

УДК 538 574 6

## К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

*Г. А. Ерохин, В. Г. Кочержевский*

Рассматриваются условия разрешимости обратной задачи дифракции применительно к неоднородностям с реактансной поверхностью. Обратная задача дифракции формулируется как задача определения параметров неоднородности по заданной структуре рассеянного поля. Задача решается путем исследования линий тока среднего значения вектора Пойнтинга. Приводятся результаты численного расчета

В работе [1] предложен метод решения обратной задачи теории дифракции. Метод опирается на очевидные физические свойства электромагнитного поля вблизи «непрозрачных» неоднородностей, внутри которых поле отсутствует, т. е. неоднородностей с реактансной поверхностью [2]. Действительно, на поверхности таких неоднородностей отлична от нуля только касательная компонента вектора  $\text{Re } \Pi$  (где  $\Pi$  — комплексный вектор Пойнтинга). Следовательно, обратная задача теории дифракции, т. е. задача определения параметров неоднородности (профиль неоднородности и граничные условия) по заданной структуре рассеянного поля, может быть решена путем нахождения конфигурации линий тока вектора  $\text{Re } \Pi$ . Если для найденной таким образом неоднородности решить теперь прямую задачу, то, в соответствии с теоремой единственности [2] для реактивной поверхности, рассеянное поле совпадает с заданным, поскольку они оба удовлетворяют одинаковым граничным условиям и условиям излучения.

Целью настоящей работы является исследование способов задания рассеянного поля, при которых обратная задача оказывается разрешимой.

Функция  $\text{Re } \Pi$  для двумерного поля ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ) имеет вид

$$\text{Re } \Pi = q \text{Im} \{u^* \text{grad } u\}, \quad (1)$$

где  $u$  — составляющая поля  $H_z$  или  $E_z$  для случаев ТМ- или ТЕ-волн соответственно,

$$q = \begin{cases} -\frac{1}{2\omega\epsilon} & \text{для ТМ-волн} \\ -\frac{1}{2\omega\mu} & \text{для ТЕ-волн} \end{cases}.$$

Дифференциальное уравнение кривых  $\text{Re } \Pi$  в декартовых координатах записывается как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Re } \Pi_y}{\text{Re } \Pi_x}. \quad (2)$$

Это же уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r \operatorname{Re} \Pi_r}{\operatorname{Re} \Pi_\varphi}. \quad (3)$$

Рассеянное поле может быть задано, как обычно в двумерных задачах дифракции, в виде суммы цилиндрических волн:

$$u^S = \sum_{\nu=0}^N (A_\nu \cos \nu\varphi + B_\nu \sin \nu\varphi) H_\nu^{(2)}(kr), \quad (4)$$

где  $H_\nu^{(2)}(kr)$  — функция Ханкеля,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $A_\nu = a_\nu e^{i\alpha_\nu}$  и  $B_\nu = b_\nu e^{i\beta_\nu}$  — комплексные амплитуды,  $r$  и  $\varphi$  — цилиндрические координаты.

В прямых задачах дифракции ряд (4), содержащий в общем случае бесконечное число гармоник ( $N \rightarrow \infty$ ), представляет вторичное поле только в некоторой области  $r > R_0$ , при  $r \leq R_0$  ряд расходится. Из физических соображений следует, что  $R_0$  не может превосходить длины максимального радиуса-вектора точки на границе тела.

При решении обратной задачи рассеянное поле можно также представить в виде разложения по полной системе уходящих цилиндрических волн, однако теперь коэффициенты ряда (4) не определяются в результате решения задачи, а задаются, исходя, например, из соответствия волновых функций в зоне излучения определенной диаграмме рассеяния. В этом случае, очевидно, в соответствии с требуемой точностью величина  $N$  всегда может быть конечной. При этом выражение (4) будет иметь смысл всюду, кроме начала координат, и, следовательно, оно совместно с (2) или (3) может быть использовано для построения картины линий тока вектора  $\operatorname{Re} \Pi$  во всем пространстве.

