Московского госу-
дарственного университета

Поступила в редакцию
26 мая 1977 г.

SYNCHRONIZATION REGIMES OF OPPOSITE WAVES AND BEATS IN A RING SOLID-STATE LASER

A. V. Dotsenko, E. L. Klochan, E. G. Lariontsev, O. V. Fedorovich

The influence of opposite-wave coupling upon the generation conditions of a solid-state ring laser with uniformly broadened line of amplification is investigated theoretically using back-scattering and rotation velocity.

УДК 621.378.001

**ПРОЦЕССЫ УСИЛЕНИЯ И ГЕНЕРАЦИИ ПРИ ВР
НА ПОЛЯРИТОНАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
УБЕГАЮЩЕЙ И ПОПУТНОЙ С НАКАЧКОЙ ВОЛН**

*A. A. Бабин, Ю. Н. Беляев, М. М. Сущик,
В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, А. Н. Щелоков*

Рассмотрены процессы усиления, генерации и формирования углового и частотного спектров ПГС при взаимодействии убегающей и попутной с накачкой волн в узких пучках накачки. Теоретически исследованы характеристики мод и условия их возбуждения. Проанализированы особенности усиления при вынужденном рассеянии на сильно затухающих поляритонах. Результаты могут быть использованы для анализа процессов параметрического взаимодействия и ВР в коротких импульсах накачки.

Процессы параметрического усиления и вынужденного рассеяния на поляритонах (ВРП) в приближении заданного поля накачки исследовались в ряде работ (см., например, [1-4]). При этом основное внимание уделялось инкрементам усиливаемых в том или ином режиме полей. Однако, как показано теоретически [6] и продемонстрировано экспериментально [6, 7], условия самовозбуждения, структура и спектр излучения импульсных однорезонаторных параметрических генераторов зависят не только от инкрементов, но и от других параметров мод «параметрического волновода», формирующихся в нелинейном веществе в процессе усиления. В связи с этим представляется целесообразным исследование характеристик мод параметрического волновода и условий их возбуждения в параметрических генераторах. При слабом поглощении и сравнительно малых углах убегания усиливаемых волн из пучка накачки такое исследование проведено в работе [6]. В другом характерном случае, когда выполняются обратные условия, как методика описания, так и сам процесс усиления обладают некоторыми особенностями. Наиболее характерные из них и их влияние на процесс параметрической генерации в ВРП рассмотрены в настоящей работе*.

Прежде всего отметим, что сильное поглощение и большой угол убегания одной из волн играют наиболее существенную роль при ВРП (угол убегания может достигать десятков градусов [8]). Второй из упомянутых факторов оказывается также существенным при параметрическом взаимодействии убегающей и почти попутной с накачкой волн. При определенных условиях, сформулированных ниже (§1), ВРП и трехволновое параметрическое взаимодействие электромагнитных волн описываются одинаковыми уравнениями, поэтому целесообразно рассмотреть эти оба процесса совместно. Отличие усиления при ВРП в этом приближении от обычного параметрического взаимодействия

* Хотя в дальнейшем рассмотрение ведется на примере взаимодействия в поле монохроматического пучка накачки, однако ввиду пространственно-временной аналогии [19-21] результаты могут быть использованы при анализе параметрического усиления и ВР в поле коротких импульсов.

связано с тем, что влияние поглощения поляритонной волны на процесс усиления во многих случаях сравнимо с влиянием ее излучения из области взаимодействия, а иногда оказывается определяющим. Параметром, характеризующим относительную роль этих факторов, является отношение радиуса пучка накачки a к длине поперечной релаксации убегающей (поляритонной) волны* $L_2 = |\beta_n| / \alpha_n$ (β_n тангенс угла θ между групповыми скоростями накачки v_n и поляритонной волны v_p , $\alpha_n = \alpha'_n \cos^{-1} \theta$; α'_n — коэффициент поглощения поляритонной волны). В зависимости от значения параметра a/L_2 и интенсивности накачки можно выделить три характерные для ВРП случая.

Первый из них — усиление в режиме пространственного захвата. Он характерен тем, что при определенных условиях даже при большом затухании поляритонной (убегающей) волны ($a/L_2 \geq 1$) на величину инкремента стоксовой (попутной) захваченной моды в первую очередь влияет излучение волн из области взаимодействия, а поглощение поляритонов влияет в основном лишь на ее структуру. Если условия пространственного захвата не выполнены или длина кристалла меньше длины формирования захваченной моды стоксовой волны, то процессы усиления при $a/L_2 \ll 1$ и при $a/L_2 \geq 1$ отличаются существенно как по структуре мод, так и по их инкрементам. При этом можно выделить соответственно случай слабого и сильного поглощения поляритонов.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ВРП ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ЗАХВАТЕ

Для полного анализа ВРП необходимо, вообще говоря, исследовать уравнения для амплитуд четырех волн: накачки, стоксовой волны, волны с поляритонной частотой Ω и колебаний соответствующего фона, собственная частота которого равна Ω_0 . Однако во многих, представляющих практический интерес случаях частота колебаний поляритона Ω отличается от собственной частоты Ω_0 оптического фона на величину, много большую соответствующей ширины линии. При этом для амплитуд электрических полей накачки (E_n), стоксовой (E_{ct}) и поляритонной волн (E_p) могут быть получены уравнения, аналогичные уравнениям для амплитуд волн, взаимодействующих в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью [2]**. В приближении заданного поля накачки E_n мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного с практической точки зрения случая, когда векторы групповых скоростей накачки v_n , стоксовой v_{ct} и поляритонной v_p волн лежат в одной плоскости, а дифракция пучков несущественна (влияние дифракции рассмотрено в Приложении). Тогда уравнения для амплитуд стоксовой E_{ct} и поляритонной E_p волн можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{ct} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_{ct} \right) E_{ct} = \gamma_0 E_n E_p^* ; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_p \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_p \right) E_p^* = \gamma_0 E_n E_{ct}. \quad (2)$$

* Такое определение параметра L_2 введено ввиду его аналогии с временем поперечной релаксации T_2 для процессов нестационарного ВР. В дальнейшем, когда речь будет идти о параметрическом взаимодействии, для упрощения изложения под стоксовой будем подразумевать попутную волну, а под поляритонной — убегающую.

** При этом необходимо учитывать, что нелинейная восприимчивость и показатель преломления поляритонной волны может зависеть от частоты Ω . При рассмотрении конкретных примеров мы ограничимся областью частот, где это несущественно. Для кристаллов LiIO_3 и LiNbO_3 , например, эта область лежит примерно в интервале $0 < \Omega < 100 \text{ cm}^{-1}$ [9, 10].

Здесь ось z выбрана вдоль направления групповой скорости накачки, $\beta_{ct} = \operatorname{tg}(\hat{v}_n \hat{v}_{ct})$, $\beta_n = \operatorname{tg}(\hat{v}_n \hat{v}_n)$, $\gamma_0 = \chi \sqrt{S_0}$ — коэффициент взаимодействия, зависящий от пикового значения плотности мощности накачки S_0 ; α_{ct} — коэффициент затухания стоксовой волны. Обычно поглощение стоксовой волны достаточно мало, поэтому будем полагать, что оно не влияет на рассматриваемые эффекты. Кроме того, при формулировке результатов применительно к обычному параметрическому взаимодействию ($\gamma_0 \gg a_{1,2}/2$) будем под стоксовой подразумевать волну, убегающую под меньшим углом (попутную волну); поляритонная волна при этом является аналогом убегающей волны.

Как известно [2], приведенные выше уравнения при $\beta_{ct} \beta_n < 0$ и $\Gamma_3 \equiv a/a_{kp} \geq (0,5 + a/2L_2)$ ($a_{kp} \equiv \sqrt{|\beta_{ct} \beta_n|/\gamma_0}$) имеют экспоненциально нарастающие вдоль оси z решения — захваченные моды параметрического волновода. При близкой к квадратичной зависимости от x амплитуды накачки и достаточно большой длине кристалла d ($d > L_3 \equiv \frac{|\beta_{ct}| + |\beta_n|}{2|\beta_{ct} \beta_n|}$) в усиленное поле на выходе дает основной вклад нулевая мода [10, 11]. Ниже мы ограничимся рассмотрением характеристик этой моды и их связи с характеристиками генерируемого излучения.

Остановимся вначале на случае, когда углы, под которыми волны убегают из пучка накачки, отличаются мало ($1 < |\beta_n/\beta_{ct}| < 4$). Ниже мы будем также считать, что поле пучка накачки вблизи его оси может быть аппроксимировано квадратичной зависимостью $E_n = 1 - x^2/2a^2$. При этом в рассматриваемом случае стоксова и поляритонная нулевые захваченные моды близки к гауссовым ($E_{ct, n} \sim \exp[-(x - \delta_{ct, n})^2/2\rho_s^2]$), начиная со сравнительно небольшого превышения порога захвата: $\Gamma_3 \geq 2\Gamma_{por}$ ($\Gamma_{por} \approx 0,5(1 + a/L_2)$). Выражения для их инкрементов p_0 , радиусов ρ_s и соответствующих смещений δ_{ct} , δ_n относительно оси пучка накачки можно получить, воспользовавшись результатами работы [11] (для определенности в дальнейшем будем считать $\beta_{ct} > 0$, $\beta_n < 0$):

$$p_0 = \frac{2\gamma_0 \sqrt{|\beta_{ct} \beta_n|}}{|\beta_{ct}| + |\beta_n|} \left(1 - \frac{1}{2\Gamma_3} \right) - \frac{|\beta_n| \alpha_{ct} + |\beta_{ct}| \alpha_n}{|\beta_n| + |\beta_{ct}|}; \quad (3)$$

$$\rho_s^2 = \frac{a^2}{\Gamma_3(1 + 1/2\Gamma_3)}, \quad \delta_{ct, n} = \delta_3 \pm \frac{a_{kp}}{2}, \quad (4)$$

$$\delta_3 = a \frac{\beta_{ct} - |\beta_n|}{\beta_{ct} + |\beta_n|} \left(1 - \frac{1}{2\Gamma_3} + \frac{\alpha_n - \alpha_{ct}}{|\beta_{ct}| - |\beta_n|} a_{kp} \right).$$

Амплитуда мод на выходной поверхности кристалла ($z = d$) определяется как их пространственным инкрементом, так и способом их возбуждения [12]. Здесь мы остановимся на случае, обычно реализующемся в однорезонаторных генераторах, когда поле на входной поверхности представляет собой моду резонансной волны (т. е. волны, по которой осуществляется обратная связь),мещенную в поперечном сечении относительно оси пучка накачки на величину Δ_p . Как показывает анализ, максимальное усиление амплитуды моды резонансной волны достигается при смещении $\Delta_p = -\delta_{ct}$ или $\Delta_p = -\delta_n$ (в зависимости от того, какое поле подается на вход) и равно

$$G_p = G_s - \ln \frac{|\beta_p| + |\beta_n|}{|\beta_n|},$$

$$G_3 = \Gamma_3 \left[1 - \frac{1}{2\Gamma_3} - \frac{\alpha_{kp}}{2} \left(\frac{\alpha_n}{|\beta_n|} + \frac{\alpha_p}{|\beta_p|} \right) \right] \frac{d}{L_3} + \frac{\delta_p^2}{\rho_n^2} \frac{1 - \sqrt{1 - \text{th}^2(d/L_3)}}{\text{th}(d/L_3)}. \quad (5)$$

Здесь индексы «р» и «н» относятся соответственно к параметрам резонансной и нерезонансной волн. Поскольку в рассматриваемом случае малого отличия величин углов убегания волн $\Gamma_3 \approx \gamma_0$, $\alpha_{kp} \approx |\beta_{p,n}|/\gamma_0$, то, как видно из соотношений (3), (4), критерием слабого влияния поглощения на процесс усиления, как и при взаимодействии плоских волн, является условие $\alpha_n \ll \gamma_0$.

Существенно изменяется роль поглощения в другом предельном случае (наиболее интересном при анализе ВРП), когда усиливаются волны, убегающие под сильно отличающимися углами ($|\beta_n/\beta_{ct}| > 4$). При этом, как следует из результатов работы [1], для инкрементов остается справедливым приведенное выше выражение (3). Из него видно, что критерием слабого влияния затухания поляритонов на инкременты захваченных полей в данном случае является малость критического радиуса a_{kp} по сравнению с длиной поперечной релаксации L_2 . Из этого условия, в частности, следует, что, в отличие от предыдущего случая, возможно усиление при $\alpha_n/2 > \gamma_0$, если

$$\gamma_0 > \alpha_n \sqrt{|\beta_{ct}/\beta_n|}. \quad (6)$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя при $a_{kp} \ll L_2$ ($\gamma_0 \gg \alpha_n \sqrt{|\beta_{ct}/\beta_n|}$) поглощение поляритонов слабо влияет на инкремент захваченных мод, структура мод даже при выполнении этих условий может существенно зависеть от отношения a/L_2 .

Рассмотрим сначала случай относительно слабого затухания поляритонов ($a/L_2 \ll 1$). При этом, влияние поглощения на инкремент и структуру захваченных полей несущественно. В области предельно большого превышения порога захвата ($\Gamma_3 \geq \beta_n^2/\beta_{ct}^2$) структура стоксовой и поляритонной волны примерно одинакова и зависит от закона спадания поля накачки при $|x| > a$. Например, радиус ρ_{ct} и смещение δ_{ct} стоксовой волны для случаев колоколообразного ($E_n \sim \text{ch}^{-1}(x/a)$) [3] и гауссова ($E_n \sim \exp(-x^2/2a^2)$) [1] пучка накачки приближенно могут быть представлены в виде

$$\rho_{ct}^2 \approx a^2 \left(2 + 4 \left| \frac{\beta_{ct}}{\beta_n} \right| \Gamma_3 \right)^{-1}, \quad \delta_{ct} \approx \frac{1}{2} a \ln \left(2 \Gamma_3 + \left| \frac{\beta_n}{\beta_{ct}} \right| \right); \quad (7)$$

$$\rho_{ct}^2 \approx a^2 \left(4 \Gamma_3 \left| \frac{\beta_{ct}}{\beta_n} \right| + \frac{3}{2} \ln \frac{\Gamma_3}{2} \right)^{-1}, \quad \delta_{ct} \approx a \sqrt{\ln \left(4 \left| \frac{\beta_{ct}}{\beta_n} \right| + \frac{2}{\Gamma_3} \right)^{-1}}. \quad (8)$$

В области сравнительно небольшого превышения порога захвата,

$$\frac{\beta_n^2}{\rho_{ct}^2} > \Gamma_3 \geq \frac{\beta_n}{4 |\beta_{ct}|}, \quad (9)$$

как показывает анализ структуры захваченных полей, для оценки параметров пучка стоксовой волны можно использовать соотношения (7), (8); ширина моды поля поляритонной волны $\Delta x_n = \beta_n / (\rho_0 + \alpha_n)$ больше ширины стоксовой моды, а распределение ее поля в поперечном сечении существенно несимметрично.

Наконец, в области малого превышения порога захвата ($\Gamma_3 \approx 1$) поперечный размер стоксовой моды примерно равен ширине пучка накачки. Структура захваченных полей для гауссовой накачки может быть

определенена методом последовательных приближений [11]. Оценки можно проводить, считая, что для стоксовой моды в первом приближении справедливы соотношения (3), (4), а распределения поля поляризационной волны аппроксимировать выражениями

$$U_n^{(0)}(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{V|\beta_n|} \exp \left[-\frac{(x - \delta_{ct} - \rho_{ct})^2}{2\rho_{ct}^2} \right] & (x < (\delta_{ct} + \rho_{ct})) \\ \frac{1}{V|\beta_n|} \exp \left[-\frac{(x - \delta_{ct} - \rho_{ct})}{\Delta x_n} \right] & (x > (\delta_{ct} + \rho_{ct})) \end{cases} . \quad (10)$$

При большом поглощении ($a/L_2 > 1$) наибольший практический интерес представляет процесс вынужденного рассеяния, для которого характерными являются условия $\frac{1}{4} \left| \frac{\beta_n}{\beta_{ct}} \right| \gg 1$ и $\frac{2a}{|\beta_n|} \gamma_0 < 1$. При этом, как и в предыдущем случае, структура моды стоксовой волны зависит от закона спадания амплитуды накачки. Например, в поле накачки с колоколообразным профилем [4] пучка координата максимума стоксовой волны увеличивается при возрастании превышения над порогом захвата (т. е. отношения $a/a_{kp} \equiv \Gamma_s$) по логарифмическому закону, а ее размер при $a \approx (1 \div 10)L_2$ примерно равен радиусу пучка накачки:

$$\delta_{ct} = \frac{a}{2} \ln \frac{2\Gamma_s + 1 - a/L_2}{1 + a/L_2}, \quad (11)$$

$$\rho_{ct}^2 = a^2 \left[2 \left(1 + \frac{a}{L_2} \right) \left(1 - \frac{1}{2\Gamma_s} + \frac{a}{2L_2\Gamma_s} \right) \right]^{-1/2}.$$

Для гауссова пучка накачки ситуация аналогична, но координата максимума увеличивается при превышении порога захвата гораздо медленнее. Радиус стоксовой моды также зависит от превышения над порогом и обычно несколько меньше, чем в случае колоколообразного пучка накачки:

$$\delta_{ct} = a \sqrt{\ln \frac{\Gamma_s}{2}}, \quad \rho_{ct}^2 \approx \frac{a^2}{\frac{3}{2} \ln \frac{\Gamma_s}{2} + \frac{a}{2L_2}} \quad \left(\text{при } \Gamma_s \gg 1, \frac{a}{L_2} \right). \quad (12)$$

Приведенные выше выражения для коэффициента усиления (5) и параметров мод (3), (4), (7)–(12) с учетом их связи с параметрами колебаний, возбуждающихся в однорезонаторных генераторах, позволяют исследовать процессы самовозбуждения и характеристики генераторов с импульсной накачкой.

Как было показано выше, практически при всех представляющих интерес значениях параметров захваченная мода попутной (стоксовой) волны остается близкой к гауссовой. В случае гауссова распределения интенсивности мод процессы самовозбуждения аналогичны процессам при квазистатическом взаимодействии [6]. Возбуждение мод происходит наиболее эффективно, когда в цепи обратной связи мода резонансной волны преобразуется таким образом, что ее смещение (Δ_p) на входе в нелинейный кристалл равно $\Delta_p = -\delta_{ct}$ (или $\Delta_p = -\delta_p$). При этом ее коэффициент усиления определяется выражением (5) с заменой $\rho_s \rightarrow \rho_{ct}$. Из этого условия в обычной схеме однорезонаторного генератора определяется (см., например, [6]) частота ω_0 колебания, имеющего наибольший коэффициент усиления (5) и, следовательно, наибольший инкремент. Для колебаний с частотой $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ коэффициент усиления G_p

уменьшается в основном за счет несовпадения их смещения $\Delta x_{\text{обр}}$ в цепи обратной связи с оптимальным $\Delta x_{\text{опт}} \approx 2 \delta_{\text{ст. п.}}$. Учитывая это уменьшение и связь смещения $\Delta x_{\text{обр}}$ с частотой и направлением волнового вектора резонансной волны, для прямоугольного импульса накачки, аналогично тому, как это сделано в работе [6], легко оценить величину угловой расходимости $2\Delta\theta_p$ возбуждающихся колебаний в плоскости узкого угла синхронизма и связанную с ней ширину частотного спектра $2\Delta\Omega_p$:

$$\Delta\theta_p \approx \frac{\delta\theta_p}{\sqrt{N_{\text{сп. н}}}} \frac{\rho_p}{L\delta\theta_p}, \quad \Delta\Omega \approx \frac{\delta\Omega}{\sqrt{N_{\text{сп. н}}}} \frac{\rho_p}{L\delta\theta_p}. \quad (13)$$

Здесь $2\delta\theta_p = \frac{4\sqrt{2}\gamma_0}{|\beta_p - \beta_n| k_p}$ — ширина узкого угла синхронизма для резонансной волны, $2\delta\Omega$ — ширина полосы синхронизма при заданном направлении ее распространения [2], L — длина цепи обратной связи, $N_{\text{сп. н}}$ — число пробегов резонансной волны за время $\tau_{\text{сп. н}}$ нарастания ее интенсивности от уровня шумов до уровня накачки (предполагается, что $\tau_{\text{сп. н}}$ сравнимо с длительностью импульса накачки), ρ_p — радиус захваченной моды резонансной волны. Эти выражения фактически отличаются от выражений, полученных в работе [6] для квазистатического взаимодействия, заменой $\rho_{\text{стат}} \rightarrow \rho_p$ и $d/L_{\text{стат}} \rightarrow d/L_3$. Аналогичная ситуация в рассматриваемом случае имеет место для ОПГС с нерезонансным отражением накачки.

Мода убегающей (поляритонной) волны при $4 \left| \frac{\beta_{\text{ст}}}{\beta_n} \right| < \Gamma_3^{-1}$ несимметрична, а ширина ее существенно зависит от амплитуды накачки. Однако при малом ($\alpha_n < \gamma_0$) затухании убегающей волны значения максимального временного инкремента и, следовательно, порога наблюдения и времени развития генерации в генераторах с обратной связью по убегающей волне могут мало отличаться от соответствующих значений в генераторах с обратной связью по попутной (стоковой) волне. Чтобы убедиться в этом, для обычного ОПГС надо найти максимальный коэффициент усиления моды убегающей волны (коэффициент усиления моды при симметричном возбуждении). Для ОПГС с нерезонансным отражением накачки инкремент возбуждающихся колебаний определяется, как можно показать [6], коэффициентом усиления максимума амплитуды при падении на входную поверхность кристалла пучка резонансной волны, структура которого с точностью до сдвига антисимметрична структуре моды этой волны (коэффициентом усиления моды резонансной волны при ее антисимметричном возбуждении).

В наиболее интересной в большинстве случаев области небольшого превышения порога захвата $\left(1 < \Gamma_3 < \frac{1}{4} \left| \frac{\beta_n}{\beta_{\text{ст}}} \right| \right)$ и слабого поглощения убегающей волны ($a/L_2 < 1$) из характера структуры ее моды и формул возбуждения [11, 12] следует, что при симметричном возбуждении моды убегающей волны наибольшее усиление достигается при сдвиге Δ максимума падающего пучка, близком к ширине Δx_n . При антисимметричном возбуждении оптимальное значение Δ близко к нулю.

Значение коэффициента усиления G_p моды убегающей волны при ее оптимальном возбуждении в области сравнительно небольшого превышения порога $\left(1 < \Gamma_3 < \frac{1}{4} \left| \frac{\beta_n}{\beta_{\text{ст}}} \right| \right)$ меньше соответствующего значения для коэффициента усиления моды попутной волны на величину, примерно равную единице. В остальных трех случаях при оптимальном

возбуждении (антисимметричном попутной волны, антисимметричном уходящей и симметричном попутной волны) коэффициенты усиления различаются мало и могут быть определены из приведенных выше соотношений (5), (7) и (8). Действительно, равенство коэффициентов усиления уходящей и попутной волн при их антисимметричном возбуждении непосредственно следует из формул возбуждения [12] и аналога соотношений Мэнли — Роу для захваченных мод, $\int U_{ct}^{(0)}(x)[U_{ct}^{(0)}(x)]^* dx = \int U_n^{(0)}(x)[U_n^{(0)}(x)]^* dx$. При симметричном и антисимметричном возбуждении коэффициенты усиления попутной волны практически совпадают при $\Gamma_3 > 1$ вследствие малой несимметрии стоксовой моды.

Эффективность усиления во всех случаях существенно уменьшается при отклонении Δ от оптимального значения на величину ширины моды. В обычном однорезонаторном генераторе это уменьшение и определяет, как говорилось выше, ширину частотного и углового (в плоскости узкого угла синхронизма) спектров возбуждающихся колебаний. Вследствие того, что форма моды убегающей волны существенно отличается от гауссовой, спектры при обратной связи по этой волне тоже не будут гауссовыми. Оценку их ширины при близкой к прямоугольной форме импульса накачки можно, как следует из формул возбуждения мод [12], проводить по формулам (13) с заменой $\rho_p \rightarrow \Delta x_n$. Поскольку $\Delta x_n \geq \rho_{ct}$, ширина спектра и расходимость при обратной связи по убегающей волне и прочих равных условиях будут несколько больше, чем при обратной связи по попутной. Кроме того, следует указать еще на одну причину уширения спектра в последнем случае для импульсов накачки с плавным изменением интенсивности. Дело в том, что величина оптимального сдвига ($\Delta_{opt} \approx \Delta x_n$) при обратной связи по убегающей волне более существенно зависит (см. (10)) от интенсивности накачки $S_0(t)$, чем при обратной связи по попутной волне. Поэтому в разные моменты времени условия оптимального усиления будут выполняться для колебаний с отличающимися направлениями волновых векторов. Для импульсов накачки с плавным изменением интенсивности это может приводить к своеобразному «нестационарному» уширению углового и частотного спектров.

В генераторе с нерезонансным отражением накачки ширина частотного и углового спектров определяется, как известно [6], в основном зависимостью коэффициента усиления от отклонения от направления синхронизма. Поэтому «нестационарного» уширения спектра в таких генераторах не будет. Величину ширины спектра при обратной связи по убегающей волне, как следует из формул возбуждения захваченных мод [12], можно определить с помощью приведенного в работе [6] соотношения (2.1) с заменой $\rho_{stat} \rightarrow \Delta x_n$.

Таким образом, в режиме пространственного захвата для оценки таких характеристик, как время развития генерации и ширина спектра возбуждающихся колебаний, достаточно знать коэффициент усиления нулевой моды при оптимальном симметричном и антисимметричном возбуждении и параметры, определяющие структуру этой моды. Аналогичная ситуация имеет место и для других типов взаимодействия. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только характеристик соответствующих мод параметрического волновода.

Следует отметить, что полученные выше выражения определяют, строго говоря, ширину углового и частотного спектра возбуждающихся колебаний к моменту начала нелинейного режима. Анализ устойчивости стационарных состояний ПГС, который удается провести для некоторых случаев в приближении взаимодействия плоских волн (см., например, [2, 18]), показывает, что отклонения амплитуды генерируемых волн от

стационарного значения затухают, как правило, за время порядка времени затухания колебаний в «холодном» резонаторе, в то время как фазовые возмущения затухают за время порядка времени развития колебаний. Это дает основание считать, что спектральные характеристики генерируемого излучения будут близки к характеристикам в момент начала нелинейного режима, если длительность импульса накачки не превышает существенно время развития $\tau_{\text{сп.н.}}$. Этот вывод подтверждается известными экспериментальными результатами (см., например, [6]). При малом числе возбуждающихся мод, когда спектральные характеристики возбуждающегося излучения в значительной степени определяются структурой самой моды, следует иметь в виду, что эта структура на нелинейном этапе генерации может существенно меняться. Достаточно полное теоретическое исследование этого вопроса к настоящему времени не проведено. Некоторое представление о характере изменения структуры мод на нелинейном этапе можно получить на основе анализа нелинейного режима параметрического усиления, проведенного в работах [14–17].

2. ВР НА СЛАБОЗАТУХАЮЩИХ ПОЛЯРИТОНАХ ПРИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ВЗАЙМОДЕЙСТВИИ

Режим квазистационарного взаимодействия осуществляется, если пучки стоксовой волны и накачки не расходятся относительно друг друга на длине кристалла ($\beta_{\text{ст}} < 2a/d$), а усиление на длине формирования квазистационарной моды,

$$L_{\text{кв}} = |\beta_n|/a \gamma_0^2, \quad (14)$$

невелико ($\gamma_0 L_{\text{кв}} \leq 0.5$). Анализ этого случая можно провести на основе известных при $\beta_{\text{ст}} = 0$ точных решений [2, 3]. Целесообразнее, однако, воспользоваться тем обстоятельством, что при усилении стоксовой волны решения соответствующих уравнений (1), (2) при $d < 2a/|\beta_{\text{ст}}|$ в безразмерных переменных $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{z} = \gamma_0 z$ $\frac{\Gamma_{\text{стат}}}{2}$ ($\Gamma_{\text{стат}} \equiv \frac{2\gamma_0 a}{|\beta_n| + |\beta_{\text{ст}}|}$)

не зависят от параметра $\Gamma_{\text{стат}}$ с точностью до величин, пропорциональных малому параметру $\Gamma_{\text{стат}}^2/4$. Как показывает численное решение

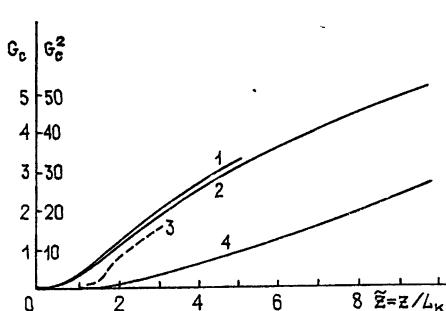


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления стоксовой волны в поле накачки $E_n = (1 - x^2/2a^2)$ при входной амплитуде

$$E_{\text{ст}} \sim \cos^2 \left[\frac{\pi}{4a_{\text{ст}}} (x + a) \right]:$$

1 — $G_{\text{ст}}$ при $\Gamma_{\text{стат}} = 0.5$, $a_{\text{ст}} = a$; 2 — $G_{\text{ст}}$ при $\Gamma_{\text{стат}} = 1$, $a_{\text{ст}} = a$; 3 — $G_{\text{ст}}$ при $\Gamma_{\text{стат}} = 0.5$, $a_{\text{ст}} = a/2$; 4 — $G_{\text{ст}}^2$ при $a_{\text{ст}} = a$.

