

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Иткина М. А. Коэффициент потерь электронов в <i>D</i> -области ионосферы (обзор)	777
Блиох П. В., Минаков А. А. О возможности наблюдения гравитационной фокусировки в радиодиапазоне	802
Григорьев Г. И., Савина О. Н. Метод кинетического уравнения для акустико-гравитационных волн	811
Зборовский В. А., Тиунов Е. А., Фрадкин Э. Е. К теории нелинейного взаимодействия встречных волн произвольных поляризацій в кольцевых газовых лазерах (КГЛ)	816
Кузнецов А. Н., Петухов Ю. М. Влияние поперечных радиочастотных линейно-поляризованных полей на характеристики линий параметрического резонанса	829
Аверков С. И. Изменение амплитуды и фазы колебаний в системах с переменными параметрами	835
Абалиева М. А., Бахвалов Н. С., Воляк К. И., Жилейкин Я. М., Ляхов Г. А. Нестационарное взаимодействие встречных волн в квадратично-нелинейной среде — численный эксперимент	844
Вышкинд С. Я. О возникновении стохастичности при невырожденном взаимодействии волн в средах с усилением	850
Пузенко А. А., Чаевский Е. В. О функции взаимной когерентности поля в закрытом квазиоптическом волноводе с флуктуирующим импедансом на одной из стенок	857
Пузенко А. А. Распределение средней интенсивности в закрытом квазиоптическом волноводе с флуктуирующим импедансом на одной из стенок	865
Беагон В. С., Романычев Ю. Н. О построении схем компенсации фазовых флуктуаций, вносимых кабельной линией связи	875
Беленов А. Ф., Кондратьев И. Г. О поле направленного излучателя в анизотропных средах	879
Рубенок А. А. Метод определения размера источника по дифракционному изображению на основе критерия чебышевского приближения	888
Кейер А. П. Группировка электронного потока с разбросом скоростей электронов в гироклистроне с неоднородным магнитным полем	896
Кейер А. П. Режимы работы выходного резонатора гироклистрона при наличии разброса скоростей электронов в потоке и неоднородного магнитостатического поля	902
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Новиков А. А. Автоколебания в отрезке линии с дискретными активными элементами	911

УДК 551.510.535

**КОЭФФИЦИЕНТ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОНОВ В D-ОБЛАСТИ  
ИОНОСФЕРЫ**

(Обзор)

М. А. Иткина

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## Введение

1. Общие представления о процессах образования и потерь электронов в нижней ионосфере
  2. Экспериментальные сведения о коэффициенте потерь электронов
    - 2.1. Спокойные условия
    - 2.2. Возмущенные условия
    - 2.3. Солнечные затмения
    - 2.4. Выводы
  3. Модели ионизационно-рекомбинационного цикла в D-области
- Заключение

## ВВЕДЕНИЕ

Исследования D-области ионосферы затруднены рядом обстоятельств.

Во-первых, плотность электронов на высотах, меньших 90 км, сравнительно невелика ( $N < 10^4 \text{ см}^{-3}$ ). В связи с этим усложняются методы и увеличиваются погрешности измерений электронной концентрации.

Во-вторых, нормальная D-область характеризуется разнообразием ионов (положительных и отрицательных), роль и концентрации которых еще недостаточно выяснены. Эффективность возможных физико-химических реакций с участием различных ионов также нуждается в уточнении.

В-третьих, на высотах области D очень существенна роль малых нейтральных составляющих (O, NO, O<sub>3</sub>, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub> и др.) в аэрономических процессах, регулирующих баланс ионизации. Концентрации этих составляющих и их вариации в различных условиях до сих пор не измерены с достаточной степенью точности.

Кроме того, для нижней части ионосферы характерно большое число агентов ионизации: космические лучи, излучение в линиях  $L_\alpha$  и  $L_\beta$ , рентгеновское излучение, корпускулярные потоки. Со всеми этими особенностями связано сравнительное отставание теоретических представлений о характере протекающих в нижней части ионосферы физико-химических процессов.

Построение сложных моделей с учетом большого количества реакций, включающих все составляющие, в настоящее время мало перспективно, так как экспериментальные данные о составе нижней ионосферы пока еще недостаточно согласованы и неполны, а лабораторные измерения не позволяют учесть все возможные ионосферные реакции и поэтому не дают достаточно полных сведений о скоростях процессов в ионо-

сфере. Тем не менее, на этом пути сделаны значительные успехи. Так, например, в работах [1, 2], где рассмотрены схемы с участием более 40 составляющих и учтено около 150 реакций, получены расчетные модели для распределений различных ионных и нейтральных составляющих. Правда, судить о степени их достоверности затруднительно, поскольку они основаны на гипотетических данных о скоростях некоторых процессов. Более доступным при современном состоянии экспериментального материала представляется установление эмпирических закономерностей в поведении  $D$ -области и объяснение этих закономерностей на основе упрощенных моделей, описывающих поведение самых важных составляющих, но не учитывающих мало известные детали поведения отдельных компонент (см., например, [3-15]). Один из способов установления таких закономерностей состоит в отыскании функциональной связи между скоростью ионообразования  $Q(h)$  и электронной концентрацией  $N(h)$ . Для описания характера этой связи вводится условный параметр, называемый коэффициентом потерь электронов. Работы по определению коэффициента потерь электронов оказались плодотворными для понимания процессов, происходящих в нижней ионосфере при переходе от спокойных условий к возмущенным.

Настоящий обзор представляет собой попытку обобщить эмпирические сведения и модельные представления о коэффициенте потерь электронов в нижней ионосфере. В первой части обзора излагаются установленные представления о балансе ионизации  $D$ -области. Во второй — рассмотрены и систематизированы полученные за последние 10 лет экспериментальные данные о коэффициенте потерь электронов при различных условиях: спокойных дневных, во время затмений Солнца и в периоды возмущений, связанных с воздействием дополнительных источников ионизации. В третьей части обсуждаются модели ионосферных процессов, предложенные сравнительно недавно для интерпретации экспериментальных данных о коэффициенте потерь и связанных с ними результатов измерений ионного состава.

## 1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОЦЕССАХ ОБРАЗОВАНИЯ И ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОНОВ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

Плотность заряженных частиц в  $D$ -области ионосферы определяется в основном двумя одновременно действующими процессами: образованием и исчезновением (потерями) этих частиц путем рекомбинации и прилипания. Процессы переноса зарядов в  $D$ -области, как правило, не рассматриваются. Это связано с тем, что скорости вертикальных ветров, которые могли бы привести к перераспределению электронов, малы (порядка одного или нескольких метров в секунду), а механизм вертикального перераспределения электронов, обусловленный зональными ветрами в  $D$ -области (скорости зональных ветров порядка  $100 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ), согласно оценкам [16], мало эффективен.

Образование электронно-ионных пар в области  $D$  обусловлено процессами ионизации под действием различных источников. Общее количество электронно-ионных пар, образуемых за единицу времени в единице объема, принято называть функцией ионообразования  $Q$ . Все источники ионизации можно условно разделить на два типа. К первому типу относятся мягкие агенты ионизации (ультрафиолетовое излучение в диапазоне  $\lambda = 1027 \div 1118 \text{ \AA}$  и излучение в линии Лайман- $\alpha$  ( $\lambda = 1216 \text{ \AA}$ )), воздействующие лишь на отдельные атмосферные составляющие (возбужденные молекулы кислорода, окись азота) и приводящие к образованию первичных ионов  $\text{O}_2^+$  и  $\text{NO}^+$ . Ко второму типу относятся жесткие источники (рентгеновское излучение, космические лучи,

потоки протонов и электронов), способные ионизовать все атмосферные компоненты с образованием ионов  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N_2^+$ ,  $N^+$ . Часть ионов, созданных под действием жестких источников ионизации ( $N_2^+$ ,  $N^+$ ,  $O^+$ ), химически активны или нестойки. Они вступают в быстрые реакции с основными составляющими атмосферы и приводят к образованию ионов  $O_2^+$ ,  $NO^+$  и новых молекул (например,  $NO$ ,  $O_3$ ) [17, 18]. Таким образом, устойчивые положительно заряженные ионы, содержащиеся в области  $D$ , — это ионы кислорода и окиси азота ( $O_2^+$  и  $NO^+$ ).

Потери свободных электронов происходят в процессах рекомбинации с положительными ионами или путем прилипания к нейтральным частицам. Процессы рекомбинации, приводящие к образованию нейтральных частиц, идут, как правило, с выделением энергии. Различные формы рекомбинационных процессов и соответствующие им способы выделения избыточной энергии подробно обсуждены, например, в [17]. Избыточная энергия может выделяться в виде излучения (радиативная рекомбинация), передаваться третьему телу (рекомбинация при тройных столкновениях) или идти на диссоциацию образующихся продуктов реакции (диссоциативная рекомбинация). Процессы диссоциативной рекомбинации для основных ионосферных ионов идут на несколько порядков быстрее, чем реакции рекомбинации других типов. Поэтому диссоциативная рекомбинация является основным путем взаимодействия положительных ионов с электронами в  $D$ -области.

Сводку известных в настоящее время численных значений скоростей ионосферных процессов можно найти, например, в [9]. Скорость, с которой исчезают свободные электроны в процессах диссоциативной рекомбинации ( $O_2^+ + e \rightarrow O + O$  и  $NO^+ + e \rightarrow N + O$ ), определяется соотношением

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha_d N M^+, \quad (1)$$

где  $N$  — концентрация электронов,  $M^+$  — концентрация положительных ионов,  $\alpha_d$  — коэффициент диссоциативной рекомбинации.

Значения коэффициентов диссоциативной рекомбинации для положительных ионов  $O_2^+$  и  $NO^+$  следующие:

$$\alpha_d(O_2^+) = 2,2 \cdot 10^{-7} \left( \frac{T}{300} \right)^{-0,7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\alpha_d(NO^+) = 5 \cdot 10^{-7} \left( \frac{T}{300} \right)^{-1} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1},$$

где  $T$  — температура в градусах Кельвина. Наиболее существенным в  $D$ -области процессом присоединения электронов к нейтральным молекулам является прилипание при тройных соударениях. Исчезновение электронов в этом процессе описывается уравнением

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N, \quad (2)$$

где  $\beta$  — константа прилипания. В процессах прилипания к молекулам кислорода в качестве третьего тела участвуют молекулы азота или кислорода. Соответствующие константы прилипания имеют следующие значения:

$$\beta(N_2) = 10^{-31} [O_2] [N_2] \text{ с}^{-1},$$



$$\beta(O_2) = 1,4 \cdot 10^{-29} \frac{300}{T} \exp\left(-\frac{600}{T}\right) [O_2]^2 \text{ с}^{-1},$$

где  $[O_2]$  и  $[N_2]$  — концентрации молекулярного кислорода и азота.

Отрицательные ионы, образованные в процессах прилипания, рекомбинируют с положительными ионами (ион-ионная рекомбинация) или теряют дополнительный электрон в реакциях отлипания.

Величина коэффициента ион-ионной рекомбинации  $\alpha_i$  обычно принимается  $10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  [9].

Эффективность процессов отлипания существенно зависит от типа реакции. В настоящее время известны следующие процессы отлипания: радиативное, ударное, ассоциативное. Если не проводить такого деления по типам, а обозначать эффективную скорость отлипания константой  $\gamma$ , то изменение плотности электронов за счет отлипания определится соотношением

$$\frac{dN}{dt} = \gamma M^-, \quad (3)$$

где  $M^-$  — концентрация отрицательных ионов. В теоретических расчетах [9] величина  $\gamma$  изменяется от 0 до  $10 \text{ с}^{-1}$ . Известные значения скоростей радиативного отлипания  $\gamma_r$  для различных ионов приведены в табл. 1 [17]:

Таблица 1

Ион	$O_2^-$	$O^-, O_3^-$	$NO_2^-$
$\gamma_r, \text{ с}^{-1}$	0,33	1,3	0,04

Скорость отлипания при соударениях зависит от сорта частиц, с которыми сталкиваются отрицательные ионы. Наиболее быстро идет реакция отлипания при столкновении отрицательных ионов  $O_2^-$  с возбужденными молекулами  $O_2$  ( $\Delta_g$ ) [19]. Ее константа при  $T=300 \text{ К}$  составляет  $2 \cdot 10^{-10} [O_2(\Delta_g)] \text{ с}^{-1}$ .

При столкновениях отрицательных ионов с атомами и молекулами возможны химические взаимодействия, приводящие к образованию свободных электронов и новых молекул. Такие процессы называются ассоциативным отлипанием. Они могут быть очень существенны в  $D$ -области. Так, константа реакции  $O_2^- + O \rightarrow O_3 + e$  составляет, согласно [20],  $3 \cdot 10^{-10} [O] \text{ с}^{-1}$ .

Простейшие модели нижней ионосферы строятся на основании уравнений баланса ионизации для электронов и ионов:

$$\frac{dN}{dt} = Q - \alpha_d N M^+ - \beta N + \gamma M^-; \quad (4)$$

$$\frac{dM^-}{dt} = \beta N - \alpha_i M^- M^+ - \gamma M^-; \quad (5)$$

$$\frac{dM^+}{dt} = Q - \alpha_i M^+ M^- - \alpha_d M^+ N, \quad (6)$$

с учетом условия квазинейтральности

$$N + M^- = M^+. \quad (7)$$

Из (4), (5) и (7) получают известное соотношение (см., например, [21])

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Q}{1 + \lambda} - (\alpha_d + \lambda \alpha_i) N^2 - \frac{1}{1 + \lambda} N \frac{d\lambda}{dt}, \quad (8)$$

где  $\lambda = \frac{M^-}{N}$  — относительная концентрация отрицательных ионов.

Уравнение, определяющее  $\lambda$ , имеет вид [22]

$$\frac{1}{1 + \lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \beta - \lambda \left[ \gamma + N(\alpha_i - \alpha_d) + \frac{Q}{N(1 + \lambda)} \right]. \quad (9)$$

В большинстве случаев полагают, что  $\lambda$  медленно изменяется со временем ( $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ ), и уравнения (8) и (9) записываются в виде

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Q}{1 + \lambda} - (\alpha_d - \lambda\alpha_i)N^2; \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\gamma + \frac{Q}{(1 + \lambda)N} + (\alpha_i - \alpha_d)N}. \quad (11)$$

Таким образом, стационарное значение относительной концентрации отрицательных ионов  $\lambda$  должно быть пропорционально скорости прилипания  $\beta$ , которая растет с глубиной атмосферы приблизительно как квадрат плотности нейтральных молекул. Для квазиравновесных условий, т. е. при  $\frac{dN}{dt} \approx 0$ , из уравнения (10) получается хорошо известное соотношение

$$Q = \psi N^2, \quad (12)$$

где введен характерный для определенной рассматриваемой высоты параметр  $\psi$ , называемый коэффициентом потерь электронов. В простейших предположениях, приводящих к уравнению (10), значения параметра  $\psi$  определяются константами  $\alpha_d$ ,  $\alpha_i$  и  $\lambda$ :

$$\psi = (1 + \lambda)(\alpha_d + \lambda\alpha_i). \quad (13)$$

Из соотношения (13) следует, что на каждой фиксированной высоте существует постоянное значение  $\psi$ , которое монотонно возрастает с уменьшением высоты, поскольку увеличивается относительная концентрация отрицательных ионов  $\lambda$ . Однако значительное число экспериментальных данных, полученных за последние 5—7 лет, свидетельствует о том, что величина  $\psi$  существенно изменяется в зависимости от ионосферных условий. В ряде экспериментов обнаружена характерная «ступенька» в высотных распределениях  $\psi(h)$  в верхней части  $D$ -области.

Ниже обсуждаются результаты определения  $\psi(h)$  в  $D$ -области, полученные на основании измерений  $N(h)$ -профилей электронной концентрации.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОНОВ

Наибольшее количество сведений о высотном ходе коэффициента потерь  $\psi(h)$  получено сопоставлением  $N(h)$ -профилей электронной концентрации и функции ионообразования  $Q(h)$ . Непосредственные измерения состава и плотности положительных ионов могут быть использованы для оценок эффективного коэффициента рекомбинации, если

известны значения рекомбинационных констант отдельных ионных составляющих. Результаты таких оценок не выходят за пределы рассматриваемых экспериментальных данных о  $\psi(h)$ . Данные об ионном составе  $D$ -области привлекаются для интерпретации эмпирических сведений о  $\psi(h)$  (см. разд. 3 настоящего обзора).

Рассматриваемые ниже сведения о коэффициенте потерь электронов получены на основании уравнения баланса ионизации (10). В невозмущенной  $D$ -области, как правило, выполняются условия квазиравновесия, и коэффициент потерь  $\psi(h)$  можно находить из соотношения (12). В периоды ионосферных возмущений условия квазиравновесия нарушаются. Однако для достаточно длительных событий, когда отсутствуют быстрые изменения концентрации, можно полагать, что  $\frac{dN}{dt} \ll Q$ ,

и для определения  $\psi(h)$  также пользоваться в первом приближении соотношением (12). Такой способ определения  $\psi(h)$  является наиболее распространенным.

Другие способы нахождения  $\psi(h)$  из уравнения баланса ионизации основаны на дополнительных предположениях относительно функции ионообразования\*. Так, например, в методе, предложенном в работах [23, 24], предполагается, что в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  симметричные относительно местного полудня  $t_n$ , значения  $Q(h)$  равны между собой, а производные  $\frac{dN}{dt}$  также равны по величине, но противоположны по знаку. В [23, 24] показано, что в этом случае

$$\psi(h) = (1 + \lambda) \frac{1}{2N(h)\Delta t}, \quad (14)$$

где  $\Delta t = \frac{t_1 + t_2}{2} - t_n$  — временной сдвиг кривой суточного хода электронной концентрации относительно полудня. При выводе соотношения (14) предполагается, что  $\psi(h)$  не изменится за время измерений.

Аналогичный метод используется для нахождения  $\psi(h)$  в периоды полных солнечных затмений. В таких случаях предполагают, что в течение времени полного затмения функция ионообразования  $Q(h) = 0$ , и находят  $\psi(h)$  по результатам измерений электронной концентрации  $N_1(h)$  и  $N_2(h)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , соответствующие началу и концу полного затмения:

$$\psi(h) = \frac{N_1(h) - N_2(h)}{N_1(h)N_2(h)} \frac{1}{t_2 - t_1}. \quad (15)$$

Профили электронной концентрации  $N(h)$ , используемые для определения  $\psi(h)$ , измеряются как наземными методами (по данным о поглощении радиоволн, полученным методом  $A_2$ ; по распространению радиоволн низких, средних и высоких частот; методами частичных отражений и кросс-модуляции), так и в ракетных экспериментах. Не останавливаясь здесь на рассмотрении методики определения  $N(h)$ -профилей в различных случаях, заметим, что точность получаемых результатов зависит от метода измерений, и это обстоятельство следует иметь в виду при анализе ниже приведенных данных.

При вычислениях функции ионообразования  $D$ -области необходимо учитывать вклад различных источников ионизации. Степень воздействия разных агентов ионизации связана с условиями возмущенности. Поэто-

\* Поскольку в этих методах не учитываются корпускулярные источники ионизации (см., например, [113, 114]), то они приводят к ошибочным результатам.

му результаты экспериментального определения  $\psi(h)$  удобно классифицировать по их отношению к степени ионизации ионосферы.

### 2.1. Спокойные условия

Ионизация  $D$ -области ионосферы в дневных невозмущенных условиях создается несколькими различными источниками: космическими лучами, рентгеновским излучением Солнца с  $\lambda < 100 \text{ \AA}$  и излучением в линии  $L_{\alpha}$  ( $\lambda = 1216 \text{ \AA}$ ), воздействующим на молекулы окиси азота и на колебательно-возбужденные молекулы кислорода [18]. Сравнительно недавно, [25], в качестве источника ионизации возбужденных молекул кислорода  $O_2(^1\Delta_g)$  учтено также излучение с  $\lambda = 1118 \div 1027 \text{ \AA}$ . Вклад перечисленных агентов ионизации в функцию ионообразования спокойной ионосферы может по-разному изменяться в зависимости от уровня солнечной активности, зенитного угла Солнца, географической широты.

Наибольшие неопределенности при расчетах функции ионообразования спокойной дневной  $D$ -области связаны с неточным значением концентрации молекул окиси азота. Разброс экспериментальных и расчетных данных о концентрации  $NO$ , приведенный в работе [26] на основании сопоставления результатов различных авторов, довольно велик. Так, например, на высоте  $h \approx 75 \text{ км}$  значения концентрации  $NO$  по оценкам авторов работы [27] и экспериментальным данным [28] различаются в 10 раз. Отмеченные неопределенности отражаются и на значениях коэффициента потерь электронов. На рис. 1 сплошными кривыми представлены некоторые из результатов определения  $\psi(h)$ , полученные разными авторами за последние 7 лет для спокойных дневных условий (1 — [31],  $\chi = 60^\circ$ ; 2 — [34],  $\lambda = 40^\circ$ ; 3 — [34],  $\chi = 60^\circ$ ; 4 — [34],  $\chi = 70^\circ$ ; 5 — [34],  $\chi = 80^\circ$ ). Нижней пунктирной кривой на рис. 1 и на последующих рисунках показана классическая высотная зависимость  $\psi(h)$ , определяемая соотношением (13)\*. Область значений  $\psi(h)$ , определенная в работе [29] для невозмущенных дневных условий, на рис. 1 заштрихована. Результаты, полученные в [29], основаны на анализе большого количества  $N(h)$ -профилей, измеренных ракетными и наземными методами. При этом функция ионообразования определялась в каждом случае для соответствующего момента времени, широты и уровня солнечной активности. Распределения  $\psi(h)$ , найденные в [30] для периодов восхода Солнца, близки к верхней границе заштрихованной области. Результаты, полученные в [24] для околополуденных часов, примыкают к заштрихованной области со стороны ее нижней границы. Кривой 1 на

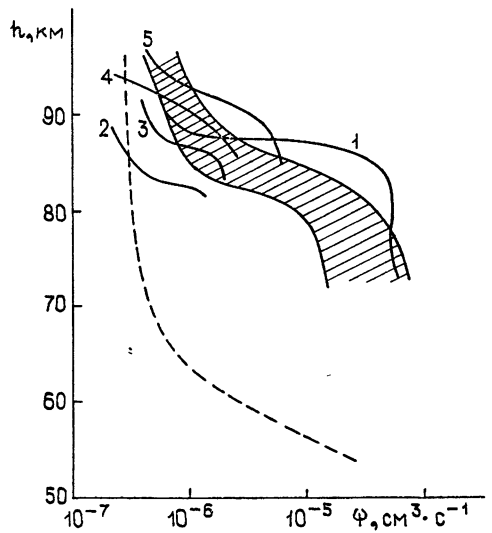


Рис. 1.

рис. 1 заштрихована. Результаты, полученные в [29], основаны на анализе большого количества  $N(h)$ -профилей, измеренных ракетными и наземными методами. При этом функция ионообразования определялась в каждом случае для соответствующего момента времени, широты и уровня солнечной активности. Распределения  $\psi(h)$ , найденные в [30] для периодов восхода Солнца, близки к верхней границе заштрихованной области. Результаты, полученные в [24] для околополуденных часов, примыкают к заштрихованной области со стороны ее нижней границы. Кривой 1 на

\* При построении этой кривой использованы минимальные значения  $\lambda(h)$  из работы [9].

рис. 1 представлен высотный ход  $\psi(h)$ , определенный Ридом [31] по среднеширотным  $N(h)$ -профилям, измеренным на ракетах в 1964—65 гг. при  $\chi = 60^\circ$ . Для вычисления  $Q(h)$  в [31] использовалась модель [NO], соответствующая данным Барта [32] и Пирса [33]. Работа Рида [31] была одной из первых публикаций, в которых сообщались результаты, противоречащие классическим представлениям о монотонном росте значений  $\psi(h)$  с уменьшением высоты. Характерной особенностью кривой 1 является резкий переход на высотах 80—90 км от низких значений  $\psi$  к высоким, а также замедление дальнейшего роста  $\psi(h)$  с уменьшением высоты. Аналогичные характерные «ступеньки» в высотных зависимостях  $\psi(h)$  при различных зенитных углах Солнца были обнаружены в работе Таубенхайма и др. [34]. В работе [34] использованы данные об  $N(h)$ -профилях, найденных по распространению радиоволн низких, средних и высоких частот для среднеширотной ионосферы при  $\chi = 40, 60, 70, 80^\circ$ . В качестве модели [NO] авторы [34] брали расчетные оценки из [27]. Соответствующие распределения  $\psi(h)$  на высотах  $h > 80$  км представлены на рис. 1 кривыми 2, 3, 4, 5. В области высот 70—75 км значения  $\psi(h)$ , полученные в работах [31] и [34], различаются между собой более, чем на порядок. Это различие обусловлено, скорее всего, разницей в исходных значениях [NO]. Заметим, что использованная в [34] расчетная модель плотности NO дает минимальные значения  $\psi(h)$  в сравнении с большинством экспериментальных и теоретических результатов (см. обзоры [26, 35]). Рид [31] получил свое распределение  $\psi(h)$  для максимальных значений [NO] на высотах 75—85 км. Естественно поэтому, что наиболее вероятные значения  $\psi(h)$ , определенные в [24] по ионному составу ионосферы, лежат в промежуточной области между кривой 1 и результатами, найденными в работе [34].

## 2.2. Возмущенные условия

Периоды возмущений, когда  $D$ -область подвергается дополнительному воздействию какого-либо определенного источника ионизации, представляют большой интерес для исследований физико-химических процессов в нижней ионосфере. В сильно возмущенных условиях вклад дополнительного агента ионизации в ионообразование  $D$ -области становится определяющим, и появляется возможность пренебречь нормальной фоновой ионизацией. Такое пренебрежение существенно упрощает методику определения функции ионообразования и исключает ошибки, связанные с неточным знанием концентрации NO. Обратимся к рассмотрению результатов определения коэффициента потерь электронов для различных возмущений.

а) *Внезапные ионосферные возмущения (ВИВ)*. Внезапные ионосферные возмущения вызываются воздействием на ионосферу всплесков рентгеновского излучения, сопровождающих солнечные вспышки. Коэффициент потерь электронов в  $D$ -области в периоды ВИВ\* определялся в работах [4—6, 8, 15, 37—44].

В работе [37] по результатам измерений  $N(h)$ -профилей методом кросс-модуляции во время вспышки 21.X.68 г. впервые было замечено, что величина коэффициента потерь на высоте 80 км уменьшается в сравнении со значением  $\psi$  при нормальных условиях. Подобный же эффект был отмечен в [38, 39], где оценки  $\psi$  проведены на основании тригонометрических измерений величины поглощения радиоволн во время вспышек. Эффекты, замеченные в [37—39], были подтверждены в работе [8], где на основании данных о поглощении радиоволн во время 25 вспышек обнаружено явно выраженное уменьшение значений  $\psi$  на высотах 70

\* О методике определения  $Q(h)$  в периоды ВИВ см., например, [5, 36].

и 80 км с возрастанием потоков рентгеновского излучения в диапазоне 1—8 Å. Некоторые из результатов определения  $\psi(h)$  в периоды ВИБ представлены на рис. 2. Предложенные в [8] модели высотных распределений  $\psi(h)$  для слабых, средних и сильных ВИБ показаны на рис. 2 кривыми 1, 2 и 3 соответственно\* (кривые 1, 2, 3 — [8], 4, 5 — [40], 6 — [42], 7 — [43]). Верхняя пунктирная кривая на рис. 2 воспроизводит результат Рида [31] для невозмущенных дневных условий. Функции  $\psi(h) = Q(h)/N^2(h)$  в периоды ВИБ определялись в работах [15, 40, 41] по данным измерений  $N(h)$ -профилей методом частичных отражений. Монтбриан и Белроуз [40] нашли  $\psi(h)$  для семи случаев ВИБ 1968—69 гг. во время спадающей фазы возмущений (после максимума излучения в диапазоне 0,5—3 Å). Авторы работы [40] обратили внимание на сезонные различия в величинах  $\psi$  для возмущений, слабо различающихся по интенсивности рентгеновского излучения: на высотах ниже 75 км летние значения оказались примерно на порядок выше, чем зимние и весенние. На рис. 2 представлены два из полученных в [40] распределений  $\psi(h)$ : наименьшие по величине  $\psi(h)$  для весенней вспышки средней интенсивности 1.III.70 г. (кривая 4) и наибольшие — для более интенсивной летней вспышки 8.VII.68 г. (кривая 5). В работах [15] и [41] найдены распределения  $\psi(h)$  для нескольких случаев ВИБ в мае — июне 1970 г. Полученные в [15] и [41] результаты показали, что коэффициент потерь электронов уменьшается с возрастанием электронной концентрации как от случая к случаю, так и в течение отдельного возмущения. В период спадающей фазы отдельной вспышки замечено возрастание величины  $\psi(h)$ . Распределения  $\psi(h)$ , полученные в [15] и [41] для вспышек с интенсивностью рентгеновского излучения  $I_{1-8\text{Å}} \approx (2 \div 6,5) \cdot 10^{-2} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , лежат между кривыми 2 и 3 на рис. 2. Усредненное распределение  $\psi(h)$ , найденное в [42] на основании измерений поглощения радиоволн в периоды ВИБ весной и летом 1969 года (когда  $I_{1-8\text{Å}} \approx (2 \div 15) \cdot 10^{-2} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ), представлено на рис. 2 кривой 6. Кривой 7 представлены результаты, полученные в [43] для зимней вспышки 22.I.72 г. по данным длинноволнового распространения радиоволн. Аналогичные измерения во время летних и весенних ВИБ 2.VIII.67 и 27.III.69 гг. [44] привели к значениям  $\psi \approx (5 \div 2) \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  на высотах 60—70 км, что несколько превышает величины из работы [43]. Обратим внимание на то, что большой разброс в значениях  $\psi$  для периодов ВИБ, относящихся к одному сезону, обусловлен прежде всего изменениями интенсивности рентгеновского излучения. Кроме

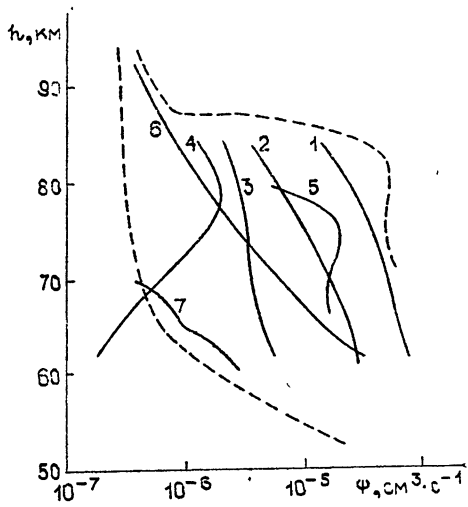


Рис. 2.

\* Согласно классификации Митра [4], интенсивность рентгеновского излучения в диапазоне 1—8 Å для слабых вспышек составляет  $5 \cdot 10^{-4} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , для средних —  $2 \cdot (10^{-2} \div 10^{-3}) \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ , для сильных —  $(2-5) \cdot 10^{-1} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .  
Недавно введена новая классификация рентгеновских вспышек на 3 типа: С, М и Х. Им соответствуют следующие значения потоков  $I_{1-8}$ :  $1 \cdot 10^{-3}$  —  $9 \cdot 10^{-3}$ ,  $1 \cdot 10^{-2}$  —  $9 \cdot 10^{-2}$ ,  $1 \cdot 10^{-1}$  —  $9 \cdot 10^{-1} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  (см. [115]).

того, возможны сезонные различия в значениях  $\psi$ , не связанные, по-видимому, с вариациями ионизирующих потоков.

б) *События, связанные с поглощением в полярной шапке (ППШ), и авроральные возмущения.* Источниками ионизации в периоды ППШ служат солнечные космические лучи (протоны с  $E > 10$  МэВ), а во время авроральных возмущений — электроны с  $E > 40$  кэВ. Вопросы ионообразования в нижней ионосфере под действием этих агентов ионизации обсуждались в ряде работ (см., например, [45–52]). Коэффициент потерь электронов в периоды ППШ определялся в работах [53–64]. На рис. 3а, б кривыми 1–10 представлены высотные распределения  $\psi(h)$ , полученные разными авторами для дневных возмущений типа ППШ (1 — [53], 2 — [54], 3 — [55], 4 — [56], 5 — [57], 6 — [58], 7 — [59], 8 — [60, 61], 9 — [62], 10 — [63]). Верхняя пунктирная кривая на этих рисунках, так же как и на рис. 2, относится к спокойным дневным условиям. На рис. 3а представлены усредненные распределения  $\psi(h)$  (кривые 1–4), полученные по данным риометрических измерений аномального поглощения во время протонных вспышек до 1968 года. Большой разброс в значениях  $\psi(h)$ , обнаруженный по данным авторов [53, 54] для одних и тех же событий 18–21.VI.61 г. (кривые 1 и 2), обусловлен неточностью экспериментальных данных. На рис. 3б представлены результаты, основанные на более поздних ракетных измерениях  $N(h)$ -профилей. Эти результаты отличаются большей надежностью. Кривая 5 построена с учетом исправления Свидером и Дином [62] ошибки, допущенной в [57] при вычислении функции ионообразования. Кривые 8 и 9, полученные разными авторами [60–62] для очень интенсивных дневных ППШ 2–4.XI.69 г., практически совпадают между собой. Заметим, что в эти периоды производились непосредственные ракетные измерения потоков ионизирующего излучения. Характерно, что изменения интенсивности протонов почти на порядок приводили к вариациям  $\psi(h)$  не более чем в два раза [61]. Для дневных случаев 2–4.XI.69 г. получены минимальные значения  $\psi(h)$  из всех наблюдавшихся. Большой разброс в дневных значениях  $\psi(h)$ , обнаруживаемый на высотах 65–75 км для различных событий, по-видимому, выходит за пределы ошибок эксперимента и, возможно, отражает влияние на коэффициент потерь вариаций нейтрального состава ионосферы.

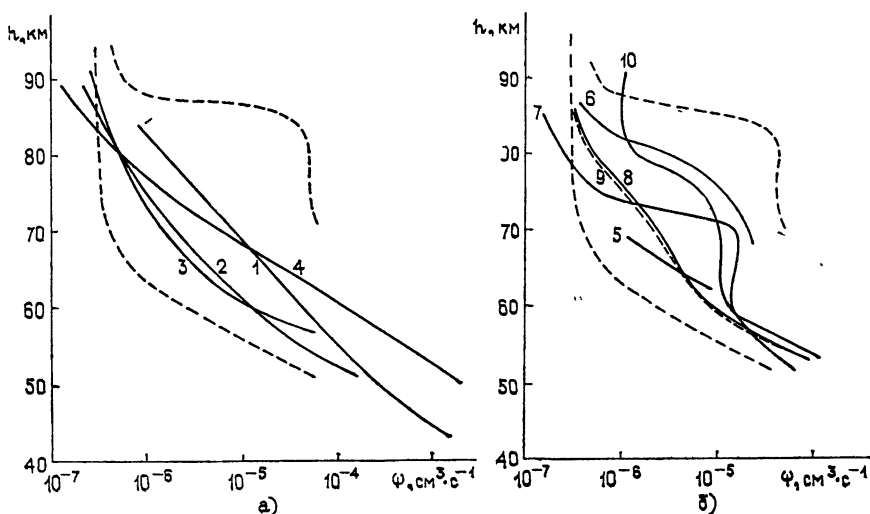


Рис. 3.

Данных о ночных распределениях  $\psi(h)$  в периоды ППШ в литературе немного [58–60, 64]. Они представлены на рис. 4 кривыми 1–4 (1 — [58], 2 — [59], 3 — [60], 4 — [64], 5 — [78], 6 — [79]). Как видно из рисунка, разброс в ночных значениях  $\psi$ , полученных разными авторами, сравнительно невелик. Для

сравнения на том же рисунке показаны возможные ночные величины  $\psi$  в невозмущенных условиях [29] (заштрихованная область), а также  $\psi(h)$  в период полного солнечного затмения [78] (кривая 5) и во время ночного ядерного взрыва [79] (кривая 6). Видно, что ночью, так же как и днем, значения  $\psi$  во время возмущений меньше, чем в спокойных условиях. Ночные величины  $\psi(h)$  во время ППШ на высотах ниже 75 км существенно превышают дневные. Для событий 25.II.69 и 2–3.XI.69 гг. это превышение составляет 1–2 порядка [59, 60]. Авторы [60] полагают, что на этих высотах  $N$  линейно зависит от  $Q$  ( $\psi \sim 1/N$ ).

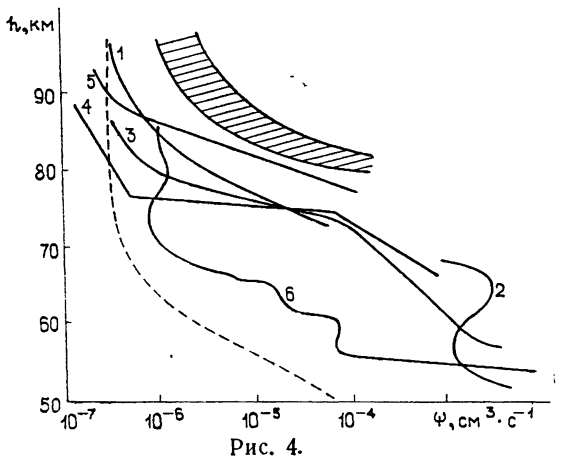


Рис. 4.

В работах [61–63] обращается внимание на восходно-западную асимметрию в распределениях  $\psi(h)$  в периоды ППШ. На рис. 5 представлены высотные зависимости  $\psi(h)$ , полученные в работах [60–62] для событий ППШ 2–4.XI.69 г. Кривые 1, 2, 3, 4 относятся соответственно к ночным, восходным, заходным и дневным условиям. Видно, что величины  $\psi(h)$  на восходе несколько превышают заходные. О такой же асимметрии свидетельствуют восходно-заходные эффекты, наблюдавшиеся при измерениях аномального поглощения в периоды ППШ [52, 65–68]. Имеющиеся в литературе данные относительно авроральных

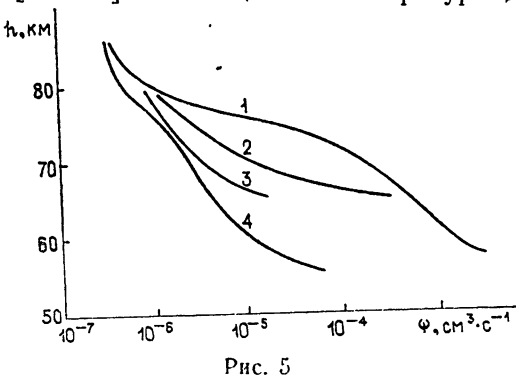


Рис. 5

возмущений сравнительно немногочисленны и получены по ночным ракетным измерениям  $N(h)$ -профилей и потоков выпадающих электронов [69–74]. Эти результаты представлены на рис. 6 (1 — [69], 2 — [73], 3 — [70], 4 — [71, 72], 5 — [74]). Несмотря на некоторый разброс значений  $\psi$  в окрестности мезопаузы, в целом можно отметить неплохое согласие между распределениями  $\psi(h)$ , полученными разными авторами для условий авроральных возмущений.

Отдельные измерения в периоды ночных ППШ и авроральных возмущений свидетельствуют о том, что возрастание  $\psi(h)$  с уменьшением высоты начинает замедляться на уровне около 65 км (см. рис. 4 и 6).

### 2.3. Солнечные затмения

В периоды частных затмений Солнца так же, как и в спокойных дневных условиях, основные неопределенности при расчетах функции



ионообразования обусловлены неточным знанием концентрации окиси азота. Оценки, проведенные в [75] на основании измерений [76, 77], показали, что вклад рентгеновского излучения в ионообразование  $D$ -области во время затмения 20.V.66 г. на два порядка ниже, чем вклад излучения  $L_{\alpha}$ . Это означает, что основная ионизация обусловлена воздействием солнечного излучения на молекулы окиси азота.

Во время полных солнечных затмений основные источники ионизации  $D$ -области, связанные с воздействием солнечного излучения, отсутствуют. Ионизация в этих условиях может создаваться рассеянным излучением солнечной короны и корпускулярными потоками. Однако при вычислении  $\psi(h)$  в периоды солнечных затмений пользуются соотношением (15), которое получено в предположении  $Q(h) = 0$ . Поэтому при вычислении  $\psi(h)$  возможны ошибки,

связанные с пренебрежением всеми источниками ионизации несолнечного происхождения и рассеянным излучением короны Солнца.

В работе [80] подробно проанализированы результаты ракетных измерений во время затмений 29.V.66, 12.XI.66 и 7.III.70 гг. Для всех этих событий наблюдалось резкое изменение градиента электронной концентрации на высотах  $h_0 = 80 \div 90$  км. Характерно при этом, что значения высот  $h_0$  в условиях полной освещенности были несколько ниже, чем во время затмений. Так, для случаев 20.V.66, 12.XI.66 и 7.III.70 гг. перед началом затмений значения  $h_0$  составляли соответственно 80,6; 82,3 и 81 км, во время максимальной фазы затмений — 85,7; 86,8 и 82,5 км. Ниже указанных высот во время всех рассмотренных затмений наблюдалась линейная зависимость между  $N$  и  $Q$ . На аналогичную связь между этими величинами обратили внимание также авторы работ [75, 81, 83]. В работе [75] определялась временная зависимость отношения  $Q/N^2$  на высотах 74 и 80 км в течение кольцевого солнечного затмения 20.V.66 г. При этом  $N(h)$ -профили измерялись на ракетах [82] и методом частичных отражений [84]. Функция ионообразования находилась по данным измерений на ракетах интенсивностей Лайман- $\alpha$  [76] для разных моделей плотности NO (модель Николе соответствует меньшим значениям  $[NO]$ , модель Пирса — большиим  $[NO]$ ). На рис. 7 представлены временные вариации  $\psi(t)$ , полученные в [75] для модели Николе, соответствующей данным Пирса [33] и Барта [32]. Из рис. 7 видно, что коэффициент потерь во время затмения заметно возрастает. Провал во временном ходе  $\psi(t, h)$  связан, скорее всего, с ошибками определения  $N(h)$ -профилей; при учете этих ошибок провал, по мнению авторов [75], может быть сглажен. Измерения плотности

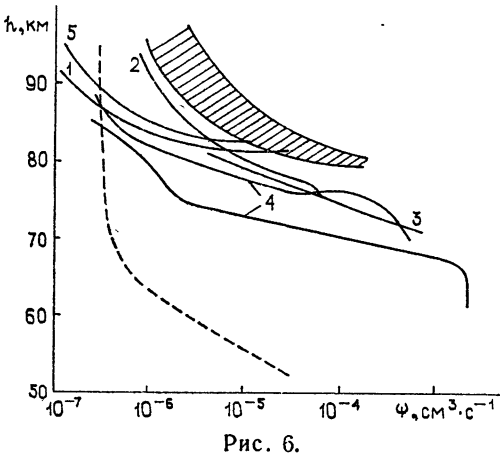


Рис. 6.

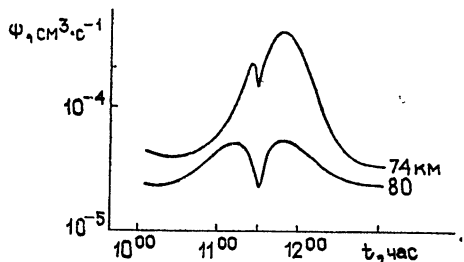


Рис. 7.

положительных ионов во время того же затмения 20.V.66 г. [85] свидетельствуют о том, что относительная концентрация отрицательных ионов  $\lambda$  на высоте 74 км возрастает от очень малых значений перед началом затмения до примерно трех в его максимальной фазе. На возрастание величины  $\lambda$  ниже 80 км во время затмения 7.III.70 г. обращают внимание также авторы работы [78]. Высотный ход  $\psi(h)$ , соответствующий полному солнечному затмению 7.III.70 г. [78], представлен на рис. 4 кривой 5.

## 2.4. Выводы

Общей иллюстрацией изменений экспериментальных значений  $\psi$  в зависимости от степени возмущенности ионосферы является рис. 8. Заштрихованная область, ограниченная пунктирными линиями, соответствует, согласно оценкам [24], наиболее вероятным значениям  $\psi(h)$  в невозмущенных дневных условиях. Кривая 1 характерна для интенсивных дневных ППШ 2—3.XI.69 г. [60, 61]. Кривой 2 представлена зависимость  $\psi(h)$  для ночного времени того же события ППШ [60]. Кривая 3 соответствует периоду полного солнечного затмения 7.III.70 г. [78], а заштрихованная область, ограниченная сплошными линиями, — спокойным ночным условиям [29]. Распределения  $\psi(h)$ , полученные в отсутствие возмущений на восходе Солнца [30], находятся между затменной кривой 3 и заштрихованной областью ночных значений. Величины  $\psi$  во время дневных возмущений лежат между верхней границей области спокойных дневных значений и нижней пунктирной кривой, характеризующей минимальные  $\psi(h)$  согласно классическим представлениям. Характерно при этом, что модель  $\psi(h)$  для сильных солнечных рентгеновских вспышек лежит выше, чем распределение  $\psi(h)$  для интенсивного дневного ППШ (кривая 1). Заметим, что функция ионообразования даже в спадающей фазе этого ППШ на высотах 65—75 км в 5—10 раз превышала  $Q$ , соответствующие сильным внезапным ионосферным возмущениям. Обобщая рассмотренные экспериментальные данные о  $\psi(h)$  в  $D$ -области при различных условиях, можно отметить следующие характерные особенности этого параметра.

1) В высотных распределениях  $\psi(h)$  обнаруживаются характерные «ступеньки», расположенные приблизительно на уровне мезопаузы. Ниже уровня «ступенек» значения  $\psi$  резко возрастают. Высота этого уровня несколько изменяется в зависимости от ионосферных условий: во время возмущений он расположен ниже, чем в спокойных условиях; в периоды затмений и ночью он, наоборот, повышается.

2) В периоды ионосферных возмущений величина коэффициента потерь в области, расположенной ниже уровня «ступеньки», уменьшается по сравнению с нормальными значениями на тех же высотах. Это уменьшение тем больше, чем более интенсивно возмущение. Минимальные значения  $\psi$  достигаются во время интенсивных дневных возмущений типа ППШ.

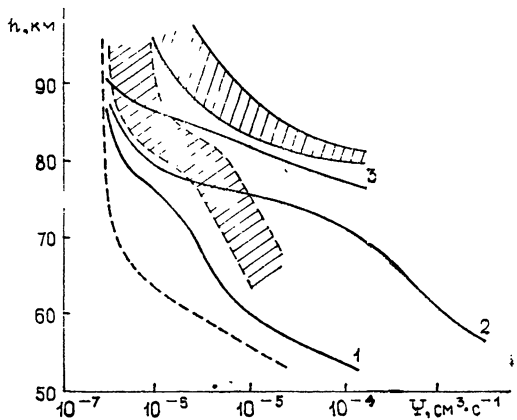


Рис. 8.

3) Во время солнечных затмений и ночью величина  $\psi$  заметно возрастает по сравнению со значениями, наблюдаемыми при условиях полной освещенности. На высотах ниже 80 км в периоды ночных ППШ и затмений отмечается линейная зависимость между  $Q$  и  $N$ . Данные отдельных измерений указывают на то, что в условиях ночных возмущений (авроральных и ППШ) возрастание  $\psi(h)$  с уменьшением высоты начинает замедляться на уровне около 65 км.

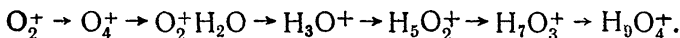
4) Есть основания полагать, что в сумеречные периоды имеет место восходно-заходная асимметрия в распределениях  $\psi(h)$ : значения  $\psi$  на восходе несколько превышают заходные для тех же высот.

5) Возможны существенные сезонные вариации величины  $\psi$ , не связанные с изменениями степени ионизации ионосферы.

### 3. МОДЕЛИ ИОНИЗАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННОГО ЦИКЛА В D-ОБЛАСТИ

Как уже отмечалось выше, трудности моделирования процессов, протекающих на высотах D-области ионосферы, обусловлены недостатком сведений о концентрациях различных ее составляющих (в том числе нейтральных), а также о характере и скоростях химических процессов с участием этих составляющих. Масс-спектрометрическими измерениями ионного состава [35, 86, 87] в D-области были обнаружены значительные количества положительных ионов водных связей типа  $H^+(H_2O)_n$ , скорости рекомбинации которых с электронами приблизительно на полтора-два порядка превышают рекомбинационные константы ионов  $NO^+$  и  $O_2^+$ .

Согласно современным воззрениям [9-14], положительные ионы-связки в D-области образуются из первичных ионов  $O_2^+$  и  $NO^+$  при участии паров воды и радикалов типа  $OH$ ,  $HO_2$ . Цепочка процессов преобразования ионов  $O_2^+$  в связки выглядит следующим образом:



Эффективность этой системы процессов зависит от соотношения между концентрациями паров воды и атомарного кислорода. Дело в том, что промежуточный ион  $O_4^+$  может разрушаться атомарным кислородом по реакции  $O_4^+ + O \rightarrow O_2^+ + O_3$ , которая идет с константой  $k_1 = 3 \cdot 10^{-10} [O] \text{ с}^{-1}$  и препятствует процессу гидратации  $O_4^+ + H_2O \rightarrow O_2^+ \cdot H_2O + O_2$ , константа которого определяется величиной  $k_2 = 10^{-9} [H_2O] \text{ с}^{-1}$ . В области высот, где  $k_1 \gg k_2$ , связки из ионов  $O_2^+$  не образуются. Поэтому верхняя граница области, где возможно эффективное образование связей из  $O_2^+$ , определяется условием  $[O]/[H_2O] \leq 3$ .

Пути образования связей из ионов  $NO^+$  в настоящее время точно не известны. Тем не менее есть основания полагать, что в отсутствие возмущений днем ионы  $NO^+$  являются главным источником гидратированных связей на высотах 75—80 км [9, 11, 13]. Верхняя граница области, где наблюдались ионы-связки в нормальной дневной D-области, расположена на уровне 80—82 км. Ночью, в сумерки и во время затмений эта граница смещается на несколько километров вверх, а в периоды возмущений она понижается. Уровень исчезновения ионов-связок соответствует высоте, на которой отмечается характерная «ступень» в высотных распределениях коэффициента потерь электронов  $\psi(h)$ . Влияние положительных ионов-связок на баланс ионизации области D отражено простейшим способом в двухионной модели, предложенной Хаугом и Ландмарком [3]. В этой модели не рассматриваются многочисленные разновидности ионов-связок, которые, вообще говоря, имеют различные коэффициенты рекомбинации в диапазоне  $10^{-6} \div 10^{-5} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ . Особен-

ность двухионной модели состоит в том, что в ней учтены только два сорта положительных ионов. Одни из них являются первичными — это ионы  $O_2^+$  и  $NO^+$ . Концентрацию этих ионов будем обозначать  $M^+$ . Другие — вторичные положительные ионы — отождествляются с гидратированными связками. Их концентрацию обозначим  $Св^+$ . Предполагается, что скорость образования ионов  $Св^+$  пропорциональна плотности первичных ионов  $M^+$ , и учитывается, что коэффициент рекомбинации ионов-связок  $\alpha_{св}$  существенно превышает  $\alpha_d$  первичных ионов. Уравнения баланса ионизации для ионов  $M^+$  и  $Св^+$  в пренебрежении отрицательными ионами имеют вид

$$\frac{dM^+}{dt} = Q - VM^+ - \alpha_d M^+ N, \quad (16)$$

$$\frac{dСв^+}{dt} = VM^+ - \alpha_{св} Св^+ N,$$

где введена константа  $B$ , характеризующая скорость перехода ионов  $M^+$  в  $Св^+$ . Решая систему уравнений (16) для стационарных условий совместно с условием квазинейтральности, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\frac{Св^+}{M^+} = \frac{B}{\alpha_{св} N}; \quad (17)$$

$$Q = \alpha_{св} \frac{\alpha_d N + B}{\alpha_{св} N + B} N^2. \quad (18)$$

Из (18) следует, что

$$\psi = \alpha_{св} \frac{\alpha_d N + B}{\alpha_{св} N + B}. \quad (19)$$

В предельном случае, соответствующем малым относительным концентрациям связок  $Св^+/M^+ \ll 1$  ( $B \ll \alpha_{св} N$ ), из (19) получаем

$$\psi = \alpha_d + B/N.$$

На высотах, где  $Св^+/M^+ \ll 1$  и  $B \ll \alpha_d N$ , величина  $\psi \rightarrow \alpha_d$ . На тех высотах  $D$ -области, где относительная концентрация положительных связок велика,  $Св^+/M^+ \gg 1$  ( $B \gg \alpha_{св} N$ ), величина коэффициента потерь электронов определяется в первом приближении коэффициентом рекомбинации связок  $\psi \rightarrow \alpha_{св}$ .

Двухионная модель анализировалась (при иных обозначениях) в работах [14, 15]. Относительная концентрация ионов-связок в [14] и [15] характеризовалась параметрами  $f^+ = Св^+/M^+$  и  $\delta = Св^+/N$ . Выражение для коэффициента потерь, эквивалентное (19), в [14] представлено в виде

$$\psi = \frac{\alpha_d + f^+ \alpha_{св}}{1 + f^+}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что при  $f^+ \ll 1$   $\psi \rightarrow \alpha_d + f^+ \alpha_{св}$ , а в противоположном предельном случае  $f^+ \gg 1$   $\psi \rightarrow \alpha_{св}$ .