Очевидно, обратная задача дифракции имеет решение только в том случае, если существуют замкнутые линии вектора  $\operatorname{Re} \Pi$ , охватывающие все особенности вторичного поля. В противном случае для воссоздания заданного рассеянного поля необходимо размещение в особой точке источников типа мультиполей, соответствующих выражению (4). Эти замкнутые линии и определяют профиль искомой неоднородности с реактивным поверхностным импедансом.

Условие замкнутости линий вектора  $\operatorname{Re} \Pi$  в работе [1] определялось соотношением

$$\operatorname{Re} P = 0, \quad (5)$$

где  $P = \oint_S \Pi dS$  — комплексная мощность, причем под  $S$  подразумевается или поверхность (единичной длины по оси  $z$ ) самой неоднородности, или любая поверхность, охватывающая точки, где вторичное поле имеет свои особенности. Условие (5) для поверхностей с реактивными импедансными граничными условиями соблюдается всегда. Для произвольно заданного поля обратное утверждение, однако, верно не всегда, г. е. из условия (5) не обязательно следует отсутствие активного потока энергии в каждой точке поверхности.

На рис. 1 показана примерная структура линий  $\operatorname{Re} \Pi$  в окрестности особой точки для нескольких полей, удовлетворяющих условию (5). Как видно, условию физической реализации отвечают только случаи в) и г), содержащие замкнутые кривые  $\operatorname{Re} \Pi$ , охватывающие особую точку поля. В случаях а) и б) подобные кривые отсутствуют. Следовательно, условие (5) является необходимым, но в общем случае недостаточным для замкнутости линий  $\operatorname{Re} \Pi$ .

Исследуем вопрос, в каких случаях условие (5) является достаточным для замкнутости линий вектора  $\operatorname{Re} \Pi$ .

Известно, что регулярных методов, с помощью которых можно установить наличие замкнутых интегральных кривых дифференциального уравнения типа (1), в настоящее время в теории динамических систем [3] не существует даже для аналитических функций  $P(x, y) = \operatorname{Re} \Pi_x$  и  $Q(x, y) = \operatorname{Re} \Pi_y$ , тем более для функций, имеющих особенности, что как раз соответствует рассматриваемой задаче. Из теории динамических систем для подобных функций следует лишь отсутствие запрета на существование семейства линий  $\operatorname{Re} \Pi$ , замкнутых вокруг особой точки. Это вытекает из критерия Дюлака [3] для двухсвязной области  $D$ , полученной после исключения особой точки. Указанный критерий утверждает, что если в двухсвязной области  $D$  выражение

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \quad (6)$$

знакопостоянно (или обращается в нуль в конечном числе отдельных точек, но имеет один и тот же знак во всех остальных точках области  $D$ ), то в этой области не может существовать более одной простой замкнутой кривой, охватывающей внутреннюю границу области  $D$ .

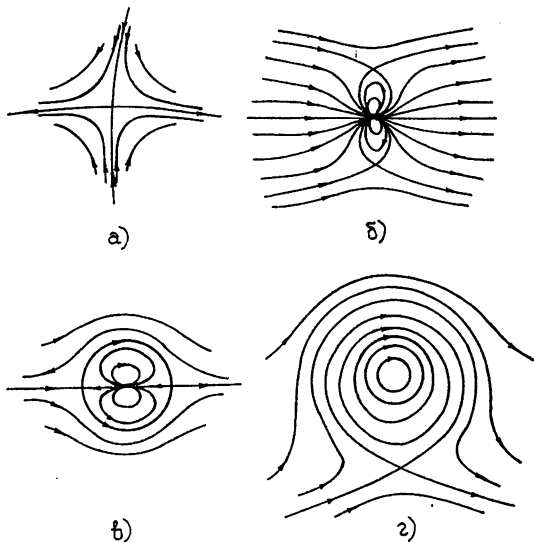


Рис. 1.

Для функций  $u$ , удовлетворяющих в области  $D$  однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = 0$ , как известно, справедливо

$$\operatorname{div} \operatorname{Re} \Pi = 0. \quad (7)$$

Из (7) для двумерного поля  $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$  следует

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0,$$

что говорит о возможности существования семейства замкнутых кривых  $\operatorname{Re} \Pi$ .

