

СОДЕРЖАНИЕ

Хакимова М., Цытович В. Н. Релятивистские солитоны и когерентное излучение пульсаров	621
Дмитренко Д. А., Турчин В. И., Фогель А. Л., Дмитренко Л. В., Игнатьев В. И., Пасманик Л. А., Савельев А. Н., Сысоев Ю. В. Результаты исследования 7-метровой антенны радиотелескопа фазометрическим методом	631
Рыжов В. А. К интерпретации измерений амплитуды и фазы интенсивных радиоволн в ионосфере	638
Хазанов Г. В., Коен М. А., Кудряшев Г. С. Кинетика электронов на высотах 100 — 260 км	646
Капитанов В. Я., Чмырев В. М. Питч-угловое рассеяние электронов при параметрической неустойчивости свистов в магнитосфере	659
Филоненко В. А., Румбешта Н. Н., Ручкин В. В., Фортес В. Б. Результаты экспериментальных исследований скорости переноса неоднородностей методом бипозиционного зондирования атмосферы	666
Будкин Л. А., Болдин В. Г., Пихтелев А. И. Атомно-лучевая трубка с лазерной накачкой и индикацией	673
Бойцов В. Ф. Свойства колецевых оптических резонаторов с пространственно-неоднородной усиливающей средой	682
Крестьянинов А. С., Митюков В. В. Косвенное измерение энергии светового луча	690
Апресян Л. А. К кумулянтному анализу стохастических линейных операторов .	698
Баскаков А. И. Исследование возможности использования сигналов с линейной частотной модуляцией для оценки взволнованности морской поверхности	710
Осташев В. Е., Татарский В. И. Ряд по кратности обратного рассеяния в задачах о распространении волн в неоднородных средах	714
Менсов С. Н. Влияние ограниченности апертуры фокусирующих систем на радиооптические преобразования	726
Бараш Ю. С. Энергетические характеристики для электронного магнитного поля в непоглощающей среде с частотной и пространственной дисперсией	736
Орлов Ю. И., Аниютин А. П. Комплексная пространственно-временная лучевая теория распространения гауссовых радиоимпульсов в диспергирующей среде	743
Файнштейн С. М. О генерации электромагнитных волн в плазме с релятивистским пучком	754
Жучков М. В., Клементьев Ф. М., Курин А. Ф., Нестеренко Ю. Н. О квадратичной группировке электронов, направляемых поперечно-неоднородными магнитостатическими полями	759
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Волков Н. В., Добреньков В. И., Инжеватова Л. А., Трофимов О. В. Тлеющий разряд с системой полых катодов	766
Мовчан С. П., Старченко Н. А. О поглощении микроволн в песчаных и глинистых грунтах	768

УДК 523.84

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СОЛИТОНЫ И КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЛЬСАРОВ

M. Хакимова, B. N. Цытович

Рассмотрен солитонный механизм радиоизлучения пульсаров. Рассчитана возможность излучения из-за конверсии солитонов в электромагнитные волны за счет неоднородности околопульсарной плазмы. Оценки показывают, что предлагаемая модель радиоизлучения пульсаров удовлетворительно описывает наблюдательные данные.

Общепринято, что радиоизлучение пульсаров связано с когерентным механизмом. Это следует из того, что эффективные температуры чрезвычайно высоки.

В принципе имеются две возможности возникновения когерентности — это: а) излучение сгустков частиц и б) развитие неустойчивости. Однако не всякая неустойчивость может длительно обеспечить большие эффективные температуры, так как обычно она переходит в режим насыщения, поэтому либо надо предполагать, что возникает стационарное турбулентное состояние [1], либо сама неустойчивость должна приводить к образованию стабильных сгустков частиц. В этом отношении наибольший интерес представляет модуляционная неустойчивость, которая развивается для ленгмюровских колебаний, если их энергия превышает некоторый порог. В пульсарах плазма, по-видимому, является релятивистской. Модуляционная неустойчивость релятивистской плазмы с одномерной функцией распределения рассматривалась в [2].

Для того, чтобы получить конкретные выводы об излучении электромагнитных волн при развитии модуляционной неустойчивости, необходимо рассмотреть нелинейную стадию.

Характерным для пульсаров является то, что движение частиц остается все время одномерным из-за сильного магнитного поля. Расчет одномерной модуляционной неустойчивости нерелятивистской плазмы показал, что на нелинейной стадии образуется система нелинейных сгустков — солитонов. В релятивистской плазме должно наблюдаться такое же явление, однако солитоны будут релятивистскими (такие солитоны были названы в [3] релятонами). Они были исследованы в [3] только для случая ультрарелятивистской максвелловской плазмы, однако околопульсарная плазма вряд ли является равновесной, и распределение частиц при больших энергиях подчиняется степенному закону $f_p = \sim \frac{1}{p^\gamma}$.

В теории плазменных турбулентных реакторов $\gamma = 3$ [4] для процессов синхротронного сжатия [1] $\gamma = 2$.

В настоящей работе обобщены результаты [3] на случай произвольных неравновесных функций распределения частиц и найдено, как ширина релятона зависит от характеристик функции распределения. Показано, что скорости релятонов не ограничены скоростью звука, а имеют произвольное значение вплоть до скоростей, сравнимых со скоростью света. Из результата анализа, проведенного в [3] для максвел-

ловского распределения, может показаться, что нелинейность определяется не только электронной, но и ионной плотностью. Из настоящей работы следует, что анализ [3] недостаточно корректен, хотя окончательный результат [3] является правильным с точностью до численного множителя порядка единицы при $T_e = T_i$. В частности, нелинейность определяется в действительности только электронной плотностью. Это и приводит, как показано, к возможности существования солитонов со скоростью, большей скорости звука вплоть до скоростей порядка скорости света.

Модуляционная неустойчивость наиболее эффективно развивается в той области, где частоты возмущений близки к плазменной частоте и имеют размеры, существенно превосходящие дебаевский радиус релятивистской плазмы. Возникнув в указанной области, солитоны начинают двигаться, в частности, в сторону уменьшения концентрации. При этом возникают два эффекта.

С одной стороны, увеличивается их скорость v , а с другой стороны, они превращаются в поперечные электромагнитные волны. При этом не происходит какой-либо трансформации продольных волн в поперечные из-за неоднородности, так как существует одна единая дисперсионная кривая, которая вблизи частот порядка плазменных является чисто продольной, а при больших частотах — чисто поперечной.

Задача настоящей работы — проследить механизм превращения релятонаов в электромагнитное излучение. Будет показано, что почти вся энергия релятонов превращается в электромагнитное излучение. В отличие от [3], где был предложен механизм излучения релятонов из-за кривизны магнитных силовых линий, т. е. неоднородностей магнитного поля, здесь обсуждаются механизмы, связанные с неоднородностью плотности плазмы, и показывается, что последний механизм является более эффективным, чем тот, который был рассмотрен в [3].

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕЛЯТОНОВ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

В настоящее время имеются возможности вывода уравнений для релятонов непосредственно из нелинейных уравнений для плазмы. Для этого можно воспользоваться методикой работы [5].

Рассмотрим вначале чисто продольные волны и аппроксимируем функцию распределения вида

$$f_p = \frac{n_* p_*}{\pi(p^2 + p_*^2)}. \quad (1)$$

Здесь p — импульс частиц вдоль силовых линий сильного магнитного поля, n_* — их полная концентрация, p_* — средний импульс в ультрарелятивистской плазме. Функция (1) при $p \gg p_*$ есть степенная функция с $\gamma = 2$.

Нелинейные уравнения для плазмы в компонентах Фурье могут быть записаны в виде

$$\epsilon_k E_k^+ = \frac{8\pi}{ik} \int \tilde{\sum}_{k, k_1, k_2, k_3} E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^- \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \quad (2)$$

где E^+ , E^- — соответствуют положительной и отрицательной частотам, а

$$\tilde{\sum}_{k, k_1, k_2, k_3} = \sum_{k, k_1, k_2, k_3} - \frac{8\pi i S_{k, k_1, k_2, k_3}}{|k - k_1| \epsilon_{k-k_1}}. \quad (3)$$

Здесь $\epsilon_{k=k_1}$ — линейная диэлектрическая проницаемость, S и Σ — нелинейные отклики, описывающие нелинейные плотности заряда:

$$\begin{aligned} \rho_k^{\text{нел}} = & \int S_{k, k_1, k_2}(E_{k_1}E_{k_2} - \overline{E_{k_1}E_{k_2}}) \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 + \\ & + \int \sum_{k, k_1, k_2, k_3} (E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3} - \overline{E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}} - \overline{E_{k_1}E_{k_2}}\overline{E_{k_3}}) \times \\ & \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Расчет этих нелинейных откликов приводит при $\omega \gg kc$, $\omega - \omega_1 \ll kc$ к следующим выражениям:

$$S_1 \approx -\frac{e^3 m c n_*}{\omega_*^2 p_*^3}, \quad S_2 \approx \frac{k}{k_2} \frac{e^3 m c n_*}{\omega_*^2 p_*^3}; \quad (5)$$

$$\Sigma = \frac{4e^4 k n_* c}{3i \omega_*^4 \pi p_*^3}, \quad (6)$$

и, наконец, диэлектрическая проницаемость соответственно равняется

$$\epsilon_{k=k_1} = 1 + \frac{\pi \omega_*^2}{(k - k_1)^2 c^2} \quad \text{при } \omega - \omega_1 \ll |k - k_1| c; \quad (7)$$

$$\epsilon_{k=k_1} = 1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2} - \frac{2(k_z - k_{1z})^2 c^2 \omega_*^2}{\omega^4} \quad \text{при } \omega_* \gg kc. \quad (7')$$

Для (3) находим

$$\tilde{\Sigma} \approx \frac{4e^4 k n_* c}{3i \omega_*^4 \pi p_*^3}, \quad (8)$$

где плазменная частота равняется $\omega_*^2 = \frac{8e^2 n_* c}{p_*}$.

Используя эти результаты и следующее выражение для амплитуды поля:

$$E(r, t) = \int E_k^+ e^{-i(\omega_* + \omega)} dk d\omega, \quad (9)$$

при выполнении условия $kc \ll \omega_*$ получим уравнение

$$\frac{i}{\omega_*} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{c^2}{\omega_*^2} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\alpha |E|^2 E, \quad (10)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{6p_* n_* c}. \quad (11)$$

Характерной особенностью рассматриваемого случая в отличие от нерелятивистского является то, что второй член (3) оказывается гораздо меньше, чем первый, т. е. компенсация отсутствует. Это видно также непосредственно из (8), где пренебрежено членом, имеющим порядок малости $\frac{m^2 c^2}{p_*^2}$. Отсутствие компенсации в релятивистском случае было

отмечено сравнительно давно [6]. Здесь же отметим важное следствие. Если в нерелятивистском случае нелинейность определяется ионной плотностью, то в данном случае она определяется только электронной плотностью. Это приводит к тому, что релятоны могут распространяться

со скоростью, большей звуковой. Это видно также из (10), где правая часть имеет отрицательный знак при любых скоростях. Правда, (10) выведено при условии $\omega/kc \ll 1$, т. е. скорость солитона меньше скорости света. Однако эта скорость может все же быть достаточно близкой к скорости света. На первый взгляд кажется, что в релятивистской плазме $v_s \approx c$, в действительности это отнюдь не обязательно, так как если ионы нерелятивистские, то скорость v_s определяется величиной $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{p_* c}{m_i}}$ и будет много меньше скорости света, если только $p_* \ll m_i c$. Следовательно, в этих условиях скорость релятивистов может превосходить скорость звука.

Из (10) стандартным методом получим решение в виде

$$E = E_0 \frac{\exp \left[-i\Omega t + i \frac{v}{2} \frac{\omega_*}{c^2} (z - vt) \right]}{\operatorname{ch} \frac{z - vt}{z_0}}, \quad (12)$$

где Ω — сдвиг частоты, равный

$$\Omega = -\omega_* \frac{v^2}{c^2} - \omega_* \frac{E_0^2}{12\varepsilon_* n_*},$$

а x_0 — ширина солитона,

$$z_0 = \sqrt{6\varepsilon_*^2/E_0^2 e^2}. \quad (13)$$

Ширина солитона согласно [3]

$$z_0 = \sqrt{8m_e^2 c^4 \gamma_*^2 / 3E_0^2 e^2},$$

что с точностью до численного множителя совпадает с (13).

Найдем функцию распределения

$$f_p = \frac{n_* m^2 c^4}{2\varepsilon^3}. \quad (14)$$

Для рассматриваемого случая плазменная частота равна:

$$\omega_p^2 = \frac{3\pi^2}{4} \frac{e^2 n_*}{m}.$$

Нелинейные отклики будут равны соответственно:

$$S_{k, k_1, k-k_1} = \frac{4}{5} \frac{e^3 k n_*}{\omega_p^2 (k-k_1) m^2}; \quad (15)$$

$$S_{k-k_1, k_1, k_3} = - \frac{4}{5} \frac{e^3 n_*}{\omega_p^2 m^2}; \quad (16)$$

$$\sum_{k, k_1, k_2, k_3} = \frac{105}{512} \frac{\pi e^4 k n_*}{i \omega_p^4 m^3}. \quad (17)$$

Используя для диэлектрической проницаемости выражения (7), $\tilde{\Sigma}$ запишем в виде

$$\sum_{k, k_1, k_2, k_3} = -0,03 \frac{\pi e^4 k n_*}{i \omega_p^4 m^3}. \quad (18)$$

В данном случае функция распределения такая, что фактически $p_* \sim mc$, а это значит, что функция распределения не является ультрапрелятивистской, но она и не нерелятивистская, поэтому в $\tilde{\Sigma}$ компенсации нет, однако оба члена имеют одинаковый порядок величины.

Можно указать общую методику, следуя которой можно находить ширину солитона для любой неравновесной релятивистской функции распределения.

Рассмотрим случай, когда в формуле (9) второй член имеет второй порядок малости и $\tilde{\Sigma}$ определяется только значением Σ . Для произвольной функции распределения можно написать Σ в виде

$$\Sigma_{k_1, k_2, k_3} = \frac{e^4 k}{i \omega_*^4} \int \epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{\partial f_p}{\partial p} dp, \quad (19)$$

тогда

$$\alpha = - \frac{8\pi}{ik} \Sigma_{k_1, k_2, k_3} = \frac{8\pi e^4}{\omega_*^4} \int \epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{\partial f_p}{\partial p} dp. \quad (20)$$

Определим плазменную частоту для общего случая:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{k} \int \frac{\partial f_p / \partial p}{\omega - kv} dp = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int \frac{\partial v}{\partial p} f_p dp. \quad (21)$$

Отсюда

$$\omega_*^2 = 4\pi e^2 \int \frac{\partial v}{\partial p} f_p dp. \quad (22)$$

Ширина солитона будет определяться выражением

$$z_0^2 = \frac{\omega_*^2 c^2}{2\pi E_0^2 e^4} \left[\int \epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{\partial f_p}{\partial p} dp \right]^{-1}, \quad (23)$$

или, подставляя в (23) общее выражение для плазменной частоты (22), получим

$$z_0^2 = \frac{e^2 c^2}{E_0^2 e^2} \frac{\int \frac{\partial v}{\partial p} f_p dp}{\int \epsilon \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{\partial f_p}{\partial p} dp}. \quad (24)$$

По этой формуле можно определять ширину солитона для любой неравновесной функции распределения.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РЕЛЯТОНОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

1. Ленгмюровская ветвь плазменных волн релятивистской плазмы в сильном магнитном поле в случае распространения под углом $\theta \gg \frac{m_e c^2}{\epsilon_*}$ является продольной только в непосредственной окрестности плазменной частоты ω_* , а при частотах, больших плазменных, переходит в чисто-поперечное. Вместе с тем, модуляционная неустойчивость (наиболее

эффективно развивается на дне дисперсионной кривой, т. е. солитоны, возникнув в указанной области, начинают двигаться в сторону уменьшения концентрации. Поскольку $\omega = \omega_p + k^2 c^2 / \omega_p = \text{const}$, то, очевидно, при уменьшении плазменной частоты должен увеличиваться волновой вектор, а при больших « k » продольные возмущения переходят в поперечные электромагнитные волны.

Как уже отмечалось во введении (подробнее см. [1]), в релятивистской плазме в сильном магнитном поле существует только одна ветвь колебаний, которая становится поперечной при $k > \omega_p/c$ и $\vartheta \gg \frac{\epsilon_e c^2}{\epsilon_*} \left(\cos \vartheta = \frac{(kH)}{kH} \right)$. Поэтому основной задачей является отыскание механизма, ответственного за конверсию солитонов в инфинитные распространяющиеся волны той же ветви (все волны имеют поперечную составляющую). В общем случае градиент концентрации направлен вдоль силовой линии. Однако для превращения солитонов в инфинитные волны последнее мало существенно, и мы рассматриваем простейший случай, когда градиент концентрации направлен по магнитному полю. Вычисляется эффективность превращения солитонов в обычные волны. Первоначально солитоны имеют некоторую компоненту $k_{\perp 0}$, которая сохраняется при движении в неоднородной плазме, тогда как продольная компонента растет. При $k_z \sim \omega_*/c$ угол ϑ составит $k_{\perp 0}/\omega_*$, что, как правило, в интересующих нас случаях существенно больше $\frac{\epsilon_e c^2}{\epsilon_*}$, т. е. инфинитные волны будут поперечными. Мы покажем, что эффективная конверсия солитонов в инфинитные волны происходит только при выполнении условия когерентности, т. е. длина волны λ инфинитных волн должна удовлетворять условию $\lambda > z_0$. Для инфинитных волн нелинейности слабые и в первом приближении приводят к мало существенному постоянному сдвигу частот, а их дисперсия является линейной. Поэтому задача состоит в расчете конверсии солитона в почти линейные периодические волны из-за неоднородности плазмы.

Рассмотрим уравнение Максвелла в неоднородной плазме. Предположим, что движение происходит не строго вдоль магнитных силовых линий, а волновой вектор имеет небольшую компоненту, поперечную магнитному полю. Как известно [7], в этом случае решение дисперсионного соотношения получается в виде

$$\epsilon_k = \epsilon_{k, \omega} + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2}. \quad (25)$$

Запишем уравнение Максвелла, учитывающее нелинейные отклики следующим образом:

$$\left(\epsilon_{k, \omega} + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_z^2 c^2 - \omega^2} \right) E_k^+ = -\alpha \int E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^- \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \times \\ \times dk_1 dk_2 dk_3, \quad (26)$$

где

$$\alpha = -\frac{8\pi}{ik} \tilde{\sum}_{k, k_1, k_2, k_3}.$$

Модуляционная неустойчивость развивается на дне дисперсионной кривой, т. е. солитоны первоначально возникают в области $k < \omega_*/c$, где диэлектрическая проницаемость имеет вид (7). Тогда

$$\left(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega^2} - \frac{2k_z^2 c^2}{\omega^2} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}\right) E_k = -\alpha |E|^2 E_k. \quad (27)$$

Солитоны начинают двигаться по магнитным силовым линиям. В пульсарах магнитные силовые линии искривлены, с радиусом порядка радиуса звезды. Плотность падает радиально от центра звезды, но, как мы уже отметили, можно рассмотреть частный случай, когда градиент концентрации направлен по магнитному полю. Неоднородность связывает различные моды волн, в частности уединенные финитные солитоны с инфинитными электромагнитными волнами.

Будем рассматривать этот эффект, считая интенсивность электромагнитных волн малой и пренебрегая нелинейными эффектами для электромагнитных волн. Предположим также, что связь электромагнитных волн с солитонами осуществляется за счет неоднородности плазмы.

Мы можем принять, что солитоны двигаются по оси z , а под некоторым углом распространяются периодические электромагнитные волны. Взаимодействия солитонов с периодическими волнами при наличии неоднородности приводят к излучению электромагнитных волн.

Подсчитаем мощность излучения. Решение уравнения (27) имеет вид

$$E^{\text{сол}} = E_0 \frac{\exp \left[-i\Omega t + i \frac{k_{\perp 0}^2 c^2}{\omega_*^2} t + i \frac{v}{c^2} \frac{\omega_*}{2} (z - vt) + i\psi + ik_{\perp 0} r_1 \right]}{\operatorname{ch} \frac{\omega_*(z - vt)}{2\sqrt{2}c} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}}. \quad (28)$$

В слабонеоднородной плазме концентрация плотности меняется по следующему закону:

$$n = n_0 - \frac{z}{L} n'.$$

В уравнении (27) от плотности зависит плазменная частота. В выражении для плазменной частоты обозначим часть, не зависящую от z , через ω_*^{02} :

$$\omega_*^2 = \frac{8e^2 c}{p_*} n_* \left(1 - \frac{z}{L}\right) = \omega_*^{02} \left(1 - \frac{z}{L}\right).$$

Перенесем член, зависящий от координаты, в правую часть, т. е. запишем (27) в виде

$$\left(1 - \frac{\omega_*^{02}}{\omega^2} - \frac{2k_z^2 c^2}{\omega^2} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}\right) E_k = -\frac{z}{L} E_k. \quad (29)$$

Если мы в правую часть (29) подставим поле солитона, то в левой получим поле периодической электромагнитной волны, которая создается первой, т. е.

$$\left(1 - \frac{\omega_*^{02}}{\omega^2} - \frac{2k_z^2 c^2}{\omega^2} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}\right) E_k^{\text{н. в.}} = -\frac{z}{L} E_k^{\text{сол.}} \quad (30)$$

В результате как бы получается, что мы имеем справа ток

$$j_k = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_*^0}{L} \frac{\partial}{\partial k_z} E_k^{\text{сол.}} \quad (31)$$

который создает поле $E_k^{\text{н. в.}}$.

Известно, что мощность излучения — это работа, которую создает поле $E_k^{\text{н.в.}}$ над током j_k , его создающим, т. е.

$$Q = - \int j(z, t) E_{-k_z, \omega}^{\text{н.в.}}(z, t) dz. \quad (32)$$

Переходя к фурье-компонентам, получим

$$Q = -(2\pi)^3 \int j_{k_z, \omega} E_{-k_z, \omega}^{\text{н.в.}} e^{-i(\omega + \omega_1)t} dk_z d\omega d\omega_1. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражение $E_{-k_z, \omega}^{\text{н.в.}}$ из (30) и $j_{k_z, \omega}$ из (31), после интегрирования по частотам ω и ω_1 и волновому числу k_z получим

$$Q = \frac{Q_0}{L^2} f(\eta), \quad (34)$$

где

$$Q_0 = \frac{\pi^2}{4} \gamma_*^2 c \frac{m_e c^2}{r_0}. \quad (35)$$

Здесь r_0 — классический радиус, $\gamma_* = \varepsilon_*/m_e c^2$, а

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}}{\operatorname{ch}^4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\eta} \sqrt{1-\eta^2}}; \quad (36)$$

$$\eta = \sqrt{2} \frac{c}{v} \sqrt{\frac{E_0^2}{12\varepsilon_* n_*}} \quad (37)$$

— некоторая безразмерная переменная.

Анализируя функцию (36), находим максимальное значение $\eta = 0,93$, при котором функция (36) имеет максимум ($f_{\max}(\eta) = 0,89$). График этой функции изображен на рис. 1. Из графика видно, что при $\eta > 1$ эффективность конверсии становится равной нулю. Это следует и из (36). Условие $\eta < 1$ совпадает с критерием когерентности излучения. Это очевидно, если в (38) вместо v подставить групповую скорость kc^2/ω_x . Тогда $\eta < 1$ соответствует

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} > z_0. \quad (38)$$

2. Используя интегралы для импульса, энергии и числа квантов [8], вычислим импульс P , энергию H и число релятивонов N в неоднородной плазме:

$$H = - \frac{E_0^2}{V^2} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}} + \frac{1}{2V^2} E_0^2 \sqrt{\frac{6\varepsilon_* n_*}{E_0^2}}; \quad (39)$$

$$P = \frac{m_e v}{V^2 c} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}} + V^2 \frac{m_e v}{c} \frac{E_0^3}{(6\varepsilon_* n_*)^{3/2}}; \quad (40)$$

$$N = V^2 \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}. \quad (41)$$

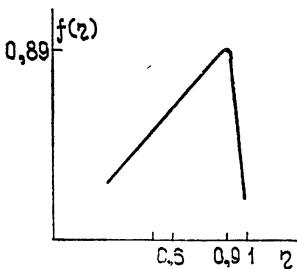


Рис. 1.

Релятоны при движении в неоднородной плазме будут ускоряться в сторону убывания плотности. Действительно, поскольку из (40) и (41) при $N = \text{const}$ следует, что амплитуда поля постоянная, то в неоднородной плазме будет меняться скорость. Для того, чтобы найти изменение скорости релятона, необходимо вычислить изменение импульса из-за неоднородности:

$$\frac{dP}{dt} = \int \delta v \frac{\partial}{\partial z} |E|^2 dz = 2\sqrt{2} \frac{m_e c^2}{L} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}, \quad (42)$$

где

$$\delta v = \frac{\delta n}{n_0}.$$

Взяв производную от (40), приравняем ее (42); получим

$$\frac{dv}{dt} = 6 \frac{c^2}{L} \frac{1}{1 + 2E_0^2/6\varepsilon_* n_*}. \quad (43)$$

С другой стороны, на рис. 1 мы выберем две точки $\eta_1 = 0,6$ и $\eta_2 = 0,95$. Излучение происходит по мере того, как η будет проходить все значения от 0,6 до 0,95, следовательно, это есть то время Δt , в течение которого происходит излучение. Соответственно значениям η_1 и η_2 соответствуют

следующие значения для скоростей из (38)): $v_1 = \frac{c}{0,6} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}$ и $v_2 = \frac{c}{0,95} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}$, отсюда

$$v_2 - v_1 = \left(\frac{1}{0,6} - \frac{1}{0,95} \right) c \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}} = c(t_2 - t_1). \quad (44)$$

Из (43) находим

$$\Delta t = \frac{L v}{6c^2} (1 + 2E_0^2/6\varepsilon_* n_*). \quad (45)$$

3. Полная мощность излучения будет равняться мощности излучения одного солитона Q в течение времени Δt , умноженной на поверхность некоторой сферы πL_1^2 , с которой происходит излучение, и на $N_1 v$. Здесь N_1 — число солитонов в одном сантиметре длины. Найдем зависимость N_1 от начальной амплитуды. Для спектральной плотности энергии имеем

$$W^l = N_1 E L,$$

где E — энергия каждого солитона, равная

$$E = \int_{(\infty)}^{\infty} \frac{|E|^2}{4\pi} dz = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \varepsilon_* n_* \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}. \quad (46)$$

Отсюда

$$N_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}\pi} \frac{1}{L} \frac{W^l}{\varepsilon_* n_*} \sqrt{\frac{E_0^2}{6\varepsilon_* n_*}}. \quad (47)$$

Окончательно имеем следующее выражение для полной мощности излучения:

$$Q = Q_0 \frac{v}{c} \left(1 + 1,6 \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{W^l}{\varepsilon_* n_*} \frac{L_1^2}{L^2}. \quad (48)$$

ОБСУЖДЕНИЕ

Для конкретных оценок в выражении мощности необходимо оценить параметр L_1/L , где L — это длина, с которой происходит излучение солитона, а πL_1^2 определяет площадь той поверхности, с которой собирается излучение. Хотя значение L_1/L может быть разным в разных моделях, разумно считать, что $L_1/L = 10; 100$. Далее естественно считать солитоны сильными, т. е. положить $E_0^2 \sim 6 \epsilon_* n_*$. Из формулы (37) видно, что при $\gamma_* \approx 1$, $v \sim c$ $E_0^2 \sim 6 \epsilon_* n_*$. Используя эти предположения, из выражения (35) для Q_0 видим, что мощность излучения зависит только от фактора γ_* и не зависит от плотности. В модели Каплана, Цытовича [1] при $\gamma_* = \frac{\epsilon_*}{m_e c^2} \approx 3 \cdot 10^3$ получим для Q_0 следующую величину:

$$Q_0 \approx 5,5 \cdot 10^{24} \text{ эрг/с.}$$

Для модели Старрока [9] ($\gamma_* \approx 10^7$) получим

$$Q_0 \approx 1,3 \cdot 10^{27} \text{ эрг/с.}$$

Для оценки полной мощности излучения нужно знать уровень турбулентности. При сильной турбулентности из соображений равнораспределения энергии разумно считать $W/n_* p_* c \approx 1$. Если, кроме того, положить $L_1/L \sim 10$, то в модели Каплана—Цытовича $Q \approx 10^{27}$ эрг/с, а в модели Старрока [9] $Q \approx 10^{31}$ эрг/с. Эти цифры разумны, и, следовательно, предлагаемый механизм способен объяснить радиоизлучение пульсаров. Он более эффективен, нежели механизм, связанный с излучением солитонов из-за кривизны магнитных силовых линий.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С А Каплан, В Н Цытович, Плазменная астрофизика, изд Наука, М, 1972
- 2 М Хакимова, Ф Х Хакимов, В Н Цытович, Изв АН Арм. ССР, серия Астрофизика, 12, 351 (1976).
- 3 V I Kargman, C A Norgman and V N Tsytovich, Physica Scripta, 11, 271 (1975).
- 4 В Н Цытович, А М Игрицкий, А С Чихачев, Астрон ж (в печати).
- 5 Ф Х Хакимов, В Н Цытович, ЖЭТФ, 68, 95 (1975)
- 6 А Гайлитис, В. Н Цытович, ЖЭТФ, 46, 1455 (1964)
- 7 В. Н Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М, 1971
- 8 A N Lebedev and V N Tsytovich, Physica Scripta, 11, 326 (1975).
9. P. A Sturrock, Appl. J, 164, 629 (1971).

Институт астрофизики АН Тадж ССР

Поступила в редакцию
15 октября 1976 г

RELATIVISTIC SOLITONS AND COHERENT RADIATION OF PULSARS

M. Khakimova, V. N. Tsytovich

A soliton mechanism of pulsar radiation is considered. The possibility of radiation induced by the soliton conversion into electromagnetic waves due to inhomogeneities of the circumpulsar plasma is calculated. Estimations show that the model of pulsar radiation suggested describes satisfactorily the observational data,

УДК 621.396.628

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ 7-МЕТРОВОЙ АНТЕННЫ РАДИОТЕЛЕСКОПА ФАЗОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Д. А. Дмитренко, В. И. Турчин, А. Л. Фогель, Л. В. Дмитренко,
В. И. Игнатьев, Л. А. Пасманик, А. Н. Савельев, Ю. В. Сысоев

Приводятся результаты измерения фазометрическим методом диаграммы направленности 7-метровой антенны радиотелескопа. Анализируются источники экспериментальных ошибок, выявленных в процессе измерений.

В настоящее время получил развитие метод определения диаграммы направленности (ДН) антенны по угловому распределению ее ближнего поля на участке сферической поверхности в зоне Френеля (фазометрический или голограммический метод) [1-4]. В данной работе приводятся результаты определения указанным методом ДН двух идентичных 7-метровых антенн*, обсуждаются вопросы практической реализации и возможные источники погрешностей метода.

Исследуемые антенны представляли собой осесимметричные двухзеркальные системы кассегреновского типа (диаметр первичного зеркала $D=7,0\text{ м}$, диаметр вторичного зеркала $d=1,05\text{ м}$, фокусное расстояние $2,5\text{ м}$) с рупорно-линзовым облучением. Антенны были установлены на полноповоротном устройстве с электрическим приводом, что позволяло измерять распределение ближнего поля на сферической поверхности, используя неподвижный излучатель**.

