

УДК 538.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. П. Чумаченко

Предложена методика расчета электромагнитного поля в областях, представляющих собой общую часть более простых областей.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В технике широко применяются устройства, в которых область распространения электромагнитных волн можно рассматривать как общую часть простых областей, для которых волновое уравнение может быть решено методом разделения переменных. Например, поперечное сечение любого выпуклого многоугольного волновода можно представить в виде общей части полуплоскостей или прямоугольников, поперечное сечение экранированной линии представляет собой общую часть области, образованной экраном и внешними частями внутренних проводников и т. д.

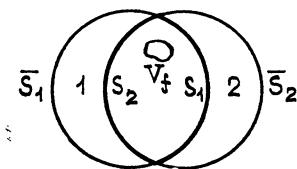


Рис. 1.

Для данного класса задач может быть построен относительно простой алгоритм, позволяющий, как и в случае объединения простых областей [1,2], свести задачу расчета поля в сложной области, для которой получить функцию Грина невозможно, к решению системы интегральных уравнений второго рода, ядрами которой являются известные функции Грина простых областей, образующих исследуемую область.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай двух областей (рис. 1) и будем искать решение скалярного уравнения Гельмгольца

Не ограничивая общности, рассмотрим случай двух областей (рис. 1) и будем искать решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(r) + k^2 u(r) = -f(r) \quad (1)$$

(обобщение на векторный случай очевидно и может быть проведено так же, как и в случае объединения областей [1]). Пусть искомая функция u удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле

$$u(r) = 0 \quad \forall r \in S_1 \cup S_2. \quad (2)$$

Известно [3], что решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$Lu(r) = 0 \quad (3)$$

(L — дифференциальный оператор), удовлетворяющего принципу максимума, в рассматриваемой области может быть представлено в виде суммы

$$u = u_1 + u_2, \quad (4)$$

где u_1 и u_2 удовлетворяют (3) в областях, ограниченных соответственно $S_1 \cup \bar{S}_1$ и $S_2 \cup \bar{S}_2$. Граничные условия, накладываемые на u_1 и u_2 на поверхностях \bar{S}_1 и \bar{S}_2 , произвольны, а на $S_1 \cup S_2$ $u_1 + u_2$ удовлетворяет граничным условиям задачи. Далее u_1 и u_2 находятся методом последовательных приближений (метод Шварца — Неймана).

Воспользуемся идеей представления решения в виде (4) в нашем случае. Пусть u_1 удовлетворяет в области 1 уравнению (1) с правой частью $-f$, в области 2 — уравнению (1) с правой частью, равной нулю, и сумма $u_1 + u_2$ на поверхности $S_1 \cup S_2$ удовлетворяет граничному условию (2), т. е.

$$u_1(r) = -u_2(r) \quad \forall r \in S_1 \cup S_2. \quad (5)$$

Построенная таким образом функция u удовлетворяет как уравнению (1), так и граничным условиям (2). Будем считать, что

$$u_i(r) = 0 \quad \forall r \in \bar{S}_i \quad (i=1, 2). \quad (6)$$

Применяя к i -й области вторую формулу Грина, учитывая (5), (6) и полагая $r \in S_j$, мы получим систему интегральных уравнений второго рода относительно u_i :

$$u_i(r \in S_j) = \int_{S_i} u_j(r') \frac{\partial G_i(r \in S_j/r')}{\partial n'_i} dS' + \delta_{ij} \times \\ \times \int_{V_f} f(r') G_i(r \in S_j/r') dV', \quad i, j = 1, 2 \quad (i \neq j), \quad (7)$$

где G_i — известная функция Грина i -й области, удовлетворяющая на $S_i \cup \bar{S}_i$ граничным условиям (2), n_i — внешняя нормаль к поверхности S_i , V_f — область определения f , $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$. Отметим, что если частичные области задачи являются замкнутыми, то при совпадении k с критическим волновым числом какой-либо из областей система (7) теряет смысл, так как при этом соответствующая функция Грина G_i рашается в бесконечность.