Метод конформных преобразований, применяемый для решения задач об обтекании твердых тел идеальной жидкостью и основанный на введении понятия комплексного потенциала [4], также не может быть использован для изучения поведения кривых  $\operatorname{Re} \Pi$ . Объясня-

ется это тем, что поле  $\text{Re } \Pi$  не является в общем случае потенциальным (следует из выражения  $\text{rot } \text{Re } \Pi = q \text{Im}[\text{grad } \dot{u} \times \text{grad } u] \neq 0$ ).

Вследствие отсутствия общих методов большое значение имеют частные признаки, при помощи которых можно судить о наличии замкнутых интегральных кривых для конкретных физических полей. Рассмотрим взаимодействие рассеянного поля в виде одного члена суммы (4) с падающей волной, поле которой имеет вид

$$u^i = e^{-ikr \cos \varphi}. \quad (8)$$

Полное поле, описываемое функцией  $u$ , можно представить как

$$u = u^i + u^s = e^{-ikr \cos \varphi} + (A, \cos \nu \varphi + B, \sin \nu \varphi) H_{\nu}^{(2)}(kr). \quad (9)$$

Найдем решение уравнения (3), предполагая, что линия вектора  $\text{Re } \Pi$  имеет вид кривой  $L$ , проходящей через некоторую начальную точку  $M_0(r_0, \varphi_0)$  (рис. 2).

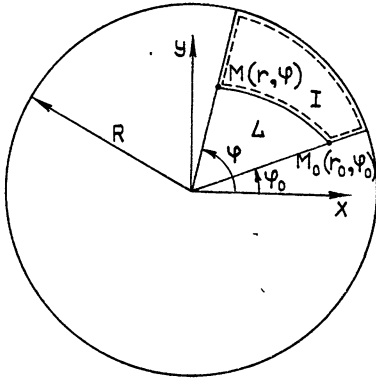


Рис. 2.

Проведем вспомогательную окружность  $R$ , охватывающую кривую  $L$ . Применим к замкнутой области  $I$ , отмеченной на рис. 2 пунктиром, уравнение (7) в интегральной форме и учтем, что поток активной энергии через поверхность, определяемую кривой  $L$ , равен нулю. Тогда для нашей двумерной задачи получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \text{Re} \prod_r r d\varphi + \int_r^R \text{Re} \Pi_{\varphi} dr - \int_{r_0}^R \text{Re} \prod_{\varphi} dr = 0. \quad (10)$$

Найдем выражение для  $\text{Re } \Pi_{\varphi}$ , используя (9);

$$\begin{aligned} \text{Re } \Pi_{\varphi} = q \text{Im} \{ \dot{u} \text{grad}_{\varphi} u \} = q \left\{ k \sin \varphi + k \sin \varphi [a, \cos \nu \varphi \times \right. \\ \times (J, \cos \gamma_a + N, \sin \gamma_a) + b, \sin \nu \varphi (J, \cos \gamma_b + N, \sin \gamma_b)] - \\ - \frac{\nu}{r} [a, \sin \nu \varphi (J, \sin \gamma_a - N, \cos \gamma_a) - b, \cos \nu \varphi (J, \sin \gamma_b - \\ \left. - N, \cos \gamma_b)] + a, b, \frac{\nu}{r} (J_{\nu}^2 + N_{\nu}^2) \sin(\beta, -\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение для  $\text{Re } \Pi_r$  имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Re } \Pi_r = q \text{Im} \{ \dot{u} \text{grad}_r u \} = -q \left\{ k \cos \varphi + k \cos \varphi [a, \cos \nu \varphi \times \right. \\ \times (J, \cos \gamma_a + N, \sin \gamma_a) + b, \sin \nu \varphi (J, \cos \gamma_b + N, \sin \gamma_b)] - \\ - \frac{\nu}{r} [a, \cos \nu \varphi (J, \sin \gamma_a - N, \cos \gamma_a) + b, \sin \nu \varphi (J, \sin \gamma_b - \\ \left. - N, \cos \gamma_b)] + k [a, \cos \nu \varphi (J_{\nu+1} \sin \gamma_a - N_{\nu+1} \cos \gamma_a) + \right. \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ b_\nu \sin \nu \varphi (J_{\nu+1} \sin \gamma_b - N_{\nu+1} \cos \gamma_b) + \frac{2}{\pi r} [a_\nu^2 \cos^2 \nu \varphi + \\ + b_\nu^2 \sin^2 \nu \varphi + a_\nu b_\nu \sin 2\nu \varphi \cos (\beta_\nu - \alpha_\nu)] \}.$$

