Для установления зависимости текущего значения угла места $\varepsilon_{n(m)}$ от азимута β_m воспользуемся рис. 3а, где ε' — угол места зонда, $\varepsilon_н$, $\varepsilon_в$ — углы места верхней и нижней строк матрицы соответственно. Если матрица поля A_{nm} регистрируется при уменьшении текущего угла места, то $\varepsilon_n = \varepsilon' + \Delta\varepsilon(B - n)$, $n = 1 \div N$, где N — число строк A_{nm}, B — номер строки, соответствующей углу места ε'.

Для случая увеличения текущего угла места при регистрации поля $\varepsilon_n = \varepsilon' - \Delta\varepsilon(B - n)$. В общем случае с учетом $\varepsilon' = f(\beta_p)$

$$\varepsilon_n = \varepsilon'_m \pm \Delta\varepsilon(B - n), \tag{6}$$

где $\varepsilon'_m = \arcsin \dfrac{\Delta h}{R_m}$. Зависимость $\beta_m = f(m)$ помогает установить рис. 3б, где β'—азимут зонда, β_0 — начальный азимут:

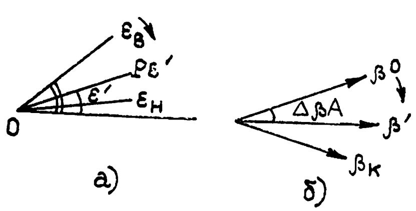

Рис. 3.

$$\beta_m = \beta' + \arcsin\left[\frac{R_0}{R_г} \sin \Delta\beta(m - A)\right]. \tag{7}$$

Здесь A — номер столбца, соответствующий азимуту β'.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Турчин, Диссертация, ГГУ, Горький, 1977.

Поступила в редакцию
14 марта 1977 г.

УДК 538.311

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКОВ НА СФЕРЕ, КОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ ШАРОМ. ДИПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В. В. Борисов

Метод неполного разделения переменных Смирнова [1, 2] и сведение исходных уравнений к уравнению Дарбу — Эйлера [3, 4] позволяют наиболее просто построить n-е слагаемое мультипольного разложения электромагнитного поля при произвольной временной зависимости распределения тока. При наличии границы раздела на конечном расстоянии от источников задача усложняется Решение, которое удобно исследовать аналитически, удается получить только в простых случаях.

В настоящем сообщении найдем дипольное слагаемое разложения поля при условии, что ток распределен на поверхности сефры, концентрической с идеально проводящим шаром. Полученное решение позволяет проследить особенности непериодических полей, определить характерные временные масштабы переходного процесса излучения импульсного источника, расположенного в окрестности проводника. Задача может оказаться полезной также в геофизике как простая модель для описания поля, создаваемого «токовой оболочкой», окружающей проводящий шар.

1. Начало сферической системы координат совместим с центром идеально проводящего шара, радиус которого a. Полагаем, что задача обладает азимутальной симметрией. Рассмотрим источники магнитного типа $j = j_\varphi(r, \vartheta, \tau)e_\varphi$ (обозначения работы [5]). Ток, распределенный на поверхности $r = r_0$, можно представить в виде

$$j_\varphi = f(\vartheta) j(r, \tau) = f(\vartheta) U\left(r_0, \frac{\tau}{c}\right) \frac{\delta(r - r_0)}{r_0}.$$

Условие на поверхности идеального проводника $E_\varphi|_{r=a^+} = 0$, начальные данные нулевые: $E = B = j = 0$, $\tau < 0$.

Решение строим, следуя [2–4]. Ищем составляющую вектора напряженности электрического поля как сумму $E_\varphi = E_\varphi^{(1)} + E_\varphi^{(2)}$, где $E_\varphi^{(1)}$ — поле, создаваемое источниками в свободном пространстве, $E_\varphi^{(2)}$ — индуцируемое идеально проводящей сферой. Отделяя угловую переменную при известной функции $E_\varphi^{(1)}$ [5], для определения дипольного слагаемого разложения индуцируемого поля $E_\varphi^{(2)}$ приходим к задаче $\left(E^{(2)} = \operatorname{rot}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\pi,\quad B^{(2)} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\pi,\quad \pi = e_r\pi\right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\tau}^2}\pi_1' - \frac{\partial^2}{\partial\hat{\tau}^2}\pi_1' + \frac{2}{\hat{r}^2}\pi_1' = 0, \quad \pi_1' = \frac{\partial}{\partial\hat{\tau}}\pi_1(\hat{\tau}, \hat{r}),$$

$$\pi_1' = 0, \quad \hat{\tau} < \hat{r}_0 - 1, \quad \hat{r}_0 > 1, \tag{1}$$

$$\pi_1'\Big|_{\hat{r}=1+} = \frac{\pi f(1)\, a}{\hat{r}_0 c}\int\limits_{\varphi(\hat{\tau})}^{\hat{\tau}+1-\hat{r}_0} dx\frac{\partial}{\partial x}U\left(\frac{a}{c}x\right)\left[\hat{r}_0^2 + 1 - (\hat{\tau} - x)^2\right],$$

$$\varphi(\hat{\tau}) = \begin{cases} 0 - , & \hat{r}_0 - 1 < \hat{\tau} < \hat{r}_0 + 1, \\ \hat{\tau} - 1 - \hat{r}_0, & \hat{\tau} > \hat{r}_0 + 1, \end{cases} \qquad f(1) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} dx f(x) P_1'(x).$$