Излучатель (рупор с раскрытием порядка 2λ) устанавливался на вышке высотой около 25 м на расстоянии $R=100\text{ м}$ и $R=52\text{ м}$ от исследуемой антенны. Опорный сигнал, необходимый для выполнения фазовых измерений, принимался на вспомогательную антенну (рупор с усилением ~ 150), расположенную на расстоянии $5-8\text{ м}$ от исследуемой антенны.

В процессе измерений исследуемая антenna последовательно принимала угловые ориентации α_n , β_m (α — азимут, β — угол места):

$$\alpha_n = \alpha_0 + n \Delta\alpha, \quad \beta_m = \beta_0 + m \Delta\beta, \\ n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad m = -\frac{M-1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2},$$

α_0 , β_0 — угловые координаты направления на излучатель, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ — угловые расстояния между замерами ближнего поля. Величины $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и угловые размеры сектора $N\Delta\alpha \times M\Delta\beta$ выбирались так, чтобы в дальнейшем можно было определить главный и один-два боковых лепестка ДН [4].

В каждой угловой ориентации регистрировался сигнал на выходе антенно-фидерного тракта. Полученная таким путем информация о рас-

* Результаты экспериментальной проверки метода см. также в [1-5].

** Антенны исследовались на прием.

пределении ближнего поля на участке сферической поверхности фиксировалась в виде

а) голограммы Γ_{nm} :

$$\Gamma_{nm} = |A^{(0)}|^2 + |A_{nm}^{(c)}|^2 + \gamma_{nm},$$

где $A^{(0)} = |A^{(0)}| \exp(i\varphi^{(0)})$ — опорный сигнал, снимаемый со вспомогательной антенны, $A_{nm}^{(c)} = |A_{nm}^{(c)}| \exp(i\varphi_{nm}^{(c)})$ — сигнал с исследуемой антенны в n - m -й угловой ориентации, γ_{nm} — интерференционный член голограммы:

$$\gamma_{nm} = 2 |A^{(0)}| |A_{nm}^{(c)}| \cos(\varphi_{nm}^{(c)} - \varphi^{(0)} + \varphi_{\Phi}),$$

где φ_{Φ} — набег фазы, вводимый фазовращателем, установленным в тракте исследуемой антенны;

б) интерференционного члена голограммы γ_{nm} ;

в) реальной и мнимой частей ближнего поля $E_{nm}^{(r)}$, $E_{nm}^{(i)}$,

$$E_{nm}^{(r)} = |A_{nm}^{(c)}| \cos \varphi_{nm}^{(c)}, \quad E_{nm}^{(i)} = |A_{nm}^{(c)}| \sin \varphi_{nm}^{(c)},$$

либо амплитуды $|A_{nm}^{(c)}|$ и фазы $\varphi_{nm}^{(c)}$ ближнего поля.

Для последующего выделения информации о ДН в случаях а) и б) параллельно с перестановкой антены из одной угловой ориентации в другую менялся набег фазы фазовращателя по закону $\varphi_{\Phi} = m\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = 120^\circ$ при измерении голограммы [6] и $\Delta\varphi = 90^\circ$ при измерении интерференционного члена.

Измерение голограмм производилось с помощью голографической приставки [1] и измерителя мощности на базе модуляционного приемника П5-16, измерение интерференционного члена — при помощи приставки к модуляционному приемнику, собранной по образцу схем, используемых для формирования суммарно-разностных диаграмм (см., например, [7]). Блок-схема приставки к модуляционному приемнику показана на рис. 1. Измерение реальной и мнимой части ближнего поля производилось с помощью указанных приставок путем последовательного измерения четырех голограмм либо двух интерференционных членов с разным набегом фазы фазовращателя; амплитуда и фаза измерялись обычным амплифазометром. В качестве примера на рис. 2 приведено центральное сечение амплитуды и фазы ближнего поля, измеренных на частоте $f = 2,98 \text{ ГГц}$ при расстоянии до излучателя $R = 100 \text{ м}$.

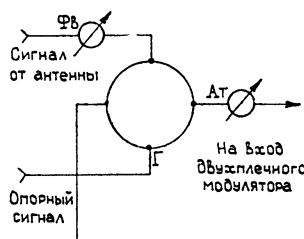


Рис. 1. Блок-схема приставки к модуляционному приемнику:
Фв — фазовращатель, Г — гибридное кольцо (или двойной Т-мост), Ат — аттенюатор, необходимый для балансировки схемы.

Результаты измерений, представлявшие собой матрицу чисел (либо две матрицы в случае измерения реальной и мнимой частей поля), вводились в ЭВМ БЭСМ-4* и пересчитывались в ДН по программам, приведенным в [8]. При обработке голограмм из них предварительно вычиталась постоянная составляющая. В качестве алгоритма пересчета в ДН использовалось комплексное преобразование Френеля либо алгоритм с дополнительной пространственной фильтрацией [4].

* Данные в процессе измерений кодировались и набивались на перфокарты, которые затем непосредственно вводились в ЭВМ.

Вычисленная ДН сравнивалась затем с результатами измерения ДН методом фокусировки на источник в ближней зоне [9, 10]. Хотя метод фокусировки имеет определенную методическую погрешность (см. например, [10]), в данном случае она была невелика, что подтверждалось, в частности, результатами проверки этого метода именно на исследуемых антенных [11]. На рис. 3—8 приведены центральные сечения ДН, вычисленные по результатам измерений ближнего поля и измеренные методом фокусировки*. Данные о способах измерения ближнего поля, соответствующих приведенному на каждом рисунке сечению вычисленной ДН, алгоритме обработки и т. д. см. в табл. 1. На рис. 9 показана рельефная ДН, вычисленная по голограмме ближнего поля, на рис. 10 — ДН, измеренная методом фокусировки. На рис. 11 показан рельеф кросс-поляризационной компоненты ДН, вычисленной по результатам измерений ближнего поля (отдельные сечения кросс-поляризационной компоненты см. в [12]).

Как видно из рис. 3—8, в главном лепестке оба метода дают хорошее совпадение, а в боковых лепестках имеет место некоторое расхождение результатов, полученных путем обработки измерений в ближней зоне и методом фокусировки. Причиной подобного расхождения можно считать погрешности измерения углового распределения ближнего поля**. В качестве источников указанных погрешностей можно отметить следующие факторы:

а) конечную точность измерительного прибора и погрешность установки антенны в заданную угловую ориентацию, приводящую в основном к внесению фазовой погрешности в результаты измерений;

б) фазовые уходы, обусловленные частотной нестабильностью генератора, запитывающего излучатель, при наличии нескомпенсированной разности длин в опорном и исследуемом каналах (при относительной расстройке частоты на $\Delta f/f$ разность фаз $\varphi^{(e)} - \varphi^{(0)}$ меняется на величину $2\pi(\Delta l/\lambda)(\Delta f/f)$, где Δl — разность длин в каналах);

в) взаимное влияние вспомогательной и исследуемой антенн, выражающееся в модуляции опорного сигнала при вращении исследуемой антенны за счет попадания доли мощности, отраженной от исследуемой антенны, на раскрыв вспомогательной.

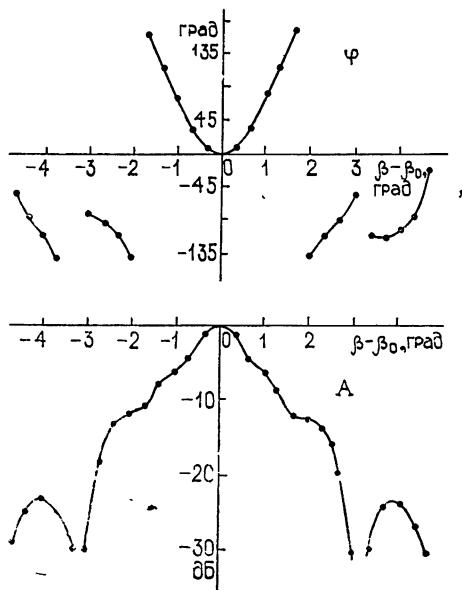


Рис. 2. Центральное сечение амплитуды A и фазы φ углового распределения ближнего поля 7-метровой антенны на волне $\lambda \sim 10$ см при расстоянии до излучателя 100 м.

* Отметим, что рис. 3, 4 относятся к одной антенне, а рис. 5—8 — к другой. Обе антенны обладают на волне 10 см достаточно высокой идентичностью (рис. 3, 4 и 5, 6), поэтому при интерпретации полученных результатов не делалось различия между обеими антеннами.

** Как показали дополнительные расчеты, систематическая погрешность, обусловленная конечными угловыми размерами сектора, где измерялось ближнее поле, и дискретностью измерений, в случаях, представленных на рис. 3—8, пренебрежимо мала.

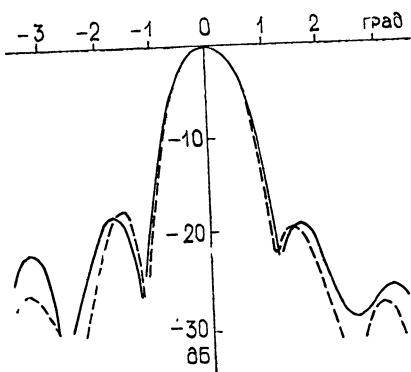


Рис. 3.

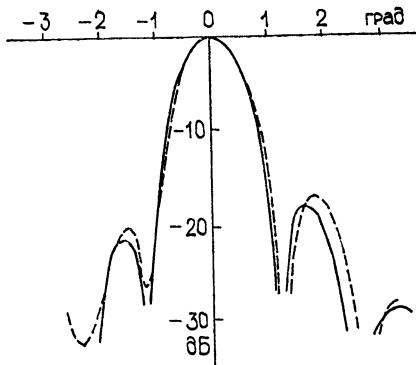


Рис. 4.

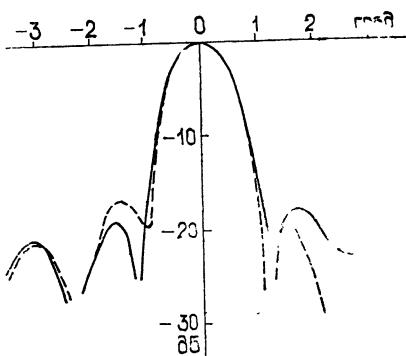


Рис. 5.

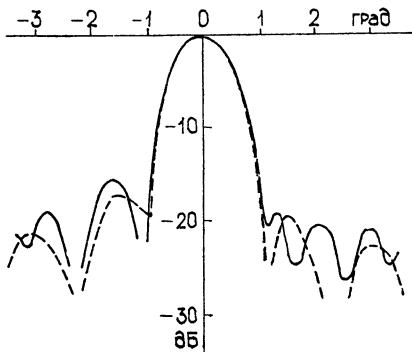


Рис. 6.

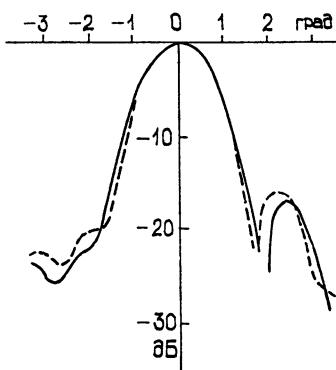


Рис. 7.

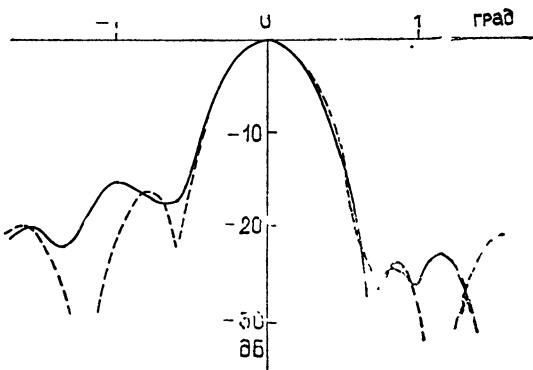


Рис. 8.

Рис. 3—8. Центральные сечения ДН, вычисленные по распределению ближнего поля (сплошная линия) и измеренные методом фокусировки (штриховая линия).

Таблица 1

Данные об измерениях ближнего поля							Алгоритм обработки
Номер рисунка, на ко- тором представлено се- чение вычисленной ДН	Измерительная аппаратура	Способ представления данных о распределении ближнего поля	$R, м$	$f, ГГц$	$\Delta\alpha, \Delta\beta,$ угл. мин	$N \times M$	
3	Ампифазометр	Амплитуда и фаза	100	2,98	20; 20	29×29	Пространственная фильтрация
4	Голографическая приставка	Голограмма	"	3,00	10; 30	61×21	"
5	Приставка к модуля- ционному приемнику	Интерференционный член голограммы	52	"	20, 40	4×121	"
6	"	Реальная и мнимая части поля	"	"	50; 50	21×21	Комплексное преобразование Фурьея
7	"	Интерференционный член голограммы	"	1,96	25; 50	41×21	"
8	"	Реальная и мнимая части поля	"	5,68	30; 30	27×27	"

Факторы а), б) носили в основном случайный характер. Как показано в [13], наличие случайных погрешностей измерения амплитуды и фазы ближнего поля, статистически независимых в разных замерах с дисперсиями σ_a , σ_φ , приводит к относительной погрешности δ определения ДН на уровне η (дБ):

$$\delta \approx \frac{R}{\sqrt{S_a}} \sqrt{\Delta \alpha \Delta \beta} \frac{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_\varphi^2}}{10^{0.05\eta}}, \quad (1)$$

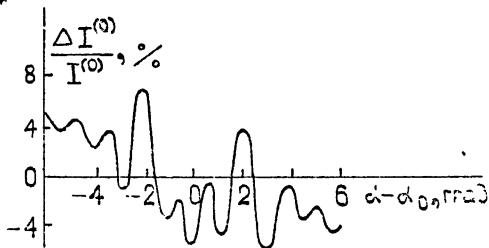


Рис. 12 Относительное изменение уровня опорного сигнала $\Delta I/I^{(0)}$ при изменении угловой ориентации исследуемой антенны

где S_a — эффективная площадь исследуемой антенны. Фактор в) наиболее сильно сказывается на точности определения ДН, когда изменение опорного сигнала при вращении исследуемой антенны (см. рис. 12) близко к синусоидальному с периодом в несколько λ/D . В этом случае динамический диапазон значений ДН η_{\min} (минимальный уровень, на котором ДН может быть определена правильно) составляет

$$\eta_{\min} \approx 20 \log \left(\left| \frac{\Delta I^{(0)}}{I^{(0)}} \right| \right) (\text{дБ}),$$

где $\Delta I/I^{(0)}$ — относительное изменение интенсивности опорного сигнала.

Таблица 2

Номер рисунка, на котором показано соответствующее сечение вычисляемой ДН	Погрешности измерения ближнего поля						
	экспериментальная погрешность измерения ближнего поля		погрешность измерительного прибора		погрешность установки антенны в заданное угловое положение, угл. мин	фазовая погрешность, соответствующая ошибке наведения, град	$\frac{\Delta I^{(0)}}{I^{(0)}}$, %
	амплитуда, дБ	фаза, град	амплитуда, дБ	фаза, град			
3	0,7	13	0,8	3	2	3	$\pm 0,5$
7	1,0	7	0,2 - 0,4	3-5	"	"	± 10

В качестве примера в табл. 2 приведены погрешности измерения ближнего поля* для случаев рис. 3, 7, указанных в табл. 1. В соответствии с формулой (1) погрешность определения ДН для случая рис. 3 составляет 1,2 дБ на уровне —18 дБ (уровень 1-го бокового лепестка), что и имеет место в действительности (см. рис. 3). Для случая рис. 7 погрешность определения диаграммы на уровне —20 дБ сравнительно велика из-за сильной модуляции опорного сигнала, ограничивающей динамический диапазон определяемой ДН величиной около 20 дБ.

* Экспериментальная погрешность определения амплитуды и фазы, приведенная в табл. 2, находилась по нескольким измерениям одного и того же распределения ближнего поля путем усреднения взаимных столкновений полученных данных по всем измерениям и всем угловым ориентациям.

Такого же рода обоснования можно привести и для остальных результатов, приведенных на рис. 3—8.

В заключение отметим, что даже при сравнительно больших погрешностях измерения (см. табл. 2) удалось получить практически приемлемую точность определения бокового лепестка. Дальнейшее повышение точности определения ДН может быть получено за счет уменьшения влияния перечисленных выше источников погрешностей; требуемая для заданной погрешности определения ДН точность измерений может быть найдена с учетом результатов, полученных в [13, 14].

Авторы выражают искреннюю благодарность Н. М. Цейтлину за постоянное внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Д. С. Арутюнян, ДАН СССР, 201, № 3, 580 (1971).
- 2 Д. С. Арутюнян, А. П. Курочкин, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1623 (1971).
- 3 В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, ДАН СССР, 205, № 4, 820 (1972).
- 4 В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, А. К. Чандаев, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 725 (1973).
- 5 В. И. Игнатьев, Ю. В. Сысоев, В. И. Турчин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 8, 1152 (1975).
- 6 А. П. Курочкин, В. И. Троицкий, Радиотехника и электроника, 14, № 4, 710 (1969).
- 7 D. I. Zulch, H. P. Taylor and G. B. Jones, IEEE Trans Aerosp and Electron. Syst., AES-6, № 5, 663 (1970).
- 8 В. И. Турчин, Восстановление на ЭВМ диаграмм направленности антенн по результатам фазометрических измерений с помощью источника в зоне Френеля I Алгоритмы и организация программ. II Тексты программ, Препринты НИРФИ № 48, 49, Горький, 1972.
- 9 В. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1131 (1970).
- 10 Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 2, 262 (1973).
- 11 Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 14, № 12, 2108 (1969).
- 12 В. А. Варганов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 1, 158 (1973).
- 13 В. И. Турчин, В. А. Фарфель, А. Л. Фогель, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 72 (1976).
- 14 И. В. Капун, А. П. Курочкин, Радиотехника и электроника, 20, № 10, 2038 (1975)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 ноября 1976 г,
после доработки
20 июля 1977 г.

RESULTS OF INVESTIGATION OF 7-METER ANTENNA BY PHASOMETRIC METHOD

D. A. Dmitrenko, V. I. Turchin, A. L. Fogel', L. V. Dmitrenko
V. I. Ignat'ev, L. A. Pasmanik, A. N. Savel'ev, Yu. V. Sysoev

The radiation pattern of 7-meter antenna is measured by the phasometric method and the results are given. Sources of the experimental errors found in the process of measurements are analysed.

УДК 621.371.25

К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ИНТЕНСИВНЫХ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

B. A. Рыжов

Приведены результаты численного интегрирования уравнения переноса энергии электромагнитного импульса в ионосфере. Показано, что измерения фазы и амплитуды мощных радиоимпульсов, отраженных от *E*-слоя, находятся в соответствии с теоретическими расчетами параметров самовоздействия. Рассмотрен тепловой эффект взаимодействия плоских волн в изотропной плазме и обсуждается вопрос о его влиянии на измерения характеристик самовоздействия радиоволн в ионосфере.

Распространение мощного радиоимпульса в ионосфере сопровождается, как известно, нелинейным поглощением импульса и значительными изменениями его фазы. При вертикальном зондировании ионосферы отраженный импульс имеет характерную зависимость фазы с одним максимумом внутри импульса [1]. В данном эксперименте проводились измерения амплитуды и фазы радиоимпульсов длительностью $\tau_0 = 600 \text{ мкс}$ на частоте $f_0 = 1,35 \text{ МГц}$, близкой к местной гирочастоте электронов. Количественная оценка этих измерений дана в работе [2]. Причем в [2] предполагается, что нагрев электронов происходит в поле монохроматической волны, т. е. температура электронов считается установившейся. Однако, например, появление максимума фазы внутри импульса связано с нестационарными процессами (в частности, с релаксацией температуры электронов в *D*-слое), и представления о стационарном нагреве электронов оказываются недостаточными для более точного сравнения результатов эксперимента [1] и теории. В настоящей работе рассматриваются качественные особенности взаимодействия радиоволн с различными частотами и приведены результаты численного интегрирования уравнений, описывающих самовоздействие радиоимпульсов в ионосфере*.

1. Рассмотрим взаимодействие встречных волн близких частот в однородной изотропной плазме, которое обусловлено нагревной нелинейностью среды. Исходными являются волновое уравнение для поля, уравнение баланса энергии электронов и уравнение движения электронов:

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 (\epsilon E)}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial j}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = -\frac{2}{3} evE - \delta v(T_e - T); \quad (2)$$

* В процессе публикации статьи автору стало известно, что задача о взаимодействии радиоволн с близкими частотами была рассмотрена в более общем виде в работах [4, 5]. Однако некоторые конкретные результаты, представляющие интерес при интерпретации измерений [1, 2], не были получены в [4, 5]. Содержание настоящей работы тесно связано с проблемой взаимодействия волн. В этой связи представляется целесообразным привести результаты исследования частного случая взаимодействия волн, выполненного автором данной работы.

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu \mathbf{v}, \quad e > 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, σ — диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы, T_e и T — температуры электронов и тяжелых частиц, δ — средняя относительная доля энергии, теряемой электроном при соударении с молекулами, ν — эффективная частота столкновений электронов с молекулами, зависимость которой от температуры электронов предполагается линейной. Поле встречных электромагнитных волн представим в виде

$$\mathbf{E} = E_p [\cos(\omega_1 t - k_1 z - \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + k_2 z - \varphi_2)], \quad (4)$$

где $E_p = (3 m_e T \delta \omega^2 / e^2)^{1/2}$ — плазменное поле для тепловых эффектов, $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Рассмотрим случай взаимодействия высокочастотных волн ($\omega_{1,2} \gg \nu$) для малой расстройки частоты $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ ($\Delta\omega/\omega \ll 1$). Имея в виду условия эксперимента [1], в уравнении (2) не учитываем теплопроводность среды. В ионосфере ниже 100 км явления переноса, а также стрикционные эффекты несущественны. Как известно, при $\delta \ll 1$ параметры δ и ν даже в сильном поле ($E > E_p$) зависят лишь от температуры электронов и не зависят от скорости \mathbf{v} направленного движения электронов. В этом случае уравнения (2) и (3) фактически разделяются и с точностью до малых членов порядка $\delta\nu/\omega$ решение уравнения (3) сводится к суперпозиции осцилляторных движений:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_{1,2} = -\frac{e}{m_e} \frac{E_p a_{1,2}}{\omega_{1,2}} [\nu \cos(\omega_{1,2} t \pm k_{1,2} z - \varphi_{1,2}) + \omega_{1,2} \sin(\omega_{1,2} t \pm k_{1,2} z - \varphi_{1,2})].$$

Подстановка выражений (4) и (5) в уравнение (2) приводит последнее к виду

$$\frac{d\theta}{dt} + \delta\nu(\theta - 1) = \delta\nu [m_1 + m_2 + 2\sqrt{m_1 m_2} \cos(\Delta\omega t - (k_1 + k_2)z + \varphi_2 - \varphi_1)], \quad (6)$$

где $\theta = T_e/T$, $m_{1,2} = a_{1,2}^2$ — относительные интенсивности волн. В правую часть уравнения (6) не включены компоненты выражения \mathbf{v} , \mathbf{E} , которые дают вклад в решение для температуры электронов порядка малости параметров δ , $\Delta\omega/\omega$, $\delta\nu/\omega$. Рассмотрим частный случай: $\delta(T_e) = \text{const}$.

Решение уравнения (6) имеет наиболее простой вид при $\nu(\theta) = \text{const} = \nu_0$:

$$\theta = 1 + m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2} \left\{ \frac{\delta\nu_0 (\delta\nu_0 + i\Delta\omega)}{(\delta\nu_0)^2 + (\Delta\omega)^2} \times \right. \\ \left. \times \exp \{-i[\Delta\omega t - (k_1 + k_2)z + \varphi_2 - \varphi_1]\} + \text{к.с.} \right\}. \quad (7)$$

Взаимодействие высокочастотных волн проявляется особенно сильно, если интенсивность одной из волн значительно превышает интенсивность другой волны. При условии $m_1 \gg m_2$ решение уравнения (6) можно найти для произвольной зависимости $\nu(\theta)$ разложением в ряд по малому параметру $\eta = \frac{2\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} : \theta = \theta_0 + \eta\theta_1(t) + \eta^2\theta_2(t) + \dots$. Два первых члена разложения дают решение (7) с заменой в этом выражении ν_0

на $\nu(\theta_0)$, где $\theta_0 = 1 + m_1 + m_2$. Следующие члены ряда $\theta_n(t)$ описывают взаимодействие волн с кратными частотами $n\omega_1$ и $n\omega_2$.

Характер взаимодействия волн ясен из выражения (7). При условии $\Delta\omega \gg \delta\nu$ температура электронов определяется суммой интенсивностей волн, и, очевидно, резонансный эффект взаимодействия волн в этом случае не возникает.

Для слабой нелинейности решение уравнения (1) можно найти методом Ван-дер-Поля. В результате получим следующие уравнения для интенсивностей и фаз взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dz} &= \mu_0 m_1 (1 + m_1 + \sigma m_2), \\ \frac{dm_2}{dz} &= -\mu_0 m_2 (1 + \alpha m_1 + m_2), \\ \frac{d\varphi_1}{dz} &= \frac{1}{2} \beta \mu_0 m_2, \\ \frac{d\varphi_2}{dz} &= \frac{1}{2} \beta \mu_0 m_1, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma(\theta) = \sigma_0 \theta$ — высокочастотная проводимость плазмы,

$$\alpha = \frac{2(\delta\nu)^2 + (\Delta\omega)^2}{(\delta\nu)^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad \beta = \frac{\delta\nu\Delta\omega}{(\delta\nu)^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad \mu_0 = \frac{4\pi\sigma_0}{cn_0}$$

— коэффициент поглощения волны в ненагретой плазме, $m_{1,2} \ll n_0$, x_0 и n_0 — показатели поглощения и преломления. Отсутствие фазовой модуляции волн при $\omega_1 = \omega_2$ связано с тем, что в рассматриваемом приближении ($\omega \gg \nu$) не учитывалась зависимость ϵ от ν при выводе уравнений (8). Для расстройки $\Delta\omega \neq 0$ в выражении (7) содержится член, пропорциональный $\sin \Delta\omega t$. Он обусловливает появление компонентов индуцированного тока, которые имеют сдвиг фаз $\Delta\varphi = \pi/2$ относительно полей E_1 и E_2 встречных волн и которые вызывают изменения диэлектрической проницаемости среды. В наличии этого тока легко убедиться, составляя выражение $j = \sigma(E)E$. При $\omega_1 = \omega_2$ указанные компоненты тока обращаются в нуль и j представляет собой нелинейный ток проводимости. В этом случае фазовая модуляция волн определяется лишь нелинейными изменениями диэлектрической проницаемости $\epsilon(\nu)$ порядка малости $(\nu/\omega)^2$. Взаимодействие волн особенно сильно проявляется в поведении интенсивности и фазы слабой волны ($m_1 \gg m_2$). Если расстройка частоты $\Delta\omega \sim \delta\nu$, то фазовая модуляция волн $\varphi_{1,2}(z)$ в принципе может быть весьма значительной. Для линейной зависимости частоты столкновений электронов с молекулами $\nu(0) = \nu_0 \theta$ уравнения интенсивностей имеют первый интеграл:

$$m_1 m_2 \left[(1 + m_1 + m_2)^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{\delta\nu_0} \right)^2 \right]^{1/2} = \text{const.} \quad (9)$$

Как следует из формулы (9), взаимодействие монохроматических волн всегда существенно при расстройке частоты $\Delta\omega \lesssim \delta\nu_0$.

При интерпретации измерений амплитуды и фазы мощных радиоимпульсов, отраженных от E -слоя ионосферы, эффект взаимодействия волн не принимался во внимание [2]. В процессе самовоздействия падающей волны изменяется ее частотный спектр и в пределах масштаба

времени порядка длительности импульса можно рассматривать взаимодействие падающей и отраженной волн с различными частотами. Эквивалентная расстройка частоты этих волн будет равна $\Delta\omega \approx \frac{d\psi}{d\tau}$, где $\psi(\tau)$ —

зависимость фазы высокочастотного заполнения в импульсе. При максимальной мощности возмущающего передатчика ($P = 0 \text{ дБ}$) нелинейное поглощение падающей волны эффективно происходит на высотах $80 - 85 \text{ км}$ [2] (0 дБ соответствует величине поля в D -слое порядка $10 E_p$). При этом расстройка частоты достигает величины $\Delta\omega \sim 30 \text{ кГц}$, и, как показывают оценки, расстройка $\Delta\omega \approx \delta\nu$ для данного интервала высот. Это означает, что искажения частотного спектра падающей волны в основном возникают в области возмущений температуры электронов, где выполняется условие $\omega \approx \nu(\theta)$. Выше 85 км величина $\delta\nu_0 \leq 1 \text{ кГц}$, параметр $m_1 \leq 10$ и согласно формуле (9) эффективность взаимодействия волн резко падает.

В работе [3] рассмотрен общий случай резонансного взаимодействия встречных волн. В частности, в [3] показано, что взаимодействие низкочастотных волн приводит к ослаблению поглощения слабой волны в $m_1^{1/3}$ раз ($\omega \ll \nu, m_1 \gg m_2, \Delta\omega = 0$). Для высокочастотных волн, напротив, должно наблюдаться дополнительное увеличение поглощения в m_1 раз (см. (9)). При условии $\omega \approx \nu$, очевидно, происходит взаимная компенсация эффектов дополнительного увеличения и ослабления поглощения взаимодействующих волн. На частотах волн $\omega/2\pi \sim f_0$ ниже 80 км частота столкновений $\nu \geq \omega$, коэффициент поглощения $s_0 = (2 \cdot 10^{-3} \div 10^{-4})$, и здесь нелинейное взаимодействие падающей и отраженной волн можно не учитывать вследствие малости поглощения волн.