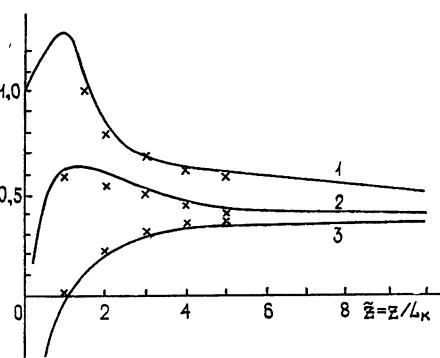


Рис. 2. Зависимость параметров стоксовой и поляритонной волн в поле пучка накачки $E_n = (1 - x^2/2a^2)$ при $E_{\text{ст}}(0, x) \sim \sim \cos^2 \left[\frac{\pi}{4a_{\text{ст}}} (x + a) \right]$ (сплошная кривая —

$$\Gamma_{\text{стат}} = 1, \text{ крестики} — \Gamma_{\text{стат}} = 1/2):$$

1 — $\rho_{\text{ст}}/a$; 2 — $|E_{\text{ст}}^{\max}/E_n^{\max}| \Gamma_{\text{стат}}^{-1}$; 3 — $\delta_{\text{ст}}/a$.

уравнений для квадратичного профиля амплитуды накачки, указанный закон подобия выполняется с достаточной точностью в области $\Gamma_{\text{стат}} \leq 1$ (см. рис. 1, 2). Из закона подобия и решений, приведенных на рис. 1, 2, следует, что на выходной поверхности кристалла формируется распределение полей, которое для представляющей основной практический интерес области значений длины кристалла ($2L_{\text{кв}} \leq d \leq 10L_{\text{кв}}$) слабо зависит от этой длины (квазистационарная мода параметрического волновода)*. Ширина ($2\rho_{\text{ст}}$) стоксовой моды равна $2\rho_{\text{ст}} \approx a$, а ее максимум сдвинут на величину $\delta_{\text{ст}} \approx \approx 0,3a$ от оси пучка накачки (для определенности примем, что $\beta_n > 0$). Максимальное усиление квазистационарной стоксовой моды происходит при ее падении на входную поверхность кристалла со сдвигом $\Delta = \Delta_{\text{опт}} = -\delta_{\text{ст}}$. Коэффициент усиления в этом случае определяется из графика, приведенного на рис. 3, и может быть приближенно аппроксимирован**:

$$G_{\text{ст}} \approx \begin{cases} 0,5 d/L_{\text{кв}} & (2L_{\text{кв}} < d < 10L_{\text{кв}}) \\ 2\sqrt{d/\Delta_{\text{кв}} - 2,5} & (d > 10L_{\text{кв}}) \end{cases} \quad (15)$$

Квазистационарная мода убегающей поляритонной волны в отличие от стоксовой существенно ассиметрична:

$$E_n \sim \begin{cases} 0 & (x < -\delta_{\text{ст}}) \\ \exp [-(x - \delta_{\text{ст}})/\rho_n] & (x > \delta_{\text{ст}}) \end{cases}, \quad (16)$$

и ее ширина $2\rho_n = 4\beta_n L_{\text{кв}}$ много больше ширины пучка накачки. В случае, когда убегающая волна слабо поглощается и по ней осуществляется обратная связь, максимальное усиление ее квазистационарной моды происходит при сдвиге на входной поверхности кристалла относительно оси пучка накачки на величину $\Delta_{\text{опт}} = -\rho_n$. Коэффициент усиления при этом несколько меньше соответствующего коэффициента усиления моды попутной резонансной волны. При антисимметричном возбуждении, реализующемся в генераторах с нерезонансным отражением накачки, коэффициент усиления убегающей волны при оптимальном возбуждении мало отличается от соответствующего коэффициента усиления моды попутной волны (см. рис. 3).

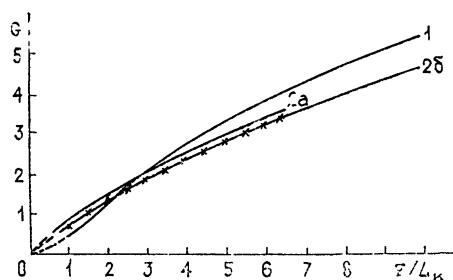


Рис. 3. Зависимость коэффициента усиления при квазистационарном взаимодействии при различных способах возбуждения, построенная по численному решению задачи ($E_n \sim \sim \cos^2 \frac{\pi}{4a} x$):

1—при оптимальном возбуждении квазистационарной моды стоксовой волны ($\Gamma_{\text{стат}}=0,5$);
2—при антисимметричном возбуждении квазистационарной моды уходящей волны $2a$)
 $\Gamma_{\text{стат}}=0,5$, 2b) $\Gamma_{\text{стат}}=1$; крестики соответствуют значениям G при симметричном возбуждении уходящей волны ($\Gamma_{\text{стат}}=0,5$).

* Аналогичные результаты следуют из решений задачи для ВКР, приведенных в работе [13] для случая гауссова импульса накачки с длительностью 2τ , меньшей времени поперечной релаксации T_2 .

** Выражение для коэффициента усиления в области $d \geq 10L_{\text{кв}}$ справедливо также для случая $\Gamma_{\text{стат}} > 1$, если осуществляется нестационарный режим усиления [2, 3].

3. ОСОБЕННОСТИ ВР НА СИЛЬНО ЗАТУХАЮЩИХ ПОЛЯРИТОНАХ ПРИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ УСИЛЕНИЯ

При рассеянии на сильно затухающих поляритонах ($a/L_2 > 1$) процесс усиления стоксова излучения на начальном этапе наиболее существенно отличается от усиления при $a/L_2 \ll 1$. На начальном этапе этот процесс во многом аналогичен процессу усиления слабозатухающих волн с близкими по величине углами убегания [6]. По аналогии назовем его квазистатическим режимом усиления. Наиболее простое и наглядное его описание можно провести с помощью уравнения одноволнового приближения для нарастающей амплитуды E_+ стоксовой волны E_{ct} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} (\beta + \delta\beta) \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma_+ \right) E_+ = 0. \quad (17)$$

Это уравнение, аналогично тому, как это сделано в работе [1], можно получить в случае, когда отношение $\frac{(\beta_{ct} - \beta_n)^2}{4a^2 \left[\frac{(\alpha_{ct} - \alpha_n)^2}{4} + \gamma_0^2 \right]}$ яв-

ляется малым параметром. При этом коэффициенты уравнения (17) существенно зависят от соотношения между параметрами, характеризующими усиление и поглощение. Поскольку при $\gamma_0^2 \gg \alpha_n^2/4$ результаты во многом похожи на результаты, полученные при параметрическом взаимодействии непоглощающих волн [6], мы остановимся на другом предельном случае: $\gamma_0^2 \ll \alpha_n^2/4$. При этом

$$\begin{aligned} \gamma_+ + \alpha_{ct} &\equiv g = \sqrt{\gamma_0^2 E_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{4} - \frac{\alpha_n}{2}}, \\ D &= L_2^2 g \frac{(1 + g/\alpha_n)}{(1 + 2g/\alpha_n)^3}, \\ \beta + \delta\beta &= \beta_{ct} + \frac{L_2 g}{1 + 2g/\alpha_n} \operatorname{sgn}\{\beta_n\}, \\ E_{ct} &= E_+ + 0 \left(\frac{\gamma_0^2}{\alpha_n^2} \right), \quad E_n \approx \frac{g}{\gamma_0 E_n} E_{ct}. \end{aligned} \quad (18)$$

В наиболее интересном с практической точки зрения случае, когда стоксово излучение распространяется вблизи оси пучка накачки, коэффициенты $\beta + \delta\beta$ и D в уравнении (17) можно считать не зависящими от поперечных координат, а коэффициент усиления аппроксимировать квадратичной зависимостью $\gamma_+ \approx g_0(1 - x^2/2a^2)$, где $g_0 = \sqrt{\gamma_0^2 + \alpha_n^2/4} - \alpha_n/2$. Решение уравнения (17) в этом приближении определяется известными выражениями (см., например, [1, 2]). Из его анализа следует, что в квазистатической области взаимодействия без существенного искажения поперечной структуры усиливаются пучки, близкие к гауссовым, с радиусом

$$r_{ct} = a \sqrt{L_2/a \sqrt{2}}. \quad (19)$$

Коэффициент усиления таких квазистатических стоксовых мод максимальен при смещении их максимума на входной поверхности кристалла относительно оси пучка накачки на величину $\Delta_{ct} = \Delta_{opt}$,

$$\Delta_{\text{опт}} = -\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{L_2^2 \Gamma_3^2}\right) \frac{1 - \operatorname{ch}^{-1}(d/L_{\text{cr}})}{\operatorname{th}(d/L_{\text{cr}})}. \quad (20)$$

Здесь

$$L_{\text{cr}} = L_3 \left(\frac{a}{L_2 \Gamma_3}\right)^3 \approx \frac{a}{2 L_2 g} \quad (21)$$

— длина формирования стоксовой квазистатической моды. В этом случае на выходной поверхности кристалла смещение стоксова пучка равно $-\Delta_{\text{опт}}$, а его коэффициент усиления определяется выражением

$$G = \ln \operatorname{ch} G_{\text{cr}}, \quad G_{\text{cr}} = \Gamma_{\text{cr}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2 \Gamma_{\text{cr}}}\right) \frac{d}{L_{\text{cr}}} - \frac{2 L_{\text{cr}}^2}{L_{\beta}^2} \left[\frac{d}{L_{\text{cr}}} - \frac{2 (1 - \sqrt{1 - \operatorname{th}^2(d/L_{\text{cr}})})}{\operatorname{th}(d/L_{\text{cr}})} \right] \right\}, \quad (22)$$

где

$$\Gamma_{\text{cr}} = \frac{a}{2 L_2}, \quad L_{\beta}^2 = 8 L_{\text{cr}}^2 \left(1 - \frac{a^3}{L_2^2 \Gamma_3^2}\right).$$

Поляритонная волна в рассмотренном здесь приближении на выходе кристалла имеет примерно такое же распределение интенсивности в поперечном сечении, как и стоксова. Это вполне естественно, так как вне возбуждающего источника (т. е. вне стоксова пучка) поляритоны затухают на расстоянии $\Delta x \approx L_2 < \rho_{\text{cr}} = a \sqrt{L_2/a} \sqrt{2}$.

Полученные выше соотношения позволяют в широком диапазоне параметров оценить ширину углового и частотного спектров колебаний, возбуждающихся при ВР на поляритонах и в однорезонаторных параметрических генераторах, а также определить зависимость коэффициента усиления мод и, следовательно, условий наблюдения генерации при различных значениях параметров системы. В качестве примера для ВРП в кристаллах LiNbO_3 и LiIO_3 на рис. 4, 5 приведены зависимости

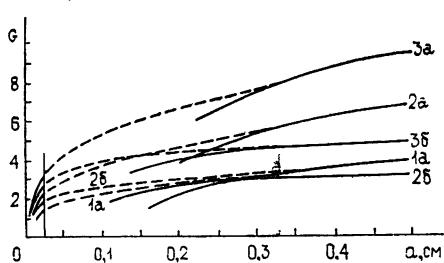


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления стоксовой моды при ее оптимальном возбуждении от радиуса пучка накачки ($\lambda_n = 0,6943 \text{ мкм}$, $\Omega = 10 \text{ см}^{-1}$) в кристалле LiNbO_3 ($d = 1,5 \text{ см}$):
а) $T = 80 \text{ K}$, $L_2 = 0,07 \text{ см}$; б) $T = 300 \text{ K}$, $L_2 = 0,03 \text{ см}$. Сплошными линиями показаны зависимости, построенные по формулам для коэффициентов усиления захватенной и квазистатической моды: 1 — $S_0 = 400 \text{ MBm/cm}^2$; 2 — $S_0 = 700 \text{ MBm/cm}^2$; 3 — $S_0 = 1000 \text{ MBm/cm}^2$.

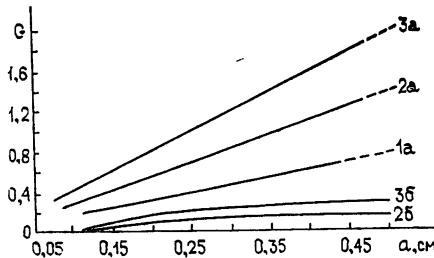


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления стоксовой моды в кристалле LiIO_3 ($d = 3 \text{ см}$) от радиуса пучка накачки ($\lambda_n = 1 \text{ мкм}$, $\Omega = 80 \text{ см}^{-1}$): а) $T = 80 \text{ K}$, $L_2 = 0,5 \text{ см}$ —построены по формуле для коэффициента усиления при квазистационарном взаимодействии без учета затухания; б) $T = 300 \text{ K}$, $L_2 = 0,08 \text{ см}$ —построены по формулам для коэффициента усиления квазистатической моды: 1 — $S_0 = 400 \text{ MBm/cm}^2$; 2 — $S_0 = 700 \text{ MBm/cm}^2$; 3 — $S_0 = 1000 \text{ MBm/cm}^2$.

коэффициента усиления стоксовой моды от радиуса пучка накачки. Из анализа этих зависимостей следует, в частности, что в кристалле LiNbO₃ можно получить достаточно большое значение коэффициента усиления в поле пучков накачки с малым радиусом, когда усиление происходит в режиме пространственного захвата*. В кристалле LiIO₃ большое усиление в рассмотренных случаях может быть получено только в поле сравнительно широких пучков накачки и достаточно малой температуре кристалла. При этом явление пространственного захвата чесущественно и коэффициент усиления в поле пучка накачки уменьшается относительно коэффициента усиления в поле плоской волны в основном за счет излучения поляритонов из области взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О ВЛИЯНИИ ДИФРАКЦИИ НА ПРОЦЕСС ВР НА ПОЛЯРИТОНАХ

Влияние дифракции на процесс усиления стоксовой волны при ВР на поляритонах наиболее просто оценить для двух случаев: 1) при ВР на сильно затухающих поляритонах ($a/L_2 \gg 1$) и достаточно малой длине кристалла ($d \leq 2L_{\text{ст}}$), когда усиление происходит в квазистатическом режиме; 2) при усиении в режиме пространственного захвата ($d > L_s$). В обоих этих случаях для исследования процесса усиления может быть применено уравнение одноволнового приближения (17). Дифракцию усиливаемых волн в рамках применимости этого приближения можно учесть, добавив в левую часть (17) слагаемое:

$$\hat{\Delta}E_+ = - \frac{i \exp(-\psi)}{2(K_+ - K_-)} \left\{ \frac{K_-}{k_{\text{ст}}} \Delta_\perp (e^\psi E_+^*) - \frac{1}{k_n} \Delta_\perp (K_+ e^\psi E_+) \right\}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $k_{\text{ст}}$ и k_n — величины волновых векторов соответственно стоксовой волны и поляритона. Значения величин ψ , K_+ и K_- для усиления в режиме пространственного захвата приведены в работах [1, 2]**; в квазистатическом режиме эти величины определяются выражениями

$$\psi = 0, \quad K_+ = g/\gamma_0 E_n, \quad K_- = -(\alpha_n + g)/\gamma_0 E_n. \quad (\text{П.2})$$

Из анализа уравнения (17) с учетом приведенного выше оператора следует, что параметрическое взаимодействие усиливаемых пучков приводит в основном к тому, что их дифракция определяется некоторым эффективным волновым числом $k_{\text{эфф}}$. При квазистатическом усилении ($k_{\text{эфф}} = k_{\text{стат}}$) и усилении в режиме пространственного захвата ($k_{\text{эфф}} = k_s$) значение $k_{\text{эфф}}$ определяется соответственно выражениями

$$k_{\text{стат}}^{-1} = k_{\text{ст}}^{-1} - k_n^{-1} \frac{g}{\alpha_n + 2g}, \quad k_s^{-1} = k_{\text{ст}}^{-1} - k_n^{-1} \left| \frac{\beta_{\text{ст}}}{\beta_n} \right|. \quad (\text{П.3})$$

Как видно из (П.3), при обычно реализуемых значениях $|\beta_{\text{ст}}/\beta_n| \sim 10^{-3}$ дифракция поляритонов в режиме пространственного захвата практически не влияет на дифракцию пучка стоксовой волны вследствие быстрого излучения поляритонов из области взаимодействия. В квазистатическом режиме усиления влияние дифракции поляритонов на процесс усиления может оказаться более существенным.

* Несколько можно судить по данным работы [8], именно в таком режиме происходит усиление стоксова излучения в описанных в этой работе экспериментах по ВРП в кристалле LiNbO₃.

** Наиболее существенные для дальнейших оценок величины K_+ и K_- в этом случае равны соответственно $\sqrt{1 + \beta_n/\beta_{\text{ст}}}$ и $\sqrt{1 + \beta_{\text{ст}}/\beta_n}$.

Как известно (см., например, [6]), дифракционные эффекты при параметрическом усилении и неколлинеарном взаимодействии существенно влияют только на структуру полей в плоскости широкого угла синхронизма; уменьшение коэффициента усиления пучков, соответствующих низшим модам параметрического волновода, становится существенным только при значениях радиусов пучка накачки, меньших некоторого a_{\min} . Аналогичная ситуация имеет место при ВР на поляритонах. Определение структуры стоксовой волны в плоскости широкого угла синхронизма и оценку значений a_{\min} с учетом (П.1), (П.2) можно провести, воспользовавшись результатами работы [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 58, № 6, 1959 (1970).
2. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970).
3. А. П. Сухоруков, А. К. Шеднова, ЖЭТФ, 60, № 4, 1251 (1971).
4. С. А. Ахманов, К. Н. Драбович, А. П. Сухоруков, А. К. Шеднова, ЖЭТФ, 62, № 2, 525 (1972).
5. В. В. Обуховский, В. Л. Стрижевский, Квантовая электроника, 1, № 6, 1395 (1974).
6. А. А. Бабин, Ю. Н. Беляев, М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Квантовая электроника, 3, № 8, 1573 (1976).
7. А. А. Бабин, Н. Н. Беляева, Ю. Н. Беляев, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 71, № 7 (1976).
8. J. M. Yagborough, S. S. Sussman, H. F. Puthoff, R. H. Pantell and B. P. Johnson, Appl. Phys. Lett., 15, № 3, 102 (1969).
9. C. R. Becker and G. Nath, J. Appl. Phys., 41, № 10, 3928 (1970).
10. D. R. Bosomworth, Appl. Phys. Lett., 9, № 9, 330 (1966).
11. М. М. Сущик, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 9, 1354 (1970).
12. М. М. Сущик, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 2, 251 (1970).
13. R. L. Carman, F. Shimizu, C. S. Wang and N. Bloembergen, Phys. Rev., A2, № 1, 60 (1970).
14. К. П. Бурнейка, В. И. Кабелка, В. К. Маголис, А. С. Пискарская, А. Ю. Стабинис, Т. А. Томкевич, сб. Нелинейные процессы в оптике (материалы III Вавиловской конференции по нелинейной оптике), Новосибирск, ИФП СО АН СССР, № 3, 1973, стр. 339.
15. Г. А. Букаускас, В. И. Кабелка, А. С. Пискарская, А. Ю. Стабинис, Квантовая электроника, 1, 522 (1974).
16. С. Ф. Морозов, Л. В. Пискунова, М. М. Сущик, Г. И. Фрейдман, сб. Нелинейные процессы в оптике (материалы III Вавиловской конференции по нелинейной оптике), Новосибирск, ИФП СО АН СССР, № 3, 1973, стр. 408.
17. С. Ф. Морозов, Л. В. Пискунова, М. М. Сущик, Г. И. Фрейдман, Квантовая электроника, 3, 548 (1976).
18. В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Препринт НИРФИ № 30, Горький, 1972.
19. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 55, 1430 (1968).
20. Ю. Н. Беляев, Г. И. Фрейдман, Письма в ЖЭТФ, 6, 190 (1972).
21. Г. А. Пасманик, Г. И. Фрейдман Квантовая электроника, 1, 547 (1974).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию

12 мая 1977 г.,

после доработки

5 января 1978 г

AMPLIFICATION AND OSCILLATION PROCESSES AT THE INDUCED SCATTERING BY POLARITONES AND PARAMETRIC INTERACTION OF TRAVELING AND PUMP ACCOMPANIED WAVES

*A. A. Babin, Yu. N. Belyaev, M. M. Sushchik, V. M. Fortus,
G. I. Freidman, A. N. Shchelokov*

Processes are considered of amplification, oscillation and formation of the angular and frequency OPO spectra when the traveling wave and the pump accompanied one interact in narrow pump beams. Characteristics of modes and the conditions of their excitation are theoretically investigated. Amplification peculiarities at the induced scattering by strongly damping polaritones are analysed. Results may be used to analyse the processes of the parametric interaction and the IS in short pump pulses.

УДК 621.372 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРА ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИКАХ

Ю. К. Богатырев, Н. П. Ямпурин

Рассматривается преобразование спектра пространственных гармоник встречных волн в активной периодической структуре с квадратичной нелинейностью. Выяснены особенности трехволнового взаимодействия при различных граничных условиях. Показана возможность одновременного усиления всех взаимодействующих волн.

Между волнами, распространяющимися в периодических структурах, могут возникать дополнительные, кроме обусловленных нелинейностью, связи за счет взаимодействия на пространственных гармониках [1, 2, 6–9], существенно влияющие на процессы генерации и преобразования спектра волн. Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий подобного вида проводились ранее в основном применительно к консервативным системам нелинейной оптики, а также параметрическим структурам радиодиапазона [2, 7–9]. Между тем, для преобразования частоты сигналов в СВЧ-диапазоне в ряде случаев целесообразно (например, с целью увеличения мощности преобразованных сигналов) использовать периодические структуры с активными нелинейными элементами.

В данной работе исследуется волновое устройство в виде LC -линий с взаимосвязанными звенями, периодически нагруженной активными элементами с вольт-амперной характеристикой N -типа (рис. 1), характерной для туннельных, ганновских и т. п. диодов. Основная особенность работы такого устройства заключается в использовании нелинейного синхронного взаимодействия на пространственных гармониках встречных волн (обусловленных нежелательными в обычных волновых системах отражениями от неоднородностей) с целью эффективной

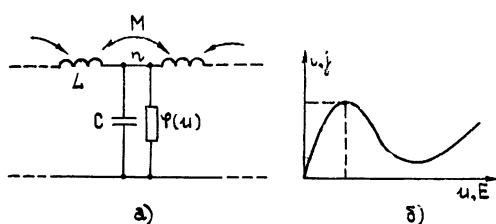


Рис. 1. а) Эквивалентная схема звена структуры, б) характеристика активных нелинейных элементов.

генерации и преобразования спектра сигналов. Выяснены особенности трехволнового взаимодействия при различных граничных условиях.

Дисперсионная характеристика (рис. 2) рассматриваемой (рис. 1a) структуры соответствует уравнению

$$D(\omega, k) = \omega - 2\omega_0 \left(1 + \frac{2M}{L} \cos k\right)^{-1/2} \sin \frac{k}{2} = 0, \quad (1)$$

где $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, M — индуктивность связи между соседними звеньями. Согласно (1) в такой структуре условия пространственного синхронизма для трех волн

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 2\pi \quad (2)$$

могут быть выполнены путем изменения параметра M/L для значений $k_1 < 1,5$ и $|k_2| \geq 2$.

Для реализации возможности получения второй гармоники 2ω (при $\omega_2 = \omega_3$) частоты преобразуемого сигнала и устойчивой работы системы в целом здесь, в отличие от автоколебательного режима, целесообразно выбрать рабочую точку вблизи максимума N -характеристики (рис. 1б), где для слабых сигналов справедлива аппроксимация $\varphi(u) \approx -gu - \beta u^2$ ($g \leq 0$, $\beta > 0$, $|g| \ll \beta u_{\max}$). В этом случае квадратичные эффекты активной проводимости будут доминировать над линейными и кубичными, а уравнения для медленно изменяющихся амплитуд $A_i(n)$ и фаз $\varphi_i(n)$ стационарно взаимодействующих во времени $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ волн напряжения $u_1 \sim A_1 \times$

$\times \exp[j(\omega_1 t - k_1 n + \varphi_1)]$, $u_{2,3} \sim A_{2,3} \exp[j(\omega_{2,3} t + k_{2,3} n + \varphi_{2,3})]$, удовлетворяющих условиям (2), имеют согласно [1] вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dn} &= \beta_1 A_2 A_3 \cos \Phi, \\ \frac{dA_2}{dn} &= -2\beta_2 A_1 A_3 \cos \Phi, \\ \frac{dA_3}{dn} &= -2\beta_3 A_1 A_2 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\left(\beta_1 \frac{A_2 A_3}{A_1} - 2\beta_2 \frac{A_1 A_3}{A_2} - 2\beta_3 \frac{A_1 A_2}{A_3}\right) \sin \Phi - \Delta,$$

где $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \Delta n$, расстройка $\Delta = |k_2| + |k_3| - |k_1|$, $\beta_i = \rho\beta/2N_i$ — коэффициент связи,

$$N_i = \left[1 + \frac{4M}{L} \sin^2 \frac{k_i}{2} \left(1 + \frac{2M}{L} \cos k_i\right)^{-1}\right] \left(1 + \frac{2M}{L} \cos k_i\right)^{-1/2} \cos \frac{k_i}{2}.$$

По внешнему виду система (3) подобна уравнениям, описывающим параметрическую генерацию волн в реактивных средах [8, 10], а также вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна в случае противоположных направлений распространения стоксовой компоненты и волн гиперзвука [9]. Следовательно, формально решение (3) отвечает решениям, впервые полученным в [10]. Однако такое решение в рассматриваемом случае имеет совершенно иной физический смысл по сравнению с [10], как будет показано ниже.

Точное решение системы (3) для квадратов амплитуд волн напряжения имеет вид [10]

$$A_1^2(n) = U_0^2[a + (b - a) \operatorname{sn}^2 X(n)],$$

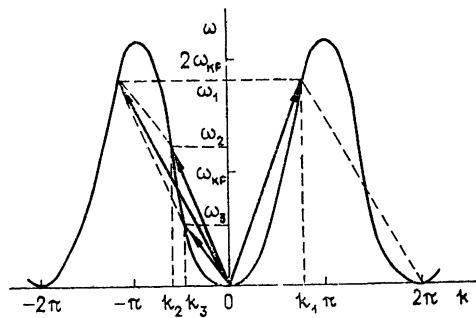


Рис. 2. Дисперсионная характеристика структуры при $M/L = 0,4$ ($\omega_1, 2, 3$, $k_1, 2, 3$ — частоты и волновые числа взаимодействующих волн).

$$A_2^2(n) = 2U_0^2\beta_2[\eta^2 - b + (b-a)\operatorname{sn}^2 X(n)]/\beta_1, \quad (4)$$

$$A_3^2(n) = 2U_0^2\beta_3[1 - b + (b-a)\operatorname{sn}^2 X(n)]/\beta_1,$$

где a, b, c ($a < b < c$) — корни уравнения,

$$Z^3 - \left(\eta^2 + 1 + \frac{\Delta^2}{16\beta_2\beta_3 U_0^2} \right) Z^2 + \left(\eta^2 + \frac{\Delta D_0\beta_1}{4\beta_2\beta_3 U_0^4} \right) Z - \frac{\beta_1^2 D_0^2}{4\beta_2\beta_3 U_0^6} = 0,$$

$$Z = A_1^2(n)/U_0^2, \quad \eta^2 = V_0^2/U_0^2,$$

$$V_0^2 = 2\beta_2 A_1^2(n) + \beta_1 A_2^2(n), \quad U_0^2 = 2\beta_3 A_1^2(n) + \beta_1 A_3^2(n),$$

$$D_0 = A_1(n)A_2(n)A_3(n) \sin \Phi + \Delta A_1(n)/2\beta_1$$

— интегралы уравнения (3). $X(n) = 2U_0[\beta_2\beta_3(c-a)]^{1/2}n + F(\theta, k) \times \operatorname{sgn}[\cos \Phi(0)]$ — аргумент эллиптических функций, $\Phi(0)$ — сдвиг фаз в точке $n = 0$, $F(\theta, k) = \int_0^\theta [1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{-1/2} d\varphi$ — эллиптический интеграл первого рода с модулем $k^2 = (b-a)/(c-a)$ и аргументом $\theta = \arcsin \left[\left(\frac{A_1^2(0)}{U_0^2} - a \right) / (b-a) \right]^{1/2}$.

В простейшем представляющем физический интерес случае отсутствия расстройки $\Delta = 0$ в зависимости от вида граничных условий возможны следующие ситуации.

а) Нулевые граничные условия для высокочастотных волн, $A_1(0) = A_2(n_0) = 0$, и ненулевые — для низкочастотной волны, $A_3(n_0) \neq 0$ (n_0 — длина структуры), согласно (4) стационарные амплитуды взаимодействующих волн

$$\begin{aligned} A_1(n) &= \eta(\beta_1/2\beta_2)^{1/2} A_3(0) \operatorname{sn}[X(n)], \\ A_2(n) &= \eta(\beta_2/\beta_3)^{1/2} A_3(0) \operatorname{cn}[X(n)], \\ A_3(n) &= A_3(0) \operatorname{dn}[X(n)], \end{aligned} \quad (5)$$

где $X(n) = (2\beta_1\beta_2)^{1/2} A_3(0)n$, $\eta = A_1(n_0)/A_3(n_0)(\beta_1/2\beta_2)^{1/2}$. Функции $\operatorname{sn}[X(n)]$, $\operatorname{cn}[X(n)]$ имеют период $4K$, $\operatorname{dn}[X(n)]$ — период $2K$; $K = F(\pi/2, \eta)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Если удовлетворяется соотношение [8]

$$X(n_0) = (2m+1)F(\pi/2, \eta) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

определенное порог амплитуды низкочастотной волны на границе структуры $n = n_0$, то имеет место генерация высокочастотных волн частот ω_1 и ω_2 . При $m = 0$ на длине структуры укладывается четверть периода изменения функций $\operatorname{sn}[X(n)]$ и $\operatorname{cn}[X(n)]$ (рис. 3а). Амплитуды низкочастотной и высокочастотной волн нарастают, достигая максимума на границах структуры, а скорость их роста замедляется, стремясь к нулю. Если $m \geq 1$, имеет место периодическое изменение амплитуд волн. Согласно (6) пороговое значение амплитуды $A_3(n_0)$ возрастает с ростом параметра m :

$$A_{3 \text{ пор}} = (2m+1) \operatorname{dn}[X(n_0)]/2n_0(2\beta_1\beta_2)^{1/2}.$$

б) Нулевые граничные условия для прямой высокочастотной волны, $A_1(0) = 0$, и ненулевые — для обратных волн, $A_{2,3}(0) \neq 0$. Соотношение (6) в этом случае не выполняется. Для значений амплитуды низко-

частотной волны ниже пороговой ($m = 0$) осуществляется преобразование волн с частотами ω_2 и ω_3 в волну суммарной частоты ω_1 с усилением всех волн.