Таким образом, вариации коэффициента потерь  $\psi$  объясняются в рамках двухионной модели изменениями относительного содержания положительных ионов-связок. Соотношение между концентрациями  $[O_2^+]$  и  $[NO^+]$  определяет роль каждого из этих ионов в процессах образования связок на разных высотах и в различных условиях возмущенности. В спокойных дневных условиях на высотах 75—80 км связки образуются в основном из ионов  $NO^+$ , а ниже 65 км, где ионы  $NO^+$

практически отсутствуют, основным источником связей могут быть ионы  $O_2^+$ . В периоды возмущений, когда под действием дополнительных жестких источников ионизации концентрация  $[O_2^+]$  возрастает в сравнении с  $[NO^+]$  на всех высотах  $D$ -области, ионы  $O_2^+$  становятся главным источником связей. Вариации соотношения между концентрациями  $[O_2^+]$  и  $[NO^+]$  могут привести к изменениям скорости образования ионов-связок. Изменения относительной концентрации ионов-связок приводят к изменениям коэффициента потерь.

Однако для интерпретации эффектов изменения  $\psi(h)$  ниже 70—75 км такое объяснение оказывается недостаточно полным. Это связано с усложнением ионного состава на высотах нижней части  $D$ -области. На основании ракетных измерений проводимости в нормальной дневной среднеширотной мезосфере осенью 1971 и зимой 1971—72 годов на высотах 30—80 км в [89, 90] было показано, что вариации электронной концентрации не коррелируют с изменениями плотности положительных ионов. Если предположить, как это делается в [89], что изменения концентрации электронов в этих случаях обусловлены вариациями коэффициента потерь  $\psi$ , то значения  $\alpha_d$  и  $\lambda = M^-/N$ , которые удовлетворяют равновесному уравнению баланса ионизации (12), должны изменяться на высотах 65—80 км в следующем диапазоне  $\alpha_d = (2 \div 10) \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\lambda = 1 \div 10$ . При этом изменения коэффициента потерь электронов вызываются совместным влиянием вариаций относительных концентраций положительных и отрицательных ионов.

Непосредственные измерения плотности и состава отрицательных ионов в периоды возмущений пока немногочисленны и отчасти противоречивы [91, 92]. Экспериментальные данные об ионном составе нижней ионосферы ночью и во время затмений свидетельствуют о его усложнении по сравнению со спокойными и, тем более, с возмущенными условиями [35, 80, 93, 94]. Согласно этим данным, относительная концентрация положительных связей ночью на уровне мезопаузы возрастает приблизительно на порядок сравнительно с нормальными условиями, а на высотах 73—92 км обнаружены значительные концентрации ( $M^- > 10^3 \text{ см}^{-3}$ ) тяжелых отрицательных ионов с массовыми числами 60, 62, 76, 78, 80, 98, 116, 134 и 152. На высоте около 88 км был зафиксирован слой очень тяжелых ионов с массовым числом, превышающим 150. Предполагается, что это отрицательные связки типа  $NO_3^-(H_2O)_n$  [93, 94]. Сложность ионного состава  $D$ -области, в особенности ночью и во время затмений, требует привлечения более сложных моделей для описания физико-химических процессов в таких условиях. В работе [10] обращается внимание на то, что для высот ниже 75 км необходимо учитывать отрицательные ионы двух типов: первый тип — с малым временем жизни ( $\tau < 1 \text{ с}$ ) — это  $O_2^-$ ,  $O_4^-$ ,  $CO_4^-$ ,  $O_3^-$ ,  $CO_3^-$ ; второй тип — стабильные ионы  $NO_2^-$ ,  $NO_3^-$  и отрицательные связки. Заметим, что изменение относительных концентраций первичных и стабильных отрицательных ионов должно оказывать влияние на величину коэффициента потерь электронов  $\psi$ .

Простейший способ учета отрицательных ионов при моделировании процессов в нижней части области  $D$  состоит в том, что рассмотренная выше двухионная модель дополняется параметром  $\lambda$  [3, 14, 15].

Из системы уравнений непрерывности для электронов и отрицательных ионов с учетом положительных связей и условия квазинейтральности можно получить следующее соотношение:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{Q}{1+\lambda} - N^2 \frac{d\lambda}{dt} + \frac{M^+(\alpha_d + \lambda\alpha_i) + C_{B^+}(\alpha_{CB} + \lambda\alpha_i)}{M^+ + C_{B^+}} \quad (21)$$

Если производная  $\frac{dN}{dt}$  мала в сравнении с членами, стоящими в правой части уравнения (21), то коэффициент потерь электронов можно рассматривать в виде

$$\psi = (1 + \lambda) \frac{\frac{d\lambda}{dt} + C_{\text{св}}^+(\alpha_{\text{св}} + \lambda\alpha_i) + M^+(\alpha_d + \lambda\alpha_i)}{M^+ + C_{\text{св}}^+} \quad (22)$$

Из (22) следует, что в области высот, где  $\lambda > 1$ , величина  $\psi$  зависит не только от относительных концентраций положительных ионов, но также от относительного содержания отрицательных ионов  $\lambda$  и от его изменения во времени  $\frac{d\lambda}{dt}$ . В равновесных условиях  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  и коэффициент потерь зависит от установившихся относительных концентраций положительных и отрицательных ионов. Вариации этих концентраций с изменением степени возмущенности ионосферы могут привести к изменениям величины  $\psi$ . Качественная интерпретация наблюдаемых вариаций  $\psi$  в периоды ВИБ дана в работах [4, 6, 37], где эти вариации объясняются совместным влиянием уменьшения параметров  $\frac{C_{\text{св}}^+}{M^+ + C_{\text{св}}^+}$  и  $\lambda$ .

Для условий полных затмений Солнца, когда ионообразование  $Q$  становится очень малым, временными изменениями электронной концентрации в уравнении (21) пренебрегать нельзя ( $\frac{dN}{dt} \gg Q$ ). Коэффициент, стоящий при  $N^2$  в правой части уравнения (21), в течение времени затмения также изменяется. Это изменение связано с выключением в период затмения процессов радиативного и ассоциативного отлипания, что ведет к нарастанию со временем концентрации отрицательных ионов ( $\frac{d\lambda}{dt} \neq 0$ ). Оценки изменений величины  $\lambda$  в течение времени полного затмения показывают, что значения  $\frac{d\lambda}{dt}$  могут достигать порядка  $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . При концентрации связок  $C_{\text{св}}^+ = 10^3 \text{ см}^{-3}$  член  $\frac{d\lambda}{dt}$  становится сравнимым с  $\alpha_{\text{св}} C_{\text{св}}^+$  и может оказать существенное влияние на значения коэффициента потерь электронов во время затмения.

В работе [95] была установлена линейная зависимость между экспериментальными величинами  $\frac{Q}{1 + \lambda}$  и  $N$ , относящимися к периоду кольцевого солнечного затмения 20.V.66 г. на высотах 74 и 80 км. Заметим, что для рассматриваемых в [95] экспериментальных данных справедливо соотношение (22). Из (22) следует, что для установления линейной связи между  $\frac{Q}{1 + \lambda}$  и  $N$  относительные концентрации положительных и отрицательных ионов должны изменяться таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{1 + \lambda} \left[ \frac{d\lambda}{dt} + C_{\text{св}}^+(\alpha_{\text{св}} + \lambda\alpha_i) + M^+(\alpha_d + \lambda\alpha_i) \right] = \text{const.} \quad (23)$$

Для ночных условий, когда устанавливается равновесное распределение концентраций  $\left(\frac{dN}{dt} = 0, \frac{d\lambda}{dt} = 0\right)$ , получаем

$$Q = N[C_{\text{св}}(\alpha_{\text{св}} + \lambda\alpha_i) + M(\alpha_d + \lambda\alpha_j)]. \quad (24)$$

В работах [7, 96, 97] анализировался характер потерь электронов в  $D$ -области в периоды ночных ППШ. Довольно подробная схема реакций во время ночного ППШ рассмотрена в работе Свидера и Нарцисси [7]. В отличие от двухионной модели количество ионов, рассматриваемых в модели ночного ППШ [7], значительно увеличено. Детализирован вид первичных ионов ( $O_2^+$  и  $NO^+$ ), учтены ионы  $O_4^+$  в качестве промежуточных в цепи образования связок из ионов  $O_2^+$ . Принимая во внимание, что во время возмущений может повышаться температура, авторы работы [7] рассматривают и обратную реакцию, препятствующую образованию ионов  $O_4^+$ :  $O_4^+ + M \rightarrow O_2^+ + O_2 + M$ . Эффективность этой реакции возрастает с ростом температуры  $\left(k = 3,3 \cdot 10^{-8} \left(\frac{300}{T}\right)^4 \times \exp\left(-\frac{5030}{T}\right) \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}\right)$ . В систему реакций включен процесс разрушения иона  $O_4^+$  атомарным кислородом:  $O_4^+ + O \rightarrow O_2^+ + M$ . Поэтому возрастание температуры и концентрации атомарного кислорода во время ППШ должно приводить к уменьшению концентраций связок. Более 15 реакций приняты в [7] в качестве возможной схемы образования различных положительных ионов-связок из  $O_2^+$  и  $NO^+$ . Проведен также детальный учет возможных реакций диссоциативной рекомбинации положительных ионов с электронами. Оценочные значения коэффициентов рекомбинации 14 различных положительных связок, принятые для расчетов, находятся в диапазоне  $\alpha_{\text{св}} \approx (1 \div 5) \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ . Численным решением системы уравнений, учитывающих 41 реакцию, в [7] найдены распределения концентраций электронов, ионов и малых нейтральных составляющих ( $O$ ,  $H_2O$ ). Расчетные кривые сопоставлены с результатами измерений концентраций положительных ионов во время ночного ППШ 3.XI.69 г. [91]. Получено неплохое согласие между расчетными и экспериментальными кривыми. Сопоставляя свою модель для условий ППШ с расчетами для спокойной  $D$ -области, авторы [7] подтверждают выводы о том, что в периоды ППШ положительные связки образуются в основном из ионов  $O_2^+$ , в то время как в спокойных условиях они должны создаваться также из  $NO^+$  [11, 13].

Учет отрицательных ионов в схеме ночного ППШ [7] сказывается на характере потерь электронов. Выключение в ночных условиях процессов фотоотлипания должно приводить к возрастанию концентраций отрицательных ионов по сравнению с их дневными значениями. Стабильные отрицательные ионы в модели [7] непосредственно не рассматриваются. Роль вторичных отрицательных ионов, образующихся из  $O_2^-$ , играют ионы  $O_4^-$ . Общая относительная концентрация отрицательных ионов характеризуется параметром  $\lambda = [O_2^-] + [O_4^-]/N$ . Изменения относительных концентраций ионов  $O_2^-$  и  $O_4^-$  в [7] не анализируются.

Рассматривая вопросы моделирования процессов в  $D$ -области, следует подробнее остановиться на полумпирической шестионной схеме, предложенной в работе Митра и Роу [8]. В этой модели задаются в качестве исходных параметры, основанные на известных опытных данных о составе  $D$ -области в различных условиях возмущенности.

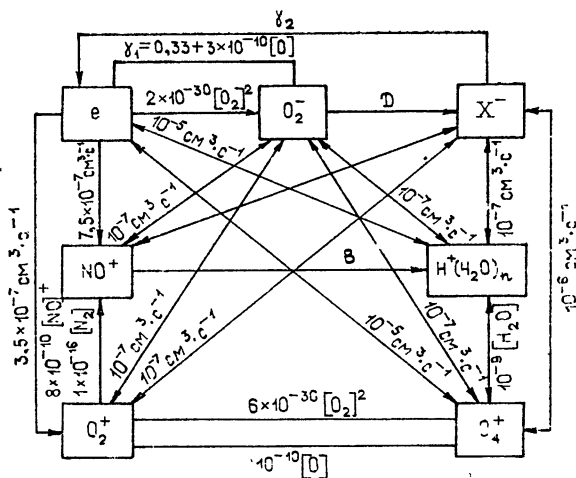


Рис. 9.

Схема Митра и Роу показана на рис. 9. Над стрелками, соединяющими обозначения ионов на рис. 9, проставлены принятые в расчетах константы соответствующих реакций. Высотные распределения параметров  $B$ ,  $D$  и  $\gamma_2$ , принятые в [11] для расчетов по шестиионной схеме, представлены на рис. 10.

На рис. 11 представлены рассчитанные на основании шестиионной модели высотные распределения  $\psi(h) = Q(h)/N^2(h)$  для различных условий: дневных и ночных ППШ, сильной рентгеновской вспышки, спокойного дня, полного затмения (кривые 1—5) [11]. Видно, что с ростом возмущенности расчетные величины  $\psi$  уменьшаются: они максимальны во время затмения и минимальны для случаев дневных ППШ.

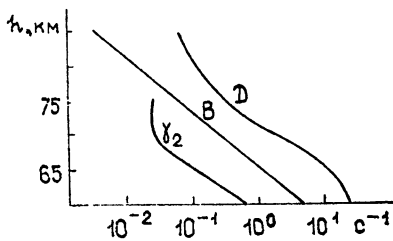


Рис. 10.

Расчетные значения высоты уровня «ступеньки» в распределениях  $\psi(h)$  с точностью до 1—2 км совпадают с экспериментальными значениями уровня исчезновения ионов-связок. Ночью, во время затмения и в сумеречные часы этот уровень расположен на высотах около 85—86 км. В дневных спокойных условиях он опускается до 81—82 км. В ночных возмущенных условиях он смещается до 76—78 км, а в периоды возмущений днем — до 72—74 км. Процентное содержание положительных ионов-связок на высоте 80 км, согласно расчетам, изменяется при изменении условий следующим образом: ночью оно составляет 100%, во время полных затмений — 90%, днем в спокойных условиях — 60%, во время сильной вспышки — 10%, в периоды ППШ днем — 4%, ночью — 6%. С уменьшением высоты расчетные изменения состава положительных ионов при переходе к возмущенным условиям менее заметны. Расчетные значения параметра  $\lambda$  уменьшаются во время дневных ППШ и вспышек на высоте  $h \approx 70$  км в два раза. Расчеты по шестиионной модели показывают, что вторичные отрицательные ионы  $X^-$  становятся преобладающими ниже определенного уровня, а выше этого уровня основные отрицательные ионы — это  $O_2^-$ . Для спокойных дневных условий уровень исчезновения ионов  $X^-$  расположен приблизительно



но на высоте около 75 км. Во время ППШ и сильных вспышек он опускается до 70 км, а в периоды затмений и ночью поднимается примерно до 80 км. Для случаев ночных ППШ этот уровень ниже, чем в спокойных ночных условиях и во время затмений, но выше, чем во время ППШ днем.

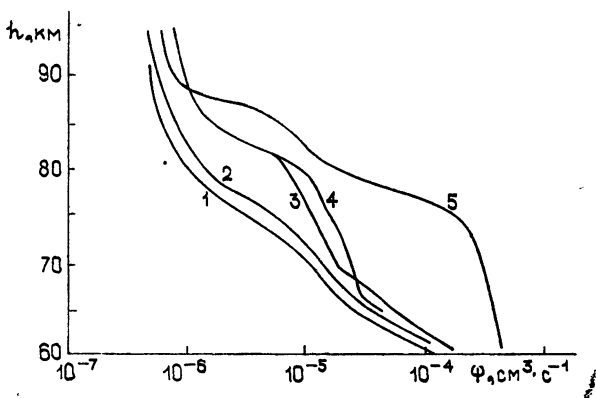


Рис. 11.

Шестиинионная модель качественно правильно отражает изменения ионного состава в различных условиях. Однако в [11] отмечаются отдельные противоречия между экспериментальными данными и результатами расчетов по шестиинионной модели. Так, по экспериментальным данным  $\phi$  уменьшается с ростом функции ионообразования значительно быстрее, чем в расчетах. Кроме того, согласно расчетам ниже 70 км во время ППШ относительные концентрации ионов-связок практически не уменьшаются и, следовательно, на этих высотах во время ППШ величины  $\phi$  не должны существенно отличаться от спокойных дневных значений. В то же время экспериментальные значения  $\phi$  в нижней части *D*-области в периоды ППШ гораздо меньше, чем в отсутствие возмущений. Эти противоречия могут быть связаны с неточными оценками каких-либо расчетных параметров. Вполне вероятно, например, что значения параметра *B* для случаев дневных ППШ завышены на малых высотах, так как не учтена зависимость этой величины от состояния ионизации. В целом результаты расчетов по шестиинионной схеме находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными и правильно отражают характер изменений  $\phi$ . При переходе от спокойных условий к возмущенным ионный состав области *D* упрощается. Это приводит к уменьшению коэффициента потерь. Переход к ночным условиям, наоборот, влечет за собой усложнение ионного состава и возрастание коэффициента потерь. Шестиинионная модель в дальнейшем может быть детализирована и уточнена: следовало бы установить пути и скорости образования ионов-связок из  $\text{NO}^+$ , определить тип стабильных отрицательных ионов, оказывающих влияние на баланс ионизации *D*-области (особенно в сумеречных и ночных условиях), уточнить скорости образования и разрушения этих ионов.

С точки зрения детализации шестиинионной модели представляют, в частности, интерес исследования изменений скорости образования положительных ионов-связок [12, 13].

Данилов и Симонов [12, 13] на основании анализа экспериментальных данных, опубликованных в [86, 87, 93, 100–107], показали, что отношение  $[\text{Cv}^+]/[\text{O}_2^+ + \text{NO}^+]$  на высотах 80 и 85 км уменьшается с ростом *N* гораздо быстрее, чем это следует из соотношения (17). Поэтому для

согласования соотношения (17) с экспериментальными данными в [12] сделано предположение, что параметр  $B$  зависит от концентрации электронов. Более детальный анализ результатов измерений ионного состава на высотах 80 и 85 км, проведенный в [13], показал, что эффективность образования ионов-связок  $Св^+$  из ионов  $O_2^+$  ( $В_{O_2^+}$ ) практически не зависит от условий и равна  $5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$  на  $h = 80$  км и  $2 \cdot 10^{-4} c^{-1}$  на  $h = 85$  км. Скорость образования  $Св^+$  из ионов  $NO^+$  ( $В_{NO^+}$ ), согласно оценкам [13], изменяется приблизительно обратно пропорционально электронной концентрации и составляет около  $2 \cdot 10^{-2} c^{-1}$  в дневных спокойных условиях на высоте  $h = 80$  км. В периоды возмущений эта величина уменьшается, а во время затмений возрастает. Ни один из известных в настоящее время фотохимических процессов не может объяснить одновременно и необходимую величину скорости образования связок из ионов  $NO^+$ , и необходимые изменения ее в зависимости от электронной концентрации.

Одной из попыток преодолеть трудности этой задачи является предположение о существовании на высотах мезосферы нейтральных связок  $Св$ , которые вступают в быстрые реакции перезарядки (со скоростью  $\eta$ ) с обычными ионосферными ионами [15, 98, 99]. При этом предполагается, что суммарная концентрация нейтральных и положительно заряженных связок, образуемых при перезарядке, сохраняется постоянной на определенной высоте в течение достаточно длительного периода времени:

$$Св + Св^+ = C. \quad (25)$$

В условиях фотохимического равновесия концентрация ионов-связок в этом случае определяется соотношением

$$\alpha_{св} N Св^+ = \eta Св M^+. \quad (26)$$

В таких предположениях можно объяснить замеченное в [13] изменение скорости образования связок из ионов  $NO^+$  на высотах 80 и 85 км в зависимости от степени ионизации. Так, например, в периоды ионосферных возмущений все нейтральные связки быстро переходят в заряженное состояние и поэтому дальнейшее образование ионных связок путем перезарядки прекращается. Ночью и во время затмений, наоборот, возможно присутствие значительного количества нейтральных связок на высотах  $D$ -области, процессы перезарядки далеки от насыщения и скорость образования связок из  $NO^+$  может возрастать в сравнении с дневными значениями. Параметр  $Св$ , условно характеризующий в модели [98, 99] концентрацию нейтральных связок, может иметь, в принципе, и другой физический смысл. В частности, он может описывать какой-либо промежуточный ион или малую нейтральную компоненту, участвующую в процессах превращения первичных ионов в связки.

Для выяснения характера процессов, протекающих днем на высотах ниже 70—75 км и ночью во всей области  $D$ , необходимо установить тип стабильных отрицательных ионов. Существующие в настоящее время экспериментальные данные не позволяют пока сделать этого. Специального анализа требуют процессы образования и разрушения стабильных отрицательных ионов. Можно ожидать, что с изменением скоростей этих процессов связаны эффекты восходно-заходной асимметрии в распределениях  $\psi(h)$  [61—63, 108—110]. Необходимы измерения концентраций малых нейтральных составляющих. С изменениями этих концентраций связаны, по-видимому, сезонные и широтные вариации  $\psi(h)$

[40, 60, 95, 99]. Это предположение подтверждается пока еще немногочисленными измерениями плотностей NO с помощью спутников [111], а также измерениями состава  $D$ -области зимой [112]. В работе [111] обнаружено, что плотность NO при переходе от средних широт к высоким возрастает в 3—6 раз. В зимней мезосфере уменьшается относительная доля положительных связей, по-видимому, за счет возрастания плотностей NO, O<sub>3</sub>, O при сезонных вертикальных переносах этих составляющих [112].

Очевидно, что для продолжения исследований процессов, протекающих на высотах области  $D$ , необходимы более полные и надежные сведения о концентрациях заряженных и малых нейтральных составляющих, а также о скоростях реакций между этими составляющими. Эти сведения могли бы послужить основой для построения более полной модели процессов в области  $D$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, за последние 5—10 лет представления о процессах потерь электронов в  $D$ -области ионосферы существенно изменились. Совокупность имеющихся экспериментальных данных свидетельствует о том, что на баланс ионизации  $D$ -области оказывают влияние ее сложный ионный состав и малые нейтральные составляющие. В частности, на высотах ниже 80—85 км обнаружены значительные концентрации положительных гидратированных ионов. Верхняя граница области, где наблюдаются такие ионы, совпадает с уровнем, на котором отмечаются ступеньки в высотных распределениях коэффициента потерь электронов  $\psi(h)$ . Выяснилось также, что величина коэффициента потерь  $\psi$  зависит от степени ионизации, уменьшаясь с ростом функции ионообразования  $Q$ . Зависимость  $\psi$  от  $Q$  в верхней части  $D$ -области можно объяснить изменениями относительной концентрации положительных ионов-связок. В области высот ниже 70—75 км изменения величины  $\psi$  в значительной мере обусловлены, по всей вероятности, вариациями относительных концентраций стабильных отрицательных ионов.

Для интерпретации ряда закономерностей, касающихся баланса ионизации области  $D$ , созданы упрощенные полуэмпирические модели. Эти модели не дают детальной картины всех физико-химических процессов, но качественно правильно отражают основные характерные особенности вариаций ионного состава и величины  $\psi$  в зависимости от функции ионообразования. Некоторые неясные вопросы могут быть в дальнейшем решены и более подробно рассмотрены в рамках этих моделей. К таким вопросам относятся прежде всего детализация путей и уточнение эффективности образования связей из ионов NO<sup>+</sup>, а также определение типа стабильных отрицательных ионов. Специального исследования требуют процессы образования и разрушения стабильных отрицательных ионов.

Многие проблемы физико-химии  $D$ -области трудно решить на основании полуэмпирических моделей. Так, например, недостаточно исследованы изменения концентраций малых нейтральных составляющих, которые могут привести к существенным вариациям коэффициента потерь. Дальнейшая работа в этом направлении могла бы способствовать выяснению механизма сезонных изменений электронной плотности. Для построения полной модели процессов в  $D$ -области необходимы дальнейшие систематические и более надежные измерения состава нижней ионосферы, в особенности, на высотах ниже 75 км, а также лабораторные измерения скоростей возможных химических реакций.

В заключение выражаю благодарность В. В. Беликовичу, Е. А. Бенедиктову, Л. М. Ерухимову, Г. И. Тёриной и А. В. Толмачевой за проявленное к работе внимание и критические замечания к тексту рукописи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. G. Hunt, *J. Atm. Terr. Phys.*, **35**, 1755 (1975).
2. T. Ogavo and T. Shimazaki, *J. Geophys. Res.*, **80**, 3945 (1975).
3. A. Haug and B. Landmark, *J. Atm. Terr. Phys.*, **32**, 405 (1970).
4. A. P. Mitra, Report, on STR Symp., 1970.
5. J. N. Rowe, *Ion. Res. Scient. Rep.*, № 346 (1970).
6. A. P. Mitra, Report on URSI Commission, 1972.
7. W. Swider and R. S. Narcisi, *J. Geophys. Res.*, **80**, 655 (1975).
8. A. P. Mitra and J. N. Rowe, *J. Atm. Terr. Phys.*, **34**, 795 (1972).
9. J. N. Rowe, A. P. Mitra, A. J. Ferraro and H. S. Lee, *J. Atm. Terr. Phys.*, **36**, 755 (1974).
10. A. D. Danilov, *J. Atm. Terr. Phys.*, **37**, 885 (1975).
11. A. P. Mitra, *J. Atm. Terr. Phys.*, **37**, 895 (1975).
12. А. Д. Данилов, А. Г. Симонов, *Геомагнетизм и аэрономия*, **15**, 643 (1975).
13. А. Д. Данилов, А. Г. Симонов, *Геомагнетизм и аэрономия*, **15**, 841 (1975).
14. А. Д. Данилов, А. Г. Симонов, *Геомагнетизм и аэрономия*, **15**, 1000 (1975).
15. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, *Изв. вузов — Радиофизика*, **19**, № 2, 174 (1976).
16. Ю. А. Игнатъев, М. А. Иткина, *Геомагнетизм и аэрономия*, **16**, 573 (1976).
17. А. Д. Данилов, *Химия ионосферы*, Гидрометеоздат, Л., 1976.
18. А. Д. Данилов, М. Н. Власов, *Фотохимия ионизованных и возбужденных частиц в нижней ионосфере*, Гидрометеоздат, Л., 1973.
19. F. C. Fehsenfeld and D. L. Albritton, *Can. J. Chem.*, **41**, 1793 (1969).
20. F. C. Fehsenfeld, A. L. Schmeltikoff, H. I. Schiff and E. F. Ferguson, *Planet. Space Sci.*, **15**, 373 (1967).
21. И. А. Хвостиков, *Физика озоносферы и ионосферы*, изд. АН СССР, М., 1963.
22. D. R. Bates and H. Massey, *Proc Roy. Soc.*, **A137**, 261 (1946).
23. E. A. Lauter, J. Taubenheim, G. Entzian, J. Bremer, G. V. Cossart and G. Klein, *НИИ-STR-Rep.*, № 7, Berlin (1976).
24. Ю. Бремер, Г. Коссарт, К. Эверс, И. Таубенхайм, *Симпозиум КАПГ по солнечно-земной физике, Тезисы докладов*, Тбилиси, 1976, стр. 15.
25. D. M. Hunten and M. B. McElroy, *J. Geophys. Res.*, **73**, 2421 (1968).
26. A. P. Mitra and J. N. Rowe, *J. Atm. Terr. Phys.*, **36**, 1797 (1974).
27. G. Brasseur and M. Nicolet, *Planet. Space Sci.*, **21**, 939 (1973).
28. L. G. Meira, *J. Geophys. Res.*, **76**, 202 (1971).
29. D. K. Chakrabarty and A. P. Mitra, *Indian J. Radio Space Phys.*, **3**, 76 (1974).
30. G. Joannidis and D. T. Farley, *Radio Sci.*, **9**, 151 (1974).
31. G. C. Reid, *J. Geophys. Res.*, **75**, 2551 (1970).
32. C. A. Barth, *Ann. Geophys.*, **22**, 198 (1966).
33. J. V. Pearce, *J. Geophys. Res.*, **74**, 853, 1969).
34. J. Taubenheim, C. V. Subrahmanyam and G. Klein, *Cospar-meeting*, Varna, May — June, 1975.
35. R. S. Narcisi, *Proc. of Symp. Constance*, May, 1973.
36. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, *сб. Вопросы исследования нижней ионосферы и геомагнетизма*, изд. Сиб. отд. ИГГ АН СССР, Новосибирск, 1975, стр. 89.
37. J. N. Rowe, A. J. Ferraro, H. S. Lee, R. W. Kreplin and A. P. Mitra, *J. Atm. Terr. Phys.*, **32**, 1609 (1970).
38. S. D. Deshpande and A. P. Mitra, *J. Atm. Terr. Phys.*, **34**, 243 (1972).
39. S. D. Deshpande, S. Ganguly, V. C. Jain and A. P. Mitra, *J. Atm. Terr. Phys.*, **34**, 267 (1972).
40. L. E. Montbriand and J. S. Belrose, *Radio Sci.*, **7**, 133 (1972).
41. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, *Изв. вузов — Радиофизика*, **17**, № 10, 1469 (1974).
42. В. В. Беликович, М. А. Иткина, *Геомагнетизм и аэрономия*, **12**, 651 (1972).
43. S. Ananthakrishnan, M. A. Abdu and L. R. Piazza, *Planet. Space Sci.*, **21**, 367 (1973).
44. G. Bjontegaard, *ELV-VLF Radio Wave Prop.*, ed Holtet, Norway, 1974, p. 193.
45. R. A. Weir and R. R. Brown, *J. Geophys. Res.*, **69**, 2193 (1964).
46. Л. Велинов, *Изв. Геофизич. института Болг. АН*, **13**, 99 (1968).

47. В. И. Дриацкий, Т. М. Крупницкая, А. В. Широчков, Изв. АН СССР, серия физическая, 35 (12), 25 (1971).
48. Л. И. Дорман, Т. М. Крупницкая, Космические лучи, № 11, 91 (1969).
49. G. W. Adams and A. J. Masley, Planet. Space Sci., 14, 277 (1966)
50. P. M. Banks and C. F. Sechrist, J. Geophys. Res., 72, 2342 (1967).
51. Камбу и др., Космические исследования, 8, № 4, 595 (1970).
52. В. М. Дриацкий, Природа аномального поглощения космического радиоизлучения в нижней ионосфере высоких широт, Гидрометеиздат, Л., 1974.
53. G. W. Adams and A. J. Masley, J. Atm. Terr. Phys., 27, 289 (1965).
54. R. Parthasarathy and D. B. Rai, Radio Sci., 1, 1397 (1966).
55. A. J. Zmuda and T. A. Potemra, Rev. Geophys. Space Phys., 10, 981 (1972).
56. В. М. Дриацкий, Т. М. Крупницкая, А. В. Широчков, Геомагнетизм и аэронавигация, 10, 657 (1970).
57. L. M. Larson and R. E. Houston, J. Geophys. Res., 74, 2402 (1969).
58. L. R. Megill and G. W. Adams, J. Geophys. Res., 76, 4587 (1971).
59. T. R. Larsen, M. Jespersen et al, J. Atm. Terr. Phys., 34, 787 (1972).
60. B. Sellers and M. A. Stroschio, J. Geophys. Res., 80, 2241 (1975).
61. J. C. Ulwick, Space Res., 13, 581 (1973).
62. W. Swider and W. A. Dean, J. Geophys. Res., 80, 1815 (1975).
63. W. F. Grieder and D. A. Burt, Space Res., 13, 575 (1973).
64. J. C. Ulwick and B. Sellers, Space Res., 11, 1173 (1971).
65. А. А. Белобородова, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов и др., Геомагнетизм и аэронавигация, 12, № 4, 760 (1972).
66. В. А. Дриацкий, Информ. бюллетень Сов. антарктик экспед., № 70, 1968, стр. 36.
67. D. K. Bailey, Planet. Space Sci., 12, 495 (1964).
68. H. J. Chivers and I. K. Hargreaves, Planet. Space Sci., 13, 583 (1965).
69. I. B. McDiarmid and E. E. Budzinski, Can. J. Phys., 42, 2048 (1964).
70. K. Folkestad et al., J. Atm. Terr. Phys., 31, 835 (1969).
71. K. Folkestad and R. J. Armstrong, J. Atm. Terr. Phys., 32, 409 (1970).
72. K. Folkestad, NDRE Rept., № 59, Norway, 1970.
73. H. Derblom and L. Ladell, J. Atm. Terr. Phys., 35, 2123 (1973).
74. R. J. Jacobs, R. Kist and K. Rawer, Space Res., 9, 246 (1969).
75. B. Landmark et al., J. Atm. Terr. Phys., 32, 1873 (1970).
76. J. E. Hall, J. Atm. Terr. Phys., 32, 1849 (1970).
77. T. S. Bowling, K. Norman and A. P. Willmore, Planet. Space Sci., 15, 1035 (1967).
78. J. S. Belrose, D. B. Ross and A. G. McNamara, J. Atm. Terr. Phys., 34, 627 (1972).
79. R. S. Whitten, I. G. Poppoff, R. S. Edmonds and W. W. Berning, J. Geophys. Res., 70, 1737 (1965).
80. D. K. Chakrabarty and A. P. Mitra, Proc. of Symp. Constance, ed. Rawer, Berlin, 1974.
81. E. A. Mechtly, C. F. Sechrist and L. G. Smith, J. Atm. Terr. Phys., 34, 641 (1972).
82. M. Jespersen and B. M. Pedersen, J. Atm. Terr. Phys., 32, 1859 (1970).
83. Е. А. Бенедиктов, В. Д. Вяхирев и др., Симпозиум КАПГ по солнечной земной физике, Тезисы докладов, Тбилиси, ч. 2, 1976.
84. A. Haug, E. V. Threne et al., J. Atm. Terr. Phys., 32, 1865 (1970).
85. A. P. Willmore, J. Atm. Terr. Phys., 32, 1855 (1970).
86. R. S. Narcisi and A. D. Bailey, J. Geophys. Res., 70, 3687 (1965).
87. R. S. Narcisi, Space Res., 7, 186 (1967).
88. F. C. Fehsenfeld and E. E. Ferguson, J. Geophys. Res., 74, 2217 (1969).
89. L. C. Hale, Proc. of Symp. Constance, ed. Rawer, Berlin, 1974.
90. J. P. Cipriano, Ion. Res. Lab. Sci. Rep. № 410, Pennsylvania State University, 1973.
91. R. S. Narcisi et al., Proc. Cospar Symp. on SPE of November 1969, Special Rep., 144, 1972.
92. F. Arnold, J. Kissel, D. Krankowsky, H. Wieder and J. Zahringer, J. Atm. Terr. Phys., 33, 1169 (1971).
93. R. S. Narcisi et al., J. Atm. Terr. Phys., 34, 647 (1972)
94. J. C. Ulwick, J. Atm. Terr. Phys., 34, 659 (1972).
95. K. Folkestad, E. V. Thrane and B. Landmark, J. Atm. Terr. Phys., 34, 963 (1972).
96. Л. В. Зеленкова, О. И. Шумилов, В. Г. Гилязов, Геомагнетизм и аэронавигация, 15, 746 (1975).
97. W. Swider, R. S. Narcisi, T. J. Keneshea and J. C. Ulwick, J. Geophys. Res., 76, 4691 (1971).
98. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэронавигация, 17, 760 (1977)
99. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэронавигация, 17, 427 (1977).

100. R. S. Narcisi et al, Aeron. Rep., 32, 355 (1969).
101. D. Krankowsky et al., Aeron. Rep., 48, 154 (1972).
102. R. S. Narcisi. Aeron. Rep., 48, 182 (1972).
103. R. A. Goldberg, Aeron. Rep., 48, 160 (1972).
104. A. Iohannesen and D. Krankowsky, J. Geophys. Res., 77, 2888 (1972).
105. P. A. Zbinden et al., Report at the Sixteen Cospar-meeting Constance, FRG, 1973.
106. D. Krankowsky et al, Report at the Nato Adv. Study Inst. on Magn.-Ionosph. Interact, Espedalen, Norway, 1971.
107. R. S. Narcisi et al., Ground based radio-wave prop. studies of the lower ionosph., Canada, 1, 39, 1967.
108. R. P. Turco and C. F. Sechrist, Radio Sci., 7, 703 (1972).
109. S. Ganguly, Radio Sci., 9, 1101 (1974).
110. P. Rigaud, Ann. Geophys., 30, 319 (1974).
111. D. W. Rush and C. A. Barth, Aeron. Rep., 48, 32 (1972).
112. P. A. Zbinden, M. A. Hidalgo, P. Eberhardt and J. Geiss, Planet Space Sci., 23, 1621 (1975).
113. Г. С. Иванов-Холодный, Т. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
114. Г. С. Иванов-Холодный, сб. Физика ионосферы, М., 1976, стр. 5.
115. Наблюдения и прогноз солнечной активности, изд. Мир, М., 1976.

Научно-исследовательский радиофизический  
институт

Поступила в редакцию  
12 апреля 1977 г.

УДК 531.5 : 523.164

## О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ФОКУСИРОВКИ В РАДИОДИАПАЗОНЕ

*П. В. Блюх, А. А. Минаков*

Цель настоящей работы — выявить возможность наблюдения эффекта гравитационной фокусировки в радиодиапазоне. Для заданной модели неоднородности межзвездной среды ( $a \sim 10^{12}$  см — размер неоднородности,  $\Delta N \sim 10^{-2}$  см $^{-3}$  — среднеквадратичные флуктуации электронной плотности) показано, что коэффициент усиления линзы с гравитационным радиусом  $r_g$  может быть значительно больше единицы при условии  $\lambda^4 D_s D_p \ll 10^{43} r_g$  ( $\lambda$  (см) — длина волны,  $D_s$  и  $D_p$  (см) — расстояния от источника и точки наблюдения до фокусирующей звезды).

### ВВЕДЕНИЕ

Со времени выхода из печати статьи Эйнштейна о линзоподобном действии гравитационного поля звезды [1], на эту тему было опубликовано немало работ. В большинстве из них авторы, используя приближение геометрической оптики, получали в фокусе линзы расходящееся выражение, которое трактовалось как «очень большое» возрастание интенсивности. Учет дифракционных эффектов [2, 3] позволяет избавиться от расходимости и дает максимально возможный коэффициент усиления по интенсивности порядка  $\sim r_g \lambda^{-1}$ . В оптике эта величина столь велика, что, казалось бы, фокусировка должна была неоднократно наблюдаться. Однако дело обстоит не совсем так, и до сих пор еще не обнаружено таких явлений, которые уверенно трактовались бы как линзовый эффект, хотя попытки такой интерпретации не раз предпринимались [4–6].

В настоящее время диапазон длин волн, используемых в астрофизике, существенно расширился в обе стороны от светового диапазона. Вполне естественно поставить вопрос о возможности наблюдения гравитационной фокусировки в широком спектре частот электромагнитного излучения. Переход к более коротким длинам волн (рентген,  $\gamma$ -лучи) заманчив в связи с ростом коэффициента усиления  $\sim \lambda^{-1}$ , однако простые физические соображения указывают на существование коротко-волновой границы  $\lambda_{\min}$  для реальных объектов. Это ограничение связано с влиянием несферичности гравитационного поля фокусирующей звезды или с возмущающим действием полей соседних с линзой небесных тел. С уменьшением длины волны вредное влияние этих эффектов возрастает.

С другой стороны, коэффициент усиления падает с ростом длины волны за счет дифракции, а также вследствие рассеяния электромагнитного излучения на случайных неоднородностях межзвездной среды. Эти явления определяют длинноволновую границу  $\lambda_{\max}$ . Таким образом, гравитационная фокусировка может быть наблюдаема в определенном диапазоне длин волн  $\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max}$ . В предполагаемой работе мы оцениваем только верхнюю границу  $\lambda_{\max}$ , а вопрос о нахождении  $\lambda_{\min}$  будет рассмотрен в другой статье.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линзоподобное действие гравитационного поля проявляется в том случае, когда наблюдатель  $P$  находится вблизи оси  $z$ , соединяющей «точечный» источник  $S$  и фокусирующую звезду  $O$ . Примем точку  $O$  за начало цилиндрической системы координат  $z, \rho$ . Наблюдатель, находящийся на оси, увидит в плоскости апертуры  $z=0$  вместо точечного источника светящееся кольцо радиуса  $l = \sqrt{2r_g} \sqrt{\frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_p}}$ . С учетом экранирующего действия диска фокусирующей звезды радиуса  $R_0$  лучи начнут пересекаться на оси, начиная с расстояний  $D_p \geq \geq R_0^2 D_s / (2r_g D_s - R_0^2)$ .

Так как искривление лучей за счет гравитации происходит в основном в окрестности точки  $O$ , влияние поля тяготения, в известном смысле, эквивалентно тонкому фазовому корректору, совмещенному с плоскостью  $z=0$  (рис. 1).

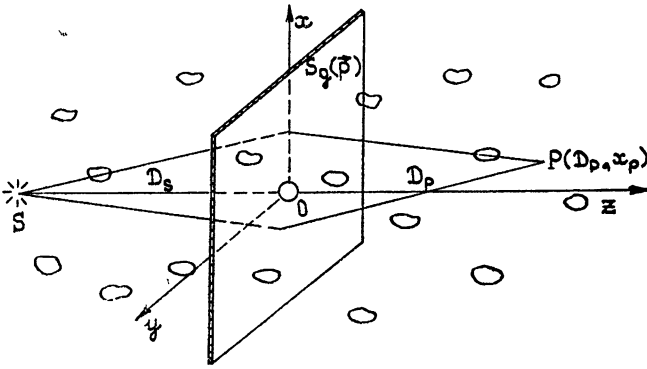


Рис. 1.

Фазу  $S_g(\rho)$  корректора следует определить таким образом, чтобы нормали к фазовому фронту  $Z_g(\rho) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-1} S_g(\rho)$  совпадали с прямолинейными асимптотиками лучей в вакууме (мы полагаем, что наблюдатель находится на значительном расстоянии от линзы и лучи, проходящие через точку наблюдения, незначительно отличаются от прямолинейных).

Определенная таким образом фаза  $S_g$  для небольших прицельных параметров ( $\rho/D_s \ll 1$ ) равна

$$S_g(\rho) \approx -\chi \left( \ln \frac{|\rho|}{l} + \frac{\rho^2}{4D_s^2} \right), \quad (1)$$

где  $\chi = 2r_g k \gg 1$  и  $k = 2\pi/\lambda$ . Анализ работы линзы в приближении геометрической оптики показывает, что эффективно работает лишь незначительная часть апертуры  $\rho \sim l$ , поэтому при выполнении условия  $\chi l^2 / 4D_s^2 \ll 1$  вторым слагаемым в (1) можно пренебречь. Это условие накладывает незначительные ограничения на минимальное расстояние до источника, и мы будем предполагать его всегда выполненным. Заметим, что  $S_g$  в этом приближении равна набегу фазы вдоль прямолинейного луча, параллельного оси  $z$ , с прицельным параметром  $\rho$  в среде с эффективной диэлектрической проницаемостью  $\mu_g = 2r_g/r \ll 1$  [7]:



$$S_g(\rho) = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\mu_g(\rho, \xi) - \mu_g(l, \xi)] d\xi = -\chi \ln \frac{|\rho|}{l}. \quad (2)$$

В реальных условиях гравитационная линза находится в неоднородной среде с показателем преломления  $n = 1 + \mu(\mathbf{r})$ . Поле случайных флуктуаций  $\mu(\mathbf{r})$  считаем статистически однородным и изотропным с дисперсией  $\langle \mu^2 \rangle \ll 1$  ( $\langle \rangle$  означает усреднение случайной величины по ансамблю реализаций). Статистические характеристики  $\mu$  описываются корреляционной функцией

$$B(z, \rho) = B(z_1 - z_2, \rho_1 - \rho_2) = \langle \mu(z_1, \rho_1) \mu(z_2, \rho_2) \rangle. \quad (3)$$

Анализ работы гравитационной линзы, с энергетической точки зрения, можно провести, определив функцию когерентности:

$$\Gamma_2(D_p, \mathbf{R}, \rho) = \left\langle U\left(D_p, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) U^*\left(D_p, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \right\rangle, \quad (4)$$

где  $U(D_p, \mathbf{R}, \rho)$  — поле волны в плоскости наблюдения. Здесь  $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$  и  $\rho = \rho_1 - \rho_2$  — суммарные и разностные координаты.

Для небольших прицельных параметров  $\frac{R\rho}{D_s}, \frac{R\rho}{D_p} \ll 1$  (френелевское приближение) на основании решения параболического уравнения для неоднородной среды [8] получим

$$\begin{aligned} \Gamma_2(D_p, \mathbf{R}, \rho) \approx & \frac{k^2 U_0^2}{4 \pi^2 D_p^2 D_s^2} \exp\left(ik \frac{R\rho}{D_p}\right) \iint_{z=0} dR_{\perp} d\rho_{\perp} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \left[ \int_0^{D_s} D\left(\rho_{\perp} - \frac{\xi}{D_s} \rho_{\perp}\right) d\xi + \int_0^{D_p} D\left[\rho - \frac{\xi}{D_p} (\rho - \rho_{\perp})\right] d\xi \right]\right\} \times \\ & \times \exp\left\{ik \left[ \left(\frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_p}\right) R_{\perp} \rho_{\perp} - \frac{1}{D_p} (R_{\perp} \rho + R \rho_{\perp}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - Z_g\left(R_{\perp} + \frac{\rho_{\perp}}{2}\right) - Z_g\left(R_{\perp} - \frac{\rho_{\perp}}{2}\right) \right]\right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$D(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} [B(\xi, 0) - B(\xi, \rho)] d\xi = A(0) - A(\rho). \quad (6)$$

Средняя интенсивность  $\langle I(D_p, x_p) \rangle$  в точке наблюдения определится, если в (5) положить  $\rho = 0$ . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle I(D_p, x_p) \rangle \approx & \frac{k^2 U_0^2}{4 \pi^2 D_s^2 D_p^2} \iint_{z=0} dR_{\perp} d\rho_{\perp} \exp\{-\gamma [D_s + D_p] \times \\ & \times [1 - K(\rho_{\perp})]\} \exp\left\{ik \left[ \left(\frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_p}\right) R_{\perp} \rho_{\perp} - \frac{x_p}{D_p} \rho_{\perp} - 2r_g \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \ln \frac{|R_{\perp} + \rho_{\perp}/2|}{l} - \ln \frac{|R_{\perp} - \rho_{\perp}/2|}{l} \right) \right]\right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)$  — коэффициент экстинкции, а  $K(\rho_{\perp}) = \frac{1}{A(0)} \int_0^1 A(\beta \rho_{\perp}) d\beta$  — поперечный фазовый коэффициент корреляции.

Коэффициент усиления гравитационной линзы определим как отношение

$$q(D_p, x_p) = \frac{\langle I(D_p, x_p) \rangle}{\langle I(D_p, x_p) \rangle |_{r_g=0}}. \quad (8)$$

$\langle I \rangle |_{r_g=0}$  — средняя интенсивность в точке наблюдения при отсутствии гравитационного поля, Легко убедиться из (7), что  $\langle I \rangle |_{r_g=0} = \frac{U_0^2}{(D_s + D_p)^2}$ .

При исследовании возможности наблюдения или практического использования эффекта фокусировки будем считать, что действие линзы станет заметным лишь при  $q(D_p, x_p) \gg 1$ .

### КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЛИНЗЫ

Формула (7) допускает рассмотрение как слабых ( $\gamma \rightarrow 0$ ), так и сильных ( $\gamma (D_s + D_p) \gg 1$ ) флуктуаций в ближней и дальней волновых зонах. Случай слабых флуктуаций не представляет интереса, так как учет неоднородностей дает лишь несущественную добавку к невозмущенному коэффициенту усиления. В радиодиапазоне на больших расстояниях практически реализуется второй предельный случай, который и будет рассмотрен ниже.

При  $\gamma (D_s + D_p) \gg 1$  основной вклад в интеграл (7) дают значения  $\rho_{\perp} \sim 0$ . Разложив коэффициент  $K(\rho_{\perp})$  в ряд Тейлора в нуле, запишем следующее приближенное равенство:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\gamma (D_s + D_p) [1 - K(\rho_{\perp})] \right\} &\approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma (D_p + D_s) \times \right. \\ &\times \left. \left| \frac{\partial^2 K(0)}{\partial \rho_{\perp}^2} \right| \rho_{\perp}^2 \right\} + \exp [-\gamma (D_s + D_p)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Второе слагаемое дает несущественную добавку в нуле, но обеспечивает правильное асимптотическое поведение функции при  $\rho_{\perp} \rightarrow \infty$ , что существенно при интегрировании в бесконечных пределах. Величина  $\gamma (D_s + D_p)$  представляет собой дисперсию фазы, поэтому коэффициент при  $\rho_{\perp}^2$  в показателе экспоненты может быть выражен через угол рассеяния  $\theta_s$ :

$$\gamma (D_s + D_p) \left| \frac{\partial^2 K(0)}{\partial \rho_{\perp}^2} \right| = k^2 \theta_s^2. \quad (10)$$

В безразмерных координатах  $R'_{\perp} = \frac{R_{\perp}}{l}$  и  $\rho'_{\perp} = \frac{\rho}{l}$  получим следующее выражение для  $q(D_p, x_p)$ :

$$\begin{aligned} q(D_p, x_p) &\approx \frac{\chi^2}{4 \pi^2} \iint_{z=0} dR'_{\perp} d\rho'_{\perp} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \rho_{\perp}'^2 \right) \times \\ &\times \exp \left\{ i \chi \left[ R'_{\perp} \rho'_{\perp} - \frac{x_p \rho'_{\perp}}{l(1 + D_p/D_s)} - \ln \left| R'_{\perp} + \frac{\rho'_{\perp}}{2} \right| + \right. \right. \\ &\left. \left. + \ln \left| R'_{\perp} - \frac{\rho'_{\perp}}{2} \right| \right] \right\} - \exp [-\gamma (D_s + D_p)] q_0(D_p, x_p), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $q_0(D_p, x_p)$  — невозмущенный коэффициент усиления гравитационной линзы,  $\theta_d = 1/kl$  — угол дифракции на апертуре. В пределах указанных выше ограничений на расстояния  $D_s$  и  $D_p$   $q_0$  может быть определен аналогично [1-3] как

$$q_0(D_p, x_p) \approx \left\{ \begin{array}{l} \pi \chi J_0^2 \left[ \chi \frac{x_p}{l(1 + D_p/D_s)} \right] (x_p \ll \sqrt{\lambda D_p} \sqrt{1 + D_p/D_s}); \quad (12a) \\ \frac{l}{x_p} \left\{ \frac{\frac{x_p^2}{2l^2} + \left(1 + \frac{D_p}{D_s}\right)^2}{\left[\frac{x_p^2}{4l^2} + \left(1 + \frac{D_p}{D_s}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\left(1 + \frac{D_p}{D_s}\right)^2}{\left[\frac{x_p^2}{4l^2} + \left(1 + \frac{D_p}{D_s}\right)^2\right]^{1/2}} \sin k\Delta \right\} \\ \left( x_p \gg \frac{\lambda D_p}{\pi l} \frac{1}{\sqrt{1 + D_p/D_s}} \right), \end{array} \right. \quad (12b)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого индекса,  $\Delta$  — разность хода двух лучей, приходящих с противоположных сторон фокусирующей звезды. Формула, приведенная Эйнштейном, не имеет слагаемого с  $\sin k\Delta$ , так как автор не учитывал когерентности волн.

При нахождении первого слагаемого в (11), которое мы назовем некогерентной составляющей коэффициента усиления  $\tilde{q}(D_p, x_p)$ , можно выделить два предельных случая.

1. Угол рассеяния не слишком велик ( $\theta_s^2/\theta_d^2 \ll \chi$ ). Возвращаясь в (11) к исходным координатам  $p_1, p_2$  после интегрирования по углам, получим следующее выражение для максимального коэффициента усиления ( $x_p = 0$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{q}(D_p, 0) &\approx \chi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty p_1 p_2 dp_1 dp_2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} (p_1^2 + p_2^2) \right] \times \\ &\times I_0 \left( \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} p_1 p_2 \right) \exp \left\{ i \chi \left[ \frac{1}{2} (p_1^2 - p_2^2) - \ln p_1 + \ln p_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого индекса. Функцию  $\exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} (p_1^2 + p_2^2) \right] I_0 \left( \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} p_1 p_2 \right)$  можно считать медленно меняющейся по сравнению с  $\exp \left\{ i \chi \left[ \frac{1}{2} (p_1^2 - p_2^2) - \ln p_1 + \ln p_2 \right] \right\}$  и вынести за знак интеграла в точке экстремума фазы  $p_1' = p_2' = 1$ . В результате имеем

$$\tilde{q}(D_p, 0) \approx \pi \chi \exp \left( -\frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \right) I_0 \left( \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \right). \quad (14)$$

2. При более сильном рассеянии ( $\frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \gg \chi$ ) разложим  $\ln \left| R'_\perp + \frac{p'_\perp}{2} \right| - \ln \left| R'_\perp - \frac{p'_\perp}{2} \right|$  в ряд в точке  $p'_\perp = 0$  до линейного члена включительно. После интегрирования по разностным координатам получим

выражение, которое может трактоваться как принцип Гюйгенса для интенсивности:

$$\tilde{q}(D_p, x_p) \approx \frac{r_g(1 + D_p/D_s)}{\pi D_p \theta_s^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\theta_d^2}{\theta_s^2} \chi^2 \left[ \left( x - \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x_p}{l(1 + D_p/D_s)} \right)^2 + \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (15)$$

Максимальный коэффициент усиления равен

$$\tilde{q}(D_p, 0) \approx \eta e^\eta K_1(\eta), \quad (16)$$

где  $K_1(\eta)$  — функция Макдональда, а параметр  $\eta = \frac{l^2}{D_p^2 \theta_s^2} (1 + D_p/D_s)^2$

имеет простой физический смысл. Этот параметр характеризует отношение площади апертуры к площади центрального пятна в плоскости наблюдения. В области  $1 \ll \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \ll \chi^2$  формулы (14) и (16) совпадают и дают следующее значение:

$$\tilde{q}(D_p, 0) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{D_p \theta_s} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right). \quad (17)$$

Данное выражение допускает простую геометрическую интерпретацию. Для малых смещений наблюдателя от оси ( $x_p/l \ll 1$ ) невозмущенный коэффициент усиления, согласно (12б), равен

$$q_0(D_p, x_p) \approx \frac{l}{x_p} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right) (1 + \sin k \Delta). \quad (18)$$

Из-за дифракции значение  $x_p$  не может быть меньше величины  $\theta_d D_p$ , что определяет максимально возможный коэффициент усиления порядка

$$q_{0 \max} \sim \frac{l}{D_p \theta_d} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right) = 4 \pi \frac{r_g}{\lambda}. \quad (19)$$

Эта оценка хорошо согласуется с (12а) для  $x_p = 0$ .