2. Приведенные выше оценки позволяют рассматривать вариации амплитуды и фазы отраженных радиоимпульсов на частоте $f_0 = 1,35 \text{ МГц}$ как результат самовоздействия волн. Рассмотрим нормальное падение обыкновенной волны на ионосферный слой. Уравнения, которые описывают распространение мощного электромагнитного импульса, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_{rp} \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{a_1}{2n_0} \frac{dn_0}{dz} + \frac{a_1}{z} + \frac{\omega_0}{c} \times (\theta, z) a_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - v_{rp} \left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{a_2}{2n_0} \frac{dn_0}{dz} - \frac{a_2}{2z_0 - z} - \frac{\omega_0}{c} \times (\theta, z) a_2 \right) &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \delta\omega_0 s_0(z) \theta (\theta - 1) &= \frac{\delta\omega_0 s_0 a^2 \theta}{4 + s_0^2 \theta^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta\phi$, a_1 и a_2 — относительные амплитуды падающей и отраженной волн (см. (4)), $\Delta\phi$ — разность фаз этих волн, как и ранее, $\theta = T_e/T$ — относительная температура электронов (в D -слое $T \approx 300 \text{ К}$), $s_0 = v_0(z)/\omega_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $v_{rp} \approx c n_0$ — групповая скорость волны, z_0 — точка отражения зондирующего импульса. Уравнение для температуры электронов отличается от уравнения (6). Здесь учтено, что в эксперименте [1] рост температуры электронов обусловливается поглощением обыкновенной волны на частоте $f_0 = f_H$, где f_H — местная гирочастота электронов. Члены a_1/z и $a_2/2z_0 - z$ учитывают расходимость сферической волны, излучаемой наземным передатчиком. Отметим также, что в уравнениях поля (10) не учитывается нелинейность показателя преломления волн. Согласно измерениям [1, 2] вариации фазы в радиоимпульсе достигают величины около $0,5\pi$ при мощности передатчика $P = 0 \text{ дБ}$. Это означает, что локальные вариации показателя

преломления и групповой скорости волны при нагреве D -слоя малы и, в частности, относительная величина изменений показателя преломления $\Delta n/n \leq 10^{-2}$. Очевидно, поправки к зависимости амплитуды и фазы в импульсе, обусловленные нелинейной зависимостью $n(a)$, будут порядка $\Delta n/n$, и они малосущественны, если учесть, что точность измерений фазы в [1, 2] была порядка 0,1 радиан. Так как величина $\Delta n/n$ мала, то для конкретных вычислений использовалось упрощенное выражение

$$\text{для разности фаз } \Delta\varphi = \frac{\omega_0}{c} \int_{z_1}^z n_0 dz, \text{ где } \Delta z = (z_0 - z_1) \text{ — толщина слоя.}$$

Таким образом, самовоздействие волн описывается только нелинейной зависимостью показателя поглощения χ от температуры электронов. Без учета взаимодействия волн, рассмотренного выше, можно также считать, что расстройка частот падающей и отраженной волн $\Delta\omega = 0$. Система уравнений (10) интегрировалась численно для краевых и начальных условий

$$\begin{aligned} a_1(0, z) &= a_2(0, z) = 0, & a_1(t, z_0) &= a_2(t, z_0), \\ \theta(0, z) &= 1, & a_1(t, 0) &= F(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Начальная форма импульса $F(t)$ показана на рис. 1 а. Характерные масштабы фронтов импульса выбраны в соответствии с экспериментом: $t_1 = 8 \cdot 10^{-5}$ с, $t_2 = 4,5 \cdot 10^{-4}$ с, $t_3 = 6 \cdot 10^{-4}$ с. Стационарная температура электронов имеет максимум на высотах 75—80 км, и затем в глубине слоя она быстро падает на расстоянии $l \sim 10$ км.

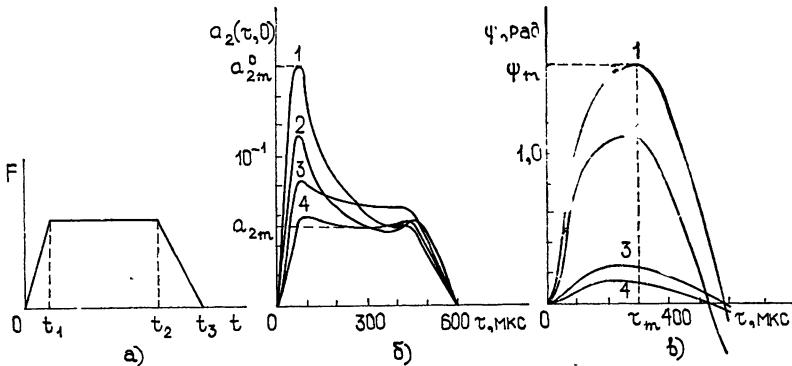


Рис. 1.

Днем возмущения температуры электронов малы вблизи точки отражения и отражение волны можно считать для простоты зеркальным, а расчет фазы волны выполнять в приближении геометрической оптики. В этом случае вариации фазы $\psi(\tau)$ в импульсе можно рассчитывать по формуле

$$\psi(\tau) = \psi_1(\tau) - \psi_1^0,$$

$$\psi_1^0 = \frac{\omega_0}{c} \int_{z_1}^{z_0} [n_0(z) + n(t_1, z)] dz, \quad (12)$$

$$\psi_1(\tau) = \frac{\omega_0}{c} \int_{z_1}^{z_0} [n(t_2, z) + n(t_3, z)] dz,$$

где $t_1 = t_0 + \int_z^{z_0} \frac{dz}{v_{rp}}$, $t_0 = \int_{z_1}^{z_0} \frac{dz}{v_{rp}}$, $t_2 = \tau + \int_{z_1}^z \frac{dz}{v_{rp}}$, $t_3 = t_0 + \tau + \int_z^{z_0} \frac{dz}{v_{rp}}$, $n_0 = n(0, z)$ и $n(t, z)$ — показатель преломления нагретой среды.

На рис. 1 б, в показаны расчетные зависимости амплитуды и фазы отраженного импульса на границе D -слоя ($z = z_1$)*. Зависимости (1), (2), (3), (4) соответствуют следующим значениям параметров P и δ : 1 — $P = 0 \text{ дБ}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$, 2 — $P = 0 \text{ дБ}$, $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$, 3 — $P = -13 \text{ дБ}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$, 4 — $P = -13 \text{ дБ}$, $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$. Как видно из рис. 1в, в процессе самовоздействия волны внутри импульса формируется максимум фазы. Его положение в импульсе, определяемое временем τ_m , зависит от мощности передатчика. При увеличении мощности от -13 до 0 дБ τ_m растет от 240 до 300 мкс . Согласно измерениям величина τ_m равна $250-320 \text{ мкс}$, т. е. соответствие расчета и эксперимента очевидно. При заданной мощности передатчика τ_m зависит также от δ . При $\delta = -(2 \div 4) \cdot 10^{-3}$ вариации τ_m порядка 20 мкс . Однако следует отметить, что методика измерений фазы не позволяет уверенно контролировать такие изменения τ_m , поэтому по величине τ_m нельзя делать определенные заключения о величине δ . При нагреве электронов монохроматической волной самовоздействие характеризуется фазой $\varphi = \frac{\omega_0}{c} \int_{z_1}^z (n - n_1) dz$

и параметром $q = \ln \frac{a_2^0(z_1)}{a_2(z_1)}$, где $a_2^0(z_1)$ — амплитуда отраженной волны в невозмущенной ионосфере.

Аналогичные характеристики ψ_m и $q_m = \ln \frac{a_{2m}^0}{a_{2m}}$ можно ввести для импульсных сигналов (см. рис. 1 б, в). В табл. 1 приведены результаты расчета этих параметров**.

Таблица 1

δ	$P, \text{дБ}$	$\varphi, \text{рад}$	q	$\psi_m, \text{рад}$	q_m
$2 \cdot 10^{-3}$	0	1,44	1,55	1,57	1,14
	-13	0,25	0,38	0,26	0,25
$4 \cdot 10^{-3}$	0	1,04	1,23	1,10	0,86
	-13	0,14	0,24	0,15	0,16

Отсюда видно, что величина максимума фазы ψ_m близка к расчетной величине фазы, полученной из решения стационарной задачи. Напротив, q сильно отличается от q_m . Отличие связано с тем, что в области отра-

* Изменение формы огибающей отраженного импульса исследовалось также в работе [6] на основе уравнений, аналогичных (10). Результаты численного интегрирования уравнений переноса энергии импульса и температуры электронов в настоящей работе и в [6] достаточно хорошо согласуются. Фазовый эффект самовоздействия в [6] не рассматривался.

** Для вычислений фазы использовались такие же невозмущенные профили электронной концентрации и частоты столкновений электронов с молекулами, как и в работе [2].

жения волны температура электронов не устанавливается на стационарном уровне. Выше 90 км она заметно отличается от стационарной температуры. Это видно из рис. 2, где приведена зависимость температуры электронов от высоты в различные моменты времени. Случай $t \rightarrow \infty$ соответствует установившейся температуре электронов при нагреве плазмы монохроматической волной. Различие q и q_m является также следствием того, что величина q_m определяется не только величиной поля в импульсе, но и скоростью его нарастания на переднем фронте импульса, т. е. зависит от длительности этого фронта. Вариации фазы выше 90 км малы ($\omega_0 \gg v$), поэтому стационарное приближение оказывается вполне пригодным для расчета фазового эффекта самовоздействия радиоимпульсов. Из сравнения измеренных параметров самовоздействия с φ , q получены значения $\delta = (2 \div 4) \cdot 10^{-3}$ [2]. Однако, если проводить сравнение экспериментальных данных с ψ_m и q_m , то возникает несоответствие в оценке δ . Так как ψ_m близка к φ , то прежняя оценка δ по измерениям фазы сохраняется. При этом экспериментальная величина q_m превышает расчетную, т. е. требуются значения $\delta \leq 2 \cdot 10^{-3}$. Расхождение результатов можно объяснить взаимодействием падающей и отраженной волн, хотя ранее было показано, что взаимодействие волн будет менее эффективным по сравнению со случаем точного резонанса ($\Delta\omega = 0$).

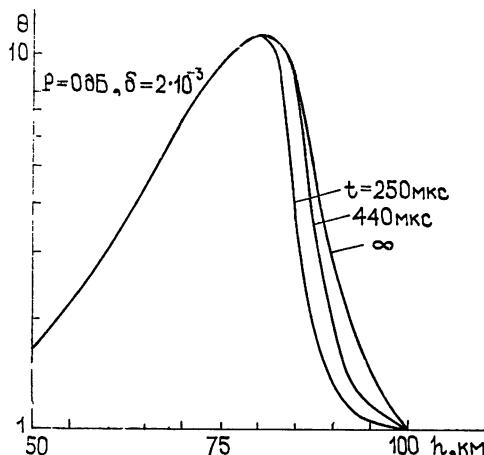


Рис. 2.

Автор признателен В. Н. Гольдбергу и А. А. Цветкову за выполнение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С Н Матюгин, Н. А Митяков, В А Рыжов, И С Шлюгер, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 10, 1549 (1975)
- 2 З Н Кротова, Н Д Крупеня, В А Рыжов, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 1, 72 (1977)
- 3 Н А Митяков, М И Рабинович, В О Рапопорт, Л Е Штильман, ЖЭТФ, 65, вып 5 (11), 1893 (1973)
- 4 В В Плоткин, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 2, 175 (1977)
- 5 В В Плоткин, М Е Фрейман, Изв вузов — Радиофизика, № 20, № 5 (1977)
- 6 А В Гуревич, И С Шлюгер, Изв вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1237 (1975)

TO THE INTERPRETATION OF MEASUREMENTS OF PHASE AND AMPLITUDE
OF INTENSE RADIO WAVES IN THE IONOSPHERE*V. A. Ryzhov*

Equations of the energy transfer of an electromagnetic pulse in the ionosphere are numerically integrated and the results are given. It is shown that variations of the phase and amplitude of powerful radio pulses reflected from *E*-layer agree with the theoretical calculations of self-action parameters. The thermal effect of the plane wave interaction in an isotropic plasma is considered and the problem is discussed on its influence on the measurement of characteristics of radio waves self-action in the ionosphere.

УДК 551.510 535

КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОНОВ НА ВЫСОТАХ 100—260 км

Г. В. Хазанов, М. А. Коен, Г. С. Кудряшев

В рамках самосогласованной модели, включающей кинетическое уравнение для фотоэлектронов, уравнения для n_e , T_e , NO^+ , O_2^+ , O^+ , $\text{N}_2^{\#}$, $\text{O}(\text{I}^{\text{D}})$ и T_y (колебательная температура N_2), проведено исследование влияния различных процессов на вид функции распределения электронов в нижней ионосфере

При исследовании ряда вопросов физики ионосферной плазмы, связанных с изучением процессов энергообмена, возбуждения, вторичной ионизации и др., необходимо знать вид функции распределения электронов, образующихся под действием УФ и рентгеновского излучения Солнца на нейтральные составляющие верхней атмосферы. Расчет функции распределения электронного газа достаточно сложен и представляет собой самостоятельный раздел физики ионосферной плазмы [1–3].

Обычно решение кинетического уравнения для фотоэлектронов ($\Phi\Theta$) проводится при заданных значениях параметров ионосферной плазмы. Между тем, процессы, протекающие в тепловой и надтепловой частях спектра, существенно взаимосвязаны, и роль некоторых из них может быть выявлена в рамках самосогласованного описания $\Phi\Theta$ и средних (гидродинамических) характеристик тепловой плазмы.

В настоящей работе рассматривается кинетическое уравнение для спектра $\Phi\Theta$ при параметрах ионосферной плазмы, соответствующих нижней ионосфере на высотах 100–250 км. Основное внимание уделено возможным упрощениям в методах описания интегралов столкновений и исследованию влияния различных физических процессов на вид функции распределения $\Phi\Theta$.

На высотах $h < 230$ км процессами переноса электронов обычно пренебрегают [1, 4], и кинетическое уравнение для них записывается в виде

$$S_{ee} + S_{ei} + S'_{ei} + S_{en} + S^*_{en} + S^+_{en} + q = 0, \quad (1)$$

где S — интегралы столкновений, q — источник $\Phi\Theta$ (первичный спектр).

В теории $\Phi\Theta$ вместо функции распределения f , связанной с концентрацией (n) и температурой (T) соотношениями

$$n = 4\pi \int_0^\infty f(v) v^3 dv \quad \text{и} \quad T = \frac{4\pi m}{3kn} \int_0^\infty f(v) v^4 dv,$$

вводят величину спектра $\Phi\Theta$ Φ ($\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-1} \cdot \text{стера} \text{д}^{-1}$):

$$\Phi(E) = \frac{2E}{m^2} f(E), \quad E = \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Будем искать решение (1) в виде

$$\Phi = \Phi_{\tau} + \Phi_{\phi}, \quad (3)$$

где

$$\Phi_{\tau} = \frac{2E}{m^2} f_{\tau}, \quad f_{\tau} = n_e \left(\frac{m}{2\pi k_B T_e} \right) \exp \left(-\frac{E}{k_B T_e} \right), \quad (4)$$

а Φ_{ϕ} — добавка к тепловой части спектра электронов, которую условно можно назвать спектром ФЭ.

Тогда интеграл электрон-электронных столкновений, который согласно [5] имеет вид*

$$S_{ee} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(A_1 v f + A_2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right], \quad (5)$$

где

$$A_1 = \frac{a}{v^3} \int_0^v v_1^2 f(v_1) dv_1, \quad A_2 = \frac{a}{3v^3} \left[\int_0^v v_1^4 f(v_1) dv_1 + v^3 \int_v^{\infty} v_1 f(v_1) dv_1 \right], \quad a = \frac{32 \pi^2 e^4 \ln \Lambda}{m^2},$$

с учетом (2), (3) можно преобразовать к форме

$$S_{ee} = S_{ee}^{(\tau)} + S_{ee}^{(\phi)}. \quad (6)$$

Здесь

$$S_{ee}^{(\tau)} = A n_e \frac{\partial}{\partial E} \left[A'_1 \frac{\Phi_{\tau}}{E} + A'_2 \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi_{\tau}}{E} \right) \right],$$

$$S_{ee}^{(\phi)} = A n_e \frac{\partial}{\partial E} \left[A'_1 \frac{\Phi_{\phi}}{E} + A'_2 \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi_{\phi}}{E} \right) \right],$$

$$A'_1 = B + \frac{4\pi}{n_e} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^E \frac{\Phi_{\phi}}{\sqrt{E_1}} dE_1,$$

$$A'_2 = B k_B T_e + \frac{8\pi}{3n_e} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\int_0^E \sqrt{E_1} \Phi_{\phi} dE_1 + E^{3/2} \int_E^{\infty} \frac{\Phi_{\phi}}{E_1} dE_1 \right),$$

$$A = 2\pi e^4 \ln \Lambda, \quad B = \Phi(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}, \quad X^2 \equiv \frac{E}{k_B T_e}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Аналогичные преобразования с выделением тепловой (τ) и надтепловой частей спектра электронного газа (ϕ) были проведены для интегралов столкновений, описывающих другие типы взаимодействия электронов с заряженной и нейтральной компонентами верхней атмосферы. Следуя [5, 7] и учитывая (2), представим интегралы столкновений полностью.

Упругие столкновения с ионами (S_{ei}) и нейтральным газом (S_{en})

$$S_{ei} = AN_i \frac{m}{M_i} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{\Phi}{E} + k_B T_i \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi}{E} \right) \right]; \quad (8)$$

$$S_{en} = 2 \frac{m}{M_n} n_n \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \sigma_n E^2 \left[\frac{\Phi}{E} + k_B T_n \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi}{E} \right) \right] \right\}, \quad (9)$$

* Здесь и далее предполагается, что на высотах $h \leq 230$ км $f(v) = f(v)$ [6].

где i — ионы, n — нейтральные частицы, σ_n — сечение упругих столкновений.

Неупругие столкновения, приводящие к диссоциативной рекомбинации (S'_{ei}), возбуждению (S^*_{en}) и ионизации (S^+_{en}), можно представить в виде

$$S'_{ei} = -\sigma_i N_i \Phi; \quad (10)$$

$$S^*_{en} = \sum_{j,k} n_j^k [\sigma_{jk}(E \pm E_{jk}) \Phi(E \pm E_{jk}) - \sigma_{jk} \Phi]; \quad (11)$$

$$S^+_{en} = \sum_I n_j \left[\int_{E+E_{jn}}^{2E+E_{jn}} J_{jn}(E_1, E_1 - E - E_{jn}) \Phi(E_1) dE_1 + \right. \\ \left. + \int_{2E+E_{jn}}^{\infty} J_{jn}(E_1, E) \Phi(E_1) dE_1 - \sigma_{jn} \Phi \right]. \quad (12)$$

Здесь σ_i — сечение рекомбинации, σ_{jk} — сечение возбуждения (или девозбуждения), $E_{jk(n)}$ — пороговое значение энергии неупругих столкновений, J_{jn} , σ_{jn} — дифференциальное и полное сечения ионизации соответственно. Возбуждению в (12) соответствует знак (+), девозбуждению — (-) [3].

Процессы девозбуждения учитывались при описании девозбуждения тонкой структуры атомарного кислорода, колебательных и вращательных уровней O_2 и N_2 . Для последних можно воспользоваться приближением непрерывных потерь [5] и, учитывая принцип детального равновесия и Больцмановский характер распределения по уровням [8], преобразовать выражение (11) к виду

$$S^*_{en} = \frac{\partial}{\partial E} \left\{ E \sum_{j,k} n_j^k \frac{E_{jkk'}^2}{k_B T_n} \sigma_{j(kk')} \left[\frac{\Phi}{E} + k_B T_n \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi}{E} \right) \right] \right\}. \quad (13)$$

Здесь учтено, что потери энергии при переходе с уровня k на k' $E_{j(k,k')} \ll k_B T_n$.

Основной вклад в сечение вращательного возбуждения вносят переходы с уровня k на $k+2$, для которых сечение имеет вид [9]

$$\sigma_{j(k,k+2)} = \frac{8\pi Q_0}{15} \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \left[1 - \frac{2B_j(2k+3)}{E} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь Q_{0j} , B_j — квадрупольный момент молекулы и постоянная вращения соответственно.

Суммируя (13) по всем переходам, с учетом (14), нетрудно получить

$$S_{en} = \frac{32\pi Q_{0j}}{15} B_j n_j \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{E^2}{16B_j k_B T_n} \right) \exp \left(-\frac{E^2}{16B_j k_B T_n} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi + k_B T_n E \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\Phi}{E} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

После подстановки в уравнение (1) преобразованных согласно (3) интегралов столкновений получим кинетическое уравнение для функции Φ_Φ , определяемой суммой вида

$$\Sigma S_{ab}^{(\Phi)}(\Phi_\Phi) + \Sigma S_{ab}^{(r)}(\Phi_r) + q = 0. \quad (16)$$

Гидродинамические уравнения для n_e и T_e можно получить стандартным образом, усредняя исходное кинетическое уравнение с весом 1 и E соответственно.

Анализ уравнения (16) показывает, что его решение может дать функцию Φ_ϕ , близкую по величине к Φ_τ в области тепловых энергий. Это приведет к резкой нелинейности кинетического уравнения из-за нарушения неравенства $N_\phi \ll n_e$ (см. (7)) и к сильной взаимосвязи кинетического и гидродинамического уравнений, связь которых становится возможной лишь при наличии малого параметра N_ϕ/n_e .

Подобной ситуации можно избежать, учитывая определенный произвол в разбиении Φ в (3) на 2 части и подбирая вид уравнения для определения добавки таким образом, чтобы уменьшить ее величину и тем самым сохранить справедливым вышеуказанное неравенство. Легко показать, что к этому приводит разбиение уравнения (16) на 2 части:

$$\begin{aligned} \Sigma S_{ab}^{(\Phi)}(\Phi_\phi) + q &= 0; \\ \Sigma S_{(a)b}^{(\tau)}(\Phi_\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

где уравнение (17) можно назвать кинетическим уравнением для ФЭ, а (18) — уравнением для тепловой части электронного спектра.

Уравнение непрерывности для тепловых электронов получим, интегрируя (1) по энергии при условии $n_e \gg N_\phi$:

$$q_n + \Delta q_n - \alpha_r n_e N_t = 0, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= 4\pi \int_0^\infty q(E) dE, \quad \Delta q_n = 4\pi \sum_j n_j \int_0^\infty \int_{2E+E_{jn}}^\infty J_{jn}(E_1, E) \Phi(E_1) dE_1 \\ \alpha_r &= \frac{4\pi}{n_e} \int_0^\infty \sigma_i \Phi dE \end{aligned} \quad (20)$$

— скорость фотоионизации, скорость вторичной ионизации и коэффициент диссоциативности рекомбинации соответственно.

Уравнение для электронной температуры получим интегрированием по энергии кинетического уравнения тепловой части спектра электронного газа (18) с весом E :

$$Q + L_{ei} + L'_{ei} + L_{en} + L^*_{en} = 0. \quad (21)$$

Здесь

$$Q = 4\pi \int_0^\infty E S_{ee}^{(\tau)} dE, \quad L_{ab} = 4\pi \int_0^\infty E S_{ab}^{(\tau)} dE \quad (22)$$

— нагрев тепловых электронов ФЭ и потери энергии при соударении тепловых электронов с ионами и нейтральными частицами. В (21) мы пренебрегаем процессами L_{en}^+ , а учитываем лишь неупругие потери энергии (L^*_{en}), идущие на возбуждение тонкой структуры атомарного кислорода и колебательных и вращательных уровней O_2 и N_2 .

Найдем конкретный вид потерь энергии тепловыми электронами при их взаимодействии с заряженными и нейтральными составляющими верхней атмосферы. Проводя последовательное интегрирование L_{ab} с интегралами столкновений (8)–(13) и выражая входящие сюда постоянные их численными значениями, получим

а) для соударений с ионами

$$L_{el} = - \frac{8.2 \cdot 10^{-6}}{M_i T_e^{\gamma_2}} n_e N_i (T_e - T_i), \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1},$$

где M_i выражается в *a.e.m.*;

б) при диссоциативной рекомбинации

$$L_{ei}^r = - 8.6 \cdot 10^{-5} (\alpha_{\text{NO}^+} \text{NO}^+ + \alpha_{\text{O}_2^+} \text{O}_2^+) n_e T_e, \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1},$$

где

$$\alpha_{\text{NO}^+} = \frac{1.35 \cdot 10^{-4}}{T_e}, \quad \alpha_{\text{O}_2^+} = \frac{6.6 \cdot 10^{-5}}{T_e} [10];$$

в) при упругих столкновениях с нейтральными частицами [11]

$$L_{en} = - n_e [1.8 \cdot 10^{-19} n(\text{N}_2) T_e (1 - 1.21 \cdot 10^{-4} T_e) + 1.2 \cdot 10^{-18} n(\text{O}_2) T_e^{1/2} \times \\ \times (1 + 3.6 \cdot 10^{-2} T_e^{1/2}) + 5.3 \cdot 10^{-19} n(\text{O}) T_e^{1/2} (1 + 5.7 \cdot 10^{-4} T_e)] (T_e - \\ - T_n), \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1};$$

г) при возбуждении тонкой структуры атомарного кислорода [11]

$$L_{en}^* = - 3.4 \cdot 10^{-12} n_e n(0) \frac{T_e - T_n}{T_n} (1 - 7 \cdot 10^{-5} T_e), \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1};$$

д) при колебательном возбуждении молекул N_2 [12]

$$L_{en}^* = - 2.99 \cdot 10^{-12} n_e n(\text{N}_2) \exp \left(f \frac{T_e - 2000}{2000 T_e} \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(- g \frac{T_e - T_v}{T_e T_v} \right) \right], \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1},$$

где T_v — колебательная температура молекул азота,

$$f = 1.06 \cdot 10^4 + 7.51 \cdot 10^3 \operatorname{th}[1.1 \cdot 10^{-3} (T_e - 1800)],$$

$$g = 3300 + 1.233 (T_e - 1000) - 2.056 \cdot 10^{-4} (T_e - 1000) (T_e - 4000);$$

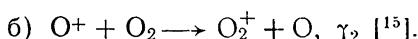
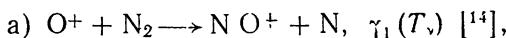
е) потери на вращательное возбуждение O_2 и N_2 при $B_{\text{O}_2} = 1.81 \times 10^{-4}$ эВ, $Q_{\text{O}_2} = 1.8$ *a.e.* и $B_{\text{N}_2} = 249 \cdot 10^{-4}$ эВ, $Q_{\text{N}_2} = 1$ *a.e.* могут быть представлены в виде

$$L_{en}^* = - n_e [7 \cdot 10^{-14} n(\text{O}_2) + 3 \cdot 10^{-14} n(\text{N}_2)] \frac{T_e - T_n}{T_e^{1/2}}, \quad \text{эВ} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Если принять, что температура и плотность основных нейтральных составляющих заданы согласно [13] и $T_n = T_i$, то для получения замкнутой системы уравнения (17), (19) и (21) необходимо дополнить уравнениями баланса молекулярных ионов O_2^+ , NO^+ и колебательной температуры $\text{N}_2 - T_v$.

Поскольку основной задачей данной работы являются исследования, связанные с решением кинетического уравнения для ФЭ в нижней ионосфере, ограничимся фотохимическим приближением и выберем очень упрощенную схему элементарных процессов.

1. Иономолекулярные реакции:



2. Диссоциативная рекомбинация:

- а) $\text{NO}^+ + e \rightarrow \text{O}(\text{I}^{\text{D}}) + \text{N}$, α_1 , $P = 0,1$ [15],
 б) $\text{O}_2^+ + e \rightarrow \text{O} + \text{O}$, α_2 [10].

Здесь P — коэффициент ветвления реакции.

При условии, что распределение по колебательным уровням N_2 имеет больцмановский характер, уравнение для колебательной температуры можно представить в виде [16]

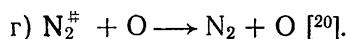
$$T_v = \frac{3360}{\ln [1 + n(N_2)/n(N_2^\#)]}, \quad (23)$$

где $n(N_2)$ — плотность колебательно возбужденных молекул азота (или колебательный квант).

3. Источники образования и гашения N_2 :

- а) $\text{N}_2 + e(T) \rightarrow \text{N}_2^\# + e$, [12],
 б) $\text{N}_2 + e(\Phi \mathcal{E}) \rightarrow \text{N}_2^\# + e$, [17],
 в) $\text{N}_2 + \text{O}(\text{I}^{\text{D}}) \rightarrow \text{N}_2^\# + \text{O}$ [16, 18, 19].

По данным [16], в этой реакции происходит образование 7 колебательных квантов, а по данным [18] и [19] — 1 и 1/3 соответственно. Если ограничиться высотами $h \geq 120 \text{ км}$, то имеет место один процесс гашения колебательных квантов:



4. Схема реакций для $\text{O}(\text{I}^{\text{D}})$:

- а) $\text{O}_2 + h\nu \rightarrow \text{O}(\text{I}^{\text{D}}) + \text{O}$ [21],
 б) $\text{O}(\text{I}^{\text{D}}) \rightarrow \text{O} + h\nu$, $A = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$,

где A — коэффициент Эйнштейна. Кроме этого, $\text{O}(\text{I}^{\text{D}})$ образуется при реакциях 2 а) и 3 б).

Схема элементарных реакций 1—4 является сравнительно упрощенной, так как в нее не включены малые нейтральные составляющие. Тем не менее, эта схема учитывает основные процессы, что позволяет надеяться на вполне надежные вычисления значений входящих в нее параметров*.

Таким образом, с учетом (17), (19), (21), (23) процессов а) — е) и 1—4 окончательно получим самосогласованную систему уравнений для нахождения следующих параметров ионосферной плазмы: Φ_ϕ , n_e , T_e , NO^+ , O_2^+ , O^+ , T_v , $\text{N}_2^\#$, $\text{O}(\text{I}^{\text{D}})$. Все уравнения этой системы решались численно на ЭВМ БЭСМ-6 итерационным способом. Погрешность итераций составляла 1 %. При этом решение кинетического уравнения для Φ_ϕ , разностный аналог которого можно представить в виде

$$a_1 \Phi_{m+1} + a_2 \Phi_m + a_3 \Phi_{m-1} + a_4 = 0,$$

было реализовано по схеме

$$\Phi_m^{(l)} = (a_4 + a_1 \Phi_{m+1}^{(l)} + a_3 \Phi_{m-1}^{(l-1)})/a_2.$$

* Учет второстепенных нейтральных составляющих в рамках представленной модели будет проведен авторами в дальнейших работах.

Здесь m — узел разностной сетки по энергии, а l — итерационный индекс.

Расчеты первичного спектра $\Phi_{\text{Э}}$, включая оже-электроны [23], проводились по данным солнечного излучения [24] с использованием сечений фотоионизации, поглощения и оже-процессов согласно [25, 26]. Сечения неупругих процессов для ионизирующих столкновений и столкновений, приводящих к возбуждению структурных уровней атомов и молекул, выбирались по данным [27], а для колебательного возбуждения использовались результаты [17].

В настоящей работе мы ограничимся результатами, иллюстрирующими решение кинетического уравнения при различных вариантах реализации модели, и выясним роль основных процессов, определяющих вид функции распределения электронов в нижней ионосфере. Здесь следует отметить, что в отличие от [3] метод решения кинетического уравнения (3) позволяет выделить тепловую и надтепловую части функции распределения ионосферных электронов, что является существенно важным в ряде приложений, в частности, при интерпретации зондовых измерений электронной температуры.

Прежде чем перейти к исследованию роли различных физических процессов в динамике формирования электронного спектра, рассмотрим в рамках представленной модели некоторые упрощения в кинетическом уравнении для $\Phi_{\text{Э}}$. Соответствующие результаты $\Phi_{\text{Ф}}$ для $\varphi = 15^\circ$, $F_{10.7} = 150$ при равноденствии ($t = 12^h LT$) показаны на рис. 1. Здесь же для всех представленных вариантов указаны параметры тепловой части спектра электронного газа (Φ_t), значения которого могут быть найдены по формулам (4)*.

Исходному варианту решения, включающему все процессы и полный вид интегралов столкновений, соответствует сплошная кривая. Характерной особенностью спектра $\Phi_{\text{Э}}$ является минимум вблизи энергии порядка 3 эВ, связанный с потерями энергии на колебательное возбуждение N_2 . В области малых энергий ($E \leq 10^{-1}$) зависимость спектра близка к линейной, что полностью подтверждается аналитическим исследованием [28].