б) Ненулевые граничные условия для всех волн: $A_1(0)$, $A_{2,3}(n_0) \neq 0$.

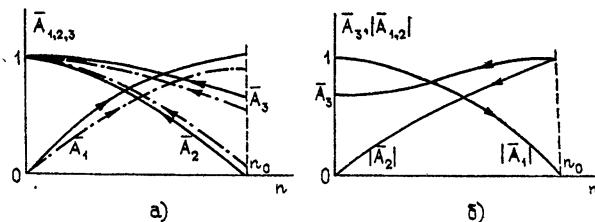


Рис. 3. Пространственные распределения нормированных амплитуд волн

$$\bar{A}_1(n) = A_1(n)/\eta A_3(0)(\beta_1/2\beta_3)^{1/2}, \quad \bar{A}_2(n) = A_2(n)/\eta A_3(0)(\beta_2/\beta_3)^{1/2},$$

$$\bar{A}_3(n) = A_3(n)/A_3(0)$$

для граничных условий:

а) сплошные линии — $\bar{A}_1(0) = \bar{A}_2(n_0) = 0$, $X(n_0) = F\left(\frac{\pi}{2}, \eta\right)$;

штрих-пунктир — $\bar{A}_1(0) = 0$, $\bar{A}_2(n_0) \neq 0$, $X(n_0) < F\left(\frac{\pi}{2}, \eta\right)$;

б) $\bar{A}_1(n_0) = \bar{A}_2(0) = 0$, $X(n_0) = F\left(\frac{\pi}{2}, \eta\right)$.

При условии $A_1(n_0) = A_2(0) = 0$ выполняется соотношение (6). Решение в этом случае имеет вид (5), где

$$\eta = \frac{A_2(n_0)}{A_3(n_0)}, \quad X(n) = 2A_3(0)(\beta_2\beta_3)^{1/2}n + F\left(\frac{\pi}{2}, \eta\right)\operatorname{sgn}[\cos \Phi(0)].$$

В зависимости от знака $\cos[\Phi(0)]$ картина распределения амплитуд волн сдвигается либо влево ($\cos[\Phi(0)] > 0$), либо вправо ($\cos[\Phi(0)] < 0$) на четверть периода функции $F(\pi/2, \eta)$. Распределение амплитуд колебаний для любого из режимов ($m = 0$) имеет вид, представленный на рис. 3б. В отличие от рис. 3а. За амплитуды всех волн убывают вдоль n .

Физически полученные результаты можно объяснить следующим образом. В случаях а) и б) происходит отбор энергии от нелинейных элементов и нарастание амплитуд волн вдоль структуры. В случае в) ситуация обратная: энергия волн поглощается нелинейными элементами и их амплитуды уменьшаются при распространении. Если $m \geq 1$, что соответствует относительно большим амплитудам $A_3(n_0)$, режимы а), в) чередуются.

Вырожденному случаю взаимодействия волн, когда $\omega_2 = \omega_3$, $k_2 = k_3$ и в структуре распространяются встречные волны основной (ω_2) и удвоенной ($\omega_1 = 2\omega_2$) частот, в решении (4) соответствуют значения параметров $\beta_2 = \beta_3$, $\eta = 1$ ($V_0^2 = U_0^2$). Физическая интерпретация поведения зависимостей $A_{1,2}(n)$ в этом случае аналогична описанной выше.

Таким образом, результаты проведенных исследований показывают, что в периодической структуре с активной квадратичной проводимостью возможно эффективное взаимодействие встречных волн на пространственных гармониках, сопровождающееся преобразованием или генерацией частот. Такие структуры позволяют, в отличие от периодических систем с реактивными параметрами [2, 3, 7, 8], осуществлять, наряду с преобразованием и генерацией, также и усиление волн. Однако, в отличие

от случая взрывной неустойчивости [4], эффекты одновременного нарастания или убывания волн определяются здесь, в первую очередь, соотношением не фаз, а амплитуд взаимодействующих волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Д. Д. Розенблум, Межвузовский сб. Динамика систем, вып. 4, Горький, 1974.
2. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 6, 825 (1967).
3. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. Наука, М., 1967.
4. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 5—6, 753 (1976).
5. Ю. К. Богатырев, В. П. Пасхин, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 5, 695 (1975).
6. Ю. К. Богатырев, К. А. Горшков, Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 458 (1976).
7. А. С. Горшков, П. С. Коротков, И. Т. Трофименко, Радиотехника и электроника, 21, № 6, 1344 (1976).
8. К. И. Воляк, А. С. Горшков. Радиотехника и электроника, 18, № 10, 2075 (1973).
9. И. Л. Фабелинский. Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965.
10. J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, Phys. Rev., 127, 1918 (1962).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
4 июля 1977 г.

WAVE SPECTRUM TRANSFORMATION AT SPATIAL HARMONICS

Yu. K. Bogatyrev, N. P. Yampurin

The transformation of the spatial harmonic spectrum of oppositely directed waves in an active periodic structure with the quadratic nonlinearity is considered. The peculiarities of three-wave interaction under different boundary conditions are clarified. The possibility of simultaneous amplification of all interacting waves is shown.

УДК 538.56 : 519.25

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Л. Апресян

Показано, что для линейных стохастических уравнений с марковскими коэффициентами простое и единообразное описание достигается с помощью аппарата условного усреднения, использующего явную форму кинетического оператора для марковских коэффициентов. Подробно рассмотрены случаи марковских процессов с дискретными состояниями и случай условно дельта-коррелированного процесса. Описаны некоторые особенности, возникающие при попытках обобщения полученных результатов на марковские процессы со значениями в пространстве функций.

В качестве полезных статистических моделей, допускающих наиболее простое и вместе с тем наиболее полное описание, в приложениях часто рассматриваются уравнения с марковскими коэффициентами. В данной работе, имеющей в основном методический характер, мы покажем, что при описании таких уравнений в случае задач с начальными условиями целесообразно применять аппарат условного усреднения, использующий явную форму кинетического оператора для марковских коэффициентов. Такой подход позволяет не только легко вывести большинство уже известных для уравнений с марковскими коэффициентами следствий, но и рассмотреть некоторые обобщения.

Напомним сначала основные результаты, полученные для уравнений с марковскими коэффициентами. Если случайный процесс x_t определяется системой

$$\frac{d}{dt} x_t \equiv \dot{x}_t = f(x_t, y_t); \quad (1)$$

$$x_{t_0} = x_0, \quad (2)$$

где $f(x_t, y_t)$ — детерминированная функция, зависящая от x_t и от марковского случайного процесса y_t , то вектор $\gamma_t = (x_t, y_t)$ будет марковским процессом, причем кинетическое уравнение для распределения вероятностей $P(x, y, t) = \langle \delta(x - x_t) \delta(y - y_t) \rangle$ будет вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) = - \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) P(x, y, t) + \overset{\vee}{K}_y P(x, y, t), \quad (3)$$

где $\overset{\vee}{K}_y$ — кинетический оператор марковского процесса y_t , определяющий распределение вероятностей $P(y, t) = \langle \delta(y - y_t) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t) = \overset{\vee}{K}_y P(y, t) \equiv \int K(y, y') P(y', t) dy'. \quad (4)$$

Через $K(y, y')$ обозначено ядро оператора $\overset{\vee}{K}_y$, причем возможная параметрическая зависимость $\overset{\vee}{K}_y$ от t для простоты не выписана явно.

Если интересоваться только средним значением $\langle \varphi(x_t) \rangle$ некоторой детерминированной функции φ , то естественно попытаться обойтись без вычисления плотности распределения $P(x, y, t)$, поскольку эта функция трех переменных содержит значительно больше информации, чем искомая функция t :

$$\langle \varphi(x_t) \rangle = \int P(x', y', t) \varphi(x') dx' dy'. \quad (5)$$

Для условного среднего

$$\langle \varphi(x_t) \rangle_y \equiv \int P(x', y, t) \varphi(x') dx' \quad (6)$$

нетрудно получить из (3) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi(x_t) \rangle_y = \left\langle f(x_t, y) \frac{\partial}{\partial x_t} \varphi(x_t) \right\rangle_y + K_y \langle \varphi(x_t) \rangle_y. \quad (7)$$

Функция $\langle \varphi(x_t) \rangle_y$ зависит уже от двух переменных (y, t) , а искомое среднее выражается через нее как

$$\langle \varphi(x_t) \rangle = \int \langle \varphi(x_t) \rangle_y dy. \quad (8)$$

Однако уравнение (7) является замкнутым относительно $\langle \varphi(x_t) \rangle_y$, лишь в частном случае, когда величина $\left\langle f(x_t, y) \frac{\partial}{\partial x_t} \varphi(x_t) \right\rangle_y$ выражается через $\langle \varphi(x_t) \rangle_y$, для чего достаточно выполнения равенства

$$f(x, y) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = A(y) \varphi(x), \quad (9)$$

где $A(y)$ — некоторая функция y . Согласно (9), функция $f(x, y)$ должна иметь факторизованный вид:

$$f(x, y) = A(y) \varphi(x) \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Вполне аналогичные соотношения справедливы и в более общем случае, когда $x = \mathbf{x} = (x_i)$ и $f = \mathbf{f} = (f_i)$ — многокомпонентные векторы, но при этом от (9) уже нельзя перейти к (10). Например, если $\varphi = \mathbf{x}^2 \equiv \sum_i x_i^2$, то условие (9) примет вид

$$\sum_i f_i(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 2 f_i(x, y) x_i = A(y) x^2, \quad (11)$$

так что функция \mathbf{f} должна быть вида

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}_\perp(x, y) + \frac{1}{2} A(y) \mathbf{x}, \quad (12)$$

где \mathbf{f}_\perp — произвольная вектор-функция, ортогональная \mathbf{x} :

$$(\mathbf{f}_\perp, \mathbf{x}) \equiv \sum_i (\mathbf{f}_\perp)_i x_i = 0.$$

На практике чаще всего интересуются моментами $\langle (x_t)^n \rangle$. В этом случае $\varphi = x^n$ и, в соответствии с (9), исходное стохастическое уравнение (1) должно быть линейным относительно x :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_t = \tilde{A}(y_t) \mathbf{x}_t. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{A} = \frac{1}{n} A$.

Таким образом, для линейного уравнения (13) с начальным условием (2) можно записать замкнутое относительно $\langle x_t \rangle_y$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x_t \rangle_y = \tilde{A}(y) \langle x_t \rangle_y + \overset{\vee}{K}_y \langle x_t \rangle_y, \quad (14)$$

решение которого при начальном условии

$$\langle x_{t_0} \rangle_y = x_0 P(y, t_0) \equiv x_0 \int P(x', y, t_0) dx' \quad (15)$$

позволяет вычислить момент

$$\langle x_t \rangle = \int \langle x_t \rangle_y dy. \quad (16)$$

Все изложенное хорошо известно. Покажем теперь, что уравнение вида (14) справедливо и в случае, когда под x и A понимаются линейные операторы. С этой целью рассмотрим систему

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{\vee}{G}_{tt_0} = \overset{\vee}{\chi}_t \overset{\vee}{G}_{tt_0}; \quad (17)$$

$$\overset{\vee}{G}_{t_0 t_0} = \overset{\vee}{1}, \quad (18)$$

где $\overset{\vee}{1}$ — единичный оператор, а $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ и $\overset{\vee}{\chi}_t$ — случайные линейные операторы, причем статистика $\overset{\vee}{\chi}_t$ предполагается известной. К виду (17), (18) приводятся, например, задачи о диффузии в поле случайных скоростей, о линейном взаимодействии параллельных волн в волноводе, о квантовомеханическом рассеянии на случайном потенциале и многие другие. При этом $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ выступает как оператор Грина, описывающий времененную эволюцию системы, и требуется определить среднее значение этого оператора $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$.

Если $\overset{\vee}{\chi}_t = \overset{\vee}{\chi}_t(y_t)$ — детерминированный оператор, зависящий от марковского случайного процесса y_t , то можно говорить о (17) как об операторном уравнении с марковскими коэффициентами. Рассмотрим подробней этот случай.

По определению условное среднее $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ равно

$$\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y = \langle \delta(y - y_t) \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle, \quad (19)$$

так что

$$\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \int \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y dy. \quad (20)$$

Используя (17), нетрудно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y = \overset{\vee}{\chi}_t(y) \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y - \frac{\partial}{\partial y} \langle \dot{y}_t \delta(y - y_t) \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle. \quad (21)$$

Пусть марковский процесс y_t удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \dot{y}_t = q(y_t, t), \\ y_{t_0} = y_0, \end{cases} \quad (22)$$

где $q(y, t)$ — дельта-коррелированная по t случайная функция. Тогда

$$-\frac{\partial}{\partial y} \langle \dot{y}_t \delta(y - y_t) \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = -\frac{\partial}{\partial y} \langle q(y, t) \delta(y - y_t) \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \overset{\vee}{K}_y \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y. \quad (23)$$

Последнее из этих равенств можно получить, рассматривая ядро оператора $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ как некоторый функционал, зависящий от значений дельта-коррелированной по t' случайной функции $q(y_{t'}, t')$ при $t' \in [t_0, t]$.

Подставляя (23) в (21), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y = \overset{\vee}{\chi}_t(y) \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y + \overset{\vee}{K}_y \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y. \quad (24)$$

Оператор $\overset{\vee}{K}_y$ действует здесь на оператор $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y$, зависящий от y как от параметра. Операторное уравнение (24) дополняется начальным условием

$$\langle \overset{\vee}{G}_{t_0 t_0} \rangle_y = \overset{\vee}{1} P(y, t_0), \quad (25)$$

вытекающим из (18) и (19).

Если $\gamma_t(y) = \chi_t(y)$, т. е. нестационарность уравнения (17) обусловлена только зависимостью от времени случайного процесса y_t , то, в отличие от исходного уравнения с переменными коэффициентами (17), (24) будет уже уравнением с постоянными коэффициентами. Это позволяет свести решение задачи (24), (25) с помощью преобразования Лапласа к изучению стационарной задачи. В специальных случаях отсюда сразу можно сделать некоторые выводы относительно поведения $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$. Например, если под $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ и $\overset{\vee}{\chi}_t$ понимать соответственно обычные (т. е. неоператорные) N -мерный вектор и $N \times N$ эрмитову матрицу и если оператор $\overset{\vee}{K}_y$ — эрмитов, то оператор $\overset{\vee}{\chi}_t(y) + \overset{\vee}{K}_y$ также будет эрмитов. Поскольку собственные значения эрмитова оператора вещественны, при некоторых простых ограничениях отсюда можно вывести, что $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ при больших $t - t_0$ будет изменяться монотонно, т. е. не осциллируя.

Учитывая, что усреднение по реализациям марковского процесса можно трактовать как интегрирование по некоторой мере в функциональном пространстве, нетрудно видеть, что соотношения (19), (20), (24) и (25), фактически, обобщают известный результат Каца о связи функционального интеграла специального вида с решением некоторого диффузионного уравнения. Действительно, если понимать под $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ и $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$ не операторы, а обычные функции, полагая $\overset{\vee}{\chi}_t(y) = -V(y)$ и $\overset{\vee}{G}_{tt_0} = \varphi_{tt_0}$, и считать, что $\overset{\vee}{K}_y = D \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, то y_t будет винеровским процессом, а уравнение (24) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_{tt_0} \rangle_y = -V(y) \langle \varphi_{tt_0} \rangle_y + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \varphi_{tt_0} \rangle_y, \quad (26)$$

причем

$$\int \langle \varphi_{tt_0} \rangle_y dy = \langle \varphi_{tt_0} \rangle = \left\langle \exp \left(- \int_{t_0}^t V(y_\tau) d\tau \right) \right\rangle \equiv \int \exp \left(- \int_{t_0}^t V(y_\tau) d\tau \right) d_w y, \quad (27)$$

где справа стоит интеграл по мере Винера.

Покажем теперь, что из (24) и (25) чрезвычайно просто получаются некоторые рассмотренные в литературе частные случаи. Будем считать, что оператор χ_t^v не зависит явно от t , $\chi_t^v = \chi^v(y_t)$ и что известно квазистатическое решение задачи (17), (18) при фиксированном y , т. е. задан оператор

$$\overset{v}{G}_{tt_0}^s = e^{\chi^v(y_t)(t-t_0)}. \quad (28)$$

Кроме того, будем считать известной «квазистатическую резольвенту» — преобразование Лапласа от $\overset{v}{G}_{tt_0}^s$:

$$\overset{v}{G}_p^s \equiv \int_{t_0}^{\infty} \overset{v}{G}_{tt_0}^s e^{-(t-t_0)p} dt = \frac{1}{p - \chi^v(y)}. \quad (29)$$

1. *Марковский процесс с дискретными состояниями.* Для марковского процесса ξ_t с дискретным состоянием $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и вероятностью перехода за единицу времени $v(i \rightarrow j)$ оператор $\langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle_{\xi_i} \equiv \langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle$ можно рассматривать как n -компонентный вектор. При этом действие кинетического оператора сводится к умножению на матрицу, и (24) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle_t = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} \overset{v}{\chi}_t(y_j) + K_{ij}) \langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle_j, \quad (30)$$

где $K_{ij} = v(j \rightarrow i)$, $i \neq j$; $K_{ii} = - \sum_{l \neq i} v(i \rightarrow l)$.

Если в исходной задаче (17), (18) $\overset{v}{\chi}_t$ и $\overset{v}{G}_{tt_0}$ — матрицы $N \times N$, то решение (30) преобразованием Лапласа сводится к обращению одной $nN \times nN$ матрицы.

Для дихотомического марковского процесса $n = 2$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $v(1 \rightarrow 2) = v(2 \rightarrow 1) = v$ и при $\overset{v}{\chi}_t(y) = yA$, где A — постоянный оператор, из (30) без труда получается уравнение для искомого среднего

$$\langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle = \overset{v}{G}_+ + \overset{v}{G}_-, \quad (31)$$

где $\overset{v}{G}_{\pm} \equiv \langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle_{1, 2}$. Действительно, в этом случае (30) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \overset{v}{G}_+ \\ \overset{v}{G}_- \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & -v \\ -v & v \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \overset{v}{G}_+ \\ \overset{v}{G}_- \end{pmatrix}, \quad (32)$$

откуда после элементарных преобразований находится замкнутое уравнение для $\overset{v}{G}_{tt_0}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{v}{G}_{tt_0} \rangle = \int_{t_0}^t e^{-2v(t-t')} A^2 \langle \overset{v}{G}_{t' t_0} \rangle dt' \equiv \int_{t_0}^t \langle \overset{v}{A} \xi_t \overset{v}{A} \xi_{t'} \rangle \langle \overset{v}{G}_{t' t_0} \rangle dt'. \quad (33)$$

Уравнение (33) совпадает с приближением Бурре, как это было отмечено в работе [1].

2. Процесс Кубо—Андерсона (КАП) и его обобщения. Процесс Кубо—Андерсона m_t определен как кусочно-постоянный стационарный марковский процесс, при котором в случайные моменты t_i , распределенные по пуассоновскому закону, происходят со средней скоростью ν переходы в случайные состояния m_i , имеющие одинаковые функции распределения $P(m_i)$. Нетрудно показать, что для КАП действие кинетического оператора выражается следующим образом:

$$\overset{\vee}{K}_m \varphi(m) = -\nu \varphi(m) + \nu P(m) \int \varphi(m') dm'. \quad (34)$$

При этом для $y_t = m_t$ уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_m = (\chi(m) - \nu 1) \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_m + \nu P(m) \int \langle \overset{\vee}{G}_{t't_0} \rangle_{m'} dm'. \quad (35)$$

Записав (35) в интегральной форме, можно получить замкнутое уравнение для среднего оператора Грина:

$$\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \langle e^{\overset{\vee}{\chi}(m)-\nu(t-t_0)} \rangle + \nu \int_{t_0}^t \langle e^{\overset{\vee}{\chi}(m)-\nu(t-t')} \rangle \langle \overset{\vee}{G}_{t't_0} \rangle dt'. \quad (36)$$

Здесь и ниже для простоты опущен символ единичного оператора 1 . Из (36) следует, что резольвента равна

$$\langle \overset{\vee}{G}_p \rangle \equiv \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(t-t_0)} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle dt = \left(1 - \nu \left\langle \frac{1}{p + \nu - \overset{\vee}{\chi}(m)} \right\rangle \right)^{-1} \left\langle \frac{1}{p + \nu - \overset{\vee}{\chi}(m)} \right\rangle. \quad (37)$$

Этот результат был получен другим методом в [2].

Вместо (36) можно рассматривать эквивалентное интегродифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle G_{tt_0} \rangle &= \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle + \int_{t_0}^t \left(\langle \overset{\vee}{\chi} \overset{\vee}{\chi} e^{\overset{\vee}{\chi}(t-t')} \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \overset{\vee}{\chi} e^{\overset{\vee}{\chi}(t-t')} \rangle \frac{\partial}{\partial t'} \right) \langle \overset{\vee}{G}_{t't_0} \rangle dt', \end{aligned} \quad (38)$$

которое получается, если использовать формальное решение уравнения (35). В отличие от (36) такая форма записи уравнения для $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ удобна для описания предельного перехода к случаю малого времени корреляции: при $\nu \rightarrow \infty$ уравнение (38) переходит в приближение Бурре:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle &= \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle + \int_{t_0}^t \langle \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_t \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_{t'} \rangle \langle \overset{\vee}{G}_{t't_0} \rangle dt' \equiv \\ &\equiv \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle + \int_{t_0}^t (\langle \overset{\vee}{\chi} \overset{\vee}{\chi} \rangle - \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle) e^{-\nu(t-t')} \langle \overset{\vee}{G}_{t't_0} \rangle dt'. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь $\overset{\vee}{\tilde{\chi}} = \overset{\vee}{\chi} - \langle \overset{\vee}{\chi} \rangle$, и учтено, что для КАП $\langle \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_t \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_{t'} \rangle = \langle \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_t \overset{\vee}{\tilde{\chi}}_{t'} \rangle e^{-\nu|t-t'|}$.

Поскольку корреляционная функция КАП имеет очень специальную форму, $\langle m_t m_{t_1} \rangle \sim e^{-\nu|t-t_1|}$, для описания более общих случаев в [2] был рассмотрен «процесс типа кенгуру» («kangaroo process»).

Это марковский процесс, для которого кинетический оператор является обобщением (34):

$$\overset{\vee}{K}_m \varphi(m) = -\nu(m) \varphi(m) + Q(m) \int \nu(m') \varphi(m') dm', \quad (40)$$

где $Q(m)$ — некоторая функция распределения. Смысл этого обобщения КАП состоит в том, что оно допускает зависимость скорости перехода ν от состояния m , из которого осуществляется переход. Для оператора (40) уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_m = (\chi(m) - \nu(m) \overset{\vee}{1}) \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_m + Q(m) \int \nu(m') \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_{m'} dm', \quad (41)$$

откуда легко найти следующее выражение для среднего значения резольвенты:

$$\langle \overset{\vee}{G}_p \rangle = \langle \overset{\vee}{G}_{p+\nu}^s \rangle + \langle \nu \overset{\vee}{G}_{p+\nu}^s \rangle \langle \nu (1 - \nu G_{p+\nu}^s)^{-1} \rangle^{-1} \langle \nu \overset{\vee}{G}_{p+\nu}^s \rangle. \quad (42)$$

Квазистатический резольвентный оператор $\overset{\vee}{G}_p^s$ и ν зависят здесь от случайного параметра m . Этот результат, а также некоторые приложения описанных в данном пункте моделей можно найти в [2, 3].

Выражение (42) нетрудно обобщить с помощью (24) на случай вырожденного кинетического оператора общего вида:

$$\overset{\vee}{K}_m \varphi(m) = -\nu(m) \varphi(m) + \sum_{i=1}^p a^i(m) \int b^i(m') \varphi(m') dm', \quad (43)$$

где

$$\nu(m) = \sum_{i=1}^p \int a^i(m') dm' b^i(m), \quad (44)$$

что соответствует кусочно-непрерывному марковскому процессу со скоростью скачков ν , зависящей от некоторого набора случайных событий. Соответствующее (43) выражение для резольвенты довольно громоздко, и мы не будем его здесь выписывать.

3. Условно дельта-коррелированный процесс. Результаты для уравнений с марковскими коэффициентами можно обобщить, рассмотрев $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$ как случайный оператор, статистически не зависимый от случайного процесса y_t . При этом (24) принимает вид стохастического линейного уравнения со случайным оператором $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$ и детерминированным начальным условием (25), и мы возвращаемся к стохастической задаче вида (17), (18), но уже для условных средних $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y$, при фиксированных реализациях $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$. Для определения $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ нужно усреднить $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y$ по реализациям $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$ и проинтегрировать результат усреднения по y . Так, например, если $\overset{\vee}{\chi}_t(y)$ — дельта-коррелированный по t случайный оператор, то из (24) можно получить следующее уравнение [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y \rangle &= \left\{ \left(\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c dt_1 \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots dt_n \right) + \overset{\vee}{K}_y \right\} \langle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y \rangle, \end{aligned} \quad (45)$$

где кумулянты $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c$ оператора $\overset{\vee}{\chi}_t$ могут быть получены из упорядоченных кумулянтов [4]. Уравнение (45) дополняется начальным условием

$$\langle \langle \overset{\vee}{G}_{t_0 t_0} \rangle_y \rangle = \overset{\vee}{1} P(y, t_0), \quad (46)$$

причем искомое среднее выражается в виде

$$\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \int \langle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y \rangle dy. \quad (47)$$

В частности, если $\overset{\vee}{\chi}_t(y) = \xi_t \overset{\vee}{A}(y)$, где ξ_t — гауссова центральная дельта-коррелированная случайная функция, а $\overset{\vee}{A}(y)$ — детерминированный оператор, (47) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y \rangle = \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \rangle dt_1 dt_2 \right) + \overset{\vee}{K}_y \right\} \langle \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle_y \rangle. \quad (48)$$

При этом, несмотря на то, что $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \rangle \sim \delta(t_1 - t_2)$, оператор $\overset{\vee}{\chi}_t(y_t)$ не будет ни дельта-коррелированным (кумулянты $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1}(y_{t_1}) \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}(y_{t_n}) \rangle_c$ при $n > 2$ не будут пропорциональны $\delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \dots \delta(t_{n-1} - t_n)$), ни гауссовым (моменты $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1}(y_{t_1}) \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}(y_{t_n}) \rangle$ не равны сумме произведений попарных средних).

4. *Марковские процессы со значениями в пространстве функций.* В пп. 1 и 2 мы рассматривали случаи «однопараметрической стохастичности» уравнения (17), когда случайность операторов целиком обусловлена зависимостью от марковского процесса y_t , т. е. случайной функции одной переменной. «Однопараметрическая стохастичность» оказывается слишком грубой моделью, если в задаче фигурирует некоторое случайное поле, т. е. случайная функция нескольких аргументов, как, например, поле диэлектрической проницаемости в задаче о распространении волн в случайно-неоднородной среде. Для моделирования подобных ситуаций рассмотрим без строгих математических определений понятие марковских процессов со значениями в пространстве функций $\{y(x)\}$, т. е. случай $y_t = y_t(x)$. Это понятие естественно обобщает понятие обычного векторного марковского процесса y_t , если формально перейти к пределу $n \rightarrow \infty$, где n — число компонент вектора y_t . Точнее, если точки (x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ в пределе $n \rightarrow \infty$ равномерно и плотно заполняют рассматриваемую область E пространства x , а вектор $y_t = (y_t(x_1), y_t(x_2), \dots, y_t(x_n))$ при любом n есть некоторый марковский процесс, то, переходя формально к пределу $n \rightarrow \infty$, мы получим марковский процесс со значениями в пространстве функций. При таком предельном переходе рассмотренные выше соотношения сохранят свою форму, но под зависимостью от y надо понимать функциональную зависимость от $\{y(x)\}$, а интегрирование по dy заменить функциональ-

ным интегрированием по $Dy = \prod_{x_i \in E} dy(x_i)$. Кинетический оператор K_y будет теперь действовать уже на функционалы от $\{y(x)\}$:

$$K_y P(\{y(x)\}) = \int_{x \in E} K(\{y(x)\}, \{y'(x)\}) P(\{y'(x)\}) Dy', \quad (49)$$

причем ядро $K(\{y\}, \{y'\})$ выразится через условную вероятность перехода $P(\{y\}, t | \{y_0\}, t_0)$ как

$$K(\{y\}, \{y_0\}) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta} (P(\{y\}, t + \Delta | \{y_0\}, t) - P(\{y\}, t | \{y_0\}, t)). \quad (50)$$

Продемонстрируем целесообразность такого предельного перехода на примере процесса Кубо — Андерсона со значениями в пространстве функций. Для такого процесса кинетический оператор, очевидно, будет простым обобщением (34):

$$\overset{\vee}{K}_y \varphi(\{y\}) = -v\varphi(\{y\}) + vP(\{y\}) \int \varphi(\{y\}) Dy. \quad (51)$$

При этом для $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ по-прежнему можно получить замкнутое уравнение вида (36), где вместо усреднения по t нужно производить усреднение по функциональным значениям $\{y(x)\}$ с заданным распределением $P(\{y\})$, однако уже вычисление явного вида квазистатического оператора $\langle \exp \chi(\{y\})t \rangle$, входящего в (36), в этом случае может само по себе представлять достаточно сложную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bourret, U. Frisch and A. Pouguet, Physica, **65**, 303 (1973).
2. A. Brissaud and U. Frisch, JQRST, **11**, 1767 (1971).
3. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., **15**, 524 (1974).
4. Л. А. Апресян, Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 5, 698 (1978).

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию
9 марта 1977 г.