Решение системы (7) итерационным методом в рассматриваемом случае затруднительно, так как уравнение Гельмгольца не удовлетворяет принципу максимума. В силу непрерывности решений уравнения Гельмгольца и граничных условий (6) функции u_i будут бесконечно малыми в окрестностях $S_{\varepsilon i}$ — линии пересечения поверхностей $S_1 \cup \bar{S}_1$ и $S_2 \cup \bar{S}_2$. Интегралы

$$\int_{S_{\varepsilon i}} \frac{\partial G_i(r/r')}{\partial n'_i} dS',$$

если граничные поверхности являются поверхностями Ляпунова, ограничены [4]. Следовательно,

$$\left| \int_{S_{\varepsilon i}} u_j \frac{\partial G_i}{\partial n'_i} dS' \right| \leq \max |u_j(r' \in S_{\varepsilon i})| \left| \int_{S_{\varepsilon i}} \frac{\partial G_i}{\partial n'_i} dS' \right| \xrightarrow{S_{\varepsilon i} \rightarrow 0} 0.$$

В силу этого в (7) можно не учитывать особенностей $\frac{\partial G_i}{\partial n_i}$ на линии

пересечения граничных поверхностей. Но в таком случае система (7) не является сингулярной и к ней применима обычная теория Фредгольма [5].

В случае замкнутых подобластей после замены в (7) функций Грина конечными отрезками их разложений по собственным функциям своих областей решение системы (7) сводится к решению системы алгебраических уравнений с известной матрицей относительно коэффициентов разложений в аналогичные ряды функций u_1 и u_2 . Элементы матрицы системы выражаются при этом через интегралы от произведений собственных функций областей 1 и 2 по поверхностям S_1 и S_2 . При $f=0$ эта система является однородной и условие существования ее нетривиального решения дает уравнение для определения собственных частот рассматриваемой области. Сходимость получаемого приближенного решения к точному при возрастании числа слагаемых, учитываемых в разложениях, обеспечивается сходимостью в среднем указанных рядов для функций Грина и их производных, являющихся ядрами системы (7) (почленное дифференцирование рядов для G_1 и G_2 возможно, так как на S_1, S_2 $r \neq r'$ [6]).

Система (7) может быть также решена численно путем замены интегралов конечными суммами. В случае других граничных условий решение для данного класса задач находится аналогично.

2. МЕТОД «В МАЛОМ»

Пусть исследуемая область представляет собой общую часть N простых областей, тогда система (7) преобразуется к виду

$$u_i(r \in S_j) = \int_{S_i} \sum_{m \neq i} u_m(r') \frac{\partial G_i(r \in S_j/r')}{\partial n'_i} dS' + \\ + \delta_{ij} \int_{V_f} f(r') G_1(r \in S_j/r') dV', \quad i, j, m=1, 2, \dots, N \quad (i \neq j). \quad (8)$$

Просуммировав обе части последнего равенства по $i \neq j$, мы получим

$$\sum_{i \neq j} u_i(r \in S_j) = \sum_{i \neq j} \int_{S_i} \sum_{m \neq i} u_m(r') \frac{\partial G_i(r \in S_j/r')}{\partial n'_i} dS' + \\ + (1 - \delta_{ij}) \int_{V_f} f(r') G_1(r \in S_j/r') dV'. \quad (9)$$

Если линейные размеры поверхностей S_i малы по сравнению с длиной волны изучаемых колебаний, то величины

$$\omega_i = \sum_{m \neq i} u(r' \in S_i)$$

можно приближенно считать постоянными. В таком случае система (9) сводится к системе алгебраических уравнений относительно ω_i :

$$\omega_j - \sum_{i \neq j} b_{ji} \omega_i = f_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

где

$$b_{ji} = \int_{S_i} \frac{\partial G_i(r \in S_j/r')}{\partial n'_i} dS', \quad f_i = \begin{cases} 0 & (j=1) \\ \int_{V_f} f(r') G_1(r \in S_j/r') dV' & (j \neq 1) \end{cases}$$

и r фиксировано на S_j .

После решения системы (10) искомое поле u находится по формуле

$$u(r) = \sum_{i=1}^N u_i(r) = \sum_{i=1}^N \omega_i \int_{S_i} \frac{\partial G_i(r/r')}{\partial n'_i} dS' + \int_{V_f} f(r') G_1(r/r') dV'. \quad (11)$$

В случае однородных граничных условий Неймана решение определяется формулой

$$u(r) = - \sum_{i=1}^N \omega_i \int_{S_i} G_i(r/r') dS' + \int_{V_f} f(r') G_1(r/r') dV', \quad (12)$$