Если пренебречь второй производной в интегралах (5), (8), (9), (13), то заметное изменение решения кинетического уравнения (точечная кривая) происходит лишь в области энергий $E \leq 10^{-1}$ эВ. Плотность электронов при этом остается практически неизменной, а вариации T_e не превышают 10%. Аналогичные изменения электронного спектра происходят при замене интеграла столкновений (5) приближенным выражением вида (8), где T_i заменено на T_e , а M_i — на m [29] (пунктирная кривая).

Существенные упрощения могут быть приняты при описании ионизирующих столкновений. Если в (12) предположить, что вторичные электроны в основном рассеиваются с энергиями, близкими к нулевой, то структура интеграла столкновений, описывающего ионизирующие потери $\Phi_{\text{Э}}$, совпадает с формой (11) [6] (штрих-пунктир). Здесь заметное отклонение от исходного варианта наблюдается лишь на малых высотах ($h \leq 120$ км) в спектре $\Phi_{\text{Э}}$. Последнее связано с существенным преобладанием на этих высотах роли вторичной ионизации.

Кроме вариантов, представленных на рис. 1, был проведен расчет модели в пренебрежении вторичными слагаемыми в коэффициентах A и A'_2 (7). Это соответствует предположению о том, что давление электронного газа тепловой части спектра существенно превышает давление, связанное с наличием $\Phi_{\text{Э}}$. Этот вариант решения (в пределах погреш-

* Полный спектр электронов соответственно равен $\Phi = \Phi_t + \Phi_{\text{Ф}}$ (3).

ности вычислений) полностью совпал с исходным. Последнее указывает на то, что в нижней ионосфере основное предположение теории зондовых измерений T_e о максвелловском характере функции распределения электронного газа достаточно хорошо выполняется.

Спектр Фотоэлектронов, $\Phi_\phi \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-1} \cdot \text{стераад}^{-1}$

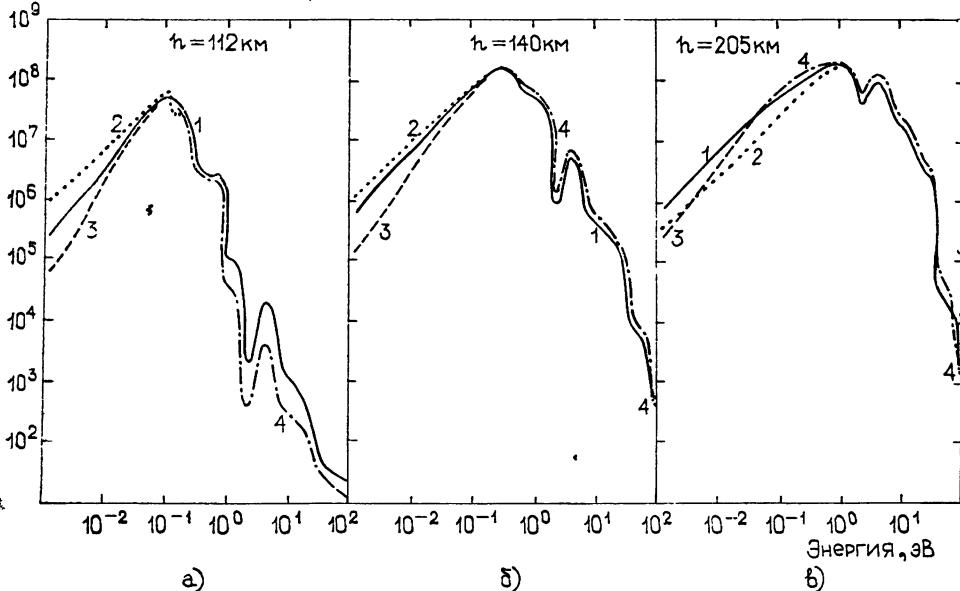


Рис. 1. а) Кривые 1—4— $n_e = 7,51 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 264 \text{ K}$
кривая 1— $n_e = 7,89 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 600 \text{ K}$, 2— $n_e = 7,9 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 602 \text{ K}$
3— $n_e = 7,87 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 596 \text{ K}$, $n_e = 7,91 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 602^3 \text{ K}$;
(б) кривая 1— $n_e = 1,23 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1460 \text{ K}$, 2— $n_e = 2,46 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1330 \text{ K}$
3— $n_e = 2,49 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1380 \text{ K}$, 4— $n_e = 2,55 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1550 \text{ K}$.

Исследование влияния различных физических процессов на полный электронный спектр иллюстрируют рис. 2 и 3. Это исследование проведено нами самосогласованно: пренебрежение или учет какого-либо процесса проводится во всех уравнениях модели одновременно. Рис. 2 рассчитан для тех же условий, что и рис. 1, а сплошная кривая представляет расчет по исходному варианту модели.

Существенные изменения претерпевает спектр $\Phi\mathcal{E}$ при пренебрежении процессом колебательного возбуждения N_2 (точечная кривая). При значениях энергий, близких к 3 эВ, они могут достигать порядка величины и более. Сложность функциональных связей различных параметров модели демонстрирует некоторое уменьшение T_e данного варианта на высоте $h = 140 \text{ км}$. Здесь, вследствие отсутствия каскадных переходов, связанных с колебательным возбуждением N_2 , ослабляется низкоэнергетическая часть спектра $\Phi\mathcal{E}$ ($E < 1 \text{ эВ}$), которая вносит определенный вклад в нагрев тепловой плазмы.

Пунктирная кривая иллюстрирует вариант решения при пренебрежении вторичными электронами в ионизирующем интеграле столкновений (второе слагаемое (12)). Как и в примере, показанном на рис. 1, роль вторичных электронов оказывается существенной на высотах $h < 120 \text{ км}$.

Спектр фотосенсоров. $\Phi_\phi, \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-1} \cdot \text{стераид}^{-1}$

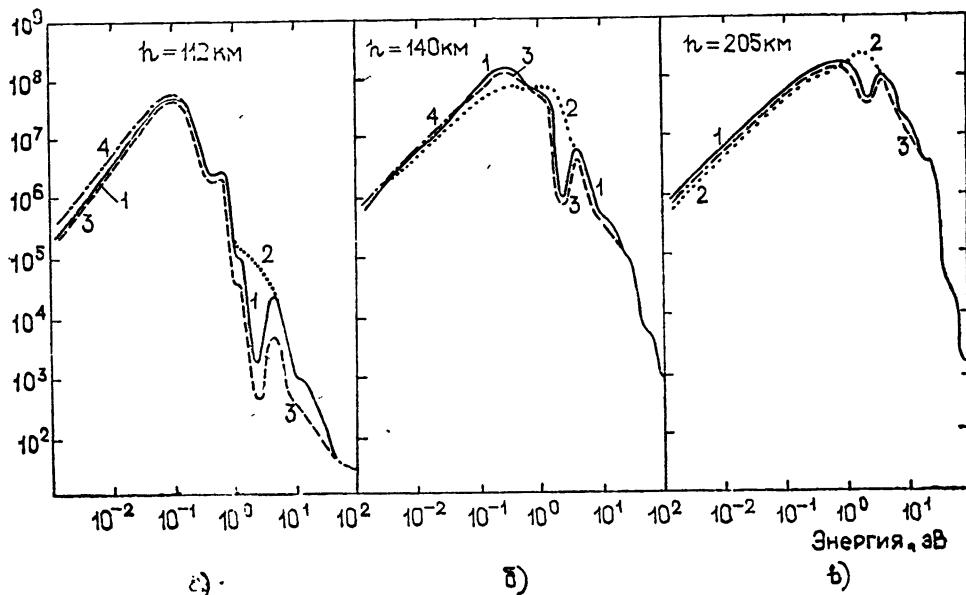


Рис. 2. а) Кривые 1—4— $n_e = 7,51 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 264 \text{ K}$;
 б) кривая 1— $n_e = 7,89 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 670 \text{ K}$; 2— $n_e = 7,86 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 594 \text{ K}$;
 3— $n_e = 7,87 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 596 \text{ K}$; 4— $n_e = 7,9 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 601 \text{ K}$; в) кривая
 1— $n_e = 2,53 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1460 \text{ K}$, 2— $n_e = 2,58 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1530 \text{ K}$, 3— $n_e =$
 $= 2,51 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1420 \text{ K}$, 4— $n_e = 2,53 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 1480 \text{ K}$.

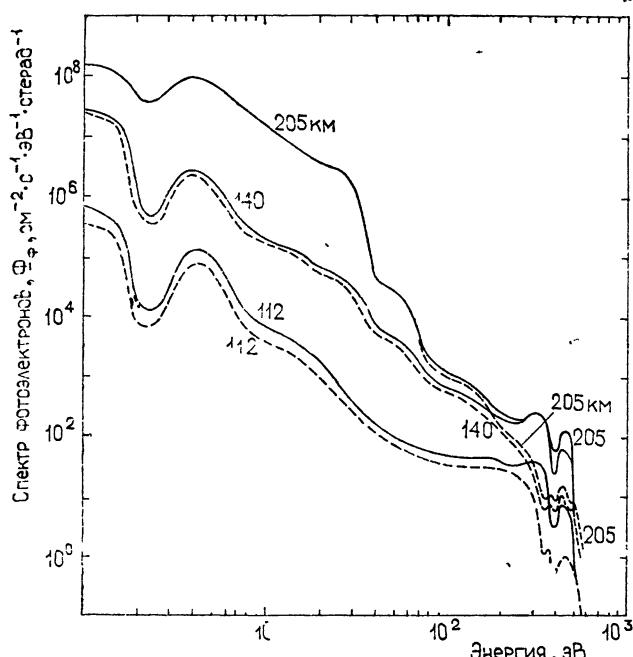


Рис. 3 $h = 112; 140, 205 \text{ км}$;
 $n_e = 6,33 \cdot 10^4, 5,84 \cdot 10^4, 2,18 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 263, 585, 1360 \text{ K}$.

Если в модели пренебречь потерями энергии электронов при соударениях с ионами, всеми видами столкновений с нейтральными частицами и диссоциативной рекомбинацией, получим решение, представленное штрих-пунктирной кривой*.

На рис. 3 проведено исследование роли оже-процессов при $\varphi = 45^\circ$, $F_{10,7} = 150$ (равноденствие, $t = 12^h LT$). Сплошные кривые этого рисунка соответствуют исходному варианту решения, пунктирующие — без учета оже-процессов. На малых высотах оже-электроны вносят определенный вклад и в низкоэнергетическую часть спектра ФЭ. Последнее связано с повышением на малых высотах роли каскадных переходов в связи с существенным ослаблением в области малых энергий первичного спектра ФЭ [4]. Вкладом же оже-процессов в тепловую часть спектра электронного газа (4) в пределах погрешности вычислений можно пренебречь**.

Кроме вариантов, приведенных на рис. 2, 3, проводились исследования влияния процессов девозбуждения молекул N_2 на вид электронного спектра. При этом показано, что вариации квантового выхода реакции $O(^1D) + N_2 \rightarrow O + N_2^{\ddagger}$ от $1/3$ [19] до 7 [16] несущественно изменяют вид тепловой и подтепловой части спектра. Этот вывод несколько противоречит результатам [3], где при аналогичном исследовании предполагалось значение $T_v = 3000$ К на высоте 120 км. Случай таких высоких колебательных температур весьма экзотичен. В настоящей модели при варьировании $F_{10,7}$ от 80 до 220 значения T_v на высотах $h < 200$ км не превышали величины $T_v \sim 1100$ К.

Остановимся на вопросе влияния низкоэнергетической части спектра ФЭ на параметры теплового спектра (4). В табл. 1 представлены результаты вычисления n_e и T_e для четырех вариантов модели, отличающихся значением нижней границы по энергии в решении кинетического уравнения для ФЭ. Из этих данных следует, что на высотах $h > 140$ км низкоэнергетическая часть спектра ФЭ ($E < 1$ эВ) вносит заметный вклад в баланс энергии тепловой компоненты электронного газа.

Таблица 1

h , км	E , эВ	10^{-3}		10^{-2}		10^{-1}		1	
		n_e , $c\text{m}^{-3}$	T_e , К						
112	6.33 4	263	6.33 4	263	6.33 4	262	6.33 4	262	
140	5.84 4	585	5.84 4	584	5.81 4	578	5.76 4	569	
160	9.73 4	834	9.71 4	831	9.6 4	811	9.24 4	751	
180	1.43 4	1080	1.43 5	1080	1.41 5	1030	1.33 5	899	
205	2.18 5	1360	2.18 5	1350	2.14 5	1260	2.04 5	1060	

* В этом варианте диссоциативной рекомбинацией пренебрегается только в уравнениях (17) и (19).

** При симметричных условиях освещенности в магнитосопряженных областях пространственные вариации высокозэнергетической части спектра электронов на высотах $h < 200$ км несущественны [6].

На рис. 4 проведены сравнения результатов вычислений в рамках рассмотренной модели суммарных электронных спектров $\Phi = \Phi_t + \Phi_\phi$ с некоторыми экспериментальными и теоретическими данными для Φ_ϕ . Рис. 4 а иллюстрирует соответствующие вариации спектра на высоте $h = 200$ км в низкоэнергетической области (сплошная кривая — $\varphi = 45^\circ$, $F_{10.7} = 150$, равноденствие, $t = 12^h$ LT; штрихпунктир — [3] — CIRA 1965, модель 5 ($F_{10.7} = 150$), 14^h). На рис. 4 б сплошная кривая соответствует условиям эксперимента [30] (пунктир — $h = 200$ км, $F_{10.7} = 113$, $z_\odot = -43^\circ$). Это спектр Φ_ϕ в высокоэнергетической его части*. Здесь же на рисунке представлены эксперименты [31] ($F_{10.7} = 160$, $h = 270$ км, $z_\odot = -38^\circ$), [32] ($F_{10.7} = 80$, $h = 229 \div 279$ км, $z_\odot = 39^\circ$) и данные теоретических расчетов [33] ($F_{10.7} = 144$, $h = 200$ км, $z_\odot = 0^\circ$) и [34] ($F_{10.7} = 144$, $h = 179$ км, $z_\odot = 0^\circ$).

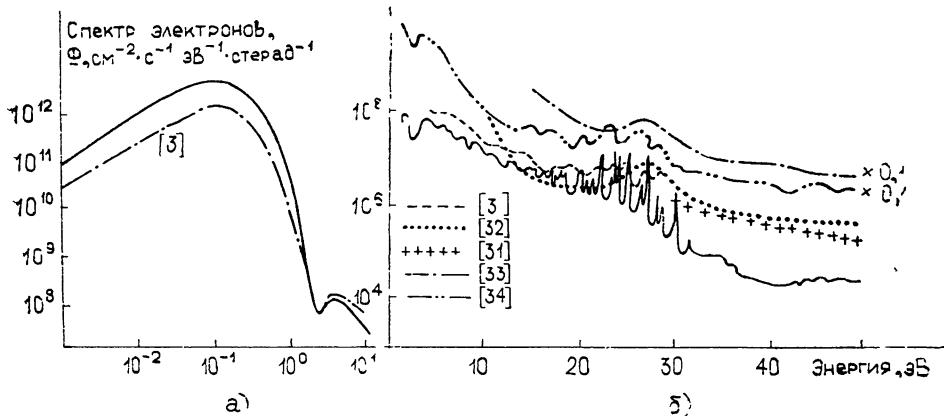


Рис. 4.

Как следует из приводимых результатов, имеется удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных значений спектра. Обращает на себя внимание лишь менее выраженная тонкая структура экспериментальных спектров, исчезновение которой, по-видимому, обусловлено рассеянием Φ_ϕ на плазменных колебаниях.

В заключение приведем примеры пространственных и сезонных вариаций некоторых параметров модели.

На рис. 5 показаны пространственные вариации n_e , $M^+ = NO^+ + O_2^+$, T_e , T_n , $N_2^{\#}$ и $O(^1D)$ для широты $\varphi = 45^\circ$, $t = 12^h$ LT, трех сезонов при солнечной активности $F_{10.7} = 150$. Здесь же приведены скорости ионообразования ($q_z = q_n + \Delta q_n$, $cm^{-3} \cdot c^{-1}$) и притока тепла от Φ_ϕ к тепловым электронам (Q , $eV \cdot cm^{-3} \cdot c^{-1}$), рассчитанные по формулам (20), (22). Сплошные кривые этого рисунка соответствуют равноденствию, пунктирные — зиме, штрих-пунктирные — лету.

Здесь обращает на себя внимание один интересный результат, связанный с сезонными вариациями электронной концентрации. Он заключается в превышении на высотах $h > 230$ км зимних значений n_e над летними. Этот эффект легко может быть объяснен зависимостью коэф-

* Пересчет данных по потокам солнечного излучения $Y_{\lambda\infty}$ проводился в соответствии с зависимостью $Y_{\lambda\infty} = Y_{\lambda\tau}(F_{10.7})$ [24], а вариации нейтральной атмосферы $n = n(F_{10.7}, \varphi, h, k_p, \delta, t)$ найдены по данным модели [13].

фициента иономолекулярной реакции $O^+ + N_2 \rightarrow NO^+ + O - \gamma_1$ от колебательной температуры N_2 . Увеличение в летнее время T_v приводит к росту γ_1 , вследствие чего возрастает канал образования молекулярных ионов, а вместе с этим и рекомбинации n_e . Табл. 2 иллюстрирует пример изменения γ_1 для условий рис. 4.

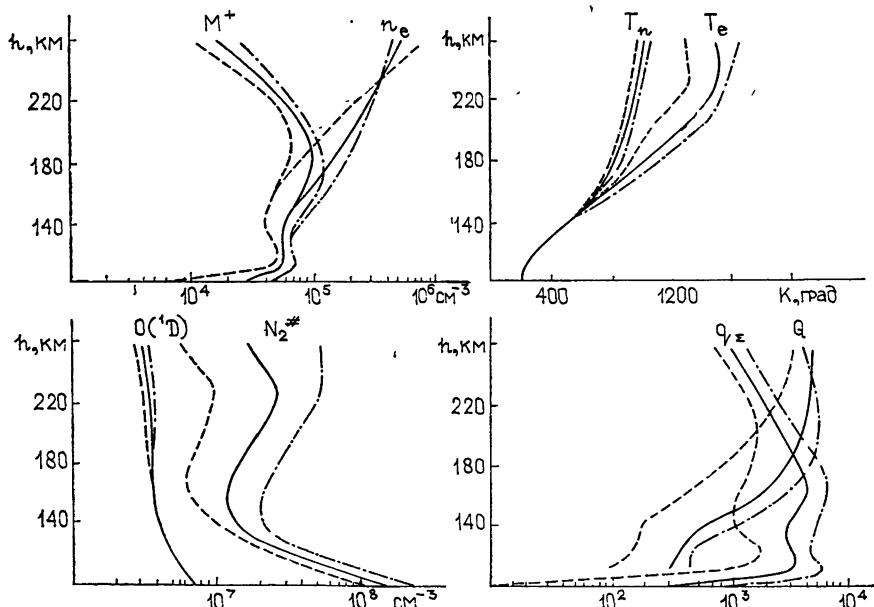


Рис. 5.

Таблица 2

Сезон	Л е т о				Равноденствие				З и м а						
	$h, \text{км}$	180	205	230	260	$h, \text{км}$	180	205	230	260	$h, \text{км}$	180	205	230	260
$\gamma_1 \cdot 10^{13}$		3.3	3.02	3.78	7.16		3.43	3.02	3.25	3.58		3.62	3.15	3.02	2.96

Таким образом, представленные расчеты выявляют тенденцию к возможному объяснению (хотя бы частично) эффекта сезонной аномалии слоя F . При этом учет диффузионных процессов, роль которых на высотах $h > 200 \text{ км}$ достаточно велика, не внесет изменений в общие выводы представленной модели, а приведет лишь к некоторому переизменению представлений о распределении плотности заряженных компонент.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Гарифуллина, И. А. Кринберг, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 27, изд. Наука, М., 1973, стр. 63
- Г. В. Попов, Г. В. Хазанов, Всесоюзный семинар по математическому моделированию ионосферных процессов Тезисы докладов, ч. II, Иркутск, 1973, стр. 50.
- 'O Ashihaga and K Takayama, Planet Space Sci., 22, 1201 (1974).
- Г. В. Хазанов, Диссертация, ИГУ, Иркутск, 1974
- А. В. Гуревич, А. В. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973

6. В. М. Поляков, Г. В. Хазанов, М. А. Коен, Космические исследования, 14, № 4, 543 (1976).
7. G. P. Manta's, Aeronomy report, № 54 (1973).
8. И. Шкаровский, Т. Джонстон, М. Бачинский, Кинетика частиц плазмы, Атомиздат, М., 1969.
9. E. Gerjony and S. Stein, Phys. Rev., 97, 1671 (1955).
10. F. L. Walls and G. H. Dunn, J. Geophys. Res., 79, 1911 (1974).
11. А. Долгарно, Лабораторные исследования аэрономических реакций, Гидрометеоиздат, Л., 1970.
12. P. Stubbé and W. S. Vagnat, Planet Space Sci., 20, 1121 (1972).
13. L. G. Yacchia, SAO Spec. Rep., № 354 (1973).
14. T. E. Van Zand and T. F. O'Malley, J. Geophys. Res., 78, 6818 (1973).
15. А. Д. Данилов, М. М. Власов, Фотохимия ионизированных и возбужденных частиц в нижней ионосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1973.
16. Y. C. G. Walker, R. S. Stolarsky and A. E. Nagy, Ann. Geophys., 25, № 831 (1969).
17. J. C. Y. Chen, J. Chem. Phys., 41, 3263 (1964).
18. W. S. Warnum, Planet Space Sci., 20, 1865 (1972).
19. E. Jamshidi, E. R. Fisher and R. H. Kummel, J. Geophys. Res., 78, 6151 (1973).
20. E. L. Breig, M. E. Brennan and R. J. McNeal, J. Geophys. Res., 78, 1225 (1973).
21. M. Ackegman, Mesosph Models and Relat. Experim. Proc., 4-th ESRIN—ESLAB Sump., Frascati 1970, Dordrecht, 1971, p. 149.
22. Г. В. Попов, Г. В. Хазанов, Геомагнетизм и аэрономия, 14, № 6, 1040 (1974).
23. С. В. Авакян, Тезисы докладов X научно-технической конференции молодых специалистов, ГОИ, Л., 1974, стр. 29.
24. Г. С. Иванов-Холодный, В. В. Фирсов, Геомагнетизм и аэрономия, 14, № 3, 393 (1974).
25. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
26. D. W. Missavage and S. T. Manson, Phys. Lett., 38A, 85 (1972).
27. P. M. Banks, C. R. Cappell and A. F. Nagy, J. Geophys. Res., 79, 1459 (1974).
28. Б. С. Гутерман, М. А. Коен, Г. В. Хазанов, сб. Исследование ионосферы, № 25 (1975).
29. М. А. Коен, Г. В. Попов, Г. В. Хазанов, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 30, изд. Наука, М., 1974, стр. 158.
30. T. Mukai and K. Hirao, J. Geophys. Res., 78, 8395 (1973).
31. Ю. И. Гальперин и др., Космические исследования, 11, № 1, 108 (1976).
32. T. P. Doering et al., J. Geophys. Res., 80, 3934 (1975).
33. Л. А. Акаторова и др., сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 38, изд. Наука, М., 1976, стр. 11.
34. G. P. Manta's and S. A. Bowhill, Planet. Space Sci., 23, 355 (1975).

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
13 сентября 1976 г

KINETICS OF ELECTRONS AT HEIGHTS 100—260 km

G. V. Khasanov, M. A. Koen, G. S. Kudryashev

In the frames of self-consistent model including the kinetic equation for photoelectrons, equations for n_e , T_e , NO^+ , O_2^+ , O^+ , $\text{N}_2^{\#}$, $\text{O}(\text{'D})$ and T_v (oscillation temperature N_2) investigation of different processes influence on the form or the function of electron distribution in the lower ionosphere are carried out.

УДК 550.383 : 551 594.6

**ПИТЧ-УГЛОВОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ
ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВИСТОВ
В МАГНИТОСФЕРЕ**

B. Я. Капитанов, B. M. Чмырев

Рассмотрена диффузия электронов по питч-углам в поле электростатических ионно-циклотронных и низкочастотных плазменных волн, возбуждаемых при параметрической неустойчивости интенсивных свистов в верхней ионосфере и магнитосфере Земли

1. В экспериментах по искусственноому воздействию очень низкочастотных (ОНЧ) волн на ионосферу и магнитосферу Земли обнаружены эффекты высыпания и запирания частиц в магнитосферной ловушке, стимулированные импульсными сигналами наземных ОНЧ-передатчиков [1-3]. Ранее наблюдались электронные высыпания, коррелированные с дискретными ОНЧ-эмиссиями естественного происхождения [4]. Была предпринята попытка объяснения этих явлений квазилинейным механизмом взаимодействия исходного ОНЧ-сигнала и электронов с питч-углами вблизи конуса потерь [5].

Однако как данные по протонным высыпаниям [1], так и некоторые результаты [2-3] довольно трудно описать в терминах работы [5]. В настоящем сообщении мы попытались оценить роль другого процесса — диффузии частиц по питч-углам не на исходном ОНЧ-сигнале, а на слабозатухающих электростатических колебаниях возбуждаемых ОНЧ-волной при распространении в ионосферно-магнитосферной плазме.

2. В реальных условиях верхней ионосферы и магнитосферы наибольшими инкрементами и наименьшими порогами обладают процессы рассеяния свиста (ω_w, k_w) в низкочастотную плазменную волну (ω_l, k_l) и распада свиста на низкочастотную плазменную волну и электростатическую ионно-циклотронную волну (ω_c, k_c), распространяющуюся почти поперек магнитного поля [6]. Частоты этих колебаний определяются соотношениями

$$\frac{c^2 k_w^2}{\omega_w^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_w (\omega_{He} \cos \theta_w - \omega_w)} ,$$

$$\omega_l^2 = \omega_{He}^2 \cos^2 \theta_l \left| \left(1 + \frac{\omega_{He}^2}{\omega_{pc}^2} \right) + \omega_{He} \omega_{Hi} \left| \left(1 + \frac{\omega_{He}^2}{\omega_{pe}^2} \right) , \right. \right.$$

$$\omega_c = n \omega_{Hi} \left[1 + \frac{I_n(z_i) e^{-z_i}}{1 + \frac{v'_{Tl}}{v'_{Te}} + k_c^2 d_i^2 - I_0(z_i) e^{-z_i}} \right] ,$$

$$z_i = \frac{k_{c\perp}^2 v_{Ti}^2}{2 \omega_{Hi}} , \quad d_i = \frac{v_{Ti}}{\omega_{pi}} .$$

Инкременты роста колебаний при реальных величинах полей свистовой накачки могут достигать значений порядка $1 - 30 \text{ c}^{-1}$ в зависимости от условий и места взаимодействия [6, 8].

Спектры возбуждаемых свистами плазменных и ионно-циклотронных колебаний представим в модельной форме:

$$|E_k|^2 = A k_\perp^2 \exp \left[-\frac{k_\perp^2}{\delta k_\perp^2} - \frac{(k_\parallel - k_{\parallel 0})^2}{\delta k_\parallel^2} \right] .$$

Постоянную A выразим через напряженность электрического поля волны

$$E = (2\pi)^{-3} \int E_k e^{ikr} d^3 k$$

из соотношения

$$V |E|^2 = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty |E_k|^2 k_\perp dk_\perp dk_\parallel ,$$

где V — объем плазмы, занятый колебаниями (предполагается однородное по V распределение колебаний). В результате будем иметь

$$|E_k|^2 = \frac{4\pi^{3/2} V |E|^2}{\delta k_\parallel \delta k_\perp^4} k_\perp^2 \exp \left[-\frac{k_\perp^2}{\delta k_\perp^2} - \frac{(k_\parallel - k_{\parallel 0})^2}{\delta k_\parallel^2} \right] . \quad (1)$$

Максимальные инкременты распада достигаются при значениях $z_i = 1, 4$ для первой гармоники ионно-циклотронной частоты [6]. Исходя из этой величины и условия малости линейного затухания колебаний [6], зададим параметры возбуждаемых свистами ионно-циклотронных волн в следующем виде:

$$\delta k_{\perp c}^2 = 3 \frac{\omega_{Hi}^2}{v_{Ti}^2} , \quad k_{\parallel 0c} = 0,1 \frac{\omega_{Hi}}{v_{Ti}} , \quad \delta k_\parallel = 0,5 k_{\parallel 0c} . \quad (2)$$

Для низкочастотных плазменных волн получим

$$\delta k_{\perp l} \approx \delta k_{\perp c} , \quad k_{\parallel 0l} \approx k_{\parallel w} , \quad \delta k_\parallel = 0,5 k_{\parallel 0l} . \quad (3)$$

Квазилинейная диффузия электронов в поле электростатических колебаний описывается уравнением [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{v \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin \alpha \left(D'_{aa} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + D'_{av} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \times \\ &\quad \times v^2 \left(D'_{av} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + D'_{vv} \frac{\partial f}{\partial v} \right) , \\ D'_{aa} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int k_\perp dk_\perp \left\{ \Psi_{nk} \left[\frac{n \omega_{He}/\omega_k + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right]^2 \right\}_{k_\parallel = k_{\parallel \text{res}}} , \\ D'_{av} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int k_\perp dk_\perp \left\{ \Psi_{nk} \left[\frac{n \omega_{He}/\omega_k + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right] \right\}_{k_\parallel = k_{\parallel \text{res}}} , \\ D'_{vv} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int k_\perp dk_\perp \{ \Psi_{nk} \}_{k_\parallel = k_{\parallel \text{res}}} , \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Psi_{nk} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{m^2} \frac{|E_k|^2}{V} \frac{\omega_k^2}{|k|^2} \frac{J_n^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{He}} \right)}{v^2 |v_\parallel - v_{\parallel g}|}.$$

Здесь v , α — модуль скорости и питч-угол частицы, v_\perp , v_\parallel — компоненты скорости частицы поперек и вдоль постоянного магнитного поля, $k_{\parallel res} = (\omega_k + n\omega_{He})/v_\parallel$, $n = 0, 1, 2, \dots, J_n(x)$ — функция Бесселя. Выполняя интегрирование в выражениях (4) с помощью (1), (2), определим коэффициенты диффузии электронов, взаимодействующих на циклотронном резонансе ($n \geq 1$) с ионно-циклотронными колебаниями (1), (2):

$$D_{\alpha\alpha}'^{(n)} = 7,4 \cdot 10^{28} |E|^2 \frac{v_{Ti}^3}{v^3} \frac{n^2 (1 - x^2)^2}{\omega_{Hi} \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha} \times \\ \times \exp \{-4 [1,84 \cdot 10^4 n (1 - x^2)^{1/2} v_{Ti}/v_\parallel - 1]^2\} I_n(\xi) e^{-\xi}, \\ x = \frac{v}{c}, \quad \xi = 4,5 \cdot 10^{-6} \frac{v_\perp^2}{v_{Ti}^2 (1 - x^2)}, \quad (5)$$

$$D_{vv}'^{(n)} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha D_{\alpha\alpha}'^{(n)}, \quad D_{\alpha v}'^{(n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \sin \alpha \cos \alpha D_{\alpha\alpha}'^{(n)},$$

где поле E выражено в (B/m). Соотношения (5) получены с учетом слабой зависимости ω_l и ω_c от k при условии $v_\parallel \gg v_{Te}$. Видно, что $D_{vv}'^{(n)} \ll D_{\alpha v}'^{(n)} \ll D_{\alpha\alpha}'^{(n)}$, т. е. в рассматриваемом случае будет происходить рассеяние электронов по питч-углам практически без изменения их энергии.