ON EQUATIONS FOR AVERAGE VALUES OF THE LINEAR STOCHASTIC OPERATORS DEPENDING ON MARKOV RANDOM PROCESSES

L. Apresyan

It is shown that for the linear stochastic equations with Markov coefficients a simple and uniform description is achieved by the apparatus of the conventional averaging which uses the distinct form of the kinetic operator for Markov coefficients. Cases of Markov processes with discrete states and a case of the conventional delta-correlated process are considered in details. Some peculiarities are described when one tries to generalize the results obtained on Markov processes with values in the function space.

УДК 621.391 : 519.27

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ВЫБРОСОВ ТРАЕКТОРИИ НЕГАУССОВА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НАД ЗАДАННЫМ УРОВНЕМ

B. I. Хименко

Рассмотрена задача определения среднего числа выбросов траектории стационарного дифференцируемого случайного процесса над заданным уровнем. Приведены конечные результаты для числа выбросов процессов, обладающих статистически независимой производной, и процессов, получающихся в результате функциональных преобразований.

1. Решение самых разнообразных радиофизических задач естественным образом приводит к необходимости исследования статистических свойств пересечений уровней траекториями случайных процессов [1]. При этом хорошо известно, что среднее число положительных выбросов $N_\xi^+(c, 1)$ траектории стационарного дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$ над заданным уровнем c в единицу времени $T = 1$ определяется формулой Райса

$$N_\xi^+(c, 1) = \int_0^\infty \xi W_2(\xi, \dot{\xi})|_{\xi=c} d\xi, \quad (1)$$

в которой $W_2(\xi, \dot{\xi}) \equiv W_2[\xi(t), \dot{\xi}(t)]$ — совместная плотность вероятности для значений $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t) = d\xi(t)/dt$ в совпадающие моменты времени t . Для негауссовых процессов $\xi(t)$ функция $W_2(\xi, \dot{\xi})$ не всегда поддается простому определению, что существенно усложняет вычисление интеграла (1).

Вместе с тем, при определенных предположениях относительно структуры процессов $\xi(t)$, запись конечных выражений для $N_\xi^+(c, 1)$ формально может осуществляться по одномерной плотности вероятности $W(\xi)$ и корреляционной функции $k_\xi(\tau)$ исследуемого процесса. В данной работе определяется значение интеграла (1) для двух классов стационарных случайных процессов и выписываются конечные выражения для числа выбросов $N_\xi^+(c, 1)$ негауссовых процессов с наиболее распространенными видами распределений.

2. Рассмотрим произвольный стационарный дифференцируемый случайный процесс $\xi(t)$. Из свойства стационарности следует, что, независимо от вида его двумерной плотности вероятности $W_2(\xi_1, \xi_2)$, совместная плотность вероятности $W_2(\xi, \dot{\xi})$ будет всегда обладать некоррелированными (т. е. линейно-независимыми) переменными $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$. Это позволяет условно разделить все многообразие стационарных процессов на процессы, обладающие статистически независимой производной (в совпадающие моменты времени), и процессы, у которых значения $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ связаны между собой нелинейной функциональной зависимостью.

Если процесс $\xi(t)$ обладает статистически независимой производной

$$W_2(\xi, \dot{\xi}) = W(\xi) w(\dot{\xi}), \quad (2)$$

то формула (1) сразу же может быть переписана в виде ([2], стр. 362)

$$N_\xi^+(c, 1) = W(\xi)|_{\xi=c} \int_0^\infty \dot{\xi} w(\dot{\xi}) d\dot{\xi} = \alpha(\xi) W(\xi)|_{\xi=c}. \quad (3)$$

Значение интеграла $\alpha(\dot{\xi})$ является здесь числовой характеристикой одномерной плотности вероятности $w(\dot{\xi})$ производной $\dot{\xi}(t)$. Из свойств производной $\dot{\xi}(t)$ стационарного процесса $\xi(t)$ известно [2], что функция $w(\dot{\xi})$ характеризуется нулевым средним $\langle \dot{\xi}(t) \rangle = 0$ и является симметричной $w(\dot{\xi}) = w(-\dot{\xi})$.

Кроме того, для многих процессов $\xi(t)$, обладающих свойством (2), функция $w(\dot{\xi})$ является гауссовой:

$$w(\dot{\xi}) = (2\pi\sigma_\xi^2)^{-1/2} \exp(-\dot{\xi}^2/2\sigma_\xi^2), \quad (4)$$

где $\sigma_\xi^2 = \langle \dot{\xi}^2(t) \rangle = -\left. \frac{d^2 k_\xi(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}$ — дисперсия производной. Это справедливо, в частности, для гауссова процесса, модуля гауссова процесса и их линейных преобразований. В некоторых случаях у негауссовых процессов $\xi(t)$, имеющих даже негауссово многомерное распределение производной $\dot{\xi}(t)$, одномерная плотность вероятности $w(\dot{\xi})$ все же является гауссовой функцией (например, [1], стр. 142).

Подставив (4) в (3) и выполнив простое интегрирование, получим

$$N_\xi^+(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_\xi W(\xi)|_{\xi=c}. \quad (5)$$

Следовательно, если $\xi(t)$ относится к процессам первого класса*, то число выбросов $N_\xi^+(c, 1)$ траектории такого процесса полностью определяется выражением одномерной плотности вероятности $W(\xi)|_{\xi=c}$ и значением $\sigma_\xi = \left(-\left. \frac{d^2 k_\xi(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} \right)^{1/2}$. Выразив σ_ξ через спектральные характеристики, формула (5) примет физически более наглядный вид:

$$N_\xi^+(c, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mu_1^2 \{ G_\xi \} + M_2 \{ G_\xi \})^{1/2} W(\xi)|_{\xi=c}. \quad (6)$$

Спектральные моменты [3] $\mu_1 \{ G_\xi \}$ и $M_2 \{ G_\xi \}$ показывают здесь влияние, соответственно, средней частоты и среднеквадратичной ширины спектра исследуемого процесса $\xi(t)$ на число выбросов, а значение функции $W(\xi)|_{\xi=c}$ в формулах (5) и (6) играет роль весового множителя, характеризующего относительное время пребывания траектории $\xi(t)$ вблизи уровня $\xi(t) = c$. Формула (6) позволяет, кроме того, учитывать свойства широкополосности и узкополосности процессов $\xi(t)$ и в нужных случаях получать соответствующие приближения.

Класс процессов, для которых выполняются условия (2) и (4) и справедливы формулы (5) и (6), достаточно широк. Ниже приведены некоторые из наиболее распространенных процессов этого класса. Выражения для $N_x^+(c, 1)$ записаны непосредственно по формуле (5).

* Для простоты будем так называть стационарные процессы, обладающие свойствами (2) и (4).

Таблица 1

1) Гауссов процесс:

$$W(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$N_x^+(c, 1) = \frac{1}{2\pi} \sigma_x \exp(-c^2/2). \quad (7)$$

2) Процесс с односторонним гауссовым распределением (распределение модуля гауссова процесса):

$$W(x) = 2(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2), \quad x \in (0, \infty),$$

$$N_x^+(c, 1) = \frac{1}{\pi} \sigma_x c \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \quad (8)$$

3) Процесс с распределением Рэлея (распределение модуля двумерного вектора с независимыми гауссовыми составляющими):

$$W(x) = x \exp(-x^2/2), \quad x \in (0, \infty),$$

$$N_x^+(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_x c \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \quad (9)$$

4) Процесс с распределением Максвелла (распределение модуля трехмерного вектора с независимыми гауссовыми составляющими):

$$W(x) = 2(2\pi)^{-1/2} x^2 \exp(-x^2/2), \quad x \in (0, \infty),$$

$$N_x^+(c, 1) = \frac{\sigma_x}{\pi} c^2 \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \quad (10)$$

5) χ -Процесс (распределение модуля n -мерного вектора с независимыми гауссовыми составляющими):

$$W(x) = \frac{2x^{n-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp(-x^2/2), \quad x \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$N_x^+(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_x \frac{2c^{n-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right). \quad (11)$$

6) Процесс с распределением Райса (распределение модуля двумерного вектора при некоторых предположениях относительно его случайных составляющих):

$$W(x) = x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax), \quad x \in (0, \infty),$$

$$N_x^+(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} c \sigma_x \exp\left(-\frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) I_0(ca). \quad (12)$$

Несложно заметить, что данные результаты полностью согласуются с известными результатами [1], полученными по двумерным плотностям вероятности $W_2(x_1, x_2)$ рассматриваемых процессов $x(t)$.

Проведем теперь сравнение полученной формулы (5) с известной формулой для среднего числа выбросов случайного процесса $\xi(t)$, распределение которого представлено рядом Эджвортса ([1], стр. 98):

$$N_\xi^+(c, 1) = \frac{\sigma_\xi}{2\pi} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left[d_{30} c(c^2 - 3) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} d_{21} (c^2 - 1) + 3d_{12} c \right] \right\}, \quad (13)$$

где $d_{ij} = \sigma_{\xi}^{-1} \langle \xi^i(t) \dot{\xi}^j(t) \rangle$ — квазимоменты. Формула (13) справедлива для процессов $\xi(t)$, близких к гауссовым, поэтому можно предположить $d_{ij} = \sigma_{\xi}^{-1} \langle \xi^i(t) \rangle \langle \dot{\xi}^j(t) \rangle$. С учетом нулевого среднего $m_{\xi} = m_{\dot{\xi}} = 0$ и четности функции $w(\xi) = w(-\xi)$ такое условие приводит к значениям $d_{21} = 0$ и $d_{12} = 0$. Формула (13) в этом случае примет вид

$$N_{\xi}^{+}(c, 1) = \frac{\sigma_{\xi}}{2\pi} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \left[1 + \frac{d_{30}}{3!} (c^3 - 3c) \right], \quad (14)$$

откуда следует, что для процессов $\xi(t)$ с одномерной плотностью вероятности ([2], стр. 114)

$$W(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\xi^2/2) \left[1 + \frac{\gamma_1}{3!} (\xi^3 - 3\xi) \right] \quad (15)$$

известный результат (13) согласуется с полученным выводом (5).

Таким образом, выражения (15) и (14) могут быть также внесены в табл. 1. Попутно интересно заметить, что формула (14) объясняет результат рассмотренного в работе [4] практически важного примера.

В заключение данного раздела нужно подчеркнуть, что рассмотренные здесь результаты в некоторых случаях могут значительно упростить исследования статистических свойств выбросов негауссовых процессов на выходе линейных инерционных звеньев. Так, например, если линейному преобразованию $L[\dots]$ подвергается процесс $\xi(t)$, обладающий свойствами (2) и (4), то преобразованный процесс $\eta(t) = L[\xi(t)]$ также будет обладать этими свойствами. Следовательно, если $\xi(t)$ — негауссов процесс первого класса, то задача определения числа выбросов $N_{\eta}^{+}(c, 1)$ траектории $\eta(t) = L[\xi(t)]$ сводится к задаче определения лишь одномерного распределения $W(\eta)$ и корреляционной функции $k_{\eta}(\tau)$ преобразованного процесса $\eta(t)$. Функция $W(\eta)$ не всегда может быть легко найдена, но, тем не менее, решение такой задачи существенно проще решения, основанного на определении $W_2(\eta_1, \eta_2)$.

3. Переидем теперь к рассмотрению процессов $\xi(t)$, для которых значения $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ связаны в совпадающие моменты времени нелинейной функциональной зависимостью.

Формула (1), с учетом свойства

$$W_2(\xi, \dot{\xi}) = W(\xi) w(\dot{\xi} | \xi) \neq W(\xi) w(\dot{\xi}), \quad (16)$$

запишется для таких процессов в виде

$$N_{\dot{\xi}}^{+}(c, 1) = \int_{\xi=c}^{\infty} \dot{\xi} W_2(\xi, \dot{\xi}) \Big|_{\dot{\xi}=c} d\dot{\xi} = \alpha(\dot{\xi} | \xi=c) W(\xi) \Big|_{\xi=c}, \quad (17)$$

где интеграл $\alpha(\dot{\xi} | \xi=c) = \int_0^{\infty} \dot{\xi} w(\dot{\xi} | \xi=c) d\dot{\xi}$ является числовой характеристикой условной плотности вероятности $w(\dot{\xi} | \xi=c)$. Зависимость между $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ появляется, как правило, в результате безынерционных функциональных преобразований, поэтому именно для такого случая рассмотрим особенности функции $w(\dot{\xi} | \xi)$ и значение $\alpha(\dot{\xi} | \xi)$.

Пусть некоторый случайный процесс $x(t)$, имеющий совместную

плотность вероятности $W_2(x, \dot{x}) = W(x)w(\dot{x})$, подвергается функциональному преобразованию $x(t) \rightarrow f[x(t)] = \xi(t)$. Тогда, определив обратную функцию $x(t) = \varphi[\xi(t)] \equiv \varphi[\xi]$ и выполнив в выражении $W_2(x, \dot{x})$ замену переменных $x = \varphi[\xi], \dot{x} = \varphi'[\xi]\dot{\xi}$, для преобразованного процесса $\xi(t)$ можно записать ([1], стр. 138):

$$W_2(\xi, \dot{\xi}) = W_2(\varphi[\xi], \varphi'[\xi]\dot{\xi}) D^2[\xi], \quad (18)$$

где $D[\xi] \equiv \varphi'[\xi]$ — якобиан преобразования.

Так как исходный процесс $x(t)$ обладает свойством (2), функция (18) распадается на два сомножителя:

$$W_2(\xi, \dot{\xi}) = W(\xi) w(\dot{\xi} | \xi),$$

где $D[\xi]W(\varphi[\xi]) \equiv W(\xi)$ и $D[\xi]w(\varphi'[\xi]\dot{\xi}) \equiv w(\dot{\xi} | \xi)$. При этом, если одномерная плотность вероятности $w(\dot{x})$ являлась гауссовой:

$$w(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

то после функционального преобразования условная плотность вероятности $w(\dot{\xi} | \xi)$ производной $\dot{\xi}(t)$ будет также являться гауссовой функцией:

$$w(\dot{\xi} | \xi) = \frac{\varphi'[\xi]}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{\varphi'^2[\xi]\dot{\xi}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right), \quad (19)$$

иметь нулевое среднее $m_{\dot{\xi} | \xi} = m_{\dot{\xi}} = 0$ и изменяющуюся (в зависимости от уровня $\xi(t) = c$) дисперсию $\sigma_{\dot{\xi} | \xi}^2 = \frac{\sigma_{\dot{x}}^2}{\varphi'^2[\xi]}$.

Подставив (19) в (17) и выполнив интегрирование, окончательно получим

$$N_{\xi}^{+}(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{D[\xi]} W(\xi) \Big|_{\xi=c} = (2\pi)^{-1/2} \sigma_{\dot{\xi} | \xi} W(\xi) \Big|_{\xi=c}. \quad (20)$$

Это выражение является общей формулой для числа выбросов функционально преобразованных процессов. Сравнивая (20) с формулой (5), необходимо заметить, что полученный результат согласуется с известными выводами ([1], стр. 138) о возможностях простого пересчета уровней при анализе нелинейно-преобразованных процессов. По своей структуре формула (20) схожа с формулами (5) и (6), однако рассматриваемые процессы $\xi(t)$ в данном случае обладают свойством (16), и поэтому через якобиан $D[\xi] = \varphi'[\xi]$ здесь учитывается влияние статистической связи между значениями $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$.

Формула (20) позволяет достаточно просто подойти к определению $N_{\xi}^{+}(c, 1)$ некоторых распространенных негауссовых процессов $\xi(t)$, получающихся в результате нелинейных преобразований. Пусть, например, $\xi(t) = f[x(t)] = x^v(t), v = 1, 2, 3, \dots, n$. В этом случае функция $D[\xi] = (\sqrt[n]{x^{v-1}})^{-1}$, и для среднего числа выбросов $N_{\xi}^{+}(c, 1)$ траектории $\xi(t)$ будет справедлива общая формула:

$$N_{\xi}^{+}(c, 1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_{\dot{x}}^v c^{1-1/v} W(\xi) \Big|_{\xi=c}. \quad (21)$$

Для получения из (21) конкретных выражений рассмотрим практически важный случай $\nu = 2$ (квадратичное преобразование), а в качестве процессов $x(t)$ воспользуемся процессами, приведенными в табл. 1. Получающиеся при этом результаты сведем в следующую таблицу.

Таблица 2

1) Квадрат гауссова процесса:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= (2\pi\xi)^{-1/2} \exp(-\xi/2), \quad \xi \in (0, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \frac{1}{\pi} \sigma_x \exp\left(-\frac{c}{2}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

2) Процесс с экспоненциальным распределением (квадрат процесса с распределением Рэлея):

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \beta \exp(-\beta\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \beta \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/2} \sigma_x \exp(-\beta c). \end{aligned} \quad (23)$$

3) Процесс с распределением Лапласа (экспоненциальное двухстороннее распределение):

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{\beta}{2} \exp(-\beta|\xi|), \quad \xi \in (-\infty, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \beta \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \sigma_x \exp(-\beta|c|). \end{aligned} \quad (24)$$

4) Квадрат процесса с распределением Максвелла:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \left(\frac{\xi}{2\pi}\right)^{1/2} \exp(-\xi/2), \quad \xi \in (0, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \frac{\sigma_x}{\pi} c \exp\left(-\frac{c}{2}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

5) χ^2 -Процесс:

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{\xi^{n/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \exp(-\xi/2), \quad \xi \in (0, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \frac{\sigma_x}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)} \left(\frac{c}{2}\right)^{(n-1)/2} \exp\left(-\frac{c}{2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

6) Процесс с гамма-распределением (распределение суммы $2n$ слагаемых квадратов гауссовых величин):

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{1}{\beta^{2n} \Gamma(2n)} \xi^{2n-1} \exp(-\xi/\beta), \quad \xi \in (0, \infty), \quad \beta > 0, \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \sigma_x \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\beta^{2n} \Gamma(2n)} c^{2n-1} \exp\left(-\frac{c}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

7) Процесс с показательно-степенным распределением (распределение суммы $2(m+1)$ слагаемых квадратов гауссовых величин)

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \frac{\xi^m}{m!} \exp(-\xi), \quad \xi \in (0, \infty), \\ N_{\xi}^{+}(c, 1) &= \sigma_x \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{1/2} \frac{c^m}{m!} \exp(-c). \end{aligned} \quad (28)$$

По своей структуре все записанные выражения (22) — (28) представляются в виде $N_{\xi}^+(c, 1) = \frac{\sigma_x \sqrt{2c}}{\sqrt{\pi}} W(\xi) \Big|_{\xi=c}$, что следует из (20) и (21). Выражения (22), (23) и (26) согласуются с известными [1], полученными по двумерным плотностям вероятности исследуемых процессов. Входящий в формулы (20) — (28) параметр σ_x относится к процессу $x(t)$, принятому в качестве исходного. При использовании результатов в практических расчетах, если это будет более удобно, значение $\sigma_x = \left(-\frac{d^2 R_x(\tau)}{d \tau^2} \Big|_{\tau=0} \right)^{1/2}$ может быть легко выражено через спектрально-корреляционные характеристики процесса $\xi(t)$ [5]. Повторив выводы для случая $\nu = 3, 4, \dots$, табл. 2 может быть значительно расширена.

4. В данной работе получены общие формулы (5) и (20) для среднего числа выбросов процессов со статистически независимой производной и процессов, получающихся в результате безынерционных нелинейных преобразований. Они позволяют в простом и наглядном виде показать влияние одномерной плотности вероятности $W(\xi)$ негауссова процесса $\xi(t)$ и влияние функциональной связи между значениями $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ на среднее число выбросов. Выписанные в табл. 1, 2 конечные результаты могут быть использованы при решении задач, связанных с исследованиями статистических свойств траекторий случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд. Наука, М., 1970.
2. Б. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. Б. И. Хименко, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 8, 1188 (1976).
4. Б. И. Тихонов, А. А. Толкачев, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1956).
5. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Избранные труды, т. 2, изд. Наука, М., 1973.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступила в редакцию
12 октября 1976 г.,
после переработки
6 августа 1977 г.

ON THE AVERAGE NUMBER OF EJECTIONS OF NONGAUSSIAN RANDOM PROCESS ABOVE THE GIVEN LEVEL

V. I. Khimenko

The definition problem is considered for the average number of ejections of the stationary differentiated random process trajectory above the given level. The finite results are given for the number of ejection processes having the statistically independent derivative and processes obtained as a results of functional transformations.

УДК 538.574.4

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В СРЕДЕ С КВАЗИСТАТИЧЕСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

Ю. Н. Барабаненков

Исследуется характер ослабления интенсивности среднего по ансамблю поля волнового пакета в случайно-переменной рассеивающей среде. За исходное берется уравнение Шредингера с потенциалом, флуктуирующими однородно в пространстве и стационарно во времени по гауссову закону. Среднее поле вычисляется с помощью уравнения Дайсона в приближении Бурре, границы применимости которого оцениваются методом мажорантного процесса. Рассматривается случай квазистатических и слабых флуктуаций потенциала. Показывается, что в этом случае масштаб экспоненциального ослабления интенсивности среднего поля во времени совпадает со временем релаксации линеаризованного кинетического уравнения Больцмана

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основании метода мажорантного процесса [2] показано, что пространственная спектральная плотность поля, удовлетворяющего уравнению Шредингера, подчиняется в пределе гауссовых квазистатических и слабых флуктуаций рассеивающего потенциала линеаризованному кинетическому уравнению Больцмана. Характерным свойством этого кинетического уравнения является то, что оно описывает преобразование спектральной плотности поля без перераспределения по частотам. Формально это свойство обусловлено наличием в интеграле столкновений дельта-функции от изменения частоты волны при элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности.

Согласно уравнению Больцмана, волновой пакет испытывает многократное рассеяние на неоднородностях. При этом свободный пробег пакета между двумя последовательными элементарными актами рассеяния проходит на протяжении времени свободного пробега, названного в [1] больцмановским временем релаксации*. В данной работе показывается, что больцмановское время релаксации совпадает с масштабом экспоненциального ослабления интенсивности среднего по ансамблю поля при его рассеянии на квазистатических и слабых флуктуациях потенциала.

2. ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУРЬЕ

Исходим из уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, t) = [-\Delta + V(\rho, t)] u(\rho, t), \quad u(\rho, 0) = u_0(\rho), \quad (1)$$

* Вопрос о соотношении между временем релаксации нестационарного решения интересующего нас уравнения Больцмана к равновесному решению и временем свободного пробега волнового пакета обсуждается в [3] (см. § 6). Мы не проводим различия между этими величинами.

записывая его в системе единиц, использованной в [1]. Считаем, что потенциал $V(\rho, t)$ флуктуирует однородно в пространстве и стационарно во времени по гауссову закону с нулевым средним значением $\bar{V}(\rho, t) = 0$ и с корреляционной функцией $B(\rho - \rho', t - t') = \bar{V}(\rho, t) \bar{V}(\rho', t')$, где черта сверху означает усреднение по ансамблю.

Согласно [2], ряд теории возмущений для среднего значения $\bar{u}(\rho, t)$ поля $u(\rho, t)$ в координатном представлении сходится в среднеквадратичном по L^2 -норме квадратично интегрируемых функций $u_0(\rho)$. Однако тот же ряд, переписанный в представлении Фурье по координатам p для среднего значения $\bar{u}(p, t)$ пространственного фурье-образа $u(p, t)$ поля, сходится поточечно по C -норме непрерывных и ограниченных функций $u_0(p)$ от волнового вектора p , равной верхней грани модуля⁴

$$\| u_0 \|_C = \sup_p | u_0(p) | . \quad (2)$$

Поточечная сходимость ряда для среднего поля $\bar{u}(p, t)$ по C -норме (2) в представлении Фурье проверяется методом мажорантного процесса** [2] в точности так же, как и сходимость в среднем квадратичном по L^2 -норме ряда для среднего поля $\bar{u}(\rho, t)$ в координатном представлении. Поточечная сходимость ряда для $u(p, t)$ обусловлена тем, что 1) функция Грина $K(p, t) = \exp(-ip^2t)$ уравнения Шредингера в свободном пространстве, взятая в представлении Фурье, непрерывна и ограничена и 2) пространственный фурье-образ $B(p, t)$ корреляционной функции потенциала $B(\rho, t)$ по предположению абсолютно интегрируем.

Обозначим через $u_D(p, t)$ фурье-образ решения $u_D(\rho, t)$ уравнения Дайсона в приближении Бурре для среднего поля. Согласно [2], это уравнение в представлении Фурье может быть записано как

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} u_D(p, t) &= p^2 u_D(p, t) - i \int_0^t dt' \int d^3 p' \exp[-ip'^2 \times \\ &\times (t - t')] B(p - p', t - t') u_D(p, t'), \quad u_D(p, 0) = u_0(p). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) «локально» по волновому вектору p из-за пространственной однородности флуктуаций потенциала и учитывает эффект запаздывания.

Разность между точным значением $\bar{u}(p, t)$ среднего поля в представлении Фурье и решением $u_D(p, t)$ уравнения Дайсона (3) в приближении Бурре оценивается по C -норме неравенством вида

$$\| \bar{u}(t) - u_D(t) \|_C \leq [k(t) - k_D(t)] \| u_0 \|_C . \quad (4)$$

Здесь функции $k(t)$ и $k_D(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} k(t) = \int_0^t m(t - t') dt' k(t), \quad k(0) = 1; \quad (5)$$

* Если L^2 -норме соответствует гильбертово пространство, то C -норме (2) отвечает банахово нормированное пространство (см. [4], стр. 29, пример 12).

** Этим же методом проверяется поточечная сходимость ряда теории возмущений для пространственного фурье-образа $\bar{u}(p_1, p_2, t) = u(p_1, t) u^*(p_2, t)$ функций взаимной когерентности $\bar{\gamma}(p_1, p_2, t) = u(p_1, t) u^*(p_2, t)$ по координатам p_1, p_2 .

$$\frac{d}{dt} k_{\Delta}(t) = \int_0^t m(t-t') dt' k_{\Delta}(t'), \quad k_{\Delta}(0) = 1, \quad (6)$$

где $m(t)$ равно

$$m(t) = \int |B(p, t)| d^3 p. \quad (7)$$

Обратим внимание на то, что уравнение (5) формально получается из уравнения (6) вынесением функции $k_{\Delta}(t')$ из-под знака интеграла в момент $t' = t$.

Оценка (4) по C -норме погрешности применения уравнения Дайсона в приближении Бурре для вычисления среднего поля в представлении Фурье совершенно аналогична оценке (22) из [2] по L^2 -норме погрешности применения этого уравнения для вычисления среднего поля в координатном представлении. Разность между решениями $k(t)$ и $k_{\Delta}(t)$ «локального» уравнения (5) и нелокального уравнения (6) оценивается методом интегральных неравенств и сравнения эволюционных операторов [5] (см. стр. 153). В результате неравенство (4) сводится к виду

$$\|\bar{u}(t) - u_{\Delta}(t)\|_C \leq \frac{t_0 t}{4t_M^2} \exp\left(\frac{t}{2t_M}\right) \|u_0\|_C, \quad (4a)$$

где величины t_M и t_0 определяются соотношениями

$$1/t_M = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) dt, \quad t_0 = \int_0^{\infty} tm(t) dt / \int_0^{\infty} m(t) dt. \quad (8)$$

Из них величина t_M названа в [1] марковским временем релаксации и t_0 представляет собой временной масштаб флюктуаций потенциала.

Уравнение Дайсона (3) допускает решение преобразованием Лапласа по времени. Однако исследование обратного преобразования Лапласа связано с определенными трудностями. Для их обхода мы предварительно произведем упрощение этого уравнения, после чего его решение записывается уже без затруднений.

Перейдем от $u_{\Delta}(p, t)$ к медленно меняющейся амплитуде, полагая

$$u_{\Delta}(p, t) = \varphi_{\Delta}(p, t) \exp(-ip^2 t). \quad (9)$$

Тогда уравнение Дайсона (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\Delta}(p, t) &= - \int_0^t dt' \int d^3 p' \exp[i(p^2 - p'^2)(t - t')] \times \\ &\times B(p - p', t - t') \varphi_{\Delta}(p, t'), \quad \varphi_{\Delta}(p, 0) = u_0(p). \end{aligned} \quad (10)$$

В правой части уравнения (10) область интегрирования по t' порядка временного масштаба t_0 флюктуаций потенциала. В то же время амплитуда $\varphi_{\Delta}(p, t)$ при достаточно малом значении среднего квадрата $\langle V^2 \rangle$ флюктуаций потенциала изменяется в зависимости от t сколь угодно медленно. Это позволяет пренебречь в уравнении (10) эффектом запаздывания, вынося в его правой части $\varphi_{\Delta}(p, t')$ из-под знака интеграла в точке $t' = t$ и устремляя после вынесения верхний предел интегрирования по t' к бесконечности, $t \rightarrow \infty$. В результате приходим к «локальному» по волновому вектору p и времени t уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_n(p, t) = - \int_0^\infty dt' \int d^3 p' \exp [-i(p^2 - p'^2)t'] \times \\ \times B(p - p', t') \varphi_n(p, t), \quad \varphi_n(p, 0) = u_0(p). \quad (11)$$

Погрешность описанного упрощения уравнения (10) может быть оценена упомянутым методом [5] и дается неравенством

$$\|u_D(t) - u_n(t)\|_C \leq \frac{t_0}{2t_M} \left(\frac{t}{2t_M} + 1 \right) \exp \left(\frac{t}{2t_M} \right) \|u_0\|_C, \quad (12)$$

где обозначено

$$u_n(p, t) = \varphi_n(p, t) \exp (-ip^2 t). \quad (13)$$

Сравнение правых частей оценок (4а) и (12) показывает, что при ограниченном сверху отношении t/t_M они имеют одинаковый порядок малости величины t_0/t_M .