В (11) и (12) аргумент  $kr$  цилиндрических функций опущен и введены обозначения

$$\gamma_a = \alpha_\nu + kr \cos \varphi \quad \text{и} \quad \gamma_b = \beta_\nu + kr \cos \varphi.$$

При условии

$$\beta_\nu - \alpha_\nu \neq 2\pi n \quad (n=0, 1, \dots) \quad (13)$$

функцию (11) представим в виде двух слагаемых:

$$\operatorname{Re} \Pi_\varphi = f_1(r, \varphi) + f_2(r). \quad (14)$$

Второе слагаемое, равное

$$f_2(r) = qa_\nu b_\nu \frac{\nu}{r} (J_\nu^2 + N_\nu^2) \sin (\beta_\nu - \alpha_\nu), \quad (15)$$

не зависит от  $\varphi$ . При малых  $kr$  (практически при  $kr < \nu$ ) это слагаемое, пропорциональное  $N_\nu^2(kr)$ , преобладает вследствие резкого возрастания функции  $N_\nu(kr)$ , т. е.

$$f_2(r) \gg f_1(r, \varphi). \quad (16)$$

Знак слагаемого  $f_2(r)$ , а следовательно, в силу (16), и всего выражения (11), не зависит от координат  $r$  и  $\varphi$ :

$$\operatorname{sgn} \left\{ \operatorname{Re} \prod_{r \in G} \right\} = \operatorname{const}. \quad (17)$$

При этом функция  $\operatorname{Re} \Pi_\varphi$  монотонно возрастает с уменьшением координаты  $r$ .

Сравнение выражений (15) и (12) показывает, что

$$f_2(r) \gg \operatorname{Re} \Pi_r. \quad (18)$$

Размеры области  $G$ , в которой выполняются условия (16)—(18), максимальны при

$$\beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (19)$$

Перепишем (10) в виде

$$F_1(\varphi, \varphi_0) + F_2(r, \varphi) = C(r_0, \varphi_0), \quad (20)$$

где

$$F_1(\varphi, \varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \operatorname{Re} \Pi_r r d\varphi,$$

$$F_2(r, \varphi) = \int_r^R f_1(r, \varphi) dr + \int_r^R f_2(r) dr,$$

$$C(r_0, \varphi_0) = \int_{r_0}^R \operatorname{Re} \prod_{\varphi=\varphi_0} dr.$$

При заданном значении  $\varphi_0$  левую часть уравнения (20) можно рассматривать как функцию, которая любой точке  $(r, \varphi)$  ставит в соответствие определенное значение  $C$ , т. е.

$$F_1(\varphi) + F_2(r, \varphi) = F(r, \varphi) = C. \quad (21)$$

При изменении угловой координаты  $\varphi$  на  $2\pi$  имеем

$$F_1(\varphi + 2\pi) = F_1(\varphi). \quad (22)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F_1(\varphi + 2\pi) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi+2\pi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi + \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi = F_1(\varphi), \end{aligned}$$

так как

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi = 0,$$

что соответствует уравнению баланса (5). Таким образом, из выражений (11), (12) и (22) следует, что  $F(r, \varphi)$  является однозначной аналитической функцией во всей области  $G$ , исключая начало координат.

