ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXI, № 7 РАДИОФИЗИКА 1978

УДК 621 371.25

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ВЫХОДЯЩИХ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. Г. Денисов

Рассмотрено линейное взаимодействие электромагнитных волн в переходном слое магнитоактивная плазма — вакуум. Получены точные решения уравнений для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн на примере двух моделей переходного слоя. Эти решения позволяют рассчитать эффект взаимодействия волн и определить предельную поляризацию волн, выходящих из слоя плазмы, в котором наряду с градиентом электронной концентрации имеются градиенты числа соударений и внешнего магнитного поля. Указаны условия, при которых в таких системах возможен эффект сильного взаимодействия.

Уравнения поля в плоскослоистой магнитоактивной плазме представляют собой систему двух связанных уравнений второго порядка. Их решение для плавно неоднородной среды описывает независимые нормальные волны двух типов, каждая из которых определяется локальными значениями показателей преломления $n_{1,2}$ и коэффициентов поляризации $K_{1,2}$ [1]. Это решение соответствует приближению геометрической оптики (ГО) и становится неприменимым в окрестности точек отражения $n_{1,2}=0$ и точек «пересечения» $n_1=n_2$. Принято говорить, что в окрестности точек «пересечения» происходит «взаимодействие» волн в плазме, выражающееся в том, что при переходе через область $n_1 \sim n_2$ изменяется представление волнового поля в виде суммы нормальных волн (в терминах ГО) (подробнее см. [1,2]). Особый случай такого взаимодействия имеет место в переходном слое плазма — вакуум, когда в области малых концентраций электронов геометрическая оптика становится неприменимой и ее формальное продолжение в вакуум дает волну с изменяющейся поляризацией (например, при неоднородном внешнем магнитном поле) [1]. Поскольку нормальные волны в вакууме имеют одинаковую фазовую скорость, этот тип взаимодействия определяет лишь предельную поляризацию волн, выходящих из плазменного слоя.

Вопрос о предельной поляризации рассматривался в ряде работ и наиболее полно освещен в монографиях [1,3]. Качественная оценка критического уровня, на котором формируется предельная поляризация, была дана Букером [4] и состоит в том, что на этом уровне

$$|n_2 - n_1| \sim \frac{1}{k_0}\left|\frac{dn_{1,2}}{dz}\right|, \tag{1}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число, и свойства среды изменяются вдоль z. Наиболее полное исследование эффекта предельной поляризации было проведено Бадденом [5].

На основе сравнения членов волнового уравнения и его решения для конкретной модели плазменного слоя Бадден получил уточненные условия для определения критического уровня и формулы, определяющие предельную поляризацию волн. В настоящее время теория Баддена является общепринятой и широко используется как в ионосферных, так и в астрофизических приложениях. Однако результаты работы [5] оказались весьма грубыми, поскольку они были получены путем качественного сравнения параметров, определяющих взаимодействие волн, и на основе решения сильно упрощенных уравнений поля. Ниже проводится анализ уравнений взаимодействующих волн в переходном слое плазмы без тех упрощений, которые были приняты в [5], и получены точные решения этих уравнений, позволяющие рассчитать эффект взаимодействия и определить положение критического уровня в переходном слое, в котором наряду с градиентом электронной концентрации имеются градиенты числа соударений или внешнего магнитного поля.

Исходную систему уравнений для поля плоских волн в плоскослоистой магнитоактивной плазме можно записать в виде [1]

$$F_1'' + [k_0^2 n_1^2(z) + \psi^2] F_1 = -2\psi F_2' - \psi' F_2,$$
$$F_2'' + [k_0^2 n_2^2(z) + \psi^2] F_2 = -2\psi F_1' - \psi' F_1. \tag{2}$$

Здесь штрихи означают производные по координате z, вдоль которой распространяются плоские волны и изменяются свойства среды. Эта система уравнений записана для функций

$$F_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{q}}(E_x \mp qE_y) \sim e^{i\omega t}, \tag{3}$$

где E_x и E_y — компоненты электрического поля в системе координат x, y, z, в которой внешнее магнитное поле H_0 имеет компоненты $H_{0x} = H_{0y}$ и составляет угол ϑ с осью z [6]. Система уравнений (2) определяется показателями преломления $n_{1,2}(z)$ и параметром связи ψ:

$$\psi = \frac{q'}{2q}, \quad q = \left(\frac{1 - i\eta}{1 + i\eta}\right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{1 - v - is}{s_c}, \quad s_c = \frac{u_T}{2\sqrt{u_L}}. \tag{4}$$

Здесь введены стандартные обозначения [1]

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \quad u_T = u\sin^2\vartheta, \quad u_L = u\cos^2\vartheta, \quad s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \tag{5}$$

(ω_0 — плазменная частота, ω_H — гирочастота электронов и $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений электронов с тяжелыми частицами). Заметим, что в выбранной системе координат коэффициенты поляризации нормальных волн равны $K_{1,2} = \pm q$.