3. ПРЕДЕЛ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛА

Обратимся к локальному уравнению Дайсона (11) для медленно меняющейся амплитуды $\varphi_n(p, t)$. Решая это уравнение и подставляя результат в (13), получаем

$$|u_n(p, t)|^2 = \exp \left[-\frac{t}{t_r(p)} \right] |u_0(p)|^2. \quad (14)$$

Через $t_r(p)$ здесь обозначен масштаб времени, определяемый соотношением

$$\frac{1}{t_r(p)} = 2 \int_0^\infty dt \int d^3 p' B(p - p', t) \cos [(p^2 - p'^2)t] \quad (15)$$

при условии вещественности фурье-образа $B(p, t)$ корреляционной функции потенциала, $B(p, t) = B(-p, t)$. Этот масштаб совпадает со временем релаксации кинетического уравнения, учитывающего перераспределение спектральной плотности поля по частотам и получающегося из уравнения (10) работы [1] в пренебрежении временным запаздыванием и пространственной дисперсией. Принимая во внимание то, что уравнению Шредингера в свободном пространстве отвечает квадратичный закон $\omega(p) = p^2$ дисперсии плоских волн, из соотношения (15) можно непосредственно видеть, что эффект перераспределения по частотам действительно оказывается на значении времени релаксации $t_r(p)$.

Больцмановское время релаксации $t_B(p)$ не учитывает перераспределения по частотам и вводится согласно

$$\frac{1}{t_B(p)} = 2\pi \int d^3 p' B(p - p', t) \Big|_{t=0} \delta(p^2 - p'^2). \quad (16)$$

Это равенство получается из соотношения (15) в пределе, когда временной масштаб t_0 флуктуаций потенциала достаточно велик и в правой части (15) можно вынести $B(p - p', t)$ из-под знака интеграла по t в точке $t = 0$.

Чтобы выяснить подробнее условия, при которых обратные значения $1/t_r(p)$ и $1/t_B(p)$ времен релаксации (коэффициенты релаксации) с перераспределением и без перераспределения по частотам близки

между собой, зададимся гауссовой корреляционной функцией флуктуаций потенциала с фурье-образом $B(p, t)$, равным

$$B(p, t) = \langle V^2 \rangle \left(\frac{l}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \left(-\frac{1}{4} p^2 l^2 - \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{t_0^2} \right), \quad (17)$$

где l — пространственный масштаб флуктуаций. В этом случае, как поясняется в Приложении, можно получить оценку вида:

$$\left| \frac{1}{t_B(p)} - \frac{1}{t_B(p)} \right| / \frac{1}{t_B(p)} = O\left(\frac{l^2}{t_0}\right) + O\left(\frac{1}{p^2 t_0}\right) \equiv \epsilon_B; \\ l^2/t_0 < O(1), \quad p^2 t_0 > O(1). \quad (18)$$

Из нее следует, что условия допустимости пренебрежения перераспределением по частотам при вычислении коэффициента релаксации (15) сводятся к двум неравенствам:

$$l^2/t_0 \ll 1, \quad p^2 t_0 \gg 1. \quad (19)$$

Первое из них есть условие квазистатичности [1] флуктуаций потенциала. Второе условие, переписанное в виде $\omega(p)t_0 \gg 1$, означает, что флуктуации потенциала являются медленными в масштабах периодов всех волн из волнового пакета, сформированного начальным условием $u_0(p)$ для поля.

Обратимся к главному вопросу работы — об условиях, позволяющих пренебречь перераспределением по частотам при вычислении интенсивности среднего поля. Для ответа на этот вопрос необходимо оценить разность между точным значением $|\bar{u}(p, t)|^2$ интенсивности среднего поля и ее приближенным значением $|u_B(p, t)|^2$, равным

$$|u_B(p, t)|^2 = \exp \left[-\frac{t}{t_B(p)} \right] |u_0(p)|^2, \quad (20)$$

где справа выступает больцмановское время релаксации. Такая оценка получается на основании (4а), (12), (18) и имеет вид

$$||\bar{u}(p, t)|^2 - |u_B(p, t)|^2| / |u_B(p, t)|^2 < \frac{t_0}{t_M} \left(1 + \right. \\ \left. + \frac{t_B}{t_M} \frac{t}{t_B} \right) \exp \left[\left(1 + \frac{t_B}{t_M} \right) \frac{t}{t_B} \right] \frac{\|u_0\|_C^2}{|u_0(p)|^2} + \\ + \epsilon_B \frac{t}{t_B} \exp \left(\epsilon_B \frac{t}{t_B} \right); \quad \frac{l^2}{t_0} < O(1), \quad p^2 t_0 > O(1), \quad (21)$$

где $t_B = t_B(p)$ и через ϵ_B обозначена правая часть оценки (18). Отношения t_0/t_M и t_M/t_B , входящие в неравенство (21), равны [1]

$$\frac{t_0}{t_M} = \pi \langle V^2 \rangle t_0^2, \\ \frac{t_M}{t_B(p)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{l^2}{t_0} \frac{1 - \exp(-p^2 l^2)}{pl}. \quad (22)$$

Существенно то, что второе из них не зависит от среднего квадрата флуктуаций $\langle V^2 \rangle$ потенциала.

Рассмотрим оценку (21). Главным в ней является первый член, растущий вместе с величиной t_B/t_M . Пусть, например, начальное значение $u_0(p)$ поля задает волновой пакет в виде суперпозиции плоских волн с волновыми векторами p , сосредоточенными вблизи обратного значения масштаба l неоднородности, $pl \sim 1$. При этом, согласно (22), отношение $t_B/t_M \sim t_0/l^2$. Считаем, что время наблюдения t порядка нескольких значений больцмановского времени t_B релаксации, $t/t_B \sim 1$. Тогда, обозначая левую часть оценки (21) через Δ , получаем

$$\Delta \sim (\langle V^2 \rangle^{1/2} t_0)^2 \frac{t_0}{l^2} \exp\left(\alpha \frac{t_0}{l^2}\right); \quad \frac{l^2}{t_0} \ll 1, \\ pl \sim 1, \quad t/t_B \sim 1, \quad 0 < \alpha \sim 1. \quad (23)$$

Отсюда требование $\Delta \rightarrow 0$ дает

$$\langle V^2 \rangle^{1/2} t_0 \rightarrow 0, \quad \frac{l^2}{t_0} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Оценка (23) и условия (24) говорят о том, что в квазистатическом пределе (19) среднеквадратичная флуктуация $\langle V^2 \rangle^{1/2}$ потенциала должна стремиться к нулю, становясь экспоненциально малой величиной:

$$\langle V^2 \rangle^{1/2} l^2 \sim \exp\left(-\beta \frac{t_0}{l^2}\right), \quad \frac{l^2}{t_0} \rightarrow 0, \quad 0 < \beta \sim 1.$$

С физической точки зрения первое условие (24) означает, что рассеяние волнового пакета на изолированном рассеивателе с потенциалом величины $\langle V^2 \rangle^{1/2}$ и временем действия t_0 можно рассматривать в борновском приближении.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Совпадение масштаба времени $t_r(p)$ экспоненциального ослабления интенсивности среднего поля, определенного равенством (15), с аналогичной величиной времени релаксации кинетического уравнения^[1] не случайно и обусловлено законом сохранения числа рассеиваемых частиц^[6] для уравнения (1).

Основным малым параметром рассмотренного подхода к вычислению среднего поля является отношение t_0/t_M временного масштаба t_0 флуктуаций потенциала к марковскому времени t_M релаксации. Этот малый параметр позволяет пренебречь повторным рассеянием среднего поля на одной и той же флуктуации потенциала, обращаясь к уравнению Дайсона (3). То, что в условия применимости (4а) этого уравнения входит именно марковское время t_M релаксации, представляющее собой наименьшее значение масштаба времени $t_r(p)$ в соотношении (15) при гауссовой корреляционной функции (17) флуктуаций потенциала, привело к экспоненциальному малости среднеквадратичной флуктуации потенциала в квазистатическом пределе.

Использованная *C-норма* (2) дала возможность судить о величине локальной интенсивности $|u(p, t)|^2$ среднего поля волнового пакета при каждом значении волнового вектора p . Однако при этом остается невыясненным вопрос об интегральных характеристиках среднего поля волнового пакета, которые получаются интегрированием произведения вида $f(p) |u(p, t)|^2$ по волновому вектору, где $f(p)$ — некоторая заданная функция.

В заключение автор благодарит В. Д. Озрина и М. И. Калинина за обсуждение результатов работы и сделанные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним, как получается оценка (18). Представим разность между коэффициентами релаксации (15) и (16) в виде

$$\frac{1}{t_r(p)} - \frac{1}{t_B(p)} = \left[\frac{2}{p} \int_0^\infty D(p^2 - p'^2) p'^2 dp' - 1 \right] \times \\ \times \frac{1}{t_B(p)} + 2\pi \int d^3 p' [B_0(p - p') - B_0(p - ps')] D(p^2 - p'^2). \quad (\text{П.1})$$

Здесь функция $D(\omega)$ равна

$$D(\omega) = \frac{1}{2} t_0 \exp\left(-\frac{\pi}{4} \omega^2 t_0^2\right), \quad (\text{П.2})$$

через $B_0(p)$ обозначено $B_0(p) = B(p, t)|_{t=0}$, s' — единичный вектор.

Выражение в первой квадратной скобке правой части (П.1) оценивается без особого труда путем перехода к безразмерной переменной интегрирования p'/p и имеет порядок величины

$$\frac{2}{p} \int_0^\infty D(p^2 - p'^2) p'^2 dp' - 1 = O\left(\frac{1}{p^2 t_0}\right), \\ p^2 t_0 > O(1). \quad (\text{П.3})$$

Труднее получить оценку для второго слагаемого правой части (П.1), которое обозначим через $F(p)$. Эта оценка выводится путем довольно длинной цепочки неравенств, хотя и записывается в конечном итоге с помощью простой формулы

$$F(p) = \frac{1}{t_B(p)} O\left(\frac{l^2}{t_0}\right), \quad \frac{l^2}{t_0} < O(1), \\ p^2 t_0 > O(1). \quad (\text{П.4})$$

Укажем качественный способ получения (П.4).

Полагаем

$$B_0(p - p') - B_0(p - ps') \approx (p' - p) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p'} B_0(p - p')|_{p'=p} \sim l^2 p |p - p'| B_0(p - p'). \quad (\text{П.5})$$

В функции $D(p^2 - p'^2)$ разность $|p^2 - p'^2| \sim 1/t_0$, отсюда

$$p |p - p'| \sim 1/t_0. \quad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.6) в (П.5) и после этого (П.5) в $F(p)$, находим

$$F(p) \sim \frac{l^2}{t_0} \frac{1}{t_r(p)}, \quad (\text{П.7})$$

где использовано соотношение (15) с учетом (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 2, 253 (1975).
2. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 7, 1071 (1973).
3. К. П. Гуров, Основания кинетической теории, изд. Наука, М., 1966.
4. Функциональный анализ, изд. 2 (серия «Справочная математическая библиотека»), изд. Наука, М., 1972.
5. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, изд. Наука, М., 1970.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, изд. 2, Физматгиз, М., 1963.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
2 мая 1977 г.

RELAXATION OF THE AVERAGE FIELD IN MEDIUM
WITH QUASI-STATIC FLUCTUATIONS

Yu. N. Barabanenkov

The intensity relaxation character of the ensemble average field in a randomly variable scattering medium is investigated. For the initial the Schredinger equation is taken with the potential fluctuating homogeneously in the space and stationary in time according to Gaussian law. The average field is calculated by Dayson equation in the Burre approximation the application boundaries of which are estimated by the method of majorant process. A case of quasi-static and weak fluctuations of the potential is considered. It is shown that in this case the scale of the exponential weakening of the average field intensity with time coincides with the relaxation time of the linearized kinetic Boltzmann equation.

УДК 538.576.23

ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

O. B. Музычук, A. I. Саичев

На основании уравнения диффузионного приближения рассмотрена эволюция статистических характеристик волны, распространяющейся в одномерной среде с пространственно-временными флуктуациями показателя преломления. Получены и проанализированы выражения для средней интенсивности поля, моментов его энергетического спектра, а также асимптотические формулы для корреляционной функции и спектра волны; рассмотрено влияние высокочастотной диссипации на спектрально-корреляционные характеристики.

В отсутствие диссипации и дисперсии в среде, исследовано влияние параметрических эффектов на вероятностное распределение и высшие моменты поля. Показано в частности, что моменты, начиная со второго, нарастают, а начальное гауссово вероятностное распределение денормализуется по мере распространения волны.

Исследование статистических характеристик волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах, посвящено значительное число публикаций (см., например, [1, 2] и библиографии в них). Однако в большинстве этих работ неоднородности среды обычно считаются чисто пространственными — не изменяющимися во времени. В то же время пространственно-временной характер флуктуаций параметров среды приводит, как известно, к параметрическому взаимодействию волны со средой, в результате изменяется энергия поля, искажается его временной спектр. Ясно, что на достаточно больших трассах эффекты параметрического взаимодействия, накапливаясь, приводят к значительным искажениям статистических характеристик волны, которые необходимо учитывать.

Влияние параметрических эффектов рассматривалось в работах [3, 4], однако использованный в них метод возмущений существенно ограничивал область применимости полученных результатов. В работе [5] найдено среднее поле в приближении Бурре в одномерной среде с пространственно-временными неоднородностями. Настоящая статья посвящена исследованию эволюции спектрально-корреляционных характеристик поля в такой среде без учета обратного рассеяния на неоднородностях. Уравнения для искомых характеристик записываются в диффузионном (марковском) приближении, которое справедливо и в области больших флуктуаций поля. Подобное рассмотрение для уравнений нестационарной геометрической оптики проделано в [6]. Находятся, в частности, выражения для энергии волны и моментов ее энергетического спектра, получены асимптотические формулы для эволюции ее спектрально-корреляционных характеристик, исследовано влияние параметрических эффектов на вероятностное распределение волны.

1. Рассмотрим случайную волну $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} [a(x, t) u] = \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \quad (1)$$

с граничным условием $u(0, t) = u_0(t)$. Здесь $a(x, t) = c^{-1}[1 + n(x, t)]$, c — средняя скорость распространения волны, $n(x, t)$ — флюктуации показателя преломления среды. Ниже будем считать $a(x, t)$ стационарным и статистически однородным гауссовым полем с заданной корреляционной функцией

$$B(\xi; \tau) = \langle a(x, t) a(x - \xi, t - \tau) \rangle - \langle a \rangle^2.$$

Уравнение типа (1) описывает, например, акустические волны малой амплитуды, электромагнитные волны в длинной линии или диспергирующей среде с высокочастотным затуханием в тех случаях, когда обратным рассеянием можно пренебречь.

Будем интересоваться прежде всего временной корреляционной функцией поля

$$\Gamma(x; \tau) = \langle u(x, t) u^*(x, t - \tau) \rangle,$$

зависящей от расстояния x , как от параметра, и трансформацией его энергетического спектра

$$S(x; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x; \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Здесь и в дальнейшем полагаем начальное поле $u_0(t)$ стационарным случайнym процессом с заданными статистическими характеристиками.

При получении замкнутого уравнения относительно $\Gamma(x; \tau)$ будем использовать известную процедуру [2], основанную на применении для размыкания смешанных моментов формулы Фуруцу—Новикова [7, 8]. При этом вариационную производную поля удобно представить в виде

$$\frac{\delta u(x, t)}{\delta a(\xi, \tau)} = g'_\tau(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) \quad (\xi < x), \quad (2)$$

где g — стохастическая функция Грина уравнения (1). Полагая, что на характерных масштабах пространственно-временных неоднородностей изменение поля, обусловленное «рассеянием» на неоднородностях, дисперсией и диссипацией достаточно мало, можно с большой степенью точности заменить в (2) функцию Грина g на «невозмущенную» $g_0 = \delta[t - \tau - \langle a \rangle(x - \xi)]$, соответствующую однородной среде без дисперсии. Это приведет в конечном итоге к следующему замкнутому уравнению диффузационного приближения для корреляционной функции поля:

$$\frac{\partial \Gamma(x; \tau)}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [(D(\tau) + \mu) \Gamma(x; \tau)], \quad \Gamma(0; \tau) = \Gamma_0(\tau), \quad (3)$$

где

$$D(\tau) = A - A(\tau), \quad A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi; \tau - \langle a \rangle \xi) d\xi, \quad A = A(0), \quad (4)$$

— соответственно структурная и корреляционная функции пространственно-временных неоднородностей среды, проинтегрированные вдоль характеристики $t = \langle a \rangle x$ (ниже будем употреблять термин — эффективная

структурная функция, а соответствующую ей спектральную плотность назовем эффективным спектром неоднородностей)*.

Из уравнения (3) видно, что в рассматриваемом приближении на эволюцию корреляционой функции и энергетического спектра поля не влияют дисперсионные эффекты, пропорциональные γ . Это обусловлено тем, что небольшая дисперсия (а при получении (3) предполагалось, что дисперсия не оказывается на масштабах неоднородностей среды), искажая фазовые соотношения, не изменяет энергетических характеристик стационарного случайного поля. Подчеркнем также, что, как следует из (4), в среде как с чисто пространственными, так и с чисто временными неоднородностями $D(\tau) = 0$ и параметрические эффекты отсутствуют. Из дивергентной формы уравнения (3) следует также сохранение спектральной плотности энергии на нулевой частоте

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x; \tau) d\tau = S(x; 0) = S(0; 0). \quad (5)$$

2. Остановимся еще на некоторых точных следствиях уравнения (3). В отсутствие высокочастотного затухания в среде ($\mu = 0$) от него можно перейти к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов спектра поля

$$s_{2n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} S(x; \omega) d\omega.$$

В самом деле, разлагая структурную функцию $D(\tau)$ в ряд Тейлора и выполнив в уравнении (3) преобразование Фурье, получим

$$\frac{\partial S(x; \omega)}{\partial x} = \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} S(x; \omega)}{\partial \omega^{2n}}, \quad (6)$$

где $D_{2n} = |D^{(2n)}(0)|$. Домножая (6) на ω^{2n} и интегрируя в бесконечных пределах, придем к системе

$$\frac{ds_{2n}(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{2n+2}^{2k} D_{2k} s_{2n+2-2k}(x), \quad C_m^e = \frac{m!}{l!(m-l)!}. \quad (7)$$

Таким образом, $(2n)$ -й момент спектра удовлетворяет системе n дифференциальных уравнений. В частности, моменты s_0 и s_2 определяются уравнениями

$$\frac{ds_0}{dx} = D_2 s_0(x), \quad \frac{ds_2}{dx} = 6 D_2 s_2(x) + D_4 s_0(x),$$

где первое описывает рост средней интенсивности волны за счет параметрического взаимодействия со средой

$$\frac{s_0(x)}{2\pi} = \langle u^2(x, t) \rangle = \langle u_0^2 \rangle \exp(D_2 x), \quad (8)$$

а второе — увеличение ширины спектра поля. Его решение имеет вид

$$\frac{s_2(x)}{s_0(x)} = \Delta^2(x) = \Delta_0^2 e^{5D_2 x} + \frac{D_4}{5D_2} (e^{5D_2 x} - 1), \quad (9)$$

* Заметим, что к подобным (3) уравнениям диффузии с переменным коэффициентом приходят и в ряде других задач; например, аналогичному уравнению удовлетворяет распределение вероятностей расстояний между двумя частицами, движущимися в поле случайных скоростей [2].

где Δ_0 — ширина спектра входного сигнала $u_0(t)$. Заметим, что, оценивая ширину спектра поля по формуле $\Delta(x) = s_0(x)/S(0; 0)$, мы получили бы несколько иной результат, а именно, $\Delta(x) \sim \exp(D_2x)$. Такое различие обусловлено, по-видимому, присутствием медленно спадающих крыльев в спектре волны наряду с особенностями его поведения на малых частотах (крыльями корреляционной функции, см. (16) и (17)).

Зная моменты спектра, можно записать разложение корреляционной функции поля в ряд Тейлора:

$$\Gamma(x; \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s_{2n}(x)}{(2n)!} \tau^{2n}. \quad (10)$$

В некоторых случаях удается найти все $s_{2n}(x)$ и свернуть этот ряд в аналитическое выражение. Поясним это сначала на примере гауссовой корреляционной функции пространственно-временных неоднородностей:

$$B(\xi; \tau) = \sigma^2 \exp \left[-\frac{1}{2} (\kappa^2 \xi^2 + \Pi^2 \tau^2) \right].$$

Ей соответствует такая эффективная структурная функция:

$$D(\tau) = A \left[1 - \exp \left(-\frac{\bar{\Pi}^2 \tau^2}{2} \right) \right],$$

$$A = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\kappa^2 + \langle a \rangle^2 \Pi^2}}, \quad \bar{\Pi}^2 = \frac{\kappa^2 \Pi^2}{\kappa^2 + \langle a \rangle^2 \Pi^2},$$

где параметр $\bar{\Pi}$ имеет смысл ширины эффективного спектра неоднородностей; отметим, что при $\kappa \gg \langle a \rangle \Pi$ она определяется шириной спектра временных флуктуаций Π , а при $\langle a \rangle \Pi \gg \kappa$ — полосой пространственных неоднородностей среды κ . Коэффициенты D_{2n} связаны с величиной $\bar{\Pi}$ соотношением $D_{2n} = A \bar{\Pi}^{2n} (2n - 1)!!$.

Для гауссовой корреляционной функции неоднородностей выражение (9) для эволюции 2-го момента спектра примет вид

$$\frac{s_2(x)}{s_0(x)} = \Delta_0^2 e^{5D_2 x} + \frac{3}{5} \bar{\Pi}^2 (e^{5D_2 x} - 1). \quad (9a)$$

Отсюда ясно, что если начальная ширина спектра поля Δ_0 превосходит эффективную полосу флуктуаций $\bar{\Pi}$, то вторым слагаемым в (9) можно пренебречь на любых расстояниях x . Аналогичным образом легко показать, что при выполнении условия $\bar{\Pi} \ll \Delta_0$ в правой части каждого уравнения системы (7) можно оставить только одно слагаемое, соответствующее значению $k = 1$. Интегрируя полученные уравнения, приходим к общему выражению для моментов спектра

$$s_{2n}(x) = s_{2n}(0) \exp [(n + 1)(2n + 1)D_2 x] \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (11)$$

Разложение (10) теперь запишется в форме

$$\Gamma(x; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} \Gamma_0^{(2n)}(0) \exp [(n + 1)(2n + 1)D_2 x], \quad (12)$$

которая, разумеется, справедлива для любых корреляционных функций неоднородностей среды.

3. Для того, чтобы свернуть ряд (12), отметим, что использованное выше условие «медленности» флуктуаций $\bar{\Pi} \ll \Delta_0$ эквивалентно замене эффективной структурной функции неоднородностей $D(\tau)$ в уравнении (3) первым неисчезающим членом ее разложения в ряд Тейлора. Это приводит к уравнению диффузии с квадратичным коэффициентом

$$\frac{\partial \Gamma(x; \tau)}{\partial x} = \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [\tau^2 \Gamma(x; \tau)], \quad \Gamma(0; \tau) = \Gamma_0(\tau), \quad (13)$$

которое решается при произвольных начальных условиях. Решение уравнения (13) можно записать в виде

$$\Gamma(x; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta} \Gamma_0(\tau e^{\eta}) \frac{1}{\sqrt{2\pi D_2 x}} \exp \left[-\frac{\left(\eta - \frac{D_2}{2} x\right)^2}{2 D_2 x} \right] d\eta. \quad (14)$$

Дифференцируя (14) по τ , нетрудно убедиться, что разложением этой функции действительно является ряд (12).

Соответствующее выражение для спектра поля представляет собой

$$S(x; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega e^{-\eta}) \frac{1}{\sqrt{2\pi D_2 x}} \exp \left[-\frac{\left(\eta - \frac{D_2}{2} x\right)^2}{2 D_2 x} \right] d\eta, \quad (15)$$

где $S_0(\Omega) = S(0; \Omega)$ — спектральная плотность входного сигнала. На основании (14), (15) можно получить также универсальные асимптотические формулы, описывающие спектрально-корреляционные характеристики поля на больших расстояниях $x \gg D_2^{-1}$:

$$\Gamma(x; \tau) = \frac{1}{|\tau|^{3/2}} \sqrt{\frac{\exp\left(\frac{D_2}{4}x\right)}{2\pi D_2 x}} \int_0^\infty \sqrt{\theta} \Gamma_0(\theta) d\theta,$$

$$\tau_0 \exp(-D_2 x) \ll \tau \ll \tau_0 \exp(D_2 x); \quad (16)$$

$$S(x; \omega) = S_0(0) - \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{\exp\left(\frac{D_2}{4}x\right)}{2\pi D_2 x}} \int_0^\infty \frac{[S_0(0) - S_0(\Omega)]}{\Omega^{3/2}} d\Omega,$$

$$\Delta_0 \exp(-D_2 x) \ll \omega \ll \Delta_0 \exp(D_2 x). \quad (17)$$

Здесь τ_0 и Δ_0 — время корреляции и ширина спектра входного воздействия.

Обратим внимание на то, что последние выражения описывают, по-видимому, также и асимптотическое поведение спектра при произвольном соотношении между величинами Δ_0 и $\bar{\Pi}$ (выше предполагалось $\Delta_0 \gg \bar{\Pi}$). Формально это следует из того, что решения уравнений (7) при достаточно больших x ведут себя подобно (11), а именно,

$$s_{2n}(x) \approx s_{2n}^* \exp[(n+1)(2n+1)D_2 x] \quad (x \gg D_2^{-1})$$

$$(n = 0, 1, \dots).$$

Отсюда видно, что на больших расстояниях разложение корреляционной функции поля в ряд Тейлора стремится к (12). Следовательно, соответствующее аналитическое выражение можно представить в виде

(14), где вместо начального значения $\Gamma_0(\tau)$ стоит некоторая функция $\Gamma^*(\tau)$, зависящая от эффективного спектрального масштаба флюктуаций $\bar{\Pi}$, откуда и вытекает справедливость асимптотических выражений (16), (17). Этот результат станет понятен, если вспомнить, что с ростом x растет ширина спектра поля, так что при некотором значении x^* , которое можно принять за «новый вход», она станет больше эффективного масштаба $\bar{\Pi}$ и дальнейшая эволюция спектрально-корреляционных характеристик может быть описана формулами вида (14)–(17).

Отметим также, что результаты (12)–(17), полученные на основании приближенного уравнения (13), могут рассматриваться как точные для среды с нестационарными флюктуациями, обладающими эффективной структурной функцией

$$D(\tau) = C(v) |\tau|^{v-1} \quad (18)$$

(что соответствует «фликкерному» спектру неоднородностей $S_{\text{эфф}}(\omega) \sim \sim |\omega|^{-v}$, если показатель $v \approx 3$.

При определенных начальных условиях можно получить довольно простые аналитические выражения для спектра поля, справедливые на любых расстояниях. В частности, для прямоугольного начального спектра ширины Δ_0 и высоты S_0 на основании (15) находим

$$S(y; \Omega) = S_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln \Omega - y}{\sqrt{2y}} \right) \right], \quad (15a)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt$$

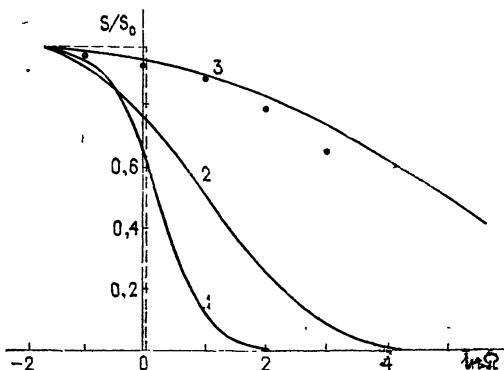


Рис. 1. Эволюция спектра волны; кривая 1 соответствует значению $y=0.2$; 2— $y=1$; 3— $y=5$; пунктиром показан начальный спектр $S(0; \Omega)$.

4. Кратко обсудим влияние высокочастотной диссипации на спектрально-корреляционные характеристики случайного поля. Хотя при $\mu \neq 0$ найти решение уравнения (3) не удается, для структурных функций неоднородностей определенного типа существует, как легко показать, установившаяся форма спектра поля при больших x . В самом деле, полагая, что при $x \gg (D_2^{-1}, \mu^{-1}) \Gamma(x; \tau) = \Gamma_\infty(\tau)$, и решая соответствующее (3) «стационарное» уравнение с $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, находим

— интеграл вероятностей. Здесь введены безразмерные переменные: расстояние $y = \frac{D_2}{2}x$ и частота $\Omega = \frac{\omega}{\Delta_0}$. Соответствующий этому результату график приведен на рис. 1. Отсюда видно, что с ростом y ширина энергетического спектра и средняя интенсивность волны увеличиваются, а спадание крыльев спектра становится все более медленным (при $y = 5$ уже хорошо работает асимптотическая формула (17), эти результаты отмечены точками).

$$\Gamma_{\infty}(\tau) = \Gamma_{\infty}(0) \left[1 + \frac{D(\tau)}{\mu} \right]^{-1}, \quad (19)$$

где установившееся значение средней интенсивности $\langle u^2 \rangle_{\infty} = \Gamma_{\infty}(0)$ определяется из закона сохранения спектра на нулевой частоте:

$$\Gamma_{\infty}(0) = S_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{1 + \frac{D(\tau)}{\mu}} \right)^{-1}, \quad S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(0; \tau) d\tau. \quad (20)$$

Ясно, что $\Gamma_{\infty}(0)$ существует не для любых $D(\tau)$, а лишь для структурных функций нестационарных неоднородностей, растущих $\sim \tau^{\beta}$, $\beta > 1$, например, для функции (18) с показателем $2 < \nu \leq 3$. В то же время для любых стационарных неоднородностей среды $\Gamma_{\infty}(0) = 0$, поскольку $D(\tau) \rightarrow A$ при $\tau \rightarrow \infty$, и интеграл в (20) расходится.

В частности, для функции $D(\tau) = C\tau^2$ из (19), (20) легко получить

$$\Gamma_{\infty}(\tau) = \frac{S_0}{\pi} \sqrt{\frac{C}{2\mu}} \left(1 + \frac{C}{2\mu} \tau^2 \right)^{-1},$$

что соответствует экспоненциальному асимптотическому спектру поля:

$$S_{\infty}(\omega) = S_0 \exp \left(- \sqrt{\frac{2\mu}{C}} |\omega| \right). \quad (21)$$

Таким образом, для нестационарных пространственно-временных неоднородностей указанного вида высокочастотная диссипация не уничтожает в асимптотике параметрические эффекты, а лишь «компенсирует» их, приводя к некоторым установившимся статистическим характеристикам поля на больших расстояниях.