Здесь перешли к нормированной переменной $\hat{\tau} = \dfrac{\tau}{a}$, $\hat{r} = \dfrac{r}{a}$, $\hat{r}_0 = \dfrac{r_0}{a}$. Полагаем, что $U(\tau, r_0)$ — ограниченная функция, $U(\tau, r_0) = h(\tau)u(\tau, r_0)$, $h(\tau) = \begin{cases}1, & \tau > 0\\ 0, & \tau < 0\end{cases}$, $u(\tau, r_0)$ — непрерывно дифференцируемая.

2. Ищем $\pi_1'(\hat{\tau}, \hat{r})$ в виде

$$\pi_1'(\hat{\tau}, \hat{r}) = (-1)\left[\frac{d\Psi_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\hat{r}}\Psi_1(\xi)\right], \quad \hat{r} > 1, \tag{2}$$

где $\Psi_1(\xi) = h(\xi + 1)\psi_1(\xi)$, $\xi = \hat{\tau} - \hat{r}_0 + 1 - r$, $\psi_1(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $h(\xi + 1)$ — обеспечивает выполнение начальных условий. Из соотношения (2) и предельного условия задачи (1) найдем уравнение и условие для определения функции $\psi_1(\xi)$. После вычислений получим

$$\psi_1 = \frac{2a}{\hat{r}_0 c}\pi f(1)\left[\int\limits_{\varphi(\xi)}^{\xi+1} dx\, u\left(\frac{a}{c}x, \hat{r}_0\right)(\xi + \hat{r}_0 - 1 - x) + \right.$$

$$\left. + e^{-(\xi+1)}2(1 - \hat{r}_0)\int\limits_0^{\xi+1} dx\, e^x u\left(\frac{a}{c}x, \hat{r}_0\right)\right], \tag{3}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi + 1 < 2 \\ \xi - 1, & \xi + 1 > 2 \end{cases}.$$

Соотношение (3) определяет функцию $\pi_1'(r, \tau)$ и, следовательно, составляющую поля, индуцируемого сферой:

$$E_\varphi^{(2)} = -\frac{2\sin\vartheta}{\hat{r}_0\, r}\,\frac{\pi f(1)}{ca}\left\{(-\hat{r}_0)\left[U\left(\frac{a}{c}(\xi + 1), \hat{r}_0\right) + \right.\right.$$

$$+\begin{pmatrix} 0, & \xi+1<2 \\ U\left(\frac{a}{c}(\xi-1),\hat{r}_0\right), & \xi+1>2 \end{pmatrix}\Bigg] + \int\limits_{\varphi(\xi)}^{\xi+1} dx U\left(\frac{a}{c}x,\ \hat{r}_0\right) +$$

$$+2(\hat{r}_0-1)e^{-(\xi+1)}\int\limits_0^{\xi+1} dx\, e^x U\left(\frac{a}{c}x,\ \hat{r}_0\right)+ \tag{4}$$

$$+\frac{1}{\hat{r}}\left[\int\limits_{\varphi(\xi)}^{\xi+1} dx U\left(\frac{a}{c}x,\hat{r}_0\right)(\xi+\hat{r}_0-1-x)+2(1-\hat{r}_0)e^{-(\xi+1)}\int\limits_0^{\xi+1} dx e^x U\left(\frac{a}{c}x,\ \hat{r}_0\right)\right]\Bigg\}.$$

В частном случае $U(\hat{\tau},\ \hat{r}_0)=h(\hat{\tau})u(0,\ \hat{r}_0)$ из (4) следует

$$E_{\varphi}^{(2)}=-h(\xi+1)\frac{\sin\vartheta}{\hat{r}\hat{r}_0}\frac{u(0,\ \hat{r}_0)}{ac}2\pi f(1)\times$$

$$\times\begin{cases}\xi+\hat{r}_0-1+\dfrac{1}{\hat{r}}\dfrac{(\xi+\hat{r}_0-1)^2-\hat{r}_0^2}{2}e^{-(\xi+1)}2(1-\hat{r}_0)\left(1-\dfrac{1}{\hat{r}}\right), & 0<\xi+1<2\\ 2(1-\hat{r}_0)\left(1-\dfrac{1}{\hat{r}}\right)e^{-(\xi+1)}, & \xi+1>2\end{cases}, \tag{5}$$

где экспоненциально убывающее слагаемое и, следовательно, электрическое поле в точке наблюдения отличны от нуля и при $\xi+1>2$. Другие слагаемые отличны от нуля только на интервале $2\frac{a}{c}$.