Флуктуации показателя преломления приводят не только к уничтожению когерентности лучей ( $\langle \sin k \Delta \rangle = 0$ ), но и к разбросу лучей в пределах угла рассеяния  $\theta_s$ . Коэффициент усиления  $q$  будет определяться

при этом в основном некогерентной компонентой  $\tilde{q}$ , максимальное значение которой (при  $\theta_s \gg \theta_d$ ) найдем, подставив в (18)  $x_p \sim D_p \theta_s$ :

$$\tilde{q}_{\max} \sim \frac{l}{D_p \theta_s} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right). \quad (20)$$

Это значение практически не отличается от формулы (17). Изменение коэффициента усиления при перемещении наблюдателя в плоскости  $z = D_p$  в области рассеяний  $\chi \ll \frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \ll \chi^2$  получим, оценив интеграл (15)

методом Лапласа:

$$\tilde{q}(D_p, x_p) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{D_p \theta_s} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right) \exp \left( -\frac{x_p^2}{4 D_p^2 \theta_s^2} \right) I_0 \left( \frac{x_p^2}{4 D_p^2 \theta_s^2} \right). \quad (21)$$

Асимптотическое представление данного выражения при  $x_p \gg 2D_p \theta_s$ , равное

$$\tilde{q}(D_p, x_p) \approx \frac{l}{x_p} \left( 1 + \frac{D_p}{D_s} \right), \quad (22)$$

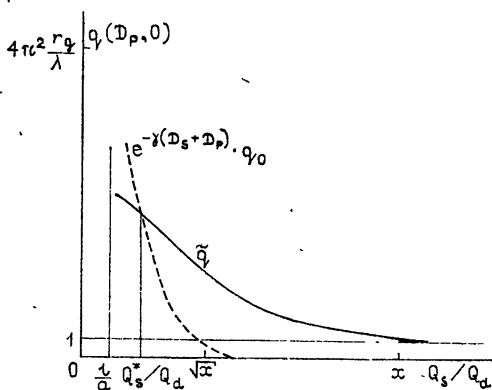


Рис. 2.

совпадает с некогерентной частью невозмущенного коэффициента усиления  $q_0$ .

При очень сильном рассеянии  $\frac{\theta_s^2}{\theta_d^2} \gg \chi^2$  коэффициент усиления, согласно (16), стремится к единице, т. е. усиления практически не происходит. На рис. 2 приведена зависимость коэффициента усиления на оси от величины отношения  $\theta_s/\theta_d$  в точке наблюдения.

Вводя характерный масштаб неоднородности  $a \left( \left| \frac{\partial^2 K(0)}{\partial \rho_{\perp}^2} \right| \approx \frac{1}{a^2} \right)$ , формулу для когерентной составляющей коэффициента усиления представим в виде

$$\exp[-\gamma(D_s + D_p)] q_0(D_p, 0) = 4\pi^2 \frac{r_g}{\lambda} \exp \left[ -\frac{a^2}{l^2} \left( \frac{\theta_s}{\theta_d} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Область сильных флуктуаций определится неравенством  $\frac{\theta_s}{\theta_d} \gg \frac{l}{a}$ .

В этой области в некоторой точке  $\theta_s^*$  сравниваются значения когерентной и некогерентной составляющих коэффициента усиления. Величина  $\theta_s^*$  находится, согласно (17) и (23), из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{\theta_d}{\theta_s^*} = \sqrt{2\pi} \exp \left[ -\frac{a^2}{l^2} \left( \frac{\theta_s^*}{\theta_d} \right)^2 \right]. \quad (24)$$

Для углов  $\theta_s \ll \theta_s^*$  коэффициент усиления определяется в основном когерентной составляющей, а при  $\theta_s \gg \theta_s^*$  — некогерентной. В области  $\theta_s \sim \theta_s^*$  необходимо учитывать обе компоненты.

На рис. 2 изображен случай, когда  $\frac{l}{a} < \sqrt{\chi}$ , однако в зависимости от величин расстояний  $D_s$  и  $D_p$  может иметь место и обратное неравенство  $\frac{l}{a} > \sqrt{\chi}$  или даже  $\frac{l}{a} > \chi$ . В этом случае в области сильных флуктуаций усиления не происходит.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Эффект гравитационной фокусировки может проявлять себя различным образом. В литературе обсуждались, например, угловые искажения и умножения изображений при искривлении лучей в поле тяготения [9] или специфические флуктуации интенсивности при перемеще-

нии наблюдателя относительно дифракционной картины [2]. Укажем также на изменение спектра сфокусированного излучения вследствие дисперсии коэффициента усиления, которая, как будет показано ниже, пропорциональна  $\lambda^{-2}$ . Не обсуждая особенностей того или иного значения коэффициента усиления  $q(D_p, x_p) \gg 1$ .

Если случайные флуктуации  $\mu(\mathbf{r})$  имеют гауссов спектр

$$B(z, \rho) = \langle \mu^2 \rangle \exp\left(-\frac{z^2 + \rho^2}{a^2}\right), \quad (25)$$

то угол рассеяния (10) определяется через параметры среды следующим образом:

$$\theta_s^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \langle \mu^2 \rangle \frac{D_s + D_p}{a} = \frac{1}{24 \pi \sqrt{\pi}} r_0^2 \Delta N^2 \lambda^4 \frac{D_p + D_s}{a}, \quad (26)$$

где  $r_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$  см — классический радиус электрона,  $\Delta N$  — среднеквадратичные флуктуации электронной плотности. Согласно экспериментальным данным по радионаблюдениям пульсаров [10, 11], выберем следующую модель неоднородности межзвездной среды:  $a \sim 10^{12}$  см,  $\Delta N \sim 10^{-2}$  см<sup>-3</sup>.

Как уже отмечалось выше, при сильных флуктуациях коэффициент усиления существенно зависит от величины отношения  $l/a$ . Максималь-

ный радиус апертуры  $l = \sqrt{2r_g} \left/ \sqrt{\frac{1}{D_s} + \frac{1}{D_p}} \right.$  в основном определяется

наименьшим из расстояний  $D_s$  или  $D_p$ . Положив это расстояние равным среднему расстоянию между звездами  $\sim 10^{19}$  см, для звезды, подобной Солнцу ( $r_g \sim 10^5$  см), найдем, что величина отношения  $l_{\max}/a$  оказывается порядка единицы. В этом случае коэффициент усиления гравитационной линзы существенно больше единицы лишь в области углов рассеяния  $\theta_s \ll \chi \theta_d$ . Подставив в это неравенство параметры среды, найдем основное условие наблюдения фокусировки

$$\lambda^4 D_s D_p \ll \frac{24 \pi \sqrt{\pi}}{r_0^2 \Delta N^2} a r_g \approx 10^{43} r_g \text{ см}. \quad (27)$$

Из этого условия видно, что с увеличением длины волны резко сокращается область расстояний, на которых возможно обнаружение линзового эффекта. Так, при  $\lambda \sim 1$  см,  $D_s \sim 10^{19}$  см и  $r_g \sim 10^5$  см усиление может наблюдаться для расстояний  $D_p \ll 10^{24}$  км, а для  $\lambda < 10^2$  см — лишь для  $D_p \ll 10^{16}$  км. Отсюда видно, что метровый диапазон длин волн можно условно рассматривать как длинноволновую границу проявления гравитационной фокусировки.

В заключение рассмотрим вопрос, достаточно ли требование  $q(D_p, x_p) \gg 1$  для наблюдения эффекта фокусировки, если учесть фоновое излучение звезд-линзы. Принимаемая в точке наблюдения интенсивность представляет собой сумму сфокусированного излучения источника и излучения линзы:

$$\langle I(D_p, x_p) \rangle = \frac{U_0^2}{(D_s + D_p)^2} q(D_p, x_p) + \frac{U_g^2}{D_p^2}. \quad (28)$$

Величину  $U_g^2/D_p^2$  необходимо рассматривать как помеху. Если положить, что обе звезды излучают примерно одинаково ( $U_0^2 \approx U_g^2$ ), то вредным влиянием помехи можно пренебречь при условии

$$\frac{D_p^2}{(D_s + D_p)^2} q(D_p, x_p) \gg 1. \quad (29)$$

Это неравенство легче осуществимо для близких пар звезд, удаленных на значительные расстояния от наблюдателя ( $D_p \gg D_s$ ). В этом случае старое условие  $q \gg 1$  оказывается достаточным для наблюдения эффекта фокусировки.

Авторы выражают благодарность Е. В. Чаевскому и А. А. Пузенко за полезные советы при выполнении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Science, **84**, 506 (1936).
2. А. В. Бялко, Астрон. ж., **46**, 998 (1969).
3. P. V. Bliokh and A. A. Minakov, Astrophys. and Space Sci., **34**, L7 (1975).
4. J. M. Barnothy and M. F. Barnothy, Astrophys. J., **174**, 477 (1975).
5. W. C. Saslaw, J. Foulkner and P. Strittmatter, Nature, **217**, 1222 (1968).
6. Л. Х. Ингель, Письма в АЖ, **1**, № 3 (1975).
7. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, М, 1961.
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 10, 1433 (1972).
9. R. Bourassa and R. Kantowski, Astrophys. J., **205**, 674 (1976).
10. L. Lee and J. Jokipii, Astrophys. J., **206**, 735 (1976).
11. B. Rickett, Nature, **221**, 158 (1969).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
28 февраля 1977 г.

#### THE POSSIBILITY OF OBSERVATION OF GRAVITATIONAL FOCUSING IN THE RADIO WAVE RANGE

*P. V. Bliokh, A. A. Minakov*

The aim of the present paper is to find the possibility of observation of the gravitational focusing effect in the radio wave range. For the given model of the interstellar medium inhomogeneity ( $a \sim 10^{12}$  cm is the dimension of the inhomogeneity,  $\Delta N \sim 10^{-2}$  cm<sup>-3</sup> is the root mean square fluctuations of the electron density) it is shown that the amplification coefficient of the lense with the gravitational radius  $r_g$  may be considerably larger than unity under the condition that  $\lambda^4 D_s D_p \ll 10^{43} r_g$  ( $\lambda$  (cm) is the wavelength,  $D_s$  and  $D_p$  (cm) are the distances from the source and the point of observation up to the focusing star).

УДК 538 576 45

## МЕТОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Г. И. Григорьев, О. Н. Савина

Получено дисперсионное уравнение акустико-гравитационных волн методом кинетического уравнения. Вычислен декремент затухания этих волн из-за вязкости и теплопроводности при вертикальном распространении в изотермической атмосфере.

При теоретическом исследовании вопросов распространения радиоволн и практическом осуществлении околосредней и космической радиосвязи приходится считаться с наличием неоднородностей различных масштабов. Известно, что крупномасштабные возмущения волнового типа, регистрируемые в атмосфере от поверхности Земли до высот, превышающих максимум  $F$ -слоя, связаны с распространением акустико-гравитационных волн.

В настоящее время вопрос об особенностях распространения акустико-гравитационных волн в неоднородной атмосфере исследован достаточно подробно (см., например, [1-4]). При решении этого вопроса использовались макроскопические уравнения гидродинамики, которые могут стать непригодными на больших высотах вследствие значительного увеличения длины свободного пробега  $l_{св}$ .

В то же время для звуковых и плазменных волн наряду с гидродинамическим описанием применяется также метод кинетического уравнения [5, 6]. В данной работе метод кинетического уравнения приспособлен для применения в неоднородной среде и применен для вывода дисперсионного уравнения акустико-гравитационных волн и расчета их затухания из-за вязкости и теплопроводности.

Кинетическое уравнение для функции распределения  $f(t, \mathbf{r}, \zeta)$  частиц атмосферы по скоростям  $\zeta$  и в пространстве с декартовыми координатами  $\mathbf{r}(x, y, z)$  запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \zeta \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g} \frac{\partial f}{\partial \zeta} = J_{st}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  ускорение силы тяжести, принимаемое в дальнейшем постоянным,  $J_{st}$  — интеграл столкновений,

$$J_{st} = \int (f' f'_1 - f f_1) |(\zeta - \zeta_1)| \sigma d\Omega, \quad (2)$$

где  $f = f(t, \mathbf{r}, \zeta)$ ,  $f_1 = f(t, \mathbf{r}, \zeta_1)$ ,  $f' = f(t, \mathbf{r}, \zeta')$ ,  $f'_1 = f(t, \mathbf{r}, \zeta'_1)$ ,  $\sigma$  — дифференциальное эффективное сечение столкновений,  $\zeta$  и  $\zeta_1$  — скорости частиц до столкновения,  $\zeta'$ ,  $\zeta'_1$  — после него. Единичный вектор  $\mathbf{s}$  направлен вдоль линии, соединяющей центры масс сталкивающихся частиц,  $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varepsilon$  — элемент телесного угла.

Для изотермической ( $T = \text{const}$ ) плоскостной атмосферы состоя-



нию локального равновесия отвечает распределение Максвелла—Больцмана  $f_0$ , являющееся точным решением кинетического уравнения (1):

$$f_0 = n_0 \left( \frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{M\zeta^2}{2\kappa T} - z/H \right). \quad (3)$$

При записи (3) использованы следующие обозначения:  $n_0$  — концентрация частиц с массой  $M$  на уровне  $z=0$ ,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $H = \kappa T/Mg$  — высота однородной атмосферы. При наличии слабых возмущений функцию распределения  $f(t, r, \zeta)$  можно представить в форме

$$f = f_0 [1 + \varphi(t, r, \zeta)] \quad (\varphi \ll 1). \quad (4)$$

Линеаризуя (1) и вводя новые переменные

$$v = \zeta (M/\kappa T)^{1/2}, \quad \tau = t (\kappa T/M)^{1/2},$$

имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial v_z} = J_{st} = e^{-z/H} \times \\ \times \int \frac{n_0 \exp(-v_1^2/2)}{(2\pi)^{3/2}} \sigma \left( \frac{M}{\kappa T} \right)^{1/2} |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1), \mathbf{s}| [\varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1] d\mathbf{v}_1 d\Omega. \quad (5)$$

Интеграл столкновений в (5) без множителя  $\exp(-z/H)$  соответствует случаю однородной среды. Для этого случая собственные функции  $\varphi_{rlm}$  и собственные значения  $\lambda_{rlm}$  оператора столкновений ( $J_{st}(\varphi_{rlm}) = \lambda_{rlm} \varphi_{rlm}$ ) для максвелловских молекул определяются известными соотношениями [4, 5, 7, 8]. Например, функции  $\varphi_{rlm}$  выражаются через полиномы Сонина  $S_{l+1/2}^r$  и полиномы Лежандра  $P_l^m$  в виде

$$\varphi_{rlm} = \left[ \frac{\sqrt{\pi} r l (2l+1)(l-|m|)!}{2^{l+1} \Gamma(r+l+3/2)} \right]^{1/2} S_{l+1/2}^r \left( \frac{1}{2} v^2 \right) P_l^m(\cos \theta) v^l \exp(im\chi), \quad (6)$$

где  $\Gamma(r+l+3/2)$  — гамма-функция,  $\cos \theta = v_z/v$ ,  $\theta$  — полярный угол,  $\chi$  — азимутальный угол сферических координат в пространстве скоростей. Функции  $\varphi_{rlm}$  ортогональны с весом  $\Phi(v) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-v^2/2)$ .

Будем искать для уравнения (5) решения волнового типа:

$$\varphi = \psi(z) h(\mathbf{v}) \exp[i(k_x x + k_z z - \omega_0 \tau)], \quad (7)$$

$$h(\mathbf{v}) = \sum a_{rlm} \varphi_{rlm} = \sum a_m \varphi_m,$$

где частота  $\omega_0 = \omega (M/\kappa T)^{1/2}$ ,  $a_m$  — коэффициенты разложения функции  $h(\mathbf{v})$  в ряд по собственным функциям  $\varphi_m$ . Введением множителя  $\psi(z)$  учитывается неоднородность среды. В качестве  $\varphi_m$  в этом примере выберем несколько первых функций  $\varphi_{rlm}$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_{rlm} = 0$ . Для двумерных возмущений (7) указанными функциями являются  $\varphi_1 = \varphi_{000} = 1$ ,  $\varphi_2 = \varphi_{010} = v_z$ ,  $\varphi_3 = \varphi_{100} = \sqrt{3/2} \left( 1 - \frac{1}{3} v^2 \right)$ ,  $\varphi_4 = \varphi_{011} = v_x$ .

С использованием представления (7) уравнение (5) принимает вид

$$\sum_m a_m \left\{ i[(k\mathbf{v}) - \omega_0] \varphi_m + \alpha v_z \varphi_m - \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi_m}{\partial v_z} \right\} = 0. \quad (8)$$

Умножая (8) на  $\Phi(v) \varphi_l(v)$  и интегрируя по скоростям  $\mathbf{v}$ , получаем

$$\sum_{m=1}^4 a_m \left[ -i\omega_0 \delta_{lm} + (\alpha + ik_z) M_{lm} + ik_x B_{lm} - \frac{1}{H} R_{lm} \right] = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } \delta_{lm} = \begin{cases} 1, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}, \quad \alpha = \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dz}, \quad M_{lm} = \int v_z \Phi \varphi_l \varphi_m dv, \quad B_{lm} = \\ = \int v_x \Phi \varphi_l \varphi_m dv, \quad R_{lm} = \int \varphi_l \Phi \frac{\partial \varphi_m}{\partial v_z} dv.$$

Условием совместимости однородной системы уравнений (9) относительно амплитуд  $a_m$  является

$$\left\| -i\omega_0 \delta_{lm} + (\alpha + ik_z) M_{lm} + ik_x B_{lm} - \frac{1}{H} R_{lm} \right\| = 0. \quad (10)$$

Дисперсионное уравнение (10) определяет зависимость частоты  $\omega_0$  от волнового вектора  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ ,

Учитывая ненулевые компоненты матриц  $M_{lm}$ ,  $B_{lm}$ ,  $R_{lm}$ ,

$$\begin{aligned} M_{12} = 1, \quad M_{23} = -\sqrt{2/3}, \quad R_{12} = 1, \\ R_{23} = -\sqrt{2/3}, \quad B_{14} = 1, \quad B_{34} = -\sqrt{2/3}, \end{aligned} \quad (11)$$

и свойства симметрии, в силу которых  $M_{lm} = M_{ml}$ ,  $B_{lm} = B_{ml}$ , из (10) получаем

$$\omega_0^4 + \frac{5}{3} \omega_0^2 \left( \alpha^2 - k_x^2 - k_z^2 - \frac{\alpha}{H} \right) + \frac{5}{3} i\omega_0 k_z \left( 2\alpha - \frac{1}{H} \right) + \frac{2}{3} k_x^2 / H^2 = 0. \quad (12)$$

Для выбранных функций  $\varphi_{rlm}$ , соответствующих собственным значениям оператора столкновений  $\lambda_{rlm} = 0$ , частота  $\omega$  должна быть действительной. При этом условии из (12) имеем  $\alpha = \frac{d}{dz} \ln \psi = 1/2H$ . Учитывая также, что  $\omega_0 = \omega (M/\kappa T)^{1/2}$ , перепишем (12) в виде

$$\omega^4 - \frac{5}{3} \frac{\kappa T}{M} \omega^2 (k_x^2 + k_z^2 + 1/4H^2) + \frac{2}{3} k_x^2 g^2 = 0. \quad (13)$$

Сопоставление полученного дисперсионного уравнения для акустико-гравитационных волн с выведенным в рамках гидродинамики [3],

$$\omega^4 - c^2 \omega^2 (k_x^2 + k_z^2 + 1/4H^2) + (\gamma - 1) g^2 k_x^2 = 0, \quad (14)$$

свидетельствует об их соответствии. Разница состоит лишь в том, что при использовании кинетического подхода вместо адиабатической скорости звука  $c = \gamma (\kappa T/M)^{1/2}$ , входящей в уравнение (14), в (13) фигурирует конкретное значение ее для идеального газа максвелловских молекул с показателем адиабаты  $\gamma = c_p/c_v = 5/3$  ( $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме).

Рассмотрим далее случай вертикального распространения гравитационных волн ( $k_x = 0$ ) при учете следующих членов разложения в  $h(\mathbf{v}) = \sum_m a_m \varphi_m$ , когда возникает диссипация волн, так что  $\omega = \omega' - i\Gamma$ .

Для одномерной задачи удобнее использовать сферические координаты в пространстве скоростей  $\xi$ . Выбирая полярную ось параллельной оси  $z$ , запишем собственные функции оператора столкновений в виде [5, 7]

$$\varphi_{rl} = \left[ \frac{\sqrt{\pi} r! (2l+1)}{2^{l+1} \Gamma(r+l+3/2)} \right]^{1/2} v^l S_{l+1/2}^l \left( \frac{1}{2} v^2 \right) P_l(\cos \theta). \quad (15)$$

В качестве  $\varphi_m$  далее выберем первые шесть функций  $\varphi_{rl}$  (15). Распо-

ложенные в порядке возрастания собственных чисел  $\lambda_{rl}$  эти функции есть

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_{00} = 1, & \varphi_2 &= \varphi_{01} = v_z, \\ \varphi_3 &= \varphi_{10} = \sqrt{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right), & \varphi_4 &= \varphi_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(v_z^2 - \frac{1}{3} v^2\right), \\ \varphi_5 &= \varphi_{11} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{1}{5} v^2\right) v_z, & \varphi_6 &= \varphi_{03} = \frac{1}{2\sqrt{15}} (5v_z^3 - 3v_z v^2).\end{aligned}$$

По аналогии с рассмотренным выше случаем распространения двумерных возмущений из требования совместности системы уравнений для коэффициентов  $a_m$  получаем

$$\left\| - (i\omega_0 + \lambda_m) \delta_{lm} + M_{lm} \left( ik_z + \frac{1}{2H} \right) - \frac{1}{H} R_{lm} \right\| = 0. \quad (16)$$

Кроме тех компонент матриц  $M_{lm}$  и  $R_{lm}$  из (11), которые соответствуют  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  и приведены выше, здесь надо учесть еще следующие:  $M_{24} = 2/\sqrt{3}$ ,  $M_{35} = \sqrt{5}/3$ ,  $M_{45} = -\sqrt{8}/15$ ,  $M_{46} = 3/\sqrt{5}$ ,  $R_{24} = 2/\sqrt{3}$ ,  $R_{35} = \sqrt{5}/3$ ,  $R_{45} = -\sqrt{8}/15$ ,  $R_{46} = 3/\sqrt{5}$ . Ограничиваясь в соотношении (16) максимальными значениями индексов  $l = m = 6$  и вводя  $K^2 = k_z^2 + 1/4H^2$ , представим его в виде

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -i\omega_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K^2 & -i\omega_0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 2/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} K^2 & -i\omega_0 & 0 & \sqrt{5/3} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} K^2 & 0 & -i\omega_0 - \lambda_{02} & -\sqrt{8/15} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{3}} K^2 & \sqrt{\frac{8}{15}} K^2 & -i\omega_0 - \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{5}} K^2 & 0 & -i\omega_0 - \lambda_{03} \end{array} \right| = 0. \quad (17)$$

Часть этого детерминанта, соответствующая  $\lambda = 0$  (выделена пунктиром), определяет дисперсионное уравнение акустико-гравитационных волн, распространяющихся по вертикали без затухания:

$$\omega_0^2 = \frac{5}{3} K^2. \quad (18)$$

Вычисляя затем методом возмущений поправки к решению (18), при малых волновых числах (для длинных волн) из (17) находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5}{3}} K + iK^2 \left( \frac{1}{3\lambda_{11}} + \frac{2}{3} \frac{1}{-\lambda_{02}} \right). \quad (19)$$

Используя указанную в [7] связь между величинами  $\lambda_{11}$  и  $\lambda_{02}$  с коэффициентами динамической вязкости  $\eta$  и теплопроводности  $\delta$ , имеем

$$\lambda_{11} = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{x^3 T}{M}} \frac{n_0}{\delta}, \quad \lambda_{02} = -\frac{(x T M)^{1/2} n_0}{\eta}. \quad (20)$$

Из формул (19), (20) следует:

$$\omega = \left[ \frac{5}{3} \frac{x T}{M} (k_z^2 + 1/4 H^2) \right]^{1/2} - i \left( k_z^2 + \frac{1}{4 H^2} \right) \left[ \frac{2}{3} \frac{\eta}{M n_0} + \frac{2}{15} \frac{\delta}{n_0 x} \right]. \quad (21)$$

Дисперсионное уравнение (21) определяет связь между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k_z$  акустико-гравитационных волн в неоднородной атмосфере. Декремент затухания этих волн  $\Gamma = \left( k_z^2 + \frac{1}{4 H^2} \right) \times$

$\times \left[ \frac{2}{3} \frac{\eta}{M n_0} + \frac{2}{15} \frac{\delta}{n_0 x} \right]$  согласуется с тем значением  $\Gamma_1$  ( $k_x=0$ ), которое найдено в работе [2] в гидродинамическом приближении. При сопоставлении  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  следует учесть, что для идеального газа максвелловских молекул вторая вязкость  $\eta_2=0$  и удельная теплоемкость  $c_v = \frac{3}{2} x/M$ .

В предельном случае  $4k_z^2 H^2 \gg 1$  влияние неоднородности атмосферы становится пренебрежимо малым, и декремент затухания  $\Gamma = k_z^2 \left[ \frac{2}{3} \eta/\rho + 0,2 \delta/c_v \rho \right]$  характеризует диссипацию звуковых волн [8].

Формула (19) является справедливой при выполнении условия  $K/|\lambda_{02}| \ll 1$ . Выражая  $\lambda_{02}$  через длину свободного пробега  $l_{св}$  [5, 7], приходим к выводу, что это условие с точностью до коэффициента порядка единицы эквивалентно неравенству  $\epsilon_1 = (k_z^2 + 1/4 H^2)^{1/2} l_{св} \ll 1$ . Таким образом, величина  $\epsilon_1$  является малым параметром рассмотренной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Эккарт, Гидродинамика атмосферы и океана, М., 1963.
2. Г. С. Голицын, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 1, № 2, 136 (1965).
3. С. О. Нинес, Can. J. Phys., 38, № 11, 1441 (1960).
4. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 1, 5 (1968).
5. М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, изд. Наука, М., 1969.
6. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, изд. Наука, М., 1971.
7. L. Waldman, Handbuch der Physik, ed. by S. Flügge, vol. 12, Berlin, 1958.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Физматгиз, М., 1954.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 марта 1977 г.

#### THE METHOD OF THE KINETIC EQUATION FOR ACOUSTIC-GRAVITY WAVES

G. I. Grigor'ev, O. N. Savina

A dispersive equation of acoustic-gravity waves has been obtained by the method of the kinetic equation. The damping decrement of these waves due to viscosity and heat conductivity is calculated at the vertical propagation in the isothermal atmosphere.

УДК 621.378.33

## К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ В КОЛЬЦЕВЫХ ГАЗОВЫХ ЛАЗЕРАХ (КГЛ)

*В. А. Зборовский, Е. А. Тиунов, Э. Е. Фрадкин*

На основе полуклассической векторной теории рассматривается задача о взаимодействии встречных волн произвольных эллиптических поляризаций в кольцевом лазере с анизотропным резонатором. Определяются частоты, интенсивности и состояния поляризации генерирующих волн. Исследуется зависимость разности интенсивностей и разности частот встречных волн и их состояний поляризаций от поляризационных характеристик собственных колебаний резонатора. Анализ формул проводится для 50% смеси изотопов генерирующего газа.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Как известно [1-3], в кольцевых резонаторах в каждом направлении имеется два собственных состояния поляризации бегущей волны с различными собственными значениями, определяющими частоты и потери.

В работе [3] рассмотрено нелинейное взаимодействие встречных волн различных поляризаций с активной средой и показано, что в отсутствие магнитного поля возникает поляризационная разность частот встречных волн, пропорциональная интенсивности генерации. В нашей работе, используя идеи [3], мы выведем «скалярные» уравнения генерации эллиптически поляризованных встречных волн в анизотропном резонаторе, на основе которых проанализируем зависимость интенсивностей генерируемых волн от поляризационных характеристик резонатора и рассчитаем нелинейную деформацию их состояний поляризации. Такие расчеты представляют существенный интерес, например, для высокочастотной лазерной гиromетрии.

2. Напомним, что в круговой системе координат собственные векторы комплексной матрицы потерь  $\hat{M}_n$  пустого резонатора (индекс  $n=r, l$  соответствует двум встречным направлениям распространения бегущих волн) с произвольной поляризационной анизотропией могут быть представлены в виде [3]

$$q_r^{(k)} = \begin{pmatrix} q_{1r}^{(k)} \\ q_{-1r}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} q_{1r}^{(k)} &= (-1)^{k+1} \exp(-i\varphi_k/2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_k\right), \\ q_{-1r}^{(k)} &= \exp(i\varphi_k/2) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_k\right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon_k \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi_k}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

(индекс  $k=1, 2$  соответствует различным собственным значениям резонатора  $M_{01}$  и  $M_{02}$ ). Здесь  $|\operatorname{tg} \varepsilon_{1,2}|$  равны отношению полуосей соответ-

ствующих эллипсов поляризаций,  $\frac{\varphi_1}{2}$ ,  $\left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$  — азимуты больших полуосей этих эллипсов (рис. 1 а). Знак  $\text{tg } \varepsilon_k$  указывает направление вращения в выделенной системе координат, общей для обоих направлений распространения бегущих волн.

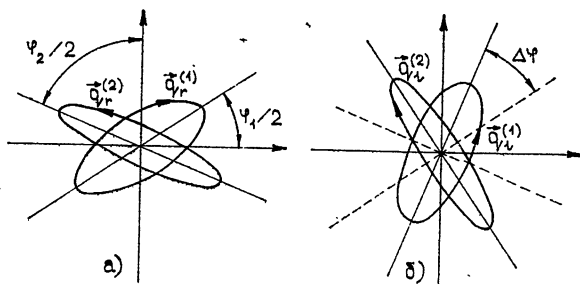


Рис. 1.

Компоненты векторов встречных волн получаются из (1.1) с помощью соотношений

$$q_{1n}^{(1)} = -q_{1n'}^{(2)}, \quad q_{-1n}^{(1)} = q_{-1n'}^{(2)} \quad (n, n' = r, l, n \neq n'). \quad (1.2)$$

Отметим, что поляризационные характеристики собственных векторов изменяются при прохождении через поляризационные элементы резонатора. В дальнейшем нас будут интересовать состояния поляризаций бегущих волн в месте нахождения активной среды.

Введем важные для дальнейшего понятия квазискалярного произведения и квазиортогональности векторов [10]. Квазискалярное произведение векторов  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y$  определим следующим образом:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \equiv a_x b_x + a_y b_y. \quad (1.3)$$

Оно отличается от обычного скалярного произведения  $(\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}) = a_x^* b_x + a_y^* b_y$ . (Здесь индекс «\*» означает комплексное сопряжение.)

Для вещественных векторов оба понятия совпадают. При переходе к круговым ортам  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(a_1 b_{-1} + a_{-1} b_1)$ , где  $a_i, b_i$  — круговые компоненты векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Легко видеть, что собственные векторы поляризаций встречных волн, принадлежащие разным собственным значениям  $M_{01}$  и  $M_{02}$ , квазиортогональны друг другу:

$$(q_n^{(k)} \times q_n^{(i)}) = 0 \quad (n, n' = r, l; n \neq n'; i, k = 1, 2; k \neq i). \quad (1.4)$$

Геометрический смысл (1.4) состоит в том, что в выделенной системе координат, общей для обоих направлений, квазиортогональные эллиптические поляризации характеризуются эллипсами, которые имеют одинаковые эллиптичности, развернутые на  $\pi/2$  большие полуоси и одинаковые направления вращения (в случае обычной ортогональности — направления вращения противоположны). Связь поляризаций встречных волн иллюстрируется рис. 1. Здесь изображены эллипсы поляризаций двух однонаправленных волн с произвольными эллиптичностью и ориентациями больших полуосей (рис. 1 а). Угол между осями равен  $\pi/2 - \Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Вследствие условия квазиортогональности (1.4) эллипсы поляризаций встречных волн уже не могут быть произвольными. Они представлены на рис. 1 б (пунктиром показаны поло-

жения больших полуосей эллипсов встречных волн, стрелки на эллипсах указывают направления вращения векторов электрических полей бегущих волн). Разность азимутов поляризаций генерирующих встречных волн равна  $\Delta\varphi$ .

3. Условия ортогональности и квазиортогональности собственных векторов поляризаций однонаправленных волн запишем в виде

$$\begin{aligned} (q_n^{(1)*} \times q_n^{(2)}) &= C_{\Delta\varphi} S_{2\epsilon} + i C_{2\Delta\epsilon} S_{\Delta\varphi} = 0, \\ (q_n^{(1)} \times q_n^{(2)}) &= C_{\Delta\varphi} S_{2\Delta\epsilon} + i C_{2\epsilon} S_{\Delta\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad \Delta\epsilon = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}, \quad C_\alpha \equiv \cos \alpha, \quad S_\alpha \equiv \sin \alpha^*.$$

Отсюда следует, что если эллиптические поляризации однонаправленных волн близки к ортогональным, то  $|\Delta\varphi| \ll 1$  и  $|\epsilon| \ll 1$ . При этом поляризации волн близки к линейным, если  $|\Delta\epsilon| \ll 1$ , и к круговым, если  $\frac{\pi}{4} - |\Delta\epsilon| \ll 1$ . Если же поляризации однонаправленных волн близки к квазиортогональным, то  $|\Delta\varphi| \ll 1$  и  $|\Delta\epsilon| \ll 1$ . При этом поляризации близки к линейным, если  $|\epsilon| \ll 1$ , и к круговым, если  $\frac{\pi}{4} - |\epsilon| \ll 1$ .

## 2. УРАВНЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ С АНИЗОТРОПНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

1. Рассмотрим одномодовый режим генерации в КГЛ. Вектор поля в круговых координатах имеет вид

$$E = |E_{0r}| e_r \exp[-i(\omega t - kz)] + |E_{0l}| e_l \exp[-i(\omega t + kz)], \quad (2.1)$$

где  $|E_{0n}|^2 = |E_{1n}|^2 + |E_{-1n}|^2$  — полная интенсивность волны в направлении  $n = r, l$ ;  $e_n$  — нормированный вектор поляризации:  $|e_{1n}|^2 + |e_{-1n}|^2 = 1$ . Векторные уравнения стационарной генерации запишем в виде

$$\hat{Q}_n e_n = \tilde{\mu}_n e_n \quad (n = r, l). \quad (2.2)$$

Матрица  $\hat{Q}_n$  определяется суммой матрицы потерь резонатора  $\hat{M}_n$  и матрицы нелинейной поляризации среды  $\hat{H}_n$ :  $\hat{Q}_n = \hat{M}_n + \hat{H}_n$ . Элементы матрицы  $\hat{H}_n$  квадратичны по амплитудам волн  $E_{0n}$  и в приближении слабого поля являются величинами первого порядка малости по превышению накачки над пороговой ( $N_0/N_{\text{пор}} - 1$ ), в то время как элементы матрицы потерь  $\hat{M}_n$  — величины нулевого порядка малости. В представлении круговых координат элементы матрицы  $\hat{H}_n$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \{\hat{H}_n\}_{s,s} &= -\alpha_0 [J_n (\beta_{ss} |e_{ns}|^2 + \beta_{s-s} |e_{n-s}|^2) + \\ &+ J_{n'} (\theta_{ss} |e_{n's}|^2 + \theta_{s-s} |e_{n'-s}|^2)], \end{aligned}$$

\* Отметим, что в [9] приняты другие обозначения, а именно:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2), \quad \Delta\epsilon = \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

$$\{\hat{H}_n\}_{s,-s} = -\alpha_0 I_{n'} \vartheta_s e_{n'} e_{n,-s}^* \quad (s = \pm 1), \quad (2.3)$$

$$\tilde{\mu}_n = -\sigma_0 \eta_n - i(\omega_n - \nu_n - \sigma_n) \quad (n, n' = r, l; \quad n \neq n').$$

Здесь  $I_n \equiv a |E_{0n}|^2 = \frac{3G(j_a, j_b)}{\hbar^2 \gamma_{ab}} \left( \frac{1}{\gamma_a} + \frac{1}{\gamma_b} \right) |\langle j_a | d | j_b \rangle|^2 |E_{0n}|^2$  — без-

размерная интенсивность волны с вектором поляризации  $e_n$ ;  $\alpha_0 = \frac{c}{L_0} G_0$ ;

$G_0$  — усиление за один обход резонатора в центре линии усиления;  $c$  — скорость света;  $L_0$  — оптическая длина резонатора;  $\eta_n = \eta_n(\omega_n - \omega_0)$  — генератор линии усиления, причем  $\eta_n(0) = 1$ ;  $\nu_n$  и  $\omega_n$  — резонаторная и комбинационная частоты для волны в направлении  $n$ ;  $\sigma_n$  — коэффициент линейной дисперсии активной среды.

В (2.3) использованы также комплексные коэффициенты взаимодействия круговых компонент полей однонаправленных бегущих волн ( $\alpha_0 a \beta_{ss} \equiv aR$  и  $\alpha_0 a \beta_{s-s} \equiv aF$ ), встречных волн ( $\alpha_0 a \theta_{ss} \equiv aL$  и  $\alpha_0 a \theta_{s-s} \equiv aL_1$ ) и комбинационного взаимодействия трех волн  $\alpha_0 a \vartheta_s \equiv aW$ , которые вычислялись в [5-7]\*.

2. Решение уравнений (2.2) будем искать при условии, что усиление выше потерь только для одного типа колебаний в каждом направлении:

$$\chi_2 > G_0 \eta_n, \quad G_0 \eta_n > \chi_1 \quad (n = r, l), \quad (2.4)$$

где  $G_0 \eta_n$  — усиление активной среды на резонаторной частоте, соответствующей данной поляризации,  $\chi_k = \frac{L_0}{c} |\text{Re } M_{0k}|$  — потери собственных поляризаций резонатора.

Вектор поляризации генерируемой волны  $e_n$  ( $n = r, l$ ) выразим через собственные векторы поляризации пустого резонатора  $q_n^{(1)}$  и  $q_n^{(2)}$ ,

$$e_n = q_n^{(1)} + b_{1n} q_n^{(1)} + b_{2n} q_n^{(2)}. \quad (2.5)$$

Здесь коэффициенты  $b_{1n}$  и  $b_{2n}$  определяют нелинейную деформацию наиболее добротного собственного вектора поляризации пустого резонатора за счет влияния активной среды и при выполнении условия сильной анизотропии резонатора

$$\frac{L_0}{c} |\Delta M| \equiv \frac{L_0}{c} |M_{01} - M_{02}| = \sqrt{(\chi_1 - \chi_2)^2 + \left(\delta\nu \frac{L_0}{c}\right)^2} \gg G_0 \eta_1 - \chi_1 \quad (2.6)$$

имеют тот же порядок малости, что и безразмерная интенсивность. ( $\delta\nu$  — разность резонаторных частот для разных поляризаций, одинаковая для встречных направлений.)

Физический смысл этого условия состоит в том, что пустой резонатор обладает достаточно большой амплитудой ( $|\chi_1 - \chi_2|$ ) или фазовой  $\left( \left| \delta\nu \frac{L_0}{c} \right| \right)$  анизотропией, и возмущение, вносимое активной средой, мало

\* В работе [3] коэффициенты  $R, F, L, L_1$  и  $W$  приведены для чистого изотопа и 50% смеси, причем в выражении для  $R$  и  $\sigma$  в случае 50% смеси (см. формулу (П.1) [3]) допущены опечатки. В обозначениях [3]

$$R = \alpha_0 [1 - \eta^2 (1 - 2y^2) (1 + f^2) + i2 \eta^2 f (1 - 2y^2)], \\ \sigma = 2\alpha_0 \eta f [-\chi (1 + 2\eta\chi) + \eta (1 - 2y^2)].$$



меняет состояние поляризации поля. Уравнения (2.2) написаны в приближении слабого поля ( $I_n \ll 1$ ) и справедливы в третьем порядке по полю. Следовательно, чтобы не было превышения точности, элементы матрицы  $\hat{Q}_n$  должны быть не выше второго порядка по полю. Это означает, что при выполнении условия (2.6) можно заменить в (2.3) компоненты нормированного вектора поля  $e_n$  на соответствующие компоненты собственного вектора резонаторной задачи  $q_n^{(1)}$ , отвечающего собственному значению  $M_{01}$ , для которого выполнено пороговое условие (2.4).

Собственное значение  $\tilde{\mu}_n$  в (2.2) представим в виде

$$\tilde{\mu}_n = \mu_n + M_{01}, \quad (2.7)$$

где  $\mu_n$  — добавка к наиболее добротному собственному значению  $M_{01}$ , обусловленная возмущением, вносимым в резонатор активной средой. При выполнении (2.6)  $\mu_n$  — малая величина ( $|\mu_n| \ll |\Delta M|$ ), имеющая порядок превышения усиления над потерями.

3. Подставляя (2.5) и (2.7) в (2.2) и сохраняя требуемый порядок малости, получим векторное уравнение

$$\hat{H}_n q_n^{(1)} = \Delta M b_{2n} q_n^{(2)} + \mu_n q_n^{(1)}. \quad (2.8)$$

В этом уравнении член  $\Delta M b_{2n} q_n^{(2)}$  определяет влияние малодобротной поляризации на генерацию. В силу (2.6) он имеет такой же порядок величины, что и другие члены уравнения (2.8). Умножим (2.8) квази-скалярно на  $q_n^{(1)}$  и воспользуемся свойством квазиортогональности собственных встречных волн (1.4). Тогда получим комплексное уравнение для определения интенсивностей и частот генерации [10]:

$$\mu_n = \frac{(q_n^{(1)} \times \hat{H}_n q_n^{(1)})}{(q_n^{(1)} \times q_n^{(1)})} \quad (n, n' = r, l; n \neq n'), \quad (2.9)$$

а умножая (2.8) на  $q_n^{(2)}$ , — формулу для вычисления коэффициента деформации состояния поляризации за счет влияния генерации:

$$b_{2n} = \frac{1}{\Delta M} \frac{(q_n^{(2)} \times \hat{H}_n q_n^{(1)})}{(q_n^{(2)} \times q_n^{(2)})}, \quad (2.10)$$

где  $\Delta M = M_{01} - M_{02}$ . Действительная часть коэффициента  $b_{1n}$  определяется из условия нормировки  $|e_n|^2 = 1$ . С точностью до членов, линейных по превышению, имеем

$$\text{Re } b_{1n} = -\text{Re}[b_{2n} (q_n^{(1)*} \times q_n^{(2)})]. \quad (2.11)$$

Мнимая часть  $b_{1n}$  является величиной более высокого порядка малости по превышению и в рассматриваемом приближении не определяется.

4. В круговом базисе вектор  $e_n$  представим в виде

$$e_n = \begin{pmatrix} \exp(-i\varphi'_n/2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \epsilon'_n\right) \\ \exp(i\varphi'_n/2) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \epsilon'_n\right) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Это выражение дает возможность определить изменение эллиптичности  $\delta\epsilon_n = \epsilon'_n - \epsilon_n$  и поворот азимута наиболее добротной резонаторной

поляризации  $\delta\varphi_n = \varphi'_n - \varphi_n$ , вызванные возмущением, вносимым активной средой:

$$\delta\varepsilon_r = -\operatorname{Re}(T_0 b_{2r}), \quad \delta\varphi_r = \frac{2}{C_{2\varepsilon}} \operatorname{Im}(T_0 b_{2r}), \quad (2.13)$$

$T_0 = C_{\Delta\varphi} C_{2\varepsilon} - i S_{\Delta\varphi} S_{2\Delta\varepsilon}$ . Аналогичные выражения для встречной волны ( $n = l$ ) получаются из (2.13) заменой  $r \rightarrow l$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$  и одновременным изменением знаков у  $\Delta\varepsilon$  и  $\Delta\varphi$ . Найденные векторы (2.5), (2.12) описывают состояния поляризации бегущих волн в месте нахождения активной среды. Среда предполагается однородной, а ее длина по оси лазера не слишком большой, чтобы можно было пренебречь изменениями поляризации поля вдоль среды. Для определения поляризации выходящих из резонатора волн нужно учесть прохождение ими поляризующих элементов, стоящих между активной средой и приемником излучения.

5. Используя (1.1), (1.2), (2.3) и (2.7), представим уравнения (2.9) и (2.10) в обычном виде:

$$\alpha_n + i(\omega_n - \nu_n - \sigma_n) = B_{nn} I_n + B_{nn'} I_{n'}; \quad (2.14)$$

$$b_{2n} = -\frac{\alpha_0}{T_0 \Delta M} (T_{nn} I_n + T_{nn'} I_{n'}), \quad (2.15)$$

где  $\alpha_n = \sigma_0 (\eta_n - \chi_1 / G_0)$  — линейный коэффициент усиления волны в направлении  $n$  на частоте  $\omega_n$ ;  $\nu_n$  — резонаторная частота добротной поляризации в направлении  $n$ ,

$$B_{rr} = \frac{1}{2} (\beta_{ss} + \beta_{s-s}) + \frac{1}{2} (\beta_{s-s} - \beta_{ss}) b_r S_{2\varepsilon_1}, \quad (2.16)$$

$$B_{rl} = \frac{1}{2} (\theta_{s-s} + \theta_{ss} + \vartheta_s) + \frac{1}{2} (\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s) b_r S_{2\varepsilon_1};$$

$$T_{rl} = \left( \frac{\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s}{4} + \frac{\vartheta_s}{2} C_{\Delta\varphi}^2 \right) S_{4\varepsilon} - \left( \frac{\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s}{4} + \frac{\vartheta_s}{2} S_{\Delta\varphi}^2 \right) \times \\ \times S_{4\Delta\varepsilon} - i \frac{\vartheta_s}{2} S_{2\Delta\varphi} C_{2\varepsilon_1}, \quad (2.17)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{4} (\beta_{s-s} - \beta_{ss}) S_{4\varepsilon_1};$$

$$b_r = -\frac{S_{2\Delta\varepsilon} C_{2\varepsilon} + \frac{i}{2} S_{2\Delta\varphi} (S_{2\Delta\varepsilon}^2 - C_{2\varepsilon}^2)}{|T_0|^2}, \quad (2.18)$$

$$T_0 = C_{\Delta\varphi} C_{2\varepsilon} - i S_{\Delta\varphi} S_{2\Delta\varepsilon}.$$

Соответствующие коэффициенты для встречной волны ( $n = l$ ) получаются из (2.16)–(2.18) заменами  $r \rightleftharpoons l$ ,  $\varepsilon_1 \rightleftharpoons \varepsilon_2$  и одновременным изменением знаков  $\Delta\varepsilon$  и  $\Delta\varphi$  ( $b_l = -b_r$ ).

Уравнения (2.14), (2.15) — это «скалярные» уравнения, описывающие стационарную генерацию эллиптически поляризованных встречных волн в анизотропном резонаторе (2.6).

Для встречных волн линейных поляризаций ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ) из (2.16) получаем  $B_{rr} = B_{ll} = \frac{\beta_{ss} + \beta_{s-s}}{2} \equiv \beta + i\rho$  — известный комплексный коэффициент насыщения и нелинейной дисперсии бегущей волны,  $B_{rl} = B_{lr} = \frac{\theta_{ss} + \theta_{s-s} + \theta_s}{2} \equiv \theta + i\tau$  — известный комплексный коэффициент нелинейного взаимодействия встречных волн. Для встречных волн ортогональных круговых поляризаций ( $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \pm \frac{\pi}{4}$ )  $B_{rr} = B_{ll} = \beta_{ss}$ ,  $B_{rl} = B_{lr} = \theta_{s-s}$ . В резонаторе с квазиортогональными собственными поляризациями ( $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $b_r = b_l = 0$ ) встречные волны имеют одинаковые эллиптические поляризации и взаимодействуют между собой так же, как встречные волны линейных поляризаций. В резонаторе с  $\epsilon_1 = -\epsilon_2^*$  выполняется условие взаимности  $B_{rr} = B_{ll}$ ,  $B_{rl} = B_{lr}$ .

Таким образом, из (2.16) — (2.18) следует, что в отсутствие невзаимных элементов и магнитного поля в КГЛ интенсивности и частоты встречных волн являются взаимными в следующих случаях:

а) линейные собственные поляризации с произвольной разностью азимутов, б)  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ , в)  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,  $\Delta\varphi = 0$  — квазиортогональные собственные поляризации. При любых других собственных поляризациях пустого резонатора возникает разность частот и интенсивностей встречных волн.

Другой особенностью коэффициентов (2.16) является отсутствие определенной четности в зависимостях амплитудных ( $B'_{nn}$ ,  $B''_{nn}$ ) и фазовых ( $B''_{nn}$ ,  $B'_{nn}$ ) коэффициентов\*\* от расстройки  $\omega - \omega_0$  ( $\omega_0$  — центр контура усиления). В то время как амплитудные коэффициенты взаимодействия круговых поляризаций ( $\beta'_{ss}$ ,  $\beta'_{s-s}$  и т. д.) являются четными функциями, а фазовые коэффициенты ( $\beta''_{ss}$ ,  $\beta''_{s-s}$  и т. д.) — нечетными функциями расстройки, умножение их на комплексный поляризационный параметр  $b$  приводит к их перемешиванию. Такой характер коэффициентов (2.16) приводит к несимметрии интенсивности каждой из генерируемых встречных волн в зависимости от  $(\omega - \omega_0)$ . На рис. 2 качественно иллюстрируется влияние указанного «поляризационного перемешивания» на форму лэмбовского провала в зависимости интенсивности от расстройки. Кривая 1 изображает лэмбовский провал в отсутствие «перемешивания» (например, в случае квазиортогональных собственных поляризаций, когда  $\Delta\epsilon = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $I_r = I_l \equiv I$ ). Кривые 2 и 3 иллюстрируют деформацию провалов в интенсивностях встречных волн при малом отличии собственных поляризаций от квазиортогональных ( $\Delta\epsilon = 0$ ,  $\Delta\varphi \neq 0$ ). В этом случае  $\delta I = I_r - I_l$  — нечетная функция расстройки. Эти кривые рассчитаны для линии  $\lambda = 0,6328$  мкм He-Ne-лазера с одноизотопной активной средой при давлении 2 тора и  $|\epsilon| = |\Delta\varphi| = 0,05$ . Заштрихована область устойчивости (по расстройке  $f$ ) однонаправленной генерации. По оси ординат выбран масштаб в относительных единицах, где  $I_0$  — интенсивность волны на центре линии при  $\Delta\varphi = 0$ . В общем случае произвольных собственных поляризаций  $\delta I$  не является антисимметричной функцией  $\omega - \omega_0$ .

\* Это условие означает, что в собственных системах координат, связанных с направлениями распространения бегущих волн, встречные волны имеют равные эллиптичности. В частности, при  $\Delta\varphi = 0$  это условие выделяет класс ортогональных собственных поляризаций.

\*\* Здесь и далее действительные части величин будем обозначать одним штрихом, а мнимые — двумя, например,  $B \equiv B' + iB''$ .

Аналогичным образом возникает несимметрия зависимости нелинейной (пропорциональной превышению) разности частот встречных волн от расстройки.

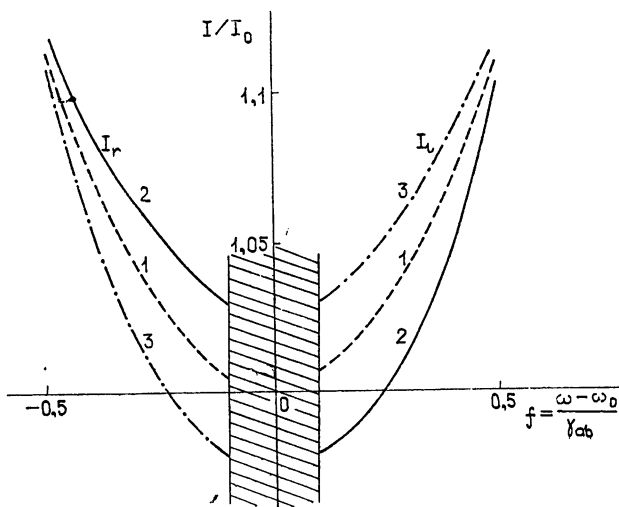


Рис. 2.