5. Кроме рассмотренных спектрально-корреляционных характеристик представляет определенный интерес и вероятностное распределение волны, параметрически взаимодействующей со случайными неоднородностями. Найдем плотность вероятности нестационарного в общем случае поля $u(x, t)$, описываемого уравнением (1) в отсутствие дисперсии и высокочастотной диссипации:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} [a(x, t) u] = 0, \quad u(0, t) = u_0(t). \quad (22)$$

Используя описанную выше процедуру, см. также [9], можно прийти к уравнению Фоккера—Планка для плотности вероятности $W(u; x, t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \langle a \rangle \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{A}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (u^2 W). \quad (23)$$

Решение уравнения (23) с граничным условием $W_0(u; t)$ можно представить в виде

$$W(u; x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u; x, \tau) G(u; t - \tau) d\tau, \quad (24)$$

$$G(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Ax}} \exp \left[- \frac{(t - \langle a \rangle x)^2}{2Ax} \right].$$

Здесь G — средняя функция Грина [5] уравнения (22), а функция $w(u; x, \tau)$ удовлетворяет стационарному уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (u^2 w), \quad w(u; 0, \tau) = W_0(u; \tau),$$

совпадающему по форме с (13). Его решение представляет собой

$$w(u; x, \tau) = \frac{1}{|u| \sqrt{2\pi D_2 x}} \int_0^\infty W_0(u'; \tau) \exp \left[-\frac{\left(\frac{D_2}{2} x + \ln \frac{|u|}{u'} \right)^2}{2 D_2 x} \right] du'$$

(заметим, что замена $u' = ue^\eta$ приводит это выражение к виду (14)). Отсюда ясно, что гауссово начальное распределение денормализуется по мере распространения волны; степень денормализации определяется эффективностью параметрического взаимодействия, которая характеризуется величиной D_2 .

Приведем также следующее из (23) выражение для эволюции произвольных моментов поля:

$$\langle u^n(x; t) \rangle = \exp(\gamma_n x) \int_{-\infty}^{\infty} G(x; \tau) \langle u^n(0; t - \tau) \rangle d\tau \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Здесь показатель $\gamma_n = \frac{n(n-1)}{2} D_2$ характеризует величину параметрического усиления n -го момента. При стационарном входном сигнале отсюда получим

$$\langle u^n(x, t) \rangle = \langle u_0^n \rangle \exp(\gamma_n x).$$

Таким образом, высшие моменты, как и средняя интенсивность поля, нарастают из-за параметрического взаимодействия волны с пространственно-временными флуктуациями показателя преломления. Более быстрый по сравнению с дисперсией рост высших моментов (а значит и высших кумулянтов) поля связан с денормализацией его плотности вероятности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 2, 249 (1972).
4. В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 1, 71 (1973).
5. О. В. Музучук, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 8, 1193 (1976).
6. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1359 (1976).
7. K. Figutts, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
8. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, вып. 5 (11), 1919 (1964).
9. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).

**EVOLUTION OF SPECTRAL-CORRELATION CHARACTERISTICS OF THE FIELD
IN ONE-DIMENSIONAL MEDIUM WITH SPACE-TIME INHOMOGENEITIES***O. V. Musychuk, A. I. Saichev*

On the basis of the diffuse approximation equation the evolution of the statistical characteristics is considered of a wave propagating in a one-dimensional medium with space-time fluctuations of the refractive index. Expressions for the average field intensity, moments of its energy spectrum and also asymptotic formulas for the correlation function and the wave spectrum are obtained and analysed; the influence of the high-frequency dissipation on the spectrum-correlation characteristics is considered.

In the absence of dissipation and dispersion in the medium the influence of the parametric effects is investigated on the probable distribution and the higher moments of the field. It is shown, in particular, that moments beginning from the second one increase and the initial Gaussian probable distribution is denormalized as fast as the wave propagates.

УДК 538.574.8

**МОМЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ,
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ
СРЕДЕ, В ОБЛАСТИ НАСЫЩЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ***

И. Г. Якушкин

Получено асимптотическое решение уравнения для моментов порядка $2n$ поля в случайно-неоднородной среде. Показано, что в среде формируются каналы когерентности, по которым распространяется начальное возбуждение. При углублении в область насыщения флюктуаций моменты интенсивности стремятся к значениям, характерным для рэлеевского распределения $\bar{I}^n \rightarrow n! \bar{I}^n$. Однако это стремление неравномерно по n , в силу чего рэлеевское распределение полностью не реализуется.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, слабые флюктуации интенсивности световой волны в случайно-неоднородной среде могут быть достаточно полно исследованы путем применения метода плавных возмущений. Для области сильных или насыщенных флюктуаций основой исследования служат уравнения марковского приближения для моментов поля, полученные в работах Шишова, Чернова, Татарского, Кляцкина [1]. Точное решение удается получить лишь для первых двух моментов поля, а для четвертого момента могут быть найдены [2–5] асимптотические выражения при $\beta_0^2 \rightarrow \infty$ (β_0^2 — дисперсия флюктуаций интенсивности плоской волны в приближении МПВ). В то же время полное описание поля требует знания закона распределения или всего набора моментов интенсивности.

Изучению моментов интенсивности в области насыщения флюктуаций посвящена данная работа. При слабых флюктуациях интенсивности, в приближении МПВ, комплексная фаза поля представляется через сумму большого числа независимых изменений параметров среды и, следовательно, может считаться распределенной по нормальному закону. Поле в таком случае выражается через произведение независимых сомножителей и распределение его амплитуды описывается логонормальным законом.

Для области насыщения флюктуаций Шишовым и Гочелашвили [2, 3] было получено предельное при $\beta_0^2 \rightarrow \infty$ соотношение $\bar{I}^2 = 2\bar{I}^1$ (где I — интенсивность поля), характерное для рэлеевского закона распределения. Однако эксперименты со световыми пучками в турбулентной атмосфере показали, что при умеренно больших β_0^2 распределение вероятности и низшие моменты ($n \leq 4$) интенсивности лучше описываются логонормальным, а не рэлеевским законом [6]. В связи с этим ряд авторов [6, 7] высказывали мнение, что рэлеевский закон распреде-

* Результаты работы доложены на двухдневном семинаре «Сильные флюктуации интенсивности в средах со случайными неоднородностями», проведенном Научным Советом АН СССР по проблеме «Статистическая радиофизика» в январе 1977 г.

ления реализуется только для одномасштабной среды, а для среды со степенным спектром, характерным для турбулентности (пока не сказывается влияние внешнего масштаба), распределение интенсивности ближе к логонормальному всюду, кроме зоны сильно развитых каустик.

Выбор закона распределения тесно связан с моделью распространения волн в среде. Рэлеевский закон предполагает, что поле представляет собой сумму большого числа независимых слагаемых (многолучевое распространение), тогда как логонормальный закон лучше согласуется с представлением об однолучевом распространении. При ограничивающем влиянии масштаба естественно представить себе, что область распространения оказывается разбитой на независимые зоны-линзы, формирующие отдельные лучи. Для степенного спектра неоднородностей свойства всей области сильно коррелированы в разных точках, и не ясно, линзы какого размера оказывают преобладающее влияние на распространение. Большинство авторов, занимавшихся этим вопросом и подправлявших логонормальный закон из физических соображений, по существу, оставалось в рамках модели однолучевого распространения [7].

Предпринятые до настоящего времени попытки получить более строгий результат путем асимптотического решения уравнений для моментов не привели к успеху. В [8] был получен результат, приводивший к отрицательным значениям плотности вероятности, что было следствием неправомерных предположений, сделанных при выводе [9]. Приближенное решение для степенных спектров неоднородностей было построено в [10]. Несмотря на то, что оно неплохо согласуется с экспериментом, справедливость сделанных в работе предположений остается неясной (автор опять-таки исходит из близости искомого закона к логонормальному и из представлений об однолучевом распространении).

В настоящей работе вопрос о моментах поля в области насыщенных флуктуаций решается с помощью обобщения метода, развитого в [4, 5] для вычисления четвертого момента и использующего известное выражение для функции когерентности поля и симметрию высших моментов по переменным ρ и ρ' .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДПОСЫЛКИ РЕШЕНИЯ

Моменты поля $U(x, \rho)$ монохроматической световой волны с волновым числом k , распространяющейся в направлении оси x , в марковском приближении удовлетворяют уравнению [1]

$$\frac{\partial \Gamma_{2n}}{\partial x} = \left[\frac{i}{2k} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \Delta'_i) - \frac{k^2 \pi}{8} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} \right] \Gamma_{2n}, \quad (1)$$

где $\Gamma_{2n}(x, p) = \prod_{i=1}^n U(x, \rho_i) U^*(x, \rho'_i)$, p — вектор в плоскости $x = \text{const}$, Δ — оператор Лапласа по переменной ρ , p — вектор в плоскости $x = \text{const}$, описывающий совокупность векторов ρ и ρ' ,

$$F_{ij} = H(\rho_i - \rho'_j) + H(\rho_j - \rho'_i) - H(\rho_i - \rho_j) - H(\rho'_i - \rho'_j),$$

$$H(\rho) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\mathbf{x}, \rho)] \Phi_{\epsilon}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x},$$

$\Phi_{\epsilon}(\mathbf{x})$ — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости среды.

Начальное условие $\Gamma_{2n} = \Gamma_{2n}(0, p_0)$ будем считать заданным в

плоскости $x = 0$ (ρ_0 — вектор, описывающий совокупность ρ_{10} и ρ'_{10} при $x = 0$).

Решение (1) при $n = 1$, т. е. для функции когерентности поля, известно и для плоской волны, имеет вид

$$\Gamma_2(x, \rho, \rho') = \bar{I} \exp \left[-\frac{1}{2} D(|\rho - \rho'|) \right], \quad (2)$$

где $D(\rho) = \frac{k^2 \pi x}{2} H(\rho)$ — структурная функция фазы плоской волны, вычисленная по МПВ. Радиус когерентности поля ρ_0 определяется из $\frac{1}{2} D(\rho_0) = 1$. Так как Γ_2 зависит в первую очередь от фазы поля, из (2) следует, что $D(\rho)$ в целом правильно описывает фазовые соотношения и в области неприменимости МПВ.

Интересующая нас область сильных флуктуаций интенсивности может быть определена также условием сильных случайных искривлений фазового фронта. При этом размер статистической зоны Френеля, определяемый соотношением $\frac{1}{2} [\varphi(0) - 2\varphi(s) + \varphi(2s)]^2 = 2D(s) - \frac{1}{2} D(2s) = 1$, должен быть много меньше размера зоны Френеля для свободного пространства: $s \ll \sqrt{x/k}$, $ks^2/2x \ll 1$. Это условие отличается от неравенств $D(\sqrt{x/k}) \gg 1$ или $k\rho_0^2/2x \ll 1$, не учитывающих, что квадратичные члены в структурной функции фазы приводят только к случайным поворотам фазового фронта, но не к его искривлениям. Поэтому, используя ниже в качестве основного малого параметра $k\rho_0^2/2x$, мы будем иметь в виду и выполнение условия $ks^2/2x \ll 1$, которое для однородной среды или для многомасштабной с микромасштабом l при $\rho_0 < l$ принимает вид $kl\rho_0/2x \ll 1$. Для степенной структурной функции $H = A\rho^\nu$ при $\nu < 2$ оно может быть записано как $(2 - \nu) \frac{k\rho_0^2}{2x} \ll 1$.

Для удобства формулировки физических предпосылок решения представим Γ_{2n} через формулу Грина в виде

$$\Gamma_{2n}(p, x) = \int \Gamma_{2n}(p_0, 0) G_{2n}(p, p_0, x) dp_0, \quad (3)$$

где G_{2n} — функция Грина (1), представляющая собой среднее от произведения $2n$ полей сферических волн с разными точками источника и наблюдения и при $x \rightarrow 0$ стремящаяся к выражению для свободного пространства:

$$G_{2n} \rightarrow \tilde{G}_{2n} = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \exp \left\{ i \frac{k}{2x} \sum_{i=1}^n [(\rho_i - \rho_{10})^2 - (\rho'_i - \rho'_{10})^2] \right\}. \quad (4)$$

Функция когерентности двух сферических волн (G_2) имеет вид

$$G_2 = \tilde{G}_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \tilde{D}(\rho - \rho', \rho_0 - \rho'_0) \right], \quad \tilde{D}(\rho, \rho_0) = \int_0^1 D(\rho t + \rho_0(1-t)) dt. \quad (5)$$

Известные свойства функции когерентности поля указывают на возможность выделения основных областей интегрирования в (3). Для того, чтобы функция G_{2n} не была пренебрежимо мала в области насы-

шенных флюктуаций, каждому входящему в нее сомножителю $U(x, \rho_i)$ должен соответствовать когерентный сомножитель $U^*(x, \rho'_i)$ (мы будем рассматривать влияние на когерентность только источников). Пусть задана нумерация векторов ρ_{ik} . Можно $n!$ разными способами задать нумерацию векторов ρ'_i . Каждому k -му порядку нумерации будем ставить в соответствие вектор p^k , закон образования пар (ρ_i, ρ'_{ik}) и функционал $Q^k = \sum_{i=1}^n D(\rho_i - \rho'_{ik})$. Этот функционал описывает когерентность исследуемого произведения полей при данном способе их сочетания в пары. Обозначим через Ω_k ту область изменения начального вектора ρ_0^k , для которой данная нумерация ρ'_{ik} дает минимальное значение функционала Q , $Q^k \leq Q^j$, т. е. наилучшим образом формирует пары $U(\rho_i) U^*(\rho'_{ik})$. Чтобы функция G_{2n} описывала произведение когерентных сомножителей, должно выполняться условие $Q^k \leq 1$, чему соответствует $|\rho_i - \rho'_{ik}| \leq \rho_0$ ($1 \leq i \leq n$).

Тем самым в области Ω_k выделяется канал когерентности, по которому G_{2n} «распространяется» из начальной плоскости в точку наблюдения. Полное число каналов равно $n!$. По разностной координате $(\rho_i - \rho'_i)$ масштаб канала $\Delta^- = \rho_0$. Оценим масштаб канала по координате $(\rho_i + \rho'_i) \sim \Delta^+$. Если считать $G_{2n} \sim 1$ и $G_{2n} \sim (k/x)^{2n}$, то из (3) получаем $(\Delta^- \Delta^+)^{2n} \sim (x/k)^{2n}$. Отсюда имеем $\Delta^+ = x/k\rho_0$. Физически этот масштаб равен среднеквадратичному уклонению луча на неоднородностях размера радиуса корреляции поля. Действительно, угол отклонения луча α связан со структурной функцией фазы соотношением $\bar{\alpha}^2 \sim D''(0)/k^2$. Однако, так как формирующие луч участки фазового фронта имеют размер порядка радиуса корреляции поля, можно считать $D''(0) \sim D(\rho_0)/\rho_0^2$, т. е. $\bar{\alpha}^2 \sim D(\rho_0)/k^2 \rho_0^2$ и $\alpha \sim 1/k\rho_0$. В области сильных флюктуаций $\Delta^-/\Delta^+ = k\rho_0^2/x \ll 1$.

Определяя так размеры канала, мы, однако, захватываем не только данную область Ω_k , но частично и другие области Ω_j , так как соотношение $Q^j \leq 1$ может выполняться для двух и более j . Это указывает на зоны перекрытия каналов когерентности, где одновременно $|\rho_i - \rho'_i| \leq \rho_0$ и $|\rho_j - \rho'_j| \leq \rho_0$, а следовательно, и $(\rho_i - \rho_j) \sim \rho_0$. Так как полный размер канала по $(\rho_i - \rho_j) \sim x/k\rho_0$, то относительная площадь области перекрытия равна $(k\rho_0^2/x)^2$. Более точно, с учетом фаз в четырех точках, она определяется через размер статистической зоны Френеля s как $(ks^2/x)^2$. Так как полное число перекрытий равно числу сочетаний из n по 2, т. е. $n(n-1)/2$, то полное условие малости их относительной площади имеет вид

$$\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{k\rho_0^2}{x} \right)^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{ks^2}{x} \right)^2 \ll 1.$$

Выделив в области Ω_k канал когерентности, обратим внимание на симметрию функций Грина для различных областей Ω_j . Так как G_{2n} есть произведение сферических волн, то ее величина не меняется при одновременном изменении нумерации векторов источника и наблюдателя, т. е.

$$G_{2n}(p^k, p_0^k, x) = G_{2n}(p^j, p_0^j, x). \quad (6)$$

Используя (6), получаем из (3)

$$\begin{aligned}\Gamma_{2n}(x, p) &= \sum_{j=1}^{n!} \int_{\Omega_j} G_{2n}(p^j, p_0^j, x) \Gamma_{2n}(0, p_0^j) d p_0^j = \\ &= \int_{\Omega_1} \Gamma_{2n}(p_0^1, 0) \sum_{j=1}^{n!} G_{2n}(p^j, p_0^1, x) d p_0^1,\end{aligned}$$

откуда следует

$$\Gamma_{2n}(x, p) = \sum_{j=1}^{n!} \varphi_j(x, p^j), \quad (7)$$

где φ_j — решение (1) с начальным условием $\varphi_j(0)$, заданным только при $p_0 \in \Omega_j$.

Для сферической волны или узкого пучка разделение каналов производится с использованием спектрального разложения начального условия, как это сделано в [5] для вычисления Γ_4 .

3. ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим один из каналов когерентности, соответствующий области Ω_1 при заданной нумерации ρ_i и ρ'_i . В соответствии с определением масштабов канала будем считать $(\rho_i - \rho'_i) \sim p_0$, $\rho_i \sim \rho'_i \sim x/k\rho_0$ и при $k\rho_0^2/2x \ll 1$, $|\rho_i - \rho'_i| \ll |\rho_i|$. Пользуясь этим, выделим в «потенциальном» члене ΣF_{ji} в (1) главную для данного канала часть, физически соответствующую удалению каждой пары точек (ρ_i, ρ'_i) на бесконечное расстояние от всех остальных. При таком удалении $\Sigma F_{ij} \rightarrow \Sigma F_{ii} = 2 \Sigma H(\rho_i - \rho'_i)$. Оценим величину отбрасываемых при этом членов.

Обозначая $D_{ij} = \frac{k^2 \pi x}{4} F_{ij}$ ($D_{ii} = D(\rho_i - \rho'_i)$), используя переменные $s = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j + \rho'_i + \rho'_j)$, $u = \frac{1}{2}(\rho_i - \rho_j + \rho'_i - \rho'_j)$, $v = \frac{1}{2}(\rho_i - \rho_j - \rho'_i + \rho'_j)$, $w = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j - \rho'_i - \rho'_j)$ и учитывая, что $u \sim x/k\rho_0$, $v - w \sim p_0$, имеем при $i \neq j$

$$-D_{ij} \approx D'(u) \left[\frac{v^2 - w^2}{u} - \frac{(vu)^2 - (wu)^2}{u^3} \right] + D''(u) \frac{(vu)^2 - (wu)^2}{u^2}. \quad (8)$$

Отсюда для $D_{ij} \ll D_{ii}$ следует условие $D''\left(\frac{x}{k\rho_0}\right)\rho_0^2 \ll D(\rho_0) \approx 1$. Это условие, качественно эквивалентное условию насыщенных флюктуаций $ks^2/2x \ll 1$, можно следующим образом трактовать физически. Если $\alpha(\rho)$ — угол поворота фазового фронта в точке ρ , то $D''(x/k\rho_0) = k^2 \alpha(0) \alpha(x/k\rho_0)$ и, следовательно, $\frac{k^2 \rho_0^2}{k^2} D''\left(\frac{x}{k\rho_0}\right) = \frac{\alpha(0) \alpha(x/k\rho_0)}{x^2}$. Таким

образом, полученное условие требует, чтобы коэффициент корреляции угла поворота фазового фронта в точках, разнесенных на $x/k\rho_0$, т. е. на расстояние между крайними лучами, приходящими в одну точку наблюдения, был достаточно мал.

Выделяя главный для данного канала член, перепишем (1) в виде

$$\frac{\partial \Gamma_{2n}}{\partial x} - \left[\frac{i}{2k} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \Delta'_i) - \frac{1}{2x} \sum_{i=1}^n D_{ii} \right] \Gamma_{2n} = -\frac{1}{2x} \sum_{i \neq j} D_{ij} \Gamma_{2n}. \quad (9)$$

Для возбуждения, распространяющегося в данном канале, получаем из (9) интегральное уравнение

$$\varphi(x, p) = \int \varphi(0, p_0) G_{2n}^0(x, p, p_0) dp_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \int \left(\sum_{i \neq j} D_{ij} \right) \varphi(xt, p_0) G_{2n}^0(x(1-t), p, p_0) dp_0 dt,$$
 (10)

где $G_{2n}^0 = \prod_{i=1}^n G_2(x, \rho_i, \rho'_i, \rho_{i0}, \rho'_{i0})$ — функция Грина левой части (9), а G_2 — задается выражением (5). В соответствии с (7) $\varphi(0, p_0) = \Gamma_{2n}(0, p_0)$ при $p_0 \in \Omega_1$ и $\varphi(0, p_0) = 0$ при $p_0 \in \Omega_2$.

При $D''(x/k \rho_0) \rho_0^2 \ll 1$ каждый член, содержащий D_{ij} ($i \neq j$), пропорционален малому параметру δ , и методом последовательных приближений, аналогично [4, 5], может быть получено асимптотическое представление решения (10) при $\frac{n(n-1)}{2} \delta \rightarrow 0$ (множитель $\frac{n(n-1)}{2}$ учитывает число членов D_{ij}).

Конкретизируя свойства среды, будем считать, что она характеризуется внутренним (l) и внешним (L) масштабами неоднородностей. Пусть также $H(\rho) = A\rho^\nu$ ($1 < \nu < 2$) при $l \ll \rho \ll L$, $H(\rho) = Bl^{\nu-2}\rho^2$ при $\rho \ll l$ и $H(\rho) = \text{const}$ при $\rho \gg L$. Малый параметр δ при $l < x/k \rho_0 < L$ можно ввести соотношением $\delta = \left(\frac{k \rho_0 a}{2x} \right)^{2-\nu} \sim D'' \left(\frac{x}{k \rho_0} \right) \rho_0^{2\nu}$, где a — большая из величин ρ_0 и $l_1 \left(l_1 = l \left(\frac{B}{A} \right)^{2-\nu} \right)$. Тогда из (8) следует

$$-D_{ij} \approx \frac{Ak^2 \pi x}{4} \left[\frac{\nu(v^2 - w^2)}{u^{2-\nu}} - \frac{(2-\nu)v[(vu)^2 - (wu)^2]}{u^{4-\nu}} \right] \sim \delta. \quad (11)$$

При $\frac{x}{k \rho_0} > L$ $\delta \sim \frac{k \rho_0 a}{2x} \left(\frac{L}{a} \right)^{\nu-1}$, для $L = l$ $\delta \sim \frac{k \rho_0 l}{2x}$.

Как видно, при $\frac{n(n-1)}{2x} \delta \ll 1$ заведомо выполняется условие малости зоны перекрытия каналов. Поэтому интеграл по Ω_1 в (10), с точностью до членов $\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{k \rho_0^2}{x} \right)^2$, можно заменить на интеграл по всей начальной плоскости, т. е. $\varphi(0, p_0)$ на $\Gamma_{2n}(0, p_0)$. Учитывая также, что $\Gamma_{2n}(0, p_0) = \prod_{i=1}^n \Gamma_2(0, \rho_i, \rho'_i)$, для нулевого приближения к решению (10) имеем

$$\varphi^0(x, p) = \prod_{i=1}^n \int \Gamma_2(0, \rho_{i0}, \rho'_{i0}) G_2(x, \rho_i, \rho'_i, \rho_{i0}, \rho'_{i0}) d\rho_{i0} d\rho'_{i0} = \prod_{i=1}^n \Gamma_2(x, \rho_i, \rho'_i). \quad (12)$$

Отсюда, используя (7), получаем

$$\Gamma_{2n}^0(x, p) = \sum_{k=1}^{n!} \prod_{i=1}^n \Gamma_2(x, \rho_i, \rho'_{ik}), \quad \Gamma_{2n}^0(x, 0) = n! \bar{I}^n, \quad (13)$$

Для следующего члена разложения, подставляя (12) в (10) и учитывая, что $\int_0^1 \int D_{ij} \varphi^0(xt, p_0) G_{2n}^0(x(1-t), p_0, 0) dp_0 dt = \bar{I}^{n-2} \int_0^1 \int D_{12} \prod_{k=1}^n \Gamma_2(xt, p_k, p'_k) G_2(x(1-t), p_k, p'_k) dp_k dp'_k = \gamma \bar{I}^n$, где γ не зависит от i, j и n , и что число сочетаний (i, j) равно $\frac{n(n-1)}{2}$ (D_{ij} задается (8) и (11) и $\gamma \sim \delta$), имеем

$$\varphi^1(x, 0) = \frac{n(n-1)}{2} \gamma \bar{I}^n. \quad (14)$$

Величина γ не зависит от n и для разных частных случаев была получена в работах [3-5], посвященных вычислению \bar{I}^n . Для случая плоской волны ($\Gamma_2(0) = 1$) и для заданной выше функции $H(p)$ при $l < x/k p_0 < L$ и $\delta = (k p_0 a / 2x)^{2-\nu}$ имеем [4]

$$\gamma = \delta \frac{2(2-\nu)\nu\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(2-\nu/2)} \int_0^1 t^{\nu-2} \int_0^\infty \exp \left[-t \int_0^1 D(sx) dx - (1-t)D(s) \right] s^{3-\nu} ds dt. \quad (15)$$

Для турбулентной атмосферы при $\Phi_e(x) = 0,033 C_e^2 x^{-11/3} \exp \left(-\frac{x^2}{x_m^2} \right)$, $\nu = \frac{5}{3}$, $l = \frac{5,92}{x_m}$, вводя $\beta_0^2 = 0,31 C_e^2 k^{7/6} x^{11/6}$, согласно [4], получаем

$$\begin{aligned} \gamma &= 0,38 \delta = \frac{0,43}{\beta_0^{4/5}} && (\rho_0 \gg l), \\ \gamma &= 0,935 \delta = \frac{0,46}{\beta_0^{4/5}} \left(\frac{l}{\rho_0} \right)^{7/30} && (\rho_0 \ll l). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом двух первых членов разложения, суммируя по всем каналам когерентности, получаем

$$G_{2n}(x, 0) = \bar{I}^n = n! \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{2} \gamma + O \left(\left[\frac{n(n-1)}{2} \gamma \right]^2 \right) \right\} \bar{I}^n, \quad (17)$$

где для отдельных случаев γ дается (15) и (16).

Из (17) видно, что при $\gamma \rightarrow 0$ ($\beta_0^2 \rightarrow \infty$) $\bar{I}^n \rightarrow n! \bar{I}^n$, т. е. к значениям, отвечающим рэлеевскому распределению интенсивности и нормальному распределению поля. Однако это стремление неравномерно по n , так что полностью рэлеевское распределение не реализуется. Экспериментальные результаты [6] удовлетворительно объясняются (17) для $n = 2, 3$, а для $n = 4$ при условиях эксперимента ($\beta_0 \sim 5$) полученная асимптотика неприменима.

Стремление \bar{I}^n к рэлеевским значениям связано с многолучевой картиной поля в области насыщенных флюктуаций интенсивности. Малые неоднородности среды (линзы размера l или ρ_0) формируют отдельный луч, приходящий в точку наблюдения. Число лучей определяется соответственно $N \sim (x/k \rho_0^2)^2$ или $N \sim (x/k \rho_0 l)^2$ ($x/k \rho_0$ — размер в начальной плоскости, откуда в одну точку приходят лучи). Крупные линзы, неоднородности масштаба $x/k \rho_0$, фокусируют это множество

лучей, приводя к отклонению закона распределения интенсивности от рэлеевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Препринт, ОФАГ АН СССР, М., 1970.
2. В. И. Шишов, ЖЭТФ, 61, № 4, 1399 (1971).
3. К. С. Гечелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
4. И. Г. Якушкін, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
5. И. Г. Якушкін, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 384 (1976).
6. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, Вл. В. Покасов, А. С. Хрупин, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 1, 105 (1974).
7. J. Stroben, T. Wang and J. Speck, Radio Sci., 10, № 1, 59 (1975).
8. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 60, № 4, 1300 (1971).
9. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
10. L. Furutsu, J. Math. Phys., 17, 1252 (1976).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
27 мая 1977 г.

MOMENTS OF THE INTENSITY OF A FIELD PROPAGATING IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM IN THE REGION OF THE FLUCTUATION SATURATION

I. G. Yakushkin

The asymptotic solution of the equation is obtained for the moments of the order of $2n$ of the field in a randomly inhomogeneous medium. It is shown in the medium coherent channels are formed where the initial excitation propagates. When deepening in the region on the fluctuation saturation, the intensity moments are tend to values typical of Rayleigh distribution $\bar{I}^n \rightarrow n! \bar{I}^n$. However, this tend is nonuniform over n by virtue of which the Rayleigh distribution is not completely normalized.

УДК 621.371.24 : 535.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ СМЕЩЕНИЙ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

A. C. Дрофа

Проведены расчет и экспериментальные исследования частотных спектров случайных смещений светового луча в приземном слое атмосферы. Расчет спектров горизонтальных и вертикальных смещений луча проводился для Кармановской модели спектра турбулентности с учетом флюктуаций скорости переноса оптических неоднородностей поперек трассы. Показано, что с увеличением флюктуаций скорости переноса спектр смещений расширяется. Экспериментальные спектры смещений хорошо согласуются с теоретическим расчетом. В частности, подтверждается теоретический вывод об отличии спектров коллимированного и фокусированного пучков в области высоких частот.

Для ряда задач, связанных с использованием узких световых пучков для целей локации, навигации и связи в реальной атмосфере, необходимы сведения о временном характере случайных смещений светового луча. Наиболее информативным с этой точки зрения является исследование частотных спектров флюктуаций положения центра тяжести пучка света. Теоретическое исследование частотных спектров смещений световых пучков проведено в [1]. В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования спектров смещений центра тяжести лазерных пучков в приземном слое турбулентной атмосферы.