3. Магнитный момент $M^{(2)}$, определяющий индуцируемое поле, найдем, интегрируя первую производную от дипольного момента, входящую в (4):

$$M^{(2)}=\frac{a^2}{\hat{r}_0 c}\pi f(1)\Bigg\{\int\limits_{\varphi(\xi)}^{\xi+1} dx U\left(\frac{a}{c}x,\ \hat{r}_0\right)\left[(\xi+\hat{r}_0-x-1)^2-r_0^2\right]+$$

$$+4(\hat{r}_0-1)e^{-(\xi+1)}\int\limits_0^{\xi+1} dx e^x U\left(\frac{a}{c},\ \hat{r}_0\right)\Bigg\}. \tag{6}$$

Первое слагаемое (6) в момент $\frac{\xi+1}{c}$ определяется изменением тока за предшествующий интервал длительностью $\frac{2a}{c}$. Временной масштаб второго — постоянная экспоненты $\frac{a}{c}$.

При медленном изменении $u(\tau,\ r_0)$ справедлива приближенная формула:

$$M_{\xi>1}^{(2)}\approx-\frac{a^2}{\hat{r}_0 c}4\pi f(1)\,u\left(\frac{a}{c}(\xi+1),\hat{r}_0\right)\left\{\frac{1}{3}+(\hat{r}_0-1)e^{-(\xi+1)}\right\}.$$

Предельное значение индуцируемого магнитного момента при $\xi\longrightarrow\infty$ в предположении, что $\frac{\partial}{\partial\tau}u(\tau,\ r_0)$ интегрируема с квадратом на промежутке изменения $\tau[0,\ \infty)$:

$$M^{(2)}_{\xi\to\infty} \to \frac{a^2}{\hat{r}_0 c}\,\pi f(1)\left\{\int\limits_0^0 dsu\left(\frac{a}{c}(\xi+1-s),\,\hat{r}_0\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[(s+\hat{r}_0-2)^2-r_0^2\right]+4(\hat{r}_0-1)\,u\left(\frac{a}{c}(\xi+1),\hat{r}_0\right)\right\}.$$

Дипольное слагаемое мультипольного разложения поля системы определяется моментом M, который есть сумма индуцируемого момента $M^{(2)}$ и момента источников в свободном пространстве. Используя результаты [5], получим ($\tau_1 = \tau - r + r_0$)

$$M_{r>r_0} = \frac{2\pi f(1)}{r_0 c}\int\limits_0^{\tau_1} dsu\left(\frac{s}{c},\,r_0\right)\left[r_0(\tau_1-s)-\frac{(\tau_1-s)^2}{2}\right],\quad 0<\tau_1<2(r_0-a); \tag{7}$$

$$M_{r>r_0} = \frac{2\pi f(1)}{r_0 c}\left\{\int\limits_{\tau_1-2(r_0-a)}^{\tau_1} dsu\left(\frac{s}{c}\right)\left[r_0(\tau_1-s)-\frac{(\tau_1-s)^2}{2}\right]+\right.$$

$$\left.+\,2(r_0-a)\,a\exp\left[-\frac{\tau_1-2(r_0-a)}{a}\right]\int\limits_0^{\tau_1-2(r_0-a)} dsu\left(\frac{s}{c},\,r_0\right)e^{\frac{s}{a}}\right\},\quad \tau_1>2(r_0-a). \tag{8}$$

Характерные временные масштабы полного поля $\frac{2(r_0-a)}{c}$, $\frac{a}{c}$. До момента времени $\frac{\tau_1}{c}=\frac{2(r_0-a)}{c}$ электромагнитное поле создается источником в свободном пространстве. При $\frac{\tau_1}{c}>\frac{2(r_0-a)}{c}$ структура решения более сложная. Электромагнитное поле — суперпозиция волн, огибающих идеальный проводник (слагаемые, пропорциональные $e^{-(\xi+1)}$ в формулах (4), (5) и, соответственно, $\exp\left[-\frac{\tau_1-2(r_0-a)}{2}\right]$ в выражении для момента (8)) сигнала, отраженного идеальным проводником, и поля источника в свободном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, ДАН СССР, **14**, № 2, 13 (1937); **14**, № 2, 13 (1937).
2. В. И Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, Гостехиздат, М., 1957.
3. А. В. Мананкова, И. И. Кононов, Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, **12**, 1973, стр. 208.
4. А. В. Мананкова, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 2, 211 (1972).
5. В. В. Борисов, Изв. вузов — Радиофизика, **19**, № 12, 1862 (1976).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 11 февраля 1977 г., после доработки 24 ноября 1977 г.