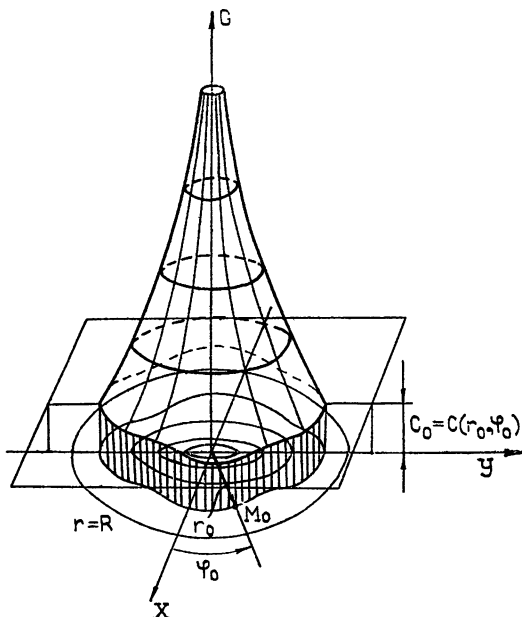


Рис. 3.

В нашем случае, как видно из рис. 3, эти интегральные кривые представляют собой семейство замкнутых непересекающихся кривых, сплошь заполняющих рассматриваемую область  $G$ . При этом кривая, соответствующая сечению поверхности  $C = F(r, \varphi)$  плоскостью  $C_0$ , будет проходить через точку  $M_0(r_0, \varphi_0)$  (рис. 3), если  $C_0 = C(r_0, \varphi_0)$ . Полученные результаты, естественно, не зависят от выбора значения  $\varphi_0$ . Действительно, при замене  $\varphi_0$  на  $\varphi'_0$  для функции  $F_1(\varphi, \varphi_0)$  имеем

Рассматривая  $C$  как третью координату, откладываемую по нормали к плоскости  $r, \varphi$ , можно интерпретировать уравнение (21) как уравнение некоторой поверхности, построенной над плоскостью  $r, \varphi$  [5]. Если вспомогательная окружность  $R$  лежит внутри области  $G$ , то при условии (13), в силу отмеченных выше свойств (16) — (18), величина  $C = F(r)$  при  $\varphi = \text{const}$  монотонно возрастает с уменьшением  $r$ . Если  $r = \text{const}$ , то  $C = F(\varphi) \approx \text{const}$ , причем  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$  в силу условия (22). Таким образом,  $C = F(r, \varphi)$  при условии (13) соответствует поверхности, примерный вид которой изображен на рис. 3. Линии уровня этой поверхности представляют собой интегральные кривые уравнения (3).

$$\begin{aligned}
 F_1(\varphi, \varphi'_0) &= \int_{\varphi'_0}^{\varphi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi = \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi + \int_{\varphi'_0}^{\varphi_0} \operatorname{Re} \prod_{r=R} r d\varphi = F_1(\varphi, \varphi_0) + C'.
 \end{aligned}$$

Заметим, что случай, соответствующий семейству замкнутых кривых, охватывающих особую точку поля (рис. 3), представляет большой практический интерес. При этом обратная задача дифракции решается неоднозначно, т. е. одному и тому же рассеянному полю соответствует набор профилей искомой неоднородности, каждый из которых определяется одной из замкнутых кривых. Это позволяет из набора решений выбирать такое, которое, кроме электродинамических, удовлетворяет некоторым другим требованиям (например, конструктивным), что существенно расширяет возможности метода. Таким образом, условие энергетического баланса (5) является достаточным для замкнутости линий  $\operatorname{Re} \Pi$  при добавочном условии выполнения фазовых соотношений (13).

Физически возникновение замкнутых линий  $\operatorname{Re} \Pi$  при взаимодействии плоской волны с полем цилиндрической волны объясняется тем, что при условии (13) вторичное поле имеет составляющую с азимутальной зависимостью в виде бегущей волны, т. е. пропорциональную  $e^{\pm i\nu\varphi}$ . Подобному полю присущи своеобразные энергетические соотношения, заключающиеся в резком преобладании азимутального потока энергии над радиальным в области  $r < \nu/k$  [6].