В работах [2–4] были исследованы корреляционные функции смещений центра тяжести световых пучков. Расчет и экспериментальные данные [3, 4] показывают, что вид корреляционных функций смещений пучка в плоскости, параллельной поверхности Земли и перпендикулярной ей плоскости, различен. В связи с тем, что в работе [4] это явление не было учтено, для сравнения экспериментальных данных с теоретическими проведем расчет частотных спектров для различных компонент вектора смещения центра тяжести пучка. Для спектра флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха примем кармановскую модель спектра турбулентности

$$\Phi_{\epsilon}(x) = AC_{\epsilon}^2(x^2 + x_0^2), \quad (1)$$

где $A = 0,033$, C_{ϵ}^2 — структурная характеристика диэлектрической проницаемости воздуха, $x_0 = 2\pi/L_0$, L_0 — внешний масштаб турбулентности. Спектр (1) переходит в колмогоровский при $x \gg x_0$ и ограничен при $x \rightarrow 0$. Оценка внешнего масштаба турбулентности в приземном слое атмосферы принимается равной [5] $L_0 = xh$, где x — постоянная Кармана, равная 0,4, h — высота над поверхностью Земли.

При разносе пучков, параллельном поверхности Земли (ось x), для пространственных корреляционных функций горизонтальных и вертикальных смещений пучка можно получить [2–4]

$$B_{x,y}(x) = \pi^2 L^3 \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi \int_0^\infty x^3 \Phi_{\epsilon}(x) \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 a_s^2(\xi L) \right] [J_0(x\xi) \mp J_2(x\xi)] dx, \quad (2)$$

где L — длина трассы, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя,

$$a^2(L) = a^2 [(1 - L/F)^2 + \Omega^{-2} + 8\sigma^{12/5}\Omega^{-1}] = a^2 q(L) \quad (3)$$

— квадрат эффективного радиуса пучка [2], a — начальный радиус пучка, $\Omega = ka^2/L$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения, F — радиус кривизны фазового фронта на излучающей апертуре, $\sigma^2 = 0,077 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6}$ — дисперсия флуктуаций уровня амплитуды плоской волны в первом приближении метода плавных возмущений. В случае слабых флуктуаций интенсивности ($\sigma^2 \ll 1$) при $\Omega \gg 1$ уширением профиля средней интенсивности пучка из-за рассеяния на турбулентных неоднородностях среды можно пренебречь [1, 2], поэтому в расчетах будем полагать $\sigma = 0$.

В первом приближении переход от пространственных корреляционных функций к временным осуществляется в рамках справедливости гипотезы «замороженной турбулентности» [1, 3, 5], когда пространственный разнос пучков x связан с временным сдвигом t соотношением $x = vt$, где v — перпендикулярная трассе составляющая скорости ветра. При этом переход осуществляется по формуле

$$B(vt) = R(t), \quad (4)$$

где $R(t)$ — временная корреляционная функция. Следуя [1], расчет частотного спектра горизонтальных и вертикальных смещений пучка проведем с использованием гипотезы «замороженной турбулентности». Затем учтем флуктуации скорости переноса оптических неоднородностей, которые существуют в реальной атмосфере.

Частотный спектр смещений связан с временной корреляционной функцией соотношением

$$S(f) = 4 \int_0^\infty \cos 2\pi ft R(t) dt. \quad (5)$$

Подставляя (1) — (4) в (5) и вычисляя соответствующие интегралы, для нормированных энергетических спектров $U(f) = f S(f)/\sigma_0^2$ горизонтальных и вертикальных смещений пучка получаем

$$\begin{aligned} U_x(E) &= \frac{1}{V\pi \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} \frac{E^3}{(E^2 + \beta)^{7/6}} \int_0^1 (1 - \xi)^2 q^{1/6}(\xi L) \times \\ &\times \exp\left[\frac{q}{2}(\beta - E^2)\right] W_{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}[q(E^2 + \beta)] d\xi; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_y(E) &= \frac{1}{V\pi \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} \frac{E}{(E^2 + \beta)^{2/3}} \int_0^1 (1 - \xi)^2 q^{-1/3} \times \\ &\times \exp\left[\frac{q}{2}(\beta - E^2)\right] W_{-\frac{7}{6}, \frac{1}{6}}[q(E^2 + \beta)] d\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = a^2 x_0^2/2$, $E = f/f_0$ — безразмерная частота, $f_0 = v/\sqrt{2}\pi a$ — характерная частота смещений пучка, $\sigma_0^2 = V\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\pi^2 C_e^2 L^3 (2a)^{-1/3}$ — дисперсия смещений пучка, вычисленная [2] для колмогоровского спектра ($x \gg x_0$) флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха, $W_{\lambda, \mu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера [7]. Поведение

спектральной плотности $U(E)$ в различных частотных областях зависит от условий фокусировки пучка (отношения L/F) режима дифракции (величина Ω) и отношения диаметра светового пучка и внешнего масштаба турбулентности (параметр β).

Используя асимптотические представления функции $W_{\lambda, \mu}(z)$ [7] в области больших и малых значений аргумента, можно получить асимптотические формулы для спектральной плотности $U(E)$. Асимптотики для спектров горизонтальных и вертикальных смещений фокусированного ($L/F = 1$) пучка в ближней зоне дифракции ($\Omega \gg 1$) приведены в табл. 1 (в условиях приземных трасс практически всегда выполняется условие $\beta < 1$).

В низкочастотной области спектральная плотность $U(E)$ имеет два характерных участка роста, граница между которыми определяется отношением диаметра светового пучка к величине внешнего масштаба турбулентности (параметр β). И если положение максимума спектральной плотности $U(E)$ определяется диаметром светового пучка, то ширина спектра зависит еще и от величины β . Отличие поведения спектров смещений коллимированного пучка ($L/F = 0$) наблюдается лишь в области высоких частот. Так при $E \gg 1$ ($\Omega \gg 1$) асимптотическое поведение спектра горизонтальных смещений коллимированного пучка имеет вид

$$U_x(E) = \frac{2}{V\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} E^{-\frac{2}{3}} \exp(-E^2). \quad (8)$$

Для спектра вертикальных смещений имеем

$$U_y(E) = \frac{2}{V\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} E^{-\frac{8}{3}} \exp(-E^2). \quad (9)$$

Таблица 1

Асимптотики спектров смещений для фокусированного пучка

Частотная область	Горизонтальные смещения	Вертикальные смещения
$E \ll V\beta \ll 1$	$\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\pi^{3/2}\beta^{4/3}} E^3$	$\frac{6\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\pi^{3/2}\beta^{1/3}} E$
$V\beta \ll E \ll 1$	$\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\pi^{3/2}} E^{1/3}$	$\frac{6\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\pi^{3/2}} E^{1/2}$
$\Omega \gg E \gg 1$	$\frac{3}{V\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} E^{-8/3}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Omega^{2/3}}{\pi^{5/3}} E^{-10/3}$
$E \gg \Omega \gg 1$	$\frac{3}{V\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} E^{-8/3} \exp\left(-\frac{E^2}{\Omega^2}\right)$	$\frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Omega} E^{-11/3} \exp\left(-\frac{E^2}{\Omega^2}\right)$

Характерно, что в области $E \gg 1$ для спектров смещений фокусированного пучка до частот $E \sim \Omega$ наблюдается степенной участок убывания спектральной плотности. В то же время для коллимированного пучка на частотах, превышающих характерную частоту f_0 , наблюдается сразу экспоненциальный спад спектральной плотности, что, как было отмечено в [1], означает несущественный вклад частот $f > f_0$ в спектр смещений коллимированного пучка.

Экспериментальное исследование флуктуаций смещений центра тяжести лазерных пучков проводилось на горизонтальной трассе длиной $L = 355$ метров. Средняя высота луча над поверхностью Земли $h = 2,3$ метра. Исследовались частотные спектры случайных смещений коллимированного и фокусированного пучков гелий-неонового лазера ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$) с начальным диаметром $2a = 9,5 \text{ см}$. Измерения величины смещений центра тяжести пучков производились с помощью позиционно-чувствительного датчика — разрезного фотодиода с маской, коэффициент пропускания которой изменяется по одной из координат x по закону $T(x) = \alpha|x|$. Методика измерений смещений центра тяжести луча подробно описана в [6].

Электрический сигнал с разрезного фотодиода, пропорциональный смещениям лазерного пучка в одной из плоскостей, записывался в аналоговом виде на магнитную ленту магнитографа Н036. Для обработки данных на ЭВМ электрический сигнал с магнитографа считывался на перфоленту в цифровом виде, причем скорость протяжки магнитной ленты при считывании была в 8 раз меньше, чем при записи исходного сигнала. В результате частота выборки значений координаты центра тяжести луча была равна 240 Гц . По реализациям длительностью порядка 35 секунд (в реальном масштабе времени) рассчитывались спектры случайных смещений (объем выборки 8192 числа). Определение спектральной плотности $S(f)$ производилось путем сглаживания периодограмм, вычисленных методом быстрого преобразования Фурье. Форма спектрального окна принималась прямоугольной, а его ширина возрастает с увеличением частоты [8]. При этом дисперсия оценки спектральной плотности растет к низкочастотному концу из-за малого числа усредняемых гармоник в этой части спектра. Вычисление спектров измеряемых величин производится в предположении, что наблюдаемый процесс является случайной стационарной функцией времени. Во время проведения эксперимента стационарность исследуемого процесса контролировалась по средней величине и дисперсии сигнала с разрезного фотодиода, измеряемых аналоговым способом [6]. Для обработки на ЭВМ использовались только временные реализации, которые можно было считать стационарным процессом. Всего таким образом было получено и обработано около 60 спектров горизонтальных и вертикальных смещений коллимированного и фокусированного лазерных пучков.

Для оценки состояния устойчивости атмосферы во время экспериментов на средине трассы в слое 1—3 м производились измерения градиента средней температуры воздуха и средней скорости ветра. Эти данные использовались для оценки числа Ричардсона Ri на уровне распространения луча, и состояние устойчивости приземного слоя атмосферы оценивалось по числу Ri [5].

Синхронно с регистрацией флуктуаций смещений лазерных пучков проводились измерения структурной характеристики флуктуаций температуры C_t^2 (см. [6]), а также модуля и направления горизонтальной скорости ветра. Для этого использовался модифицированный вариант дистанционного анеморумбографа М-49 с постоянной времени около 1 с. Регистрация величины и направления скорости ветра производилась

с помощью системы автоматической перфорации на перфоленту. Затем на ЭВМ рассчитывались статистические характеристики скорости ветра и его направления во время эксперимента.

Приведенные ниже экспериментальные данные получены при неустойчивости приземного слоя атмосферы и при стратификации, близкой к безразличной (на высоте распространения луча $0 \geq R_i > -0,2$). Величина C_g^2 во время измерений спектров смещений лазерных пучков не превышала 10^{-2} град 2 см $^{-2/3}$. При этом для нашей трассы выполняются соотношения $\sigma^2 < 0,4$ и $a_3(L) \ll a$. Последнее обстоятельство дает основание сравнивать полученные экспериментальные данные с теоретическим расчетом при $\sigma = 0$ [1].

Результаты проверки гипотезы подобия спектров при различных поперечных трассах скоростях ветра показаны на рис. 1, где приведены экспериментальные энергетические спектры $U_v(f)$ смещений фокусированного пучка. Графики получены осреднением по группам из 4–5 индивидуальных спектров, полученных при близких величинах средней скорости ветра. Хорошо заметен сдвиг кривых в сторону высоких частот при увеличении скорости ветра. Максимумы $U(f)$ находятся приблизительно на тех же частотах, что и максимум теоретического спектра. Таким образом, непосредственные измерения подтверждают теоретический вывод [1] о том, что частотный спектр смещений луча зависит от безразмерной частоты $f\sqrt{2\pi a/v}$.

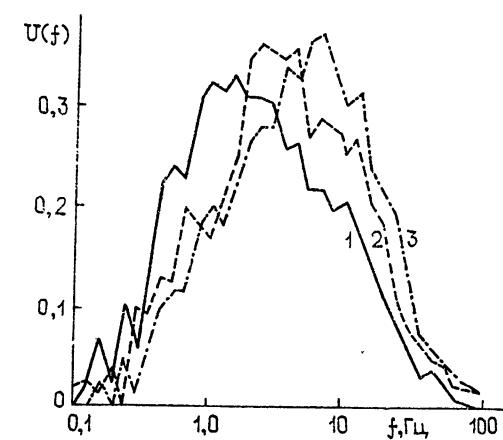


Рис. 1. Экспериментальные частотные спектры вертикальных смещений фокусированного пучка (1— $v=1,5$ м/с, 2— $v=2,7$ м/с, 3— $v=3,8$ м/с).

В работе [4] было показано, что на форму временных корреляционных функций смещений центра тяжести пучков существенным образом влияют флуктуации скорости переноса оптических неоднородностей на трассе. Более отчетливо этот эффект проявляется при исследовании частотных спектров смещений пучков. Интенсивность флуктуаций скорости переноса характеризуется отношением σ_v/\bar{v} , где σ_v^2 — дисперсия флуктуаций перпендикулярной трассе составляющей скорости ветра, $\bar{v} = u \sin \varphi$ — средняя скорость ветра поперек трассы, u — модуль средней скорости воздушного потока, φ — угол между направлением средней скорости и направлением распространения луча. Можно показать, что величина σ_v/\bar{v} выражается через дисперсии флуктуаций скорости и направления ветра, σ_u^2 и σ_φ^2 , следующим образом:

$$\left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2 \approx \left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 + \sigma_\varphi^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (10)$$

В реальных условиях, в зависимости от состояния устойчивости атмосферы [9], величина σ_u/u в приземном слое изменяется в пределах 0,2–0,5, а σ_φ — в пределах 0,15–0,4. Из (10) видно, что с отклонением направления средней скорости ветра от перпендикулярного трассе сильно возрастает влияние флуктуаций направления скорости ветра. Чтобы умень-

шить это, измерения спектров смещений пучков проводились при направлениях скорости ветра, близких к перпендикулярным трассе.

Иллюстрация влияния флюктуаций скорости переноса на спектр смещений луча приведена на рис. 2, где указаны экспериментальные спектры смещений пучка в зависимости от безразмерной частоты E . Величина σ_v/v оценивалась по формуле (10) из измерений флюктуаций направления и скорости ветра на трассе во время измерений смещений пучка. Спектры на рис. 2 получены осреднением по нескольким индивидуальным спектрам с близкими значениями величины σ_v/v . Из графиков видно, что форма высокочастотного спада спектральной плотности совпадает с теоретически рассчитанной, однако ширина экспериментального спектра значительно больше теоретического, причем спектр расширяется с увеличением флюктуаций скорости переноса.

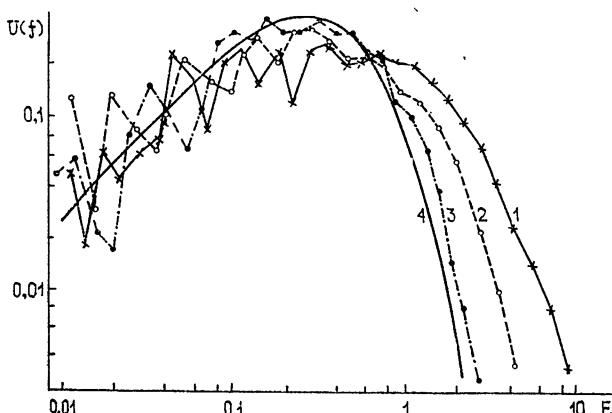


Рис. 2. Спектры вертикальных смещений параллельного пучка ($\sigma_v/v = 0.66$ (1); 0.43 (2); 0.21 (3) и расчет (4) по формуле (7)).

Следует отметить, что подобное несовпадение экспериментальных спектров с теоретическим расчетом наблюдалось и другими авторами [5, 10] при исследовании частотных спектров флюктуаций интенсивности и углов прихода световых лучей.

Чтобы иметь возможность сравнить экспериментальные данные с теорией, проводился расчет частотных спектров смещений пучков с учетом флюктуаций скорости переноса оптических неоднородностей на трассе. Сделать это можно [4, 5], усреднив выражения для спектров (6) и (7), полученные для постоянной скорости переноса, по флюктуациям скорости. Так как скорость движения картины распределения интенсивности пучка на конце трассы обусловлена суммарным действием всех неоднородностей вдоль трассы, можно считать, что флюктуации скорости переноса распределены по нормальному закону. Расчет частотных спектров смещений проводился на ЭВМ численно по формуле

$$U\left(E, \frac{\sigma_v}{v}\right) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{f \sqrt{2\pi} a}{v}\right) \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} (v - \bar{v})^2\right] dv, \quad (11)$$

где v — мгновенное значение скорости переноса, \bar{v} — ее среднее значение, $E = f \sqrt{2\pi} a / \sigma$. Для расчета спектра величины параметров принимались соответствующие условиям эксперимента ($\Omega = 63$, $L_0 = 1$ м, $\beta = 0.045$). Результаты расчета частотных спектров смещений пучков при различных величинах параметра σ_v/v приведены на рис. 3.

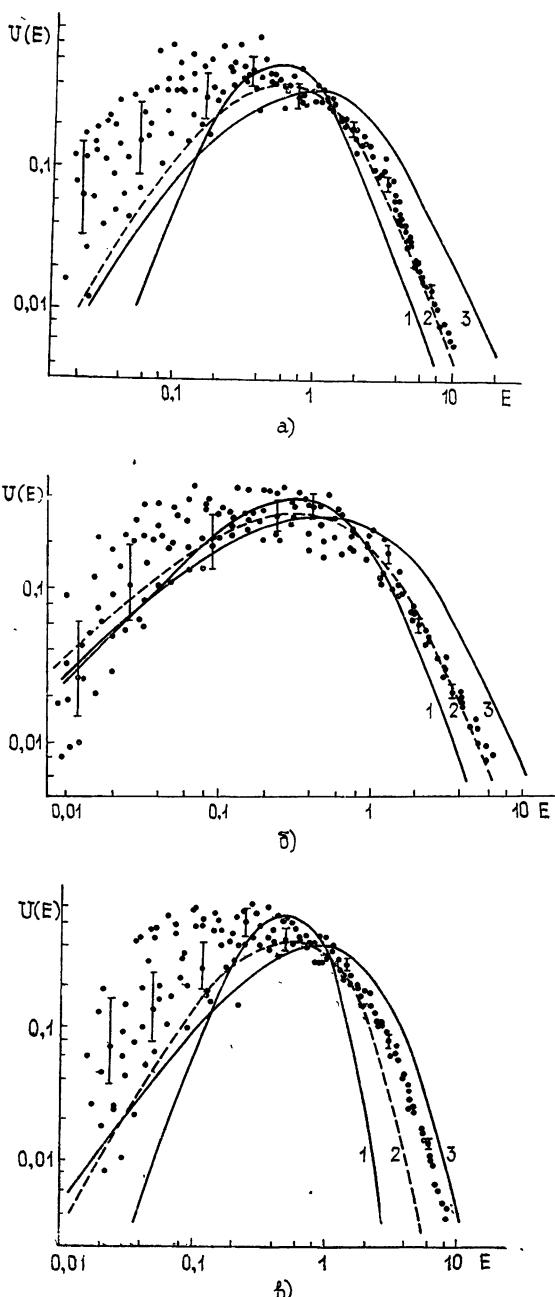


Рис. 3. Спектры горизонтальных (а) и вертикальных (б) смещений фокусированного пучка, горизонтальных смещений параллельного пучка (в) и теоретический расчет ($\sigma_v/v=0$ (1); 0,4 (2); 1,0 (3)).

Там же приведены экспериментальные спектры смещений центра тяжести пучков, нормированные на дисперсию смещений, в зависимости от безразмерной частоты E . Точками на графиках обозначены оценки спектральной плотности смещений, полученные по одной временной реализации. Вертикальными отрезками обозначены доверительные 80-про-

центные интервалы оценок. Приведенные экспериментальные данные получены при средних поперечных трассе скоростях ветра от 1,5 до 4 м/с. Величина σ_v/\bar{v} , вычисленная по данным измерений скорости ветра на трассе, для приведенных спектров находится в диапазоне 0,33—0,45.

Из графиков рис. 3 видно достаточно хорошее совпадение экспериментальных спектров смещений пучков с теоретическим расчетом, выполненным с учетом флуктуаций скорости переноса неоднородностей на трассе.

Непосредственные измерения спектров подтверждают неравнoprавность горизонтального и вертикального направлений смещений центра тяжести световых пучков. В высокочастотной области спектров смещений коллимированного пучка наблюдается более быстрый спад спектральной плотности, чем у спектров фокусированного пучка. Последнее обстоятельство может служить экспериментальным подтверждением теоретических выводов об отличии поведения спектральных плотностей смещений коллимированного и фокусированного пучков в области высоких частот.

Некоторое несовпадение экспериментальных спектров смещений с теоретическими в области низких частот можно объяснить недостаточно полным совпадением крупномасштабной области спектра турбулентности, ответственного за низкочастотный участок спектра смещений, с Кармановской моделью турбулентного спектра. При этом следует учитывать тот факт, что в теоретических расчетах используется предположение о локальной изотропности поля диэлектрической проницаемости воздуха, использование которого для масштабов неоднородностей, сравнимых с внешним масштабом турбулентности L_0 , оправдано лишь для оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 7, 990 (1975).
2. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 10, 1501 (1974).
3. Э. И. Гельфер, А. И. Кон, А. М. Черемухин, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 2, 245 (1973).
4. А. С. Дрофа, I Всесоюзное совещание по атмосферной оптике, Тезисы докладов, ч. I, Томск, 1976, стр. 157.
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
6. А. С. Дрофа, Труды ИЭМ, вып. 12(31), 138 (1976).
7. И. С. Градштейн, Н. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм и рядов, Физматгиз, М., 1962.
8. А. И. Кесельбренер, И. В. Некрасов, А. Е. Орданович, Труды ИЭМ, вып. 26, 109 (1972).
9. Н. Ф. Мазурин, Труды ИЭМ, вып. 6(44), 146 (1974).
10. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, В. В. Покасов, Л. И. Шавлев, III Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1975, стр. 206.

Научно-исследовательский институт
экспериментальной метеорологии

Поступила в редакцию
22 марта 1977 г.

INVESTIGATION OF DISPLACEMENT SPECTRA OF LIGHT BEAM GRAVITY CENTRES IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

A. S. Drofa

The frequency spectra of random displacements of the light beam in the ground level atmospheric layer are calculated and experimentally investigated. The calculation of spectra of horizontal and vertical beam displacements is made for Karman's model of the turbulence spectrum with taking into account the velocity fluctuations of the optical inhomogeneities transfer across the trace. It is shown that with the increase of the velocity fluctuation transfer the displacement spectrum is broadened. Experimental displacement spectra are well agreed with the theoretical calculation. In particular, theoretical conclusions are confirmed on the difference of spectra of collimated and focused beams in the high frequency region.

УДК 538.61

ДИФРАКЦИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ДОМЕНАХ

Д. И. Семенцов, А. М. Морозов

Рассмотрены особенности дифракции света на магнитных решетках с цилиндрическими и эллиптическими доменами. Получены аналитические выражения для дифрагированного поля в случае плоской гексагональной решетки; проведен анализ состояния поляризации светового поля в дифракционной картине.

1. Магнитооптическая дифракция света на полосовых доменных структурах наблюдалась рядом авторов [1], а ее особенности были рассмотрены в работах [2, 3]. Дифракция на цилиндрических магнитных доменах (ЦМД) и на периодических структурах из ЦМД наблюдалась и изучалась в работах [4, 5]. Для наблюдения регулярных доменных структур в пластинках ортоферрита (TmFeO_3 , DyFeO_3) последние вырезают либо нормально к оси c , либо нормально к оптической оси [5, 6]. При этом в первых можно наблюдать периодическую гексагональную систему ЦМД правильной круговой формы, во вторых ЦМД имеют эллиптическую форму. Такие регулярные доменные структуры для проходящего поляризованного света представляют собой различного типа дифракционные фазовые решетки. Высокая подвижность доменных стенок и возможность управления доменной структурой магнитными полями открывают широкие перспективы применения таких материалов в системах оптической обработки информации.

Аналитические выражения, приведенные в работе [5], не дают информации о состоянии поляризации в дифракционном спектре и не отражают связи между параметрами спектра и магнитооптическими параметрами доменной структуры. Они объясняют только те экспериментальные данные, которые являются общими с дифракцией света на периодической гексагональной структуре отверстий в непрозрачном экране.

В настоящей работе проводится анализ особенностей магнитооптической дифракции Фраунгофера на регулярных структурах ЦМД круговой и эллиптической формы.

2. Решение дифракционной задачи требует знания матрицы пропускания $\hat{\tau}(l)$ магнитной пластиинки толщиной l с соответствующим распределением намагниченности. Для ее нахождения необходимо рассмотреть прохождение световой волны через образец, магнитооптические свойства которого определяются тензором комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. Считая, что намагниченность в доменах имеет только составляющую M_z , имеем

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon' & -i\epsilon' Q & 0 \\ i\epsilon' Q & \epsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon'_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\epsilon' = \epsilon + 4\pi\sigma/i\omega$, σ — проводимость материала, ω — частота падающего излучения. Магнитооптический параметр Q определяется характером распределения намагниченности и в предположении нулевой толщины доменных стенок может быть выражен для изолированного цилиндрического домена, помещенного в начало координат, через знаковую функцию $Q = Q_0 \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{2} - \rho\right)$, где Q_0 — магнитооптический параметр однородно-намагниченной среды ($Q_0 \sim M_0$), а d — диаметр цилиндрического домена. Рассматривая нормальное падение плоскополяризованной волны, можно показать [3], что распределение светового поля на выходной поверхности образца (для произвольного направления поляризации) задается матрицей пропускания, т. е. $\hat{\tau}(l) = \hat{\tau}(l) E_0$, где

$$\hat{\tau}(l) = e^{ikl} \begin{pmatrix} \cos \gamma Q & -\sin \gamma Q \\ \sin \gamma Q & \cos \gamma Q \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $\gamma = \frac{kl}{2}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{N}$, а \bar{N} — комплексный показатель преломления среды.

3. С учетом цилиндрической симметрии распределение светового поля в области дифракции Фраунгофера может быть записано следующим образом [7]:

$$E(\rho_0, z_0) = \frac{k_0}{iz_0} e^{ik_0 r_0} \int_0^\infty E_\tau(\rho, l) J_0\left(\frac{k_0 R_0}{z} \rho\right) \rho d\rho, \quad (3)$$

где $r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}$ — координата точки в плоскости наблюдения дифракционной картины, отстоящей от магнитной решетки на расстояние z_0 , k_0 — волновой вектор падающей волны, R_0 — радиус отверстия, ограничивающего освещаемый участок поверхности пластинки, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Выражение (3) справедливо в области $2z_0 \gg k_0 R_0^2$ (далняя зона), где $r_0 \approx z_0$. Без учета множителей перед интегралом это выражение представляет собой преобразование Фурье — Бесселя распределения векторного поля на выходной стороне пластинки, определяющегося матрицей $\hat{\tau}$.

Считая радиус отверстия R_0 и диаметр цилиндрического домена d заданными и учитывая (2), нетрудно показать, что дифрагированное поле при произвольном направлении поляризации падающего излучения может быть представлено в виде

$$E(\rho_0, z_0) = -ie^{i(kl+k_0 r_0)} \hat{T}(\rho_0, z_0) E_0, \quad (4)$$

где диагональные элементы \hat{T} -матрицы ($T_{xx} = T_{yy}$) имеют вид

$$T_{xx} = \cos \gamma Q_0 \frac{R_0}{\rho_0} J_1\left(\frac{k_0 R_0}{z_0} \rho_0\right), \quad (5)$$

а недиагональные ($T_{xy} = -T_{yx}$) —

$$T_{xy} = \sin \gamma Q_0 \frac{R_0}{\rho_0} \left[J_1\left(\frac{k_0 R_0}{z_0} \rho_0\right) - \frac{2}{p} J_1\left(\frac{k_0 d}{2z_0} \rho_0\right) \right], \quad (6)$$

где $p = \frac{2R_0}{d}$. Здесь J_1 — функция Бесселя первого порядка. Используя соотношение $I = EE^*$, легко найти распределение интенсивности светового поля в дифракционной картине. Так, в случае поляризации падающего излучения вдоль оси Ox имеем

$$I(p_0, z_0) = E_0^2 e^{-2k_1 l} (T_{xx}^2 + T_{xy}^2), \quad (7)$$

где k_2 — мнимая часть волнового числа k . Из полученных соотношений следует, что поле в дифракционной картине представляет суперпозицию двух ортогонально поляризованных полей. Распределение поля с поляризацией падающего излучения аналогично распределению поля в картине Эйри при дифракции на круглом отверстии радиуса R_0 . Распределение поля с ортогональной поляризацией существенным образом зависит от размера ЦМД. На рис. 1 представлено распределение интенсивности дифрагированного поля с падающей (кривая 1) и ортогональной (кривые 2—5) поляризациями, полученное для различных соотношений p ($\lambda = 0,63 \text{ мк}, l = 10 \text{ мк}, N \sim \sqrt{\epsilon} = 2, 3, Q_0 = 5,2 \cdot 10^{-3}, \gamma Q_0 = \frac{\pi}{4}$).

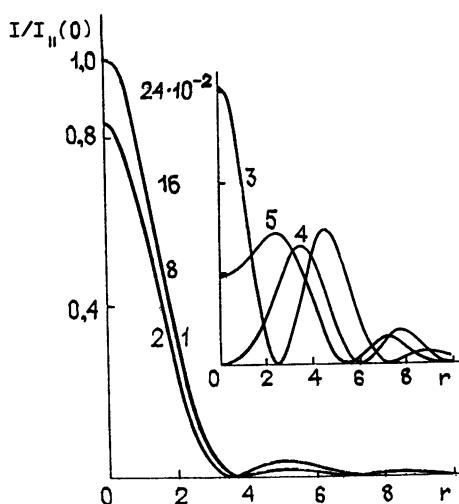


Рис. 1. Распределение интенсивности светового поля при дифракции на изолированном ЦМД;
 I_{\parallel} — кривая 1, I_{\perp} — кривые 2—5 ($p_2 = 5$,
 $p_3 = 2$, $p_4 = 1,4$, $p_5 = 1,25$).

