ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXI, № 7 РАДИОФИЗИКА 1978

УДК 538.56 : 519.25

ОБ ОДНОМ СТАТИСТИЧЕСКОМ ВАРИАНТЕ АНАЛИЗА ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. И. Саичев

Приводится один из возможных вариантов методов, позволяющих выразить статистические свойства случайных процессов, удовлетворяющих стохастическим уравнениям с двухточечными граничными условиями, через вероятностные распределения процессов, удовлетворяющих условиям Коши. Полученные формулы связи позволяют существенно расширить круг статистических задач, к которым применим мощный аналитический аппарат уравнений типа Эйнштейна — Фоккера — Планка. Особое внимание уделяется часто встречающейся ситуации, когда двухточечная граничная задача, в отличие от задачи Коши, имеет несколько решений. В качестве примера, иллюстрирующего общие результаты статьи, рассмотрены флуктуации углов световой волны, прошедшей слой случайно-неоднородной среды.

Для многих задач теории случайных процессов и волн характерно задание граничных условий в двух различных точках (см., например, [1]). При этом нарушается условие причинности, которое существенно используется такими мощными методами статистического анализа, как метод уравнений Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП), метод моментов в теории случайных волн и т. д. [1]. Для применения этих методов к двухточечным краевым задачам статистической физики важно сформулировать удовлетворяющую условию причинности вспомогательную стохастическую задачу, по статистике которой можно было бы восстановить статистику исходной двухточечной краевой задачи. Подобный подход к анализу статистики двухточечных краевых задач применялся в работе [2]. Однако в ней не был разобран важный вопрос о возможной неоднозначности решения двухточечной граничной задачи.

В данной работе предлагается еще один из возможных методов сведения двухточечной краевой стохастической задачи к задаче Коши, удовлетворяющей условию причинности. Подробно анализируется случай, когда рассматриваемая двухточечная краевая задача может иметь сразу несколько решений. Общие результаты статьи иллюстрируются на конкретном примере. Заметим, что идеи сведения двухточечных граничных стохастических задач к задачам Коши могут быть реализованы в различных физических и математических формах. Так, найденные в работах [3–6] связи статистических свойств случайных волн в лагранжевом и эйлеровом представлениях являются, по существу, частным случаем приводимых ниже формул, где роль задачи Коши играет волна в лагранжевом представлении, а двухточечной граничной задачи — волна в эйлеровом представлении.

1. О СВЯЗИ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ЗАДАЧИ КОШИ

1. Многие задачи статистической физики приводят к системе дифференциальных уравнений с граничными условиями, заданными в нескольких точках. Для определенности рассмотрим здесь систему двух уравнений для $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$:

$$\dot{v} = F(v,\ t) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$v_\alpha(0)\, b_{\alpha\beta} + v_\alpha(T)\, c_{\alpha\beta} + d_\beta = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2). \tag{1.2}$$

Здесь $F(v,\ t)$ — случайные функции своих аргументов, $b_{\alpha,\beta}$, $c_{\alpha,\beta}$, $d_{\alpha,\beta}$ — известные числа.

Поставим вспомогательную задачу Коши, решая уравнения (1.1) с граничными условиями

$$v(0) = a. \tag{1.3}$$

Будем считать, что уравнения (1.1) удовлетворяют условиям Липшица и имеют единственное решение с условиями (1.3):

$$v = v(t,\ a).$$

Рассмотрим еще функции $u_\alpha = (u_{1\alpha},\ u_{2\alpha})$:

$$u_\alpha = \frac{\partial v(t,\ a)}{\partial a_\alpha},$$

удовлетворяющие, как видно из (1.1), (1.3), уравнениям

$$\dot{u}_\alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial v}\, u_\alpha\right) \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$u_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

Необходимость введения этих функций для нахождения связей между статистикой двухточечной граничной задачи и задачи Коши будет видна ниже.