«Взаимодействие» волн в области малых значений параметра v отличается от известного взаимодействия в области $v \sim 1$ [1] отсутствием резких изменений параметра связи ψ. При этом эффект взаимодействия медленно накапливается на больших дистанциях и его расчет удобно проводить на основе уравнений для медленно меняющихся амплитуд [1, 3]. Положим

$$F_{1,2} = U_{1,2}(z) \frac{\exp(ik_0 \int n_{1,2} dz)}{n_{1,2}^{1/2}}. \tag{6}$$

Тогда медленно меняющиеся амплитуды $U_{1,2}(z)$ нормальных волн, распространяющихся без отражения в переходном слое, где $n_1 \sim n_2$, будут удовлетворять системе уравнений [5]

$$\begin{aligned} U_1' &= -\psi \exp\left[ik_0 \int (n_2 - n_1)\, dz\right] U_2, \\ U_2' &= -\psi \exp\left[-ik_0 \int (n_2 - n_1)\, dz\right] U_1, \end{aligned} \tag{7}$$

которая сводится к одному уравнению второго порядка:

$$U_1'' - \left[ik_0 (n_2 - n_1) + \frac{\psi'}{\psi}\right] U_1' - \psi^2 U_1 = 0. \tag{8}$$

В двух предельных случаях $\psi = 0$ или $n_2 - n_1 = 0$ система (7) и уравнение (8) имеют простые решения. При $\psi = 0$ $U_{1,2}(z) = \mathrm{const}$, и решение представляется в виде суммы независимых нормальных волн (6). В вакууме $(n_2 - n_1 = 0)$ точное решение (8) имеет вид

$$U_1 = C_1 \exp\left(\int_{z_1}^{z} \psi\, dz\right) + C_2 \exp\left(-\int_{z_1}^{z} \psi\, dz\right) \tag{9}$$

и описывает распространение плоской волны в вакууме, т. е. волну с постоянной поляризацией. С помощью формул (3) и (6) легко показать, что коэффициент поляризации волны с амплитудой (9) равен

$$\frac{E_x}{E_y} = q(z_1) \frac{C_2}{C_1}. \tag{10}$$

Таким образом, решение задачи о предельной поляризации состоит в отыскании предельной формы решения уравнения (8) при $n_2 - n_1 \to 0$.

В области взаимодействия $(v \ll 1)$ можно приближенно записать [1]:

$$\begin{gathered} n_2 - n_1 \approx v \frac{\sqrt{u_L (1 + s_c^2)}}{1 - u}, \qquad n_1 + n_2 \approx 2 \sqrt{1 - \frac{v(2 - u_T)}{2(1 - u)}}, \\ \psi = -\frac{i}{2} \frac{\eta'}{1 + \eta^2} \approx \frac{is_c (v' + is') + is_c'}{2(1 + s_c^2)}. \end{gathered} \tag{11}$$

При этом $n_2 - n_1$ изменяется в основном за счет изменения $v(z)$, а ψ — за счет изменения $s(z)$ (нижняя ионосфера) или s_c' (верхняя ионосфера, солнечная корона). Для нижней ионосферы имеется уровень, который разделяет переходный слой на две области: $n_2 - n_1 > |\psi|$ и $n_2 - n_1 < < |\psi|$ [5]. По этой причине в [5] уравнения решались для следующей модели переходного слоя:

$$n_2 - n_1 = \beta e^{z/H}, \qquad \psi = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Аналогичная ситуация может иметь место и в космических условиях, где параметр ψ в основном определяется градиентом магнитного поля [6].

При $\psi = \mathrm{const}$ подстановкой $U_1(z) = V(z) \exp\left[i \frac{k_0}{2} \int (n_2 - n_1)\, dz\right]$ уравнение (8) приводится к виду [5]

$$V'' + \left[\frac{k_0^2}{4}(n_2 - n_1)^2 + \frac{ik_0}{2}(n_2 - n_1)' - \psi^2\right] V = 0 \tag{13}$$

и задача о взаимодействии волн на границе магнитоактивного слоя сводится к задаче об отражении волн от некоторого изотропного слоя. Структура этого слоя весьма специфична: при $\psi = 0$ он становится «неотражающим» и уравнение (13), как отмечалось выше, имеет простое решение. По этой причине упрощение уравнения (13) может привести к существенному искажению решения.