Значения коэффициента диффузии, усредненного по траектории частиц при их движении между зеркальными точками в магнитосфере, определяются соотношением [7]

$$\langle D_{\alpha\alpha} \rangle = \frac{1}{T(\alpha_0)} \int_0^{\lambda_0} D_{\alpha\alpha}(\lambda) \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha_0} \cos^2 \lambda d\lambda, \\ T(\alpha_0) \approx 1,3 - 0,56 \sin \alpha_0. \quad (6)$$

Интегрирование проводится по широте λ , α_0 — экваториальный питч-угол, λ_0 — широта зеркальной точки, определяемая величиной α_0 . Если колебания занимают ограниченный участок силовой трубы (от 0 до λ_1), тогда интегрирование проводится по интервалу широт, где присутствуют колебания, если $\lambda_1 < \lambda_0$. Широтное распределение параметров в подынтегральном выражении (6) будем использовать в следующем виде:

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha_0 \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda},$$

$$\omega_{Hi} = \omega_{Hi0} \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda},$$

$$v_{Ti} = v_{Ti0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^\rho, \quad R = R_0 \cos^2 \lambda,$$

где индекс (0) соответствует значениям величин на экваторе для заданной силовой трубы.

Поскольку мы не знаем распределения интенсивности возбуждаемых электростатических колебаний вдоль магнитной силовой трубы, выберем одну из простейших моделей, в которой $E_n^2 \sim B_0^q(\lambda)$, т.е.

$$|E|^2 = |E_0|^2 \left[\frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} \right]^q. \quad (7)$$

Это выражение справедливо, например, при $q = 1$ в случае, если коэффициент трансформации свиста в электростатическую волну постоянен вдоль магнитной силовой линии. При этом интенсивность возбуждаемых колебаний будет изменяться пропорционально плотности энергии волны накачки, т.е. примерно пропорционально B_0 .

Подставляя (5), (7) в (6), получим коэффициент диффузии на электростатических ионно-циклотронных волнах с учетом релятивистской поправки для энергичных электронов

$$\begin{aligned} \langle D_{\alpha\alpha}^{(n)} \rangle_c &= \frac{\langle D_{\alpha\alpha}^{(n)} \rangle}{v^2} = \frac{7.4 \cdot 10^{28} n^2 E_0^2}{\omega_{H_i 0} v_{Ti 0}^2 T(\alpha_0) \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0} \frac{\gamma^4 v_{Ti 0}^5}{v^5} \times \\ &\times \int_0^{\lambda_0} \Phi_2^2 (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{q/2-1} \cos^{19+2(p-3q)} \lambda \exp \left[-4 \left(1.8 \cdot 10^4 n \gamma \frac{v_{Ti 0}}{v} \Phi_2 - 1 \right)^2 \right] \times \\ &\times e^{-\Phi_1} I_n(\Phi_1) d\lambda, \\ \Phi_1 &= 4.5 \cdot 10^{-6} \frac{v^2}{\gamma^2 v_{Ti 0}^2} \frac{\sin^2 \alpha_0 (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^{4p+6} \lambda}, \\ \Phi_2 &= \frac{\cos^{2p} \lambda}{\left[1 - \sin^2 \alpha_0 \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} \right]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $I_n(\Phi_1)$ — модифицированная функция Бесселя, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Аналогичным образом может быть получено выражение для коэффициента диффузии по питч-углам для случая низкочастотных плазменных колебаний с параметрами (1), (3):

$$\begin{aligned} \langle D_{\alpha\alpha}^{(n)} \rangle_l &= \frac{8 \cdot 10^{27} n^2 E_0^2}{\omega_{H_i 0} v_{Ti 0}^2 T(\alpha_0) \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0} \frac{\gamma^4 v_{Ti 0}^5}{v^5} \times \\ &\times \int_0^{\lambda_0} \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{q/2-1} \cos^{19+6(p-q)} \lambda}{1 - \sin^2 \alpha_0 \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}} \times \\ &\times \Psi_2^{-1} \exp \left\{ -4 \left[\frac{5.9 n \Psi_2^{-1}}{\gamma \left[1 + \frac{27 v}{c \cos^{2p} \lambda} \left[1 - \sin^2 \alpha_0 \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} \right]^{1/2} \right]} - 1 \right]^2 \right\} \times \\ &\times e^{-\Psi_1} I_n(\Psi_1) d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Psi_1(\lambda) = 4.5 \cdot 10^{-7} \frac{v^2}{\gamma^2 v_{Ti 0}^2} \sin^2 \alpha_0 \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^{6+4p} \lambda},$$

$$\Psi_2(\lambda) = \frac{10 \omega_{pe0}^2}{\omega_{H0}} \frac{v_{Ti0}}{c} \frac{\cos^{3+2\rho} \lambda}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/4}} \left[\frac{\omega_{He0}}{\omega_w} \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} - 1 \right]^{-1/2},$$

где ω_w — частота свистовой волны накачки, $\omega_{pe}^2 \sim \omega_{He}$.

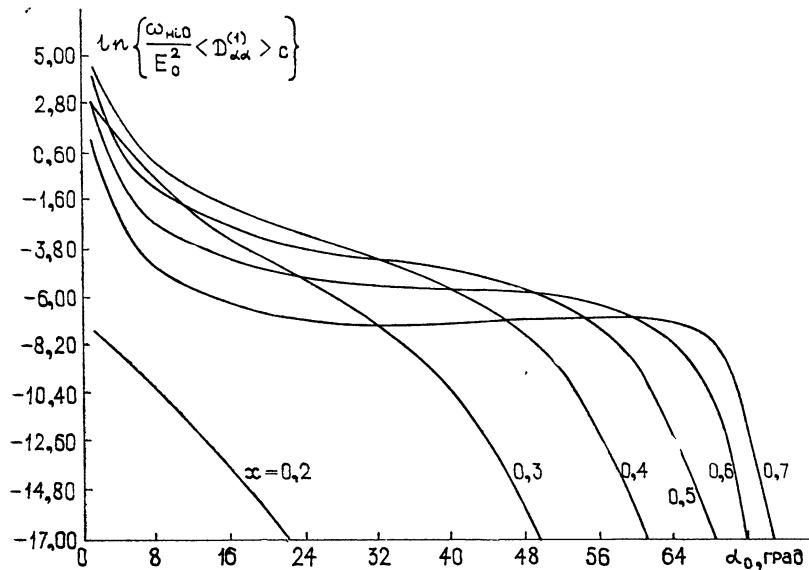


Рис. 1.

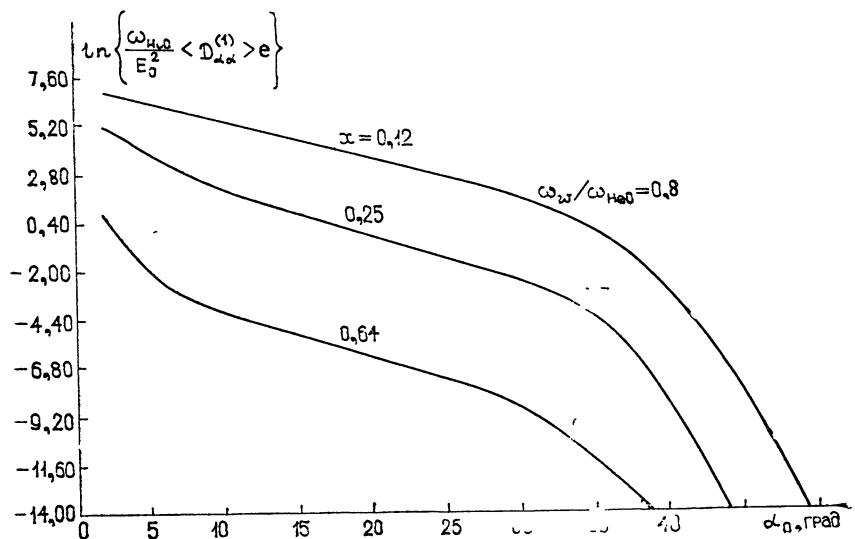


Рис. 2.

На рис. 1, 2 представлены результаты вычисления по формулам (8), (9) нормированных коэффициентов диффузии $\omega_{H0}/E_0^2 \langle D_{\alpha\alpha}^{(1)} \rangle_c, l$, в зависимости от экваториального питч-угла α_0 для разных значений скорости частиц ($x = v/c$). Вклад остальных членов суммы $\sum_n D_{\alpha\alpha}^{(n)}$ мал по сравнению с $D_{\alpha\alpha}^{(1)}$, как следует из оценок, при $v/c < 0.7$; $\langle D_{\alpha\alpha}^{(1)} \rangle$

измерено в c^{-1} , E_0 — в (B/m) . Амплитуда колебаний и температура частиц предполагались постоянными вдоль магнитной силовой линии ($\rho = q = 0$). Для параметров плазмы были использованы следующие значения:

$$v_{T,0} = 10^4 \text{ м/с}, \quad \omega_{oe0}/\omega_{He0} = 3.$$

Поскольку спектр возбуждаемых низкочастотных плазменных колебаний и, следовательно, скорости взаимодействующих с ними частиц определяются свистовой волной накачки, на рис. 2 вместе со скоростями частиц приведены также соответствующие частоты свистовых волн.

Из рисунков видно, что $\langle D_{aa} \rangle$ в обоих случаях максимальны при малых значениях экваториальных питч-углов и весьма быстро спадают с ростом α_0 . Отсюда следует, что наиболее быстро диффузия частиц по питч-углам будет происходить вблизи конуса потерь ($\alpha_0 \sim \alpha_{kp}$). При этом, учитывая экспоненциальное спадание $\langle D_{aa} \rangle$ с ростом α_0 , мы можем ожидать — в зависимости от начальной функции распределения по питч-углам — как диффузии частиц в конус потерь, так и «выметания» частиц из конуса. Иными словами, возможны как эффекты стимулированного высыпания в конус потерь, и, соответственно, сброс частиц в атмосферу, так и «запирания» высыпающихся потоков в геомагнитной ловушке. Действительно, если в начальном состоянии в конусе нет частиц, то происходит рассеяние в конус потерь. Если потоки захваченных и высыпающихся частиц сравнимы по величине, как это часто наблюдается в эксперименте, особенно в возмущенные периоды [9, 11], то приданной на рис. 1—2 зависимости $\langle D_{aa} \rangle(\alpha_0)$ диффузия должна протекать в обратном направлении.

Для интерпретации экспериментальных данных [2, 3] мы, по-видимому, должны требовать выполнения условия для режима «сильной» диффузии, при котором значительная часть частиц продиффундирует на угол порядка α_{kp} , за время, меньшее или порядка $\tau_b/2$ — время прохождения между зеркальными точками в магнитосфере, т. е.

$$\langle D_{aa} \rangle \gtrsim 2 \alpha_{kp}^2 / \tau_b.$$

Используя максимальные значения коэффициентов диффузии, приведенных на рис. 1, 2, получим из этой формулы оценку амплитуд возбуждаемых свистами колебаний, необходимых для режима сильной диффузии: $E_0 \gtrsim 30 \text{ мВ/м}$ для ионно-циклotronных волн и $E_0 \gtrsim 10 \text{ Мв/м}$ для низкочастотных плазменных волн на геомагнитных широтах $\phi = 60^\circ$. С ростом широты E_0 уменьшается.

Можно проверить, работает или нет рассмотренный здесь механизм в условиях реального эксперимента. Для этого необходимо одновременно с наблюдениями стимулированного высыпания или «запирания» частиц провести измерения полей электростатических колебаний в соответствующем диапазоне частот. Если возбуждение колебаний с указанными выше амплитудами подтверждается, тогда рассмотренный здесь механизм окажется полезным для понимания природы эффектов стимулированного высыпания — «запирания» частиц, в частности таких особенностей, как «накопление» интенсивности вторжений, продолжение импульсных высыпаний по окончании работы ОНЧ-передатчика, периодичность и т. п. [3].

Следует отметить, что возбуждение электростатических ионно-циклotronных волн будет приводить также к питч-угловому рассеянию протонов. Процесс диффузии протонов с энергиями $\epsilon \approx 10 \text{ кэВ}$ на таких волнах естественного происхождения со спектром

$$|E_k|^2 = \frac{a}{k_{\perp}^2} \quad \text{для } 0,02 \leq \frac{k_{\parallel} v_{ri}}{\omega_{Hi}} \leq 0,1$$

рассмотрен в работе [10]. Оценка амплитуд для режима «сильной» диффузии в этом случае дает величины $E_0 \geq 1 \text{ мВ/м}$, т. е. на порядок меньше, чем для энергичных электронов. Вполне возможно, что коррелированные с ОНЧ-воздействием протонные высыпания [1] связаны именно с поперечной диффузией протонов в поле электростатических ионно-циклотронных колебаний, возбуждаемых в магнитосфере свистовой волной от наземного ОНЧ-передатчика.

В заключение авторы выражают признательность И. А. Жулину и Е. В. Мишину за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. C. Coop s, Geophys. Res. Lett., 2, № 7, 281 (1975).
2. В. М. Чмырев, В. К. Родугин, И. А. Жулин, М. М. Могилевский, В. И. Ди, В. К. Кошелевский, В. А. Бушмарин, О. М. Распов, Письма в ЖЭТФ, 23, вып. 8 (1976).
3. И. А. Жулин, Б. С. Ляхов, А. С. Майоров, Г. Г. Манагадзе, М. М. Могилевский, В. М. Чмырев, ДАН СССР, 230, вып. 5 (1976).
4. T. J. Rosenberg, R. A. Hellwell and J. P. Katsufakis, J. Geophys. Res., 76, 8445 (1971).
5. В. И. Карпман, Д. Р. Шклляр, Геомагн и аэрономия, 16, № 3, 572 (1976).
6. С. М. Грач, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1627 (1975).
7. L. R. Lyons, J. Geophys. Res., 79, № 4, 575 (1974).
8. Д. А. Котик, В. Ю. Трахтенгерц, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, тезисы докладов, секция III, изд. Наука, М., 1972, стр. 164.
9. В. Хесс, Радиационный пояс и магнитосфера, Атомиздат, М., 1972, стр. 290.
10. K. Rönnmark, Planet. Space Sci., 23, № 9, 1337 (1975).
11. R. Lundin, Retort ESRO, SP-97, November, 123 (1973).

Институт земного магнетизма, ионосфера и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.

PITCH-ANGULAR SCATTERING OF ELECTRONS AT THE PARAMETRIC INSTABILITY OF WHISTLES IN THE MAGNETOSPHERE

V. Ya. Kapitanov, V. M. Chmyrev

Pitch-angular diffusion of electrons is considered in the field of electrostatic ion-cyclotron and low-frequency plasma waves excited at the parametric instability of intense whistlers in the upper ionosphere and the Earth magnetosphere.

УДК 621.371.24

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МЕТОДОМ БИПОЗИЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

В. А. Филоненко, Н. Н. Румбешта, В. В. Ручкин, В. Б. Фортес

Приведены результаты экспериментальных исследований скорости переноса неоднородностей корреляционным методом в условиях дальнего тропосферного распространения ультракоротких волн (ДТР УКВ) на морской трассе протяженностью 220 км в 10-сантиметровом диапазоне длин волн. Проводится сопоставление измеренной радиометодом скорости переноса неоднородностей с метеорологическими данными. Показано, что «радиоскорость» в среднем в 1,4 раза превышает скорость ветра, полученную метеорологическим путем, а на временные флуктуации сигнала существенное влияние оказывает направленный перенос неоднородностей в объеме рассеяния.

Пространственно-временные характеристики поля ДТР УКВ в месте приема в значительной мере определяются скоростью и направлением переноса неоднородностей в объеме рассеяния, образуемого пересечением диаграмм направленности приемопередающих антенн. Поэтому исследование возможности получения информации об этих метеорологических параметрах непосредственно из радиоизмерений является важным с точки зрения прогнозирования условий распространения радиоволн в тропосферном канале связи, поскольку постановка для этих целей синхронных метеоизмерений во многих случаях затруднительна. Наряду с этим подобное исследование может представлять и самостоятельный интерес — для использования его результатов при разработке одного из возможных методов дистанционного зондирования атмосферы.

Одним из наиболее простых способов, позволяющих оценить скорость переноса неоднородностей (или ветра, считая, что неоднородности полностью увлекаются им) является корреляционный метод, предложенный в работе [1] и нашедший широкое применение при изучении дрейфовых движений в ионосфере [2]. Суть его заключается в определении скорости и направления переноса неоднородностей по направлению и величине сдвига максимумов пространственно-временных корреляционных функций (ПВКФ) сигналов в разнесенных приемных каналах. Одним из основных предположений при этом является гипотеза «замороженной» турбулентности, согласно которой единственным фактором, определяющим временные характеристики флуктуаций сигнала является направленный (регулярный) перенос рассеивателей. Как показано в [3], степень «замороженности» среди является основным фактором, определяющим погрешности в определении скорости переноса. Поэтому вопрос физической обоснованности применения гипотезы «замороженной» турбулентности к реальному тропосферному каналу, отличающемуся большой пространственной и времененной изменчивостью своих параметров, является важным с точки зрения принципиальной возможности использования корреляционного метода для определения скорости ветра.

В немногочисленных работах [3–6], использующих метод пространственно-разнесенного приема для исследования скорости переноса среды и пределов применимости гипотезы «замороженной» турбулентности, представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований на приземных тропосферных трассах. В [3, 4] исследуются корреляционные функции, характеризующие амплитудные флуктуации при распространении радиоволн на морской трассе протяженностью 30 км на $\lambda = 10$ см при поперечном разносе приемников 20—1000 λ . Показано, что в большинстве случаев эффект переноса значительно влияет на временные характеристики флуктуаций. В 50% наблюдений он был преобладающим. В [5, 6] представлены результаты, полученные на открытой приземной трассе протяженностью 37 км радиолокационным способом в диапазоне 3 см.

Проведенный эксперимент показал, что в тех случаях, когда имел место поперечный перенос среды на трассе, ему соответствовал сдвиг максимума ПВКФ флуктуаций амплитуды сигнала. Сопоставление направлений сдвига максимума ПВКФ с метеоданными на трассе показало, что эти направления соответствуют направлению регулярного дрейфа неоднородностей относительно приемных антенн. Отмечается, что наилучшее соответствие скоростей «радиоветра» с реальными имеет место при значениях скоростей ветра порядка 2—3 м/с и более [5]. Это говорит о том, что при скорости меньше 2—3 м/с за время прохождения между приемными антennами неоднородности успевают существенно измениться, и в этом случае определяющим фактором будет не направленный перенос, а нерегулярные процессы в тропосфере (конвекция, диффузия и т. п.). Как указывалось, эти результаты получены на приземных трассах, поэтому представляет интерес исследование применимости корреляционного анализа для определения скрости ветра в условиях ДТР УКВ на трассах средней протяженности, для которых объем рассеяния расположен в интервале высот, где наиболее интенсивно развиты турбулентные процессы.

Экспериментальные исследования проводились на морской загоризонтной трассе протяженностью 220 км на длине волн $\lambda = 10$ см. Ширина диаграммы направленности передающего устройства составляет 4° в горизонтальной и $1,5^\circ$ в вертикальной плоскости. Установка для измерения скорости ветра представляет собой две идентичные приемные антенны, разнесенные поперек трассы на величину $d = 32\lambda$. В фокальной плоскости каждой антенны было установлено три облучателя, что позволило сформировать соответственно три веерообразные, расходящиеся в плоскости угла места диаграммы направленности (луча). При этом максимум нижнего луча был ориентирован на горизонт. Ширина каждого луча составляет 1° на уровне 3 дБ от максимума. Угловое расстояние между лучами равно 2° . Такой набор диаграмм направленности позволил, с учетом геометрии трассы, выделить в объеме рассеяния три области в интервалах высот: 0,8—2,0 км; 1,0—3,0 км и 1,2—3,6 км.

Методика измерений заключалась в синхронной двухканальной записи амплитудных флуктуаций сигналов с нижней, центральной и верхней пары облучателей приемных антенн на самописец Н/3020/5. Продолжительность записи составляла 2—3 минуты для каждой пары лучей, разнесенных поперек трассы и ориентированных под одним углом к горизонту. Всего проведено 220 сеансов наблюдений в различных метеорологических условиях. Как подтверждается круглогодичными наблюдениями на данной трассе [7—9], для осенне-зимнего и части весенне-периодов наблюдений основным механизмом дальнего распространения радиоволн 10-сантиметрового диапазона над морем является механизм некогерентного рассеяния на неоднородностях диэлектрической

проницаемости тропосферы. Наряду с этим, при распространении радиоволн над морем существует ряд специфических особенностей по сравнению с сухопутными трассами. Одной из них является существование условий, близких к условиям односкачкового распространения радиоволн, сопровождающихся относительно высокими абсолютными уровнями (10^{-5} — 10^{-6} Вт) и очень медленными, плавными изменениями относительно уровня сигнала в месте приема.

Как было установлено совместно проведенными радиоизмерениями и метеонаблюдениями в районе центра трассы, это связано с повышенной рефракцией в слое тропосферы 200—600 м над уровнем моря. Такие условия прохождения радиоволн, имевшие место в 50—60% наблюдений в летний период, могли сохраняться в течение нескольких суток независимо от их времени и соответствовали обычно ясной, безветренной погоде при относительно небольшом различии между температурой воды и воздуха. Их изучение предъявляет особые требования к аппаратуре и методике проведения эксперимента. В частности, для исследования скорости ветра в условиях аномально высокого уровня поля, когда пространственный радиус корреляции составляет сотни длин волн, базу разнесения необходимо выбирать на порядок больше той, которая обычно используется. Исходя из того, что типичными для ДТР УКВ остаются все же условия некогерентного рассеяния радиоволн на неоднородностях среды, сопровождающегося быстрыми флуктуациями огибающей сигнала и его относительно низкими уровнями (в среднем на 30—40 дБ ниже уровней сигнала, имевших место в условиях повышенной рефракции), корреляционной обработке подвергались записи подобного типа. Этим обусловлен и выбор величины пространственного разноса, равного 32λ .

Для статистической обработки каждая из записей переводилась с помощью полуавтоматического устройства кодирования графической информации в код ЭВМ на перфоленту. Шаг дискретизации непрерывной записи огибающих сигналов $s_i(t)$ составлял 0,04 с. Пространственно-временные корреляционные функции рассчитывались на ЭВМ М-220М по формуле

$$K(d, \tau) = \frac{\overline{s_1(t)s_2(t + \tau)} - \overline{s_1(t)}\overline{s_2(t + \tau)}}{\sqrt{[\overline{s_1^2(t)} - \overline{s_1^2(t)}][\overline{s_2^2(t + \tau)} - \overline{s_2^2(t + \tau)}]}},$$

где

$$\overline{s_1 s_2} = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} s_1(n) s_2(n + \tau),$$

$$\overline{s_i} = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} s_i(n),$$

$$\overline{s_i^2} = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} s_i^2(n) \quad (i = 1, 2).$$

Для сопоставления статистических характеристик сигнала с результатами метеорологического зондирования привлекались данные метеостанций (наименее удаленных от трассы), совпадающие по времени с радиоизмерениями. Наиболее общим выводом, вытекающим из сопоставления, является вывод о том, что случаи быстрых замираний сигнала и его низкие уровни связаны с неустойчивой метеорологической обстановкой на трассе, обусловленной перестройкой термобарических полей и наличием приземных атмосферных фронтов, прослеживающихся до высот 1—2 км. Анализ экспериментально полученных ПВКФ $K(d, \tau)$

показал, что сдвиг максимумов, являющийся отражением регулярного переноса неоднородностей в пространстве, имеет место в подавляющем большинстве наблюдений. Как правило, направления сдвигов в лучах совпадают, что может говорить об относительной однородности профиля скорости ветра на исследуемых высотах.

На рис. 1, 2 представлены типичные ПВКФ для нижней (1), центральной (2) и верхней (3) пары лучей. В ряде опытов (10% наблюдений), имеет место неоднозначность в направлении метеоданных на соответствующих высотах показал, что на высотах 1,5 и 3,0 км направления ветра обычно совпадают или, по крайней мере, обеспечивают однозначный временной сдвиг максимумов ПВКФ. В то же время в приземном километровом слое направление ветра часто не совпадает с имеющим место на больших высотах, отличаясь иногда вплоть до противоположного. Это говорит о том, что на физические процессы, происходящие в приземном слое тропосферы, существенное влияние оказывает подстилающая поверхность, и с точки зрения описания общего барического поля он не является репрезентативным.

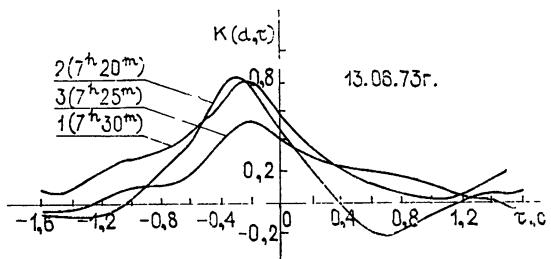


Рис. 1.

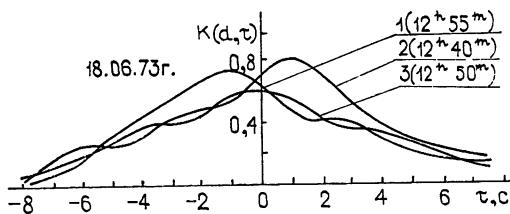


Рис. 2.

Как отмечается в [4, 5], к неоднозначности может приводить и различное направление ветра на отдельных участках трассы, «порывы радиоветра». На рис. 3 представлен радиосеанс, для которого ПВКФ, полученные с центральной пары лучей с разницей во времени, равной 10 мин, имеют противоположно смещенные максимумы. По метеоданным, вектор скорости на высоте объема рассеяния был направлен примерно вдоль трассы, что создавало неустойчивые условия, связанные с возможной сменой направления в течение короткого промежутка времени и, соответственно, знака «радиоветра». Для исследования таких эффектов необходимо прямое метеозондирование объема рассеяния с достаточной пространственной плотностью и строгой привязкой во времени к радиосеансам.

Отметим, что в ряде опытов наблюдается низкая корреляционная связь сигналов в приемных каналах, затрудняющая идентификацию положения максимума на временной оси. Это приводит к большим

погрешностям в определении как абсолютной величины скорости, так и направления ветра. Установлено, что случаи низкой корреляции соответствуют метеоусловиям, описывающимся малоградиентными, размытыми термобарическими полями. На рис. 4 приведена гистограмма распределения экспериментально наблюдаемых значений $|K(d, \tau)|_{\max}$, из которой видно, что удельный вес опытов, в которых прослеживается слабая корреляционная связь амплитудных флюктуаций сигнала в каналах $|K(d, \tau)|_{\max} < 0,5$, достаточно велик.

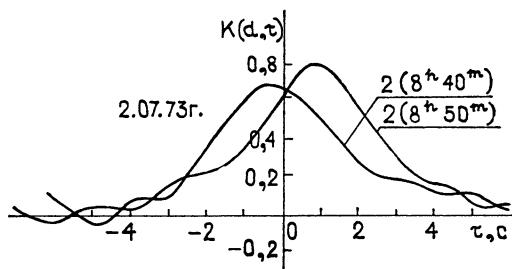


Рис. 3.

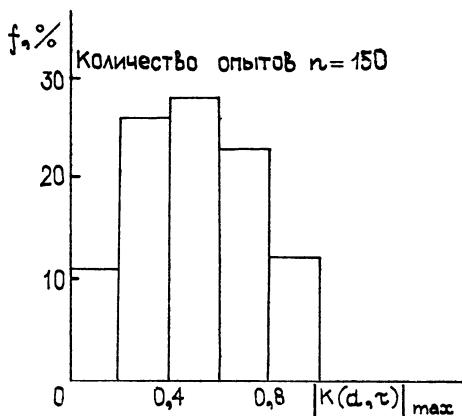


Рис. 4.

Представляет интерес сравнить результаты радиоизмерений скорости и направления ветра с метеоданными. На рис. 5 сопоставлена «радиоскорость» \bar{v}_p , усредненная по лучам, с поперечной к трассе «метеоскоростью» \bar{v}_m^\perp , усредненной по высотам. Для сравнения использованы радиоизмерения, где сдвиг максимумов функций $K(d, \tau)$ был одного знака по всем лучам, а $|K(d, \tau)|_{\max} \geq 0,5$. Случай, где $|K(d, \tau)|_{\max} < 0,5$, обведенены на рис. 5 кружочками, им соответствует, как правило, наибольшее отличие \bar{v}_p от \bar{v}_m^\perp . Метеоскорость усреднялась по высотам 1,5 и 3,0 км. Ветровые характеристики приземного километрового слоя не использовались в силу их нерепрезентативности для общего барического поля. Как видно из рисунка, направление ветра, определенное из радио- и метеонаблюдений для \bar{v}_p и \bar{v}_m^\perp , характеризующих некоторое усредненное по высоте, результатирующее смещение среды, практически всегда совпадает. Абсолютная величина скорости, определенная радиометодом, в среднем в 1,4 раза больше метеоскорости. Ранговый коэффициент связи, указывающий на статистическую связь исследуемых величин, равен 0,75. Превышение радиоскорости по срав-

нению с метеоскоростью подтверждается теоретически [3] и находится в согласии с экспериментальными данными работ [4–6]. Физически объясняется это тем, что всегда наряду с направленным переносом существуют нерегулярные турбулентные процессы, приводящие к «размежеванности» реальной среды.

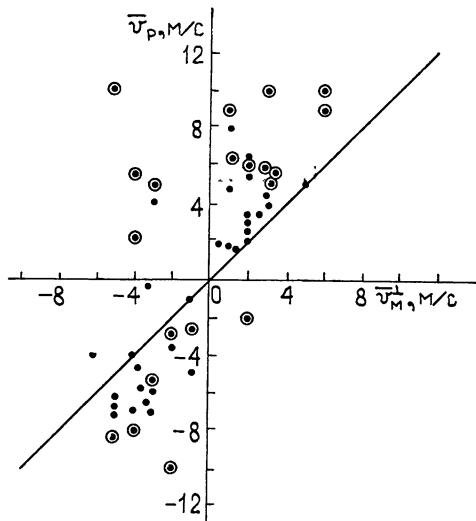


Рис. 5.

Степень влияния эффекта переноса на временные флуктуации можно выяснить, сопоставив экспериментальные величины радиуса автокорреляции с данными о ветре, полученными радио- и метеорологическим путем.

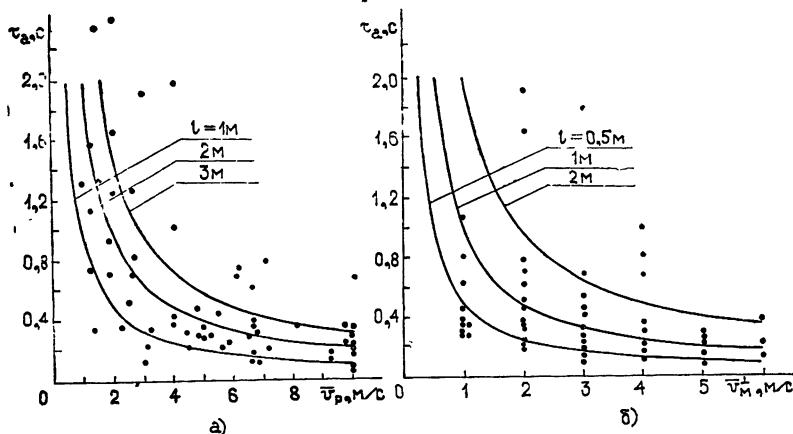


Рис. 6.