### 3. РАСЧЕТ ЧАСТОТ И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ГЕНЕРАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

1. Частоты и интенсивности генерации встречных волн с произвольными эллиптическими поляризациями найдем из комплексных уравнений (2.14). Однако наибольший интерес представляют выражения для разности интенсивностей и частот встречных волн.

*Разность интенсивностей:*

$$\Delta I \equiv I_l - I_r = \Delta_1 / \Delta_0,$$

$$\Delta_1 = 2\alpha \operatorname{Re}[(F_2 + R_2) b S_{2\epsilon} C_{2\Delta\epsilon}] - 2\Delta\alpha \operatorname{Re}(R_1 + F_1) + (R_2 - F_2) b C_{2\epsilon} S_{2\Delta\epsilon}, \quad (3.1)$$

$$\Delta_0 = (R'_1)^2 - (F'_1)^2 + 2C_{2\epsilon} S_{2\Delta\epsilon} \operatorname{Re}[b(R'_1 R_2 + F'_1 F_2)] - S_{2\epsilon} S_{2\epsilon_s} \{ [\operatorname{Re}(bR_2)]^2 - [\operatorname{Re}(bF_2)]^2 \}.$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_r + \alpha_l), \quad \Delta\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_r - \alpha_l), \quad b \equiv b_r, \quad R_1 = \frac{1}{2}(\beta_{ss} + \beta_{s-s}),$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(\beta_{s-s} - \beta_{ss}), \quad F_1 = \frac{1}{2}(\theta_{ss} + \theta_{s-s} + \vartheta_s), \quad (3.2)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(\theta_{s-s} - \theta_{ss} - \vartheta_s).$$

*Разность частот:*

$$\omega_l - \omega_r \equiv \Delta\omega = \Delta\nu + \Delta\sigma - \Delta\omega_n, \quad (3.3)$$

где  $\Delta\nu = \nu_l - \nu_r$  — разность резонаторных частот встречных волн,  $\Delta\sigma = \sigma_l - \sigma_r$  — разность затягиваний,  $\Delta\omega_n = (\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)$  — разность нелинейных сдвигов частот,

$$\Delta\omega_1 = 2\alpha C_{2\Delta\varepsilon} S_{2\varepsilon} \operatorname{Im} [b(R_2 + F_2)(R_1 - F_1)^*] / \Delta_0,$$

$$\Delta\omega_2 = \Delta\alpha \operatorname{Im} \{ [(R_1 + R_2 b S_{2\varepsilon_1}) + (F_1 - F_2 b S_{2\varepsilon_1})^*] \times \\ \times [(R_1 - R_2 b S_{2\varepsilon_2}) + (F_1 + F_2 b S_{2\varepsilon_2})^*] \} / \Delta_0. \quad (3.4)$$

2. Приведем соответствующие формулы в практически важных случаях, когда поляризации встречных волн мало отличаются друг от друга ( $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $|\Delta\varphi| \ll 1$ ). При этом, если поляризации встречных волн близки к линейным ( $|\Delta\varepsilon| \ll 1$ ), то с точностью до второго порядка по малым поляризационным параметрам имеем:

$$\Delta I_n = I_t - I_r = \alpha (a_1 \varepsilon \Delta\varepsilon + a_2 \varepsilon \Delta\varphi) + \Delta\alpha a_3; \quad (3.5)$$

$$\Delta\omega_n = \omega_t - \omega_r = \Delta\nu + \Delta\sigma + \alpha (C_1 \varepsilon \Delta\varepsilon + C_2 \varepsilon \Delta\varphi). \quad (3.6)$$

Входящие сюда коэффициенты для равноизотопной активной среды имеют вид [5, 6]

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \eta^2 (1 - 2y^2) (f_r^2 + f_t^2) - \frac{\chi_1}{G_0} \right], \quad (3.7)$$

$$\Delta\alpha = -\alpha_0 \eta \frac{\Delta\nu}{ku} (1 - 2y^2) f, \quad \Delta\sigma = \alpha_0 \frac{\Delta\nu}{ku}, \quad a_1 = 16 \frac{1 - 2K_0}{(1 + 2K_0)^2},$$

$$a_2 = 32 \left( \frac{\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{нз}} \right)^2 (1 + 2y^2) f \frac{2(K_1 - K_0) - 1}{(1 + 2K_0)^2}, \quad a_3 = \frac{4}{1 + 2K_0},$$

$$c_1 = 64 \left( \frac{\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{нз}} \right)^2 \frac{K_1 - 1}{1 + 2K_0} (1 + 2y^2) f, \quad c_2 = 4 \frac{1 - 2K_0}{1 + 2K_0}.$$

Здесь  $f_n = \frac{\omega_n - \omega_0}{\gamma_{ab}}$ ,  $f = \frac{\omega_r + \omega_t - 2\omega_0}{2\gamma_{ab}}$ ,  $y = \frac{\Delta\omega_{нз}}{2ku}$ ,  $\eta = \frac{\gamma_{ab}}{ku}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_{01} + \omega_{011})$  — центр суммарного контура усиления.  $K_1$  и  $K_2$  являются

функциями угловых моментов рабочих уровней атома и приведены в [5]. Для  $\text{Ne}^{20}; \text{Ne}^{22}$   $\lambda = 632,8$  нм,  $y = 0,5$ ,  $\sigma_0 = 0,42$ ,  $K_0 = 0,24$ ,  $K_1 = 0,32$ . Выражения для  $\Delta I_n$  и  $\Delta\omega_n$  содержат как четную, так и нечетную зависимость от расстройки  $f$ . Член, пропорциональный  $\varepsilon \Delta\varepsilon$ , дает четный вклад в  $\Delta I_n$  но нечетный — в  $\Delta\omega_n$ , тогда как член, пропорциональный  $\varepsilon \Delta\varphi$ , дает нечетный вклад в  $\Delta I_n$  и четный в  $\Delta\omega_n$ . Член, зависящий от разности усилений встречных волн, дает четный вклад в  $\Delta I_n$ .

Из приведенных формул следует, что при  $|\varepsilon| = |\Delta\varepsilon| = |\Delta\varphi| = 0,01$  и превышении усиления над порогом 0,1 поляризационная разность частот встречных волн (вблизи центра линии)  $\Delta\omega_n = 1,4 \cdot 10^{-5} \frac{\Delta\omega_p}{2}$ ,

где  $\frac{\Delta\omega_p}{2}$  — резонаторная полуширина. Относительная разность интенсивностей  $\Delta I_n / I_{ср}$  ( $I_{ср}$  — средняя интенсивность встречных волн вблизи центра линии) составит при этом 0,01%.

3. Для поляризаций встречных волн, близких к ортогональным круговым ( $\Delta\beta \equiv \frac{\pi}{4} - |\Delta\varepsilon| \ll 1$ ):

$$\Delta I_k = \alpha b_1 \varepsilon \Delta\beta + \Delta\alpha b_2; \quad (3.8)$$

$$\Delta\omega_k = \Delta\nu + \Delta\sigma + \alpha d_1 \epsilon \Delta\beta, \quad (3.9)$$

где для равноизотопной активной среды

$$b_1 = 2K_0 - 1, \quad b_2 = -2, \quad d_1 = -16 \left( \frac{\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{13}} \right)^2 (1 + 2K_0)(1 - K_1) f^*. \quad (3.10)$$

Как видно из (3.8), (3.9), в случае поляризаций встречных волн, близких к ортогональным круговым, член, зависящий от разности азимутов, не дает вклада во втором порядке по малым поляризационным параметрам. Характер зависимости от расстройки остальных членов здесь такой же, как и в случае поляризаций, близких к линейным. Численные оценки поляризационной разности частот и разности интенсивностей дают величины такого же порядка, как и в случае поляризаций, близких к линейным.

При выводе формул (3.1)–(3.4) для поляризационной невязанности встречных волн мы не учитывали их дифракционной невязанности. Можно показать, что в низшем порядке теории возмущений малые дифракционные и поляризационные поправки входят аддитивно. Поэтому, рассматривая поляризационные эффекты в низшем порядке теории возмущений, можно не учитывать дифракционную невязанность встречных волн. Однако это не означает, что дифракционная невязанность мала по сравнению с поляризационной: всегда можно подобрать такие условия, в которых будет превалировать тот или иной малый эффект.

#### 4. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

1. Коэффициенты нелинейной деформации состояний поляризации добротных встречных волн согласно (2.15), (2.11) являются малыми величинами (пропорциональными интенсивности), что находится в соответствии с условием малости нелинейной деформации собственных поляризаций (2.6). Рассмотрим нелинейную деформацию поляризаций в соответствии с классификацией взаимных резонаторов, приведенной в разд. 2.

а) В случае линейных собственных поляризаций ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ) из (2.17) находим  $T_{rr} = T_{ll} = 0$ ,  $T_{rl} = -T_{lr} = -i \frac{\partial_s}{2} S_{2\Delta\varphi}$ , и так как  $I_r = I_l \equiv I$ , то

$$b_{2r} = -b_{2l} = i \frac{G_0 I \partial_s}{2\Delta M} S_{2\Delta\varphi}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) и (2.13) следует, что линейные поляризации встречных волн разворачиваются в противоположные стороны ( $\delta\varphi_r = -\delta\varphi_l$ ) и приобретают эллиптичности, равные по величине и противоположные по знаку:  $\delta\epsilon_r = -\delta\epsilon_l$  (в системе координат, общей для встречных направлений). В случае ортогональных линейных собственных поляризаций ( $\Delta\varphi = 0$ ) поляризации встречных волн совпадают и не деформируются при генерации (сохраняется взаимность их состояний поляризации).

б) В случае  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$  ( $\Delta\varphi$  — произвольно) по-прежнему  $I_r = I_l \equiv I$  и  $b_{2n}$  меняет знак при переходе к встречной волне. В результате нелинейной деформации эллипсы встречных волн приобретут дополнительный разворот азимутов  $2\delta\varphi$ , а их эллиптичности по-прежнему будут отличаться только знаком. Отсюда следует, что эллиптические поляри-

\* В выражении (34) работы [3] для  $\Delta\omega_k$  допущена опечатка.

зации встречных волн, для которых  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 \neq \pm \pi/4$ , даже в случае совпадения их азимутов ( $\Delta\varphi = 0$ ) испытывают нелинейную деформацию как эллиптичностей, так и азимутов. Если  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \pm \pi/4$ , то  $b_{2n} = 0$ , т. е. ортогональные круги не деформируют друг друга при генерации (но не являются одинаковыми).

в) Если  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  и  $\Delta\varphi = 0$ , то собственные поляризации встречных волн пустого резонатора (принадлежащие одному собственному значению) имеют одинаковые состояния поляризации. В этом случае  $I_r = I_l$ ,  $T_{rr} = T_{ll}$ ,  $T_{rl} = T_{lr}$ , и обе волны испытывают одинаковую нелинейную деформацию ( $\delta\epsilon_r = \delta\epsilon_l$ ,  $\delta\varphi_r = \delta\varphi_l$ ). Состояния их поляризаций остаются одинаковыми.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что кольцевой газовый лазер с анизотропным резонатором является полностью взаимным только в случае квазиортогональных собственных поляризаций резонатора (частный случай линейных ортогональных поляризаций содержится в указанном классе при  $\epsilon = 0$ ). В этом случае генерируемые встречные волны имеют одинаковые интенсивности и частоты, а их состояния поляризации испытывают одинаковые нелинейные деформации, сохраняющие их взаимность.

2. Запишем коэффициент нелинейной деформации состояния поляризации генерируемой волны за счет предпороговой поляризации в случае близости собственных поляризаций к линейным ортогональным. С точностью до членов второго порядка по малым поляризационным параметрам включительно

$$b_{2r} = \frac{\alpha}{\Delta M} (A_1 \epsilon + A_2 \Delta\epsilon + A_3 \Delta\varphi), \quad (4.2)$$

где для равноизотопной активной среды

$$A_1 = A_2 = 2 \frac{2K_0 - 1}{2K_0 + 1}, \quad A_3 = -\frac{8(2K_0 - K_1)}{1 + 2K_0} \left( \frac{\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{нс}} \right)^2 (f + i). \quad (4.3)$$

Согласно (2.13) изменение эллиптичности и поворот азимута генерирующей поляризации

$$\delta\epsilon_r = -\operatorname{Re} b_{2r}, \quad \delta\varphi_r = 2\operatorname{Im} b_{2r}. \quad (4.4)$$

Отсюда следует, что деформации (4.4) содержат как четную, так и нечетную зависимость от расстройки. Вклад в  $\delta\epsilon$  и  $\delta\varphi$  членов, связанных с эллиптичностью собственных поляризаций, имеет четную зависимость от расстройки, тогда как член, пропорциональный  $\Delta\varphi$ , дает вклад различной четности в зависимости от анизотропии резонатора. Так, в фазоанизотропном резонаторе ( $\Delta M' = 0$ ) эллиптичность собственных поляризаций дает вклад только в  $\delta\varphi$ . При этом  $\Delta\varphi$  дает нечетный ( $\sim f$ ) вклад в  $\delta\varphi$  и четный в  $\delta\epsilon$ . В амплитудно-анизотропном резонаторе ( $\Delta M'' = 0$ ) эллиптичность собственных поляризаций дает вклад только в  $\delta\epsilon$ , а  $\Delta\varphi$  дает нечетный ( $\sim f$ ) вклад в  $\delta\epsilon$  и четный в  $\delta\varphi$ . Для собственных поляризаций, близких к ортогональным круговым,

$$b_{2r} = \frac{\alpha}{\Delta M} [B_1 \epsilon + B_2 \Delta\beta + B_3 \Delta\varphi (\epsilon + \Delta\beta)] \frac{1}{T_0}, \quad (4.5)$$

где

$$B_1 = -B_2 = 1 - 2K_0, \quad B_3 = -16(2K_0 - K_1) \left( \frac{\gamma_{ab}}{\Delta\omega_{нс}} \right)^2 (f + i).$$

Изменение эллиптичности  $\delta\varepsilon$  согласно (2.13)

$$\delta\varepsilon_r = \alpha B_1 (\Delta\beta - \varepsilon) \frac{\Delta M'}{|\Delta M|^2}. \quad (4.6)$$

Формула (2.13) для определения  $\delta\varphi$  неприменима для собственных поляризации, близких к ортогональным круговым.

3. В заключение настоящей работы отметим различие наших результатов и результатов работы [8]. В монографии [8] выведены уравнения генерации встречных волн в кольцевом поляризационно-анизотропном резонаторе (17.3). По виду они аналогичны нашим уравнениям (2.14), (2.15), однако зависимости коэффициентов  $B_{nn'}$  от угловых моментов уровней и векторов поляризации волн, которые выписаны в формулах (17.4)—(17.7), отличаются от наших. Произведенное нами рассмотрение показало, что уравнения (17.3) работы [8] эквивалентны следующим уравнениям, записанным через векторы поляризации резонатора:

$$(q_n^{(1)*} \times \hat{H}_n q_n^{(1)}) = \mu_n \quad (n = r, l). \quad (a)$$

Эти уравнения не совпадают с нашими уравнениями (2.9). Чтобы объяснить это расхождение, умножим (2.8) скалярно на  $q_r^{(1)}$ . Получим

$$q_r^{(1)*} \times \hat{H}_r q_r^{(1)} = \mu_r + \Delta M b_{2r} (q_r^{(1)*} \times q_r^{(2)}), \quad (б)$$

и так как  $(q_r^{(1)*} \times q_r^{(2)}) \neq 0$ , то уравнение (б) не совпадает с (а). Уравнение (б) переходит в (а) в случае, если векторы  $q_r^{(1)}$  и  $q_r^{(2)}$  ортогональны, чего нет, а также в случае, когда можно пренебречь членом, связанным с нелинейной деформацией вектора поляризации  $\sim b_{2r}$ . По-видимому, второе предположение было сделано авторами [8] при выводе уравнений (17.3). На стр. 121 читаем: «Предполагается, что векторы поляризации встречных волн полностью определяются анизотропией «пустого» резонатора».

Предположение о возможности пренебречь нелинейной деформацией вектора поляризации неверно, так как отброшенный в (а) член того же порядка малости по превышению накачки над ее пороговым значением, как и сохраненные в (а) члены.

Покажем теперь, как из (б) с сохранением члена нелинейной деформации получить уравнение (2.9). Наряду с (б) можно получить из (2.8) другое уравнение:

$$(q_r^{(2)*} \times \hat{H}_r q_r^{(1)}) = \mu_r (q_r^{(2)*} \times q_r^{(1)}) + b_{2r} \Delta M. \quad (в)$$

Исключая  $b_{2r}$  из (б) с помощью (в), получим

$$(q^* \times \hat{H}_r q_r^{(1)}) = \mu_r (q_r^{(1)} \times q^*). \quad (г)$$

Здесь  $q = q_r^{(1)} - (q_r^{(2)*} \times q_r^{(1)}) q_r^{(2)}$ . Видно, что вектор  $q$  ортогонален  $q_r^{(2)}$ , а, следовательно,  $q = h q_l^{(1)*}$ , где  $h$  — некоторое комплексное число. Подставляя  $q$  в (г), получим

$$(q_l^{(1)} \times \hat{H}_r q_r^{(1)}) = \mu_r (q_l^{(1)} \times q_r^{(1)}),$$

что совпадает с нашими уравнениями (2.9). Указанный вывод является также доказательством единственности уравнений (2.14), (2.15) в качестве уравнений стационарной генерации эллиптически поляризованных волн в анизотропном кольцевом резонаторе.



В работе [9] получено выражение (11) для разности частот встречных волн в поляризационно-анизотропном резонаторе. Это выражение получено на основе уравнений генерации (17.3) из [8] и отличается от наших результатов (3.1), (3.4) зависимостью от расстройки, полных угловых моментов  $j_a$ ,  $j_b$  и разности азимутов эллипсов поляризаций встречных волн. Эти различия легко объясняются тем различием в исходных уравнениях, о котором говорилось выше.

В работе [11] приведены формулы для интенсивностей и разности частот встречных волн, аналогичные нашим. Однако детальное сравнение результатов затруднительно ввиду отсутствия в [10] выражений для соответствующих коэффициентов в практически важных случаях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Молчанов, Г. В. Скродцкий, Квантовая электроника, 4, сб. статей под ред. акад. Н. Г. Басова, изд. Сов. радио, М., 1971, стр. 3.
2. В. С. Рубанов, Л. Н. Орлов, Способы создания поляризационно-частотной невязности, изд. АН БССР, Минск, 1971.
3. В. А. Зборовский, Э. Е. Фрадкин, ЖЭТФ, 66, 1219 (1974).
4. У. Шерклифф, Поляризованный свет, изд. Мир, М., 1965.
5. Э. Е. Фрадкин, Л. М. Хаютин, ЖЭТФ, 59, 1634 (1970).
6. В. А. Соколов, Л. М. Хаютин, ЖТФ, 44, 922 (1974).
7. В. А. Соколов, Квантовая электроника, 2, 1433 (1975).
8. Э. Г. Пестов, Г. М. Лапшин, Квантовая электроника, Воениздат, М., 1972.
9. Э. Г. Пестов, Г. С. Круглик, ЖПС, 16, 985 (1972).
10. Э. Е. Фрадкин, Диссертация, ЛГУ, 1975.
11. А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Оптика и спектроскопия, 39, 135 (1975).

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
26 января 1977 г.

#### TO THE THEORY OF THE NONLINEAR INTERACTION OF OPPOSITE WAVES OF THE ARBITRARY POLARIZATION IN RING GAS LASER (RGL)

*V. A. Zborovskij, E. A. Tiunov, E. I. Fradkin*

The problem on interaction of opposite waves of arbitrary elliptic polarizations in a ring laser with the anisotropic resonator is considered on the basis of semiclassical vector theory. Frequencies, intensities and polarization states of generating waves are defined. The dependence of the intensities and frequencies differences of opposite waves and their polarization states on the polarizational characteristics of the resonator self-oscillations is investigated. The analysis of formulas is given for 50% of the isotope mixture of the generating gas.

УДК 538.311 : 538 571 5

## ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ РАДИОЧАСТОТНЫХ ЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПОЛЕЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

*А. Н. Кузнецов, Ю. М. Петухов*

Теоретически и экспериментально изучено влияние возмущающих поперечных линейно-поляризованных радиочастотных полей на характеристики линий параметрического резонанса. Показано, что в зависимости от ориентации оси осцилляции возмущающего поля по отношению к направлению распространения циркулярно поляризованного света может меняться как характер уширения линии модулирующим радиочастотным полем, так и характер насыщения линии, обусловленный возмущающим полем.

В проблеме взаимодействия атомной системы с радиочастотными (РЧ) полями к настоящему времени достаточно хорошо изучен случай слабого РЧ-поля, индуцирующего обычный сигнал парамагнитного резонанса, т. е. характеризующийся линейным откликом системы. В работе [1] исследовался случай, когда РЧ-поле играло роль возмущения на индуцированный сигнал параметрического резонанса [2]. Выяснилось, что в этом случае взаимодействие РЧ-поля со спиновой системой приобрело нелинейный характер, выразившийся в аномальном сдвиге частоты сигнала параметрического резонанса, зависящем не только от характеристик возмущения, но и от величины индуцирующего поля  $H_1 \cos \Omega t$ . При этом возмущающее РЧ-поле вызывает не только виртуальные, но и реальные переходы между атомными подуровнями, которые приводят к уширению сигналов параметрического резонанса [3]. Представляет интерес дальнейшее изучение влияния возмущающего поля на атомную систему в аспекте уширения линии резонанса, обусловленного наличием этого поля.

В настоящей работе теоретически и экспериментально исследуется влияние поперечного линейно-поляризованного РЧ-поля на ширину и характер насыщения линии параметрического резонанса, где в отличие от результатов [3], полученных ранее, учитывается зависимость величины возмущенного сигнала от угла между направлением распространения циркулярно поляризованного света и осью осцилляции возмущающего поля.

Эволюция атомной системы описывается уравнениями типа Блоха, которые при наличии возмущающего РЧ-поля  $2h_1 \cos \omega t$ , осциллирующего в плоскости  $XOY$  под углом  $\alpha$  к направлению распространения света, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{M} &= i(\omega_0 - \Omega_1 \cos \Omega t) M - \delta(M - M_0) + i2\omega_1 \cos \omega t e^{i\alpha} M_z, \\ \dot{M}_z &= -\delta M_z - 2\omega_1 \cos \omega t \operatorname{Im}(e^{-i\alpha} M), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $M_0$  — стационарная намагниченность, создаваемая вдоль оси  $Ox$  в процессе оптической накачки,  $\delta$  — скорость релаксации намагниченно-

сти (принято, что скорость релаксации продольной и поперечной компонент одинакова),  $\omega_1 = \gamma h_1$ ,  $\Omega_1 = \gamma H_1$ ,  $\omega_0 = -\gamma H_0$ ,  $M = M_x + iM_y$ .

После преобразований  $M = (V + iU) e^{i(n\Omega t - \Phi)}$ ,  $V + iU = (v + iu)e^{i\alpha}$ ,  $u + iM_z = \rho e^{-i\psi}$ , где  $\Phi = \Omega_1 \cos \Omega t$ ,  $\psi = 2\omega_1 J_n \cos \omega t$ , система уравнений (1) приводится к стандартной форме, позволяющей применить к ней процедуру усреднения [4]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \delta(\rho + M_n J'_0 \sin \alpha) &= \left[ \Delta\omega_n + \frac{\omega_1}{2} \sum_q (J_{n+q} - J_{n-q}) \times \right. \\ &\times (e^{i(q\Omega + \omega)t} + e^{i(q\Omega - \omega)t}) \left. \right] J'_0 v - i\rho \frac{\omega_1}{2} \sum_q (J_{n+q} + J_{n-q}) \times \\ &\times (e^{i(q\Omega + \omega)t} + e^{i(q\Omega - \omega)t}), \\ \dot{v} + \delta(v - M_n \cos \alpha) &= -\Delta\omega_n J'_0 \operatorname{Re} \rho + i \frac{\omega_1}{2} \operatorname{Im} \rho J'_0 \times \\ &\times \sum_q (J_{n+q} - J_{n-q}) (e^{i(q\Omega + \omega)t} + e^{i(q\Omega - \omega)t}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_n = M_0 J_n$ ,  $\Delta\omega_n = \omega_0 - n\Omega$ ,  $J_m$  и  $J'_m$  — функции Бесселя первого рода порядка  $m$  соответственно с аргументами  $\Omega_1/\Omega$  и  $2\omega_1 J_n/\omega$ .

В (2) опущены члены, которые в процессе усреднения дают поправки выше второго порядка, в частности, члены, пропорциональные  $J'_m$  ( $m \neq 0$ ), поскольку при малом  $\omega_1$  (этого требует метод усреднения) они дадут вклад в более высокие приближения. После усреднения системы (2) получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -(\delta + \kappa_+) \rho + (\Delta\omega_n + \varepsilon_n) J'_0 v - i \kappa_- \operatorname{Im} \rho - \delta M_n J'_0 \sin \alpha, \\ \dot{v} &= -(\delta + \kappa_-) v - (\Delta\omega_n + \varepsilon_n) J'_0 \operatorname{Re} \rho + \delta M_n \cos \alpha, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q \frac{\delta(J_{n+q} + J_{n-q})^2}{\delta^2 + (q\Omega - \omega)^2}, \quad \kappa_- = \frac{\omega_1^2}{2} J_0'^2 \sum_q \frac{\delta(J_{n+q} - J_{n-q})^2}{\delta^2 + (q\Omega - \omega)^2}, \\ \varepsilon_n &= \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q (J_{n+q}^2 - J_{n-q}^2) \frac{q\Omega - \omega}{\delta^2 + (q\Omega - \omega)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

— параметры, характеризующие уширение и сдвиг линии  $n$ -го резонанса, обязанные действию возмущающего РЧ-поля.

Совершая преобразование к переменным  $u$ ,  $v$  и  $M_z$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(\delta + \kappa_+) u + (\Delta\omega_n + \varepsilon_n) J_0'^2 v - \delta M_n J_0'^2 \sin \alpha, \\ \dot{v} &= -(\delta + \kappa_-) v - (\Delta\omega_n + \varepsilon_n) u + \delta M_n \cos \alpha, \\ \dot{M}_z &= -(\delta + \kappa_+ + \kappa_-) M_z, \end{aligned} \quad (4)$$

стационарные решения которой позволяют найти выражения для сигналов поглощения  $V$  и дисперсии  $U$  параметрического резонанса в присутствии возмущающего РЧ-поля:

$$V = \frac{(\delta + \kappa_+) \cos^2 \alpha + (\delta + \kappa_-) J_0'^2 \sin^2 \alpha}{(\delta + \kappa_+) (\delta + \kappa_-) + (\Delta\omega_n + \varepsilon_n)^2 J_0'^2} \delta M_n,$$

$$U = \frac{(\Delta\omega_n + \epsilon_n) J_0'^2 + \cos \alpha \sin \alpha [\delta + x_+ - J_0'^2(\delta + x_-)]}{(\delta + x_+)(\delta + x_-) + (\Delta\omega_n + \epsilon_n)^2 J_0'^2} \delta M_n. \quad (5)$$

Как следует из (5) и (3), наличие возмущающего РЧ-поля приводит к уширению и сдвигу линий параметрического резонанса, которые имеют соответственно резонансный и дисперсионный характер в зависимости от расстройки  $\omega - k\Omega$ .

Следует иметь в виду, что поправки  $x_{\pm}$  и  $\epsilon_n$ , характеризующие уширение и сдвиг линии  $n$ -го резонанса, строго говоря, справедливы при  $|\omega - k\Omega| \gg \delta$ . В «резонансной» области, когда  $|\omega - k\Omega| \leq \delta$ , частоты вибраций сравнимы с характерными для данной системы скоростями изменения, и их влияние уже не может быть сведено лишь к поправкам, даваемым вторым приближением, а сказывается непосредственно на характере изменения данной системы. Так, при  $|\omega - k\Omega| \leq \delta$  взаимодействие атомной системы с РЧ-полями приводит к появлению отличной от нуля компоненты  $M_z$ , которая при  $\omega = k\Omega$  становится равной

$$M_z = \frac{\delta \sin \alpha - \Delta\omega_n \cos \alpha}{\delta^2 + \Delta\omega_n^2 J_0'^2 + \omega_1'^2} \omega_1' J_0'^2 M_n.$$

При этом сигналы  $V$  и  $U$  испытывают модуляцию на частотах, пропорциональных  $(\omega - k\Omega)$ .

С учетом сказанного в «резонансной» области, где частота возмущающего поля  $\omega$  близка к одной из гармоник частоты  $\Omega$ , т. е.  $\omega - k\Omega \approx 0$ , усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\delta u + \Delta\omega_n J_0'^2 v + \omega_1' M_z - \delta M_n J_0'^2 \sin \alpha, \\ \dot{v} &= -\delta v - \Delta\omega_n u + \delta M_n \cos \alpha, \\ \dot{M}_z &= -\delta M_z - \omega_1' u, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega_1' = \omega_1 (J_{n+k} + J_{n-k})$ , откуда для сигналов поглощения  $V$  и дисперсий  $U$  находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\delta^2 (\cos^2 \alpha + J_0'^2 \sin^2 \alpha) + \omega_1'^2 \cos^2 \alpha}{\delta^2 + \Delta\omega_n^2 J_0'^2 + \omega_1'^2} M_n, \\ U &= \frac{\delta \Delta\omega_n J_0'^2 + \cos \alpha \sin \alpha [\delta^2 (1 - J_0'^2) + \omega_1'^2]}{\delta^2 + \Delta\omega_n^2 J_0'^2 + \omega_1'^2} M_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Как следует из (7), при  $\omega = k\Omega$  отсутствует сдвиг частоты, связанный с возмущающим РЧ-полем. Это позволяет распространить выражение (3) для  $\epsilon_n$  и на «резонансную» область.

Таким образом, наличие выделенных направлений в плоскости  $XOY$ , задаваемых направлением распространения циркулярно поляризованного света и осью осцилляции возмущающего РЧ-поля, приводит к зависимости сигналов параметрического резонанса от угла между ними.

Полученные выше теоретические результаты проверялись экспериментально на системе оптически ориентированных атомов  $\text{Hg}^{199}$  ( $I=1/2$ ) путем записи методом развертки поля  $H_0$  первой гармоники линии поглощения сигнала параметрического резонанса в зависимости от изменения одной из амплитуд осциллирующих полей  $h_1$  или  $H_1$ . Ось осцилляции возмущающего линейно-поляризованного поля  $h_1(t) = 2h_1 \cos \omega t$  могла быть ориентирована в плоскости  $XOY$  либо вдоль

луча накачивающего света, либо перпендикулярно ему, что соответствовало двум значениям угла:  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . В силу специфики теоретического рассуждения вопроса выражение для величины возмущенного сигнала (5), полученное в предположении  $|\omega - k\Omega| \gg \delta$ , не переходит в полученное для  $\omega = k\Omega$  выражение (7). Поэтому запись первых гармоник сигнала поглощения производилась:

1) на частоте резонанса  $\Omega = \omega = \omega_0$ ,

2) на частоте  $\Omega = \omega_0 + \epsilon$  при расстройке  $\omega - \Omega$ , равной нескольким ширинам невозмущенной линии. Запись линий при расстройках  $|\omega - \Omega| < \delta$  была затруднительна из-за наличия модуляций в сигнале параметрического резонанса, наблюдаемых экспериментально. Ниже приводится анализ полученных результатов в этих двух случаях.

1. На рис. 1, 2 представлены записи линий поглощения в зависимости от отношения  $\Omega_1/\Omega$  соответственно для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . При этом наиболее узкая линия резонанса на каждом из рисунков записана в отсутствие возмущения, уширенная — при некотором фиксированном значении возмущающего РЧ-поля.

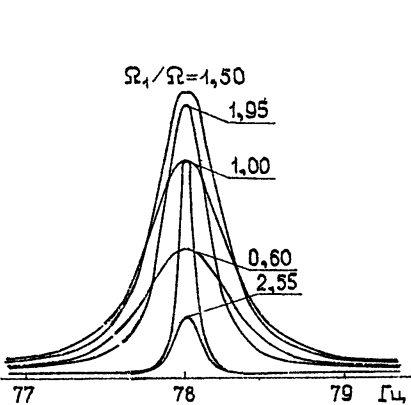


Рис. 1.

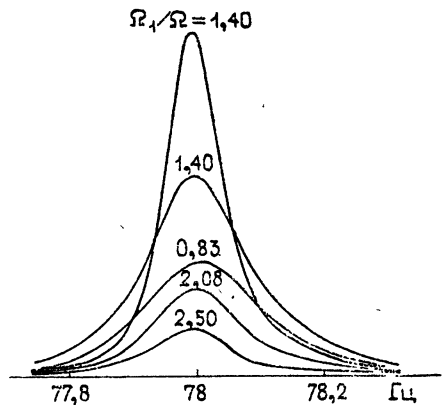


Рис. 2.

Анализируя характер экспериментальных зависимостей величин уширения возмущенных линий  $\chi$  от  $\Omega_1/\Omega$ , нетрудно убедиться, что для двух указанных значений угла  $\alpha$  эти зависимости имеют идентичный характер и, в полном соответствии с выражением (7) теории, могут быть экстраполированы к виду

$$\chi_{0, \pi/2} \sim (J_0 + J_2)^2.$$

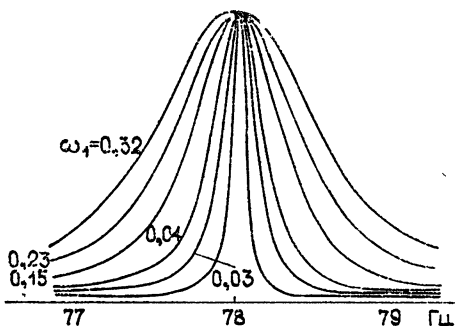


Рис. 3.

На рис. 3 для  $\alpha = 0$  проиллюстрирована зависимость  $\chi$  от амплитуды возмущающего поля при фиксированном значении  $H_1$ . Здесь, как и в случае  $\alpha = \pi/2$  [3], для малых  $h_1$  имеет место квадратичная связь:  $\chi \sim h_1^2$ .

Угловая зависимость проявляется существенным образом в характере изменения амплитуды сигнала поглощения от  $h_1$ . Для  $\alpha = \pi/2$  из выражения (7) следует  $V_0/V \approx 1 + \omega_1'^2/\delta^2$ , где  $V_0$  —

амплитуда невозмущенного сигнала поглощения. Как было показано [3], эта зависимость подтверждается экспериментально и указывает на насыщающий характер изменения сигнала поглощения в зависимости от  $h_1$  при постоянном  $H_1$ . Для  $\alpha = 0$  выполняется соотношение  $V_0/V = 1$ , т. е. линия не насыщается с ростом амплитуды возмущающего поля, что и иллюстрирует рис. 3.

2. На рис. 4 представлены зависимости фактора уширения линии  $x_{\pm}$  от  $\Omega_1/\Omega$ , построенные для  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$  по отношению амплитуд сигналов поглощения  $V_0/V$  при фиксированном значении  $h_1$ , когда  $|\omega - \Omega_c| = (4 \div 5) \delta$ . (Последнее условие достигалось выбором подходящих характеристик поля  $h_1(t)$ .)

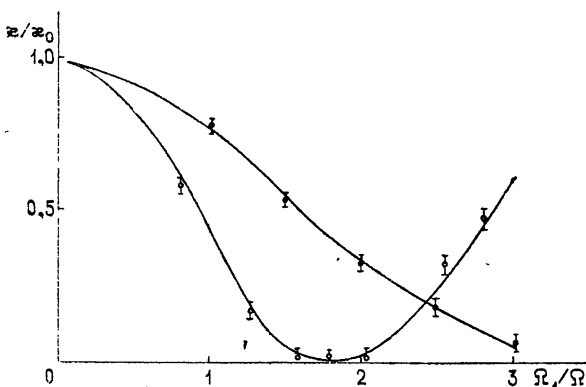


Рис. 4. Точки—для  $\alpha = \pi/2$ ; кружки—для  $\alpha = 0$ ; сплошные кривые —теоретические,  $x_0 = \omega_1^2/2 \delta$ .

Как следует из (5), для  $\alpha = \pi/2$  должно выполняться соотношение  $\frac{V_0}{V} = 1 + \frac{x_+}{\delta}$ , а для  $\alpha = 0 - \frac{V_0}{V} = 1 + \frac{x_-}{\delta}$ , и в соответствии с выражениями (3) зависимости  $x_{\pm}$  от  $H_1$  могут быть представлены как

$$x_+ \sim (J_0 + J_2)^2, \quad x_- \sim (J_0 - J_2)^2.$$

Из рис. 4 видно, что экспериментальные зависимости  $x$  от  $H_1$  хорошо совпадают с теоретическими.

Таким образом, на рассмотренном конкретном примере взаимодействия атомной системы с двумя осциллирующими полями  $h_1$  и  $H_1$  показано, что наличие зависимости величины сигнала от угла между осью осцилляции возмущающего поля  $h_1$  и направлением распространения света влияет на характер уширения линии полем  $H_1$ , а также на зависимость степени насыщения линии от величины возмущающего поля.

В заключение укажем на следующее важное обстоятельство. Выражение (7) для случая  $k = 1$  справедливо лишь при нулевом сдвиге фаз  $\varphi$  осциллирующего и модулирующего полей. Учет сдвига фаз в этом случае приводит к зависимости

$$V = \frac{\delta^2 (\cos^2 \alpha + J_0'^2 \sin^2 \alpha) + (\omega_s \sin \alpha - \omega_c \cos \alpha)^2}{\delta^2 + \omega_c^2 + \omega_s^2 + \Delta \omega_n^2 J_0'^2} M_n,$$

где

$$\omega_c = \omega_1 (J_{n-1} + J_{n+1}) \cos \varphi,$$

$$\omega_s = \omega_1 (J_{n-1} - J_{n+1}) \sin \varphi.$$

Эти зависимости для  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$  были подтверждены экспериментально и учитывались при записи линий (рис. 1—3) в настоящей работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Бартнев, В. В. Зверев, Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков, В. Г. Показаньев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 9, 1408 (1974).
2. Е. Б. Александров, О. Б. Константинов, В. И. Перель, В. А. Ходовой, ЖЭТФ, 45, 503 (1963).
3. И. Е. Гринько, А. Л. Коткин, А. Н. Кузнецов, Ю. М. Петухов, Р. М. Умарходжаев, И. А. Шушпанов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1346 (1976).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.

Поступила в редакцию  
29 декабря 1976 г.

#### THE INFLUENCE OF TRANSVERSE LINEARLY POLARIZED FIELDS ON CHARACTERISTICS OF PARAMETRIC RESONATOR LINES

*A. N. Kusnetsov, Yu. M. Petukhov*

The influence of disturbing transverse linearly polarized radio frequency fields on characteristics of parametric resonator lines is theoretically and experimentally investigated. It is shown that depending on the orientation of the oscillation axis of the disturbing field relative to the direction of propagation of circularly polarized light both the character of the line broadening by the modulating radio frequency field and the character of the line saturation due to the disturbing field may be changed.

---

УДК 538.56

## ИЗМЕНЕНИЕ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С. И. Аверков

Приближенные ВКБ-решения уравнения  $\dot{y} + \omega(t)y = 0$  устанавливают связь между мгновенными частотами и амплитудами колебаний. В работе эта связь рассматривается как точная, хотя находимые методом ВКБ выражения мгновенных величин являются приближенными. Исследовано условие единственности решения нелинейного уравнения  $v'' + a^2v^{-3} + \omega(t)v = 0$  для величины  $v$ , пропорциональной переменной амплитуде колебания  $y$ . В случае почти периодической функции  $\omega$  получены удобные в применениях выражения  $v$  и  $y$ .

Изучение многих вопросов физики приводит к необходимости рассмотрения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, записываемых в форме векторного уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad (1)$$

где  $A(x)$  — вещественная матричная функция порядка  $n \times n$ ,  $x$  — переменная, областью изменения которой является вся числовая ось.

Скалярное уравнение Матье — Хилла, играющее большую роль в теории распространения волн, квантовой механике, астрономии и теории параметрического резонанса [1–3, 8]

$$y'' + R(x)y = 0, \quad (2)$$

где  $R(x)$  — периодическая функция переменной  $x$ , является лишь частным случаем векторного равенства (1), к которому оно может легко быть сведено. В настоящее время имеется много работ, посвященных вопросам решения уравнения (1) методами теории возмущений. Обзор этих методов дан в книге Фомина [1], где, в частности, отмечается, что уравнение (2) послужило исходной моделью для создания большинства методов исследования систем уравнений с периодическими коэффициентами. Большое число опубликованных и вновь публикуемых работ, сложность получаемых в них авторами выражений указывают на трудность решения задачи предложенными способами. Представляет поэтому интерес нахождения иных путей ее решения. В связи с этим возникает интерес к часто встречающемуся в физике, но недостаточно изученному уравнению

$$y'' + \omega(z)y = 0, \quad (3)$$

где  $\omega$  — функция  $z$ , которое может быть приведено (см. разд. 1) к уравнению  $v'' + a^2v^{-3} + \omega(z)v = 0$ . Обсуждению некоторых вопросов их исследования и посвящена данная статья.



1. Определим нелинейную зависимость между функциями  $v$  и  $\theta$ , входящими в записанное в виде квазигармонического колебания общее решение уравнения (3):

$$y = c'_1 v \cos(\psi + c'_2) = v(c_1 e^{\theta} + c_2 e^{-\theta}), \quad (4)$$

где  $c'_{1,2}$  и  $c_{1,2}$  — постоянные величины,  $\theta = i\psi$ . Подставив (4) в (3), получим

$$c_1 P(z) + c_2 L(z) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} P(z) &= (v'' + 2v'\theta' + v\theta'' + v\theta'^2 + \omega v) e^{\theta}, \\ L(z) &= (v'' - 2v'\theta' - v\theta'' + v\theta'^2 + \omega v) e^{-\theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу произвольности  $c_1$  и  $c_2$  для выполнения равенства (5) необходимо

$$P(z) = 0, \quad L(z) = 0, \quad (6)$$

откуда следует

$$2v'\theta' + v\theta'' = 0, \quad v'' + v\theta'^2 + \omega v = 0. \quad (7)$$

Заметим, что к аналогичным (7) соотношениям обычно приходят, подставляя в (3)  $y = ve^{i\psi}$ , где  $v$  и  $\psi$  — вещественные функции, приравнивая затем к нулю действительные и мнимые части полученного равенства. Приведенный выше вывод является более общим, так как справедлив для комплексных значений переменной  $z$  и других входящих в (3) и (7) величин.

Решая первое равенство (7), имеем

$$\theta = a \int_0^z v^{-2} dz, \quad (8)$$

где  $a$  — постоянная интегрирования.

Последнее выражение интересно с физической точки зрения, так как устанавливает точную связь между амплитудным множителем  $v$  и  $\psi$  — переменной частью фазы колебаний, описываемых выражением (4). Причем общий характер соотношений (7) и (8) допускает возможность распространения понятий переменной амплитуды и фазы на весь класс функций  $y$  — решений уравнения (3).

Подставляя (8) во второе равенство (7), находим\*

$$v'' + a^2 v^{-3} + \omega v(z) = 0. \quad (9)$$

Исключая  $v$  из (6) и (7), можно найти уравнение для  $\theta'$ . Последнее здесь не рассматриваем ввиду его сложности [9]. Нелинейное уравнение (9) удобно тем, что  $v$  не зависит от неизвестной быстроменяющейся в ряде случаев функции  $e^{\theta}$ . Описываемая им величина  $v$  позволяет непосредственно судить о законах изменения энергии колебаний  $y$  в системах с переменными параметрами, что имеет важное значение при исследовании многих вопросов физики. Заметим также, что (9) допускает решение в явном виде в двух предельных случаях:

$$a) |v''| \ll |\omega v|, \quad б) |v''| \gg |\omega v|.$$

\* При рассмотрении некоторых задач дифракции ЭМ-волн возникает необходимость в изучении уравнения (9) [4], в связи с чем представляется удобным его преобразование в (3), если для заданной функции  $w$  решение (3) известно. Последнее не всегда имеет место, и такое преобразование, очевидно, не устраняет трудностей исследования (3) и (9).

В первом из них, пренебрегая в (9)  $v''$  в сравнении с  $\omega v$ , имеем

$$v = \sqrt[4]{-a^2/\omega}, \quad (10)$$

и, подставив (10) в (8), (4), получаем

$$y = c_{1,2} \omega^{-1/4} e^{\pm i \int \sqrt{\omega} dz} \quad (11)$$

— известное ВКБ-решение (3) [2]. Необходимым условием применимости (11) является неравенство а).

Во втором случае, пренебрегая в (9)  $\omega v$ , приходим к уравнению

$$v'' + a^2 v^{-3} = 0, \quad (12)$$

которое имеет два решения [5]:

$$(q_1 z - q_2)^2 + q_1 v^2 - a^2 = 0 \quad (q \neq 0), \quad v^2 = 2z \sqrt{a^2 + q_3}, \quad (13)$$

где  $q_{1,2,3}$  — постоянные интегрирования. Второе из них можно рассматривать как предельный случай первого, при малых значениях  $q_1$ . Из условия применимости б) следует, что равенства (13) являются сколь угодно точными в достаточно малой области точки поворота. Другие случаи решения (9) рассматриваются дальше.

2. Исследование амплитудно-фазовым методом уравнения (3) в общем случае встречается, как известно, с трудностью, заключающейся в неоднозначности определения из (3), (4) выражений  $v$ ,  $\theta$ . Вместе с тем, его решение методом ВКБ приводит к однозначному их определению. Последнее обычно объясняют тем, что в области применимости ВКБ-метода выполняется дополнительное требование в виде медленности изменения  $v$  и  $\theta$ . Однако такое объяснение математически не вполне удовлетворительно, так как медленность изменения амплитуды и фазы колебаний не есть критерий применимости решений ВКБ [7] (как, например, в случае зон неустойчивости уравнения Матье).

Выше было показано, что в предельном случае,  $|v''| \ll |\omega v|$ , дифференциальное уравнение (9) обращается в алгебраическое, допускающее единственное ВКБ-решение. В связи с этим возникает вопрос о возможности в общем случае однозначного определения равенствами (8), (9) функций  $v$ ,  $\theta$ , если предъявить к последним требование, чтобы при некоторых значениях параметра  $q$  (вводимого как множитель аргумента функции  $\omega(qz)$ , где  $0 \leq |q| \leq 1$ ) они обращались в выражения ВКБ. Остановимся на этом вопросе (по-видимому, не обсуждавшемся в литературе) несколько подробнее. Необходимость предъявления такого требования становится очевидной, если убедиться, что уравнение  $v'' + a^2 v^{-3} + \omega v = 0$  в случае  $\omega = \text{const}$  имеет не только ВКБ-решение  $v = \text{const}$ , но также и решение  $v \neq \text{const}^*$ , не имеющее физического смысла. Покажем достаточность указанного требования, ограничившись (в порядке обсуждения) предположением, что  $\omega$  и  $v$  есть аналитические функции, не обращающиеся в нуль, и  $a$  — заданная величина.

Предположим обратное. Пусть имеются два,  $v_1$  и  $v_2$ , решения (9):

$$v_1'' + a^2 v_1^{-3} + \omega v_1 = 0, \quad v_2'' + a^2 v_2^{-3} + \omega v_2 = 0.$$

Исключая из последних равенств  $\omega$ , находим уравнение связи между  $v_1$  и  $v_2$ :

$$v_1'' v_1^{-1} + a^2 v_1^{-4} = v_2'' v_2^{-1} + a^2 v_2^{-4}.$$

\* Не совпадающее с принятым в физике определением амплитуды колебаний, описываемых уравнением (3) в случае  $\omega = \omega_0 = \text{const}$ .

Представив далее  $v_1$  и  $v_2$  в виде рядов (по степеням параметра  $q$ ), аппроксимируем их выражения многочленами  $n$ -го порядка, которые обозначим через  $v_{1,n}$ ,  $v_{2,n}$ .

*Лемма.* Если для  $v_{1,n}$  и  $v_{2,n}$  уравнение связи выполняется (с точностью до величин порядка малости  $n+1$  и выше) лишь в случае  $v_{1,n} = v_{2,n}$ , то для многочленов  $n+1$  порядка оно может выполняться (с точностью до величин порядка малости  $n+2$ ) только при условии  $v_{1,n+1} = v_{2,n+1}$ .

Чтобы убедиться в справедливости леммы, напомним, согласно ее формулировке,

$$v_{1,n+1} = v_{1,n} + \xi_1 q^{n+1}, \quad v_{2,n+1} = v_{1,n} + \xi_2 q^{n+1},$$

где  $\xi_1, \xi_2$  — функции только  $z$ . Полагая  $|q|$  достаточно малым, в наводимых далее выражениях будем последовательно пренебрегать величинами, порядок малости которых выше  $|q|^{n+1}$ . В этом случае  $v_1 \approx v_{1,n+1}$ ,  $v_2 \approx v_{2,n+1}$ , а также\*

$$v_{1,n+1}^{-1} = \frac{1}{v_{1,n} + \xi_1 q^{n+1}} \approx \frac{1}{v_{1,n}} \left( 1 - \frac{\xi_1 q^{n+1}}{v_0} \right),$$

$$v_{1,n+1}^{-4} \approx \frac{1}{v_{1,n}^4} \left( 1 - 4 \frac{\xi_1}{v_0} q^{n+1} \right),$$

где  $v_0 = v_{1,0} = \sqrt[4]{-a^2/\omega_0}$ ,  $\omega_0 = \{\omega\}_{q=0}$ . Аналогичные равенства справедливы и для  $v_2$ . Подставив приведенные выше выражения в уравнение связи, получим

$$(v_{1,n}'' + \xi_1'' q^{n+1}) \frac{1}{v_{1,n}} \left( 1 - \frac{\xi_1}{v_0} q^{n+1} \right) + \frac{a^2}{v_{1,n}^4} \left( 1 - 4 \frac{\xi_1}{v_0} q^{n+1} \right) =$$

$$= (v_{1,n}'' + \xi_2'' q^{n+1}) \frac{1}{v_{1,n}} \left( 1 - \frac{\xi_2}{v_0} q^{n+1} \right) + \frac{a^4}{v_{1,n}^4} \left( 1 - 4 \frac{\xi_2}{v_0} q^{n+1} \right).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая величинами порядка малости выше  $n+1$ , находим

$$\xi_1'' - \frac{v_0''}{v_0} \xi_1 - 4 \frac{a^2}{v_0^4} \xi_1 = \xi_2'' - \frac{v_0''}{v_0} \xi_2 - 4 \frac{a^2}{v_0^4} \xi_2.$$

Так как  $v_0'' = 0$ , то  $(\xi_1 - \xi_2)'' = 4 \frac{a^2}{v_0^4} (\xi_1 - \xi_2)$ , откуда  $\xi_1 - \xi_2 =$

$= A_{1,2} \exp\left(\pm \frac{2a}{v_0^2} z\right)$ , где  $A_{1,2}$  — постоянные величины. Поскольку  $\xi$  от параметра  $q$  не зависит, то  $A_{1,2}$  от него тоже не зависят. Вместе с тем, в областях применимости решений ВКБ имеем при  $q \rightarrow q_{\text{ВКБ}}$

$$v_1 \rightarrow \sqrt[4]{-a^2/\omega(q_{\text{ВКБ}}, z)}, \quad v_2 \rightarrow \sqrt[4]{-a^2/\omega(q_{\text{ВКБ}}, z)}.$$

В этом случае  $v_1 \rightarrow v_2$ ,  $\xi_1 \rightarrow \xi_2$  и равенство  $\xi_1 - \xi_2 = A_{1,2} \exp\left(\pm \frac{2a}{v_0^2} z\right)$

\* Здесь и далее учитывается приближенное (с точностью до величин порядка малости  $|q|^{n+2}$  и выше) равенство  $f(q)q^{n+1} \approx f(0)q^{n+1}$ , справедливое для функций  $f$ , допускающих разложение в ряд по степеням  $q$ .

может выполняться лишь при условии  $A_{1,2}=0^*$ , т. е.  $\xi_1 = \xi_2$ , что и доказывает справедливость леммы.

Так как при  $n=0$   $v_{1,0} = v_{2,0} = v_0$ , то из леммы следует, что при любом индексе  $n$  уравнение связи для  $v_{1,n}$  и  $v_{2,n}$  выполняется только, если  $v_{1,n} = v_{2,n}$ . Полагая  $n \rightarrow \infty$  и переходя в пределе к выражениям  $v_1, v_2$ , заключаем, что в области малых значений  $|q|$   $v_1$  и  $v_2$  точно равны и, следовательно, в силу теоремы единственности аналитических функций, должны быть точно равны при любых значениях параметра  $q$ .

Таким образом, при сделанных предположениях показана достаточность указанного требования для однозначного определения равенствами (8), (9) (или (3), (4)) выражений  $v$  и  $\theta$ . Полагая, что величины  $y(z_0)$  и  $y'(z_0)$ , где  $z_0 = \text{const}$ , являются заданными, можно определить постоянную  $a$ , записывая функцию  $w$  в виде  $w(qz + z_0)$  и налагая на  $v$  дополнительное требование:  $(v)_{q=0} = 1$ . В этом случае из уравнения (9) имеем  $a^2 + w(z_0) = 0$ .