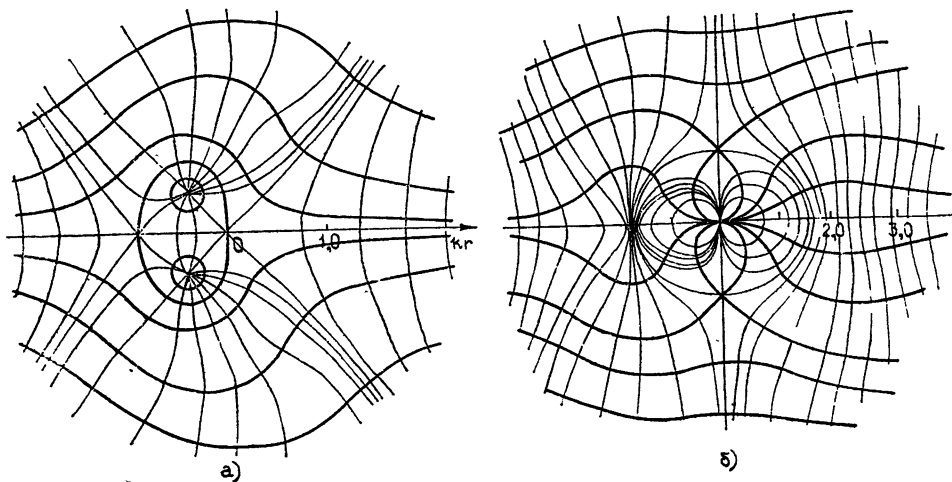


Рис. 4.

На рис. 4—6 приведены результаты расчета линий  $\operatorname{Re} \Pi$  для полей, удовлетворяющих условию (5) с различными значениями  $A$ , и  $B$ :  $\nu=0$ ,  $A=-1$ ,  $B=0$  (рис. 4а),  $\nu=1$ ,  $A=\sqrt{2}$ ,  $B=0$  (рис. 4б);  $\nu=2$ ,  $A=\sqrt{2}$ ,  $B=0$  (рис. 5);  $\nu=2$ ,  $A=1$ ,  $B=i$  (рис. 6а);  $\nu=8$ ,  $A=-1/\sqrt{2}$ ,  $B=-i/\sqrt{2}$  (рис. 6б). Для удобства построения сначала вычислялись кривые постоянной фазы полного поля (тонкие линии на рис. 4—6), а затем строились ортогональные к ним линии  $\operatorname{Re} \Pi$ . Доказательство ортогональности содержится в работе [7] и осно-

вано на том, что для двумерного поля  $u = u^i + u^S = u_0 e^{i\theta}$  функция (1) преобразуется к виду

$$\operatorname{Re} \Pi \sim u_0^2 \operatorname{grad} \theta,$$

откуда следует ортогональность линии  $\operatorname{Re} \Pi$  и эквифазных поверхностей.

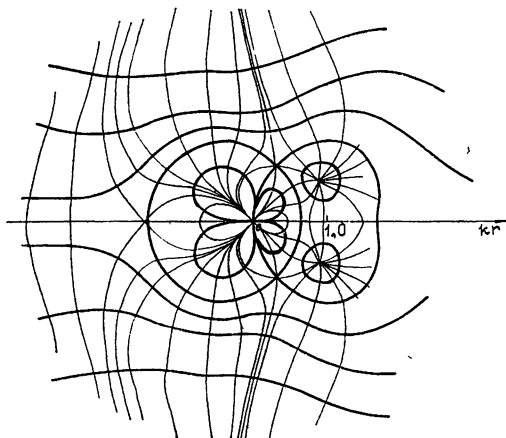


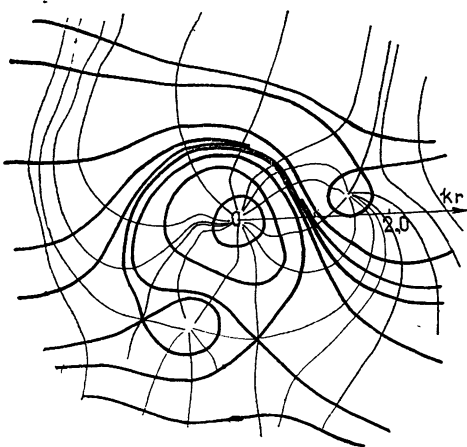
Рис. 5.