2. Рассмотрим двухмоментное вероятностное распределение решений задачи Коши:

$$f_2[A,\ u_1,\ u_2,\ v;\ t,\ T,\ a] = \langle \delta[A - v(T,\ a)] \times$$
$$\times\, \delta[u_1 - u_1(T,\ a)]\, \delta[u_2 - u_2(T,\ a)]\, \delta[v - v(t,\ a)]\rangle.$$

Введем интеграл от этого распределения:

$$g(u_1,\ u_2,\ v;\ t,\ T) = \int d\,a\,d\,A\, \delta[a_\alpha b_{\alpha 1} + A_\alpha c_{\alpha 1} + d_1] \times$$
$$\times\, \delta[a_\alpha b_{\alpha 2} + A_\alpha c_{\alpha 2} + d_2]\, \langle \delta[A - v(T,\ a)] \times \tag{1.6}$$
$$\times\, \delta[u_1 - u_1(T,\ a)]\, \delta[u_2 - u_2(T,\ a)]\, \delta[v - v(t,\ a)]\rangle.$$

Произведение первых четырех дельта-функций в этом интеграле выкалывает из всех возможных решений задачи Коши только те, которые удовлетворяют двухточечным граничным условиям (1.2).

В общем случае двухточечная граничная задача может иметь не одно, а несколько решений $v_1(t, T), \ldots, v_N(t, T)$ и т. д. Причем число решений N — случайная величина, зависящая от статистических свойств правых частей уравнений (1.1). Поэтому интеграл (1.6) в общем случае равен

$$g(u_1,\ u_2,\ v;\ t,\ T) = \frac{1}{|J|}\left\langle \sum_{n=1}^{N} \delta[u_1 - u_{1n}(T)] \times\right.$$
$$\left.\times\, \delta[u_2 - u_{2n}(T)]\, \delta[v - v_n(t,\ T)]\right\rangle. \tag{1.7}$$

Здесь $v_n(t, T)$, $u_{\alpha n}(T)$ — n-ые из N решений уравнений (1.1), (1.4) с условиями (1.2), (1.5),

$$J = \begin{vmatrix} b_{11} + u_{\alpha 1} c_{\alpha 1}; & b_{21} + u_{\alpha 2} c_{\alpha 1} \\ b_{12} + u_{\alpha 1} c_{\alpha 2}; & b_{22} + u_{\alpha 2} c_{\alpha 2} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Усреднив (1.7) по случайному числу решений, получим окончательно

$$g(u_1, u_2, v; t, T) = \\ = \frac{1}{|J|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; T) \sum_{n=1}^{N} w_n [v, u_1, u_2; t, T \mid N]. \tag{1.9}$$

Здесь $P(N; T)$ — вероятность того, что двухточечная граничная задача имеет N решений, а $w_n[v, u_1, u_2; t, T \mid N]$ — вероятностное распределение n-го решения двухточечной граничной задачи при условии, что всего решений N. Заметим, что вид функций w_n зависит от способа нумерации решений, полная же сумма, естественно, от нумерации не зависит.

Определим еще функцию

$$w[v; t, T] = \int |J| g(u_1, u_2, v; t, T) du_1 du_2 = \\ = \int \delta [a_\alpha b_{\alpha 1} + A_\alpha c_{\alpha 1} + d_1] \delta [a_\alpha b_{\alpha 2} + \\ + A_\alpha c_{\alpha 2} + d_2] \int du_1 du_2 |J| f_2 [A, u_1, u_2, v; t, T, a] \, da dA. \tag{1.10}$$

Согласно (1.6), (1.9) она равна

$$w[v; t, T] = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; T) \sum_{n=1}^{N} w_n [v; t, T \mid N]. \tag{1.11}$$

Равенства (1.10), (1.11) являются основным результатом предложенной процедуры. Они выражают статистические свойства двухточечной граничной задачи w в момент t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ через вероятностное распределение задачи Коши f_2.

Отметим одно важное свойство функции w. Она нормирована на среднее число решений двухточечной граничной задачи:

$$\int w dv = \sum_{N=1}^{\infty} N P(N; T) = \langle N(T) \rangle. \tag{1.12}$$

В случае, когда двухточечная граничная задача с вероятностью 1 имеет единственное решение, $w[v; t, T]$ — искомое вероятностное распределение решения двухточечной граничной задачи (1.1), (1.2) в момент t.