Распределение поля с первоначальной поляризацией не зависит от размера ЦМД, а определяется только R_0 , тогда как для ортогональной поляризации изменение p приводит к перераспределению энергии светового поля между дифракционными порядками; при $p = 1,4$ нулевой максимум исчезает (кривая 4) и вся энергия светового поля с ортогональной поляризацией концентрируется в кольцевое изображение.

Интенсивность дифракционного поля обеих поляризаций сильно зависит от величины магнитооптического параметра Q_0 : с его увеличением составляющая поля с поляризацией падающего излучения уменьшается и растет составляющая с ортогональной поляризацией.

Полученные результаты легко объяснимы. Плоскополяризованный свет, проходящий через магнитную пластинку с доменной структурой рассматриваемого типа (ширина доменной стенки равна нулю, вектор намагниченности имеет только составляющую $M_z = \pm M_0$), претерпевает поворот плоскости поляризации, причем области с противоположной намагниченностью врашают ее в противоположных направлениях. Вследствие этого в прошедшей волне возникает компонента поляризации, ортогональная к падающей, у которой величина электрического вектора постоянна, а фаза меняется при переходе от домена к домену на π . При этом составляющая поля, прошедшего через пластинку, с поляризацией падающей волны оказывается немодулированной доменной структурой, поэтому она не испытывает дифракции на доменной структуре, а дифрагирует на отверстии, ограничивающем освещаемый

участок образца. Составляющая поля с ортогональной поляризацией оказывается промодулированной, что и приводит к ее дифракции на доменной структуре.

4. Рассмотрим теперь дифракцию плоскополяризованного света на магнитной пластинке с доменной структурой, представляющей плоскую гексагональную решетку, в узлах которой находятся цилиндрические домены с направлением намагниченности, обратным направлению намагниченности остальной области образца. Введем по аналогии с кристаллической решеткой плоскую «элементарную» ячейку Вигнера — Зейтца, содержащую единичный ЦМД и отражающую симметрию решетки (рис. 2). Вся решетка может быть образована путем последовательного сдвига ячейки на всевозможные векторы трансляции. Матрица пропускания решетки может быть представлена с помощью операции свертки передаточной функции точечной решетки $g(x, y)$ и

матрицы пропускания «элементарной» ячейки $\hat{\tau}_0$, т. е. $\hat{\tau} = g * \hat{\tau}_0$. С помощью (2) матрица пропускания ячейки может быть представлена в виде $\hat{\tau}_0 = \hat{t} \operatorname{circ}\left(\frac{\rho}{r_s}\right)$, где круговая функция равна единице внутри круга

радиуса r_s и нулю — вне его. Параметр $r_s = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)^{1/2}$ представляет радиус круга, аппроксимирующего «элементарную» ячейку; характер распределения дифрагированного на регулярной ЦМД-структуре поля должен существенно зависеть от этого параметра. Если освещаемый участок решетки ограничен прямоугольником со сторонами L_1 и L_2 ,

содержащим $\frac{L_1 L_2}{\pi r_s^2}$ цилиндрических доменов, то функция

$$g(x, y) = \sum_{n, m} \delta\left(x - n \frac{a}{2} - ma\right) \delta\left(y - n \frac{\sqrt{3}}{2} a\right), \quad (8)$$

где a — параметр решетки, $\delta(a)$ — дельта-функция Дирака, а n и m пробегают значения, соответствующие доменам выбранной области.

На выходной поверхности образца с ЦМД-структурой распределение поля дается выражением $E_r = g * \hat{\tau}_0 E_0$, фурье-образом которого определяется дифрагированное поле. Проводя вычисления, получаем для дифрагированного поля выражение (4). Диагональные элементы \hat{T} -матрицы имеют при этом следующий вид:

$$T_{xx}(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0 \cos \gamma Q_0}{\pi k_0 x_0 y_0} \sin \frac{L_1 k_0 x_0}{z_0} \sin \frac{L_2 k_0 y_0}{z_0}, \quad (9)$$

а недиагональные с учетом теоремы о свертке представим в виде

$$T_{xy} = \frac{r_s}{\rho_0} \sin \gamma Q_0 \left[J_1 \left(\frac{k_0 \rho_0 r_s}{z_0} \right) - \frac{d}{r_s} J_1 \left(\frac{k_0 d \rho_0}{2z_0} \right) \right] F\{g\}, \quad (10)$$

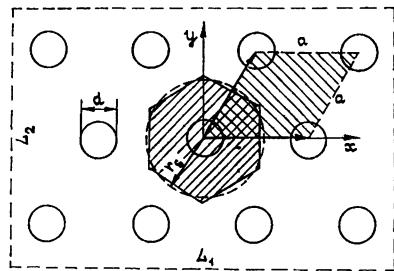


Рис. 2. Плоская гексагональная решетка ЦМД (заштрихованы «элементарные» ячейки).

где $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, а $F\{g\}$ — фурье-образ функции $g(x, y)$. Как известно, фурье-образ гексагональной точечной решетки с параметром a также представляет собой гексагональную решетку с периодом $a_0 = \frac{4\pi z_0}{\sqrt{3}ak_0}$.

Так, в случае бесконечной решетки

$$F\{g\} = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x_0 + n \frac{\sqrt{3}}{2} a_0\right) \delta\left(y_0 + n \frac{a_0}{2} - ma_0\right), \quad (11)$$

тогда как для решетки ограниченной максимумы функции $F\{g\}$ перестают быть δ -образными и становятся более плавными. Кроме того, появляется ряд дополнительных максимумов. Для рассматриваемого нами прямоугольного отверстия, содержащего $N \times M$ узлов решетки, имеем

$$F\{g\} = \frac{\sin \frac{N\pi}{a_0} \left(\frac{x_0}{\sqrt{3}} + y_0 \right) \sin \frac{2\pi M}{a_0 \sqrt{3}} x_0}{\sin \frac{\pi}{a_0} \left(\frac{x_0}{\sqrt{3}} + y_0 \right) \sin \frac{2\pi x_0}{a_0 \sqrt{3}}}, \quad (12)$$

где N и M для простоты приняты нечетными. Интенсивность светового поля в дифракционной картине может быть определена по формуле (7). Как следует из соотношений (9) — (12), дифрагированное поле представляет суперпозицию двух ортогонально поляризованных компонент. Распределение поля с поляризацией падающей волны аналогично распределению светового поля при обычной дифракции на прямоугольном отверстии со сторонами L_1 и L_2 . В случае круглого отверстия вместо (9) мы имели бы для этой поляризации обычную картину Эйри, определяющуюся выражением (5). Дифракцию на доменной структуре характеризует распределение поля с ортогональной поляризацией. Как следует из (10) и (12), дифракционные максимумы поля с этой поляризацией расположены в узлах гексагональной решетки, являющейся фурье-образом решетки доменов; в плоскости наблюдения z_0 ее параметр равен a_0 . Нулевой порядок дифракционного спектра расположен в точке $x_0 = y_0 = 0$; первый порядок содержит шесть максимумов, отстоящих от нулевого на расстояние $\rho_1 = a_0$; второй порядок содержит также шесть максимумов, отстоящих от нулевого на расстояние $\rho_2 = \sqrt{3}a_0$; третий порядок содержит шесть максимумов на расстоянии $\rho_3 = 2a_0$ от нулевого; четвертый порядок содержит двенадцать максимумов и т. д. Кроме основных максимумов за счет ограниченности решетки в спектре могут появляться побочные и исчезать основные максимумы. Характер дифракционной картины существенным образом зависит от двух параметров — диаметра цилиндрического домена d и радиуса «элементарной» ячейки r_s (или параметра решетки a). Анализ этой зависимости (без разделения поляризаций) довольно полно проделан в работе [5]. Изменение соотношения между указанными параметрами приводит к перераспределению энергии светового поля между порядками дифракционного спектра. Зависимость этих параметров от внешних магнитных полей позволяет управлять характером дифракционного спектра [5] и использовать эти явления, так же как и поляризационные, в оптической обработке информации.

5. При определенных условиях (взаимная ориентация поверхности и оптической оси кристалла, направление внешнего поля) устойчивой формой ЦМД является не круговая, а эллиптическая. Полученные соот-

ношения легко могут быть обобщены и на этот случай. Если решетка из ЦМД эллиптической формы также является гексагональной с параметром a , распределение магнитооптического параметра внутри ячейки Вигнера—Зейтца может быть представлено в виде

$$Q_1^1 = Q_0 \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} \right), \quad (13)$$

где p и q — размеры полуосей эллиптического домена. Для освещаемого участка со сторонами L_1 и L_2 дифрагированное поле может быть представлено с помощью формулы (4), где диагональные элементы матрицы определяются соотношением (9), а недиагональные —

$$T_{xy} = \sin \gamma Q_0 \left[\frac{r_s}{p_0} J_1 \left(\frac{k_0 p_0 r_s}{z_0} \right) - 2pq \frac{J_1 \left(\frac{k_0}{z_0} \sqrt{p^2 x_0^2 + q^2 y_0^2} \right)}{\sqrt{p^2 x_0^2 + q^2 y_0^2}} \right] F\{g\}. \quad (14)$$

Проводя анализ этих соотношений, легко показать, что осевая симметрия дифракционного спектра нарушается, при этом ось шестого порядка становится осью второго порядка. Изменение соотношения между p и q должно приводить к перераспределению энергии светового поля между максимумами в пределах одного дифракционного порядка. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными [4].

Таким образом, распределение интенсивности и поляризации светового поля в дифракционном спектре существенным образом зависят от характера магнитной структуры. Магнитооптические дифракционные эффекты на регулярных ЦМД-структурных могут служить методом исследования распределения намагниченности в таких структурах, а также могут быть использованы при решении прикладных задач оптической обработки информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Телесин, Л. И. Кошкин, Т. И. Нестреляй, А. Г. Шишков, Н. А. Экономов, ФТТ, 13, 361 (1971).
2. Н. Haskal, IEEE Trans. Mag., 6, 542 (1970).
3. Д. И. Семенцов, А. М. Морозов, Изв. вузов — Физика, 2, 67 (1975); 5, 64 (1975).
4. K. R. Parworth, Phys. Stat. Sol., ser. A, 22, 373 (1974).
5. А. В. Антонов, И. А. Игнатьев, К. О. Бондарь, ФТТ, 17, 1071 (1975).
6. А. В. Антонов, А. М. Балбашов, В. А. Балтинский, А. Я. Червонен-кий, Письма в ЖЭТФ, 15, № 4, 182 (1972).
7. А. Папулис, Теория систем и преобразований в оптике, М., 1971.

Северо-Осетинский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 мая 1977 г.

DIFFRACTION BY CYLINDRICAL MAGNETIC DOMAINS

D. I. Sementsov, A. M. Morozov

The peculiarities of the light diffraction by the magnetic lattices with cylindrical and elliptical domains are considered. Analytical expressions are obtained for diffracted field in the case of a plane hexagonal lattice. The polarization of the light field in the diffraction pattern has been analysed.

УДК 621.373

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ И СТАТИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ НА СТАРТОВЫЕ ТОКИ ГЕНЕРАТОРА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

A. I. Цвыйк

При построении линейной и нелинейной теории [1, 2] генераторов, работающих на эффекте дифракционного излучения, предполагалось, что электроны пучка движутся по прямолинейным траекториям.

В данной работе в линейном приближении проведены теоретические и экспериментальные исследования влияния на стартовые токи генератора дифракционного излучения статических и динамических смещений электронов, которые обусловлены действием рассеивающих линз в области электронной пушки и взаимодействием электронного потока с поперечной высокочастотной (ВЧ) составляющей электромагнитного поля

Пусть в объеме плоского резонатора [2] движется ленточный электронный поток с заданными статическими траекториями электронов:

$$z = z_0 + R \cos \frac{2\pi}{\lambda_c} y, \quad R = gz_0, \quad g = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь i, j, k — орты прямоугольной системы координат, выбранной таким образом, что ось $0y$ совпадает с осью электронного пучка; ось $0x$ параллельна образующим решетки, $0z$ — перпендикулярна зеркалам резонатора, расположенным в плоскостях $z = b$ (без решетки), $z = -a = -(z_k + p)$ (с отражательной решеткой типа «гребенки»); $z_0, z_q, R, R_q, \lambda_c$ — равновесная траектория, амплитуда и длина волны пульсаций электронов пучка (индекс « q » относится к граничным электронам); $v_e = jV2\eta U_0$ — скорость электронов, z_k — полутолщина катода, p — прицельный параметр (расстояние от периодической структуры до нижней границы катодной щели); l — период решетки.

В общем случае решение задачи можно провести строгим методом [3]. Однако в некотором приближении это решение можно упростить путем подстановки (1) в поле «холодного» резонатора [2] (с сохранением поперечной составляющей ВЧ-поля) и задачу о взаимодействии криволинейного потока (1) свести [4] к решению о взаимодействии эквивалентного прямолинейного пучка с неоднородным ВЧ-полем. Дальнейшее решение задачи проводится аналогично тому, как это сделано в [5] (гл. IV). В этом случае с учетом синхронного взаимодействия электронного потока с основной пространственной гармоникой поля резонатора пусковой ток генератора определяется следующим соотношением (ток — в миллиамперах, U_0 — в вольтах):

$$J_{ct} = 2,54 \cdot 10^{-2} \frac{U_0^{3/2}}{Q} \frac{Vz_k}{L^3} \frac{\exp [-2\gamma(z_q + p)]}{[F_{1a}(\Phi_0) + F_{2a}(\Phi_0, \varphi_c)] \int_{-z_1}^{z_q} J_0^2(\gamma R) e^{-2\gamma z_0} dz_0}, \quad (1a)$$

где $\gamma = 2\pi/l$; L — длина пространства взаимодействия; V , Q — объем и нагруженная добротность резонатора; функции $F_{1a}(\Phi_0)$, $F_{2a}(\Phi_0, \varphi_c)$ определены в [5]; I_0 — модифицированная функция Бесселя; интегрирование в (1) производится по равновесным траекториям электронного потока, при этом нижний предел интеграла зависит от соотношения между прицельным параметром p и амплитудой пульсаций траектории граничных электронов (если $p \geq R_q$, то $z_1 = z_q$, а при $p < R_q$, $z_1 = z_q + p - R_q$ — учитывается токооседание на решетку).

Рассмотрим частные случаи.

1. Для углов пролета Φ_0 , φ_c , когда $F_{1a}(\Phi_0) > F_{2a}$, влияние высокочастотных смещений на пусковой ток незначительно. Величина пускового тока в основном определяется мощностью взаимодействия электронного потока с продольной составляющей ВЧ-поля, а минимальное значение (1) примерно достигается при $\Phi_0 = \pi$, $\varphi_c \geq 4\pi$. В этом случае для стартового тока генератора (при $g \leq l/2\pi z_k$) легко получить следующие асимптотические приближения:

$$J_{ct} = 0,8 \frac{U_0^{3/2}}{Q} \frac{V}{L^3} \frac{z_k}{l} \frac{e^{2\gamma p}}{1 + (g^2/8)(1 - 2\gamma z_k + 2\gamma^2 z_k^2)} \quad (R_q \ll p); \quad (2)$$

$$J_{ct} = 0,8 \frac{U_0^{3/2}}{Q} \frac{V}{L^3} \frac{z_k}{l} \frac{\exp(2\gamma z_k g)}{1 + (g^2/8)[1 + 2(\gamma z_k - \gamma z_k g + \gamma p)(\gamma z_k - \gamma z_k g + \gamma p - 1)]} \quad (R_q \geq p). \quad (2a)$$

Эти соотношения (при заданных параметрах генератора и электронно-оптической системы) могут быть использованы для оценки стартового тока генератора ($\varphi_c \geq 4\pi$). Погрешность формул (2) по сравнению с (1) примерно составляет 10% при $\gamma p \leq 0,3\pi$, $g \leq 0,7$.

На рис. 1 приведены зависимости пускового тока (1) от амплитуды пульсаций статических траекторий граничных электронов ($g = R_q/z_k$) при различных значениях параметров γp и углов пролета $\Phi_0 = \pi$, $\varphi_c = 4\pi$ ($K = \frac{QL^3}{U_0^{3/2} V}$). Если

$$\gamma p = 0, \text{ то пусковой ток нарастает}$$

с увеличением амплитуды пульсаций пучка, что обусловлено оседанием электронов на дифракционную решетку. Для приподнятого пучка ($p \neq 0$) увеличение амплитуды пульсаций до значений $R_q = p$ приводит вначале к уменьшению J_{ct} , а затем, при $R_q > p$, стартовый ток нарастает.

2. Если $F_{1a}(\Phi_0) = 0$ (случай «чисто поперечного» взаимодействия), пусковой ток имеет минимальное значение при $\Phi_0 = \varphi_c = 2\pi$, но величина его примерно в 3—4 раза выше, чем в первом случае.

3. Когда $\varphi_c < 4\pi$, на пусковой ток влияют как динамические, так и статические смещения электронов. Для $\varphi_c = 0$, $\Phi_0 = \pi$ пусковой ток имеет минимальные значения (в реальных приборах с магнитной фокусировкой $\varphi_c \neq 0$). Увеличение φ_c при наличии статических пульсаций приводит к уменьшению амплитуды R_q и к уменьшению влияния

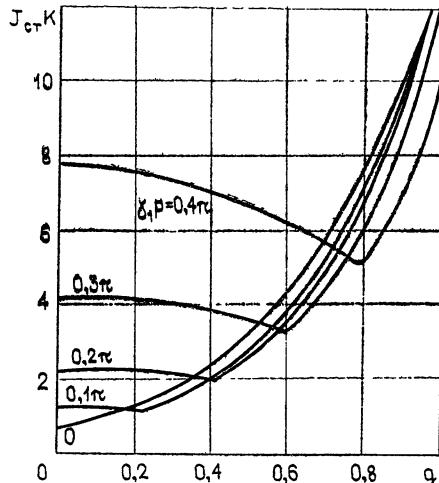


Рис. 1.

на J_{ct} ВЧ-смещений электронов (величина $F_{2a}(\Phi_0, \varphi_c)$ уменьшается), что вызывает увеличение стартового тока генератора.

Для упрощения анализа предположим, что ленточный поток создается неэкранированной от магнитного поля диодной пушкой и амплитуда пульсаций граничных электронов определяется формулой [6]

$$R_q (\text{мм}) = 22,5 \frac{\sqrt{U_0(B) z_h}}{B(Gc)} \frac{d}{d}, \quad (3)$$

где (3) записано с учетом размерностей, d — расстояние между катодом и анодом электронной пушки.

На рис. 2 приведены графики зависимости тока (1) от φ_c при $z_h/d = 0,03$ (пунктирные линии), $z_h/d = 0,125$ (сплошные линии) и различных значениях прицельного параметра. Как следует из графиков,

характер этих зависимостей при изменении параметра z_h/d меняется незначительно. Однако увеличение отношения z_h/d (амплитуды R_q) приводит к смещению этих зависимостей в сторону больших по величине значений φ_c , где влиянием динамических смещений на стартовый ток можно пренебречь (например, для $z_h/d = 0,125$). При «малых» значениях z_h/d (в частности, $z_h/d = 0,03$) для $\varphi_c \leq 4\pi$ на пусковой ток влияют как динамические, так и статические смещения (на графиках в области минимального значения J_{ct} наблюдается более крутой спад стартового тока).

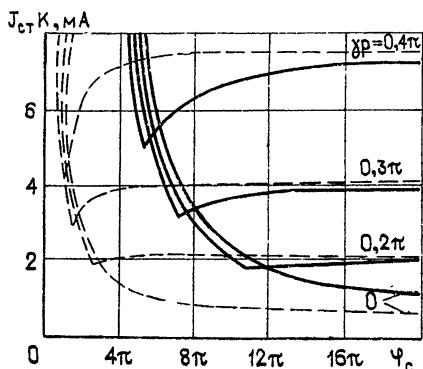


Рис. 2.

Проведенные теоретические исследования проверялись экспериментально на макете генератора. Открытый резонатор прибора образован сферическим зеркалом с радиусом кривизны 110 мм и плоским зеркалом с дифракционной решеткой. Ленточный электронный поток сечением $5 \times 0,2 \text{ мм}^2$ создавался неэкранированной от фокусирующего магнитного поля диодной пушкой. Исследования проводились в миллиметровом диапазоне ($\lambda = 3,8 \div 5,6 \text{ мм}$).

На рис. 3 приведены теоретические и экспериментальные зависимости пускового тока от величины фокусирующего магнитного поля. Экспериментальные результаты получены при $z_h = 0,1 \text{ мм}$, $d = 0,8 \text{ мм}$, $U_0 = 2,5 \text{ кВ}$, $\lambda = 4,06 \text{ мм}$, $p = 0$, $r = 0,06 \text{ мм}$. Теоретические зависимости рассчитывались при $Q = 8000$, $L = 16 \text{ мм}$, $z_h/d = 0,125$, $V = L^3$, что примерно соответствовало данным исследуемого генератора в случае возбуждения в резонаторе TEM_{02q} -вида колебания [1].

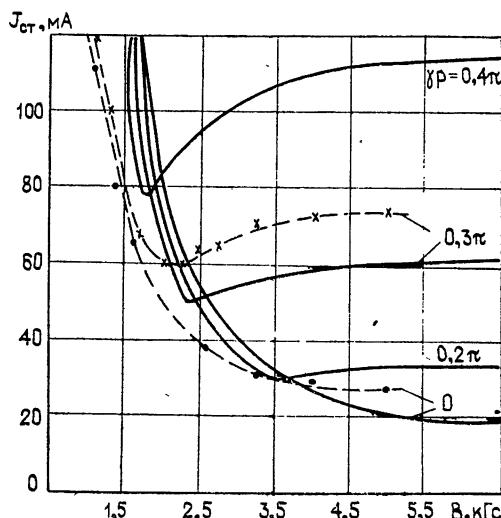


Рис. 3.

Из приведенных графиков следует неплохое качественное и количественное согласование теории и эксперимента. Генератор возбуждается при $\varphi_c \geqslant 3,5\pi$, т. е. на стартовый ток влияют как динамические, так и статические смещения электронов. Однако в области минимума тока ($B \approx 2 \div 2,5 \text{ кГс}$) для приподнятого пучка $\varphi_c \approx (5 \div 6)\pi$. Поэтому нарастание пускового тока с увеличением B ($B \geqslant 2,5 \text{ кГс}$) обусловлено, в основном, статическими смещениями. При значениях $3,5\pi \leqslant \varphi_c \leqslant 5\pi$ ($B \approx 1,25 \div 2 \text{ кГс}$) электронный поток оседает на дифракционную решетку ($R_q > p$), что приводит с уменьшением B также к увеличению пускового тока генератора.

В заключение отметим, что при $R_q = 0$, $B = \infty$ формула (1) совпадает с пусковым током, полученным в [2] в случае малого пространственного заряда, а при $R_q = 0$, $z_h = 0$ (бесконечно тонкий пучок) — с формулой работы [7], где указано существенное расхождение теории и эксперимента при «слабых» фокусирующих магнитных полях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопалов, Дифракционная электроника, изд. Вища школа, Харьков, 1976.
2. Ф. С. Русин. Электроника больших мощностей, изд. Наука, М., сб. 5, 9 (1968).
3. А. В. Гапонов, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 3, 443 (1959).
4. В. С. Андрушкевич, Вопросы электроники СВЧ, изд. Саратовского ун-та, вып. 1, 35 (1964).
5. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1970.
6. И. М. Алямовский, Электронные пучки и электронные пушки, изд. Сов. радио, М., 1966, стр. 94.
7. В. А. Исаев, Межвузовский научный сборник, Вопросы электроники. СВЧ, изд. Саратовского ун-та, № 9, 11 (1976).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
15 сентября 1975 г.,
после переработки
23 сентября 1977 г.

INFLUENCE OF THE DYNAMIC AND STATIC ELECTRON SHIFTINGS ON THE GENERATOR STARTING CURRENTS OF THE DIFFRACTION RADIATION

A. I. Tsvyk

When the linear and nonlinear theories [1,2] of generators based on the effect of the diffraction radiation being developed it is assumed that the beam electrons move on straightforward trajectories. In the given paper in the linear approximation the theoretical and experimental investigations are given of the influence of the diffraction radiation of the static and dynamic electron shiftings on the generator starting currents. These shiftings are due to the action of scattering lenses in the region of the electron gun and to the interaction of the electron flux with the transverse high frequency component of the electromagnetic field.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 551.510 535

**О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ
В ИОНОСФЕРЕ ПО РАССЕЯНИЮ РАДИОВОЛН НА ИСКУССТВЕННЫХ
НЕОДНОРОДНОСТЯХ ПЛАЗМЫ**

*B. B. Беликович, E. A. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев,
M. A. Иткина, Г. И. Терина, A. B. Толмачева*

При вертикальном зондировании ионосферы на частотах, меньших критической частоты, структура поля ниже уровня отражения, как известно, имеет вид стоячих волн. При достаточной мощности радиоизлучения такое распределение поля вызывает появление слабых искусственных неоднородностей ионосферной плазмы, повторяющих структуру стоячих волн. Эти неоднородности были обнаружены экспериментально по эффекту обратного рассеяния пробных волн [1].

В [2] было показано, что переходные процессы в плазме, возникающие при включении и выключении мощного передатчика, могут быть использованы для нахождения электронной и ионной температур в F-области ионосферы. В настоящем сообщении мы хотим обратить внимание на то, что явление рассеяния пробных волн на искусственных квазипериодических неоднородностях можно использовать для определения концентрации электронов в ионосфере.

Обратное рассеяние пробных волн на квазипериодической структуре носит резонансный характер. Его интенсивность резко возрастает с приближением пространственного периода неоднородностей к половине длины пробной волны. Иначе говоря, максимум интенсивности обратного рассеяния достигается при условии

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (1)$$

где λ_1 и λ_2 — длины волн в ионосфере возмущающего и пробного радиоизлучения. Для нас интересен тот случай, когда условие (1) выполняется для разных нормальных компонент возмущающей и пробной волн (т. е. когда одна из них распространяется в виде обычной, а другая — в виде необыкновенной волны). Тогда, вводя в рассмотрение диэлектрическую постоянную ϵ , получаем вместо (1)

$$f_1^2 \epsilon_1^\pm = f_2^2 \epsilon_2^\mp, \quad (2)$$

где f_1 и f_2 — рабочие частоты возмущающего и пробного передатчиков.

Соотношение (2) дает в общем виде связь между концентрацией электронов N в месте формирования обратно рассеянного сигнала и рабочими частотами f_1 и f_2 . В явном виде эта связь довольно просто при квазипротодольном распространении радиоволн, когда из (2) получаем

$$f_0^2 = \frac{f_i^2 - f_j^2}{(f_i - f_L)f_i} - \frac{(f_j + f_L)f_j}{(f_i - f_L)^2 + \left(\frac{v}{2\pi}\right)^2} - \frac{(f_j + f_L)^2}{(f_j + f_L)^2 + \left(\frac{v}{2\pi}\right)^2}. \quad (3)$$

Здесь f_i — наибольшая из частот f_1 и f_2 , а f_j — соответственно наименьшая частота, f_L — продольная составляющая гирочастоты и v — эффективная частота соударений электронов. Если $(v/2\pi)^2 \ll (f \pm f_L)^2$, то вместо (3) имеем

$$f_0^2 = \frac{\Delta f}{f_L} (f_i^2 - f_L^2) - \frac{(\Delta f)^2}{f_L} (f_j + f_L), \quad (4)$$

где обозначено $\Delta f = f_i - f_j$.

Перестраивая одну или обе частоты передатчиков и измеряя действующую высоту h_d , с которой приходит рассеянный сигнал, можно по соотношению (2) или (для квазипродольного распространения) по соотношениям (3), (4) получать зависимость $N(h_d)$. Нижний предел нахождения N определяется минимальной разностью частот Δf передатчиков, а верхний предел соответствует уровню отражения мощной волны. Пересчет $N(h_d)$ в истинный профиль $N(h)$ аналогичен известной процедуре нахождения $N(h)$ по ионограммам вертикального зондирования, причем эта задача облегчается на высотах, где $f_2^2 \gg f_0^2$, поскольку на этих высотах запаздывание мало и $N(h_d)$ практически совпадает с истинным профилем электронной концентрации.

Реализация рассматриваемого метода определения $N(h)$ возможна лишь при мощности, достаточной для обнаружения интенсивности обратно рассеянного сигнала. В [1, 2] эксперименты проводились на частотах $f_1 = 4,6 \text{ МГц}$ (обыкновенная компонента) и $f_2 = 5,5 \div 5,7 \text{ МГц}$ (необыкновенная компонента). Условие (1) выполнялось для $f_0 \approx 4 \div 4,5 \text{ МГц}$ (F — область ионосферы), рассеянный сигнал наблюдался довольно регулярно.

Нами были проведены дополнительные эксперименты по обнаружению эффекта рассеяния пробных волн на более низких высотах. Возмущающий передатчик излучал необыкновенную компоненту на частоте 5,75 МГц, а передатчик пробных волн, как и ранее, работал в диапазоне 5,5—5,7 МГц. Согласно (4) обратное рассеяние должно было в этом случае формироваться в области плазменных частот от 1,1 до 2,4 МГц, т. е. на высотах E -области.

Эксперименты показали в ряде случаев довольно интенсивное рассеяние (см. подобнее [3]) с высот порядка 130—170 км (высоты провала ионизации между слоями E и F).

Таким образом, можно ставить вопрос о реализации предлагаемого метода по крайней мере в области высот выше максимума E -слоя. Наиболее интересны измерения электронной концентрации в провале ионизации между слоями E и F . Можно надеяться, что этот метод может быть в дальнейшем применен и на высотах ниже максимума E -слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Ю. А. Игнатьев, Г. П. Комраков, Письма в ЖЭТФ. 22, вып. 10, 497 (1975).
2. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Н. А. Митяков, Г. И. Терина, А. В. Толмачева, П. В. Шавин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1821 (1977).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. И. Терина, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 декабря 1977 г.