На рис. 6 а, б представлена зависимость радиуса автокорреляции τ_a , определенного на уровне $1/e$, от усредненных по высоте радиоскорости v_p и метеоскорости v_M^\perp . Как видно, имеет место заметно выраженная «обратная» зависимость. Ранговые коэффициенты связи величин $\tau_a \leftrightarrow v_p$ и $\tau_a \leftrightarrow v_M^\perp$ равны —0,72 и —0,41 соответственно. Это говорит о том, что направленный перенос существенно влияет на временные

характеристики амплитудных флюктуаций сигнала. Если предположить среду «замороженной», то, исходя из соотношения [3]

$$\tau_a = l/\bar{v}_p ,$$

можно оценить характерный размер мелкомасштабных неоднородностей, ответственных за быстрые флюктуации амплитуды сигнала. Экспериментальные точки хорошо аппроксимируются этой зависимостью при $l = 1 \div 3$ м для τ_a как функции \bar{v}_p (рис. 6 а) и $l = 0,5 \div 2$ м для τ_a как функции \bar{v}_m^{\perp} (рис. 6 б).

ЛИТЕРАТУРА

1. B. H. Briggs, G. J. Phillips and D. H. Shinn, Proc. Phys. Soc., **63**, 907 (1950)
2. С. Ф. Миркотан, Ю. В. Кушнеревский, Неоднородная структура и движения в ионосфере, Результаты исследований по программе МГГ, № 12, изд. Наука, М., 1964.
- 3 А. В. Мень, Изв. вузов — Радиофизика, **5**, № 1, 70 (1962)
- 4 А. В. Мень, Изв. вузов — Радиофизика, **5**, № 2, 287 (1962).
5. Т. И. Арсеньян, Физика атмосферы и океана, **3**, 335 (1967)
- 6 Т. И. Арсеньян, А. А. Семенов, Радиофизика и распространение электромагнитных волн, Труды университета Дружбы народов, **47**, вып. 5, М., 1970.
7. Н. Н. Румбешта, В. Б. Фортес, Р. С. Хажеев, Элементы и устройства радиоэлектроники, Материалы XXI конференции по радиоэлектронике, изд ТГУ, Томск, 1974, стр. 60.
8. В. А. Филоненко, Е. Д. Тельпуховский, В. Б. Фортес, Б. В. Березиной, Изв. вузов — Радиоэлектроника, **19**, № 1 (1976).
- 9 В. А. Филоненко, В. В. Ручкин, Е. Д. Тельпуховский, В. Б. Фортес, Изв. вузов — Радиофизика, **19**, № 7, 984 (1976).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
28 декабря 1976 г.

RESULTS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF THE INHOMOGENEITY TRANSFER VELOCITY BY THE METHOD OF BIPOSITION SOUNDING OF THE ATMOSPHERE

V. A. Filonenko, N. N. Rumbeshta, V. V. Ruchkin, V. B. Fortes

Results of experimental investigations of the inhomogeneity transfer velocity by the correlation method are given under the condition of the distant troposphere propagation of very short waves (DTP VSW) on the sea trace of 220 km duration at 10 centimeter wavelength. The comparison of the inhomogeneity transfer velocity measured by the radio method with the meteorological data are carried out. It is shown that the «radio velocity», on the average, by 1.4 times exceeds the velocity of the wind obtained meteorologically and the directed inhomogeneity transfer in the scattering volume influences essentially on time fluctuations of the signal.

УДК 539.188 : 530.145

АТОМНО-ЛУЧЕВАЯ ТРУБКА С ЛАЗЕРНОЙ НАКАЧКОЙ И ИНДИКАЦИЕЙ

Л. А. Будкин, В. Г. Болдин, А. И. Пихтелев

Теоретически изучены три различных случая взаимодействия атомного пучка с излучением лазера в АЛТ с оптической накачкой и индикацией на основе уравнений баланса для двухуровневой модели атомов пучка и лазера. Показано, что в случае внутренней модуляции выходного излучения при взаимодействии атомного пучка внутри резонатора лазера сигнал атомного резонанса и параметр качества АЛТ значительно больше, чем в случае внешней модуляции. Найдены оптимальные соотношения между уровнем накачки лазера и интенсивностью атомного пучка.

В настоящее время широкое распространение получили квантовые стандарты частоты (КСЧ) на основе атомно-лучевой трубки (АЛТ) [1, 2], обладающие высокой точностью и хорошей долговременной стабильностью частоты. Их существенным недостатком является сравнительно низкая кратковременная стабильность частоты, определяемая отношением сигнала к шуму и к ширине линии атомного резонанса [3, 4]. Поэтому дальнейший прогресс в развитии этих квантовых систем, как ожидают, связан с использованием в них метода оптической накачки и индикации [5]. Причем, последние достижения в развитии лазеров, в частности полупроводниковых на основе AsGa, открывают широкие возможности их использования в качестве источников оптической накачки [6–8].

В связи с этим в настоящей статье предлагается и исследуется несколько схем АЛТ с лазерной накачкой и проводится их сравнение. Рассмотрение взаимодействия атомов пучка с полем лазера ведется на основе уравнений баланса для двухуровневой модели рабочего вещества лазера и атомного пучка [14]. Такое рассмотрение справедливо при условии, что время жизни на вышележащем уровне значительно меньше, чем на рабочих состояниях (что с большим запасом выполняется как для пучка щелочных атомов, так и для атомов рабочего вещества лазера).

АЛТ С ВНЕШНЕЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

Рассмотрим АЛТ (рис. 1 а), в которой атомный пучок (7), вылетая из источника (1), взаимодействует с излучением лазера вне оптического резонатора в областях I и II. Здесь 4 — рабочее вещество лазера, 6 — зеркало резонатора. Взаимодействие света с веществом в области I (плечо накачки) обусловливает разность населенностей между уровнями эталонного атомного перехода. Далее, в СВЧ-резонаторе (2) пучок взаимодействует с полем, модулированным по частоте, что приводит к осцилляции разности населенностей с частотой модуляции. В области взаимодействия II (плечо индикации) пучок с переменным числом атомов на нижнем (верхнем) уровне эталонного перехода модулирует излучение лазера по интенсивности при индикации атомного резонанса, которое регистрируется фотодетектором (3). Частота излучения лазера ν_{13} (ν_{23}) равна частоте перехода атомов с уровней эталонного перехода

на оптически возбужденный (*1, 2, 3* — сооответственно обозначения уровней эталонного перехода и оптически возбужденного уровня в порядке возрастания энергии). Амплитуда переменной составляющей ΔJ интенсивности света является сигналом атомного резонанса [9]. Нашей задачей является определение условий, при которых эта амплитуда максимальна.

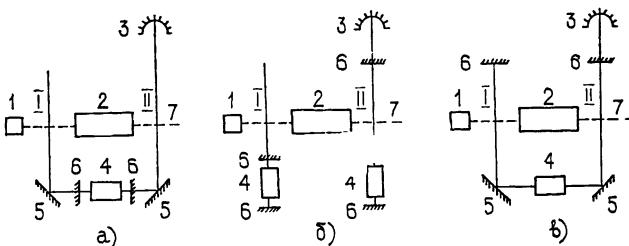


Рис. 1. АЛТ с лазерной накачкой и индикацией.

При типичных реальных значениях интенсивности лазерного излучения (до 1 Bt) для щелочных металлов выполняется соотношение $W_{13} \ll W_{31}, W_{32}$ (W_{13}, W_{32}, W_{31} — вероятности перехода атома с нижнего эталонного уровня на оптически возбужденный, с оптически возбужденного уровня на верхний и нижний эталонные уровни соответственно) и населенность оптически возбужденного уровня много меньше населенности эталонных. Это позволяет описать взаимодействие оптического излучения с атомной системой на основе двухуровневой модели с помощью системы уравнений для разности населенностей R и числа фотонов n в областях I и II [14]:

$$R = b_1 n (N_0 - R) - \frac{R - R_0}{\tau_1}, \quad (1)$$

$$n = -b_1 n \frac{N_0 - R}{2} - \frac{n - n_0}{\tau_2},$$

где $b_1 = \frac{b_{13} W_{12}}{W_{31} + W_{32}}$, b_{13} — вероятность перехода атома с нижнего уровня на оптически возбужденный при поглощении одного фотона; n_0, N_0, R_0 — соответственно числа фотонов, атомов пучка и разность населенностей в областях I, II в отсутствие взаимодействия, а τ_1, τ_2 — времена пролета атомами пучка и фотонами области I или II.

Уравнения (1) не учитывают эффекты когерентности между лазерным лучом и прецессией недиагональных элементов матрицы плотности пучка. Такое приближение здесь вполне допустимо, поскольку уже за время пролета области взаимодействия атомами пучка ($\tau \sim 10^{-5} \text{ с}$) фаза лазерного луча заведомо сбивается (за исключением случаев специальной стабилизации лазера). Если еще учесть, что взаимодействие атомов с лазерным излучением происходит через верхний третий уровень с относительно малым временем жизни ($t \sim 10^{-8} \text{ с}$), то условия применимости балансных уравнений (1) будут выполнены. Более того, даже при несоблюдении упомянутых условий ошибка, вносимая балансным приближением по сравнению с точным решением, не превышает 20% (см. [17]).

В области I $R_0 = 0$, поскольку энергетическое расстояние между уровнями эталонного перехода удовлетворяет соотношению $\hbar \omega_{12} \ll kT$. В области II $R_0 = R_1 K(t)$. Здесь R_1 — решение системы (1) для области I,

а $K(t)$ — перидическая функция времени с периодом модуляции T , пропорциональная вероятности перехода атома с одного уровня на другой. Эта функция описывает модуляцию разности населеностей в пучке при взаимодействии атомов с СВЧ-полем. Для СВЧ-резонатора с одним осциллирующим полем $K(t)$ имеет вид [10] (ср. [11])

$$K(t) = \frac{|V_{12}|^2 \hbar^{-2} \cos\{T_1[|V_{12}|^2 \hbar^{-2} + \delta^2(t)]^{1/2} + \delta^2(t)\}}{|V_{12}|^2 \hbar^{-2} + \delta^2(t)}, \quad (2)$$

где T_1 — время взаимодействия атома с СВЧ-полем, $\delta(t) = \omega(t) - \omega_{12}$ — мгновенная расстройка частоты СВЧ- поля $\omega(t)$ от частоты эталонного перехода ω_{12} , V_{12} — матричный элемент оператора взаимодействия, \hbar — постоянная Планка.

При $\delta(t)=0$ и оптимальном подборе СВЧ-мощности ($|V|_{12} T_1 = \pi$, что в дальнейшем считаем выполненным) атом за время T_1 заведомо переходит с одного уровня на другой, а $K = K_{\min} = -1$. При максимальной расстройке δ_{\max} за период модуляции T , определяемой девиацией частоты, вероятность перехода будет наименьшей и $K = K_{\max} < 1$.

Для областей I, II с размерами порядка сантиметра и интенсивности пучка $N_0/\tau_1 \leq 10^{13}$ атом/с [5, 11] параметры b_1 , τ_2 , N_0 системы (1) удовлетворяют соотношению $b_1 \tau_2 N_0 < 1$ (слабое поглощение света атомным пучком). В этом приближении совместное решение системы (1) для областей I и II для интенсивности регистрируемого излучения дает

$$J(t) = J_2 \left[1 - \frac{N_0}{2\tau_1 [J_2 + (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}]} + \frac{J_1 N_0 K(t)}{2\tau_1 [J_2 + (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}] [J_1 + (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}]} \right], \quad (3)$$

где J_1 , J_2 — соответственно начальные интенсивности света в областях I и II, определяемые отношением $n_{01,2}/\tau_2$ (n_{01} и n_{02} — числа фотонов в областях I и II без пучка).

Из выражения (3) определяем величину сигнала атомного резонанса, которая равна

$$\Delta J = \frac{J_1 J_2 N_0 (K_{\max} + 1)}{2\tau_1 [J_1 + (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}] [J_2 + (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}]} \cdot \quad (4)$$

Эта величина принимает следующее максимальное значение при условии $J_1, J_2 \gg (b_1 \tau_1 \tau_2)^{-1}$:

$$\Delta J_{\max} = \frac{N_0}{2\tau_1} (K_{\max} + 1). \quad (4')$$

Оценки, проведенные на основе решений системы (1) для N_0 и $J_{1,2}$, показывают, что в работе [5] пучок атомов Rb⁸⁷ имел эффективную интенсивность (атомы на уровнях эталонного перехода) $J \leq 10^{11}$ атом/с, а интенсивность света спектральных ламп накачки и индикации $J \leq 10^{14}$ фотон/с. Отметим, что использование лазеров с интенсивностью излучения $J \sim 10^{15}$ фотон/с (мощность порядка 1 мВт) позволит увеличить согласно (4), (4') сигнал атомного резонанса примерно на порядок.

АЛТ С ВНУТРЕННЕЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

В этом разделе рассмотрим две схемы АЛТ, существенно отличающиеся от предыдущей.

1. Модуляция выходного излучения при индикации атомного резонанса осуществляется путем взаимодействия оптического поля на частоте ν_{13} или ν_{23} с атомным пучком внутри резонатора лазера (пучок с периодом T модулирует добротность резонатора лазера). Накачка

пучка в области I (создание разности населенностей) производится так же, как и в рассмотренной выше АЛТ (рис. 1 б).

Здесь для простоты предполагаем, что в области I создается сто-процентная разность населенностей. Взаимодействие атомов с оптическим полем в области II рассмотрим с помощью системы уравнений, описывающих процесс генерации в лазере на основе двухуровневой модели для рабочего вещества [13, 14] с учетом уравнения для пучка:

$$\Delta = -\Delta(2A_1^2n + B_2^1 + B_1^2) + M_0(B_1^2 - B_2^1),$$

$$\dot{n} = n \left(A_1^2 \Delta - \alpha - b_1 \frac{N_0 - R}{2} \right), \quad (5)$$

$$R = b_1 n(N_0 - R) - \frac{R \pm N_0 K(t)}{\tau_1}.$$

Здесь M_0 , Δ — соответственно число атомов и их разность на рабочих уровнях вещества лазера, A_1^2 — вероятность спонтанного излучения атомов лазера в рабочую моду [10], B_1^2 — вероятность переброса атома лазера на верхний уровень под действием накачки, B_2^1 — вероятность безызлучательного перехода с верхнего уровня, α — суммарная вероятность поглощения фотона в резонаторе лазера и выхода из него.

В последнем уравнении системы (5) перед членом $N_0 K(t)$ следует брать знак (—), когда частоты излучения накачки и индикации совпадают, и знак (+), когда они отличаются на частоту эталонного перехода.

Получить решение системы (5) в аналитическом виде не удается, поскольку она нелинейная, тем более что в последнем уравнении свободный член — периодическая функция времени. Однако заметим, что параметры τ_1 , α^{-1} , $(B_1^2 - B_2^1)^{-1}$, определяющие время релаксационных процессов в лазере, много меньше периода модуляции T . Поэтому систему (5) будем решать в стационарном приближении. Решение для интенсивности излучения, выходящего из резонатора лазера, запишется в виде

$$J(t) = \alpha_1 \frac{a - b - q - p[1 - K(t)]}{2} + \quad (6)$$

$$+ \sqrt{\left\{ \frac{a - b + q - p[1 - K(t)]}{2} \right\}^2 - p b [1 - K(t)]},$$

где α_1 — вероятность выхода фотона из резонатора, а

$$a = \frac{M_0(B_1^2 - B_2^1)}{2\alpha}, \quad b = \frac{B_2^1 + B_1^2}{2A_1^2}, \quad (7)$$

$$p = \frac{N}{2\alpha\tau_1}, \quad q = (b_1\tau_1)^{-1}.$$

Проведем качественный анализ решения (6). При мощности излучения лазера в отсутствие пучка больше 0,1—1 мВт параметры в (7) удовлетворяют условию $a - b \gg p, q$. Формула (6) упрощается, принимая следующий вид:

$$J(t) = \frac{J_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4pb\alpha_1^2[1-K(t)]}{J_0^2}} \right]. \quad (6')$$

Здесь $J_0 = \alpha_1(a-b)$ — интенсивность излучения лазера без пучка.

Величина сигнала атомного резонанса ΔJ и временная зависимость выходного излучения $J(t)$ определяются поведением подкоренного выражения, где функция $K(t)$, как отмечалось выше, принимает значения $-1 \leq K(t) \leq K_{\max} < 1$ за период модуляции СВЧ-поля T . Из (7), (6') видно, что величина ΔJ определяется соотношением между интенсивностью атомного пучка и превышением накачки лазера над пороговой.

В случае, когда атомный пучок с переменным числом атомов на рабочих уровнях оказывает слабое влияние на нагруженную добротность лазера (небольшая интенсивность пучка, либо лазер работает высоко над порогом ($J_0 \gg \sqrt{8pb\alpha_1^2}$)), ΔJ определяется формулой

$$\Delta J = \frac{\alpha_1^2 pb[1+K_{\max}]}{J_0}. \quad (8)$$

Величина сигнала атомного резонанса ΔJ увеличивается с возрастанием интенсивности пучка и снижением уровня возбуждения лазера к порогу генерации. В случае, когда подкоренное выражение в (6') за время T меняет знак, $\sqrt{4pb\alpha_1^2(1-K_{\max})} < J_0 < \sqrt{8pb\alpha_1^2}$, то

$$\Delta J = \frac{J_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4pb\alpha_1^2(1-K_{\max})}{J_0^2}} \right]. \quad (8')$$

Если на временном интервале T выполняется соотношение $J_0 > \sqrt{4pb\alpha_1^2[1-K(t)]}$ (т. е. срыва генерации не происходит), то ΔJ имеет вид

$$\Delta J = \frac{J_0}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{4pb\alpha_1^2(1-K_{\max})}{J_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{8pb\alpha_1^2}{J_0^2}} \right]. \quad (8'')$$

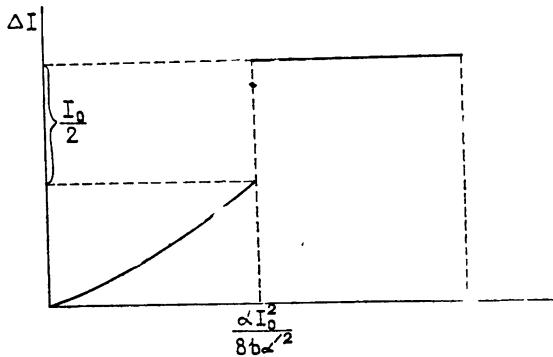


Рис. 2. Зависимость величины сигнала атомного резонанса от интенсивности атомного пучка.

На рис. 2 показано поведение величины сигнала атомного резонанса ΔJ с увеличением интенсивности атомного пучка при фиксированном превышении накачки лазера над пороговой ($J_0 = \text{const}$). На границе

срыва $\left(\frac{N_0}{\tau_1} \geqslant \frac{\alpha J_0^2}{8b \alpha_1^2} \right)$ ΔJ достигает максимального значения. При увеличении интенсивности пучка до $\frac{N_0}{\tau_1} \geqslant \frac{\alpha J_0^2}{4b \alpha_1^2 (1 - K_{\max})}$ потери в резонаторе лазера превышают критические и генерация не возникает. Анализ выражений (8), (8'), (8'') показывает, что при фиксированной интенсивности пучка величина сигнала атомного резонанса достигает наибольшего значения, когда лазер возбужден невысоко над порогом.

Подбирая оптимальное соотношение между интенсивностью пучка и уровнем возбуждения лазера, можно определить максимальное значение величины сигнала атомного резонанса.

2. Во втором случае, в отличие от предыдущего, накачка пучка и модуляция выходного излучения осуществляется при взаимодействии атомного пучка с оптическим полем внутри П-образного резонатора лазера, образованного с помощью дополнительных зеркал (5) (рис. 1в). Здесь пучок дважды пересекает резонатор лазера; в области I создается разность населенностей, а в области II модулируется излучение лазера.

В предположении, что период модуляции T много больше времени пролета T_1 , взаимодействие атомного пучка с излучением лазера описано системой уравнений, аналогичных (5):

$$\begin{aligned}\dot{\Delta} &= -\Delta(2A_1^2 n + B_1^2 + B_2^1) + M_0(B_1^2 - B_2^1), \\ \dot{n} &= n \left[A_1^2 \Delta - \alpha - \frac{b_1}{2} (2N_0 - R' - R'') \right], \\ R' &= b_1 n (N_0 - R') - \frac{R'}{\tau_1}, \\ \dot{R}'' &= b_1 n (N_0 - R'') - \frac{R'' - R' K(t - T_0)}{\tau_1}.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь R' , R'' — соответственно разности населенностей в областях I и II. Система (9) отличается от (5) дополнительным уравнением, описывающим процесс создания разности населенностей R' в области I. Решение системы (9) так же, как и (5), ищем в стационарном приближении.

Система алгебраических уравнений приводится к уравнению третьей степени относительно $x = n + q$,

$$\begin{aligned}x^3 + \{b - a - q + p[2 - K(t)]\}x^2 + \\ + \{2qp - (b - 2q)p[2 - K(t)]\}x + qp(b - q)K(t) = 0.\end{aligned}\tag{10}$$

При интенсивности лазера $J_0 > 0,1 \text{ мВт}$ последним членом в (10) можно пренебречь и приближенное решение для регистрируемой интенсивности излучения дается формулой

$$J(t) = a_1 \frac{a - b - q - p[2 - K(t)]}{2} + \sqrt{\left\{ \frac{a - b + q - p[2 - K(t)]}{2} \right\}^2 - pb[2 - K(t)]}.\tag{11}$$

Отметим, что решение (11) переходит в (6) заменой двойки на единицу. Физически это соответствует внесению в резонатор лазера дополнительного постоянного поглощения, равного половине максимального поглощения в области II. Поэтому в качественном отношении поведение решения (11) с изменением интенсивности пучка, параметров накачки лазера аналогично поведению (5).

Формулы для величины сигнала атомного резонанса ΔJ получим в том же приближении, что и выражения (8), (8'), (8''). При выполнении условия $J_0 \gg \sqrt{12pb\alpha_1^2}$ ΔJ определяется из (8). Когда на временному интервале T выполняется неравенство

$$\sqrt{4pb\alpha_1^2(2-K_{\max})} < J_0 < \sqrt{12pb\alpha_1^2},$$

то

$$\Delta J = \frac{J_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4pb\alpha_1^2(2-K_{\max})}{J_0^2}} \right]. \quad (12)$$

Если $J_0 \geq \sqrt{12pb\alpha_1^2}$, то

$$\Delta J = \frac{J_0}{2} \left[\sqrt{1 - \frac{4pb(2-K_{\max})\alpha_1^2}{J_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{12pb\alpha_1^2}{J_0^2}} \right]. \quad (12')$$

Решения (12), (12') отличаются от (8'), (8'') только численными коэффициентами.

Величина сигнала атомного резонанса ΔJ , полученная по формулам (12), (12'), несколько меньше величины ΔJ , найденной по формулам (8'), (8''), при одном и том же соотношении параметров пучка и накачки. В то же время срыв генерации происходит при меньшей интенсивности пучка, чем ранее. Некоторым преимуществом АЛТ с нелинейной накачкой и нелинейностью индикации является использование лишь одного лазера.

Отметим, если подуровни основного состояния вырождены, то первый член в квадратных скобках (11) следует заменить соответствующим численным коэффициентом.

В заключение этого раздела определим требования к положению вершины линии усиления ν_L относительно вершины линии поглощения атомного пучка ν_{13} (предполагаем, что $\nu_{13} = \nu_p$, ν_p — собственная частота резонатора лазера) и к сдвигам частоты, связанным с модуляцией разности населенностей. Добротность резонатора лазера Q_p много больше добротности линии усиления Q_L ($Q_L/Q_p < 10^{-3}$) и затягивание частоты генерации определяется выражением [10, 16]

$$\nu - \nu_p = (\nu_L - \nu_{13})Q_L/Q_p. \quad (13)$$

Для эффективной модуляции излучения необходимо выполнение условия $\nu - \nu_{13} < \Delta\nu_{13}$ ($\Delta\nu_{13} \sim 10^8 \text{ Гц}$ — ширина линии поглощения атомов в пучке при расходимости его порядка 3° [12]). Тогда $\nu_L - \nu_{13} \leq 10^{12} \text{ Гц}$, т. е. несовпадение центра линии усиления λ_L и поглощения λ_{13} не должно превышать 20 \AA . Дополнительное поглощение при модуляции разности населенностей приводит к уменьшению добротности резонатора лазера. Оценки показывают, что при эффективной плотности пучка порядка 10^{12} атом/с для ПКГ с внешним резонатором длиной около 1 см и коэффициентом отражения порядка 70% добротность резонатора падает на 10% . Это приводит к дополнительному сдвигу частоты $\Delta\nu \sim (\nu - \nu_{13})/10 \ll \Delta\nu_{13}$, и им можно пренебречь.

ОБСУЖДЕНИЕ И СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотренные схемы АЛТ отличаются способами создания разности населенностей и индикацией эталонного перехода.

Мы показали, что в АЛТ с внешней накачкой и внутренней модуляцией излучения лазера и в АЛТ с внутренней накачкой и модуляцией поведение сигнала атомного резонанса ΔJ качественно совпадают.

Поэтому проведем сравнение ΔJ и параметра качества АЛТ для двух существенно различных схем АЛТ: с внешней накачкой и модуляцией излучения ($\Delta J_{\text{лин}}$) и с внешней накачкой и внутренней модуляцией излучения ($\Delta J_{\text{нел}}$).

Максимальные значения $\Delta J_{\text{лин}}^m$ и $\Delta J_{\text{нел}}^m$ определяются соответственно формулами (4'), (8'), и для их отношения получим

$$\frac{\Delta J_{\text{нел}}^m}{\Delta J_{\text{лин}}^m} = \frac{J_0}{N_0/2\tau_1}. \quad (14)$$

Максимальная эффективная интенсивность пучка N_0/τ_1 достигает значений $N_0/\tau_1 \leq 10^{12}$ атом/с [5, 12], и при мощности лазера порядка 0,1—1 мВт ($J_0 \sim 10^{15}$ фотон/с) величина сигнала $\Delta J_{\text{нел}}$ в случае внутренней модуляции излучения будет на три порядка больше, чем величина сигнала при внешней модуляции.

При небольших эффективных интенсивностях пучка ($N_0/\tau_1 \ll 10^{12}$ атом/с, что может иметь место в реальных АЛТ) $\Delta J_{\text{нел}}$ определяется посредством (8) и формула (14) переходит в

$$\frac{\Delta J_{\text{нел}}}{\Delta J_{\text{лин}}} \approx \frac{2b\alpha_1^2}{\alpha J_0}. \quad (14')$$

Оценки показывают, что при мощности излучения 0,1—1 мВт для газового лазера [13] $\frac{b\alpha_1^2}{\alpha J_0} \geq 10 \div 10^2$, для ПКГ [15] $\frac{b\alpha_1^2}{\alpha J_0} \geq 10^2$. При уменьшении уровня возбуждения лазера (14') возрастает. Таким образом, величина сигнала атомного резонанса $\Delta J_{\text{нел}}$ в АЛТ с внутренней модуляцией излучения даже в неоптимальном случае на порядок и больше превышает $\Delta J_{\text{лин}}$ в АЛТ с внешней модуляцией.

Если величина шума в системе автоподстройки частоты определяется интенсивностью излучения, регистрируемого фотодетектором (дробовой шум тока), то сравнение эффективности линейной и нелинейной индикации необходимо проводить по величине параметра качества, который в этом случае определяется формулой [3, 4]

$$F = \beta \frac{\Delta J}{\Delta v \sqrt{J_0}}, \quad (15)$$

где Δv — ширина линии эталонного перехода, β — константа, зависящая от типа фотодетектора.

Для АЛТ с внешней модуляцией в предположении 100-процентной накачки с помощью (4) определяется оптимальный параметр качества:

$$F_{\text{лин}} = \beta \frac{N_0(1 + K_{\max})}{4\Delta v \tau_1} \sqrt{b_1 \tau_1 \tau_2}. \quad (16)$$

Величина $F_{\text{лин}}$ пропорциональна интенсивности пучка и корню из длины области взаимодействия пучка с оптическим излучением. Для области взаимодействия порядка 1 см (атомы R⁸⁷, Cs¹³³) находим, что $b_1 \tau_1 \tau_2 \sim 5 \cdot 10^{-14}$ [12], и при $N_0/\tau_1 \approx 10^{12}$ атом/с получаем $F_{\text{лин}} = \beta \cdot 10^3 / \Delta v$.

Для АЛТ с внутренней модуляцией при том же предположении и выполнении (8') оптимальный параметр качества

$$F_{\text{нел}} = \beta \frac{\sqrt{J_0}}{\Delta v}. \quad (17)$$

При интенсивности излучения порядка 1 мВт $F_{\text{нел}} \approx \beta \cdot 3 \cdot 10^7 / \Delta v$ и превышает $F_{\text{лип}}$ более чем на два порядка. Если выполняется (8), то

$$F_{\text{нел}} = \beta \frac{N_0(1 + K_{\max})}{\Delta v \tau_1 \sqrt{J_0}} \frac{\alpha_1^2 b}{\alpha J_0} \quad (17')$$

и при $N_0/\tau_1 = 10^{12}$ атом/с, $\alpha_1^2 b / \alpha J_0 = 10^2$, $F_{\text{нел}} = \beta \cdot 3 \cdot 10^6 / \Delta v$ и превышает $F_{\text{лип}}$ более чем на порядок.

Таким образом, применение лазера для нелинейной индикации эталонного перехода в АЛТ с оптической насакачкой и индикацией позволит резко увеличить выходной сигнал и параметр качества АЛТ. Наибольший эффект достигается при использовании лазера, возбужденного невысоко над порогом. При выполнении этого условия использование лазера в АЛТ позволяет в принципе увеличить параметр качества и кратковременную стабильность частоты [4] более чем на два порядка.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г Хеллвиг, ТИИЭР, 63, № 2, 5 (1975).
- 2 R. Nyatt et al, Hewlett-Packard J., September, 405 (1973).
- 3 В И Колосников и др, Вопросы радиоэлектроники, серия ОТ, вып 20, 115 (1968).
- 4 А Маккоубри, ТИИЭР, 54, № 2, 19 (1966).
- 5 M. Arditi and P. Cerez, IEEE Trans. Instrum. Meas., IM-21, 391 (1972).
- 6 J L. Picque et al, Appl. Phys., 6, № 3, 373 (1975).
- 7 J L. Picque, IEEE J. Quant. Electr., QE-10, № 12, 892 (1974).
- 8 Ю А Быковский, В Л. Величанский и др, Письма в ЖЭТФ, 17, вып. 6, 302 (1973).
- 9 Е В. Кулагин, Г А Мишаков, А И. Пихтелеев, Изв вузов—Радиофизика, 15, № 12, 1801 (1972).
- 10 В М Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М, 1965.
- 11 Н Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М, 1960.
- 12 В В Григорьянц, М Е Жаботинский, В Ф Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М, 1968.
- 13 Л. А. Будкин, В. Митюгов, Изв вузов—Радиофизика, 17, № 2, 238 (1974).
14. А. Л. Микаэлян, М Л Тер-Микаэлян, Ю Г. Турков, Оптические генераторы на твердом теле, изд. Сов. радио, М, 1967.
- 15 П. Г. Елисеев, Труды ФИАН, 52, 1 (1970)
- 16 В Беннет, сб Лазеры (под ред. М. Е Жаботинского и Т А Шмаонова), ИЛ, М., 1963, стр 222.
- 17 В С Летохов, В. П. Чеботарев, Принципы нелинейной лазерной спектроскопии, изд. Наука, М, 1975.