При $t=0$ и $t=T$ w полностью определяется следующей одномоментной плотностью вероятности решений задачи Коши:

$$f_1 [v, u_1, u_2; T, a] = \langle \delta [v - v(T, a)] \times \\ \times \delta [u_1 - u_1(T, a)] \delta [u_2 - u_2(T, a)] \rangle.$$

Например, при $t=T$ из (1.10) имеем

$$w[v; T, T] = \int da \, du_1 du_2 \delta [a_\alpha b_{\alpha 1} + v_\alpha c_{\alpha 1} + d_1] \times \\ \times \delta [a_\alpha b_{\alpha 2} + v_\alpha c_{\alpha 2} + d_2] |J| f_1 [v, u_1, u_2; T, a]. \tag{1.13}$$

Заметим, что если решение задачи Коши представляет собой марковскую совокупность, то f_2 также выражается через f_1.

2. ПРИМЕР. ОБ ЭЙЛЕРОВОЙ СТАТИСТИКЕ УГЛОВ ПРИХОДА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

1. В качестве примера обсудим некоторые статистические свойства цилиндрической световой волны, прошедшей через случайно-неоднородный слой. Рассмотрим волну в малоугловом приближении геометрической оптики. Предположим еще для простоты, что параметры волны и неоднородности среды зависят от продольной x и одной поперечной координаты y. При этом поперечная координата одного из лучей, в виде совокупности которых можно представить волну, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = v, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial y}. \tag{2.1}$$

Здесь $y(x)$ — поперечная координата луча, $v(x)$ — угол отклонения луча от оси x, $\varepsilon(x, y)$ — случайные гауссовы неоднородности диэлектрической проницаемости среды с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, y_1)\, \varepsilon(x_1 + x, y_1 + y) \rangle = \frac{1}{2} A(y)\, \delta(x)\, [\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}(x - L)],$$

$$A(y) = A - 2Dy^2 + \frac{B}{6} y^4 - \dots .$$

Пусть на слой случайно-неоднородной среды падает цилиндрическая волна, источник которой расположен в точке с координатами $x = -R$, $y = 0$. Определим статистику ее углов прихода в точку $x = L + l$, $y = \rho$. Для этого необходимо решить уравнение (2.1) с двухточечными граничными условиями

$$v(0) = cy(0), \quad lv(L) = \rho - y(L) \quad (c = 1/R). \tag{2.2}$$

2. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши, дополнив уравнения (2.1) граничными условиями

$$y(0) = a_1, \quad v(0) = a_2. \tag{2.3}$$

Введем также функции u. Из (2.2) и линейности уравнений (1.4) по u следует, что в данном случае можно ограничиться двумя функциями u_1, u_2, удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \qquad \frac{du_2}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(x, y)}{\partial y^2} u_1 \tag{2.4}$$

с граничными условиями

$$u_1(0) = 1, \qquad u_2(0) = c. \tag{2.5}$$

При этом J равен

$$J = u_1(L) + lu_2(L).$$

3. Решения уравнений (2.1), (2.4) с условиями (2.3), (2.5) удовлетворяют условию причинности и образуют четырехмерный марковский процесс, переходная плотность вероятности которого $f = f[y, v, u; x, a]$ удовлетворяет уравнению ЭФП (см., например, [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}=\frac{D}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{B}{2}u_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} \tag{2.6}$$

с граничными условиями

$$f[y,\ v,\ \boldsymbol{u};\ 0,\ \boldsymbol{a}]=\delta(y-a_1)\,\delta(v-a_2)\,\delta(u_1-1)\,\delta(u_2-c). \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) следует, что y, v статистически не зависят от $\boldsymbol{u}$ и f распадается на произведение двух функций,

$$f=V[y,\ v;\ x,\ a]\,H(\boldsymbol{u};\ x),$$

каждая из которых удовлетворяет своему уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{D}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2},\quad V[y,\ v;\ 0,\ \boldsymbol{a}]=\delta(y-a_1)\,\delta(v-a_2); \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}+u_2\frac{\partial H}{\partial u_1}=\frac{B}{2}u_1^2\frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2},\quad H[\boldsymbol{u};\ 0]=\delta(u_1-1)\,\delta(u_2-c). \tag{2.9}$$

Запишем теперь функцию $w[v,\rho;\ L,\ l]$, определяющую статистику углов прихода первоначально цилиндрической волны в точку $x=L+l$, $y=\rho$. Согласно (1.13) и вышесказанному она равна

$$w[v;\ \rho,\ L,\ l]=\langle|J|\rangle\int\limits_{-\infty}^{\infty}V[\rho-vl,\ v;\ L,\ a,\ ca]\,da.$$

Здесь $\langle|J|\rangle=\langle|u_1(L)+lu_2(L)|\rangle$ определяется решением уравнения (2.9).