Ограничимся далее рассмотрением (9), в котором функция  $w$  является квазипериодической и не проходит через точку поворота.

3. В качестве примера, показывающего полезность сделанных в разд. 2 выводов, рассмотрим случай, когда функция  $w$  имеет вид

$$w = \bar{w}(1 + p\Phi), \quad (14)$$

где  $p$  — постоянный малый параметр,  $\Phi$  — физически разумная (в смысле [6]) функция действительного переменного  $x$ ,  $\bar{w}$  — постоянная величина. В этом случае решение нелинейного уравнения (9) можно искать методом возмущения.

В частности, учитывая, что при  $p=0$   $v=v_0=\text{const}$ , и вводя обозначение  $V=v/v_0$ , запишем (9) в виде

$$V''' + b^2 V^{-3} + \bar{w}(1 + p\Phi)V = 0, \quad (15)$$

где  $b^2 = a^2/v_0^4$ . Положим

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n p^n, \quad (16)$$

где функции  $V_n$  не зависят от  $p$ . Представим также  $V^{-3}$  в виде ряда Тейлора по параметру  $p$ :

$$V^{-3} = F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{[n]}(0) \frac{p^n}{n!}. \quad (17)$$

Подставив (16) и (17) в (15) и приравняв коэффициенты членов с одинаковыми степенями  $p$ , находим

$$V_n'' + b^2 F^{[n]}(0) \frac{1}{n!} + \bar{w} V_n = -\bar{w} \Phi V_{n-1}. \quad (18)$$

Полагая, что  $V_0=1$  и  $F(0)=1$ , нетрудно найти (дифференцируя по  $p$  функцию  $F(p)$  и используя (16)) значения производных  $F^{[n]}(0)$ :

\* Заметим здесь, что коэффициенты членов рядов (по степеням  $q_{\text{ВКБ}}$ ) выражений ВКБ  $v_1$  и  $v_2$  есть степенные функции  $z$ . Поэтому разность  $\xi_1 - \xi_2$  при  $q \rightarrow q_{\text{ВКБ}}$  не может быть функцией  $\exp\left(\pm \frac{2a}{v_0^2} z\right)$ , откуда также приходим к условию  $A_{1,2} = 0$

$$F^{[1]}(0) = -3V_1, \quad F^{[2]}(0) = 12V_1^2 - 6V_2, \dots \quad (19)$$

$$\dots, \quad F^{[n]}(0) = R_n(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}) - 3n! V_n, \dots,$$

где  $R_n$  — алгебраическая функция. Положив в (18)  $n=0$ , имеем

$$b^2 + \bar{\omega} = 0. \quad (20)$$

(Согласно сказанному выше (см. разд. 2), величина  $a^2 = b^2 v_0^4$  равна  $a^2 = -\bar{\omega}[1 + p\Phi(x_0)]$ , откуда, учтя (20), получаем  $1 + p\Phi(x_0) = v_0^4$ , и так как  $v_0$  не зависит от  $p$ , то в рассматриваемом случае  $v_0 = 1$  и  $\Phi(x_0) = 0$ ). Подставив (19), (20) в (18), находим

$$V_1'' + 4\bar{\omega}V_1 = f_1, \quad V_2'' + 4\bar{\omega}V_2 = f_2, \dots, \quad V_n'' + 4\bar{\omega}V_n = f_n, \dots, \quad (21)$$

где  $f_1 = -\bar{\omega}\Phi$ ,  $f_2 = 6\bar{\omega}V_1^2 - \bar{\omega}\Phi V_1$ , ...,  $f_n = \frac{\bar{\omega}}{n!} R_n - \bar{\omega}\Phi V_{n-1}$ , ...

Это система линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами\*, решения которых могут быть выражены в квадратурах.

Решая уравнение для  $V_n$ , имеем [5]

$$V_n = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\omega}}} \int_{c_n}^x f_n(\xi) \sin 2\sqrt{\bar{\omega}}(x - \xi) d\xi + \quad (22)$$

$$+ M_n \sin 2\sqrt{\bar{\omega}}x + N_n \cos 2\sqrt{\bar{\omega}}x,$$

где  $C_n, M_n, N_n$  — произвольные постоянные величины. Так как (22) остается общим решением линейного  $n$ -го уравнения (21) независимо от выбора постоянной  $C_n$ , то, полагая ее равной нулю, на основании (16) и (22), находим

$$V = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\omega}}} \int_0^x \sin 2\sqrt{\bar{\omega}}(x - \xi) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) p^n \right\} d\xi + \quad (23)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [M_n \sin 2\sqrt{\bar{\omega}}x + N_n \cos 2\sqrt{\bar{\omega}}x].$$

Согласно разд. 2 при медленных изменениях  $\Phi(x)$  (23) не должно отличаться от выражений, находимых в приближении ВКБ. Поскольку ВКБ-выражения являются устойчивыми, то это условие будет выполнено, если в правых частях равенств (21) и, соответственно, (22), (23) будут отсутствовать члены, пропорциональные  $\sin 2\sqrt{\bar{\omega}}x$  и  $\cos 2\sqrt{\bar{\omega}}x$ \*\*.

\* Аналогичные выражения получаются при решении методом возмущения уравнения  $y'' + \bar{\omega}(1 + p\Phi)y = 0$ . Однако при рассмотрении электродинамических и других задач равенства (21) имеют преимущество, поскольку нахождение из равенства  $y'' + \bar{\omega}(1 + p\Phi)y = 0$  функции  $y_n$  приводит к общему решению уравнения (3) в виде

$$y = \left\{ c_1 + c_2 \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n \right]^{-2} dx \right\} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n,$$

анализ которого, при определении мгновенных частот и амплитуд колебательных процессов, встречается с дополнительными трудностями.

\*\* Заметим, что при невыполнении этого условия в находимых решениях (21) — (23) появляются секулярные члены. В рассматриваемом случае исследование таких решений, используя приближенные методы (в частности, асимптотические [2, 10]), не представляется целесообразным.

Последнее имеет место при выборе соответствующих значений постоянных интегрирования  $M_n$  и  $N_n$ . Равенство (23) представляет собой точное решение поставленной выше задачи (полагая ряды (16) и (17) сходящимися) о нахождении методом возмущения функции  $V$ , удовлетворяющей нелинейному уравнению (15).

4. Рассмотрим случай почти периодической функции  $\omega(t)$  уравнения (3):

$$y'' + \omega^2 \left[ 1 + p \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos(\alpha_m t + \beta_m) \right] y = 0, \quad (24)$$

где  $\omega$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\gamma_m$  — действительные постоянные величины,  $\sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m|$  — сходящийся ряд и  $p \sum_{m=0}^{\infty} |\gamma_m| < 1$ . Согласно сделанным в разд. 3 обозначениям, имеем

$$\bar{\omega} = \omega^2, \quad \Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos(\alpha_m t + \beta_m). \quad (25)$$

Полагая  $p$  достаточно малым и ограничиваясь нахождением  $V$  в первом приближении, получаем

$$V = 1 - \frac{p\omega}{2} \int_0^t \sin 2\omega(t - \xi) \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \cos(\alpha_m \xi + \beta_m) d\xi + \\ + p [M_1 \sin 2\omega t + N_1 \cos 2\omega t],$$

откуда следует

$$V = 1 + \frac{p\omega}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (D_m - L_m) + p [M_1 \sin 2\omega t + N_1 \cos 2\omega t], \quad (26)$$

где

$$D_m = \frac{\cos(\alpha_m t + \beta_m) - \cos(2\omega t + \beta_m)}{\alpha_m - 2\omega}, \quad L_m = \frac{\cos(\alpha_m t + \beta_m) - \cos(2\omega t - \beta_m)}{\alpha_m + 2\omega}.$$

Определяя значения  $M_1$  и  $N_1$ , полагая, что в (26) должны отсутствовать члены, пропорциональные  $\sin 2\omega t$  и  $\cos 2\omega t$ , получим

$$M_1 = -\frac{\omega}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m \gamma_m \sin \beta_m}{\alpha_m^2 - 4\omega^2}, \quad N_1 = \omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m \cos \beta_m}{\alpha_m^2 - 4\omega^2}.$$

В этом случае

$$V = 1 + p\omega^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\alpha_m^2 - 4\omega^2} \cos(\alpha_m t + \beta_m). \quad (27)$$

Используя (8), (15) и (20), запишем (4) в виде

$$y = c_{1,2} V \exp \left( \pm i\omega \int_0^t V^{-2} dt \right), \quad (28)$$

где  $c_{1,2} = \text{const}$ . Равенства (27), (28) представляют собой решение, в первом приближении, уравнения (24) с почти периодической функцией  $\omega$ . Нетрудно также найти  $y$  во втором и более высоком приближении.

Если в (27)  $\alpha_m \ll 2\omega$ , то выражение (28) обращается в решение

ВКБ, однако в отличие от него является справедливым и при быстрых изменениях функции  $\Phi(t)$ , в частности при значениях  $\alpha_m > \omega$ .

Если при каком-либо значении  $m = m_0$   $\alpha_{m_0} \rightarrow 2\omega$ , то выражения  $D_m, L_m$  стремятся к пределам:

$$D_m \rightarrow -t \sin(2\omega t + \beta_{m_0}), \quad L_m \rightarrow -(2\omega)^{-1} \sin 2\omega t \sin \beta_{m_0}.$$

Этот случай соответствует неустойчивым решениям (24).

5. Не обсуждая здесь вопроса об исследовании уравнений (3) и (9), без сделанного в разд. 3 и 4 предположения о малости параметра  $\rho$ , заметим лишь, что переходя в уравнении (3) к новым переменным  $\varphi$  и  $\eta$ ,

$$y = \varphi(z) \dot{S}^{-1/2}(z), \quad \eta = \int^z S(\xi) d\xi, \quad (29)$$

где  $S(z)$  — произвольная функция, последнее может быть [7] представлено в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + (1 - \varepsilon)\varphi = 0, \quad (30)$$

где  $\varepsilon = \frac{\omega - S^2}{S^2} + S^{-3/2} \frac{d^2 S^{-1/2}}{dz^2}$ . Причем, выбирая подходящую функцию  $S(t)$ , можно в отдельных случаях выполнить условие  $\varepsilon \ll 1^*$  и, следовательно, пользоваться для решения (30) результатами, полученными в разд. 3 и 4.

Заканчивая на этом, отметим лишь, что в некоторых представляющих интерес случаях точные выражения  $y$  могут быть найдены, решая обратные задачи (используя (15) для нахождения  $y$  по заданной функции  $v$ ). Так, например, в случае колоколообразной функции

$$v = v_0(1 + Ne^{-R}), \quad (31)$$

где  $R = t^2/\tau^2$ ,  $t$  — время,  $\tau$  — длительность импульсного изменения  $v$ ,  $N = \text{const}$ , записывая (15) в виде  $\omega(t) = b^2 V \tau^{-4} - V'' V^{-1}$ , где  $V = v/v_0$ , и обозначая  $b^2 = -\omega^2$ , находим

$$\omega(t) = \omega^2(1 + Ne^{-R})^{-4} + 2 \frac{(1 - 2R) Ne^{-R}}{\tau^2(1 + Ne^{-R})}. \quad (32)$$

На основании (28) имеем также

$$y = c_{1,2}(1 + Ne^{-R}) \exp \left[ \pm i \omega \int_0^t (1 + Ne^{-R})^{-2} dt \right]. \quad (33)$$

Последнее выражение является точным решением (3) при изменении  $\omega$  по закону (32). Это решение совпадает с находимым в приближении ВКБ, если вторым членом в правой части равенства (32) можно пренебречь.

В заключение кратко остановимся на некоторых выводах, которые могут быть сделаны на основании изложенного выше.

\* Случай  $\varepsilon = 0$  не устраняет трудностей решения уравнения (3). Действительно, при этом функция  $S$  должна удовлетворять  $\omega S^{-2} - 1 + S^{-3/2} \frac{d^2 S^{-1/2}}{dz^2} = 0$ , которое обращается в нелинейное уравнение (9), полагая  $S^{-1/2} = v$ ,  $a^2 = -1$ .

1) Для исследования часто встречающегося в теоретической физике уравнения  $y'' + \omega(qz)y = 0$ , где параметр  $q$  не зависит от переменной  $z$ , целесообразно представлять его решение в виде  $y = c_{1,2} v e^{\pm i \psi}$ . При этом оказывается возможным однозначное (см. ниже) определение функций  $v$  и  $\psi$ , законы изменения которых описываются равенствами

$$\psi = b \int v^{-2} dz, \quad v'' - b^2 v^{-3} + \omega(qz)v = 0, \quad (9')$$

где  $b = \text{const}$ .

2) Для единственности решения (9') необходимо и достаточно (если  $v$  и  $\omega$  есть аналитические функции  $z$ ) предъявлять к функциям  $v$  требование — обращения их в выражения ВКБ при  $q \rightarrow q_{\text{вкб}}$ .

3) Известное ВКБ-решение  $y'' + \omega y = 0$  есть следствие равенств (9'), если пренебречь в них второй производной  $v''$ . Методически получение этого решения является, в данном случае, более естественным и удобным, чем методами, описанными в литературе [2, 6, 7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Фомин, Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, изд. ЛГУ, Ленинград, 1927.
2. Д. Ж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов, изд. Мир, М., 1965.
3. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
5. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1965.
6. Д. Ж. Матьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Атомиздат, М., 1972.
7. Н. Фреман, П. У. Фреман, Метод ВКБ, изд. Мир, М., 1967.
8. Э. Т. Уиттекер, Д. Ж. Ватсон, Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1963.
9. Д. В. Агеев, А. В. Зенькович, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 2, 1815 (1972).
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
16 мая 1975 г.,  
после переработки  
25 мая 1977 г.

#### VARIATION OF OSCILLATION PHASE AND AMPLITUDE IN SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETERS

S. I. Averkov

Approximate WKB-solutions of the equation  $\ddot{y} + \omega(t)y = 0$  state the relation between instantaneous frequencies and oscillation amplitudes. In the paper this relation is considered to be an accurate one through expressions of instantaneous values found by WKB method are approximate. The condition of the solution uniqueness of the nonlinear equation  $v'' + a^2 v^{-3} + \omega(t)v = 0$  is investigated for the value  $v$  being proportional to the variable oscillation amplitude  $y$ . In the case of almost periodic function  $\omega$  the convenient in application expressions of  $v$  and  $y$  are obtained.



УДК 538.56 : 519.25

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ — ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

*М. А. Абалиева, Н. С. Бахвалов, К. И. Воляк,  
Я. М. Жилейкин, Г. А. Ляхов*

Проведен численный расчет трехволнового нестационарного взаимодействия в нелинейной среде с аномальной дисперсией. Получены временные характеристики параметрического генератора — в режимах импульсной и непрерывной накачки — в широком диапазоне параметров среды.

1. Нестационарные волновые задачи возникают при описании распространения мощных световых импульсов в нелинейных средах — параметрических генераторах, возбуждаемых лазерами с модулированной добротностью, комбинационно активных средах с узкими линиями молекулярных колебаний и т. д. [1–4]. Наибольший интерес здесь представляет детальный анализ характерных для широкого класса систем с сильной дисперсией возможностей генерации мощных сверхкоротких импульсов («пиковые» режимы). Нестационарные эффекты заметнее всего должны проявляться во взаимодействиях встречных волн в средах с аномальной дисперсией (естественной — вблизи линий поглощения, искусственной — в слоистых средах) и быть во многом сходными с аналогичными лазерными эффектами. Это сходство обусловлено возникновением безрезонаторной обратной связи в таких системах и, как следствие, возникновением абсолютной неустойчивости при выполнении некоторых пороговых условий.

Указанные задачи сводятся к решению систем связанных уравнений в частных производных, поддающихся, в лучшем случае, лишь качественному анализу. Поэтому особую важность имеет применение здесь численных методов, позволяющих получить количественные результаты в широком диапазоне изменения параметров.

В настоящей работе рассмотрена одна из таких задач — проведен расчет выходных характеристик параметрического генератора с обратной волной. Программа, проведенная ниже, применима также к аналогичным системам уравнений, описывающим обратные вынужденные рассеяния, лазеры с распределенной обратной связью в режиме насыщения. Результаты соответствующих расчетов являются предметом самостоятельных сообщений.

2. Одномерное взаимодействие трех электромагнитных волн в среде с квадратичной нелинейностью и аномальной дисперсией описывается системой уравнений для медленных комплексных амплитуд [5]:

$$\left( \pm \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_{1,2}} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_{1,2} \right) A_{1,2} = i \sigma_{1,2} A_3 A_{2,1}^* e^{i\Delta t}, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_3} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_3 \right) A_3 = i \sigma_3 A_1 A_2 e^{i \Delta x}.$$

Предполагается, что частоты взаимодействующих волн связаны соотношением  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ , а волновые числа —  $k_1 - k_2 = k_3 + \Delta$  (сигнальная волна  $\omega_2$  распространяется навстречу волне накачки  $\omega_3$  и холостой волне  $\omega_1$ ); остальные обозначения стандартны [5].

Система (1) была численно решена при граничных условиях двух типов:

$$A_3(0, t) = A_0, \quad t > 0; \quad A_1(0, t) \approx A_2(l, t) \ll A_0, \quad (2)$$

$l$  — длина нелинейной среды (режим установления непрерывной генерации);

$$A_3(0, t) = A_0 \exp(-t^2/t_3^2), \quad (3)$$

$$A_1(0, t) \approx A_2(l, t) \ll A_0$$

(режим импульсной генерации).

Уравнения системы (1) были аппроксимированы нелинейными разностными уравнениями, которые решались методом итераций. Погрешность аппроксимации на сетке с шагом  $h$  есть  $O(h^2)$ . Исследование исходной системы дифференциальных уравнений и системы разностных уравнений проведено в работе [6] — доказано существование и ограниченность их решений в области  $0 \leq t \leq T$ , установлена сходимость в этой области решения разностной задачи к решению системы (1).

Параллельно численному расчету проводилось приближенное аналитическое рассмотрение.

3. При равенстве групповых скоростей,  $v_i \approx v$ , в среде без потерь система (1) имеет первый интеграл:

$$|A|_{3/\sigma_3}^2 + |A|_{1/\sigma_1}^2 = F(vt - x), \quad (4)$$

$F$  — произвольная функция своего аргумента.

С учетом граничных условий (2) и интеграла (4) уравнения (1) в безразмерных переменных

$$a_i = \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_i} \right)^{1/2} A_i/A_0, \quad \xi = A_0 |\sigma_1 \sigma_2|^{1/2} x, \quad \tau = A_0 |\sigma_1 \sigma_2|^{1/2} vt$$

принимают следующий вид\*:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} \pm \frac{\partial}{\partial \xi} \right) a_{1,2} = a_{2,1} (1 - a_1^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Подстановка  $a_1 = \sin(\varphi/2)$  сводит (5) к синус-уравнению Гордона:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \varphi = \sin \varphi. \quad (6)$$

С помощью аналогичной процедуры удается получить уравнение второго порядка в частных производных, учитывающее диссипацию волн [7]. Анализ (6) позволяет найти период осцилляций переходного режима как функцию интенсивности накачки и параметров среды.

\* Далее считаем  $a_i$  вещественными — фазы генерируемых волн устанавливаются за короткое время порядка  $l/v$  [7].

4. В стационарном режиме  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$  уравнения (5) интегрируются точно и дают пороговое условие генерации

$$|A|_0 \geq \pi(n + 1/2) |\sigma_1 \sigma_2|^{1/2} L, \quad (7)$$

$n$  — номер продольной моды. Далее, уравнение (6) инвариантно относительно преобразований

$$\tau + \xi \rightarrow (\tau + \xi)/b, \quad \tau - \xi \rightarrow (\tau - \xi)b,$$

$b$  — произвольная константа, поэтому в качестве новой переменной в (6) вводим переменную подобия  $\eta = (\tau^2 - \xi^2)^{1/2}$ :

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right) = \sin \varphi. \quad (8)$$

Для определения промежуточной асимптотики  $\varphi$  при  $\tau \gg \lambda$  ( $\lambda$  — приведенная длина) подставим в (6)  $\varphi = \tilde{\varphi} - \psi$ , где  $\tilde{\varphi}$  — стационарное решение [7] и  $\psi$  — малое возмущение. Тогда для возмущения на границе ( $\xi = \lambda$ ) получим уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d\psi}{d\eta} \right) = \psi \cos \tilde{\varphi}, \quad \eta = (\tau^2 - \lambda^2)^{1/2}. \quad (9)$$

В зависимости от значения  $\tilde{\varphi}$  (модификации уравнения (9)), асимптотика возмущения имеет либо монотонный, либо колебательный характер

$$\psi \sim \exp(y)/y^{1/2}, \quad y = [(\tau^2 - \lambda^2) \cos \tilde{\varphi}]^{1/2}. \quad (10)$$

Период осцилляций  $\tilde{\tau}$  выходной амплитуды определяется из (10) выражением

$$\tilde{\tau}^2 = \lambda^2 - \frac{\pi^2}{\cos \tilde{\varphi}}. \quad (11)$$

Длительность «пичков» генерации рассчитывается сложением частот всех возбужденных мод.

н  
к 5. Типичные расчетные зависимости выходных амплитуд от времени  $(1 - a_1(\lambda, \tau), 2 - a_2(0, \tau), 3 - a_3(\lambda, \tau))$  для приведенной длины  $z = 10$  при отсутствии потерь и равенстве нулю фазовой расстройки показаны на рис. 1. График 1а соответствует граничному условию (2), график 1б соответствует граничному условию (3) и длительности импульса накачки  $\tau_3 = 10$ .

Зависимость длительности «пичков»  $\tau_2(\lambda)$  в обратной волне от приведенной длины имеет немонотонный характер (рис. 2). Размах осцилляций не превышает нескольких процентов, если возбуждена только основная мода  $n = 0$ , что подтверждается и реальным экспериментом [8]. Приведенные на рис. 2 численные данные соответствуют последовательному возбуждению второй (до  $\lambda = 5\pi/2$ ) и третьей ( $\lambda > 5\pi/2$ ) генерационной мод. Существенно, что кривая  $\tau_2(\lambda)$  имеет минимум — длительность генерационных импульсов не может быть меньше  $\tau_{2 \min} \approx 5$  ни при каких уровнях накачки.

Минимальное значение  $\tau_2$  можно оценить с помощью (11), считая, что максимальная частота  $\tau_2^{-1}$  определяется суммой частот двух возбужденных мод. Это дает  $\tau_{2 \min} \approx 6$ . Положение минимума оценено

по формуле (11),  $\lambda \approx 8,1$ . Быстрый рост  $\tau_2(\lambda)$  при  $\lambda > 8$  обусловлен как (общим для любой из мод) линейным ростом  $\tau_2$ , так и последовательным включением высших мод:

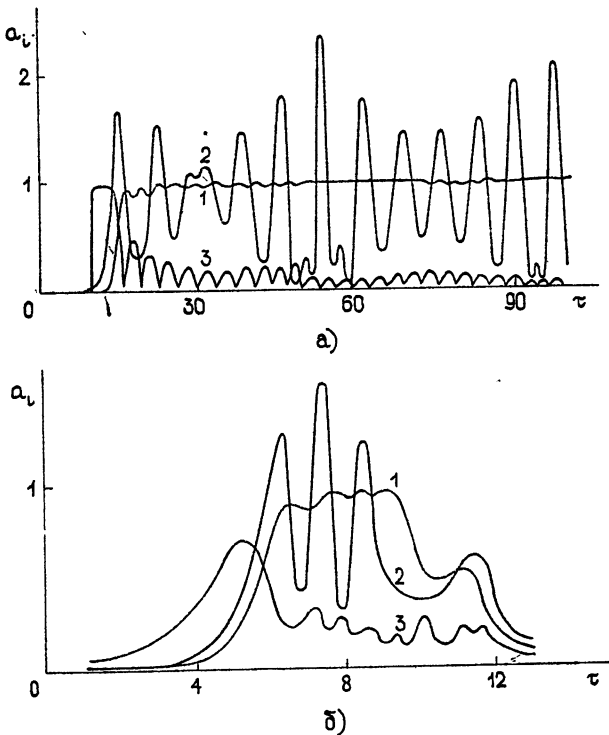


Рис. 1.

Наличие на рис. 1а колебаний с большим периодом  $T$  объясняется существованием в системе колебаний с разностными частотами (при  $\lambda = 10$  возбуждены три моды); аналитическая оценка большого периода  $T \approx 66$  (ср. с рис. 1а).

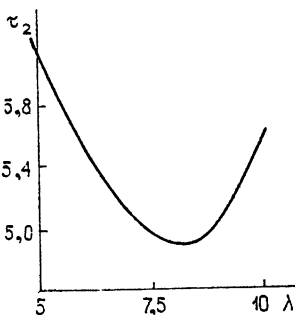


Рис. 2.

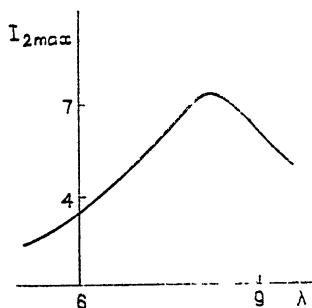


Рис. 3.

Численные расчеты показывают также, что максимальная интенсивность ( $I_{2\max}$ ) коротких импульсов в обратной волне может превосходить в несколько раз предельное стационарное значение  $I_2 = 1$ , определяемое соотношениями Мэнли — Роу (рис. 3). Качественное различие между осцилляциями обратной и прямой волн устанавливается из ис-

ходной системы (1): в силу (4)  $a_1(\lambda, \tau)$  не может превышать единицы, в то время как на мгновенное значение  $a_2(0, \tau)$  система (1) не накладывает такого ограничения. Закон сохранения энергии при этом выполняется, что и контролировалось в численных расчетах.

6. Наличие потерь, естественно, снижает максимальную интенсивность импульсов обратной волны. Это влияние оказывается заметным уже при  $\tilde{\delta} = \delta/A_0 |\sigma_1 \sigma_2|^{1/2} \gtrsim 10^{-2}$ . На рис. 4 показана зависимость  $I_{2\max}(\lambda)$  при: 1)  $\tilde{\delta} = 0,01$ , 2)  $\tilde{\delta} = 0,1$ , 3)  $\tilde{\delta} = 0,5$ .

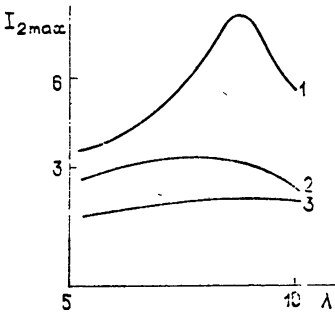


Рис. 4.

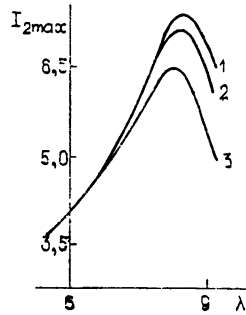


Рис. 5.

Расстройка фазовых скоростей ( $\Delta \neq 0$ ) сказывается на величине интенсивности «пичков» в меньшей степени — ее влияние несущественно вплоть до  $\tilde{\Delta} = \Delta/|A|_0 |\sigma_1 \sigma_2|^{1/2} \approx 0,1$ . Зависимость  $I_{2\max}(\lambda)$  построена на рис. 5 при: 1)  $\tilde{\Delta} = 0,01$ , 2)  $\tilde{\Delta} = 0,1$ , 3)  $\tilde{\Delta} = 0,5$ .

7. Расчетные зависимости максимальной интенсивности и длительности импульсов обратной волны от длительности импульса накачки в режиме (3) (рис. 16) показаны на рис. 6. Энергия отдельных пичков генерации слабо зависит от длительности импульса накачки при фиксированном  $\lambda$ . При  $\lambda = 10$   $I_{2\max} \tau_2 = 13,3$ , или, в размерных величинах,

$$|A|_2^2 \tau_2 \approx 13,3 (|A|_0/v |\sigma_3|) (|\sigma_2/\sigma_1|)^{1/2}.$$

Величина этой константы зависит, очевидно, от способа определения  $\tau_2$ ; указанное ее значение получено при определении длительности «пичка» по уровню половинной интенсивности.

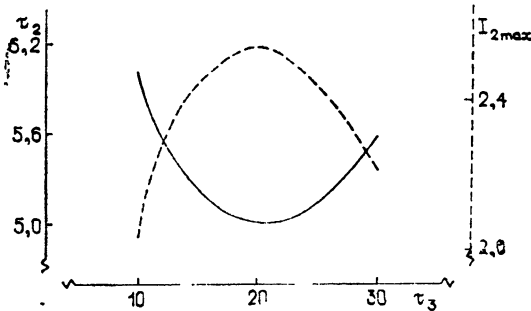


Рис. 6.

8. Основные результаты расчета выходных характеристик параметрического генератора с обратной волной заключаются в следующем: 1) при возбуждении двух и более продольных мод в обратной волне генерируются мощные короткие импульсы; 2) интенсивность их может — уже при возбуждении двух мод — на порядок превосходить предельные стационарные значения, определяемые соотношениями Мэнли — Роу;

интенсивность попутной волны при этом не превышает стационарного значения; 3) наличие линейных потерь и фазовой расстройки снижает мощность генерации, причем влияние последней сказывается в меньшей степени; 4) энергия отдельного импульса генерации — при заданном уровне накачки и заданной длине нелинейной среды — не зависит от длительности импульса накачки.

Авторы благодарны С. А. Ахманову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Maier, W. Kaiser and J. A. Giordmaine, Phys. Rev. Lett., **17**, 1275 (1966).
2. M. Maier, W. Kaiser, M. Stanka and J. A. Giordmaine, Phys. Rev., **177**, 580 (1969).
3. С. А. Ахманов, М. А. Большов, Ю. Е. Дьяков, С. А. Жилкин, Тезисы докладов, представленных на V Всесоюзной конференции по нелинейной оптике (Кишинев, 1970), изд. МГУ, 1970, стр. 96.
4. К. Н. Драбович, Журнал прикладной спектроскопии, **12**, 411 (1970).
5. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНТИ, М., 1964.
6. М. А. Абалиева, Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Г. А. Ляхов, сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ (в печати).
7. К. И. Воляк, Г. А. Ляхов, Квантовая электроника, **3**, 2481 (1976).
8. К. И. Воляк, А. С. Горшков, Радиотехника и электроника, **18**, 2075 (1973).

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
28 декабря 1976 г.

#### NONSTATIONARY INTERACTION OF OPPOSITE WAVES IN QUADRATICALLY NONLINEAR MEDIUM-NUMERICAL EXPERIMENT

*M. A. Abalueva, N. S. Bakhvalov, K. I. Volyak, Ya. M. Zhilejkin,  
G. A. Lyakhov*

The numerical calculation of three-wave nonstationary interaction in the nonlinear medium with the anomalous dispersion have been carried out. Time characteristics of the parametric generator are obtained in regimes of pulse and continuous pump in a broad range of the medium parameters.

УДК 538.56 : 519.25

## О ВОЗНИКНОВЕНИИ СТОХАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕВЫРОЖДЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В СРЕДАХ С УСИЛЕНИЕМ

С. Я. Вышкинд

Рассматривается параметрическое невырожденное взаимодействие в квадратичной среде. Предполагается, что две нижние моды в линейном приближении затухают, а мода суммарной частоты обладает инкрементом. С помощью метода точечных отображений показана возможность возникновения стохастичности при таком взаимодействии.

Наиболее характерной особенностью неравновесных сред (примером которых могут служить электронный пучок в плазме, пьезополупроводник с приложенным к нему полем, пограничный слой в гидродинамике и т. д.) является неустойчивость возникающих в них волновых движений. В случае, когда можно ограничиться учетом только квадратичной нелинейности и когда неустойчивость существует в сравнительно узком частотном интервале, ограничение колебаний возможно за счет нелинейного синхронного взаимодействия, при котором энергия неустойчивой моды перекачивается в затухающие в линейном приближении моды. Такой механизм стабилизации может реализоваться в плазме [1, 2], оптике [3, 4], гидродинамике [7-9].

Рассмотрим элементарный и в то же время наиболее важный процесс невырожденного взаимодействия трех волн в квадратичной среде с сильной дисперсией. Одна из этих волн обладает линейным инкрементом, а две другие в линейном приближении затухают. Уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих пространственно-однородных волн имеют вид\* (см., например, [4, 5])

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \sigma a_2^* a_3 e^{i\delta t} - \nu_1 a_1, \\ \dot{a}_2 &= \sigma a_1^* a_3 e^{i\delta t} - \nu_2 a_2, \\ \dot{a}_3 &= -\sigma a_1 a_2 e^{-i\delta t} + \gamma a_3,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $a_j$  — комплексные амплитуды мод ( $a_j = A_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ ),  $\nu_{1,2}$  — декременты,  $\gamma$  — инкремент волн ( $\nu_{1,2}, \gamma > 0$ ),  $\delta$  — расстройка от синхронизма.

Характер процесса ограничения неустойчивости может быть различным: может установиться равновесный стационарный режим с постоянным уровнем энергии в каждой из мод (в фазовом пространстве — устойчивые состояния равновесия), динамический режим стабилизации, при этом поток энергии из области неустойчивости в область стока

\* Уравнения (1) описывают распадный процесс, поскольку очевидно, что при нарастании одной из волн ограничение неустойчивости возможно лишь в случае, когда инкрементом обладает высокочастотная волна  $a_3$  [6].

периодически модулирован (в фазовом пространстве — устойчивый предельный цикл), и, наконец, может установиться стохастический режим со случайно меняющимся периодом пульсаций (в фазовом пространстве — странный аттрактор [7, 9]). Впервые в подобной системе странный аттрактор обнаружил Лоренц, исследовавший трехмодовую модель термоконвекции в подогреваемом снизу слое жидкости [7]. Возникновение стохастичности в чисто динамических системах было обнаружено и при изучении других маломодовых моделей [9–16, 21]. Случай равных декрементов низкочастотных мод  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , соответствующий вырожденному взаимодействию первой и второй гармоник в квадратичной среде, достаточно подробно изучен [14, 15]. Здесь при  $\delta \neq 0$  и  $\gamma < \frac{\nu}{2} [\nu - 3 + \sqrt{(\nu - 3)^2 + 8}]$  возможен как стационарный, установившийся режим, так и режим динамической стабилизации. Гранницей этих двух режимов является кривая

$$\delta^2 = (\gamma - 2\nu)^2 (\gamma^2 - 2\gamma\nu + 2\nu^2) (2\nu^2 - \gamma^2 - 2\gamma\nu)^{-1}. \quad (2)$$

Если, кроме линейной диссипации, учесть нелинейное поглощение, то в системе возможна «несобственная стохастичность» — существенными оказываются малые флуктуации [16]. К собственной стохастичности приводит, в частности, нелинейная расстройка от синхронизма [17].

Рассмотрим систему (1) в общем случае  $\nu_1 \neq \nu_2$ , при этом появляется дополнительная эффективная степень свободы, и фазовое пространство становится четырехмерным. Выясним, какие движения возникают в системе при изменении ее параметров, т. е. найдем разбиение пространства параметров на области с разным типом движения. В действительных переменных

$$X = |a_3| \sin(\arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1 + \delta t),$$

$$Y = |a_3| \cos(\arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1 + \delta t),$$

$$Z = |a_1| |a_2|, \quad V = \frac{|a_1|}{|a_2|}$$

уравнения (1) можно записать в виде

$$\dot{X} = -Z + \gamma X + \delta Y + Y^2(V + 1/V),$$

$$\dot{Y} = \gamma Y - \delta X - XY(V + 1/V),$$

$$\dot{Z} = Z [X(V + 1/V) - (\nu_1 + \nu_2)],$$

$$\dot{V} = X + V(\nu_2 - \nu_1 - XV). \quad (3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $\tau = \sigma t$ .

В отсутствие расстройки ( $\delta = 0$ ), как и в вырожденном случае [16], исследование (3) сводится к рассмотрению ее поведения на поверхностях  $Y = 0$  или  $Z = 0$ : функция  $P = YZ$  (ср. с [16]), описывается уравнением  $\dot{P} = (\gamma - \nu_1 - \nu_2)P$  и при  $\gamma < \nu_1 + \nu_2 \lim_{t \rightarrow \infty} P = 0$ . Легко видеть, что все имеющиеся на поверхностях  $Z = 0$  и  $Y = 0$  состояния равновесия неустойчивы:  $(X = \bar{Y} = V = 0)$ ,  $(X = \bar{Z} = \bar{V} = 0)$  — седла и  $(X = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ,  $\bar{Z} = \gamma \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ,  $\bar{V} = \sqrt{\nu_2 / \nu_1}$  — седло-фокус, т. е. в предельном случае точного синхронизма стабилизация в системе невозможна.

Аналитически определить характер движений в системе при  $\delta \neq 0$



не удается, поэтому был проведен численный эксперимент\*. Для различных комбинаций значений параметров  $\left(\gamma, \delta, \Delta\nu = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}\right)$  были построены точечные отображения секущей поверхности  $X=0$  в себя, осуществляемые системой уравнений (3). При этом для каждой точки пространства параметров  $(\gamma, \delta, \Delta\nu)$  получались последовательности точек  $(Y_k, Z_k, V_k, T_k)$ , где  $Y_k, Z_k, V_k$  — координаты точек «прокола» фазовой траекторией секущей поверхности  $X=0$ ,  $T_k$  — время движения изображающей точки от каждого  $k$ -го прокола до следующего,  $(k+1)$ -го, индекс  $k$  соответствует номеру прокола (или дискретному времени) и в эксперименте менялся от 1 до  $100 \div 150$ .

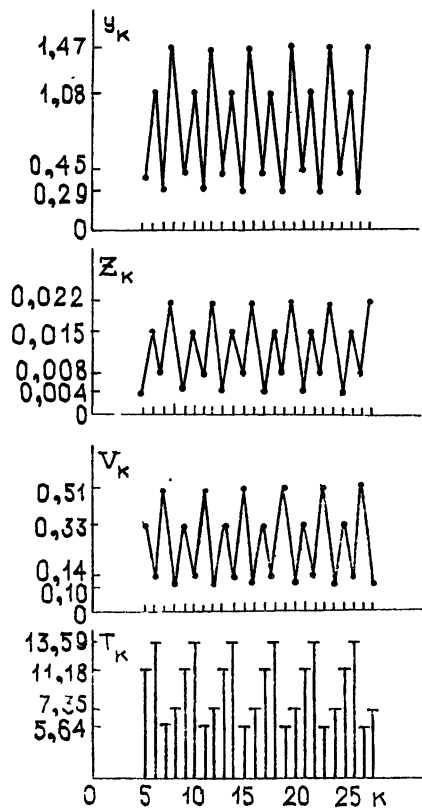


Рис. 1.

Полученные «реализации» представлены на рис. 1—3. Здесь можно выделить качественно различные режимы. Как уже отмечалось, при равных декрементах ( $\nu_1 = \nu_2$ ) в системе возможен статический режим стабилизации. Такой режим сохраняется и при неравных  $\nu_1$  и  $\nu_2$ : при  $\delta > \delta_{\text{биф}}$  в системе устанавливается устойчивый режим с  $\bar{X} = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ,  $\bar{Y} = \delta \sqrt{\nu_1 \nu_2} [\gamma - (\nu_1 + \nu_2)]^{-1}$ ,  $\bar{Z} = \gamma \sqrt{\nu_1 \nu_2} (1 + \delta^2 / [\gamma - (\nu_1 + \nu_2)]^2)$ ,  $\bar{V} = \sqrt{\nu_1^{-1} \nu_2}$ . При переходе  $\delta$  через бифуркационное значение (2) состояние равновесия теряет устойчивость (меняет знак действительная часть пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения), и в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл (появляется устойчивое периодическое движение) [22, 23]. Выход на этот режим оказывается достаточно быстрым, почти не зависящим от начальных условий\*\*. При этом все значения переменных  $Y, Z, V$ , а также период  $T$ \*\*\* остаются постоянными.

При фиксированных инкременте  $\gamma$  и расстройке  $\delta$  период предельного цикла с увеличением  $\Delta\nu$  вначале растет, затем движение становится более сложным (в качестве примера на рис. 1 представлены реализации 4-кратного цикла для  $\gamma=0,2$ ,  $\delta=0,3$ ,  $\Delta\nu=0,2$ ) и, наконец, цикл теряет устойчивость (на рис. 2 такой промежуточный режим приведен для  $\gamma=0,2$ ,  $\delta=0,1$ ,  $\Delta\nu=0,4$ ; стрелками отмечены интервалы повторяющейся периодичности), возникает стохастический режим — на рис. 3 показаны реализации, полученные для  $\gamma=0,1$ ,  $\delta=0,1$ ,  $\Delta\nu=0,3$ . Видно, что никакой повторяемости процесса здесь нет. При дальнейшем увели-

\* Вычисление проводилось с точностью до 9-го знака.

\*\* В качестве начальных условий выбирались, в частности, координаты неустойчивых состояний равновесия

\*\*\* Здесь и дальше под периодом  $T$  будем понимать время между двумя следующими друг за другом проколами секущей поверхности  $X=0$ ,

чении  $\Delta v$  все происходит в обратном порядке, т. е. стохастический режим переходит в «сложный» цикл, который постепенно превращается в однократный. Отметим, что переход от однократного цикла к двукратному (и обратно) может происходить двояко: плавно, когда период двукратного цикла остается примерно равным периоду однократного, но время движения по каждой из-двух его петель существенно различно, т. е.  $\tau_1 \gg \tau_2$ , или скачком — при этом период двукратного цикла возрастает вдвое по сравнению с однократным, а  $\tau_1 \approx \tau_2$ .

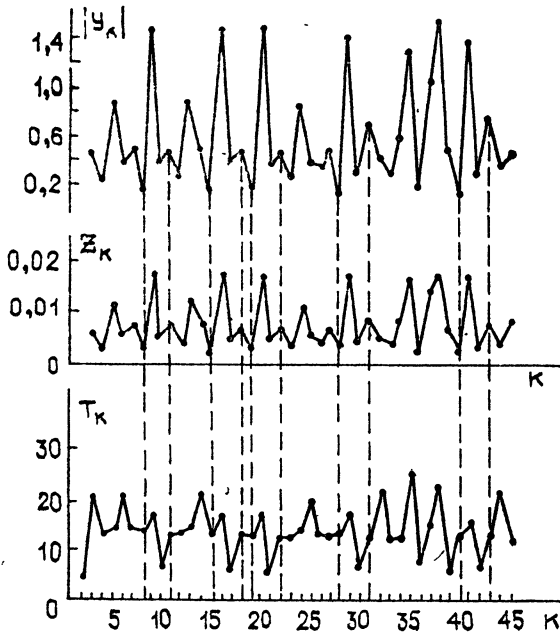


Рис. 2.

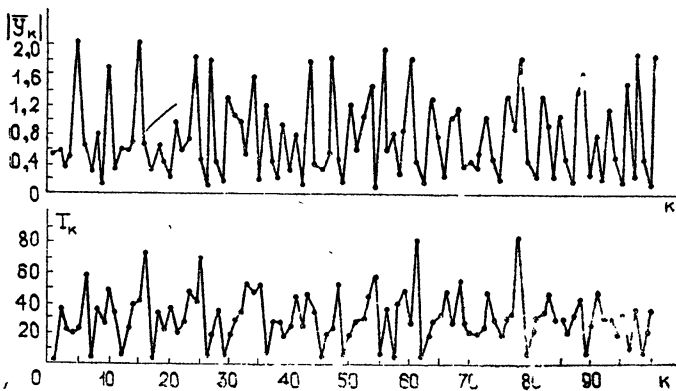


Рис. 3.

На диаграмме рис. 4 приведены области существования различных режимов в плоскости параметров  $\delta$ ,  $\Delta v$  при  $\gamma = \text{const} = 0,1$ . Точками на этой диаграмме отмечены те значения параметров, для которых строилось точечное отображение. Вертикальной штриховкой обозначена об-

ласть существования «сложных» циклов, а «косой» штриховкой отмечена область стохастического поведения системы. Заметим, что с увеличением инкремента  $\gamma$  область стохастичности уменьшается в размерах и смещается в сторону больших  $\delta$  и  $\Delta\nu$  (вправо и вверх — см. рис. 4). При этом система стабилизируется\* (тем или иным образом) при все больших значениях расстройки.

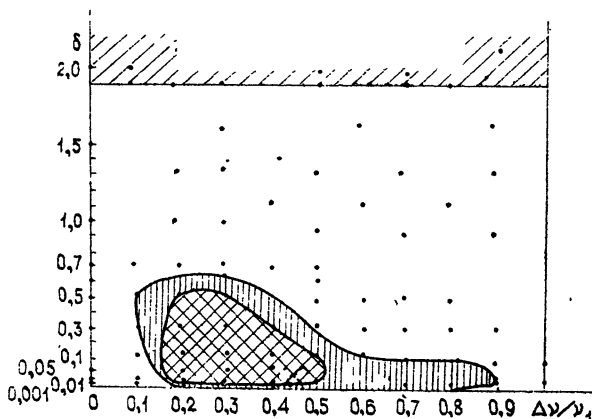


Рис. 4.

Помимо приведенных на рис. 1—3 реализаций функций последования, рассмотрим и их проекции на координатные оси, т. е. трехмерное точечное отображение представим тремя одномерными отображениями отрезка в отрезок. При этом очевидно, что если система имеет неподвижную точку некоторой кратности, то она будет существовать во всех проекциях многомерной функции последования, а появление разрывов или самопересечений хотя бы в одной из проекций говорит о наличии сложных движений. На рис. 5 построены зависимости координаты последующей точки от ее предыдущей для амплитуды неустойчивой моды  $\bar{Y}(Y)$  и для периода  $\bar{T}(T)$ . Проекция функции последования на оси  $Z$  и  $V$  качественно аналогичны  $\bar{Y}(Y)$ . На рис. 5а, б, в приведены проекции функций последования для одно-, двух-, четырехкратного циклов соответственно, на рис. 5г изображен трехкратный цикл, а, как известно, [18, 19, 24], цикл нечетной кратности не может быть единственным, т. е. возникает множество циклов как четной, так и нечетной кратности, в системе появляются стохастические движения (рис. 5д, е).

Наряду с описанным выше экспериментом, в котором прослеживалось поведение одной фазовой траектории, многократно «протыкающей» секущую поверхность  $X=0$ , было построено точечное отображение в себя одной ячейки фазового пространства. В качестве такой ячейки на поверхности  $X=0$  в области притягивающего множества значений переменных  $Y, Z, V$  был выбран куб со сторонами  $0,01 \cdot 10$  в безразмерных единицах. При однократном отображении куб деформировался — произошло сильное сжатие вдоль оси  $Z$  и растяжение вдоль осей  $Y$  и  $V$ , что характерно для седлового отображения [23]. Это дает

\* Стабилизации в системе не происходит при  $\delta=0$  (об этом говорилось выше) и при  $\Delta\nu=1$  ( $\nu_2=0$ ), так как в этом случае ненулевое неустойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл сливаются с неустойчивым состоянием равновесия в нуле, в результате чего в системе остается единственное неустойчивое состояние равновесия.

основание надеяться на существование в системе множества устойчивых и неустойчивых периодических движений.

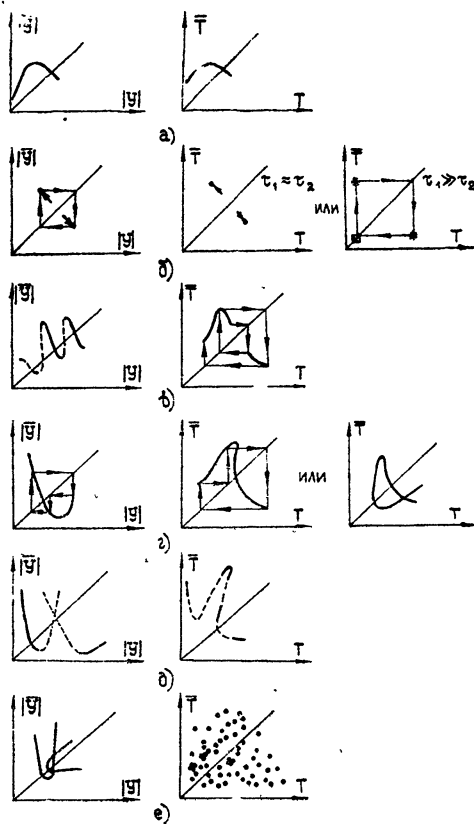


Рис. 5.

Оценим возможность реализации обнаруженных сложных режимов в двух физических системах.

1. *Линия передачи с туннельным переходом.* Для такой линии  $\gamma = g/2C$ ,  $\nu = r/2C\rho^2$ , где  $g$  — проводимость туннельного перехода,  $\rho = \sqrt{L/C}$  — волновое сопротивление линии,  $r$  — сопротивление НЧ-потерь. На частотах  $\omega \sim 10^7 \text{ с}^{-1}$  ( $L = 4,5 \text{ мкГн}$ ,  $C = 1800 \text{ пФ}$ ) при  $r \sim 100 \Omega$ ,  $\rho \sim 50 \Omega$  для линии с диодами типа 3131Г ( $g = 1,33 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$ ) отношение  $\gamma/\nu = 0,34$ , что соответствует стохастическому режиму стабилизации.

2. *Система поток — плазма.* При  $\omega_0 \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$ , эффективном числе соударений электронов с нейтралами  $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$ , концентрации электронов в пучке  $\beta^{2/3} = 0,25$  (см. [1])  $\gamma_0 = \left( 2^{-4/3} \sqrt{3} \beta^{2/3} \omega_0 - \frac{\nu_{\text{эфф}}}{6} \right) \sim \sim 0,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu = \nu_{\text{эфф}} \frac{\beta}{6\sqrt{3}} \sim 0,12 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} \ll \omega_0$ . При этом  $\gamma_0/\nu \approx 0,4$  может возникнуть стохастический режим.

Автор выражает искреннюю признательность М. И. Рабиновичу за интерес и внимание к работе и за обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4 (10), 1298 (1969).
2. С. Я. Вышкинд, В. В. Петров, С. М. Файнштейн, ЖТФ, 45, № 2, 214 (1975).
3. Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло, ЖЭТФ, 51, № 11, 1499 (1966).
4. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, в сб. Вопросы плазмы, вып. 7, Атомиздат, М., 1973.
5. Н. Бломбергс, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
6. Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Нелинейные и нестационарные волны, IV Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Рязань, 1975.
7. E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci., 20, 130 (1963).
8. D. Ruelle and F. Takens, Commun Math Phys., 20, 167 (1971)
9. D. Ruelle, Report at the Conference on «Quantum Dynamics Models and Mathematics», in Bickfield, September 1975.
10. M. Hepon and Heiles, Astron. J., 69, 73 (1964).
11. G. N. Walker and J. Ford, Phys. Rev., 188, 416 (1969).
12. J. Ford and G. N. Lunsford, Phys. Rev., A1, 59 (1970).
13. G. N. Lunsford and J. Ford, J. Math. Phys., 13, № 5, 700 (1971).
14. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, 71, № 2 (8), 557 (1976).
15. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, Т. М. Тарантович, VI Международный симпозиум по нелинейной акустике, Москва, 1975, Тезисы докладов, стр. 53.
16. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 318 (1977).
17. В. А. Дубровин, В. Р. Коган, М. И. Рабинович, Физика плазмы (в печати).
18. А. Н. Шарковский, УМЖ, 16, № 1, 61 (1964).
19. А. Н. Шарковский, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, 1970, стр. 541.
20. Л. П. Шильников, ДАН СССР, 224, № 5 (1975).
21. О. И. Богоявленский, ДАН СССР, 232, № 6, 1289 (1977).
22. E. Nori, Comm. Pure Appl. Math., 1, 303 (1948).
23. Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фужаев, Введение в теорию нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1976.
24. Э. В. Гаушус, Исследование динамических систем методом точечных преобразований, изд. Наука, М., 1976.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
4 июля 1977 г

## STOCHASTICITY OCCURRENCE FOR NONDEGENERATED WAVE INTERACTION IN MEDIA WITH AMPLIFICATION

*S. Ya. Vyshkind*

The parametric nondegenerated interaction in a quadratic medium is considered. It is assumed that in the linear approximation two lower modes attenuate and the summary frequency mode has the increment. Using the exact representation method the possibility of the stochasticity at such interaction is shown.

УДК 621.372.8

## О ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ В ЗАКРЫТОМ КВАЗИОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ИМПЕДАНСОМ НА ОДНОЙ ИЗ СТЕНОК

*А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский*

Известный расчет вторых статистических моментов поля в волноводе со статистически нерегулярными стенками с учетом многократного рассеяния методом фейнмановских диаграмм позволяет определить среднюю интенсивность отдельных мод волновода, но не учитывает фазовые соотношения между модами. В настоящей работе удается учесть фазовые соотношения между модами благодаря некоторому уменьшению общности задачи и использованию другого математического аппарата. Многократное рассеяние учитывается в приближении параболического уравнения с помощью метода локальных возмущений, широко применяемого при расчете статистических моментов поля в неоднородной неограниченной среде. Этот метод позволяет получить интегральное уравнение второго рода относительно функции взаимной когерентности. В случае крупномасштабных неоднородностей импеданса получено решение, описывающее функцию когерентности в области многократного рассеяния.