Кривые на рис. 4, 5 соответствуют рассеянному полю с азимутальной зависимостью в виде  $\cos \nu\varphi$ , на рис. 6 — в виде  $e^{i\nu\varphi}$ . Ясно, что рассеянное поле в виде гармоник с азимутальной зависимостью только в виде  $\sin \nu\varphi$  не может быть задано, так как это противоречит следствию, вытекающему из «оптической» теоремы [8, 9]. Обобщая результаты [8, 9] на случай произвольных импедансных граничных условий реактивного характера, можно показать, что так же, как в случае граничных условий Неймана

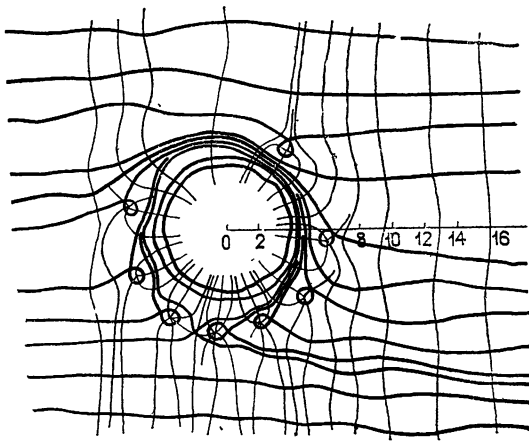
и Дирихле, величина полного сечения рассеяния  $\sigma$  определяется соотношением

$$\sigma = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \frac{u^S(\varphi = 0)_{r \rightarrow \infty}}{\frac{i}{4} e^{-ikr} \sqrt{\frac{2i}{\pi kr}}}.$$

Следовательно, величина  $\sigma$ , пропорциональная мнимой части амплитуды вторичного поля в направлении падающей волны, в данном случае получается равной нулю, что физически может быть только при нулевой амплитуде рассеянного поля.



а)



б)

Рис. 6.

Как видно из приведенных рисунков, в случае азимутальной зависимости рассеянного поля типа бегущей волны кривые  $\operatorname{Re} \Pi$  имеют



вид семейства замкнутых кривых, окружающих особую точку поля (рис. 6а, б). Для вторичного поля, имеющего характер стоячей волны по координате  $\varphi$ , возможны как замкнутые вокруг особой точки кривые  $Re \Pi$  (рис. 5), так и незамкнутые кривые (рис. 4а, б). В последнем случае для воссоздания заданного рассеянного поля необходимо размещение источников в особой точке.

Аналогичный анализ, проведенный для вторичного поля, заданного в виде конечной суммы гармоник типа (4), показывает, что условие баланса (5) является также достаточным для замкнутости линий  $Re \Pi$ , если соотношение (13) выполняется по крайней мере для гармоники, индекс которой максимален. Пример расчета структуры линий  $Re \Pi$  для подобного случая приведен в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Ерохин, В. Г. Кочержевский, Радиотехника и электроника, 19, № 1, 30 (1974).
2. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
3. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд. Наука, М., 1966.
4. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, изд. Наука, М., 1970.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
6. Г. А. Ерохин, В. Г. Кочержевский, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 695 (1973).
7. W. Graubek, Zeitschrift fur Naturforschung, Band 5a, Januar, Heft 1 (1951).
8. Р. Кинг, У Тай-Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн (пер. под ред Э. Л. Бурштейна), ИЛ, М., 1962.
9. Х. Хенл, А. Мауэ, К Вестфаль, Теория дифракции (пер. под ред Г. Д. Малюжинца), изд. Мир, М., 1964.

Московский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
3 мая 1976 г.,  
после переработки  
24 ноября 1977 г.

#### ON SOLVABILITY OF SOME INVERSE DIFFRACTION PROBLEMS

*G. A. Erokhin, V. G. Kocherzhevskii*

The solvability conditions of the inverse diffraction problem applying to the inhomogeneities with reactance surface are considered. The inverse diffraction problem is formulated as the problem of determination of the inhomogeneity parameters according to the given structure of the scattered field. The problem is solved by investigating the current lines of the mean Poynting vector. The results of numerical calculations are given.