В работе [4] расчет предельной поляризации волн, выходящих из ионосферного слоя, был проведен для модели слоя (12) на основе уравнения (13), в котором был отброшен член $\frac{ik_0}{2}(n_2 - n_1)'$, и был сделан вывод о том, что критический уровень определяется условием

$$\frac{k_0}{2}(n_2 - n_1) \sim |\psi|. \tag{14}$$

Вместе с тем, такое упрощение задачи не приводит к упрощению ее решения. Если использовать исходную систему уравнений (7) для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн или уравнение (8), то для переходного слоя (12) функция

$$W(\xi) = \xi^{1/2} e^{-\xi/2} U_1, \qquad \xi = ik_0 \beta H e^{z/H}, \tag{15}$$

будет удовлетворять уравнению Уиттекера [7]

$$W'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\xi} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\xi^2}\right) W = 0, \qquad \mu = \psi H. \tag{16}$$

Тогда частное решение уравнения (8), которое при $\xi \to \infty$ имеет пределом постоянное значение, запишется в виде

$$U_1 = \xi^{-1/2} e^{\xi/2}\, W_{1/2,\,\mu}(\xi), \tag{17}$$

так как при $|\xi| \gg 1$ функция Уиттекера имеет асимптотическое представление

$$W_{1/2,\,\mu}(\xi) \sim \xi^{1/2} e^{-\xi/2}, \qquad |\arg \xi| < \pi. \tag{18}$$

Выбранное решение (17) в области $|\xi| \gg 1$ определяет необыкновенную волну (1), которая распространяется в плазме к ее границе ($\xi \to 0$).

В области малых v и $\xi \ll 1$ приближение ГО нарушается. В этом случае, представляя функцию $W_{1/2,\,\mu}(\xi)$ в виде степенного ряда [7], найдем

$$U_1(\xi) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[2^{-2\mu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\xi^{\mu} + 2^{2\mu}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu\right)\xi^{-\mu}\right], \quad |\xi| \ll 1, \tag{19}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Если учесть, что $\xi^{\mu} = e^{\mu \ln \xi} \sim e^{\psi z}$, то представление (19) получается в виде (9) (при $\psi = \text{const}$) с определенными значениями C_1, C_2 и z_1.

При $\mu = 0$ волны не взаимодействуют ($U_1(\xi) = \text{const}$). Поэтому случай $|\mu| \ll 1$ является случаем слабого взаимодействия, характерным, например, для ионосферного распространения [5]. Тогда

$$\ln \Gamma\left(\frac{1}{2} \mp \mu\right) \approx \ln \sqrt{\pi} \pm (C + 2 \ln 2)\, \mu \tag{20}$$

(C — постоянная Эйлера) и

$$U_1(z) = \frac{1}{2}\left\{\exp\left[\mu\left(\frac{z}{H} + \ln k_0 \beta H + C + i\frac{\pi}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[-\mu\left(\frac{z}{H} + \ln k_0 \beta H + C + i\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}. \tag{21}$$

Предельное значение коэффициента поляризации в соответствии с (10) будет равно

$$q_0 = q(z_1)\, e^{i\mu\pi}, \qquad z_1 = -H(C + \ln k_0 \beta H)\,. \tag{22}$$

Таким образом, при слабом взаимодействии ($|\mu| \ll 1$) положение критического уровня $z = z_1$ не зависит от коэффициента связи ψ и может быть приближенно определено из условия

$$|\xi| = k_0 \int_{-\infty}^{z} (n_2 - n_1)\, dz \sim 1\,. \tag{23}$$

Для экспоненциальной модели слоя (12) это совпадает с условием

$$n_2 - n_1 \sim \frac{1}{k_0}(n_2 - n_1)' \tag{24}$$

или с условием Букера (1).