где G_i — функция Грина i -й области, удовлетворяющая на поверхности $S_i \cup \bar{S}_i$ однородным граничным условиям Неймана, а величина ω_i находится из системы (10), в которой

$$b_{ji} = - \int_{S_i} \frac{\partial G_i(r \in S_j/r')}{\partial n_j} dS', \quad (13)$$

$$f_j = \begin{cases} 0 & (j = 1) \\ \int_{V_f} f(r') \frac{\partial G_1(r \in S_j/r')}{\partial n_j} dV' & (j \neq 1) \end{cases}$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим задачу исследования собственных волн H -типа волновода, поперечное сечение которого представляет собой параллелограмм (рис. 2), который можно рассматривать как деформированный прямоугольный волновод. Задача сводится к решению двумерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta_{\perp} u + h^2 u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \forall r \in S_1 \cup S_2. \quad (14)$$

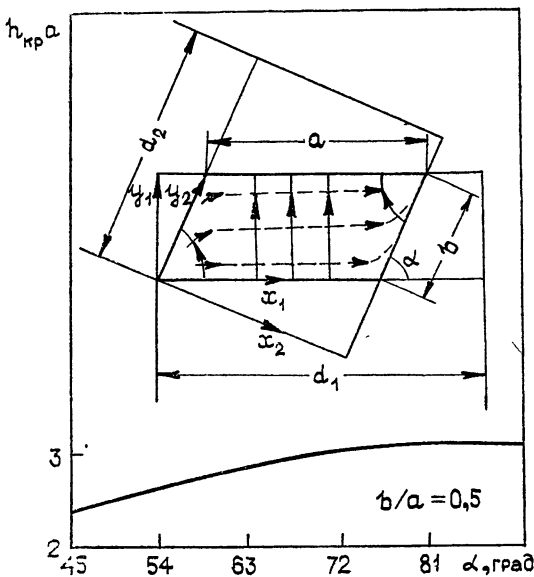


Рис. 2.

Поперечное сечение волновода можно представить как общую часть двух прямоугольников. Решение будем искать в виде (4), где

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -\frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \forall r \in S_1 \cup S_2, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad \forall r \in \bar{S}_i \quad (i=1, 2). \quad (15)$$

Накладывая на функцию Грина граничные условия

$$\frac{\partial G_i(r/r')}{\partial n} = 0 \quad \forall r \in S_i \cup \bar{S}_i \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

и применяя вторую формулу Грина (с учетом (15), (16)), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^a \left(\frac{\partial u_2}{\partial y'_1} G_1 \right)_{y'_1=0} dx'_1 - \int_{b \cos \alpha}^{d_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y'_1} G_1 \right)_{y'_1=b \sin \alpha} dx'_1, \\ u_2 &= \int_0^b \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'_2} G_2 \right)_{x'_2=0} dy'_2 - \int_{a \cos \alpha}^{d_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'_2} G_2 \right)_{x'_2=a \sin \alpha} dy'_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} G_i &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{d_i k_n^i \sin(k_n^i p_i \sin \alpha)} \cos \frac{n \pi v_i}{d_i} \cos \frac{n \pi v_i'}{d_i} \times \\ &\times \begin{cases} \cos k_n^i (z_i - p_i \sin \alpha) \cos k_n^i z'_i & (z_i \geq z'_i) \\ \cos k_n^i z_i \cos k_n^i (z'_i - p_i \sin \alpha) & (z_i < z'_i) \end{cases} \quad (i=1, 2), \\ p_1 &= b, \quad p_2 = a, \quad v_1 = x_1, \quad v_2 = y_2, \quad z_1 = y_1, \quad z_2 = x_2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$k_n^i = \sqrt{h^2 - \left(\frac{n \pi}{d_i} \right)^2}, \quad \delta_{0n} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

a и b — линейные размеры широкой и узкой стенок волновода.

Метод решения системы (17) аналогичен методу решения системы (7). Задача решалась численно с помощью ЭВМ. На рис. 2 приведены результаты расчета нормированной критической частоты $h_{кр} a$ низшей волны типа H при различных значениях угла α . При $\alpha = 90^\circ$ $h_{кр} a$ совпадает с нормированной критической частотой волны H_{10} прямоугольного волновода. На этом же рисунке изображена рассчитанная картина поля этой волны. На рис. 3 приведена зависимость $h_{кр} a$ при $\alpha = 54^\circ$ от числа слагаемых, учитываемых в рядах для функций Грина ($d_1 = a + b \cos \alpha$, $d_2 = b + a \cos \alpha$, N — верхнее значение индекса суммирования). Видно, что с увеличением N влияние слагаемых высшего порядка быстро уменьшается.

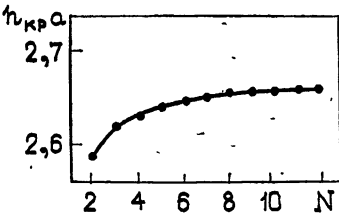


Рис. 3.