1. Исследование вторых статистических моментов поля в волноводе с нерегулярными стенками с учетом многократного рассеяния впервые было выполнено в работах, изложенных в монографии [1]. Многократное рассеяние описывалось в них с помощью фейнмановских диаграмм. В результате для корреляционной функции поля получено уравнение Бете — Солпитера, которое рассматривается в «лестничном» приближении. Из этого уравнения, как отмечается в [1], обозримые результаты могут быть получены для средней интенсивности лишь после дополнительного усреднения ее по пространственному «физическому интервалу». Масштаб пространственного усреднения значительно превышает средний размер неоднородностей и масштаб изменения интенсивности за счет интерференции мод регулярного волновода. Такое усреднение позволяет определить среднюю интенсивность отдельных мод волновода, но не учитывает фазовые соотношения между модами. В настоящей работе удается избежать процедуры пространственного усреднения благодаря некоторому уменьшению общности задачи (обратное рассеяние не учитывается) и использованию другого математического аппарата. Многократное рассеяние учитывается в приближении параболического уравнения с помощью метода локальных возмущений. Этот метод позволяет получить замкнутую систему интегральных уравнений второго рода относительно вещественной и мнимой частей функции взаимной когерентности. В случае длинных неоднородностей получено решение, описывающее функцию когерентности в области многократного рассеяния.

2. Рассмотрим для простоты двумерный волновод с границами  $x=0$  и  $x=a$  в декартовой системе координат  $x, z$ . Предполагаем, что волновод возбуждается полем с узким угловым спектром,  $kl \gg 1$ , где  $k$  — волновое число падающего поля,  $l$  — эффективный поперечный размер излучателя и максимум спектра направлен вдоль оси  $z$ . При этих

условиях комплексная амплитуда поля  $U(x, z)$  удовлетворяет параболическому уравнению в координатах  $x, z$  с избранным направлением вдоль оси  $z$ :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1)$$

и начальному условию при  $z=0$ :

$$U(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Предполагаем также, что на стенках волновода выполняются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = -ik [\eta_0 + \alpha(z)] U \Big|_{x=0}; \quad (3)$$

$$U|_{x=a} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\eta_0 = \text{const}$  — среднее значение, а  $\alpha(z)$  — флуктуирующая компонента импеданса, имеющая характерный линейный масштаб  $\Lambda$ , большой по сравнению с длиной волны падающего поля,  $k\Lambda \gg 1$ . Крупномасштабность неоднородностей является необходимым условием применимости параболического уравнения (1).

Расчет среднего (по ансамблю реализаций  $\alpha(z)$ ) поля сводится, как известно, к приближенному вычислению момента  $\langle \alpha(z) U(0, z) \rangle$ , возникающему при усреднении граничного условия (3). Определяя этот момент с помощью метода локальных возмущений, аналогично [2], для среднего поля можно получить нелокальное граничное условие и с помощью формулы Грина перейти к интегральному уравнению типа Вольтера второго рода с разностным ядром:

$$\langle U(0, z) \rangle = V_0(0, z) + \frac{1}{4} \int_0^z ds \langle U(0, s) \rangle M(0, z-s), \quad (5)$$

где  $V_0$  — поле в регулярном волноводе (при  $\alpha \equiv 0$ ),

$$M(x, z) = \int_0^\infty d\tau b_1(\tau) g_0(0/0, \tau) g_0(0/x, z-\tau),$$

$b_1(\tau) = \langle \alpha(0) \alpha(\tau) \rangle$ ,  $g_0$  — функция Грина регулярного волновода.

Формально уравнение (5) может быть решено с помощью преобразования Лапласа. Однако из-за модового представления ядра  $M$  выполнить процедуру обращения аналитически в общем случае невозможно. Поэтому целесообразно сразу упростить задачу, используя малость локальных возмущений в рассматриваемом приближении.

Определим среднее поле в предположении о высокой добротности мод в нерегулярном волноводе. Очевидно, что необходимым условием высокой добротности является малость диссипативных потерь в волноводе. Будем считать, что диссипативные потери совсем отсутствуют. Этот случай реализуется, если [2]  $\text{Re} [\eta_0 + \alpha(z)] = 0$ , и является наиболее интересным с точки зрения многократного рассеяния. В дальнейшем, еще более упрощая задачу, положим  $\eta_0 = 0$ . При этом флуктуации импеданса только мнимые:  $\alpha = i\alpha'$ , где  $\alpha'$  — вещественно, и, следовательно,

$$b_1(z-s) = -\bar{b}(z-s) \equiv -\langle \alpha'(z) \alpha'(s) \rangle, \quad (6)$$

а функция Грина регулярного волновода имеет следующий вид:

$$g_0(\xi/x, z) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{0n}(x-a) \sin \lambda_{0n}(\xi-a) \exp\left(-\frac{i}{2k} \lambda_{0n}^2 z\right),$$

где

$$\lambda_{0n} = \frac{\pi}{a}(n + 1/2).$$

Если добротность мод среднего поля высока, т. е. масштабы осцилляций мод вдоль волновода малы по сравнению с масштабами затухания в результате рассеяния, решение уравнения (5) естественно искать в виде

$$\langle U(0, z) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) \exp\left(-\frac{i}{2k} \lambda_{0n}^2 z\right), \quad (7)$$

где  $U_n$  — медленная по сравнению с экспонентой функция  $z$ . Качественно разложение (7) близко к методу поперечных сечений, положенному в основу расчета полей в волноводе с переменным сечением [3]. Однако в данном случае это разложение используется для решения уравнения относительно среднего поля.

Подставляя (7) в (5), учтем, что в силу медленности  $U_n(z)$  для достаточно больших дистанций ( $z/ka^2 \gg 1$ ) имеет место своеобразная пространственная фильтрация:

$$\int_0^z ds U_n(s) \exp\left[-\frac{i}{2k}(\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0m}^2)s\right] \approx \delta_{nm} \int_0^z ds U_m(s), \quad (8)$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера. Используя (8), из (5) можно получить независимые уравнения относительно каждого из коэффициентов  $U_n(z)$ . В результате среднее поле представляется в виде

$$\langle U(x, z) \rangle = \int_0^a d\xi f(\xi) g(\xi/x, z), \quad (9)$$

где

$$g(\xi/x, z) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{0n}(\xi-a) \sin \lambda_{0n}(x-a) \exp\left[-\frac{i}{2k} \lambda_{0n}^2 z - \frac{b_n}{a^2} z\right] \quad (10)$$

— средняя функция Грина нерегулярного волновода,

$$b_n = \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^a d\tau \bar{b}(\tau) \exp[-i(\lambda_{0q}^2 - \lambda_{0n}^2)\tau/2k].$$

Из (9), (10) следует, что условие высокой добротности волноводных мод (т. е. медленности коэффициентов  $U_n(z)$ ) выражается следующим неравенством:

$$\max_q (b_q k / a^2 \lambda_{0q}^2) = \max_q (k b_q / \pi^2) \ll 1, \quad (11)$$

К формуле (9) можно прийти, если исходить из более общих соотношений, полученных в [1] с помощью фейнмановских диаграмм и выполнить упрощения, связанные с пренебрежением обратным рассеянием и высокой добротностью мод нерегулярного волновода (условие (11)). Приведенный здесь расчет среднего поля является удобной иллюстрацией метода, позволяющего получить новые результаты для вторых моментов.



3. Сформулируем дифференциальное уравнение, начальное и граничные условия для функции когерентности  $F(x_1, x_2, z) = \langle U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle$ .

Из (1)–(4) следует:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) F; \quad (12)$$

$$F|_{z=0} = f(x_1) f^*(x_2); \quad (13)$$

$$F|_{x_1=a} = F|_{x_2=a} = 0; \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = -ik \eta_0 F|_{x_1=0} - ik \langle \alpha(z) U(0, z) U^*(x_2, z) \rangle, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = ik \eta_0^* F|_{x_2=0} + ik \langle \alpha^*(z) U^*(0, z) U(x_1, z) \rangle.$$

Приближенное вычисление момента  $\langle \alpha(z) U(0, z) U^*(x_2, z) \rangle$  в граничных условиях (15) с помощью метода локальных возмущений дает

$$\begin{aligned} \langle \alpha(z) U(0, z) U^*(x_2, z) \rangle &= -\frac{1}{2} \int_0^z ds \langle \alpha(z) \alpha^*(s) \rangle \langle U(0, z) \times \\ &\times U^*(0, s) \rangle g_0^*(0/x_2, z-s) - \frac{1}{2} \int_0^z ds \langle \alpha(z) \alpha(s) \rangle \times \\ &\times \langle U(0, s) U^*(x_2, z) \rangle g_0(0/0, z-s). \end{aligned} \quad (16)$$

Момент  $\langle \alpha^*(z) U(x_1, z) U^*(0, z) \rangle$  определяется из (16) с помощью комплексного сопряжения.

Отметим две качественные особенности, отличающие применение метода локальных возмущений при расчете момента вида (16) в волноводе от случая объемных неоднородностей в неограниченной среде [4]. Во-первых, в формуле (16) моменты поля с поперечным разнесением точек наблюдения выражаются через моменты с продольным разнесением. Во-вторых, вследствие интерференционной структуры функции когерентности  $F$  внутри волновода ее нельзя рассматривать как медленную в интегральных операторах (16).

Малость возмущения на одной неоднородности позволяет упростить выражение (16), поскольку продольный разнос точек наблюдения функции  $F$  под интегралом определяется масштабом функции  $b(\tau)$  и не превышает величины  $\Lambda$ . Соответственно, функцию  $F(x_1, x_2, z + \Delta z, z)$  можно выразить через  $F(x_1, x_2, z, z)$  с помощью функции Грина  $g_0$  регулярного волновода:

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, z + \Delta z, z) = \\ &= \int_0^a d\xi_1 F(\xi_1, x_2, z, z) \begin{cases} g_0(\xi_1/x_1, \Delta z) & \text{при } \Delta z > 0 \\ g_0^*(\xi_1/x_1, \Delta z) & \text{при } \Delta z < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогичное соотношение можно записать в случае сдвига  $\Delta z$  во втором продольном аргументе функции  $F$ . Подставив (17) в (15), получим следующие интегральные граничные условия для функции  $F(x_1, x_2, z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= -ik \eta_0 F \Big|_{x_1=0} + \frac{ik}{2} \int_0^z d\tau \int_0^a d\xi_2 b(\tau) g_0(\xi_2/0, \tau) \times \\ &\times g_0^*(0/x_2, \tau) F(0, \xi_2, z) + \frac{ik}{2} \int_0^z d\tau \int_0^a d\xi_1 b_1(\tau) g_0^*(\xi_1/0, \tau) \times \\ &\times g_0(0/0, \tau) F(\xi_1, x_2, z); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} &= ik \eta_0^* F \Big|_{x_2=0} - \frac{ik}{2} \int_0^z d\tau \int_0^a d\xi_1 b^*(\tau) g_0^*(\xi_1/0, \tau) \times \\ &\times g_0(0/x_1, \tau) F(\xi_1, 0, z) - \frac{ik}{2} \int_0^z d\tau \int_0^a d\xi_2 b_1^*(\tau) g_0(\xi_2/0, \tau) \times \\ &\times g_0^*(0/0, \tau) F(x_1, \xi_2, z), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$b(z-s) = \langle \alpha(z) \alpha^*(s) \rangle.$$

Таким образом, определение второго момента  $F(x_1, x_2, z)$  сводится к решению уравнения (12) внутри трехмерной области  $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $0 \leq x_2 \leq a$ ,  $z \geq 0$  с начальным условием (13), нулевыми граничными условиями (14) на гранях  $x_1=a$  и  $x_2=a$  и интегральными граничными условиями (18), (19) на двух других гранях. Используя теорему Грина для этого объема, перейдем к интегральной формулировке задачи:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, z) &= \int_0^a d\xi_1 \int_0^a d\xi_2 f(\xi_1) f^*(\xi_2) G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z) - \\ &- \frac{i}{2k} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_1 \left\{ F(\xi_1, 0, s) \frac{\partial}{\partial \xi_2} G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z-s) \Big|_{\xi_2=0} - \right. \\ &- G(\xi_1, 0/x_1, x_2, z-s) \left[ ik \eta_0^* F(\xi_1, 0, s) - \frac{ik}{2} \int_0^s d\tau \int_0^a d\xi'_1 b^*(\tau) \times \right. \\ &\times g_0^*(\xi'_1/0, \tau) g_0(0/\xi_1, \tau) F(\xi'_1, 0, s) - \frac{ik}{2} \int_0^s d\tau \int_0^a d\xi'_2 b_1^*(\tau) \times \\ &\times g_0(\xi'_2/0, \tau) g_0^*(0/0, \tau) F(\xi_1, \xi'_2, s) \Big] \Big\} + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_2 \left\{ F(0, \xi_2, s) \frac{\partial}{\partial \xi_1} G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z-s) \Big|_{\xi_1=0} - \right. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & - G(0, \xi_2/x_1, x_2, z-s) \left[ -ik\eta_0 F(0, \xi_2, s) + \frac{ik}{2} \int_0^s d\tau \int_0^a d\xi'_2 b(\tau) \times \right. \\
 & \times g_0(\xi'_2/0, \tau) g_0^*(0/\xi_2, \tau) F(0, \xi'_2, s) + \frac{ik}{2} \int_0^s d\tau \int_0^a d\xi'_1 b_1(\tau) \times \\
 & \left. \times g_0^*(\xi'_1/0, \tau) g_0(0/0, \tau) F(\xi'_1, \xi_2, s) \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

Функция Грина  $G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z-s)$  в (20) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial s} = -\frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) G$$

и граничным условиям

$$G|_{\xi_1=a} = G|_{\xi_2=a} = 0.$$

Граничные условия на двух других гранях, при  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 0$ , еще не определены и могут быть выбраны произвольно. Учитывая, что в интегральные операторы (20) входят значения  $F$  только на гранях  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  и, согласно определению,  $F^*(x_1, 0, z) = F(0, x_1, z)$ , из (20), полагая  $x_2 = 0$ , можно получить систему интегральных уравнений второго рода относительно вещественной и мнимой частей функции  $F(x_1, 0, z)$ .

Качественно (20) описывает тот же процесс многократного рассеяния, что и уравнение Бете — Солпитера в «лестничном» приближении. Однако структура этого уравнения более проста, так как оно сформулировано относительно функции взаимной когерентности без продольного разнесения точек наблюдения.

4. Получим функцию когерентности в одном частном случае. Рассмотрим волновод без диссипативных потерь, при  $\eta_0 = 0$ , для которого выполняется условие (6) и справедливо также соотношение  $b(\tau) = \bar{b}(\tau)$ . Предположим, что средний размер неоднородностей импеданса велик:

$$\Lambda/ka^2 \gg 1, \quad (21)$$

т. е. зона Френеля однократно рассеянного поля много больше ширины волновода. Найдем главный член асимптотического разложения по большому параметру (21) функции

$$\begin{aligned}
 R(x, y, z) &= \int_0^z d\tau \bar{b}(\tau) g_0(x/0, \tau) g_0^*(0/y, \tau) = \\
 &= \frac{4}{a^2} \sum_{n, m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \sin \lambda_{0n}(x-a) \sin \lambda_{0m}(y-a) \times \\
 &\times \int_0^z d\tau \bar{b}(\tau) \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0m}^2) \tau \right],
 \end{aligned}$$

которая входит в ядра интегральных операторов уравнения (20). Учитывая (21) и принимая во внимание условие  $z/\Lambda \gg 1$ , обозначающее многократность рассеяния, приближенно имеем

$$\int_0^z d\tau \bar{b}(\tau) \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0m}^2) \tau \right] \approx \frac{1}{2} \bar{b}(0) \delta_{n,m},$$

где

$$\tilde{b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \bar{b}(\tau) e^{-i\tau x},$$

Таким образом, для функции  $R$  получаем следующее асимптотическое значение:

$$R(x, y, z) \approx \frac{\tilde{b}(0)}{a} g_0(x/y, 0) = \frac{\tilde{b}(0)}{a} \delta(x - y), \quad (22)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Подстановка (22) в (20) приводит к полной компенсации интегральных слагаемых, содержащих значения функции  $R$  на каждой из стенок волновода.

После этого в (20) остаются два вида слагаемых, содержащих функцию  $F$  под интегралами. Первые из них пропорциональны  $\eta_0$  и равны нулю (так как рассматривается случай  $\eta_0 = 0$ ). Вторые содержат производные  $(\partial G / \partial \xi_1)_{\xi_1=0}$  и  $(\partial G / \partial \xi_2)_{\xi_2=0}$ . Если теперь выбрать граничные условия на импедансных стенках в виде

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1=0} = \left. \frac{\partial G}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=0} = 0, \quad (23)$$

то обращаются в нуль и слагаемые второго типа. В результате из (20) получаем

$$F(x_1, x_2, z) = \int_0^a d\xi_1 \int_0^a d\xi_2 f(\xi_1) f^*(\xi_2) G(\xi_1, \xi_2 / x_1, x_2, z),$$

где  $G$  — произведение двух двумерных функций Грина регулярного волновода:

$$G(\xi_1, \xi_2 / x_1, x_2, z) = g_0(\xi_1 / x_1, z) g_0^*(\xi_2 / x_2, z).$$

Итак, окончательно имеем

$$F(x_1, x_2, z) = F_0(x_1, x_2, z), \quad (24)$$

где  $F_0$  — функция когерентности в регулярном волноводе.

Решение (24) описывает многократное рассеяние на неоднородностях импеданса. В этом легко убедиться, рассматривая асимптотическое значение средней функции Грина (10) по параметру (21):

$$g(\xi/x, z) = g_0(\xi/x, z) \exp\left(-\frac{\tilde{b}(0)z}{2a^2}\right) \left[1 + O\left(\frac{ka^2}{\Delta}\right)\right]. \quad (25)$$

Область многократного рассеяния определяется дистанцией  $h$ , на которой затухает среднее поле. Согласно (25),  $h$  определяется из условия

$$\frac{\tilde{b}(0)h}{2a^2} \sim 1.$$

Оценивая по порядку величины первый исчезающий член в (20) и требуя его малости, получаем неравенство, ограничивающее область применимости решения (24):

$$\frac{1}{2a^2} \tilde{b}\left(\frac{\pi^2}{2ka^2}\right) z \ll 1. \quad (26)$$

Благодаря малости  $\tilde{b}(\pi^2/2ka^2)$  по сравнению с  $\tilde{b}(0)$  убывание среднего поля наступает на дистанциях, значительно меньших, чем дистанции, на которых нарушается условие (26).

5. Полученное асимптотическое решение позволяет сделать следующие выводы.

В случае длинных неоднородностей и отсутствия диссипативных потерь регулярная компонента функции взаимной когерентности, равная произведению средних полей, экспоненциально убывает с увеличением дистанции. Энергия падающего поля полностью переходит во флуктуационную компоненту поля. Флуктуационная компонента функции взаимной когерентности растет при этом таким образом, что в сумме с регулярной остается такой же, как в невозмущенном волноводе в широком интервале дистанций.

Заметим, что в общем случае, когда условие (21) или (26) нарушается, выбор граничных условий в виде (23) не упрощает интегрального уравнения для функции когерентности. В этих случаях, как и в [1], для  $G$  удобно выбрать нелокальные граничные условия на импедансных стенках волновода. Однако этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности изд. Наука, М., 1972.
2. А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 7, 1013 (1974).
3. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
3 мая 1976 г.

#### THE FUNCTION OF MUTUAL COHERENCY OF THE FIELD IN A CLOSED QUASI-OPTICAL WAVEGUIDE WITH FLUCTUATING IMPEDANCE ON ONEWALL

*A. A. Puzenko, E. V. Chaevsky*

The known calculation of the second statistical moments of the field in the waveguide with statistically irregular walls taking into account the multiple scattering permits to obtain by the method of Feynman diagram, the average intensity of separate waveguide modes neglecting the phase relation between them. The present paper considers the phase relations between modes due to some decrease of the common character of the problem and to the use of another mathematical apparatus. The multiple scattering are regarded in the approximation of the parabolic equation by the method of local disturbances widely used when calculating the statistical moments of the field in an inhomogeneous unlimited medium. The method permits to obtain the integral equation of the second kind relative to the function of mutual coherency. In the case of large-scale inhomogeneities of the impedance a solution is obtained describing the function of coherency in the region of multiple scattering.

УДК 621.372.8

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В ЗАКРЫТОМ КВАЗИОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ИМПЕДАНСОМ НА ОДНОЙ ИЗ СТЕНОК

А. А. Пузенко

Рассматривается функция взаимной когерентности поля в волноводе с флуктуирующим импедансом на одной из стенок. Расчет проводится в приближении параболического уравнения с помощью метода локальных возмущений. Показано, что компоненты функции взаимной когерентности с различными периодами продольных интерференционных осцилляций распространяются вдоль волновода независимо. Это обстоятельство позволяет существенно упростить общее интегральное уравнение второго рода, которому удовлетворяет функция взаимной когерентности поля в волноводе, и в случае одномодового возбуждения при мелкомасштабных неоднородностях получить распределение средней интенсивности на больших дистанциях.

На достаточно больших дистанциях средняя интенсивность распределена равномерно по сечению волновода, кроме узких зон, прилегающих к границам. С ростом дистанции масштаб этих зон уменьшается по степенному закону.

1. В работе [1] с помощью модификации метода локальных возмущений, широко применяемого при расчете статистических моментов поля в неоднородной среде [2], получено интегральное уравнение второго рода относительно функции взаимной когерентности поля в волноводе с флуктуирующим импедансом на одной из стенок. Качественно это уравнение описывает тот же процесс многократного рассеяния, что и уравнение Бете — Солпитера в «лестничном» приближении, которое получено в [3] с помощью фейнмановских диаграмм. Однако структура этого уравнения более проста, так как оно сформулировано относительно функции когерентности, имеющей только поперечное разнесение точек наблюдения. В случае крупномасштабных неоднородностей импеданса в [1] получено решение этого уравнения, описывающее функцию взаимной когерентности в области многократного рассеяния.

В настоящей работе с учетом пространственной фильтрации проводится существенное упрощение интегрального уравнения. Подробно рассматривается случай мелкомасштабных неоднородностей. При условии одномодового возбуждения волновода найдено распределение средней интенсивности поля в сечении волновода на больших дистанциях.

2. Сохраняя обозначения, принятые в [1], рассмотрим двумерный волновод с границами  $x=0$  и  $x=a$  в декартовой системе координат  $x, z$ . Считая, что возбуждающее волновод поле не противоречит условиям применимости параболического уравнения, для комплексной амплитуды имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad U|_{x=a} = 0,$$

$$U|_{z=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = -ik[\eta_0 + \alpha(z)]U|_{x=0}.$$

где  $k$  — волновое число падающего поля,  $\eta_0 = \text{const}$  — среднее значение, а  $\alpha(z)$  — флуктуирующая компонента импеданса, имеющая характерный линейный масштаб  $\Lambda$ , большой по сравнению с длиной волны падающего поля,  $k\Lambda \gg 1$ . В предположении о малости локальных возмущений для функции взаимной когерентности с поперечным разнесением точек наблюдения  $F(x_1, x_2, z) = \langle U(x, z)U^*(x_2, z) \rangle$  в [1] получены интегральные граничные условия при  $x_1=0$  и  $x_2=0$ . В абстрактном трехмерном пространстве  $x_1, x_2, z$  эти условия совместно с формулой Грина позволяют сформулировать задачу о функции взаимной когерентности в интегральном виде (см. формулу (20) в [1]). Трехмерная функция Грина  $G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z-s)$  в интегральной формуле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial s} = -\frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_2^2} \right)$$

с начальным условием

$$G \xrightarrow{s \rightarrow z} \delta(\xi_1 - x_1) \delta(\xi_2 - x_2)$$

( $\delta(x)$  — дельта-функция) и нулевым граничным условием на двух гранях

$$G|_{\xi_1=a} = G|_{\xi_2=a} = 0.$$

Граничные условия на двух других гранях при  $\xi_1=0$  и  $\xi_2=0$  для функции  $G$  не определены.

В общем случае формула Грина упрощается, если в качестве  $G$  выбрать эффективную функцию Грина, удовлетворяющую интегральным граничным условиям следующего вида:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1=0} = -ik \overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}} G|_{\xi_1=0}, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=0} = ik \overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}}^* G|_{\xi_2=0}, \quad (1)$$

где  $\overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}}$  — интегральный оператор эффективного импеданса, заданный соотношением

$$\overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}} \varphi(z) = \eta_0 \varphi(z) - \frac{1}{2} \int_0^z d\tau b(\tau) g_0(0/\tau, \tau) \varphi(z-\tau), \quad (2)$$

$b_1(z-s) = \langle \alpha(z)\alpha(s) \rangle$ ,  $g_0$  — функция Грина регулярного волновода (при  $\alpha \equiv 0$ ). При граничных условиях (1) часть слагаемых в формуле Грина обращается в нуль:

$$\int_0^z ds [F(0, \xi_2, s) \overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}} G(0, \xi_2/x_1, x_2, z-s) - G(0, \xi_2/x_1, x_2, z-s) \overset{\wedge}{\eta}_{\text{эфф}} F(0, \xi_2, s)] = 0,$$

так как оператор (2) является самосопряженным. В результате формула Грина принимает вид

$$F(x_1, x_2, z) = F_0(x_1, x_2, z) + \frac{1}{4} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_1 G(\xi_1/0, x_1, x_2, z-s) \int_0^a d\xi_1' F(\xi_1', 0, s) R^+(\xi_1', \xi_1) + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_2 G(0, \xi_2/x_1, x_2, z-s) \int_0^a d\xi_2' F^*(\xi_2', 0, s) R(\xi_2', \xi_2),$$

где

$$F_0(x_1, x_2, z) = \int_0^a d\xi_1 \int_0^a d\xi_2 f(\xi_1) f^*(\xi_2) G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z)$$

и использовано следующее свойство функции  $F$ :  $F(x_1, x_2, z) = F^*(x_2, x_1, z)$ . Поскольку рассматривается многократное рассеяние и при выводе интегральных граничных условий предполагалось  $z/\Lambda \gg 1$ , в (3) сделано следующее упрощение:

$$\begin{aligned} & \int_0^z d\tau b(\tau) g_0(x/0, \tau) g_0^*(0/y, \tau) \approx \\ & \approx \int_0^\infty d\tau b(\tau) g_0(x/0, \tau) g_0^*(0, y, \tau) = R(x, y). \end{aligned}$$

Как следует из (3), искомая функция  $F(x_1, x_2, z)$  в трехмерной области  $x_1, x_2, z$  полностью определяется своим значением  $F(x_1, 0, z)$  на плоскости  $x_1, z$ . Полагая в (3)  $x_2=0$ , можно перейти к замкнутому уравнению относительно  $F(x_1, 0, z)$ . Таким образом, при  $x_2=0$  соотношение (3) является статистическим аналогом уравнения краевой задачи дифракции, сформулированным относительно второго момента.

3. С точки зрения многократного рассеяния наиболее интересным является случай волновода без диссипативных потерь. В таком волноводе вся энергия, теряемая когерентной компонентой функции  $F$ , переходит во флуктуационную. Согласно [4], условие отсутствия диссипативных потерь на импедансной стенке волновода имеет вид  $\text{Re}[\eta_0 + \alpha(z)] = 0$ . Еще более упрощая задачу, как и в [1], рассмотрим волновод, у которого  $\eta_0=0$ : При этом флуктуации импеданса чисто мнимые и, следовательно,  $b_1(\tau) = -b(\tau)$ , а функция корреляции  $b(\tau)$  — вещественна. Учтем также, что вследствие малости локальных возмущений выполняется условие  $kb_n \ll 1$  — условие высокой добротности мод средней функции Грина  $g$ , имеющей согласно [1], следующий вид:

$$g(\xi/x, z) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \lambda_{0n}(\xi - a) \sin \lambda_{0n}(x - a) \exp\left(-\frac{i}{2k} \lambda_{0n}^2 z - \frac{b_n}{a^2} z\right),$$

где

$$b_n = \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^\infty d\tau b(\tau) \exp\left[-\frac{i}{2k} (\lambda_{0q}^2 - \lambda_{0n}^2) \tau\right],$$

$$\lambda_{0n} = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

При этих предположениях трехмерную функцию Грина  $G$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} G(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z) &= \\ &= g(\xi_1/x_1, z) g^*(\xi_2/x_2, z) = \sum_q B_q(\xi_1, \xi_2/x_1, x_2, z) e^{-ivqz}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$v = \pi^2/2ka^2, \quad q = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2,$$



$$B_q = \frac{4}{a^2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \sin \lambda_{0n}(\xi_1 - a) \sin \lambda_{0n}(x_1 - a) \sin \lambda_{0m}(\xi_2 - a) \times \quad (5)$$

$$\times \sin \lambda_{0m}(x_2 - a) \exp\left(-\frac{b_n + b_m^*}{a^2} z\right) \delta_{q, (n-m)(n+m+1)},$$

$\delta_{nm}$  — символ Кронекера. Выделив таким образом при фиксированных  $q$  медленные по сравнению с осциллирующей экспонентой множители  $B_q$  и подставив (4) в (3), видим, что функция  $F$  обладает структурой вида (4), т. е.

$$F(x_1, 0, z) = \sum_q A_q(x_1, 0, z) e^{-iqz}, \quad (6)$$

где  $A_q$  — медленные по сравнению с экспонентой функции продольной координаты  $z$ . Подставим разложения (4), (6) и аналогичное разложение функции  $F_0$ :

$$F_0(x_1, 0, z) = \sum_q A_q^0(x_1, 0, z) e^{-iqz},$$

где

$$A_q^0(x_1, 0, z) = \sum_{n, m=0}^{\infty} f_n f_m^* (-1)^{m+1} \sin \lambda_{0n}(x_1 - a) \times \quad (7)$$

$$\times \exp\left(-\frac{b_n + b_m^*}{a^2} z\right) \delta_{q, (n-m)(n+m+1)},$$

$$f_n = \int_0^a d\xi f(\xi) \sin \lambda_{0n}(\xi - a),$$

в уравнение (3). При этом учтем, что

$$\int_0^z ds A_q(s) B_p(z-s) e^{-ivs(q-p)} \approx \delta_{qp} \int_0^z ds A_p(s) B_p(z-s)$$

при  $z/ka^2 \gg 1$ . В результате получим

$$A_q(x_1, 0, z) = A_q^0(x_1, 0, z) +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_1 \int_0^a d\xi_1' B_q(\xi_1, 0/x_1, 0, z-s) R^*(\xi_1', \xi_1) A_q(\xi_1', 0, s) + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^z ds \int_0^a d\xi_2 \int_0^a d\xi_2' B_q(0, \xi_2/x_1, 0, z-s) R(\xi_2', \xi_2) A_{-q}^*(\xi_2', 0, s).$$

Как видно из (8), амплитуды  $A_q$ , соответствующие компонентам искомой функции с различными периодами продольных интерференционных осцилляций; изменяются вдоль волновода независимо друг от друга.

Частным случаем этой весьма общей закономерности является известное в литературе уравнение переноса для средних интенсивностей волноводных мод. Его можно получить из (8), полагая  $q=0$  и подставляя  $A_0(x_1, 0, z)$  в виде разложения по поперечным собственным функциям регулярного волновода:

$$A_0(x_1, 0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} D_n(z) \sin \lambda_{0n}(x_1 - a). \quad (9)$$

В результате для средних интенсивностей волноводных мод имеем

$$\frac{d}{dz} D_n = -\frac{2\text{Re } b_n}{a^2} D_n + \frac{1}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{mn} D_m, \quad (10)$$

где

$$\Gamma_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau b(\tau) \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0m}^2) \tau \right].$$

Система уравнений (10) была получена в [3] из уравнения Бете — Солпитера после усреднения корреляционной функции поля по пространственному интервалу.

Остановимся подробнее на связи коэффициентов  $D_n$  с функцией когерентности  $F$ . В общем случае  $F$  можно представить в виде

$$F(x_1, x_2, z) = \sum_{n, m=0}^{\infty} E_{nm}(z) \sin \lambda_{0n}(x_1 - a) \sin \lambda_{0m}(x_2 - a). \quad (11)$$

С другой стороны, если волновод возбуждается одной модой с номером  $l$ , при  $f_n = \bar{f}_l \delta_{ln}$  в сумме (6) отлично от нуля лишь одно слагаемое

$$F(x_1, 0, z) = A_0(x_1, 0, z), \quad (12)$$

так как в этом случае свободный член в (8) отличен от нуля лишь при  $q=0$ :

$$A_q^0(x_1, 0, z) = (-1)^{l+1} |\bar{f}_l|^2 \sin \lambda_{0l}(x_1 - a) \exp \left( -\frac{2\text{Re } b_l}{a^2} z \right) \delta_{q,0},$$

а при  $q \neq 0$  уравнение (8) становится однородным и имеет нулевое решение.

Таким образом, из (9), (11) и (12) имеем следующую связь коэффициентов  $E_{nm}$  и  $D_n$ :  $E_{nm}(z) = D_n(z) \delta_{nm}$ , т. е. коэффициенты  $D_n(z)$ , описывающие изменение энергии  $n$ -й моды за счет рассеяния, при условии возбуждения волновода одной модой, полностью определяют функцию когерентности. В частности, для средней интенсивности поля получаем

$$I(x, z) = F(x, x, z) = \frac{\varepsilon}{a} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z) \cos 2\lambda_{0n}(x - a). \quad (13)$$

В формуле (13) учтен закон сохранения энергии, следующий непосредственно из (10),

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(0) = \frac{2\varepsilon}{a},$$

где

$$\varepsilon = \int_0^a dx I(x, 0) = |\bar{f}_l|^2 \frac{a}{2}.$$

Если в начале волновода возбуждается много мод, то решения системы (10) не позволяют построить функцию когерентности. В этом случае кроме коэффициентов  $D_n$  необходимо иметь еще решения других сис-

тем, соответствующих всем возможным интерференционным частотам  $q$  в уравнении (8).

4. Найдем асимптотическое решение системы (10) на больших дистанциях в случае коротких неоднородностей при

$$\frac{\Lambda}{ka^2} \ll 1.$$

В этом случае уже в результате однократного рассеяния возбуждается много мод и суммирование в (10) можно заменить интегрированием, а  $D_n(z)$  рассматривать как функцию  $D(n, z)$  двух независимых переменных  $n$  и  $z$ :

$$a^2 \frac{\partial D(n, z)}{\partial z} = -\gamma(n)D(n, z) + \int_0^\infty dm \Gamma(m, n)D(m, z), \quad (14)$$

где

$$\gamma(n) = 2\text{Re } b_n \approx \int_0^\infty dm \Gamma(m, n),$$

$$\Gamma(m, n) = \int_{-\infty}^\infty d\tau b(\tau) e^{-i\nu(m^2 - n^2)\tau}.$$

Для получения асимптотического решения на больших дистанциях приведем уравнение (14) к более удобному виду. Введем вспомогательную функцию

$$\rho(\tau, z) = \int_0^\infty dm e^{-i\nu\tau m^2} D(m, z). \quad (15)$$

Из (14) для функции  $\rho$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \rho(s, z)}{\partial z} = -c \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{s-\tau}} [b(s-\tau) - b(\tau)] \rho(\tau, z), \quad (16)$$

где

$$c = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}}.$$

Уравнение (14) является уравнением переноса и описывает процесс диффузии энергии в пространстве мод [3]. В результате этого процесса эффективная ширина функции  $D(n, z)$  по оси  $n$  увеличивается с ростом  $z$ . Следовательно, в силу определения (15), на достаточно больших дистанциях масштаб  $L$  функции  $\rho$  по переменной  $\tau$  становится мал. Определим  $\rho(\tau, z)$  в области таких дистанций, на которых

$$L/\Lambda \ll 1, \quad (17)$$

т.е. функция  $\rho$  становится «острой» по сравнению с  $b(\tau)$ . Разложение ядра интегрального оператора в (16) по малому параметру (17) не приводит его к разностному виду. Поэтому от уравнения (16) с помощью дифференцирования по  $z$  перейдем к другому, более удобному для асимптотического анализа интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \rho(s, z)}{\partial z^2} = c^2 \int_{-\infty}^\infty d\tau' M(\tau', s) \rho(\tau', z), \quad (18)$$

где

$$M(\tau', s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{b(s - \tau) - b(\tau)}{\sqrt{s - \tau}} \frac{b(\tau - \tau') - b(\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}}. \quad (19)$$

После разложения ядра (19) по малому параметру (17) получим следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho(s, z)}{\partial z^2} = c^2 s \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rho(\tau, z) Q(s - \tau), \quad (20)$$

где

$$Q(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{b'(\xi)[b(\xi) - b(0)]}{\sqrt{s + \xi}}, \quad b'(\xi) = \frac{db(\xi)}{d\xi}.$$

Для решения уравнения (20) рассмотрим аналитические свойства функции  $\rho(\tau, z)$  на плоскости комплексного переменного  $\tau$ . Учитывая (15),  $\rho(\tau, z)$  представим в виде

$$\rho(\tau, z) = \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} E(\omega, \tau), \quad (21)$$

где

$$E(\omega, z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{\omega}} D\left(\sqrt{\frac{\omega}{y}}, z\right).$$

Из уравнения (16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho(0, z) = 0$$

и, следовательно,

$$\rho(0, z) = \rho(0, 0) = \int_0^{\infty} d\omega E(\omega, 0) = \frac{2\varepsilon}{a}. \quad (22)$$

Принимая это во внимание, из (21) заключаем, что функция  $\rho$  аналитическая в полуплоскости  $\text{Im } \tau \leq 0$ . Поэтому  $E(\omega, z)$  можно представить в виде следующего контурного интеграла:

$$E(\omega, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x-i\Delta}^{\infty-i\Delta} d\tau \rho(\tau, z) e^{i\omega\tau}, \quad (23)$$

где  $\Delta \geq 0$ . Аналогичное представление можно записать для ядра  $Q(\tau)$ :

$$Q(\tau) = \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} P(\omega), \quad \text{Im } \tau < 0 \quad (24)$$

и соответственно

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\Delta}^{\infty-i\Delta} d\tau Q(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (25)$$

Используя (21) — (25), от уравнения (20) переходим к уравнению относительно функции  $E(\omega, z)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} d\xi E(\xi, z) = -2\pi ic^2 E(\omega, z) P(\omega).$$

Если ввести новую функцию

$$\Phi(\omega, z) = \int_0^{\infty} d\xi E(\xi, z), \quad (26)$$

то для нее получаем уравнение диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(\omega, z) = -2\pi ic^2 \frac{\partial \Phi(\omega, z)}{\partial \omega} P(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} e^{-i\omega\xi} b'(\xi) [b(\xi) - b(0)].$$

Переменный коэффициент  $M(\omega) = -2\pi ic^2 P(\omega)$  — вещественная функция

$$M(\omega) = \frac{2k}{a^2 \sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} b'(\xi) [b(\xi) - b(0)] \sin\left(\frac{\pi}{4} - \omega\xi\right).$$

Сделаем замену переменной

$$y = \int_0^{\omega} \frac{d\nu}{M(\nu)}, \quad (27)$$

для функции

$$\Phi_y(y, z) = \Phi[\omega(y), z] \quad (28)$$

получаем уравнение диффузии с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_y(y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y(y, z). \quad (29)$$

Уравнение (29) рассматривается в области  $z \geq z_0$ ,  $y \geq 0$ , где дистанция  $z_0$  выбирается достаточно большой, так что на ней уже выполняется условие (17). Значения функции  $\Phi_y$  на границах этой области уже определены. Действительно, из (26), (27) и (28) следует

$$\Phi_y|_{y=0} = 0, \quad (30)$$

а при  $z=z_0$  функция  $\Phi_y$  предполагается известной и определяется значением функции  $\rho(\tau, z)$  на этой дистанции:

$$\Phi_y|_{z=z_0} = \varphi(y). \quad (31)$$

Решение задачи (29) — (31) имеет вид [5]

$$\Phi_y(y, z) = \frac{z - z_0}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{d\xi \varphi(\xi)}{(y - \xi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{4(y - \xi)}\right]. \quad (32)$$

Для анализа решения (32) необходимо выяснить свойства функции  $\varphi(y)$ . Так как эта функция задается в неявном виде (28), определим

вначале связь между  $y$  и  $\omega$  в формуле (27). В предельных случаях имеем

$$\begin{aligned} \text{при } \omega\Lambda \ll 1, M(\omega) \sim \omega^{-1/2} & \quad \text{и } y \sim \omega^{3/2}; \\ \text{при } \omega\Lambda \gg 1, M(\omega) \sim \omega^{-1} & \quad \text{и, следовательно,} \end{aligned}$$

$$y \approx \frac{8}{75} \frac{a^2}{k[b''(0)]^2} \omega^5. \quad (33)$$

Если  $\omega_0$  — характерная ширина функции  $E(\omega, z)$  по переменной  $\omega$  на дистанции  $z_0$ , то при  $\omega \gg \omega_0$  в соответствии с (26), (22) функция  $\Phi(\omega, z_0)$  стремится к постоянному, не зависящему от дистанции значению  $\varphi(\infty) = 2\varepsilon/a$ . Поэтому  $\varphi(y)$  удобно представить в виде

$$\varphi(y) = \Psi[\omega(y), z_0] + \varphi(\infty), \quad (34)$$

где

$$\Psi[\omega(y), z_0] \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Подставив (34) в (32), получим

$$\begin{aligned} \Phi_y(y, z) = \varphi(\infty) \operatorname{erf} c \left( \frac{z - z_0}{2\sqrt{y}} \right) + \\ + \frac{z - z_0}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y d\xi \frac{\Psi[\omega(\xi), z_0]}{(y - \xi)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(z - z_0)^2}{4(y - \xi)} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\operatorname{erf} c(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Согласно сделанному предположению (17), имеем  $\omega_0\Lambda \sim \Lambda/L \gg 1$ , и поэтому без существенной ошибки в формуле (35) функция  $\Psi(y)$  определяется из выражения (33), т. е. вместо (27) получаем

$$\omega = \beta y^{1/5},$$

где

$$\beta = \left( \frac{75}{8} \frac{k[b''(0)]^2}{a^2} \right)^{1/5}.$$

Таким образом, масштаб функции  $\Phi_y(y, z_0)$  по координате  $y$  связан с масштабом  $\omega_0$  функции  $E(\omega, z_0)$  соотношением  $y_0 = (\omega_0/\beta)^5$ . На достаточно больших дистанциях, когда масштаб функции  $\Phi_y(y, z)$  по переменной  $y$  становится существенно больше начального масштаба  $y_0$ , второе слагаемое в (35) убывает с ростом  $z$  пропорционально  $z^{-2}$  и дает пренебрежимо малый вклад по сравнению с первым. Поэтому, при  $z \gg z_0$ , вместо (35) имеем асимптотическую формулу  $\Phi_y(y, z) \approx \varphi(\infty) \operatorname{erf} c \left( \frac{z}{2\sqrt{y}} \right)$ , т. е.

$$D(n, z) \approx \varphi(\infty) \frac{10}{\beta\sqrt{\pi}} \left( \frac{\beta}{v} \right)^{7/2} n^{-6} \exp \left[ -\left( \frac{\beta}{v} \right)^5 \left( \frac{z}{2n^5} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Соотношение (36) при условии одномодового возбуждения дает решение задачи о распределении средней интенсивности в рассматриваемом волноводе со статистически нерегулярной стенкой на больших

дистанциях. Проведем качественный анализ этого распределения. Согласно (13), в поперечном сечении волновода имеются три характерные точки, в которых значение средней интенсивности не изменяется вдоль волновода:

$$I(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=a \\ \epsilon/a & \text{при } x=a/2. \\ 2\epsilon/a & \text{при } x=0 \end{cases}$$

Можно показать, что ряд Фурье в (16) представляет функцию

$$j(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z) \cos 2\lambda_{0n}(x - a) = I(x, z) - \frac{\epsilon}{a},$$

нечетную по  $x$  относительно точки  $x=a/2$  и принимающую экстремальные значения на стенках волновода, при  $x=0$  и  $x=a$ . Эффективная ширина этой функции вблизи границ уменьшается с ростом дистанции:  $\Delta x(z) \sim 1/\Delta n(z)$ , где  $\Delta n(z)$  — эффективная ширина спектральных коэффициентов  $D_n(z)$  по оси  $n$ . Учитывая (36), для  $\Delta n$  имеем  $\Delta n \sim z^{1/5}$ .

Таким образом, на больших дистанциях средняя интенсивность распределена равномерно по сечению волновода, кроме узких зон, прилегающих к границам. С ростом дистанции размер этих зон уменьшается по степенному закону:  $\Delta x \sim z^{-1/5}$ . Величина средней интенсивности вблизи импедансной границы (при  $x=0$ ) в два раза превышает значение средней интенсивности в средней части волновода, равной полной энергии возбуждающего волновод поля, отнесенной к ширине волновода.

В заключение автор выражает благодарность И. М. Фуксу и В. Д. Фрейлихеру за полезные обсуждения, способствовавшие более глубокому пониманию процесса многократного рассеяния в волноводе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 6 (1978).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
3. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
4. А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 7, 1013 (1974).
5. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, Физматгиз, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
3 мая 1976 г.

#### THE DISTRIBUTION OF AVERAGE INTENSITY IN A CLOSED QUASI-OPTICAL WAVEGUIDE WITH A FLUCTUATING IMPEDANCE ON ONE WALL

A. A. Puzenko

The function of the mutual coherence of a field is considered in a waveguide with a fluctuating impedance on one wall. The calculation is carried out in the approximation of the parabolic equation by the method of local disturbances. It is shown that function components of the mutual coherence with different periods of longitudinal interference oscillations propagate independently along the waveguide. This fact permits to simplify essentially the general integral equation of the second kind to which the function of mutual field coherence in the waveguide satisfies. In the case of one-mode excitation at the small-scale inhomogeneities the distribution of the average intensity at large distances may be obtained.

At sufficiently large distances the average intensity is distributed uniformly over the waveguide section besides narrow zones adjacent to boundaries. With the distance increase the scale of these zones decreases according to the power law.

УДК 621.37

## О ПОСТРОЕНИИ СХЕМ КОМПЕНСАЦИИ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ, ВНОСИМЫХ КАБЕЛЬНОЙ ЛИНИЕЙ СВЯЗИ

*В. С. Беагон, Ю. Н. Романычев*

Рассмотрен достаточно общий подход к вопросу построения схем компенсации фазовых флуктуаций в разнесенных точках, использующих прохождение по кабелю сигналов во встречных направлениях. Выявлена возможность компенсации ошибок, вызванных дисперсией. Получены соотношения между частотами передаваемых сигналов и коэффициентами умножения этих частот. Приведен пример синтеза на основе полученных соотношений схемы компенсации фазовых флуктуаций, вносимых кабельной линией связи.

Для построения схем компенсации фазовых флуктуаций, вносимых кабельной линией связи, обычно используется неоднократная встречная передача сигналов по кабелю и объединение далее этих сигналов в различных комбинациях [1-9]. При этом реализуются следующие операции: смешивание сигналов с выделением суммарной и разностной частот, а также умножение и деление частоты сигналов с различными коэффициентами.

Частоты сигналов, полученных в результате этих операций, могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_{i+1, m} &= \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} a_{ijmk} \omega_{jk} + \sum_{N=1}^N b_{i+1, mN} \Omega_{0N}, \\ \omega_{j+1, k} &= \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} c_{jikm} \Omega_{im} + \sum_{n=1}^n d_{j+1, kn} \omega_{0n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты обозначения:  $\Omega_{im}$  и  $\omega_{jk}$  — частоты сигналов в двух разнесенных пунктах на различных этапах формирования,  $a, b, c, d$  — коэффициенты умножения (деления),  $i$  определяет номер последовательного прохождения сигнала через кабель в одну сторону, а  $j$  — аналогичный номер для встречного прохождения,  $k$  и  $m$  обозначают сигналы, одновременно идущие в одну сторону, а  $n$  и  $N$  относятся к сигналам, не передававшимся по кабелю.

Можно показать [9-12], что фазовый набег сигнала в коаксиальном кабеле, внутренний и внешний проводники которого однородны и выполнены из одного материала, на частотах, когда скин-эффект сильно выражен ( $f \geq 100$  кГц), определяется выражением

$$\varphi = \alpha \omega + \beta \sqrt{\omega}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{l \sqrt{\epsilon}}{c}, \quad \beta = \frac{l \sqrt{\epsilon}}{c} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(1/a) + (1/b)}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\rho}{\mu \mu_0}}$$



Здесь  $a$  — радиус внутреннего проводника,  $b$  — внутренний радиус внешнего проводника,  $l$  — длина кабеля,  $c$  — скорость света,  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика,  $\rho$  — удельное сопротивление проводников,  $\mu(\mu_0)$  — относительная магнитная проницаемость проводника (вакуума).

Используя (1) и (2), фазы сигналов на выходах схемы компенсации можно записать в виде

$$\begin{aligned}\psi_{i+1 m}(t) &= \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} a_{ijmk} [\alpha \omega_{jk} + \beta \sqrt{\omega_{jk}} + \varphi_{jk}(t - \tau)] + \sum_{N=1}^N b_{i+1 mN} \psi_N(t), \\ \varphi_{j+1 k}(t) &= \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} c_{jikm} [\alpha \Omega_{im} + \beta \sqrt{\Omega_{im}} + \psi_{im}(t - \tau)] + \sum_{n=1}^N d_{j+1 kn} \varphi_n(t),\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\psi_N(t)$ ,  $\varphi_n(t)$  — случайные фазы не передававшихся по кабелю сигналов (задающих генераторов),  $\varphi_{ik}(t - \tau)$ ,  $\psi_{im}(t - \tau)$  — фазы сигналов после прохождения через кабельную линию. Разностная фаза полученных сигналов описывается выражением

$$\begin{aligned}\varphi_p(t) = \psi_{i+1 m}(t) - \varphi_{j+1 k}(t) &= \alpha \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} a_{ijmk} \omega_{jk} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} c_{jikm} \Omega_{im} \right] + \beta \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} a_{ijmk} \sqrt{\omega_{jk}} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} c_{jikm} \sqrt{\Omega_{im}} \right] + \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} a_{ijmk} \varphi_{jk}(t - \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} c_{jikm} \psi_{im}(t - \tau) \right] + \left[ \sum_{N=1}^N b_{imN} \psi_N(t) - \sum_{n=1}^n d_{jkn} \varphi_n(t) \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Так как флуктуации результирующего сигнала зависят от случайных фаз используемых генераторов, требуется стабильность этих генераторов:

$$\sigma \left[ \sum_{i=1}^l \sum_{N=1}^N B_{imNj} \psi_N(t - j\tau) + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n D_{jkn} \varphi_n(t - i\tau) \right] \ll 2\pi, \quad (5)$$

где  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение.

Чтобы сигналы, полученные в результате построения схемы, не оказались независимыми, необходимо

$$\sum_{j=1}^i B_{imNj} = 0, \quad \sum_{i=1}^l D_{jkn} = 0 \quad (6)$$

для всех  $n$  и  $N$ .

Для того, чтобы линия связи не влияла на фазу результирующего сигнала, достаточно

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} A_{ijmk} \omega_{jk} - \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} C_{jikm} \Omega_{im} &= 0, \\ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} A_{ijmk} \sqrt{\omega_{jk}} - \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^{m_i} C_{jikm} \sqrt{\Omega_{im}} &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $A_{ijmk}$ ,  $C_{jikm}$ ,  $B_{imNj}$ ,  $D_{jkn\tau}$  — коэффициенты, получившиеся при подстановке (1) и (3) в (4).

В известных случаях исключаются только линейно зависящие от частоты фазовые флуктуации [1-9], но остается фаза, не исключаемая из-за дисперсии:

$$\varphi_{\text{ост}} = \beta \left[ \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{k_j} A_{ijmk} \sqrt{\omega_{jk}} - \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^{m_l} C_{jikm} \sqrt{\Omega_{lm}} \right]. \quad (8)$$

Для того, чтобы полностью компенсировать фазовые флуктуации, должны удовлетворяться оба уравнения (7).

Если из первого пункта во второй и обратно передавать только по одному сигналу, то имеем:

$$a_{1111} \omega_{11} - c_{1111} \Omega_{11} = 0, \quad (9)$$

$$a_{1111} \sqrt{\omega_{11}} - c_{1111} \sqrt{\Omega_{11}} = 0,$$

и, следовательно, частоты этих сигналов должны быть равны.

Рассмотрим простейший случай трехчастотной схемы. Пусть из одного пункта передаются два сигнала, а им навстречу из второго пункта — третий. Если частоты этих сигналов соотносятся как квадраты целых чисел, например  $\omega_{11} : \omega_{12} : \Omega_{11} = 1 : 4 : 9$ , то из (7) получим

$$a_{1111} + 4a_{1112} - 9c_{1111} = 0, \quad (10)$$

$$a_{1111} + 2a_{1112} - 3c_{1111} = 0,$$

отсюда  $a_{1111} = -3c_{1111}$ ,  $a_{1112} = 3c_{1111}$ . Из условия, что сигналы не должны быть независимы, следует:

$$d_{211} = -3c_{1111}, \quad d_{212} = c_{1111}, \quad b_{211} = c_{1111}.$$

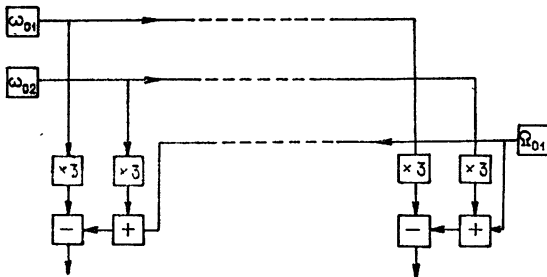


Рис. 1. Схема компенсации фазовых флуктуаций, вносимых кабельной линией, используя три задающих генератора:

$\omega_{01}$ ,  $\omega_{02}$ ,  $\Omega_{01}$  — задающие генераторы,  $\times n$  — умножитель на  $n$ ,  $- (+)$  — смеситель, вычитающий (суммирующий) частоты.