Поступила в редакцию
12 декабря 1976 г.

ATOM-RAY TUBE WITH LASER PUMP AND INDICATION

L. A. Budkin, V. G. Boldin, A. I. Pikhtelev

Three different cases of interaction of an atom beam with the laser radiation in the atom-beam tube (ABT) with the optical pump and the indication are theoretically investigated on the basis of balance equations for two-level model of atom beams and the laser. It is shown that in the case of the internal modulation of the output radiation at the interaction of an atom beam inside the laser resonator the signal of the atom resonator and the parameter of ABT quality are considerably larger than in the case of the external modulation. Optimal relations are found between the level of the laser pump and the intensity of the atom beam.

УДК 621.372.413—434.1

СВОЙСТВА КОЛЬЦЕВЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ С ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОЙ УСИЛИВАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

B. F. Бойцов

Получены и проанализированы формулы для полей, частот и пороговых условий кольцевого резонатора с цилиндрическим зеркалом и «квадратичной средой». Показано, что поперечная неоднородность коэффициента усиления приводит к двум совокупностям резонаторов, которые существенным образом отличаются по своим физическим свойствам.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ, посвященных исследованию и практическому применению кольцевых лазеров, необходимо знать собственные волны резонатора [1–3]. Успехи в теоретическом объяснении «невзаимных эффектов» в кольцевых лазерах связаны, в первую очередь, с возможностью расчета полей у все более сложных моделей резонаторов [4, 5].

Как указывалось в статье Андроновой и Берштейна [1], неоднородность пространственных характеристик активной среды может привести к различию встречных волн у кольцевого лазера. В связи с этим представляется интерес рассмотреть поля и частоты резонатора с пространственно-неоднородной усиливающей средой. Такая задача в рамках модели «квадратичной среды» может быть решена методом интегральных уравнений, матричным методом или другими способами [6–10].

Рассмотрим кольцевой резонатор, образованный цилиндрическим зеркалом радиуса R с коэффициентом отражения γ и двумя плоскими, полностью отражающими зеркалами. Введем прямоугольную систему координат x, z с ортом z в направлении движения часовой стрелки вдоль оптической оси и $z = 0$ на цилиндрическом зеркале. Неоднородная среда длиной l , расположенная между сечениями z_1 и z_2 , имеет комплексный показатель преломления $n(x)$:

$$n(x) = \frac{k(x)}{k} = 1 + \frac{\chi^{(1)}(x)}{k} = 1 + \frac{\chi^{(1)}}{k} \left[1 - \left(\frac{x}{a_p} \right)^2 \right], \quad (1)$$

$$k \equiv k(0), \quad \chi^{(1)} \equiv \chi^{(1)}(0) = \gamma_1^{(1)} + i \gamma_2^{(1)},$$

где $k(x)$ — волновое число в среде, $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_2^{(1)}$ — вещественные величины, определяющие линейную дисперсию и усиление (затухание) на единицу длины вдоль оптической оси резонатора.

Опуская выкладки, которые можно сделать, например, с помощью работ [6–10], и используя неравенство

$$\left| \sqrt{N_p \chi^{(1)} l'} \right| \gg 1, \quad N_p \equiv \frac{L}{ka_p^2}, \quad \chi^{(1)} = \chi^{(1)} l, \quad l' = \frac{l}{L}, \quad (2)$$

где L — длина оптической оси резонатора, приведем окончательные формулы для поперечного распределения нулевых мод встречных волн внутри усиливающей среды:

$$\varphi_0^{(\pm)}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{1-g^2}}{p(z')\sqrt{\pi}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \bar{x} \left[\frac{\sqrt{1-g^2}}{p^2(z')} \mp i \frac{B(z')}{p^2(z')} \right] \right\} \quad (3)$$

(верхний знак соответствует волне, бегущей по часовой стрелке, а нижний — встречной волне). Пороговое условие, обеспечивающее воспроизведение амплитуд полей после одного прохождения резонатора, —

$$\exp \left\{ i \left[\pi n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos g \right] \right\} = \gamma \exp \left\{ -i [kL + \chi^{(1)} - 2\pi q] \right\}. \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\bar{x} = x \sqrt{k/L}$, $z' = z/L$, дискретные числа n и q есть поперечный и продольный индексы моды,

$$\frac{1}{p^2(z')} = \frac{1}{p_0^2(z')} \left\{ 1 + \frac{\chi^{(1)} N_p a_1(z')}{p_0^2(z') l'} \right\}, \quad (5)$$

где $p_0^2(z')$ — масштабный множитель, характеризующий каустические поверхности пустого резонатора,

$$p_0^2(z') = 1 - 2z' (1 - z') (1 - g_0), \quad g_0 = 1 - \frac{L}{R \cos \alpha_0}, \quad (6)$$

α_0 — угол между оптической осью и нормалью к цилиндрическому зеркалу,

$$B(z') = a_2(z') + \frac{\chi^{(1)} N_p a_3(z')}{l'}, \quad g = g_0 - \chi^{(1)} N_p a_4(z'_0), \quad (7)$$

z_0 — центр усиливающей среды; явный вид функций $a_j(z')$ приведен в Приложении. Нормировка функций $\varphi_0^{(\pm)}(\bar{x})$ выбрана таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^{(+)}(\bar{x}) \varphi_0^{(-)}(\bar{x}) d\bar{x} = 1. \quad (8)$$

Дальнейшие расчеты будем проводить для двух предельных случаев:

$$(1 - g_0^2) \gg |2g_0 \chi^{(1)} N_p a_4(z'_0)| \quad A; \quad (9)$$

$$|1 - g_0^2| \ll |2g_0 \chi^{(1)} N_p a_4(z'_0)| \quad B. \quad (10)$$

Ситуация А соответствует резонаторам, близким к конфокальному, а также резонаторам, близким к плоскому или концентрическому при достаточно малом значении величины

$$M = |\chi^{(1)} N_p a_4(z'_0)|. \quad (11)$$

Ситуация В соответствует резонаторам, близким к плоскому или концентрическому, а также резонаторам, близким к конфокальному при достаточно большом значении величины M .

2. КАУСТИЧЕСКИЕ И ЭКВИФАЗОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НУЛЕВЫХ МОД ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Каустические поверхности встречных волн определяются из формулы (3) с помощью равенства

$$\frac{1}{2} \bar{x}^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\sqrt{1-g^2}}{p^2(z')} \mp i \frac{B(z')}{p^2(z')} \right] = 1, \quad (12)$$

а кривизны $\rho_{\phi}^{(\pm)}(z')$ эквифазовых поверхностей соответственно

$$\rho_{\phi}^{(\pm)}(z') \sqrt{\frac{k}{L}} \equiv \bar{\rho}_{\phi}^{(\pm)}(z') = \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{1-g^2}}{p^2(z')} \mp i \frac{B(z')}{p^2(z')} \right]. \quad (13)$$

Из уравнения (12) тотчас получаем, что 1) для встречных волн снято вырождение по каустическим поверхностям, которое характерно для пустых резонаторов [4]. Это свойство имеет место как для усиливающей, так и для поглощающей среды; 2) расщепление каустических поверхностей встречных волн исчезает в трех случаях: если среда в поперечном направлении однородна ($a_p \rightarrow \infty$), если длина трубы со средой $l = L$, а также когда усиление (затухание) в среде отсутствует ($\operatorname{Im} x^{(1)} = 0$); 3) каустики имеют резонаторы, устойчивые, без усиливающей среды. Устойчивыми становятся также плоский и концентрический резонаторы.

В первом неисчезающем порядке, сохраняющем в каждом из слагаемых квадратных скобок выражений (12) и (13) член с N_p , получим на основании формул (5)–(7), (9), (10) и (12), (13) следующие уравнения для каустических поверхностей и кривизн эквифазовых фронтов:

$$\frac{1}{2} \bar{x}^2 \left\{ \frac{\sqrt{1-g_0^2}}{p_0^2(z')} \left[1 + \frac{x_1^{(1)} N_p a_6(z')}{l'} \right] \pm \frac{1}{p_0^2(z')} \frac{x_2^{(1)} N_p a_5(z')}{l'} \right\} = 1 \quad A; \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \bar{x}^2 \left[\frac{\sqrt{|g_0| N_p a_4(z_0)}}{p_0^2(z')} k_1^{(1)} \pm \frac{1}{p_0^2(z')} \frac{x_2^{(1)} N_p a_5(z')}{l'} \right] = 1 \quad B, \quad (15)$$

$$\bar{\rho}_{\phi}^{(\pm)}(z') = \mp \bar{\rho}_{\phi}^{(0)}(z') + \frac{\sqrt{1-g_0^2}}{p_0^2(z')} \frac{x_2^{(1)} N_p a_6(z')}{l'} \quad A; \quad (16)$$

$$\bar{\rho}_{\phi}^{(\pm)}(z') = \mp \bar{\rho}_{\phi}^{(0)}(z') + \frac{\sqrt{|g_0| N_p a_4(z_0)}}{p_0^2(z')} k_2^{(1)} \quad B. \quad (17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{\rho}_{\phi}^{(0)}(z') = \frac{1}{p_0^2(z')} \left[a_2(z') + \frac{x_1^{(1)}}{l'} N_p \left(a_3(z') + \frac{a_1(z') a_2(z')}{p_0^2(z')} \right) \right]; \quad . \quad (18)$$

$$x_1^{(1)} = \operatorname{Re} x^{(1)}, \quad x_2^{(1)} = \operatorname{Im} x^{(1)}, \quad k_1^{(1)} + ik_2^{(1)} = \sqrt{(\operatorname{sign} g_0)} 2\bar{x}^{(1)}, \quad (19)$$

$k_1^{(1)}$ и $k_2^{(1)}$ — вещественные числа, функции $a_5(z')$ и $a_6(z')$ определены в Приложении. Как видно из формул (16), (17), главные члены, определяющие $\bar{\rho}_{\phi}^{(\pm)}(z')$ для ситуаций А и В по своему виду совпадают.

Знаки « \mp » перед ними указывают, что волновые фронты встречных волн своими выпуклостями в совпадающих сечениях направлены в одну и ту же сторону.

В ряде практических задач $x_1^{(1)}$ можно положить равными нулю, тогда для усиливающих сред

$$k_1^{(1)} = (\text{sign } g_0) k_2^{(1)} = \sqrt{|x_2^{(1)}|}. \quad (20)$$

Формулы (14)–(17) принимают особенно простой вид в приближении «короткой трубки», когда в функциях $a_j(z')$ пренебрегают l'^2 и выше. В этом приближении, используя соотношение (20) и раскрывая функции $a_j(z')$, получаем вместо формул (14)–(17) следующие выражения:

$$\frac{1}{2} \bar{x}^2 = \frac{p_0^2(z')}{\sqrt{1 - g_0^2}} \mp \frac{2(z'_0 - z') p_0^4(z') x_2^{(1)} N_p}{(1 - g_0^2) l'} \quad A; \quad (21)$$

$$\frac{1}{2} \bar{x}^2 = \frac{p_0^2(z')}{\sqrt{|x_2^{(1)}| g_0 + p_0^2(z') N_p}} \mp \frac{2(z'_0 - z') p_0^4(z')}{|g_0| p_0^2(z'_0) l'} \quad B; \quad (22)$$

$$\bar{\rho}_\Phi^{(\pm)}(z') = \mp \frac{(2z' - 1)(1 - g_0)}{p_0^2(z')} + \frac{x_2^{(1)} N_p g_0 p_0^2(z'_0)}{p_0^2(z') \sqrt{1 - g_0^2}} \quad A; \quad (23)$$

$$\bar{\rho}_\Phi^{(\pm)}(z') = \mp \frac{(2z' - 1)(1 - g_0)}{p_0^2(z')} + \frac{(\text{sign } g_0) \sqrt{|x_2^{(1)} N_p| g_0 + p_0^2(z'_0)}}{p_0^2(z')} \quad B. \quad (24)$$

Рассмотрим уравнение (21). Первое слагаемое есть хорошо известное уравнение гипербол, изображающих каустики в пустом резонаторе [4]:

$$\frac{1}{2} \bar{x}_0^2 = \frac{p_0^2(z')}{\sqrt{1 - g_0^2}}. \quad (25)$$

Без учета усиливающей среды каустики встречных волн вырождены. На рис. 1 они изображены кривой 1. Стрелками показано направление распространения волн. Деформация каустик за счет усиливающей среды описывается уравнениями

$$\frac{1}{2} (\bar{x}^2 - \bar{x}_0^2) \approx \bar{x}_0 (\bar{x} - \bar{x}_0) = \mp \frac{2(z'_0 - z') p_0^4(z') x_2^{(1)} N_p}{(1 - g_0^2) l'}. \quad (26)$$

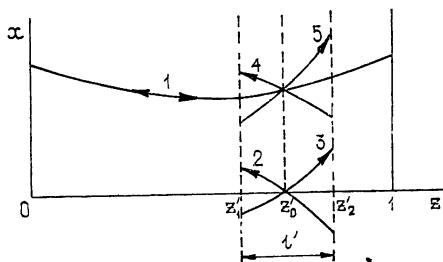


Рис. 1.

Кривые 2 и 3 на рис. 1 качественно изображают эту деформацию. Наконец, кривые 4 и 5 показывают каустики встречных волн в усиливающей среде. Аналогичное построение имеет место для ситуации B: зависимость деформации каустик от z такая же, как в случае A, однако деформация каустик в выбранном приближении не является функцией усиления и поперечных размеров среды.

Относительное изменение за счет усиливающей среды объема поля, заключенного между каустиками в среде, будет для ситуации А

$$I_A^{(\pm)} = \int_{z_0' - l'/2}^{z_0' + l'/2} (1 - \bar{x}/\bar{x}_0) dz' = \pm \frac{1}{6} x_2^{(1)} N_p l'^2 (1 - 2z_0') \sqrt{\frac{1 - g_0}{1 + g_0}} \quad (27)$$

и для ситуации В

$$I_B^{(\pm)} = \pm \frac{1}{6} \sqrt{\frac{x_2^{(1)} N_p}{p_0^2(z_0')}} l'^2 (1 - 2z_0') \frac{1 - g_0}{\sqrt{|g_0|}}. \quad (28)$$

Очевидно, что для плоского резонатора $I_B^{(\pm)} = 0$ при любом z_0' .

3. КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ РЕЗОНАТОРА НА ПОРОГЕ ГЕНЕРАЦИИ

Равенство фаз и модулей в выражении (4) определяет собственные частоты ν_{qn} и пороговое усиление $x_2^{(1)}_{\text{пор}}(n)$ (предполагается $x_1^{(1)} = 0$):

$$\nu_{qn} = \frac{ck_{qn}}{2\pi} = \frac{c}{L} \left\{ q + \frac{1}{2\pi} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \arccos g - 2n - 2\pi x_2^{(1)}_{\text{пор}}(n) \right] \right\}; \quad (29)$$

$$x_2^{(1)}_{\text{пор}}(n) = (n + 1/2) \operatorname{Im} \arccos g - \ln \gamma \quad (\ln \gamma \ll 0), \quad (30)$$

c — скорость света. Таким образом, собственные частоты вырождены для встречных волн и зависят от порогового усиления, которое, в свою очередь, определяется коэффициентом пропускания зеркала γ . Из формулы (30) следует, что пороговое усиление растет с увеличением попечного индекса моды.

Расчет реальной и мнимой частей $\arccos g$ дает

$$\operatorname{Re} \arccos g = \arccos g_0, \quad \operatorname{Im} \arccos g = -\frac{x_2^{(1)} N_p a_4(z_0')}{\sqrt{1 - g_0^2}} A; \quad (31)$$

$$\operatorname{Re} \arccos = \arccos g_0 + \sqrt{|g_0| x_2^{(1)} N_p a_4(z_0')} [(\operatorname{sign} g_0) \sqrt{1 - g_0^2} + g_0], \quad B. \quad (32)$$

$$\operatorname{Im} \arccos g = \sqrt{|g_0| x_2^{(1)} N_p a_4(z_0')} [|g_0| - \sqrt{1 - g_0^2}]$$

На основании формул (30) и (31) имеем для $x_2^{(1)}_{\text{пор}}(0)$ нулевой моды выражение

$$x_2^{(1)}_{\text{пор}}(0) \left[2 - \frac{N_p a_4(z_0')}{\sqrt{1 - g_0^2}} \right] = -2 \ln \gamma, \quad M \ll 1 \quad A, \quad (33)$$

где M определено в (11). Решение уравнения (33) проиллюстрировано на рис. 2 а. Кривые 1—5 есть гиперболы в переменных $x_2^{(1)}_{\text{пор}}(0)$ и

$2 - \frac{N_p a_4(z_0')}{\sqrt{1 - g_0^2}}$ при разных значениях $-2 \ln \gamma$ (кривая 1 — $\gamma = 0,95$;

$2 - \gamma = 0,88; 3 - \gamma = 0,78; 4 - \gamma = 0,61; 5 - \gamma = 0,47$). Если среда в поперечном направлении однородна, $N_p = 0$, тогда $x_{2\text{пор}}^{(1)}(0) = x_{2\text{пор}}^{(1)}(n) = -\ln \gamma$. С ростом N_p поперечные размеры среды уменьшаются, пороговое усиление соответственно растет. Кривые 6 и 7 указывают, с какой точностью соблюдается условие $M \ll 1$. В области слева вниз от кривой 6 выполнено неравенство $x_{2\text{пор}}^{(1)}(0) N_p a_4(z'_0) < 0,5 \sqrt{1 - g_0^2}$, а в области слева и вниз от кривой 7 выполнено неравенство $x_{2\text{пор}}^{(1)}(0) \times N_p a_4(z'_0) < 0,1 \sqrt{1 - g_0^2}$.

Рассмотрим пороговое условие нулевой моды для ситуации В. На основании формул (30) и (32)

$$x_{2\text{пор}}^{(1)}(0) N_p a_4(z'_0) |g_0| \left[|g_0| - \sqrt{1 - g_0^2} \right]^2 = 4(x_{2\text{пор}}^{(1)}(0) + \ln \gamma)^2, \\ M \ll 1. \quad (34)$$

На рис. 2 б показана зависимость $x_{2\text{пор}}^{(1)}(0)$ от $N_p a_4(z'_0) |g_0| \left[|g_0| - \sqrt{1 - g_0^2} \right]^2 / 4$ при разных значениях γ , которая получена из уравнения (34). Прямая 1 соответствует $\gamma = 1,0$, кривая 2 — $\gamma = 0,95$; 3 — 0,88; 4 — 0,78. Кривые 2, 3, 4 являются участками гипербол с асимптотами, обозначенными штриховыми прямыми и вершинами на оси ординат. На кривой 5 функция $\sqrt{x_{2\text{пор}}^{(1)}(0)} \sqrt{N_p a_4(z'_0) |g_0| \left[|g_0| - \sqrt{1 - g_0^2} \right]}$ равна 0,5, а на кривой 6 — 0,1.

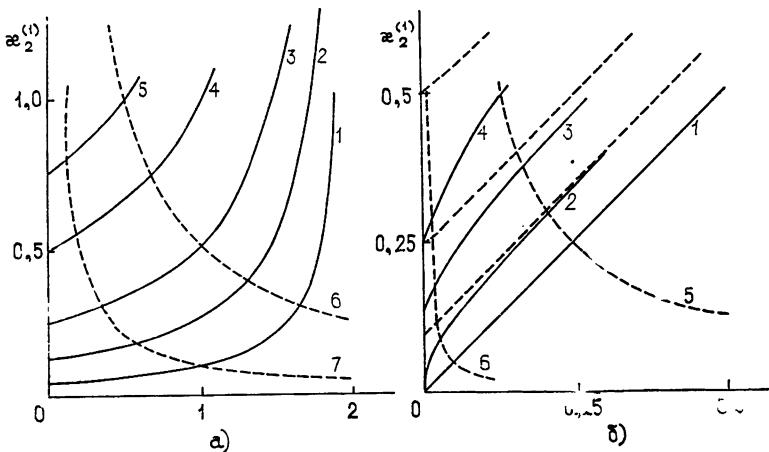


Рис. 2.

Отметим различие в спектре частот резонаторов для ситуаций А и В. В первом случае, как следует из формул (29) — (31), при фиксированных q и γ спектр частот эквидистантен относительно индекса n ; во втором случае при тех же условиях, как следует из формул (29), (30), (32), спектр частот имеет сложную структуру, которая определяется полиномом второй степени относительно $\sqrt{n + 1/2}$.

Поперечная неоднородность коэффициента усиления среды в кольцевом резонаторе приводит к ряду особенностей по сравнению с пустыми резонаторами. Это, прежде всего, снятие вырождения каустических поверхностей встречных волн. Физические свойства — зависимость «де-

формации» каустик, частотного спектра и пороговых условий от поперечной неоднородности коэффициента усиления—естественным образом приводят к двум совокупностям резонаторов, которые существенно отличаются друг от друга. Это резонаторы, близкие к конфокальному А, и резонаторы, близкие к плоскому или концентрическому В. В частности, относительное изменение объемов поля, заключенного между каустическими поверхностями в среде, в приближении короткой трубы для резонаторов типа А пропорционально $x_2^{(1)} N_p$, а типа В — пропорционально $\sqrt{x_2^{(1)} N_p}$ (27), (28). Поэтому следует ожидать, что «невзаимные эффекты» в кольцевых лазерах с резонаторами, близкими к конфокальному, проявляются слабее, чем с резонаторами, близкими к плоскому или концентрическому (ср. с [1]).

Автор глубоко благодарен И. Л. Берштейну за всестороннее и детальное обсуждение работы и за доброжелательные и полезные советы, а также В. И. Таланову за ценные замечания и консультации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции $a_1(z')$ — $a_6(z')$ из формул (5), (7), (9)–(11), (14)–(17) выражаются следующим образом:

$$a_1(z') = \frac{2}{3} \left\{ (z' - z'_0)^2 [3 - 3l'g_0 - 2(z'(1-z') + z'(1-z'_0) + (z'_0(1-z'))(1-g_0)] + \left(\frac{l'}{2}\right)^2 [3 - l'g_0 - 6(z' - z'_0)^2(1-g_0)] \right\}; \\ a_2(z') = (2z' - 1)(1 - g_0); \quad (\text{П. 2})$$

$$a_3(z') = 2(z'_0 - z') \left[(1 - l') - \left(\frac{2}{3}(z'_0 - z')^2 + 2z'(1-z') - \frac{1}{2}l'(2-l')\right)(1-g_0) \right]; \quad (\text{П. 3})$$

$$a_4(z'_0) = 1 - \left(2z'_0(1-z'_0) - \frac{1}{6}l'^2\right)(1-g_0), \quad a_4(z'_0) > 0; \quad (\text{П. 4})$$

$$a_5(z') = \frac{a_1(z')a_2(z')}{p_0^2(z')} + a_3(z'), \quad a_6(z') = \frac{g_0a_4(z'_0)l'}{1-g_0^2} + \frac{a_1(z')}{p_0^2(z')}. \quad (\text{П. 5})$$

Эти функции в приближении «короткой трубы» имеют вид

$$a_1(z') = 0, \quad a_2(z') = (2z' - 1)(1 - g_0), \quad a_3(z') = 2(z'_0 - z')p_0^2(z'), \quad (\text{П. 6}) \\ a_4(z'_0) = p_0^2(z'_0), \quad a_5(z') = a_3(z'), \quad a_6(z'_0) = \frac{g_0p_0^2(z'_0)l'}{1 - g_0^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. А. Андронова, И. Л. Берштейн, ЖЭТФ, 57, 100 (1969).
- 2 P. K. Cheo and C. V. Heeg, Appl. Opt., 3, 788 (1964).
- 3 A. Hetherington, G. I. Burgess and T. S. Moss, Infrared Phys., 9, 109 (1969).
4. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, под ред. Ю. Л. Климентовича, изд. Наука, М., 1974.

- 5 В. Ф. Бойцов, Т. А. Мурина, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия, 36, 539 (1974).
 6 V. S. Averbach, S. N. Vlasov and V. I. Talanov, Electromagnetic Wave Theory, Proceedings of the Symposium held at Delft, The Netherland, September, 1965, p. 445.
 7 Е. С. Коваленко, Квантовая электроника, 3, 433 (1976).
 8 Д. Маркузе, Оптические волноводы, изд. Мир, М., 1974.
 9 Н. Когелник, Proc. IEEE, 54, 1312 (1966).
 10 И. А. Аграпонов, Proc. IEEE, 62, 1561 (1974).
 11 В. Ф. Бойцов, Оптика и спектроскопия, 41, 864 (1976).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
20 ноября 1976 г

PROPERTIES OF RING OPTICAL RESONATORS WITH SPATIALLY
INHOMOGENEOUS AMPLIFYING MEDIUM

V. F. Boitsov

Formulars for fields, frequencies and threshold conditions of a ring resonator with the cylindric mirror and the «quadratic medium» have been obtained and analysed. It is shown that the transverse inhomogeneity of the amplification coefficient leads to two types of resonators which are differed essentially by its physical properties.

УДК 535.2

КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГИИ СВЕТОВОГО ЛУЧА

A. C. Крестьянинов, B. B. Митюгов

Найдены предельные оценки точности измерения энергии светового луча за счет отвода в прибор малой части этого луча. Учтены собственные тепловые шумы измерителя

Проблема косвенных измерений неоднократно привлекала к себе внимание еще со времен основания квантовой теории. Речь идет о таких измерениях, когда интересующий наблюдателя физический объект воздействует на прибор не непосредственно, а через какие-либо промежуточные объекты — кванты света, частицы, вещество фотоэмulsionий и т. д. Возникающие здесь принципиальные вопросы ставились еще Эйнштейном [1], поднимались при обсуждении треков частиц в камере Вильсона, позднее подробно исследовались Нейманом [2] и многими другими.

С другой стороны, применительно к устройствам квантовой электроники названная проблема приобретает не только абстрактно-теоретический, но и непосредственный практический интерес. Дело в том, что столь обычная для радиосизмерительной техники необходимость узнать параметры электромагнитного сигнала, отводя в прибор лишь малую часть его энергии, является типичным примером косвенного измерения. В самом деле, отвод части энергии монохроматической световой волны в измерительное устройство есть не что иное, как взаимодействие двух полевых осцилляторов, один из которых отождествляется с самой волной, а второй — непосредственно связан с входным устройством прибора.

Отметим, что подобная задача представляет интерес в первую очередь именно для квантовой области, поскольку в классической трактовке отвод в измерительное устройство любой, произвольно малой части волны в принципе способен доставить исчерпывающую информацию о ее параметрах. Разумеется, для проведения конкретных расчетов необходимо указать еще и способ отвода энергии. Так, можно контролировать энергию луча по световому давлению; для этой же цели можно использовать комптоновское рассеяние или же отводить в прибор излучение второй гармоники, возникшее при прохождении света через нелинейный кристалл. Следует ожидать, что точность апостериорных оценок мощности сигнала для этих случаев окажется различной.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда отвод части световой волны в прибор (счетчик фотонов) происходит за счет линейного процесса — рассеяния света на частицах, отражения от полупрозрачного зеркала или сочленения световодов и т. д.

1. УСЛОВНЫЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПОЛЕВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Введем сначала понятие условной матрицы плотности для произвольной физической системы. Пусть $\langle xy|\rho|x'y'\rangle$ — совместная матрица плотности, описывающая состояние двух статистически связанных подсистем. Под x и y здесь следует понимать полные наборы перемен-

ных (дискретных или непрерывных) первой и второй подсистем соответственно. Если в прошлом подсистемы взаимодействовали, то как матрица $\langle xy|\rho|x'y' \rangle$, так и совместное вероятностное распределение

$$w(x, y) = \langle xy|\rho|xy \rangle \quad (1)$$

не распадаются, вообще говоря, на произведение.

Теперь предположим, что с помощью подходящего прибора мы произвели измерение некоторого полного набора y переменных второй подсистемы. Получив с вероятностью $w(y) = \sum_x w(x, y) = \langle y|\rho|y \rangle$

соответствующие численные значения, мы теперь можем поставить вопрос о предсказании значений переменных x первой подсистемы, которые могли бы быть получены последующим прямым измерением. Вероятности этих значений $w(x|y) = w(x, y)/w(y)$ можно представить как диагональные элементы условной матрицы плотности:

$$\langle x|\rho^{(y)}|x' \rangle = \frac{\langle xy|\rho|x'y \rangle}{\langle y|\rho|y \rangle}. \quad (2)$$

Заметим, что эта матрица содержит полное статистическое описание состояния, возникшего в результате коэффициентной редукции при измерении переменных y .

Перейдем теперь к вопросу об измерении энергии квазимохроматической световой волны. Будем считать, что возбужден лишь один осциллятор поля некоторой частоты ω , все же остальные находятся в вакуумном состоянии. Для правомерности такого допущения достаточно предположить, что продолжительность измерения t не превышает времени когерентности исследуемого источника. Ясно, что именно этот случай представляет наибольший принципиальный интерес, поскольку учет многомодовости может быть произведен сравнительно простым суммированием.

Будем предполагать наличие некоторых априорных сведений об ансамбле, которому принадлежит источник интересующей нас волны*, характеризуя эти сведения априорным оператором плотности полевого осциллятора ρ_1 . В частности, если известна лишь средняя по ансамблю предыдущих опытов над подобными источниками мощность волны, то за ρ_1 следует принять оператор Гиббса [3]. В энергетическом представлении

$$\langle m|\rho_1|n \rangle = \frac{1}{\bar{M} + 1} \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M} + 1} \right)^n \delta_{mn}, \quad (3)$$

где $\bar{M} = Pt/\hbar\omega$.

Введем в рассмотрение второй осциллятор той же частоты ω , непосредственно связанный с детектором. В различных линейных моделях будет различной и природа второго осциллятора: это может быть осциллятор поля рассеянной или отраженной волны, либо одна из мод входного резонатора приемника и т. д. Поскольку, однако, для нашего рассмотрения это не существенно, в дальнейшем для определенности и удобства рассуждений будем отождествлять этот осциллятор с входным резонансным контуром приемника, настроенного на частоту волны. Иногда же для краткости будем называть этот осциллятор просто приемником.

* Разумеется, в общем случае этот ансамбль не является эргодическим.

Если состояние второго осциллятора до его взаимодействия с волной описывается оператором плотности $\hat{\rho}_2$ (характеризующим собственные шумы приемника), то совместный оператор плотности исходного состояния рассматриваемой пары осцилляторов запишется в виде произведения $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2$.