Как показал численный расчет, определитель матрицы алгебраической системы при h , близких к критическим значениям волновых чисел частичных областей, может иметь лишние корни. Эти корни могут быть выделены путем изменения размеров частичных областей; при этом они смещаются вдоль числовой оси, в то время как корни, соответствующие

щие критическим частотам исследуемой области, своего положения не меняют. Отметим, что решение получено в виде рядов, кратность которых меньше размерности задачи, что существенно снижает объем вычислений. Получить такое представление решения с помощью других методов для данного класса задач затруднительно.

В качестве примера применения метода «в малом» рассмотрим модельную задачу исследования собственных волн H -типа круглого волновода. Эта задача сводится к отысканию решения уравнения (14), удовлетворяющего однородным граничным условиям Неймана.

Заменим приближенно окружность, совпадающую с контуром волновода, равносторонним вписанным $4N$ -угольником, длина стороны которого равна a (рис. 4). Такой многоугольник можно представить в виде общей части $4N$ квадратов со стороной $d \geq 2R$. Если a мало по сравнению с длиной волны, то решение задачи будут давать формулы (10), (12), (13), где $f(r) = 0$, а функции Грина G_i определяются формулами, аналогичными формуле (18). В рассматриваемом случае система (10) является однородной и условие существования нетривиального решения

$$\det \|\delta_{ji} - (1 - \delta_{ji}) b_{ji}\| = 0 \tag{19}$$

дает уравнение для определения собственных частот H -волн. Учет симметрии задачи позволяет снизить порядок системы алгебраических уравнений в 4 раза.

На рис. 4 приведена зависимость полученной нормированной критической длины волны H_{01} от числа сторон аппроксимирующего многоугольника. Начиная с $4N = 28$ ($a/\lambda \sim 0,14$), отклонение рассчитанного значения от точного уже не превышает 0,015. Расчет критических длин волн других типов подтверждает, что при $a/\lambda < 0,15$ ошибка счета не превышает 1%.

Отметим, что при решении уравнения (19) также появляются лишние корни, которые можно отделить указанным выше способом.

Таблица 1

φ , град	H_{01} , $4N = 52$	$\rho/R = 0,9$	H_{21} , $4N = 40$	$\rho/R = 0,9$
	Приближенные значения	Точное значение	Приближенные значения	Точные значения
18	-0,370		0,385	0,383
54	-0,374	-0,3725	-0,147	-0,146
90	-0,372		-0,477	-0,474

После определения критических длин волн были рассчитаны соответствующие им поля в поперечном сечении волновода. Наибольшая ошибка при расчете поля возникает вблизи границы области, что свя-

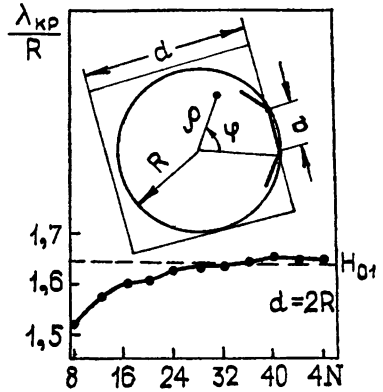


Рис. 4.

зано с приближенностью ее аппроксимации многоугольником. В табл. 1 приведены для сравнения точные и полученные по формуле (12) значения продольных компонент волн H_{01} и H_{21} при $\rho/R = 0,9$. Точные значения получены по формулам

$$u = J_0 \left(3,832 \frac{\rho}{R} \right) \text{ и } u = J_2 \left(3,054 \frac{\rho}{R} \right) \cos 2\varphi \quad [7].$$

Очевидно, что таким же методом может быть исследован любой выпуклый волновод.

Таким образом, рассмотренные примеры подтверждают эффективность приведенной методики при решении описанного класса задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1578 (1973).
2. И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 608 (1974).
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962.
4. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Уравнения в частных производных математической физики, изд. Высшая школа, М., 1970
5. С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, М.—Л., 1959.
6. А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, ЖТФ, 17, № 11, 1283; № 12, 42 (1947).
7. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, В. П. Смирнов, Справочник по элементам волноводной техники, изд. Сов. радио, М., 1967.

Запорожский машиностроительный институт

Поступила в редакцию
26 декабря 1975 г.,
после переработки
6 июля 1977 г.

THE USE OF INTEGRAL EQUATION METHOD FOR SOLVING ONE CLASS ON ELECTRODYNAMICS PROBLEMS

V. P. Chumachenko

The method of calculating the electromagnetic field in the regions representing a common part of simpler ones has been suggested.