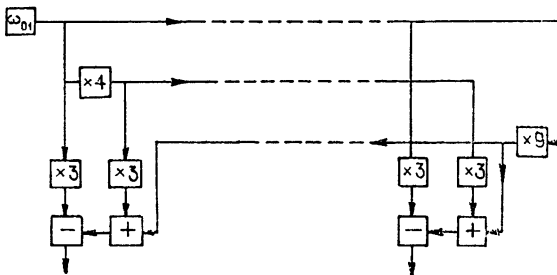


Рис. 2. Схема компенсации фазовых флуктуаций, вносимых кабельной линией, работающая от одного генератора.

Таким образом, использование уже трех разнесенных частот дает возможность построить множество схем, позволяющих компенсировать фазовые флуктуации, вносимые кабельной линией связи. На рис. 1 приведена схема с коэффициентами, полученными при решении (10).  $c_{1111}$  положен равным единице. Приведенную схему легко модифицировать так, чтобы она работала от одного генератора (рис. 2).

Авторы глубоко признательны Н. М. Цейтлину за внимание к работе и многочисленные советы, а также А. А. Романычеву и А. И. Чикину за весьма полезные замечания при обсуждении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Л. Кайдановский, Радиотехника и электроника, 11, № 10, 1741 (1969).
2. Б. М. Чихачев, Радиотехника и электроника, 11, № 11, 2072 (1966).
3. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, Б. М. Чихачев, УФН, 75, 3 (1961).
4. O. Elgloy, D. Morris and B. Rowson, Month. Not. Roy. Astron. Soc., 124, № 5, 395 (1962).
5. И. Д. Гонтарь, В. Ф. Шульга, Радиотехника и электроника, 12, № 1, 19 (1962).
6. В. А. Хорунжий, Радиотехника, Республиканский межведомственный технический сборник, вып. 9, 103 (1969)
7. Роджер, Костэйн, Лэйш, Лэндекер, Бауэрс, ТИИЭР, 61, № 9, 134 (1973).
8. A Proposal for a very lage array Radio Telescope, vol. 2, „Sistems Design“, NRAO; 1967.
9. Project „Cyclops“ prepared under Stan-Ford (NASA), Amer. Research Center, 1971.
10. Д. Ж. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
11. И. Е. Ефремов, Радиочастотные линии передачи, изд. Сов радио, М., 1964.
12. N. S. Naiman, IRS transaction on circuit theory, 9, № 2, 144 (1962)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
2 февраля 1977 г.

#### PLOTTING COMPENSATION DIAGRAMS OF PHASE FLUCTUATIONS DUE TO THE CABLE LINE OF COMMUNICATION

*V. S. Beagon, Yu. N. Romanychev*

A sufficiently general approach is considered to the problem of plotting compensation diagrams for phase fluctuations in spaced points using the cable transmission of signals in opposite directions. The possibility of errors compensation due to dispersion is found out. Relations are obtained between the frequencies of signals transmitted and coefficients of these frequency multiplications. An example of the synthesis is given on the basis of relations obtained of the compensation diagram for phase fluctuations due to the cable line of communication.

УДК 538.576.2

## О ПОЛЕ НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

*А. Ф. Беленов, И. Г. Кондратьев*

Анализируется структура поля излучения направленного излучателя, описываемого заданным распределением токов на плоской апертуре, в однородной анизотропной среде при наличии особых каустических направлений. Основное внимание сосредоточено на исследовании поля в указанных особых направлениях. Сформулированы условия и рецепты использования таких важных и привычных (в однородных изотропных средах) характеристик излучателя, как диаграмма направленности и коэффициент направленного действия для отыскания полей излучения в усложненных анизотропных средах.

Как известно (см., например, [1<sup>–3</sup>]), в некоторых анизотропных (в частности, гиротропных) средах при определенных значениях параметров существуют особые — каустические и резонансные — направления, характеризующиеся фокусирующими свойствами. Поле точечного электрического диполя в гиротропной плазме при наличии указанных особых направлений подробно проанализировано в [1]. Аналогичное рассмотрение для произвольного распределения электрических токов проведено в [4] — получены общие (весьма громоздкие) выражения для поля излучения, на основании которых оценивается характер его убывания с удалением от источника в различных особых направлениях. Свойства квазиоптических электромагнитных волновых пучков, распространяющихся в анизотропных средах в особых каустических направлениях, всесторонне изучены в [2, 5].

Настоящая работа посвящена исследованию структуры поля излучения направленного излучателя, описываемого заданным распределением токов на плоской апертуре, в однородной анизотропной среде при наличии особых каустических направлений\*. Основное внимание при этом сосредоточено на обсуждении возможности использования таких важных и привычных характеристик (вакуумных) излучателя, как диаграмма направленности и коэффициент направленного действия (КНД) для отыскания полей излучения в анизотропной среде.

1. Отвечающие наличию особых направлений поверхности волновых векторов приведены в [2] для гиротропной плазменной среды (рис. 1а) и двухосного кристалла (рис. 1б). Там же (см. рис. 2) указаны области значений параметров плазмы, при которых соответствующие кривые реализуются. Для определенности мы в дальнейшем будем иметь в виду первую из кривых рис. 1а, изображенную отдельно на рис. 3а вместе с поверхностью лучевых векторов (рис. 3б). Этот рисунок и воспроизведен здесь на рис. 1\*\*.

\* Случай сред с резонансными особыми направлениями требует отдельного рассмотрения, выходящего, вообще говоря, за рамки принятого здесь описания (например, требует учета пространственной дисперсии) — см. [4, 6].

\*\* Оговоримся сразу же, что соответствующие поверхности волновых и лучевых векторов обыкновенной волны предполагаются неособыми. Возможна даже такая ситуация (в некоторой области значений параметров плазмы — см. [1]), когда необыкновенная волна описывается кривыми рис. 1, а обыкновенная является просто нераспространяющейся.

правления соответствуют точкам  $T$  и  $C$  на поверхностях лучевых и волновых векторов. Коническая поверхность, образованная  $V^{(T)}$  (с углом раствора  $\vartheta^{(T)}$ ), является границей освещенной области или, другими словами, каустической поверхностью для двух (1 и 2) из трех волн, показанных на рис. 1. Волны с волновыми векторами, попадающими в точки  $C$  поверхности волновых векторов, образуют конус внешней конической рефракции и формируют (в направлении  $V^{(C)}$ ), по существу, осевую каустику [7]. С этими обстоятельствами и связана классификация указанных особых направлений как каустических.

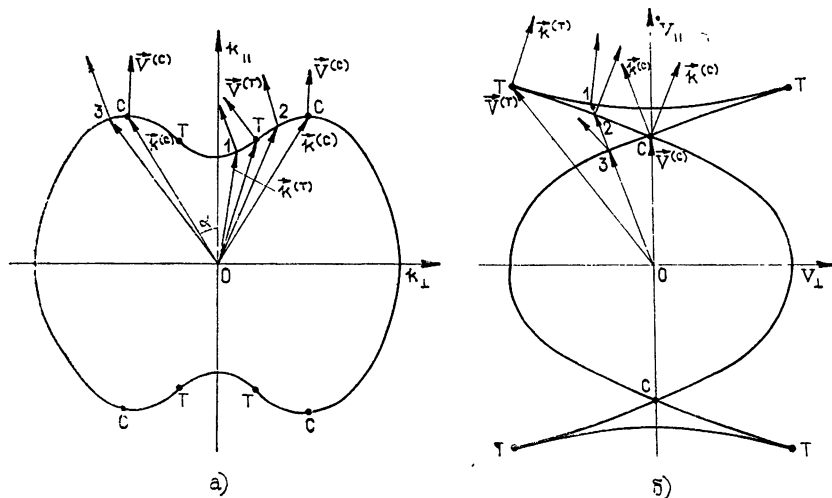


Рис. 1.

Для описания поля излучения рассматриваемого направленного излучателя мы воспользуемся декартовой системой координат  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ , связанной с излучателем (ось  $\tilde{z}$  перпендикулярна апертуре), и цилиндрической системой координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , связанной с внешним магнитным полем  $H_0$  (ось  $z$  параллельна  $H_0$ ). В системе координат  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  поле излучения может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \sum_{\gamma=0, e} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{\gamma}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}}) \tilde{H}_{\gamma}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}}) \times \\ & \times \exp[-ik_{\tilde{x}} \tilde{x} - ik_{\tilde{y}} \tilde{y} - ik_{\tilde{z}}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}}) \tilde{z}] dk_{\tilde{x}} dk_{\tilde{y}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс  $\gamma$  отмечает тип волны (0 — обыкновенная, e — необыкновенная), вектор  $\tilde{h}_{\gamma}$  описывает поляризацию плоской волны с составляющими волнового вектора  $k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}}, k_{\tilde{z}}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}})$ , функция  $\tilde{H}_{\gamma}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}})$  определяется заданным распределением токов  $\mathbf{j}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{c}{2\pi} [\mathbf{z}^0 \mathbf{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0)]^*$ .

Переходя в (1) к цилиндрическим координатам, будем иметь:

\* Отыскание  $\tilde{H}_{\gamma}(k_{\tilde{x}}, k_{\tilde{y}})$  по заданному распределению токов в общем случае представляет из себя отдельную, довольно непростую задачу. Используемое далее квази скалярное приближение существенно упрощает решение этой задачи.

$$H(\rho, \varphi, z) = \sum_{\gamma=0, e} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h_{\gamma}(k_{\rho}, \psi) k_{\rho} H_{\gamma}(k_{\rho}, \psi) \times \\ \times \exp[-ik_{\rho} \rho \cos(\psi - \varphi) - ik_{z} z] d\psi dk_{\rho}, \quad (2)$$

Зависимость  $k_{ez}(k_{\rho})$  (по  $\psi$  имеет место симметрия) представлена как раз на рис. 1 ( $k_{ez} \equiv k_{\parallel}$ ,  $k_{\rho} \equiv k_{\perp}$ ). Наряду с цилиндрическими  $\rho, \varphi, z$  мы будем далее использовать сферические  $r, \vartheta, \varphi$  координаты —  $\rho = r \sin \vartheta$ ,  $z = r \cos \vartheta$ ,  $\varphi \equiv \varphi$ .

При достаточно больших  $r$  интеграл в (2) может быть вычислен методом стационарной фазы. Положение стационарных точек  $\psi^*, k$  определяется соотношениями

$$\psi^* = \varphi, \quad [dk_{z}(k_{\rho})/dk_{\rho}]_{k_{\rho}=k_{\rho}^*} = -\operatorname{tg} \vartheta. \quad (3)$$

Отсюда в области значений  $\vartheta > \vartheta^{(T)}$  имеются две стационарные точки  $k_{\rho}^*$  — по одной для волн каждого типа, тогда как в области  $\vartheta < \vartheta^{(T)}$  имеются четыре такие точки — три из них для необыкновенных волн. В соответствии с методом стационарной фазы поле излучения представляется в виде суперпозиций полей, отвечающих каждой из стационарных точек  $k_{\rho m}^*$  в отдельности:

$$H(r, \vartheta, \varphi) = \sum_m \frac{2\pi \sqrt{k_{\rho m}^*}}{r \sqrt{\sin \vartheta \cos \vartheta} [d^2 k_z / dk_{\rho}^2]_{k_{\rho} = k_{\rho m}^*}} \times \\ \times h(k_{\rho m}^*, \varphi) H(k_{\rho m}^*, \varphi) \exp[-ik_{\rho m}^* r \sin \vartheta - ik_z(k_{\rho m}^*) r \cos \vartheta]. \quad (4)$$

Формула (4), как непосредственно видно, становится несправедливой в окрестностях указанных особых направлений, поскольку в первом из этих направлений ( $T$ ) для двух из четырех стационарных точек (1 и 2 на рис. 1)  $d^2 k_z / dk_{\rho}^2 \rightarrow 0$ , а во втором ( $C$ ) — для стационарной точки  $k_{\rho}^* = k_{\rho}^{(c)} \neq 0$ ,  $\vartheta \rightarrow 0^*$ .

В окрестности особого направления с  $d^2 k_z / dk_{\rho}^2 = 0$  соответствующая часть поля излучения должна вычисляться улучшенным методом стационарной фазы, справедливым для случая двух близких стационарных точек (см. [8]); в результате получим

$$H_{12}(r, \vartheta, \varphi) \approx \exp[ir \xi(\vartheta)] \frac{\sqrt{2\pi}}{r^{5/6}} \zeta^{1/4} \left\{ \left[ \frac{L(k_{\rho_1}^*)}{|k_z''(k_{\rho_1}^*)|^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{L(k_{\rho_2}^*)}{|k_z''(k_{\rho_2}^*)|^{1/2}} \right] \mathcal{V}(-r^{2/3} \zeta) + \frac{i}{r^{1/3} \zeta^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{L(k_{\rho_1}^*)}{|k_z''(k_{\rho_1}^*)|^{1/2}} - \frac{L(k_{\rho_2}^*)}{|k_z''(k_{\rho_2}^*)|^{1/2}} \right] \mathcal{V}'(-r^{2/3} \zeta) \right\}, \quad (5)$$

\* Вклад в поле излучения в направлении  $\vartheta = 0$ , отвечающий стационарной точке  $k_{\rho}^* = 0$ , правильно описывается (4), так как при  $\vartheta \rightarrow 0$   $k_{\rho}^*$  также стремится к нулю,  $k_{\rho}^* \approx -\operatorname{tg} \vartheta \left[ \frac{d^2 k_z}{dk_{\rho}^2} \right]_{k_{\rho}=0}^{-1}$  и особенность по  $\vartheta$  пропадает. Аналогично обстоит дело и в направлении  $\vartheta = \pi/2$ , при  $\vartheta \rightarrow \pi/2$   $d^2 k_z / dk_{\rho}^2 \approx \operatorname{tg}^3 \vartheta [d^2 k_{\rho} / dk_z^2]_{k_z=0}$ .

Здесь  $v(-r^{2/3}\zeta)$  — функция Эйри в нормировке Фока [9], штрих означает дифференцирование по аргументу;  $L(k_p) = \frac{\sqrt{2\pi}k_p}{\sqrt{-i\sin\vartheta}} h_e(k_p, \varphi) \times$   
 $\times H_e(k_p, \varphi), \quad \xi(\vartheta) = \frac{1}{2} [f(k_{p_1}^*, \vartheta) + f(k_{p_2}^*, \vartheta)],$

$\zeta = \left\{ \frac{3}{4} [f(k_{p_1}^*, \vartheta) - f(k_{p_2}^*, \vartheta)] \right\}^{2/3}$ , где, в свою очередь,  $f(k_p, \vartheta) =$   
 $= -[k_z(k_p) \cos \vartheta + k_p \sin \vartheta], \quad k_z''(k_p^*) = [d^2 k_z / dk_p^2]_{k_p = k_p^*}$ . Полученное

выражение дает равномерное асимптотическое представление поля излучения в том смысле, что при удалении от особого направления —  $r^{2/3}\zeta \gg 1$  — оно допускает переход к «неособой» формуле (4).

Непосредственно вблизи особого направления —  $|r^{2/3}\zeta| \leq 1$  — выражение (5) упрощается и приводится к виду

$$H_{12}(r, \vartheta, \varphi) \approx \exp \left[ i f(k_{p_T}^*, \vartheta) \frac{2\pi}{r^{5/6}} 2^{2/3} \left[ \frac{L(k_p^{(T)})}{|k_z'(k_p^{(T)})|^{1/3}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v(-r^{2/3}\tilde{\zeta}) - \frac{iL'(k_p^{(T)})}{2^{1/3} r^{1/3} |k_z''(k_p^{(T)})|^{2/3}} v'(-r^{2/3}\tilde{\zeta}) \right] \right], \quad (6)$$

где

$$\tilde{\zeta} = -2^{-4/3} [k_z'''(k_p^{(T)})]^{-1/3} [k_z'(k_p^{(T)}) + \operatorname{tg} \vartheta].$$

Второй член в квадратной скобке вносит лишь малую поправку и может вообще говоря, не учитываться. Формула (6) дает уже локальное (неравномерное) асимптотическое представление, из которого четко видно, что соответствующая часть поля излучения убывает с расстоянием, как  $r^{-5/6}$ , в отличие от обычного закона  $r^{-1}$ .

В случае конической рефракции интеграл в (2) даже при больших  $r$  уже не может, очевидно, вычисляться методом стационарной фазы по углу  $\varphi$ . Поэтому соответствующая часть поля излучения запишется следующим образом:

$$H^{(c)}(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\pi i}{r \cos \vartheta k_z'(k_p^*)}} \hat{L}(k_p^*) \exp[-ik_z(k_p^*)r \cos \vartheta], \quad (7)$$

где

$$\hat{L}(k_p) \equiv \hat{L}(k_p; r, \vartheta, \varphi) = k_p \int_0^{2\pi} h_e(k_p, \psi) H_e(k_p, \psi) \times \\ \times \exp[-ik_p r \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi)] d\psi$$

( $L(k_p)$  получается — с точностью до множителя  $r^{1/2}$  — из  $\hat{L}(k_p)$  в результате взятия интеграла методом стационарной фазы),  $k_p^*$  близко к  $k_p^{(c)}$ . Согласно (7) поле излучения убывает с расстоянием пропорционально  $r^{-1/2}$ , в отличие от обычного  $r^{-1}$ .

2. Предположим теперь, что ось  $\tilde{z}$  (нормаль к апертуре) совпадает с одним из стационарных значений волнового вектора  $k_{im}^* \equiv k^{(0)}$ , а распределение токов на апертуре задается в виде

$$j(\tilde{x}, \tilde{y}) = j(\tilde{x}, \tilde{y}) [\tilde{z}^0 h_\gamma(k^{(0)})], \\ H(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = \frac{2\pi}{c} j(\tilde{x}, \tilde{y}) h_\gamma(k^{(0)}),$$

Будем рассматривать далее направленный излучатель с достаточно узким угловым спектром вблизи  $k^{(0)}$ , в пределах которого поляризацию можно считать фиксированной, т. е. принять, что  $h_{\gamma}(k_{\gamma}) \approx h_{\gamma}(k^{(0)})$ . Применительно к особым направлениям это означает, что в формуле (5) следует положить  $h_e(k_{\rho_1}^*, \varphi) = h_e(k_{\rho_2}^*, \varphi) = h_e(k_{\rho}^{(T)}, \varphi^{(T)})$ , а в формуле (7) —  $h_e(k_{\rho}, \psi) = h_e(k_{\rho}^{(c)}, 0)$ . Такое приближение может быть названо квазискалярным.

В квазискалярном приближении, как уже отмечалось, задача отыскания углового спектра  $H_{\gamma}(k_x, k_y)$  становится тривиальной и не отличается от «вакуумной». Это последнее обстоятельство позволяет (путем соответствующего пересчета) выразить  $H_{\gamma}(k_{\rho}^*, \varphi)$  через «вакуумные» характеристики излучателя — диаграмму направленности по мощности  $F(\vartheta, \varphi)$  и КНД  $G$ :

$$H_{\gamma}(k_{\rho}, \varphi) = G^{1/2} [F(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})]^{1/2} \frac{P^{1/2}}{\sqrt{4\pi}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi c k}} \frac{\cos(\vartheta^{(0)} - \theta^{(0)})}{\cos \tilde{\vartheta} \cos \vartheta^{(0)}}, \quad (8)$$

$\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$  — угловые сферические координаты, отвечающие декартовой системе  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ :

$$\tilde{\vartheta} = \arcsin \frac{\left\{ \left[ \frac{k_{\rho} \cos \varphi - k^{(0)} \sin \theta^{(0)}}{\cos \vartheta^{(0)}} \cos(\theta^{(0)} - \vartheta^{(0)}) \right]^2 + k_{\rho}^2 \sin^2 \varphi \right\}^{1/2}}{k_0},$$

$$\tilde{\varphi} = \arcsin \frac{k_{\rho} \sin \varphi}{\left\{ \left[ \frac{k_{\rho} \cos \varphi - k^{(0)} \sin \theta^{(0)}}{\cos \vartheta^{(0)}} \cos(\theta^{(0)} - \vartheta^{(0)}) \right]^2 + k_{\rho}^2 \sin^2 \varphi \right\}^{1/2}}. \quad (8a)$$

Здесь  $P$  — полная мощность излучателя,  $\vartheta^{(0)} = \arctg[-dk_z/dk_{\rho}]_{k_{\rho}=k_{\rho}^{(0)}}$ ,  $\theta^{(0)} = \arcsin(k_{\rho}^{(0)}/k^{(0)})$ ,  $k_0$  — волновое число в вакууме. Всюду ниже мы будем писать выражение лишь для амплитуды соответствующего поля излучения  $H(r, \vartheta, \varphi)$  (значок  $\gamma$  опускаем).

С учетом (8) амплитуда поля излучения в обычных (неособых) направлениях может быть переписана в виде

$$H(r, \vartheta, \varphi) = G^{1/2} [F(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})]^{1/2} \times$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{P}{4\pi}} \frac{\cos(\theta^{(0)} - \vartheta^{(0)}) 2\sqrt{2}k_{\rho}^*}{k_0 \cos \tilde{\vartheta} \cos \vartheta^{(0)} \sqrt{\sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\vartheta}} \sqrt{\pi c |k_z''(k_{\rho}^*)|}} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{r} \exp[-ik_{\rho}^* r \sin \vartheta - ik_z(k_{\rho}^*) r \cos \vartheta].$$

Член в квадратной скобке описывает амплитуду поля излучения  $A_0(\vartheta)$  (за вычетом множителя  $r^{-1}$ ) гипотетического точечного излучателя, который в данном направлении возбуждает волну соответствующего типа с мощностью излучения  $P/4\pi$  в единицу телесного угла, отнесенного к вакууму (т. е. в угловых координатах  $\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$ ). Эта амплитуда, как нетрудно непосредственно убедиться, может быть рассчитана обычным методом геометрической оптики. Входящие в диаграмму направленности  $F$  и амплитуду  $A$  углы  $\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}$  представляются согласно (8a) в виде





$$\hat{L}(k_p) = G^{1/2} \sqrt{\frac{P}{4\pi}} \frac{\sqrt{2} k_p \cos \theta^{(c)}}{\pi \sqrt{\pi c} k_0 \cos \tilde{\vartheta}} \int_0^{2\pi} [F(\tilde{\vartheta}, \tilde{\psi})]^{1/2} \times \exp[-ik_p r \sin \tilde{\vartheta} \cos(\psi - \varphi)] d\psi \quad (11)$$

(поляризационный множитель опущен). Если, скажем, диаграмма направленности представляется в виде  $F[\tilde{\vartheta}(\vartheta, \psi), \tilde{\psi}(\vartheta, \psi)] = F_1(\vartheta)F_2(\psi)$  (что резко ограничивает класс излучателей), причем область, существенная для интегрирования в (11), определяется функцией  $F_2(\psi)$ , то для поля излучения  $H^{(c)}(r, \vartheta, \varphi)$  имеем

$$H^{(c)}(r, \vartheta, \varphi) = G^{1/2} [F_1(\vartheta)]^{1/2} \int_0^{2\pi} [F_2(\psi)]^{1/2} d\psi \times \sqrt{\frac{P}{4\pi}} \frac{2 \cos \theta^{(c)} k_p^*}{\pi \sqrt{c} k_0 \cos \tilde{\vartheta} \sqrt{\cos \tilde{\vartheta} |k_z''(k_p^*)|}} \frac{1}{r^{1/2}} \times \exp\left[-ik_p^* r \sin \tilde{\vartheta} - ik_z(k_p^*) r \cos \tilde{\vartheta} + i\frac{\pi}{4}\right]. \quad (12)$$

Выражение, содержащееся в квадратной скобке, дает амплитуду поля излучения, отвечающего мощности  $P/4\pi$ , излучаемой в единицу телесного угла в данном направлении (отнесенном, конечно, к вакууму), в чем можно непосредственно убедиться, если рассчитать эту амплитуду геометрикооптическим методом.

3. В качестве конкретного примера рассмотрим поле излучения вблизи особого направления с  $d^2 k_z / dk_p^2 = 0$ , создаваемое двумерным (для простоты) направленным излучателем (ось  $\tilde{z} \parallel k^{(T)}$ ) с распределением тока на апертуре вида

$$j(\tilde{x}) = j_0 \exp\left(-\frac{\cos^2 \chi}{4a^2} \tilde{x}^2\right), \quad (13)$$

где  $\chi = \vartheta^{(T)} - \theta^{(T)}$  (от координаты  $\tilde{y}$  ничего не зависит). Коэффициент направленного действия, диаграмма направленности и полная (на единицу длины) мощность такого излучателя в вакууме равны

$$G = \frac{\sqrt{2\pi} k_0 a}{\cos \chi}, \quad F(\tilde{\vartheta}) = \cos^2 \tilde{\vartheta} \exp\left[-\frac{2(k_0 \sin \tilde{\vartheta})^2 a^2}{\cos^2 \chi}\right], \quad (14)$$

$$P = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi a}{c \cos \chi} j_0^2.$$

Для получения явной зависимости от координат воспользуемся следующей аппроксимацией кривой волновых векторов:

$$k_z(k_p) \approx k_z(k_p^{(T)}) + p_1(k_p - k_p^{(T)}) + p_3(k_p - k_p^{(T)})^3 \quad (15)$$

$$\left(p_1 = [dk_z(k_p)/dk_p]_{k_p=k_p^{(T)}}, \quad p_3 = [d^3 k_z(k_p)/dk_p^3]_{k_p=k_p^{(T)}}\right),$$

которая справедлива, разумеется, лишь в некоторой малоугловой области — так называемое малоугловое приближение,

Переписывая приведенные выше общие формулы применительно к двумерному случаю с учетом (14), (15), находим

$$H_{12}(r, \vartheta) \approx G^{1/2} \left[ \frac{F^{1/2}(\tilde{\vartheta}_1)}{\cos \tilde{\vartheta}_1} + \frac{F^{1/2}(\tilde{\vartheta}_2)}{\cos \tilde{\vartheta}_2} \right] \frac{P^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos \chi}{\cos \vartheta^{(T)}} \times \\ \times \left( \frac{2\pi}{ck_0} \right)^{1/2} \left( \frac{2}{p_3 r \cos \vartheta} \right)^{1/2} v \left[ \left( \frac{2}{p_3 r \cos \vartheta} \right)^{1/3} r (\sin \vartheta + p_1 \cos \vartheta) \right], \quad (16)$$

где

$$k_{\rho_{1,2}} = k_{\rho}^{(T)} \pm \sqrt{-\frac{p_1 + \operatorname{tg} \vartheta}{p_3}}, \quad \tilde{\vartheta}_{1,2} = \tilde{\vartheta}(k_{\rho_{1,2}}) \quad (\text{см. (8a)}).$$

В декартовых координатах  $x', z'$ , связанных с групповой скоростью  $V^{(T)}$  — ось  $z$  параллельна  $V^{(T)}$  —, формула (16) принимает вид

$$H_{12}(x, z) \approx \frac{2\pi}{c} j_0 \left( \frac{2}{p_3 z'} \right)^{1/3} 2av \{ (2/p_3 z')^{1/3} x' \} \times \\ \times \exp \left( 2 \frac{a^2}{p_3 z'} x' \right) \exp \left( -ik_{x'}^{(T)} x - ik_{z'}^{(T)} z' \right) \quad (17)$$

(производная  $p_3$  отвечает здесь новой  $x', z'$  системе координат). Как показано в [2], соответствующий (17) интеграл вычисляется строго (а не только методом стационарной фазы) и при любых  $z'$  дает

$$H_{12}(x', z') \approx \frac{2\pi}{c} j_0 \left( \frac{2}{p_3 z'} \right)^{1/3} 2av \{ (2/p_3 z')^{1/3} [x' + 2a^4/p_3 z'] \} \times \\ \times \exp \{ 2(a^2/p_3 z') [x' + 4a^4/3 p_3 z'] \} \exp \left( -ik_{x'}^{(T)} x - ik_{z'}^{(T)} z' \right). \quad (18)$$

Из сравнения (18) и (17) следует, что выражение (17) правильно описывает поле, лишь начиная с некоторых расстояний от излучателя, удовлетворяющих условию

$$(p_3 z')^{1/3} \gg a, \quad (19)$$

которое можно рассматривать как обобщение понятия зоны Фраунгофера на рассматриваемое особое направление.

Заметим, что условие (19) не отличается по существу от аналогичного условия, определяющего зону Фраунгофера в окрестности простой каустики в плавно неоднородной среде (см. [11]), поскольку величина  $(p_3 z')^{1/3}$  практически совпадает, как непосредственно видно из (17), с размером прикаустической области (расстояние от каустики до первого максимума функции Эйри):

$$\Lambda = 2^{-1/3} (p_3 z')^{1/3}. \quad (20)$$

Таким образом, вакуумные характеристики излучателя КНД и диаграмма направленности действительно могут быть использованы для отыскания поля излучения в анизотропных средах при наличии каустических особых направлений; сформулированы рецепты использования и условия применимости этих характеристик. Рассмотренные здесь особые направления привлекают внимание, как отмечалось еще в [5], в частности, в связи с возможностью более эффективной (энергетически) передачи сигналов через гиротропную плазменную среду. Однако в реальных условиях (например, условиях земной ионосферы) ситуация заметно усложняется тем, что, как правило, приходится иметь дело с неоднородной плазмой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Arbel and L. B. Felsen, Electromagnetic theory and Antennas, Proc. Symp. held at Copenhagen, Pergamon Press, 1963, p. 421.
2. Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 9, 1339 (1969).
3. S. R. Seshadri, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-21, № 2, 248 (1973).
4. В. Ф. Алексин, В. Н. Пахомов, Е. Н. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 8, № 6, 1135 (1965).
5. Ю. А. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 4, 592 (1972).
6. А. А. Андронов, Ю. В. Чугунов, УФН, 116, вып. 1, 79 (1975).
7. J. B. Keller, J. Appl. Phys., 28, 426 (1957).
8. М. В. Федорюк, ЖВММФ, 4, № 4, 671 (1964).
9. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
10. Ю. А. Кравцов, Э. И. Фейзулин, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 6, 866 (1969).
11. И. Г. Кондратьев, Г. В. Пермитин, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 12, 1794 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический  
институт

Поступила в редакцию  
16 февраля 1977 г.

## THE FIELD OF THE DIRECTED RADIATOR IN ANISOTROPIC MEDIA

*A. F. Belenov, I. G. Kondrat'ev*

The structure of the radiating field of the directed radiator described by the given current distribution on the plane aperture in a homogeneous anisotropic medium in the presence of peculiar caustic directions is analysed. More emphasis is put on the investigation of the field in the given peculiar directions. Conditions and ways of the use are formulated of such important and usual (in homogeneous isotropic media) characteristics of the radiator as the directivity pattern and the coefficient of the directed action to search the radiation fields in complicated anisotropic media.

---

УДК 535.31

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРА ИСТОЧНИКА ПО ДИФРАКЦИОННОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А. А. Рубенок

Для получения оценки протяженности финитного входа по отклику линзой системы, измеренному с аддитивным шумом, предлагается использовать метод чебышевской аппроксимации. Значение протяженности, обеспечивающее минимум ошибки аппроксимации, считается истинным. Дано подробное описание метода и результатов его использования для анализа трех типов входных воздействий.

При исследовании малых по протяженности оптических источников на выходе прибора вместо истинного распределения освещенности регистрируется искаженное дифракцией изображение. Принято считать, что, если выполнены условия разрешения по Рэлею, возможно восстановление входа по выходу, в частности, определение размера входа. В [1] показано, что восстановление финитных объектов возможно и при отходе от условий Рэлея. В [5] доказана принципиальная возможность оценки размера входа без предварительного восстановления его формы. Метод доказательства базируется на оптимизации отношения правдоподобия и пригоден только для узкого класса случайных входов, для которых функция распределения освещенности разлагается в конечный ряд с вещественными гауссовыми коэффициентами. Мы рассмотрим более простой, наглядный и универсальный способ, основанный на методах чебышевского приближения и предназначенный для реализации на ЭВМ.

Предполагается, что входное воздействие  $f(x)$  тождественно обращается в нуль при  $|x| \geq \alpha$ . В результате измерения становятся известными значения спектра  $\tilde{f}(\omega)$  функции  $f(x)$  на заданном интервале  $[\Omega_1, \Omega_2]$  — «полосе пропускания» прибора — с аддитивной погрешностью  $n(\omega)$ . В условиях «сверхразрешения», когда по критерию Рэлея восстановление невозможно, параметр  $c = \alpha(\Omega_2 - \Omega_1)$  много меньше единицы. Представим неизвестную функцию суммой Фурье:

$$f(x) = \sum_{-N}^N \alpha_k e^{ik\pi x/\alpha} \quad (|x| \leq \alpha), \quad (1)$$

ее спектр определяется соотношением

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \frac{\sin \alpha(\omega - k\pi/\alpha)}{\alpha(\omega - k\pi/\alpha)}. \quad (2)$$

Необходимо по измеренным значениям  $\tilde{f}(\omega) + n(\omega)$  на интервале  $(\Omega_1, \Omega_2)$  определить величину  $\alpha$ . Предположим, что интервал  $(\Omega_1, \Omega_2)$  расположен вблизи  $\omega = 0$ . Из (2) следует, что значения  $\tilde{f}(\omega)$  в этом интервале «в основном» определяются коэффициентами  $\alpha_k$  при

небольших значениях  $k$  и оценку  $\alpha$  можно получить, предполагая, что число гармоник  $N$  объекта не слишком велико. Дальнейшая процедура поиска оценки предполагает аппроксимацию измеренной зависимости  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega) = \tilde{f}(\omega) + n(\omega)$  функциями вида (2) при заданном  $N$  и различных  $\alpha$ . То значение  $\alpha$ , при котором ошибка аппроксимации минимальна, принимается за оценку неизвестного размера области финитности входа.

Основной задачей является проверка возможности оценки  $\alpha$  с помощью указанной процедуры. В связи с этим допустимы некоторые упрощающие предположения. Будем считать, что положение «центра» объекта известно и совпадает с  $x=0$ . Вообще говоря, комплексная функция  $f(x)$  имеет вещественный спектр  $\tilde{f}(\omega)$ , следовательно, величины  $\alpha_k$  также вещественны. Кроме того, считается известным значение  $\tilde{f}(0) = \alpha_0$ ; не нарушая общности, примем  $\tilde{f}(0) = 1$ .

При конечном  $N$  функция (2) представляется взвешенным полиномом степени  $2N$  [2]:

$$\tilde{f}(\omega) = P_{2N}(\omega) \Psi_N(\omega, \alpha), \quad (3)$$

где

$$\Psi_N(\omega, \alpha) = \frac{\sin \omega \alpha}{\omega \alpha} \left[ \prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{\omega^2 \alpha^2}{\pi^2 n^2} \right) \right]^{-1} \quad (4)$$

— весовая функция, полностью определяемая значениями  $\alpha$  и  $N$ . Представление (3) дает возможность при аппроксимации  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega)$  использовать алгоритм чебышевского приближения [3, 4].

На отрезке  $(\Omega_1, \Omega_2)$  выбирается  $M$  точек  $\omega_l = l_\Delta$ , в которых задаются значения  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega_l) = \tilde{f}(\omega_l) + n(\omega_l)$ , причем число  $M$  не меньше  $2N + 2$ . Считается заранее заданным тот интервал  $A_2 \leq \alpha \leq A_1$ , в котором следует искать значение неизвестного размера  $\alpha$ . Для каждого значения  $a = nA$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) из этого интервала строится полином степени  $2N$ , наименее отличающийся с весом  $\Psi_N(\omega, a)$  от  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega_l)$  и находится ошибка такой аппроксимации  $\delta(a)$ . Значение  $a = \hat{\alpha}$ , при котором ошибка  $\delta(a)$  минимальна, считается оценкой размера  $\alpha$  области протяженности входа.

Полином  $P_{2N}(\omega)$  находится с помощью итерационной процедуры. Предварительно выбирается  $2N + 2$  точек  $\omega_j$ , где  $j$  — целая часть  $\frac{Mk}{2N+2}$ ,  $k=1, 2, \dots, 2N+2$ . Дальнейшие расчеты повторяются циклически.

По значениям  $\omega_j$  и  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega_j)$  с помощью известной процедуры [3] строится взвешенный полином Чебышева, наименее уклоняющийся в  $2N + 2$  точках  $\omega_j$  от  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega_j)$  и находятся значения погрешности  $\varepsilon(\omega) = \tilde{f}_\varepsilon(\omega) - P_{2N}(\omega) \Psi_N(\omega, a)$  во всех  $M$  точках  $\omega_l$ .

Пусть  $I$  — число перемен знака  $\varepsilon(\omega)$  на интервале  $(\Omega_1, \Omega_2)$ , а  $\omega_j$  — точка максимума  $|\varepsilon(\omega_j)|$  для  $j$ -го интервала знакопостоянства  $\varepsilon(\omega)$ . По теореме Чебышева  $I \geq 2N + 2$ , а для перехода к следующему циклу вычислений необходимо, чтобы  $I = 2N + 2$ . Поэтому при  $I > 2N + 3$  находится интервал знакопостоянства с  $j=j_0$ , для которого величина  $|\varepsilon(\omega_j)|$  минимальна. Из исходного набора  $\omega_j$  исключается точка с  $j = j_0$  и та из двух соседних, у которой величина  $|\varepsilon(\omega_j)|$  мень-

ше. В результате число точек уменьшается на две. Если же  $I = 2N + 3$ , то из набора  $\omega_j$  исключается точка, для которой величина  $|\varepsilon(\omega_j)|$  минимальна. Процедура уменьшения числа точек  $\omega_j$  предполагает сохранение двух интервалов, примыкающих к краям отрезка  $(\Omega_1, \Omega_2)$ . Полученный набор  $2N + 2$  точек  $\omega_j$  используется для построения полинома  $P_{2N}(\omega)$  следующего приближения.

Цикл вычислений заканчивается при выполнении одного из трех условий: 1) максимальное значение  $|\varepsilon(\omega_j)|$  меньше заданного числа  $E$ ; 2) в двух соседних циклах все точки  $\omega_j$  совпали; 3) число совершенных циклов достигло заданного значения  $K$ . Алгоритм реализован на языке АЛГОЛ-60 для ЭВМ БЭСМ-6.

Для оценки эффективности алгоритма рассмотрена задача определения размера интервала финитности входных воздействий, показанных на рис. 1. К каждой из спектральных компонент этих функций в  $M$  точках интервала  $(\Omega_1, \Omega_2)$  прибавлялась реализация псевдослучайной величины с нулевым средним и дисперсией  $D$ , распределенной либо равномерно, либо по нормальному закону. Полученные значения  $\tilde{f}_\varepsilon(\omega)$  использовались для вычисления оценки  $\alpha$  протяженности входа.

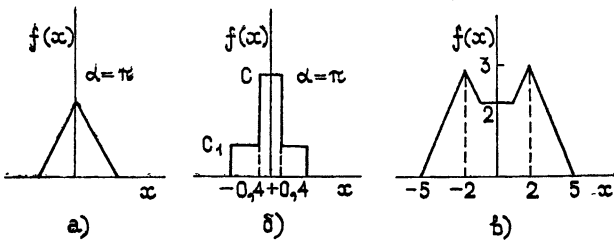


Рис. 1.

Рассмотрим результаты моделирования. На рис. 2 показаны зависимости ошибки  $\delta(a) = \max |\varepsilon(\omega_j)|$  от величины  $a$  для объекта б) в случае, когда вход аппроксимируется тремя гармониками ( $N = 1$ ) при  $M = 10$ ,  $\Omega_1 = -0,21$ ,  $\Omega_2 = 0,16$ ,  $E = 10^{-16}$ ,  $K = 20$ ,  $A_1 = 0,01$ ,  $A_2 = 5$ ,  $A = 0,3$  в отсутствие «внешнего» шума ( $D = 0$ ). Поскольку число гармоник для исходного объекта значительно превышает  $N = 1$ , ошибка в определении размера по минимуму  $\delta(a)$  обусловлена «собственным» шумом, т. е. влиянием слагаемых в (1) с  $k > N$ . Кривые отличаются значением параметра  $\gamma = \frac{C - C_1}{C}$ , который харак-

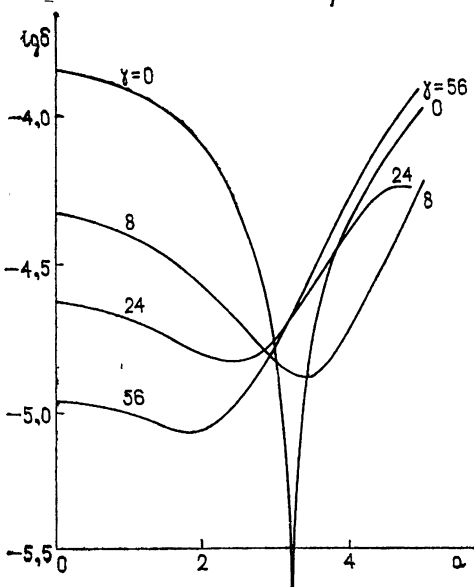


Рис. 2.

теризует относительную интенсивность прямоугольника меньшей ширины. Для прямоугольного объекта ( $\gamma = 0$ ), когда в

Таблица 1

$a$	2,6	2,7	2,8	2,85	2,9	2,95
$D=0$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$2,63 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$5,66 \cdot 10^{-7}$	$6,25 \cdot 10^{-9}$	$5,15 \cdot 10^{-7}$
$D=10^{-7}$	$4,21 \cdot 10^{-6}$	$2,58 \cdot 10^{-6}$	$1,22 \cdot 10^{-6}$	$6,14 \cdot 10^{-7}$	$1,99 \cdot 10^{-7}$	$5,56 \cdot 10^{-7}$
$D=10^{-5}$	$2,0937 \cdot 10^{-5}$	$2,0434 \cdot 10^{-5}$	$1,9991 \cdot 10^{-5}$	$1,9880 \cdot 10^{-5}$	$1,9868 \cdot 10^{-5}$	$1,9857 \cdot 10^{-5}$
$D=10^{-3}$	$1,98688$ $10^{-3}$	$1,986838$ $10^{-3}$	$1,985806$ $10^{-3}$	$1,986791$ $10^{-3}$	$1,986778$ $10^{-3}$	$1,986768$ $10^{-3}$

---

$3$	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,56
$9,56 \cdot 10^{-7}$	$1,62 \cdot 10^{-6}$	$1,96 \cdot 10^{-6}$	$1,96 \cdot 10^{-6}$	$1,58 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-7}$	$1,48 \cdot 10^{-7}$
$9,96 \cdot 10^{-7}$	$1,66 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1,62 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	$2,52 \cdot 10^{-7}$
$1,9848 \cdot 10^{-5}$	$1,9833 \cdot 10^{-5}$	$1,9826 \cdot 10^{-5}$	$1,9826 \cdot 10^{-5}$	$1,9834 \cdot 10^{-5}$	$1,9851 \cdot 10^{-5}$	$1,9864 \cdot 10^{-5}$
$1,986756$ $10^{-3}$	$1,986739$ $10^{-3}$	$1,986729$ $10^{-3}$	$1,986726$ $10^{-3}$	$1,986731$ $10^{-3}$	$1,986745$ $10^{-3}$	$1,986756$ $10^{-3}$



(1) отлично от нуля только слагаемое с  $k=0$ , а, следовательно, «собственный» шум отсутствует, минимум  $\delta(a)$  находится с максимальной точностью. С увеличением  $\gamma$ , во-первых, возрастает «собственный» шум, что приводит к увеличению ширины кривой  $\delta(a)$  и, следовательно, к уменьшению точности определения минимума, и, во-вторых, минимум смещается к меньшим значениям  $a$  из-за увеличения интенсивности прямоугольника малой ширины. При достаточно больших  $\gamma$  зависимость  $\delta(a)$  становится асимметричной, и удается указать лишь нижнюю границу для размера интервала финитности входа.

Наличие аддитивной погрешности  $n(\omega)$  существенно изменяет вид зависимостей  $\delta(a)$ . В табл. 1 в качестве примера приведены значения  $\delta(a)$  для треугольной функции  $a$  при  $N=1$ ,  $M=20$ ,  $\Omega_1 = -0,21$ ,  $\Omega_2 = 0,16$ ,  $E=10^{-16}$ ,  $K=5$  и четырех значениях дисперсии  $D$  единственной реализации гауссова шума. Узкий минимум, полученный в отсутствие «внешнего» шума ( $D=0$ ), при увеличении  $D$  расширяется и для  $D=10^{-3}$  практически исчезает. Табл. 2 и 3 иллюстрируют влияние числа рассматриваемых гармоник  $N$  на качество оценивания для функции  $v$  при  $M=20$ ,  $\Omega_1 = -0,21$ ,  $\Omega_2 = 0,16$ ,  $E=10^{-13}$ ,  $K=5$ .

Таблица 2

$a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\delta_{\min}$
$N=1$	13,2	10,1	5,75	1,0	3,05	4,66	1,86	7,95	27,8	61,1	112	$0,281 \cdot 10^{-4}$
$N=2$	14,0	10,3	5,65	1,54	1,0	1,76	7,78	16,3	22,2	15,8	18,8	$0,98 \cdot 10^{-7}$
$N=3$	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,02	1,01	1,0	1,0	$0,84 \cdot 10^{-7}$

В табл. 2 даны значения отношения  $\rho = \delta(a)/\delta_{\min}$  и величины  $\delta_{\min}$ , полученные для единственной реализации гауссова шума с дисперсией  $D=10^{-7}$ . Ширина минимума наименьшая при  $N=1$ , переход

к  $N=2$  дает оценку  $\hat{\alpha}$ , более близкую к истинному значению  $\alpha=5$ , но определение минимума менее точное из-за увеличения ширины кривой  $\delta(a)$ . Дальнейшее увеличение  $N$  недопустимо, поскольку при  $N=3$  минимум исчезает. Таким образом, качественно верный результат получается при  $N=1$ ; увеличение  $N$  дает улучшение точности аппроксимации

функции  $\tilde{f}_e(\omega)$ , но надежность оценивания уменьшается. Полученный результат подтверждает теоретические выводы, изложенные в [5], о возможности замены «сложного» объекта «простым», содержащим две простейшие четные и одну нечетную составляющие (в данном случае выбор  $N=1$ ) при измерении протяженности финитного входа. Табл. 3 содержит данные статистической обработки пяти реализаций аддитивного гауссова шума с  $D=10^{-4}$  при  $A_1=0,01$ ,  $A_2=21$ ,  $A=1$ .

Таблица 3

$N$	1	2	3	4
$\bar{c}$	1	2,36	3,9	4,2
$\sigma$	0,23	0,48	0,37	0

В таблице даны средние значения  $\bar{c}$  и дисперсии  $\sigma^2$  оценки нормированного размера  $c = \alpha |\Omega_1| = 1$  для различных значений  $N$ . В случае  $N=4$  аддитивный шум отсутствовал, т. е.  $D=0$ . Из табл. 3 также следует, что наиболее целесообразен выбор  $N=1$ .

Рис. 3 иллюстрирует зависимость среднего значения (верхние кривые) и дисперсии (нижние кривые) оценки  $c$  величины  $c = \alpha |\Omega_1|$ , полученные усреднением по  $Q$  реализациям аддитивного шума различ-

ной интенсивности для треугольного объекта а). Кривые 1 соответствуют равномерно распределенному шуму при  $N=1, M=10, \Omega_1 = -0,05, \Omega_2 = 0,05, E=10^{-16}, K=5, A_1=0,01, A_2=10, A=0,5, Q=10$ , кривые 2 — нормальному шуму при  $N=1, M=10, \Omega_1 = -0,05, \Omega_2 = 0,05, E=10^{-12}, K=20, A_1=0,01, A_2=20, A=1, Q=10$ , кривые 3 — нормальному шуму при  $N=1, M=10, \Omega_1 = -0,05, \Omega_2 = 0, E=10^{-16}, K=5, A_1=0,01, A_2=10, A=0,5, Q=10$ . Сопоставление кривых 1 и 2, отличающихся только видом распределения шума, показывает слабое влияние распределения аддитивной погрешности измерения на качество оценивания. Величина интенсивности  $D$  аддитивного шума, при которой возможно достаточно надежное оценивание, не превосходит  $10^{-6}$ ; для больших  $D$  можно оценить лишь порядок величины размера области финитности входа. Заметим, что в рассматриваемом случае разрешение по Рэлею допустимо при  $c > 3$ , когда длина интервала  $\Omega_2 - \Omega_1$  сравнима с расстоянием между первыми нулями спектра  $\frac{\sin \alpha \omega}{\alpha \omega}$  прямоугольного объекта.

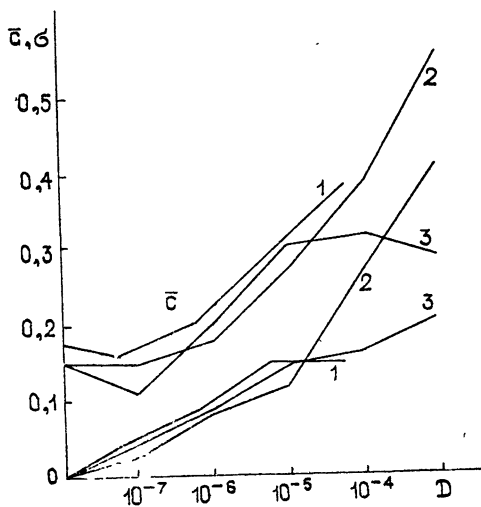


Рис. 3

Таким образом, измеряемый размер  $c=0,16$  на порядок меньше предельно возможного по критерию Рэлея.

Наряду с дисперсией аддитивного шума существенное влияние на качество оценивания оказывает отклонение измеряемой величины  $c$  от рэлеевского предела. В табл. 4 даны значения среднего и дисперсии оценки для гауссова шума и объекта а) при  $N=1, M=10, E=10^{-12}, K=20, A_1=0,01, A_2=20, A=1, Q=10, D=10^{-4}$ . Величина  $\Omega_1 = -0,05$  постоянна, изменение  $c$  происходит за счет выбора  $\Omega_2$ . Дисперсия шума достаточно велика, и точные измерения оказываются возможными лишь при  $c \approx 1$ .

Таблица 4

$\Omega_2$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,45
$\sigma$	0,16	0,47	0,79	1,1	1,42	1,73	2,9
$\bar{c}$	0,38	0,6	0,68	1,19	1,37	1,66	2,85

Табл. 5 иллюстрирует зависимость оценочной дисперсии и среднего для гауссова шума и объекта а) при различном расположении области частот  $(\Omega_1, \Omega_2)$ , в которой проводятся измерения, при  $N=1, M=10, E=10^{-12}, K=20, A_1=0,01, A_2=20, A=1, D=10^{-4}, Q=10$ . В таблице даны оценки среднего и дисперсии величины  $c = \alpha = 0,05 = 0,157$  при различных значениях параметра  $F = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \pi$  при условии

$\Omega_2 - \Omega_1 = 0,1$ . Наибольшая точность достигается при  $F = 1$ , когда центр отрезка близок к первому нулю спектра  $\sin \alpha\omega/\alpha\omega$  прямоугольного объекта.

Таблица 5

$F$	0	0,31	0,63	1,25	2,51
$\bar{c}$	0,38	0,23	0,19	0,16	0,13
$\sigma$	0,26	0,26	0,21	0,17	0,14

Таблица 6

$M$	6	10	15	20	40
$\bar{c}$	0,45	0,39	0,47	0,40	0,35
$\sigma$	0,31	0,26	0,27	0,22	0,19

Таблица 7

$Q$	5	10	20	30
$\bar{c}$	0,46	0,38	0,36	0,41
$\sigma$	0,13	0,16	0,12	0,16

Табл. 6 и 7 показывают влияние на качество оценивания размера объекта а) при гауссовом шуме двух основных параметров алгоритма: числа точек  $M$ , в которых измеряется спектр, и числа реализаций  $Q$  шума, по которым проводится статистическое усреднение. Данные табл. 6, для которой  $N=1$ ,  $\Omega_1=-0,05$ ,  $\Omega_2=0,05$ ,  $E=10^{-12}$ ,  $K=20$ ,  $A_1=0,01$ ,  $A_2=20$ ,  $A=1$ ,  $D=10^{-4}$ ,  $c=\alpha\Omega_2=0,16$ , показывают, что влияние числа  $M$  оказалось менее значительным, чем можно было ожидать. Из табл. 7, для которой  $N=1$ ,  $M=10$ ,  $\Omega_1=-0,1$ ,  $\Omega_2=0$ ,  $E=10^{-16}$ ,  $K=5$ ,  $A_1=0,01$ ,  $A_2=10$ ,  $A=0,5$ ,  $D=10^{-5}$ ,  $c=\alpha\Omega_1=0,31$ , следует, что в рассматриваемых условиях достаточно использовать 5—10 реализаций шума.