Решив уравнение (2.8), запишем окончательно:

$$w[v;\ \rho,\ L,\ l]=\frac{\langle|J|\rangle}{1+c(L+l)}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(v-\frac{c\rho}{1+c(L+l)}\right)^2\right], \tag{2.10}$$

где

$$\sigma^2=DL\frac{3(1+cL)+c^2L^2}{3[1+c(L+l)]^2}.$$

4. Найденная выше функция w (2.10) не является в общем случае вероятностным распределением, а представляет собой согласно (1.9) взвешенную сумму вероятностных распределений различных решений двухточечной граничной задачи. Существование нескольких решений имеет в рассмотренном примере ясный физический смысл. При распространении волны в случайно-неоднородной среде образуются каустики, в результате чего в данную точку пространства может приходить сразу несколько лучей, имевших при $x=0$ разные поперечные координаты.

Как следует из (1.12), (2.10), среднее число лучей, приходящих в точку $(L+l,\ \rho)$, равно

$$\langle N(L+l)\rangle=\frac{\langle|J|\rangle}{1+c(L+l)}=\frac{\langle|u_1(L)+lu_2(L)|\rangle}{1+c(L+l)}. \tag{2.11}$$

Среднее $\langle|u_1+lu_2|\rangle$ вычислить трудно. Однако можно сделать некоторые оценки $\langle N\rangle$. Заметим, во-первых, что $\langle|J|\rangle\geqslant\langle u_1\rangle+l\langle u_2\rangle$, а $\langle u_1(L)\rangle$, $\langle u_2(L)\rangle$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\langle u_1\rangle}{dL} = \langle u_2\rangle, \quad \frac{d\langle u_2\rangle}{dL} = 0, \quad \langle u_1(0)\rangle = 1, \quad \langle u_2(0)\rangle = c.$$

Отсюда $\langle u_1\rangle + l\langle u_2\rangle = 1 + c(L+l)$. Таким образом,

$$\langle N\rangle \geqslant \frac{\langle u_1(L)\rangle + l\langle u_2(L)\rangle}{1 + c(L+l)} = 1.$$

С другой стороны, из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$\langle N\rangle \leqslant \frac{\sqrt{\langle J^2(L)\rangle}}{1 + c(L+l)}.$$

Из (2.9) легко получить уравнение для $\langle J^2\rangle$,

$$\frac{d^3\langle J^2\rangle}{dL^3} = 2B\langle J^2\rangle, \qquad \langle J^2(0)\rangle = (1+cl)^2,$$

$$\left.\frac{d\langle J^2\rangle}{dL}\right|_{L=0} = 2c(1+cl) + Bl^2, \qquad \left.\frac{d^2\langle J^2\rangle}{dL^2}\right|_{L=0} = 2\left[c^2 + lB(1+cl)\right],$$

а решив его, оценить $\langle N\rangle$ сверху.

5. Обсудим вначале выражение (2.10) в области, где каустики практически отсутствуют, $\langle N\rangle$ достаточно близко к единице и w — вероятностное распределение углов прихода волны в точку ($x = L + l$, $y = \rho$). Отметим, что на расстояниях, много больших R, при $cL \gg 1 + cl$ дисперсия углов прихода цилиндрической волны в данную точку растет как $DL/3$, а при $cl \gg 1 + cL$ даже уменьшается: $\sigma^2 \sim 1/c^2l^2$, в то время как дисперсия углов прихода первоначально плоской волны равна DL. [7]. Такое уменьшение углов прихода цилиндрической волны по сравнению с плоской объясняется влиянием корреляции углов и поперечных координат лучей, пришедших в данную точку.