В связи с тем, что в нижней ионосфере $s_c' = 0$ и $|\mu| = |\psi H| \ll 1$, эффект взаимодействия на высоких частотах ($s \ll 1$) всегда мал, ниже мы рассмотрим общий случай для переходного слоя, в котором параметр ψ определяется в основном градиентом внешнего магнитного поля. Такие модели неоднородных плазменных слоев рассматривались применительно к межзвездной среде и верхней ионосфере [6]. Тогда

$$\psi \approx \frac{i}{2}\, \frac{s_c'}{1 + s_c^2} = i\alpha, \qquad \mu = i\alpha H\,, \tag{25}$$

и, учитывая, что [7]

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm i\alpha H\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\alpha H}\,,$$

решение (19) можно представить в форме (9), в которой

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2[1 + \exp(2\delta)]}}, \qquad C_2 = \frac{1}{\sqrt{2[1 + \exp(-2\delta)]}}, \qquad \delta = \pi\alpha H\,,$$
$$z_1 = H\left[2 \lg 2 + \frac{\arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\alpha H\right)}{\alpha H} - \ln k_0 \beta H\right], \tag{26}$$

а предельное значение коэффициента поляризации получится равным

$$q_0 = q(z_1)\, e^{\delta}\,. \tag{27}$$

С помощью формулы (26) можно показать, что условие Баддена (14) для определения критического уровня $z = z_1$ будет справедливо лишь при $\delta \gg 1$. Но тогда, как видно из (27), коэффициент поляризации будет сильно искажен экспоненциальным множителем e^{δ}. Следует иметь в виду, что максимальное значение $\int \psi\, dz$, как видно из (11), не может превышать π. Кроме того, модель переходного слоя с постоянным параметром связи ($\psi = \mathrm{const}$) не соответствует реальным системам именно при сильном взаимодействии ($\delta \sim 1$), например, в случае, когда параметр ψ заметно меняется из-за изменений внешнего магнитного поля при плавных изменениях концентрации электронов.

Далее мы рассмотрим один из примеров сильного взаимодействия, когда в переходном слое напряженность внешнего магнитного поля $H_0 \to 0$, так что происходит изменение условий распространения от квазипоперечного к квазипродольному. В слабогиротропной плазме ($u \ll 1$) это возможно, если угол ϑ близок к $\pi/2$. Допустим, что $\sqrt{u} \sim H_0$ изменяется по экспоненциальному закону при $v = \mathrm{const}$:

$$u_L = u_L^0 e^{2z/H}, \qquad u_T = u_T^0 e^{2z/H}. \tag{28}$$

Тогда из (11) имеем

$$n_2 - n_1 = v\sqrt{u_L^0}\, e^{z/H}\sqrt{1 + s_c^2}, \qquad s_c = \frac{u_T^0}{2\sqrt{u_L^0}}\, e^{z/H},$$
$$\psi = \frac{i}{2}\,\frac{s_c'}{1 + s_c^2}. \tag{29}$$

Система уравнений для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн (7) может быть преобразована к другой форме. Для этого введем компоненты электрического вектора $\boldsymbol{E}$

$$E_{x'} \sim E_x - E_y, \qquad E_{y'} \sim E_x + E_y,$$

где $E_{x'}$ и $E_{y'}$ — компоненты вектора $\boldsymbol{E}$ в системе координат x', y', z, в которой внешнее магнитное поле лежит в плоскости $y'z$. Тогда для медленно меняющихся амплитуд $V_{1,2}(z)$ этих компонент

$$E_{y'x'} = V_{1,2}(z) \exp\left(ik_0 \int \frac{n_1 + n_2}{2}\, dz\right)$$

можно получить следующую систему уравнений, эквивалентную (7) при $v \ll 1$:

$$V_1' = iAV_1 - BV_2, \qquad A = \frac{k_0 v u_T}{4(1-u)},$$
$$V_2' = -iAV_2 + BV_1, \qquad B = \frac{k_0 v\sqrt{u_L}}{2(1-u)}. \tag{30}$$

Полученная система уравнений при $u \ll 1$ совпадает с уравнениями квазиизотропного приближения Ю. А. Кравцова, которые использовались в [8] для решения задачи о линейном взаимодействии волн в плазме в области квазипоперечного распространения.

Для переходного слоя (28) коэффициенты, определяющие систему (30), равны

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha}{H} e^{2z/H}, \qquad \alpha = \frac{k_0 H v u_T^0}{4}, \\
B &= \frac{\beta}{H} e^{z/H}, \qquad \beta = \frac{k_0 H v \sqrt{u_L^0}}{2}
\end{aligned} \tag{31}
$$

и заменой переменной $\xi = e^{-i\pi/4}\sqrt{2\alpha}\, e^{z/H}$ система (30) сводится к уравнениям

$$
\frac{dV_1}{d\xi} = -\frac{\xi}{2} V_1 - \sqrt{p} V_2, \qquad \frac{dV_2}{d\xi} = \frac{\xi}{2} V_2 + \sqrt{p} V_1 \tag{32}
$$

или к одному уравнению второго порядка

$$
V_1'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4}\right) V_1 = 0. \tag{33}
$$

Решениями (33) являются функции параболического цилиндра [7] $D_p(\xi)$, $D_p(-\xi)$, где параметр p равен

$$
p = i\frac{\beta^2}{2\alpha} = i\frac{k_0 H v}{2} \operatorname{ctg}^2 \vartheta, \tag{34}
$$

(β и α — разности набегов фаз нормальных волн в переходном слое при квазипродольном и квазипоперечном распространении).