При измерении размера протяженности финитного входа целесообразно применить специализированные методы, не предполагающие восстановление формы объекта. Это обеспечивает устойчивость вычислительной процедуры, поскольку оказывается возможным заменить сложную форму входа простой, предполагающей использование только двух четных и одной нечетной функции полной системы. При реализации удалось воспользоваться обычной методикой оценивания по минимуму невязки с применением чебышевской аппроксимации. Моделирование задачи для трех разнородных входных объектов подтвердило теорети-

ческий вывод о целесообразности упрощения входа. Показано, что основное влияние на точность и качество оценивания оказывает аддитивный измерительный шум и удаленность величины измеряемого размера от рэлеевского предела. Дополнительный выигрыш получается за счет целесообразного расположения точек измерения вблизи нулей спектра объекта с равномерной интенсивностью. Выигрыш за счет увеличения объема измерений незначителен. Для получения надежной оценки необходимо затратить на ЭВМ БЭСМ-6 порядка 5 минут счетного времени.

Предложенная методика может быть без существенных изменений использована для одномерных объектов с комплексным спектром, что, в частности, позволит наряду с размером определить и другие параметры, например, положение центра и амплитуды гармоники.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Цыбаков, В. П. Яковлев, Изв. вузов — Радиофизика, 1, № 5—6, 98 (1958).
2. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Фinitные функции в физике и технике, изд. Наука, М., 1972.
3. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев, Теория синтеза антенн, изд. Сов радио, М., 1969.
4. L. R. Rabiner, J. H. Mc Clellan and T. W. Parks, Proc. IEEE, 63, № 4, 61 (1975).
5. В. П. Яковлев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 4, 528 (1978).
6. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966, стр. 161.

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 декабря 1976 г.  
после переработки  
12 октября 1977 г.

#### THE METHOD OF DEFINITION OF THE SOURCE DIMENSION ACCORDING TO DIFFRACTION IMAGE ON THE BASIS OF CHEBYSHEV APPROXIMATION

*A. A. Rubenok*

The method of Chebyshev approximation is used to obtain the estimation of the finite input extension according to the linear system response measured with the additive noises. The extension value providing the minimum of the approximation error is considered to be true. The detailed description of the method and the results of its application is given for the analysis of three types of input actions.

УДК 621.385.6

## ГРУППИРОВКА ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С РАЗБРОСОМ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ГИРОКЛИСТРОНЕ С НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

А. П. Кейер

Рассмотрена группировка электронного пучка с разбросом скоростей электронов в гироклистроне. Показано, что для осуществления группировки, соответствующей режиму максимального КПД, может быть применено неоднородное магнитостатическое поле. Показано, что этот же способ может быть использован для регулировки сдвига фаз сгустков, образующихся в различных скоростных группах электронного пучка, при влете в выходной резонатор. Полученные результаты могут найти применение при расчете и конструировании гироклистронов, электронные пучки в которых обладают значительным разбросом скоростей электронов.

Механизм группировки электронного потока в гироклистроне имеет далеко идущую аналогию с механизмом группировки в клистродах типа «О»\* [1]. В многорезонаторных клистродах эффективная группировка достигается в режиме максимального КПД [2, 3]. Однако в гироклистродах реализация этого режима затруднена из-за того, что его необходимо обеспечить для каждой скоростной группы электронов, поскольку разброс скоростей электронов в потоке велик [4-7].

В работе рассмотрена возможность реализации режима группировки, соответствующего максимальному КПД, с помощью слабонеоднородного статического магнитного поля в трехрезонаторном гироклистроне. Считаются выполненными условия слаборелятивистского приближения. Глубина модуляции электронного потока и амплитуды ВЧ-поля в резонаторах группирователя предполагаются малыми. Это позволяет ограничиться в решении уравнений движения электронов [8] членами, пропорциональными первой степени амплитуды ВЧ-поля.

### 1. ГРУППИРОВКА ПОТОКА С РАЗБРОСОМ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ОДНОРОДНОМ СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Высокое качество сгустка электронов при работе клистрода в режиме максимального КПД достигается за счет того, что сгусток, формируемый ВЧ-полем в промежуточном резонаторе, образуется в фазе со сгустком, поступающим в этот резонатор [3]. В случае гироклистрода это требование должно выполняться одновременно для всех скоростных групп электронов наряду с требованием равномерности группировки.

Используя обозначения, принятые в [9], фазу влета  $\Psi_2$  электрона во второй резонатор можно записать в виде

\* Приборы, использующие этот механизм группировки, рассматривались в докладе А. В. Гапонова, А. Л. Гольденберга и В. К. Юлпатова на V Межвузовской конференции (Саратов, 1966 г.).

$$\Psi_2 = \Psi_1 + \tilde{\Psi}_1 + \delta_{12} - \hat{\theta}_{12} - \frac{\hat{\theta}_1}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{2}, \quad (1)$$

где  $\Psi_1$  — фаза влета электрона во входной резонатор,  $\delta_{12}$  — разность фаз ВЧ-колебаний во входном и в промежуточном резонаторах,  $\hat{\theta}_{1,2}$  — относительный угол пролета электрона от середины входного до середины промежуточного резонатора,

$$\hat{\theta}_{12} = -\frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{f}{\xi \chi_0} \left( \zeta_{x1} + \frac{\zeta_{p1} + \zeta_{p2}}{2} \right), \quad (2)$$

$$\xi \chi_0 = \sqrt{\xi^2 (1 + f) - 4f},$$

$\zeta_{p1}$ ,  $\zeta_{p2}$  и  $\zeta_{x1}$  — длины резонаторов и трубки дрейфа,  $f$  определяется соотношением [8]

$$H_0(Z) = H_s(1 + f), \quad (3)$$

$\tilde{\Psi}_1$  — дрейф фазы электрона, обусловленный ВЧ-полем во входном резонаторе.

Учитывая в выражении для  $\tilde{\Psi}_1$  лишь члены, связанные с неизо-хронностью вращения электрона, выражение (1) можно преобразовать к виду

$$\Psi_2 = \Psi_1 - x_{12} \cos \left( \Psi_1 - \frac{\hat{\theta}_1}{2} \right) + \delta_{12} - \hat{\theta}_{12} - \frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{2}, \quad (4)$$

$$x_{12} = \frac{\gamma_1}{\beta_{\perp}^2} \frac{2\zeta_{x1} + \zeta_{p1}}{\xi \chi_0},$$

$$\gamma_1 = A_1 \beta_{\perp}^2 \frac{\zeta_{p1}}{\xi \chi_0} F_1(\hat{\theta}_1) \sqrt{1 + f_1} \sqrt{\frac{4 - \xi^2}{3}},$$

$$F_1(\hat{\theta}_1) = \frac{2\pi}{\pi^2 - \hat{\theta}_1^2} \cos \frac{\hat{\theta}_1}{2},$$

$$\hat{\theta}_{1,2} = \frac{\theta_{1,2}}{\xi \chi_0} = -\frac{2f_1 \zeta_{p1, p2}}{\beta_{\perp}^2 \xi \chi_0},$$

где  $\hat{\theta}_{1,2}$  — относительные углы пролета электрона во входном и в промежуточном резонаторах.

Предполагая выполненным неравенство  $|\hat{\theta}_1| < 3\pi$ , можно считать параметр группировки  $x_{12}$  положительной величиной. В этом случае из выражения (4) видно, что сгусток образуется около электрона с фазой влета  $\Psi_1^*$ , определяемой равенством

$$\Psi_1^* = \frac{3\pi}{2} + \frac{\hat{\theta}_1}{2}. \quad (5)$$

В режиме группировки, соответствующем максимальному КПД, фаза влета  $\Psi_2^*$  этого электрона в промежуточный резонатор должна удовлетворять условию

$$\Psi_2^* = \frac{3\pi}{2} + \frac{\hat{\theta}_2}{2}. \quad (6)$$

Определяя  $\Psi_2^*$  из выражения (4), получим

$$\Psi_2^* = \frac{3\pi}{2} + \delta_{12} + \frac{\hat{\theta}_2}{2} - \hat{\theta}_{12}. \quad (7)$$

Очевидно, что условие (6) может быть удовлетворено для всех скоростных групп электронов одновременно лишь в случае

$$\hat{\theta}_{12} = 0. \quad (8)$$

При этом, однако, нельзя добиться равномерности группировки из-за сильной зависимости  $x_{12}$  от  $\xi$ .

## 2. ГРУППИРОВКА ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В НЕОДНОРОДНОМ СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотренные недостатки группировки электронного потока могут быть устранены с помощью неоднородного магнитного поля, которое для упрощения анализа считается кусочно-однородным.

Предполагая выполненными неравенства

$$g_{\max}^2 \beta_{\perp}^2 \ll \zeta_{p1, p2}, \quad (9)$$

где  $g_{\max}$  — максимальное значение отношения осцилляторной скорости электрона в потоке к поступательной, можно не учитывать изменения функции распределения электронов по продольной скорости при изменении магнитного поля. Зависимость  $x_{12}$  от  $\xi$  для этого случая представлена на рис. 1 для различных значений  $\theta_1$ . Она имеет максимум, положение и ширина которого определяются модулем  $\theta_1$ . Видно, что условие равномерности группировки удовлетворяется, если  $|\theta_1| \neq 0$  выбрать в соответствии с функцией распределения электронов по продольной скорости.

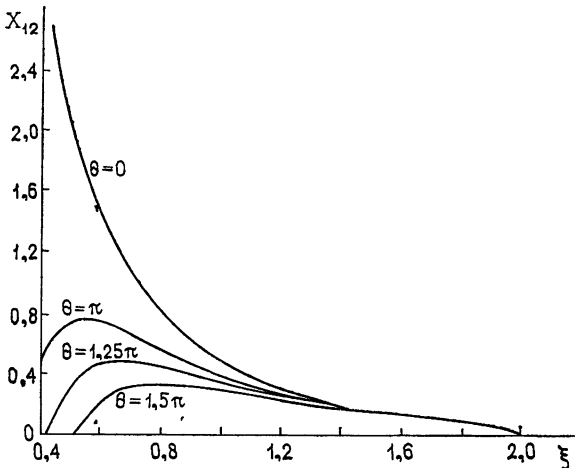


Рис. 1.

Условия (8) и  $|\theta_1| \neq 0$  могут быть удовлетворены лишь в неоднородном статическом магнитном поле. Условие (8) для магнитного поля

во входном и промежуточном резонаторах гироклистрона, представленного на рис. 2, может быть записано в виде

$$f_1(0,5\zeta_{p1} + \zeta_{д1}^{(1)}) + f_2(0,5\zeta_{p2} + \zeta_{д1}^{(2)}) = 0. \quad (10)$$

В этом случае  $\theta_1 = -\theta_2$ , что не всегда желательно из-за нагрузки резонатора электронным потоком при отрицательных  $\theta_1, 2$ .

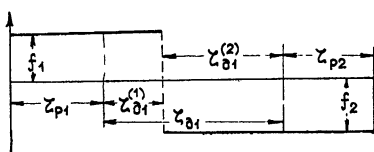


Рис. 2.

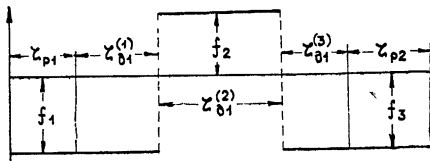


Рис. 3.

На рис. 3 представлено магнитное поле, имеющее более сложную структуру, для которого  $\theta_1 = \theta_2$ ; В этом случае условие (8) также может быть удовлетворено, если выполняется равенство

$$f_1(0,5\zeta_{p1} + \zeta_{д1}^{(1)}) + f_2\zeta_{д1}^{(2)} + f_3(0,5\zeta_{p2} + \zeta_{д1}^{(3)}) = 0. \quad (11)$$

С помощью неоднородного статического магнитного поля можно удовлетворить условия более общего вида, чем (8). В частности, можно обеспечить зависимость от  $\xi$  фазы влета сгустков  $\Psi_3$  в выходной резонатор вида

$$\Psi_3 = \frac{\theta_{23}}{\xi} + \text{const.} \quad (12)$$

Сдвиг фаз влета сгустков в выходной резонатор указанного вида помимо требований, предъявляемых к качеству сгустков, необходим для оптимального отбора энергии от электронного потока [9].

Ограничение (9), принятое выше, может нарушаться даже при сравнительно низких потенциалах потока за счет большого значения  $g_{\text{max}}$ . В этом случае затруднительно добиться полной независимости от  $\xi$  в условии (8). Можно, однако, получить

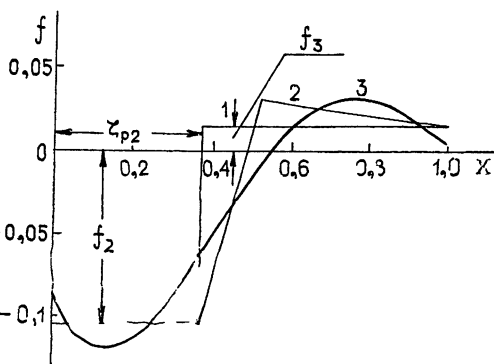


Рис. 4.

удовлетворительное качество группировки, потребовав, как показывает следующий пример, равенства углов пролета наиболее быстрых и наиболее медленных электронов в потоке.

Рассмотрим кусочно-однородное магнитное поле в промежуточном резонаторе и последней трубке дрейфа, показанное на рис. 4, которое может быть использовано для синфазного встрела сгустков в выходной резонатор [9]. Для случая  $\xi_{\text{min}} = 0,6$ ,  $\xi_{\text{max}} = 1,2$ ,  $\zeta_{p2} = 2,5$ ,  $\zeta_{д2} = 4$ ,  $\beta_{\perp}^2 = 0,105$  и  $\theta_2 = 3\pi/2$  условие (9) нельзя считать выполненным. Поэтому равенство углов пролета для электронов с  $\xi = 1,2$  и с  $\xi = 0,6$  от середины промежуточного до начала выходного резонатора следует записать с учетом изменения поступательной скорости электронов на скачке магнитного поля:



$$\frac{0,5f_2 \zeta_{p2}}{\sqrt{\xi_{\min}^2 (1 + f_2) - 4f_2}} + \frac{f_3 \zeta_{д2}}{\sqrt{\xi_{\min}^2 (1 + f_3) - 4f_3}} =$$

$$= \frac{0,5f_2 \zeta_{p2}}{\sqrt{\xi_{\max}^2 (1 + f_2) - 4f_2}} + \frac{f_3 \zeta_{д2}}{\sqrt{\xi_{\max}^2 (1 + f_3) - 4f_3}}, \tag{13}$$

что дает  $f_2 = -0,1$ ,  $f_3 = 0,013$ .

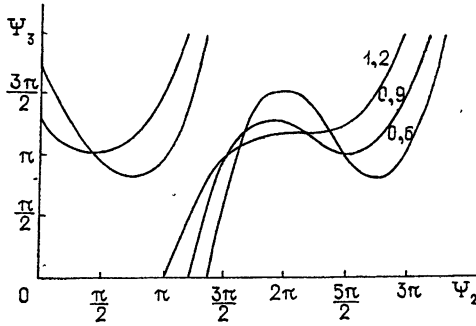


Рис. 5.

Зависимость фазы влета электрона  $\Psi_3$  в выходной резонатор от фазы влета  $\Psi_2$  в промежуточный резонатор для  $\xi = 0,6; 0,9; 1,2$  построена на рис. 5, из которого видно, что условие синфазности сгустков при влете в выходной резонатор выполняется достаточно точно, а неравномерность группировки невелика.

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ГРУППИРОВКИ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ СГЛАЖЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Кусочно-однородное магнитное поле не может быть рекомендовано для практической реализации рассмотренных выше условий группировки. Оно, однако, может быть использовано как исходное для аналитического построения гладкого магнитного поля, в котором выполняются условия, обеспечивающие эффективную группировку потока. Вопросы практической реализации магнитного поля сглаженной структуры в данной работе не рассматривались.

Одним из способов, позволяющих получить приемлемую структуру магнитного поля, является аппроксимация кусочно-однородного поля гладкими функциями по методу наименьших квадратов. При этом возможна предварительная аппроксимация кусочно-однородного поля ломаной линией, что до некоторой степени позволяет варьировать его структуру.

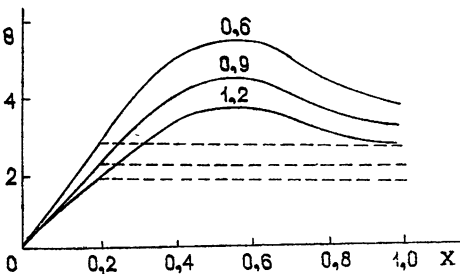


Рис. 6.

На рис. 4 представлены результаты аппроксимации кусочно-однородного поля полиномом четвертой степени. Условия группировки в сглаженном магнитном поле можно оценить, сравнивая статические углы пролета электронов от середины промежуточного до начала вы-

ходного резонатора. Зависимость  $\hat{\theta}$  от  $X = \zeta/(\zeta_{p2} + \zeta_{d7})$  для  $\xi = 0,6; 0,9; 1,2$  построена на рис. 6. Видно, что полученное в результате аппроксимации магнитное поле обеспечивает и нужное значение  $\theta_2 = 3\pi/2$  и равенство углов пролета  $\hat{\theta}_{23}$  для электронов различных скоростных групп, сохраняя свойства кусочно-однородного поля, необходимые для эффективной группировки.

Результаты анализа гироклистрона, проведенного в данной работе, позволяют прийти к выводу, что в неоднородном статическом магнитном поле можно осуществить группировку потока с разбросом скоростей электронов, соответствующую режиму максимального КПД.

Кроме того, имеется возможность эффективно управлять сдвигом фаз влета сгустков электронов в выходной резонатор, что необходимо для оптимального отбора энергии от потока.

Приведенный пример расчета сглаженного профиля магнитного поля показывает, что в предварительных оценках группировки потока можно использовать кусочно-однородное поле с последующей аппроксимацией его по методу наименьших квадратов.

Автор выражает признательность В. Т. Овчарову за поддержку данной работы и благодарен А. В. Гапонову и В. К. Юлпатову за ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 9, 1414 (1967).
- 2 S. E. Webber, IRE Trans., ED-5, № 4, 306 (1958).
- 3 И. В. Лебедев, Техника и приборы СВЧ, т. 2, изд. Высшая школа, М., 1972.
- 4 Ш. Е. Цимринг, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972).
- 5 Е. Г. Авдошин, Л. В. Николаев, И. Н. Платонов, Ш. Е. Цимринг, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 4, 605 (1973).
- 6 Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1605 (1973).
- 7 И. И. Антаков, В. А. Гинцбург, Е. В. Засыпкин, Е. В. Соколов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1196 (1975).
- 8 А. А. Кураев, Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
- 9 А. П. Кейер, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 6 (1978).

Поступила в редакцию  
11 февраля 1977 г.

#### GROUPING OF ELECTRON FLUX WITH THE ELECTRON VELOCITY SCATTERING IN A GYROKLYSTRON WITH AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

A. P. Kejer

Grouping of an electron beam with the scattering of electron velocities in the gyrokystron is considered. It is shown that to make grouping corresponding to the regime of the maximal efficiency an inhomogeneous magnetic field may be applied. The same method may be used to adjust the phase shift of clusters formed in different velocity groups of an electron beam when flying into the output resonator.

УДК 621.385.6

## РЕЖИМЫ РАБОТЫ ВЫХОДНОГО РЕЗОНАТОРА ГИРОКЛИСТРОНА ПРИ НАЛИЧИИ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОТОКЕ И НЕОДНОРОДНОГО МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

*А. П. Кейер*

Рассмотрены режимы работы выходного резонатора гироклистрона при наличии большого разброса скоростей электронов в пучке. Для управления фазовым движением сгустков электронов в резонаторе в рассмотренное введено неоднородное магнитостатическое поле.

Полученные результаты могут быть использованы для повышения КПД гироклистронов, электронные пучки в которых, обладают значительным разбросом скоростей электронов.

В МЦР-приборах используются винтовые электронные потоки, обладающие значительным разбросом скоростей электронов [1-4]. Это обстоятельство существенно сказывается на работе выходного и промежуточных резонаторов гироклистрона, в связи с чем возникает задача повышения-эффективности отбора энергии от такого потока.

В данной работе исследуется влияние неоднородного магнитостатического поля в выходном резонаторе гироклистрона на энергообмен электронов с ВЧ-полем. Аналогичная задача для случая односкоростного потока рассмотрена в [5], где получена конфигурация магнитного поля, обеспечивающая оптимальное значение КПД. Однако структура магнитного поля, рекомендованная в [5], сложна для реализации. Неясными остаются и причины, приводящие к магнитному полю такого вида, так что трудно оценить, каким образом может сказаться упрощение его конфигурации на эффективности работы прибора.

В данной работе используется иной способ построения магнитостатического поля, при котором оно выбирается таким образом, чтобы обеспечить заданную траекторию сгустка электронов на фазовой плоскости. Эта траектория должна удовлетворять определенным требованиям устойчивости, чтобы обеспечить догруппировку сгустка ВЧ-полем, что особенно важно при наличии разброса скоростей электронов в потоке.

Рассмотрены два режима работы выходного резонатора, характеризующиеся:

- 1) движением сгустка, при котором фаза действующего на него ВЧ-поля постоянна;
- 2) движением сгустка, происходящим на начальном этапе в ускоряющей фазе ВЧ-поля.

Догруппировка сгустка в первом случае обусловлена устойчивостью его фазовой траектории, которая аналогична устойчивости, имеющей место в синхротроне [6].

Во втором случае догруппировка имеет общие черты с механизмом уплотнения сгустков, который используется в предпоследнем резонаторе клистронов типа «О», работающих в режиме максимального КПД [7].

Указанные режимы работы выходного резонатора сравниваются с тем случаем, когда магнитное поле в нем однородное.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В работе исследуется движение электронов в слабонеоднородном магнитостатическом и ВЧ-электрическом полях. Магнитостатическое поле с аксиальной симметрией описывается через распределение поля на оси:

$$\begin{aligned} H_Z(Z, R) &\approx H_0(Z) = H_0(0) (1 + f), \\ H_R(Z, R) &\approx -\frac{R}{2} \frac{dH_0}{dZ}. \end{aligned} \quad (1)$$

ВЧ-электрическое поле, перпендикулярное оси  $l_z$ , соответствует азимутальной компоненте поля  $E$  колебания  $H_{011}$  цилиндрического резонатора.

Уравнения движения электрона [8] могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{dP}{d\zeta} &= \frac{A}{\xi\chi} \frac{\gamma}{\sqrt{1+f}} \sin \frac{\pi\zeta}{\zeta_p} \cos \Psi, \\ 2. \quad \frac{d\Psi}{d\zeta} &= -\frac{A}{P\xi\chi} \frac{\gamma}{\sqrt{1+f}} \sin \frac{\pi\zeta}{\zeta_p} \sin \Psi - \\ &\quad - \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{\gamma - \frac{\omega_H(0)}{\omega} (1+f)}{\xi\chi}, \\ 3. \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} &= \beta_{\perp}^2 \frac{AP\sqrt{1+f}}{\xi\chi} \sin \frac{\pi\zeta}{\zeta_p} \cos \Psi, \\ 4. \quad \frac{d\chi}{d\zeta} &= -1,5 \frac{df}{d\zeta} \frac{P^2}{\xi^2\chi} \end{aligned} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} P(0) &= \sqrt{\frac{4 - \xi^2}{3}}, \\ \gamma(0) &= \chi(0) = 1, \\ \Psi(0) &= \Psi_0 \quad (0 \leq \Psi_0 < 2\pi), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $P$  — безразмерный радиус орбиты электрона, определенный соотношением

$$P = \frac{r_{\perp}}{r_0} \sqrt{1+f},$$

$r_{\perp}$  — радиус орбиты электрона,  $r_0$  — радиус орбиты «нормировочного» электрона ( $g = v_{\perp}/v_{\parallel} = \sqrt{3}$ ) в начале пространства взаимодействия,  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — осцилляторная и поступательная скорости электрона, которые в дальнейшем используются для нормировки,  $\Psi$  — фаза вектора скорости электрона в плоскости  $(X, Y)$  за вычетом фазы ВЧ-силы, действующей на электрон в резонаторе,  $\omega$  — вращающаяся с частотой  $\omega$  вокруг той же оси, что и электрон, — системе коор-

динат удобно считать фазу ВЧ-силы, равной  $\pi/2$ . В этом случае  $\Psi$  совпадает с фазой электрона на его орбите,

$$\gamma = \frac{m(\zeta)}{m(0)},$$

$$\chi = \frac{P_z(\zeta)}{P_z(0)},$$

$P_z$  — импульс поступательного движения,

$$\zeta = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\beta_{\parallel}} KZ, \quad K = \frac{\omega}{C},$$

$\beta_{\perp}$ ,  $\beta_{\parallel}$  — осцилляторная и поступательная скорости «нормировочного» электрона, отнесенные к скорости света,  $A$  — нормированная амплитуда поля, определенная соотношением

$$A = \frac{eE_{\varphi}^0 J_1 \left( \nu_1 \frac{R_{\pi}}{R_p} \right)}{m(0) C^2 K \beta_{\perp}^3},$$

где  $R_{\pi}$  — радиус потока,  $R_p$  — радиус резонатора,  $\nu_1 = 3,83$  — корень функции Бесселя  $J_1$ ,  $E_{\varphi}^0$  — модуль амплитуды поля,  $\xi = \frac{v_{\parallel}(0)}{v_{\parallel}}$  — отно-

шение поступательной скорости электрона при влете в резонатор к поступательной скорости «нормировочного» электрона,  $\zeta_p$  — безразмерная координата конца пространства взаимодействия.

Для случая однородного магнитостатического поля относительный угол пролета электрона  $\hat{\Theta}$  определяется соотношением

$$\hat{\Theta} = \frac{\omega - \omega_H}{\omega} \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \frac{1}{\xi} \zeta_p.$$

Электронный поток предполагается моноэнергетическим. Считается, что электроны, обладающие значениями  $\xi$  в интервале 0,8—0,9, соответствуют максимуму функции распределения электронов по продольной скорости. При этом значения  $\xi_{\min} = 0,6$  и  $\xi_{\max} = 1,2$ , используемые ниже для оценок, соответствуют разбросу продольной компоненты скорости  $\delta v_{\parallel} \sim 0,7$ .

## 2. РАСЧЕТ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ ГИРОКЛИСТРОНА

Одна из простейших фазовых траекторий сгустка, охватывающая оба случая, описанных выше, и допускающая аналитический подход к вычислению магнитостатического поля, имеет вид

$$\Psi = \hat{\Psi} + \alpha \cos \frac{\pi \zeta}{\zeta_p}, \quad (4)$$

где  $\hat{\Psi}$  и  $\alpha$  — постоянные, связанные с фазой влета  $\hat{\Psi} + \alpha$  и фазой вылета  $\hat{\Psi} - \alpha$  сгустка из резонатора.

Полагая в уравнениях (2)  $f=0$ , всюду, кроме члена, пропорционального  $2/\beta_{\perp}^2$ , и считая, что в конце пространства взаимодействия вы-

полняется условие эффективного торможения электрона с заданным значением  $\xi$ :

$$P(\zeta_p) = \varepsilon P(0), \quad (5)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малая постоянная, можно найти после подстановки (4) в (2)

$$\hat{f} = P^2 - P^2(0) - \frac{A}{P} \sin \frac{\pi \zeta}{\zeta_p} \sin \left( \hat{\Psi} + \alpha \cos \frac{\pi \zeta}{\zeta_p} \right) - \\ - \alpha \frac{\pi \xi}{\zeta_p} \sin \frac{\pi \zeta}{\zeta_p}, \\ \hat{f} = \frac{2f}{\beta_{\perp}^2},$$

$$P = P(0) \left( 1 + \hat{B} \sin (\hat{\Psi} + \alpha) - \hat{B} \sin \left( \hat{\Psi} + \alpha \cos \frac{\pi \zeta}{\zeta_p} \right) \right), \quad (6)$$

$$A = - \frac{\pi \xi}{\zeta_p} P(0) \frac{1 - \varepsilon}{2 \cos \hat{\Psi}} \frac{\alpha}{\sin \alpha},$$

$$\hat{B} = - \frac{1 - \varepsilon}{2 \sin \alpha \cos \hat{\Psi}}. \quad (7)$$

Переходя в (6) к пределу  $\alpha \rightarrow 0$ , получим

$$\hat{f} = - \frac{4 - \xi^2}{3} \sin^2 \frac{\pi \zeta}{2 \zeta_p} (1 - \varepsilon) \left( 2 - (1 - \varepsilon) \sin^2 \frac{\pi \zeta}{2 \zeta_p} \right) - \\ - \operatorname{tg} \hat{\Psi} \frac{\pi \xi}{\zeta_p} \frac{1 - \varepsilon}{\operatorname{ctg} \frac{\pi \zeta}{2 \zeta_p} + \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\pi \zeta}{2 \zeta_p}}, \\ A = - \frac{\pi \xi}{\zeta_p} \sqrt{\frac{4 - \xi^2}{3}} \frac{1 - \varepsilon}{2 \cos \hat{\Psi}}, \quad (8)$$

Выражения (6) и (8) обладают особенностью, связанной с тем, что для полного торможения сгустка —  $\varepsilon = 0$  — требуется бесконечное магнитное поле, за исключением того случая, когда он тормозится в фазе  $\Psi = \pi$ . При этом торможение в фазе  $\pi - \delta$  ( $\delta > 0$ ) требует нарастающего, а в фазе  $\pi + \delta$  — спадающего магнитостатического поля. Это означает, что влияние магнитного поля на энергообмен электронного потока с ВЧ-полем в конце пространства взаимодействия практически отсутствует, поскольку малым изменениям КПД соответствуют большие изменения магнитостатического поля.

Траектории остальных электронов не могут быть найдены аналитически. Для их расчета привлекались численные методы.

### 3. СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОГО МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ ГИРОКЛИСТРОНА

На рис. 1 представлена зависимость энергии, отданной электроном ВЧ-полю, от его фазы влета в резонатор. Она соответствует однородному магнитостатическому полю. Амплитуда ВЧ-поля и длина резонатора соответственно равны:  $A = 0,6$ ,  $\zeta_p = 2,5$ . Напряженность магнит-

ного поля обеспечивает относительный угол пролета  $\hat{\theta} = 1,69\pi$  для электронов  $\xi = 0,8 - 2$ . Значения относительных углов пролета для электронов с  $\xi = 0,6 - 1$  и  $\xi = 1,2 - 3$  при этом получаются равными  $\hat{\theta} = 2\pi$ ,  $\hat{\theta} = \pi$ .

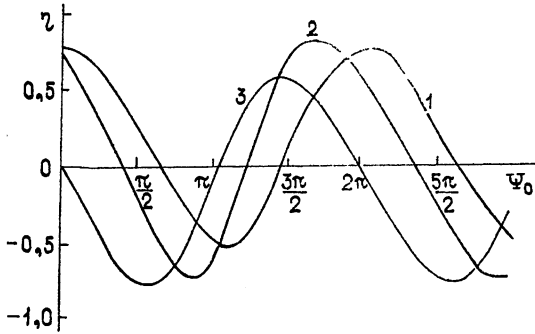


Рис. 1.

По оси ординат на рис. 1 отложена величина

$$\eta = \frac{m(0) - m(\zeta_p)}{m(0) - m_0},$$

равная отношению энергии, отданной электроном ВЧ-полю, к энергии его движения.

Как видно из рис. 1, условия энергообмена электронного потока с ВЧ-полем можно характеризовать углом захвата электронов в режим торможения, энергией, которую получают «неправильнофазные» электроны в процессе ускорения, и оптимальным сдвигом фаз влета в резонатор сгустков в различных скоростных группах электронов.

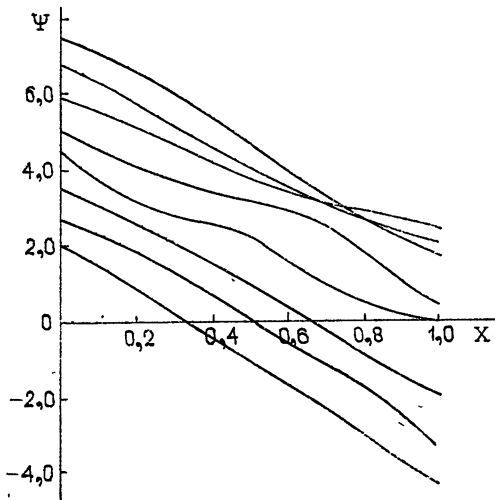


Рис. 2.

Фазовые траектории электронов для рассмотренного выше случая представлены на рис. 2 ( $\xi = 0,8$ ). Как видно из рис. 1 и рис. 2, наиболее эффективно тормозятся электроны, фаза влета в резонатор которых такова, что они покидают резонатор, имея фазу вылета  $\Psi = \pi$ . Поэтому сдвиг фаз влета сгустков на рис. 1 обусловлен

разницей относительных углов пролета электронов различных скоростных групп.

#### 4. СЛУЧАЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ СГУСТКА В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Этот случай соответствует  $\alpha = 0$  в соотношении (4). Зависимости  $\hat{f}$  от приведенной координаты  $X = \zeta/\zeta_p$ , построенные в соответствии

с выражением (8), представлены на рис. 3. Они были взяты в качестве исходных для получения сглаженных конфигураций магнитного поля.

Критичность к изменению профиля  $\hat{f}$  проверялась путем расчета вариантов с линейной аппроксимацией  $\hat{f}$  — прямые линии на рис. 3, наклон которых выбирался таким образом, чтобы получить примерное соответствие хода поля на начальном и центральном участках взаимодействия.

На рис. 4 представлены зависимости энергии, отданной электроном ВЧ-полю, от его фазы влета в резонатор, построенные для линейной аппроксимации  $\hat{f}$ . Они соответствуют  $\xi = 0,8$  и различным значениям равновесной фазы  $\hat{\Psi}$  и длины  $\zeta_p$  резонатора:

- 1)  $\hat{\Psi} = \pi$ ,  $\zeta_p = 2,5$ ,  $A = 0,5319$ ,
- 2)  $\hat{\Psi} = \frac{7\pi}{6}$ ,  $\zeta_p = 2,5$ ,  $A = 0,6142$ ,
- 3)  $\hat{\Psi} = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\zeta_p = 4$ ,  $A = 0,66$ .

Из рис. 4 видно, что с приближением  $\hat{\Psi}$  к значению  $3\pi/2$  растет угол захвата электронов в режим торможения, а нагрузка резонатора «неправильнофазными» электронами падает.

На рис. 5 приведены фазовые траектории электронов, соответствующие случаю 3 на рис. 4. Группировка электронов около электрона с фазой  $\hat{\Psi}$  носит асимметричный характер, что объясняется расфокусирующим влиянием дрейфа фазы электронов, который описывается первым членом в правой части уравнения (2.2).

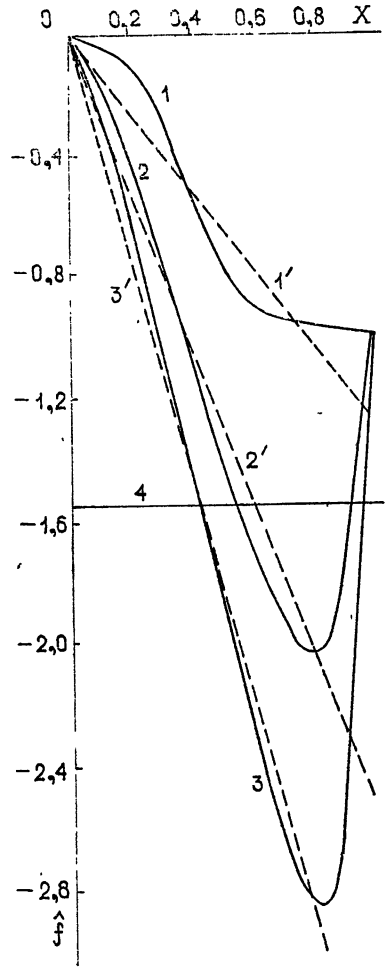


Рис. 3.

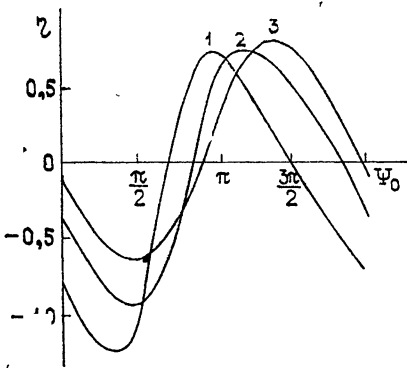


Рис. 4.

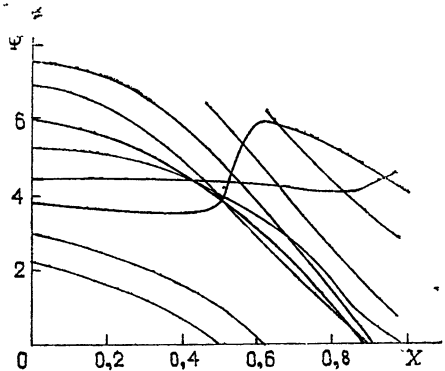


Рис. 5.



На рис. 6 представлена зависимость энергии, отданной электроном ВЧ-полю, от его фазы влета в резонатор, построенная для значений параметра  $\xi = 0,6 - 1$ ,  $\xi = 0,8 - 2$ ,  $\xi = 1,2 - 3$  и значения  $\hat{\Psi} = 4\pi/3$ .

Здесь оптимальный отбор энергии от электронного потока осуществляется при одинаковом значении фаз влета в резонатор сгустков в различных скоростных группах потока.

Характеристики этого способа отбора энергии от электронного потока оказываются близкими к случаю однородного магнитного поля как по углу захвата электронов в режим торможения, так и по нагрузке резонатора «неправильно-фазными» электронами.

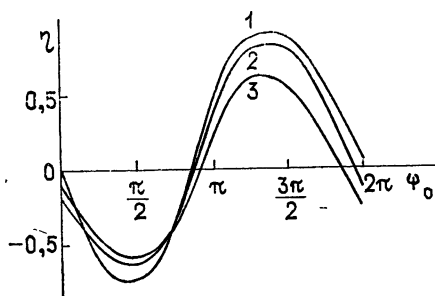


Рис. 6.

### 5. СЛУЧАЙ ДОГРУППИРОВКИ СГУСТКА НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ВЫХОДНОМ РЕЗОНАТОРЕ

На рис. 7 представлены зависимости  $\hat{f}$  от приведенной координаты  $X = \zeta/\zeta_p$ , построенные в соответствии с соотношением (6). Совокупность параметров  $\xi = 0,8$ ,  $\hat{\Psi} = 11\pi/8$ ,  $\alpha = 3\pi/8$ ,  $\zeta_p = 4$ ,  $A = 1$  соответствует случаю, когда сгусток влетает в ускоряющую фазу ВЧ-поля,  $\Psi = 7\pi/4$ , и в процессе взаимодействия переводится в максимум тормозящего ВЧ-поля,  $\Psi = \pi$ .

Как показал расчет этого варианта, сгусток испытывает интенсивную догруппировку на начальном этапе взаимодействия. Однако эффективное взаимодействие различных скоростных групп электронов с ВЧ-полем здесь не достигается из-за большой роли релятивистских эффектов, ответственных за дрейф сгустка в тормозящую фазу ВЧ-поля, если он значительно ускоряется.

Эта же причина приводит к нежелательным осцилляциям магнитного поля (рис. 7, кривая 1).

Чтобы избежать ускорения сгустков, фазу влета их в резонатор необходимо выбирать вблизи нейтральной фазы  $\Psi = 3\pi/2$ . Случай фазы влета сгустка в резонатор,  $\Psi = 3\pi/2$ , и фазы вылета сгустка из резонатора,  $\Psi = \pi$ , представлен на рис. 7, кривая 2. В расчетах использовалась как эта форма магнитного поля, так и ее аппроксима-

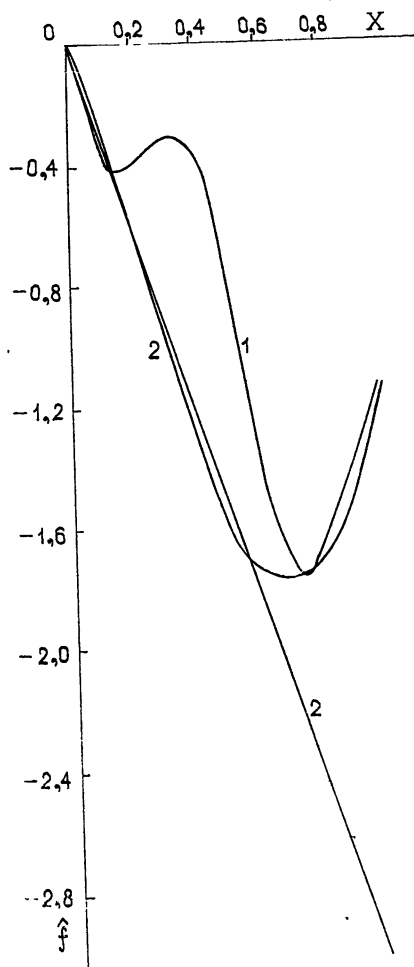


Рис. 7.

ция линейной функцией (кривая-2). Поскольку результаты расчетов для обоих случаев получаются близкими, ниже приводится результат расчета для линейного закона изменения магнитного поля.

На рис. 8 представлены зависимости энергии, отданной электроном ВЧ-полю, от его фазы влета в резонатор. Параметры варианта:

$$\hat{\Psi} = 5\pi/4, \quad \alpha = \pi/4, \quad \zeta_p = 4, \quad A = 0,49;$$

$$1) \xi = 0,6, \quad 2) \xi = 0,8, \quad 3) \xi = 1,2.$$

Видно, что оптимальный сдвиг фаз влета сгустков в резонатор близок к нулю. Угол захвата электронов в режим торможения здесь такой же, как и в рассмотренных выше режимах, а нагрузка резонатора «неправильнофазными» электронами сравнительно невелика.

Как видно из рис. 1, 6, 8, эффективность отбора энергии от электронного потока с разбросом скоростей электронов может быть достаточно высока, если обеспечен оптимальный сдвиг фаз влета в выходной резонатор сгустков в различных скоростных группах электронного потока. Общим для всех рассмотренных режимов работы выходного резонатора гироклистрона является требование высокого качества сгустков, поступающих в резонатор, а также требование равномерности группировки по скоростным группам электронного потока.

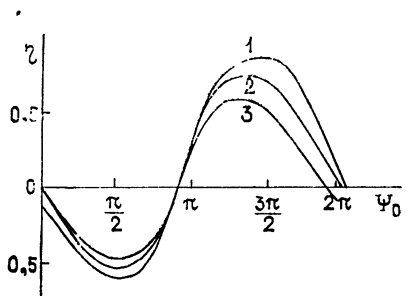


Рис. 8.

Рассмотренные выше способы отбора энергии от электронного потока с разбросом скоростей электронов наиболее существенно отличаются между собой величиной указанного выше сдвига фаз влета сгустков в выходной резонатор. Поэтому можно ожидать, что изменение магнитного поля в выходном резонаторе гироклистрона будет влиять на эффективность его работы посредством этого механизма.

Требования к точности реализации профиля магнитного поля в рассмотренных режимах работы выходного резонатора не являются слишком жесткими.

Автор выражает глубокую признательность В. Т. Овчарову за поддержку данной работы и благодарен А. В. Гапонову и В. К. Юлпатову за ряд критических замечаний, способствовавших ее улучшению.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ш. Е. Цимринг, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972).
- 2 Е. Г. Авдошин, Л. В. Николаев, И. Н. Платонов, Ш. Е. Цимринг, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 4, 605 (1973).
- 3 Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1605 (1973).
- 4 И. И. Антаков, В. А. Гинцбург, Е. В. Засыпкин, Е. В. Соколов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1196 (1975).
- 5 А. А. Кураев и др., Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ, изд. Наука и техника, Минск, 1975.
- 6 А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, М., 1950.
- 7 И. В. Лебедев, Техника и приборы СВЧ, т. 2, изд. Высшая школа, М., 1972.
- 8 А. А. Кураев, Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками, изд. Наука и техника, Минск, 1971.

---

REGIMES OF OPERATION OF GYROKLYSTRON OUTPUT RESONATOR IN THE  
PRESENCE OF ELECTRON VELOCITY SCATTERING IN THE FLUX AND AN  
INHOMOGENEOUS MAGNETOSTATIC FIELD

*A. P. Kejer*

Regimes of operation of the gyrokystron output resonator are considered in the presence of a large electron velocity scattering in the beam. An inhomogeneous magnetostatic field is introduced to control the phase motion of electron clusters in the resonator. The results obtained may be used to increase the efficiency of the gyrokystrons where electron beams have a considerable scattering of electron velocities.

---

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.37

АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОТРЕЗКЕ ЛИНИИ С ДИСКРЕТНЫМИ АКТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. А. Новиков

Как известно, согласующееся с экспериментом теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в автогенераторе в виде отрезка волновода с периодически включенными активными элементами [1-3] опирается на два предположения: малость расстояния между диодами по сравнению с длиной волны (квазираспределенность) и малость тока каждого из диодов по сравнению с током линии (слабая нелинейность). Однако по мере продвижения вверх по диапазону удовлетворить условию квазираспределенности становится все труднее. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения волновых автогенераторов с немалыми расстояниями между активными элементами. Процессы в таких системах описываются с помощью дифференциально-разностных уравнений и во многих отношениях отличаются от своих квазираспределенных аналогов [4, 5].

Целью данной работы является вывод укороченных уравнений, описывающих взаимодействие встречных волн в автогенераторах с произвольным расстоянием между диодами. Оказывается, что для квазисинусоидальных процессов, возможных при слабой нелинейности и сильной дисперсии, требование квазираспределенности излишне, и волновые режимы устройств с дискретным включением активных элементов аналогичны режимам распределенных систем.

Рассмотрим процессы в генераторе, состоящем из отрезков длины  $l$  линейного волновода с операторным волновым сопротивлением  $\rho(p)$  и постоянной распространения  $\chi(p)$  и включенных в промежутках между ними активных приборов (см. рис. 1). Напряжение и ток на входе и выходе линейных участков связаны соотношениями [6]

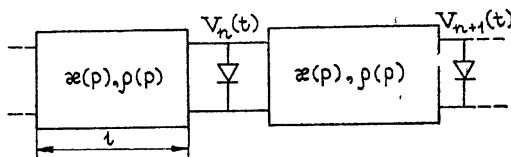


Рис. 1.

$$U(l, t) = \text{ch}(\chi(p)l)U(0, t) + \rho(p)\text{sh}(\chi(p)l)I(0, t), \tag{1}$$

$$I(l, t) = \frac{\text{sh}(\chi(p)l)}{\rho(p)} U(0, t) + \text{ch}(\chi(p)l)I(0, t),$$

а граничные условия в точках включения диодов имеют вид

$$U_{n-1}(l, t) = U_n(0, t), \tag{2}$$

$$I_{n-1}(l, t) = J_n(0, t) + gU_n(0, t) + i_{нл}\{U_n(0, t)\},$$

где  $gU_n$  и  $i_{нл}$  соответственно линейная и нелинейная составляющие тока диода. Соотношения (1), (2) эквивалентны уравнению

$$[\delta_+ + \delta_- - (2\text{ch} \chi l - \rho g \text{sh} \chi l)]V_n(t) = -\rho g \text{sh} \chi l i_{нл}\{V_n(t)\} \tag{3}$$

( $\delta_{\pm} V_n = V_{n\pm 1}$ ,  $V_n(t)$  — напряжение в точке включения  $n$ -го диода); которое стандартным образом [7] сводится к системе уравнений для связанных нормальных волн рассматриваемой периодической структуры

$$[\delta - \delta_{1,2}(p)]v_{1,2}(n, t) = \mp \frac{\text{sh } \chi l}{2\text{sh } \theta} \delta_{1,2}(p) \rho i_{\text{нл}}(v_1 + v_2). \quad (4)$$

Здесь  $V_n(t) = v_1(n, t) + v_2(n, t)$ ,  $\delta = \delta_{+}$ ,  $\delta_{1,2} = e^{\pm\theta}$  — корни дисперсионного уравнения структуры [6]

$$\text{ch } \theta = \text{ch } \chi l - \frac{\rho g}{2} \text{sh } \chi l. \quad (5)$$

Значения напряжений нормальных волн  $v_{1,2}(n, t)$  определены только в местах включения диодов. Токи и напряжения в других точках линии определяются из формул (1), в которых следует заменить  $l$  произвольной координатой  $x < l$ , задающей расстояние от рассматриваемой точки до ближайшего слева диода, и положить

$$U(0, t) = V_n(t), \quad I(0, t) = \frac{\delta - \text{ch } \chi l}{\rho \text{sh } \chi l} V_n(t). \quad (6)$$

В отсутствие нелинейности ( $i_{\text{нл}} \equiv 0$ ) решения (4), описывающие независимое распространение встречных плавно модулированных нормальных волн, могут быть представлены в виде

$$v_{1,2}(n, t) = a_{1,2}(\varepsilon n, \varepsilon t) \exp(pt \pm \theta n), \quad (7)$$

где  $p, \theta$  связаны уравнением (5), отношение характерных масштабов несущей и огибающей  $\varepsilon \sim 1/\text{Im } p t_{\text{хар}} \sim 1/\text{Im } \theta N_{\text{хар}} \ll 1$  и амплитуды нормальных волн  $a_{1,2}$  подчиняются уравнениям

$$D_{1,2} \left( \delta, \frac{\partial}{\partial t} \right) a_{1,2} = (\delta - 1) a_{1,2}(\varepsilon n, \varepsilon t) - \varepsilon \frac{d \theta_{1,2}}{d p} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial (\varepsilon t)} - \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 \theta_{1,2}}{\partial p^2} + \left( \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial p} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 a_{1,2}}{\partial (\varepsilon t)^2} - \dots = 0, \quad (8)$$

получаемым из левой части (4) простым разложением закона дисперсии  $\delta_{1,2} \left( p + \varepsilon \frac{\partial}{\partial (\varepsilon t)} \right)$  в ряд Тейлора, причем величина  $\left( -\frac{dp}{d\theta} \right)$  является групповой скоростью пакета  $v_{\text{гр}}$ .

Наличие слабой нелинейности (правая часть (4)  $\sim \mu \equiv \rho g \ll 1$ ) приведет, с одной стороны, к малым изменениям несущей, проявляющимся в виде малых добавок к решениям (7), и, с другой стороны, к дополнительной плавной модуляции огибающей, описываемой малыми поправками к уравнениям (8):

$$v_{1,2} = a_{1,2} \exp(pt \pm \theta n) + \text{к. с.} + \mu w_{1,2}^{(1)} + \mu^2 w_{1,2}^{(2)} + \dots; \quad (9)$$

$$D_{1,2} \left( \delta, \frac{\partial}{\partial t} \right) a_{1,2} = \mu F_{1,2}^{(1)} + \mu^2 F_{1,2}^{(2)} + \dots \quad (10)$$

Отыскание поправок  $w, F$  осуществляется по стандартной схеме асимптотических методов теории нелинейных колебаний [8].

В рассматриваемом случае волнового автогенератора с дисперсией, процессы в котором представляют собой взаимодействие встречных квазисинусоидальных волн [1, 2], уравнения первого приближения имеют вид (при условии, что главной причиной модуляции является именно взаимодействие, т. е.  $\varepsilon = \mu$ )

$$a_{1,2}(n+1, t) - a_{1,2}(n, t) = -\mp \mu \left\{ 1/v_{\text{гр}} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \mu t} + \frac{\text{sh } \chi l}{2\text{sh } \theta} [1 - 3\alpha(|a_{1,2}|^2 + 2|a_{2,1}|^2)] \right\}. \quad (11)$$

При выводе (11) предполагалось, что зависимость мгновенного тока диода от напряжения в рабочем диапазоне частот может быть аппроксимирована выражением  $i = -gu(1 - \alpha u^2)$ .

Полученное уравнение отличается от своего квазираспределенного аналога [1, 2] заменой дифференциального оператора по координате на разностный и дополнительным множителем  $\sigma = \text{sh } \chi l / \text{sh } \theta$  перед усредненной характеристикой диода. Но поскольку  $\mu \ll 1$  и, следовательно,  $\theta \approx \chi l + \mu/2$  (см. (5)), отличия разностного оператора от

дифференциального и величины  $\sigma$  от единицы проявляются лишь в высших приближениях\*.

Таким образом, при слабой нелинейности нарушение условия квазираспределенности не приводит к изменению вида укороченных уравнений первого приближения для интенсивностей встречных квазимонохроматических волн. Это позволяет при расчете автогенераторов с дискретным включением диодов использовать результаты, полученные в [1, 2] для квазираспределенных систем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).
2. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 5, 987 (1966).
3. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 1, 128 (1967); 10, № 12, 1750 (1967).
4. Ю. К. Богатырев, К. А. Горшков, Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 464 (1976).
5. Ю. К. Богатырев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 3, 366 (1977).
6. Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.
7. А. А. Новиков, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 321 (1976).
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
17 июня 1977 г.

\* Сказанное требует уточнения в случае кратности периода структуры половине длины волны. При этом  $\text{Im } \chi l \approx \text{Im } \theta \approx \pi k$  и  $\sigma \approx \frac{\text{Re } \chi l}{\text{Re } \theta} \approx \frac{Q_-}{Q_{\text{хол}}}$  ( $Q_-$ ,  $Q_{\text{хол}}$  — соответственно отрицательная и «холодная» добротности системы; вид уравнений также не меняется).