6. Там, где $\langle N\rangle$ существенно больше единицы, w (см. (2.10)) перестает быть вероятностным распределением. Однако в этом случае вероятностное распределение углов прихода в обычном смысле ввести нельзя и при статистическом описании углов прихода удобнее использовать не вероятностные распределения, а другие сравнительно просто измеримые функции, примером которых может служить статистическая сумма (1.11), имеющая в нашем случае вид

$$w[v;\rho, L, l] = \sum_{N=1}^{\infty} P(N;\rho, L, l)\sum_{n=1}^{N} w_n[v;\rho, L, l\mid N]. \tag{2.12}$$

Здесь w_n — вероятностное распределение углов прихода n-го луча при условии, что всего в данную точку приходит N лучей. Как уже говорилось, вид w_n зависит от способа нумерации лучей. Будем в дальнейшем считать, что они пронумерованы в порядке возрастания (или убывания) углов прихода.

7. Приведем еще одну функцию, описывающую статистику углов прихода волны в области $\langle N\rangle > 1$. Для этого заметим, что при касании каустики расходимость луча J меняет знак. Поэтому для лучей с нечетными номерами, четное число раз коснувшихся каустик, $J > 0$, а для

лучей с нечетными номерами $J<0$. Следовательно, заменив в (2.10) $|J|$ на J, получим функцию

$$\tilde{w}[v;\ \rho,\ L,\ l]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[v-\frac{c\rho}{1+c(L+l)}\right]^2\right\},\tag{2.13}$$

следующим образом выражающуюся через вероятностные распределения разных лучей, приходящих в данную точку:

$$\tilde{w}=\sum_{N=1}^{\infty}P(N;\ \rho,\ L,\ l)\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}w_n[v;\ \rho,\ L,\ l\mid N]\tag{2.14}$$

(см., также, [5]).

Функция $\tilde{w}$ (2.13) нормирована на единицу. Однако, как и w, она не является вероятностным распределением. Зная w и $\tilde{w}$ и учтя, что в любую точку, кроме точек меры нуль (точек каустик), приходит нечетное число лучей, удается определить некоторые из w_n и $P(N)$. Так, если $\langle N\rangle\leqslant 2$, можно, по-видимому, пренебречь возможностью прихода в рассматриваемую точку более чем трех лучей и переписать (2.12), (2.14) следующим образом:

$$w\approx P(1)\,w_1[v;\ \rho,\ L,\ l\mid 1]+P(3)\sum_{n=1}^{3}w_n[v;\ \rho,\ L,\ l\mid 3],$$

$$\tilde{w}\approx P(1)\,w_1[v;\ \rho,\ L,\ l\mid 1]+P(3)\sum_{n=1}^{3}(-1)^{n-1}w_n[v;\ \rho,\ L,\ l\mid 3].$$

Отсюда

$$\frac{w-\tilde{w}}{2P(3)}=w_2[v;\ \rho,\ L,\ l\mid 3]$$

— вероятностное распределение углов прихода «среднего» луча при условии, что в данную точку пришли три луча. Из (2.10), (2.13) видно, что оно имеет гауссову форму (2.13), а

$$P(3)\approx 1-P(1)\approx\frac{\langle N\rangle-1}{2}.$$

Автор благодарен А. Н. Малахову и В. И. Кляцкину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 8, 1165 (1977).
3. А. С. Монин, ДАН СССР, **134**, № 2, 304 (1960).
4. Б. Я. Любимов, ДАН СССР, **184**, № 5, 1069 (1968).
5. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, **19**, № 9, 1368 (1976).
6. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв вузов—Радиофизика, **19**, № 10, 1559 (1976).
7. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, **67**, вып. 9, 2080 (1974).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 марта 1977 г.

ONE STATISTIC VARIANT OF THE IMMERSION METHOD

A. I. Saichev

One of possible statistic variants of the immersion method is presented, which permits to express the statistic properties of random processes satisfying the stochastic equations with two-point boundary conditions through probability distributions of the processes satisfying the Caych's conditions. The formulas of coupling obtained permit to extend a circle of statistic problems which may use a powerful analytical apparatus of Einshtein — Fokker — Plank type equations. Special attention is paid to the situation when (In contrast to the Cauchy's problem) the two-point boundary problem has several solutions. As an example illustrating general results of the paper, the angle fluctuations of a cylindrical wave passed through a layer of the randomly-inhomogeneous medium are considered.