Решение системы (32) запишем в виде

$$
V_1 = D_p(\xi), \qquad V_2 = -\sqrt{p}\, D_{p-1}(\xi). \tag{35}
$$

Используя асимптотическое представление этих функций при больших значениях аргумента

$$
D_p(\xi) \sim e^{-\xi^2/2} \xi^p, \quad |\xi| \gg 1, \quad |\xi| \gg |p|, \quad |\arg \xi| < \frac{3\pi}{4}, \tag{36}
$$

легко убедиться в том, что решение (35) определяет волну типа (2), бегущую из области квазипоперечного распространения к границе слоя ($\xi \to 0$). В области $|\xi| \gg 1$ поляризация этой волны близка к линейной. Решение (35) позволяет найти коэффициенты трансформации в волны типа 1 и 2 и определить поле вне слоя (в изотропной среде) как суперпозицию нормальных волн. Однако вне слоя эти волны имеют одинаковую фазовую скорость и вся информация о выходящей волне содержится в предельном значении коэффициента поляризации $K_2(\xi = 0)$.

Из (35) найдем

$$
K_2(p) = \frac{E_x}{E_y} = -\frac{\sqrt{p}\, D_{p-1}(0)}{D_p(0)} = -\sqrt{\frac{p}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right)}. \tag{37}
$$

Аналогичным образом находится и коэффициент поляризации другой нормальной волны (1). По формуле (37) легко рассчитать коэффициент $K_2(p)$, поскольку он зависит только от одного параметра $p = \frac{i}{2} k_0 H v \operatorname{ctg}^2 \vartheta$. Интенсивность взаимодействия определяется модулем $|K_2(p)|^2$, значение которого легко получить из (37). Используя известные свойства Г-функций [7], получим

$$|K_2(p)|^2 = \mathrm{th}\,\frac{\pi|p|}{2}. \qquad (38)$$

При $|p| \gg 1$ $K_2(p) \sim -i$, что соответствует слабому взаимодействию нормальных волн в плазме. Поляризация выходящей из слоя волны определяется поляризацией нормальной волны, выходящей в вакуум. Этот случай, естественно, соответствует приближению ГО. В другом предельном случае, $|p| \ll 1$, волна распространяется без изменения поляризации. В терминах ГО этот случай можно отнести к классу сильного взаимодействия, однако, с точки зрения уравнений для амплитуд V_1 и V_2, это случай слабого взаимодействия. Таким образом, сильное взаимодействие возможно лишь в случае $\frac{\pi|p|}{2} \sim 1$.

Здесь мы не приводим конкретных оценок эффекта взаимодействия, поскольку задачи рассмотренного типа для различных систем отличаются друг от друга и требуют индивидуального подхода. Целью работы было продемонстрировать, какими особенностями обладают уравнения взаимодействия в области малых концентраций плазмы, и указать на возможность появления эффекта сильного взаимодействия волн при выходе их из слоя магнитоактивной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2 Н. С Ерохин, С. С. Моисеев, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, М., 1973.
3. K. G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, 1961.
4. H. G Booker, Proc. Roy. Soc, **A155**, 235 (1936).
5 K. G Budden, Proc. Roy. Soc, **A215**, 215 (1952).
6 M. H. Cohen, Astrophys. J., **131**, № 3, 664 (1960).
7. Эт. Уиттекер, Дж. Н Ватсон, Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1963.
8. Ю. А. Кравцов, О. Н. Найда, ЖЭТФ, **71**, 237 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 14 марта 1977 г.

THE LIMIT POLARIZATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ESCAPING THE INHOMOGENEOUS LAYER OF THE AMAGNETOACTIVE PLASMA

N. G. Denisov

The linear interaction of electromagnetic waves in a transient layer magnetoactive plasma — vacuum is considered. Exact solutions of equations are obtained for slowly varying amplitudes of normal waves on the example of two models of the transient layer. They permit to calculate the wave interaction effect and to determine the limiting polarization of waves escaping the plasma layer where alongside with the electron density gradient there are the gradients of the collision number and the external magnetic field. The conditions are pointed out under which the effect of strong interaction in such systems is possible.