Описание любого линейного процесса перераспределения энергии между двумя осцилляторами одинаковой частоты может быть сведено [4, 5] к рассмотрению взаимодействия вида

$$H_{\text{int}} = \gamma(a^+b + b^+a), \quad (4)$$

где a и b — операторы аннигиляции для соответствующих осцилляторов. Следовательно, эволюция оператора плотности в процессе взаимодействия сведется к преобразованию

$$\hat{\rho}(t) = \exp \left[-i \frac{\gamma}{\hbar} (a^+b + b^+a)t \right] \hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2 \exp \left[i \frac{\gamma}{\hbar} (a^+b + b^+a) \right]. \quad (5)$$

Известно, что такое преобразование эквивалентно ортогональному повороту канонических координат осцилляторов или же замене (волна здесь не означает транспонирования)

$$a = \tilde{a} \cos \varphi - \tilde{b} \sin \varphi, \quad b = \tilde{a} \sin \varphi + \tilde{b} \cos \varphi, \quad (6)$$

где $\varphi = \gamma t/\hbar$, а операторы \tilde{a} , \tilde{b} удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и a , b . Легко показать, что величина $\sin^2 \varphi$ характеризует то, какая часть энергии волны отводится в приемник. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем без нарушения общности будем считать «угол» φ изменяющимся в пределах $(0, \pi/2)$ и больше не будем возвращаться к обсуждению связи этой величины с константой γ , временем взаимодействия t или особенностями какой-либо конкретной модели.

Осуществляя указанное преобразование оператора плотности и записывая его в энергетическом представлении, мы тем самым найдем совместное вероятностное распределение для числа квантов, зарегистрированных прибором, и числа фотонов в оставшейся волне. Построив, затем, стандартным образом условную матрицу плотности, можно получить исчерпывающее статистическое описание волны при условии, что приемник зафиксировал то или иное число квантов.

2. НЕШУМЯЩИЙ ПРИЕМНИК

В соответствии с предыдущими замечаниями выберем для описания априорного ансамбля сигналов гибсов оператор плотности (3). Будем пока предполагать, что приемник не обладает собственными шумами, чemu соответствует исходный оператор $\hat{\rho}_2$, описывающий вакуумное состояние. С этими допущениями совместный оператор плотности пары осцилляторов до взаимодействия в представлении Глаубера — Сударшана [6, 7] примет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi M} \int \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{M} \right) \delta(\beta) |\alpha\rangle \langle \alpha| \cdot |\beta\rangle \langle \beta| d^2 \alpha d^2 \beta. \quad (7)$$

Применение (6) к (7) дает

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{\pi M} \int \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{M} \right) |\alpha \cos \varphi\rangle \langle \alpha \cos \varphi| \cdot |-\beta \sin \varphi\rangle \langle -\beta \sin \varphi| d^2 \alpha. \quad (8)$$

Используя известную формулу [7]

$$\langle kl | \rho | kl \rangle = \text{Sp} \left\{ \hat{\rho} : \frac{(a+a)^k}{k!} e^{-a+a} \frac{(b+b)^l}{l!} e^{-b+b} : \right\}, \quad (9)$$

нетрудно перевести $\hat{\rho}(t)$ в энергетическое представление (выписываем лишь диагональные элементы):

$$\langle kl | \rho(t) | kl \rangle = w(k, l) = \frac{(k+l)!}{k! l!} \frac{(\bar{M} \cos^2 \varphi)^k (\bar{M} \sin^2 \varphi)^l}{(1 + \bar{M} \cos^2 \varphi + \bar{M} \sin^2 \varphi)^{k+l+1}}, \quad (10)$$

где k и l — номера энергетических состояний (числа квантов) оставшейся волны и приемника соответственно.

Можно слегка обобщить это выражение, учтя квантовую эффективность счетчика фотонов $\eta < 1$. Для этого достаточно вставить множитель η всюду перед $\sin^2 \varphi$ в (10). После этого запишем безусловную вероятность регистрации l квантов прибором в виде

$$w(l) = \sum_k w(k, l) = \frac{(\eta \bar{M} \sin^2 \varphi)^l}{(1 + \eta \bar{M} \sin^2 \varphi)^{l+1}}. \quad (11)$$

Тогда вероятность наличия k квантов в волне при условии, что детектор зафиксировал l , есть

$$w(k|l) = \frac{(k+l)!}{k! l!} \frac{(\bar{M} \cos^2 \varphi)^k (1 + \eta \bar{M} \sin^2 \varphi)^l}{(1 + \bar{M} \cos^2 \varphi + \eta \bar{M} \sin^2 \varphi)^{k+l+1}}. \quad (12)$$

Это распределение и содержит исчерпывающую характеристику того знания об энергии оставшейся волны, которое достигнуто в результате рассматриваемого косвенного измерения. Прежде всего, найдем условное среднее $\langle k(l) \rangle = \sum_k k w(k|l)$, т. е. байесову оценку, позволяющую принять решение об энергии оставшейся волны по факту регистрации l квантов детектором. Вычисления дают

$$\langle k(l) \rangle = (l+1) \frac{\bar{M} \cos^2 \varphi}{1 + \eta \bar{M} \sin^2 \varphi}. \quad (13)$$

В классике, когда число регистрируемых квантов велико, $\eta \bar{M} \sin^2 \varphi \gg 1, l \gg 1$, приходим к самоочевидной оценке, не зависящей от априорного среднего:

$$\langle k(l) \rangle = \frac{l}{\eta} \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (14)$$

Напротив, в квантовой области наличие предварительных оценочных данных об энергии измеряемого луча оказывается весьма существенным для правильного принятия решения. Если же априорные сведения практически отсутствуют и заранее мы можем предполагать любые (в том числе и сколь угодно большие) значения энергии луча, следует воспользоваться полуклассической оценкой $\langle k(l) \rangle = (l+1)\eta^{-1}\operatorname{ctg}^2 \varphi$. Любопытно было бы исследовать влияние квантовых эффектов на оптимальную стратегию наблюдателя в процессе накопления сведений об ансамбле сигналов при последовательных измерениях. Однако этот вопрос лежит уже в области теории адаптивных систем и выходит за рамки настоящей статьи.

Чтобы оценить точность апостериорной оценки числа фотонов в оставшемся луче, вычислим условную дисперсию

$$\sigma^2(l) = \sum_k k^2 w(k|l) - \langle k(l) \rangle^2 = \langle k(l) \rangle + \frac{\langle k(l) \rangle^2}{l+1}. \quad (15)$$

Если зафиксированное число квантов l значительно превышает число оставшихся (согласно оценке (13)), то $\sigma^2(l)$ асимптотически стремится к условному среднему $\langle k(l) \rangle$, но не способна оказаться меньше. Напомним, что равенство $\sigma^2 = \langle k \rangle$ соответствует пуассоновскому распределению, характеризующему излучение полностью когерентного источника [6]. В противоположном случае ($l \rightarrow 0$) дисперсия стремится к значению $\sigma^2 = \langle k \rangle (\langle k \rangle + 1)$, типичному для равновесного бозе-распределения.

Условная дисперсия $\sigma^2(l)$ и среднее $\langle k(l) \rangle$ вместе с l являются случайными величинами, поэтому полезно вычислить еще и значение σ усредненное по ансамблю опытов. Сворачивая (15) с (11) по l , найдем

$$\frac{\sigma^2}{\langle \bar{k} \rangle^2} = \frac{1}{\langle \bar{k} \rangle} + \frac{1}{1 + \eta \bar{M} \sin^2 \varphi}, \quad (16)$$

где $\langle \bar{k} \rangle = \sum_l \langle k(l) \rangle w(l) = \bar{M} \cos^2 \varphi$. Анализ последней формулы позволяет проследить еще одну важную особенность косвенных измерений переменных поля: отводя в прибор лишь малую часть излучения, мы тем самым производим макроскопическое измерение средних; действительные же параметры оставшейся волны оказываются известны с небольшой степенью точности.

3. УЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ШУМОВ

Все предыдущие оценки носили характер предельных, поскольку не учитывали собственных шумов приемника. В реальных же условиях входное резонансное устройство прибора обладает ненулевой температурой T , поэтому исходное состояние приемного осциллятора также следует описывать оператором Гиббса. В этом предположении вместо (7) запишем

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^2 \alpha d^2 \beta}{\bar{M} \bar{N}} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{M}} - \frac{|\beta|^2}{\bar{N}} \right) |\alpha\rangle \langle \alpha| |\beta\rangle \langle \beta|, \quad (17)$$

где среднее число квантов шума N связано с температурой приемника обычным образом:

$$\bar{N} = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}. \quad (18)$$

Вычисления, полностью аналогичные предыдущим, вместо (10) и (11) теперь дадут

$$w(k, l) = \frac{\eta^l}{\bar{M} \bar{N} (1 + a)^{k+1} (\eta + b)^{l+1}} F \left(k+1, l+1, 1, \frac{c^2}{(1+a)(\eta+b)} \right); \quad (19)$$

$$w(l) = \frac{\eta}{\bar{M} \bar{N} a} \left(\eta + b - \frac{c^2}{a} \right)^{-(l+1)}, \quad (20)$$

где $a = \frac{\cos^2 \varphi}{\bar{M}} + \frac{\sin^2 \varphi}{\bar{N}}$, $b = \frac{\sin^2 \varphi}{\bar{M}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\bar{N}}$, $c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{M}} - \frac{1}{\bar{N}} \right) \sin 2\varphi$, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция (см. [8]).

Повторяя стандартные процедуры, после довольно громоздких выкладок можно найти условное среднее и условную дисперсию:

$$\langle k(l) \rangle = \frac{\bar{M} \bar{N}}{\bar{M} \sin^2 \varphi + \bar{N} \cos^2 \varphi} + \frac{1}{4} (l+1) \times \\ \times \frac{(\bar{M} - \bar{N})^2 \sin^2 2\varphi}{(\bar{M} \sin^2 \varphi + \bar{N} \cos^2 \varphi)^2} \frac{1}{\eta + (\bar{M} \sin^2 \varphi + \bar{N} \cos^2 \varphi)^{-1}}; \quad (21)$$

$$\frac{\sigma^2(l)}{\langle k(l) \rangle^2} = \frac{1}{\langle k(l) \rangle} + 1 - \frac{l}{(l+1) \left\{ 1 + \frac{4\bar{N} \left[1 + \eta \bar{M} (\sin^2 \varphi + \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \cos^2 \varphi) \right]}{\bar{M}(l+1) \left(1 - \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \right)^2 \sin^2 2\varphi} \right\}^2}. \quad (22)$$

Здесь, естественно, уже и в классическом пределе $\bar{M} \sin^2 \varphi \gg 1, l \gg 1$, апостериорная оценка зависит от априорных данных о мощности сигнала. Относительное значение усредненной по ансамблю условной дисперсии дается формулой

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{\langle \bar{k} \rangle^2} = \frac{1}{\langle \bar{k} \rangle} + 1 - \frac{\eta \bar{M} \left(\sin^2 \varphi + \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \cos^2 \varphi \right)}{1 + \eta \bar{M} \left(\sin^2 \varphi + \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \cos^2 \varphi \right)} \times \\ \times \left[1 + \frac{4\bar{N}}{M \left(1 - \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \right)^2 \sin^2 2\varphi} \right]^{-2}, \quad (23)$$

где

$$\langle \bar{k} \rangle = \frac{\bar{M} \bar{N}}{\bar{M} \sin^2 \varphi + \bar{N} \cos^2 \varphi} + \frac{(\bar{M} - \bar{N}) \sin^2 \varphi}{4(\bar{M} \sin^2 \varphi + \bar{N} \cos^2 \varphi)}.$$

Легко видеть, что в классическом пределе величина $\bar{\sigma}^2 / \langle \bar{k} \rangle$ зависит только от отношения сигнал/шум и величины $\sin^2 \varphi$, характеризующей процент энергии, поглощаемой прибором. С помощью формул (21)–(23) можно получить и все остальные физические выводы, относящиеся к рассмотренной нами задаче.

Для удобства анализа этих формул и сравнения приведем еще решение аналогичной классической задачи. Пусть x и y —две гауссовые комплексные случайные величины, статистически не зависимые между собой и описываемые распределениями

$$w(x) = \frac{1}{\pi I_1} \exp \left(-\frac{|x|^2}{I_1} \right), \quad w(y) = \frac{1}{\pi I_2} \exp \left(-\frac{|y|^2}{I_2} \right). \quad (24)$$

Введем суперпозиции этих величин \tilde{x} и \tilde{y} :

$$\tilde{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \tilde{y} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (25)$$

Стандартные выкладки приводят к выражению для условной дисперсии

$$\overline{|\tilde{x}|^2}(|\tilde{y}|) = \frac{I_1 I_2}{I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi} + \frac{|\tilde{y}|^2 (I_1 - I_2)^2 \sin^2 2\varphi}{4(I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi)}. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что эта формула полностью подобна соотношению (21), если в последнем $\bar{M} \sin^2 \varphi \gg 1$, $\bar{N} \cos^2 \varphi \gg 1$, $l \gg 1$. Аналогично относительная условная дисперсия

$$\frac{\sigma_{\text{кл}}^2}{[\overline{|\tilde{x}|^2}(|\tilde{y}|)]^2} = 1 - \left[1 + \frac{4I_2 \left(\sin^2 \varphi + \frac{I_2}{I_1} \cos^2 \varphi \right)}{|\tilde{y}|^2 \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right)^2 \sin^2 2\varphi} \right]^{-2}. \quad (27)$$

Здесь снова замечаем, что в классике (22) согласуется с (27).

Наконец, усредненная по ансамблю опытов условная дисперсия выразится формулой

$$\frac{\overline{\sigma_{\text{кл}}^2}}{(\overline{|\tilde{x}|^2})^2} = 1 - \left[1 + \frac{4I_2}{I_1 \left(1 - \frac{I_2}{I_1} \right)^2 \sin^2 2\varphi} \right]^{-2}, \quad (28)$$

где

$$\overline{|\tilde{x}|^2} = \frac{I_1 I_2}{I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi} + \frac{(I_1 - I_2)^2 \sin^2 2\varphi}{4(I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi)}.$$

В начале статьи мы уже отмечали, что если использовать для отвода части энергии луча другие механизмы, нежели линейное рассеяние или отражение, точность апостериорных оценок окажется иной. В этом плане представляется чрезвычайно интересным исследовать проблему косвенных измерений переменных поля применительно к устройствам нелинейной оптики, параметрическим преобразователям и т. д. Дело в том, что даже для измерения мощности излучения в различных диапазонах используются самые разнообразные приборы: болометры, умножители частоты, оптические индикаторы, fotoумножители. Однако в настоящее время практически не существует достаточно общих критерий, которые позволили бы при оптимизации такого рода измерений отделить принципиальные ограничения от соображений удобства технической или технологической реализации.

Другим важным моментом является проблема генерации так называемых n -квантовых состояний либо таких световых пучков, у которых дисперсия фотонных флуктуаций была бы меньше среднего числа фотонов. Известно, что такие пучки в ряде отношений обладали бы необычными свойствами [10]. Как мы убедились в этой статье, линейная косвенная редукция не способна привести к реализации таких состояний.

В работе [11] показана принципиальная возможность редукции к n -квантовым состояниям поля при использовании параметрического распада фотонов в нелинейной среде. Однако в целом вопрос о предельных соотношениях между отводимой энергией и апостериорной условной дисперсией числа фотонов для устройств различного класса подлежит дальнейшему исследованию.

ЛИТЕРАТУРА

1. A Einstein, B Podolsky and N Rosen, Phys. Rev., **47**, 777 (1935).
- 2 И Фон-Нейман, Математические основы квантовой механики, изд. Наука, М, 1964
- 3 W M Elsasser, Phys Rev., **52**, 987 (1937).
- 4 Х. Такахаси, сб Статистическая теория связи и ее приложения, изд. Мир, М, 1967.
- 5 Э Г. Башканский, В В Митюгов, ТМФ, **7**, № 3, 348 (1971).
- 6 Р Глаубер, сб Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М, 1967
7. Дж Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики, изд. Мир, М, 1970.
- 8 И С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, Физматгиз, М, 1962
- 9 А. М Ялом, УМН, **7**, 3 (1952)
10. H. Brown and R. Twiss, Nature, **177**, 27 (1956).
- 11 Б Я. Зельдович, Д Н Клышко, Письма в ЖЭТФ, **9**, вып 1 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 октября 1976 г.

INDIRECT MEASUREMENT OF THE LIGHT BEAM ENERGY

A. S. Krest'yaninov, V. V. Mitjugov

Limiting estimations of the measurement accuracy of the light beam energy are found due to the removal of a small portion of this beam to the device. Inherent thermal noises of the device are taken into account.

УДК 538.56 519.25

К КУМУЛЯНТНОМУ АНАЛИЗУ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Л. А. Апресян

Рассмотрены особенности построения кумулянтов линейных стохастических операторов по схеме Кубо. Показано, что упорядоченные кумулянты, введенные Van Kampenом и Фоксом, вытекают из общей схемы Кубо при соответствующем определении оператора упорядочения. Рассмотрено понятие неупорядоченных операторных кумулянтов и указано различие между групповым свойством неупорядоченных кумулянтов и слабым групповым свойством упорядоченных кумулянтов Van Kampена и Фокса.

Известно, что при описании многих статистических задач вместо моментов часто оказывается целесообразней рассматривать кумулянты случайных величин как понятия, непосредственно выражающие меру статистической связи (см., например, [¹]). В последние годы появился ряд работ [²–⁴], в которых обсуждались свойства кумулянтов. В этих работах рассматривался классический (неоператорный) случай. Ранее Кубо [⁵] предложил общий способ построения кумулянтов, пригодный как для классических величин, так и для случая некоммутирующих операторов. При этом на нескольких простых примерах в [⁵] было показано, как можно использовать операторные кумулянты в самых разнообразных задачах квантовой механики и статистической физики. Однако несмотря на это общая схема Кубо долгое время практически нигде не применялась. Недавно Van Kampenом и Фоксом [⁶–⁸] были введены так называемые упорядоченные кумулянты, способ построения которых на первый взгляд качественно отличается от метода Кубо.

В данной работе, имеющей в основном методический характер, мы рассмотрим важные особенности схемы Кубо (разд. 1), обсудим некоторые специфические свойства, отличающие операторные кумулянты от обычных — неоператорных, введя понятие неупорядоченных кумулянтов (разд. 2), покажем, что упорядоченные кумулянты Van Kampena и Фокса являются частным случаем кумулянтов Кубо (разд. 3), и укажем различие в формах групповых свойств упорядоченных и неупорядоченных кумулянтов (разд. 4). Тем самым будет показано, что схема Кубо охватывает широкий круг линейных статистических задач с начальными условиями, при описании которых возникают упорядоченные кумулянты Van Kampena и Фокса (см. разд. 3). В качестве примеров можно привести описание распространения волн в волноводах со случайными неоднородностями, параболическое приближение для волн в случайно-неоднородных средах, уравнение Шредингера со случайным потенциалом, вывод основного кинетического уравнения и многие другие.

1. СХЕМА КУБО

В работе Кубо [⁵] рассматривались обобщения на случай линейных стохастических операторов понятий моментов, кумулянтов и порождающей функции моментов;

$$M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \left\langle \exp \left(\sum_{j=1}^N \xi_j x_j \right) \right\rangle, \quad (1)$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_N) = x$ — компонентная случайная величина, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — вспомогательные параметры. Для наших целей удобно с самого начала несколько модифицировать результаты Кубо, рассматривая случайные процессы $x=x_t$ и соответствующие им порождающие функционалы:

$$M\{\xi_t\} = \langle e^{(\xi, x)} \rangle, \quad (2)$$

где

$$(\xi, x) = \int \xi_t x_t dt \quad (3)$$

и $\xi = \xi_t$ — пробная функция.

Как известно (см., например, [1]), кумулянты $\langle x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n} \rangle_c$ ($n=1, 2, \dots$) выражаются через порождающий функционал как

$$\langle x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n} \rangle_c \equiv S_n\{x_t\} = \left(\frac{\delta}{\delta \xi_{t_1}} \frac{\delta}{\delta \xi_{t_2}} \dots \frac{\delta}{\delta \xi_{t_n}} \ln \langle e^{(\xi, x)} \rangle \right)_{\xi=0}, \quad (4)$$

где $\delta/\delta \xi_t$ — вариационные производные. В соответствии с (4) $M\{\xi_t\}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} M\{\xi_t\} &= \langle e^{(\xi, x)} \rangle = \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \langle x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n} \rangle_c dt_1 dt_2 \dots dt_n \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, поскольку для статистически независимых процессов x_t и y_t выполняется соотношение

$$\langle e^{(\xi, x+y)} \rangle = \langle e^{(\xi, x)} \rangle \langle e^{(\xi, y)} \rangle, \quad (6)$$

из (4) следует, что кумулянты таких процессов аддитивны, т. е.

$$S_n\{x_t + y_t\} = S_n\{x_t\} + S_n\{y_t\}. \quad (7)$$

Соотношение (7) эквивалентно известному групповому свойству кумулянтов.

Кубо расширил эти хорошо известные результаты в двух направлениях, допустив, во-первых, что усреднение понимается в обобщенном смысле как действие некоторого оператора усреднения $\overset{\vee}{A}$:

$$\langle a \rangle \equiv \overset{\vee}{A} a \quad (8)$$

(это обобщение тривиально, и нам оно не понадобится), и, во-вторых, рассмотрев вместо случайных процессов x_t случайные линейные операторы χ_t . При этом основная трудность связана с тем, что оператор χ_t в общем случае не коммутирует в разные моменты времени $t_1 \neq t_2$, т. е. $\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \neq \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \overset{\vee}{\chi}_{t_1}$ и, как следствие,

$$\exp(\overset{\vee}{\chi}_{t_1} + \overset{\vee}{\chi}_{t_2}) \neq \exp(\overset{\vee}{\chi}_{t_1}) \exp(\overset{\vee}{\chi}_{t_2}). \quad (9)$$

Поэтому при непосредственном распространении на операторы соотношений (2) и (4) определенные в соответствии с (4) операторные кумулянты уже не будут аддитивными для статистически независимых операторов, полностью утратив, таким образом, свое обычное физическое содержание,

Указанная трудность была преодолена в [5] введением оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$, расставляющего все стоящие от него справа операторы в некотором определенном порядке. Тогда справа от $\overset{\vee}{Q}$ некоммутативность χ_t в разные моменты времени оказывается несущественной, что фактически позволяет рассматривать χ_t справа от $\overset{\vee}{Q}$ как обычный случайный процесс.

Вместо обычных экспонент от оператора $\overset{\vee}{B}$,

$$e^{\overset{\vee}{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overset{\vee}{B})^n}{n!}, \quad (10)$$

Кубо ввел упорядоченные экспоненты

$$e_Q^{\overset{\vee}{B}} \equiv \overset{\vee}{Q} e^{\overset{\vee}{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{\vee}{Q} (\overset{\vee}{B})^n}{n!}, \quad (11)$$

для которых, в отличие от (9), выполняется соотношение

$$e_Q^{\overset{\vee}{\chi}_{t_1} + \overset{\vee}{\chi}_{t_2}} = \overset{\vee}{Q} e^{\overset{\vee}{\chi}_{t_1} + \overset{\vee}{\chi}_{t_2}} = \overset{\vee}{Q} e_Q^{\overset{\vee}{\chi}_{t_1}} e_Q^{\overset{\vee}{\chi}_{t_2}}. \quad (12)$$

Данное Кубо обобщение на операторы соотношений (2) и (5) можно записать как

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{M}\{\xi_t\} &\equiv \langle e_Q^{(\xi, \overset{\vee}{\chi})} \rangle \equiv \langle \overset{\vee}{Q} e^{(\xi, \overset{\vee}{\chi})} \rangle = \\ &= \overset{\vee}{Q} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c dt_1 dt_2 \dots dt_n, \right) \end{aligned} \quad (13)$$

где операторы $\langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c$, имеющие смысл Q -упорядоченных кумулянтов, мы будем называть просто Q -кумулянтами.

Разложив обе части (13) в функциональный ряд Тейлора по ξ и приравняв операторные коэффициенты при одинаковых степенях ξ , можно выразить « Q -моменты» $\langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle$ через Q -кумулянты, откуда вытекает следующее соотношение Q -кумулянтов с Q -моментами:

$$\begin{aligned} \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c &\equiv S_n^Q \{\chi\} = \overset{\vee}{Q} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m=1 \\ k_1+k_2+\dots+k_m=n}} \times \\ &\times \frac{(-)^m}{m!} \frac{\langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_{k_1}} \rangle}{k_1!} \frac{\langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_{k_1+1}} \overset{\vee}{\chi}_{t_{k_1+2}} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_{k_1+k_2}} \rangle}{k_2!} \dots \frac{\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle}{k_m!}, \end{aligned} \quad (14)$$

где Σ означает сумму по всем $n!$ перестановкам аргументов t_1, t_2, \dots, t_n .

Выражение (14) отличается от аналогичного выражения для неоператорного случая лишь наличием операторов упорядочения $\overset{\vee}{Q}$. При этом, если для операторов $\overset{\vee}{\chi}_t^{(1)}$ и $\overset{\vee}{\chi}_t^{(2)}$ выполняется условие

$$\langle e_Q^{(\xi, \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)} + \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)})} \rangle = \overset{\vee}{Q} \langle e_Q^{(\xi, \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)})} \rangle \langle e_Q^{(\xi, \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)})} \rangle, \quad (15)$$

то

$$\overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)} + \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)} \right\} = \overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)} \right\} + \overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)} \right\}. \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) обобщают на операторный случай хорошо известные для обычных кумулянтов соотношения (6) и (7)*.

Заметим, что в [5] приведен интересный пример, в котором вместо оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$ используется так называемый «оператор уравнивания» $\overset{\vee}{L}$, и рассмотрены соответствующие ему $\overset{\vee}{L}$ -кумулянты, однако этот случай нам не понадобится.

Таким образом, согласно Кубо, обобщение понятия кумулянтов на операторы является неоднозначной операцией и существенно зависит от способа определения оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$, причем для коммутирующих в разные моменты времени операторов $\overset{\vee}{\chi}_t$, все такие Q -кумулянты переходят в обычные кумулянты, поскольку в последнем случае перестановки $\overset{\vee}{\chi}_{t_1}$ ничего не меняют и $\overset{\vee}{Q}$ можно заменить на единицу.

Рассмотрим два разных определения оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$ и обсудим различия возникающих при этом Q -кумулянтов.

Предварительно обратим внимание на одну важную для дальнейшего деталь, которая не была указана в работе Кубо [5]. Оператор упорядочения $\overset{\vee}{Q}$ должен быть определен для всех операторов, стоящих справа от него. Поэтому область определения входящего в (13) оператора $\overset{\vee}{Q}$ должна содержать, во-первых, произведения вида $\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}$ (иначе не будут определены входящие в левую часть (13) Q -моменты) и, во-вторых, множество Q -кумулянтов, стоящих в правой части (13). Действие $\overset{\vee}{Q}$ на каждом из этих двух множеств можно задавать независимо, причем определение $\overset{\vee}{Q}$ на множестве Q -кумулянтов индуцирует определение $\overset{\vee}{Q}$ на множестве Q -моментов, поскольку первые выражаются через вторые в соответствии с (14).

2. НЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ КУМУЛЯНТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И $\overset{\vee}{T}_\chi$ -ОПЕРАТОР

Несколько слов о статистическом описании стохастических операторов. Известно, что статистические характеристики случайного процесса x_t полностью определяются заданием моментов вида

$$\langle x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_n} \rangle \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Если же $\overset{\vee}{\chi}_t$ — случайный линейный оператор, т. е. линейный оператор со случаем ядром, то для задания статистики $\overset{\vee}{\chi}_t$ вместо моментов $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle$ нужно, вообще говоря, рассматривать выражения вида

$$m_n \{ \overset{\vee}{\chi} \} = \langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{x} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \overset{\vee}{x} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \overset{\vee}{x} \rangle \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

* Соотношение (14) формально проще всего получить из (4), где нужно заменить \ln на $\overset{\vee}{Q} \ln$ и \exp на \exp_Q ; в цитированной работе [5] приведено обобщение формулы Мирона [8], из которого следует (14). Соотношение (16) у Кубо в [5] отсутствует, однако оно естественно вытекает из его результатов.

где символ x означает прямое произведение. При этом, если оператор χ_t действует в пространстве функций одной переменной $\{\varphi(x)\} = R$ по правилу

$$\overset{\vee}{\chi}_t \varphi(x) = \int \chi_t(x, y) \varphi(y) dy \quad (19)$$

(здесь $\chi_t(x, y)$ — ядро $\overset{\vee}{\chi}_t$), то оператор $\overset{\vee}{m}_n[\chi]$ будет определен уже в пространстве функций n переменных $R \times R \times \dots \times R$. Для наших целей

вместо этого достаточно трактовать ядро $\chi_t(x, y)$ оператора $\overset{\vee}{\chi}_t$ как некоторую случайную функцию трех переменных, не выходя за рамки области R определения оператора $\overset{\vee}{\chi}_t$. Тогда кумулянтами и моментами ядра $\chi_t(x, y)$ будут обычные кумулянты и моменты случайной функции $\chi_t(x, y)$. Рассмотрим соотношение таких кумулянтов и моментов с аналогичными операторными величинами в смысле Кубо.

С этой целью введем диаграммное обозначение для усреднения

$$\langle \overset{\vee}{x}_{t_1} \overset{\vee}{x}_{t_2} \dots \overset{\vee}{x}_{t_n} \rangle = \overset{\vee}{x}_{t_1} \overset{\vee}{x}_{t_2} \dots \overset{\vee}{x}_{t_n}, \quad (20)$$

полагая в общем случае, что объединение нескольких операторов символом  означает замену произведения ядер этих опера-

торов их моментом. Например, если обозначить ядро оператора $\overset{\vee}{B}$ через $(\overset{\vee}{B})_{xy} \equiv B_{xy}$, то

$$\begin{aligned} (\overset{\vee}{B})_{xy} &= (\overset{\vee}{B})_{xy} = \langle B_{xy} \rangle, \\ (\overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B})_{xy} &= \int \langle B_{xx'} B_{x'y} \rangle dx' = (\langle \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} \rangle)_{xy}, \\ (\overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B})_{xy} &= \int \langle B_{xx'} B_{x''y} \rangle B_{x'x''} dx' dx'' \end{aligned}$$

и т. д. Аналогично, пусть объединение операторов символом 

означает замену произведения ядер этих операторов их кумулянтом. Например,

$$\begin{aligned} (\overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B})_{xy} &= \int \langle B_{xx'} B_{x'y} \rangle_c dx' = (\overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} - \overset{\downarrow}{B} \overset{\downarrow}{B})_{xy}, \\ \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} &= \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} \overset{\vee}{B} - \overset{\downarrow}{B} \overset{\downarrow}{B} \overset{\downarrow}{B} \end{aligned}$$

и т. д.

Обозначим для краткости χ_{t_i} через i и назовем соответственно неупорядоченными моментами и неупорядоченными кумулянтами выражения вида

$$\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \equiv \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \dots \hat{n} \quad \text{и}$$

$$\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \equiv \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \dots \hat{n}, \quad \text{где символы}$$

и  могут быть расставлены произвольно. Рассмотренные

в разд. 1 Q -моменты и Q -кумулянты будем называть простыми, а неупорядоченные моменты и кумулянты, которые не выражаются в виде произведения простых, — сложными. Примеры сложных моментов и кумулянтов:

$$\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \overset{\vee}{\chi}_{t_3} \equiv \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \overset{\wedge}{3}, \quad \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \overset{\wedge}{3} \overset{\wedge}{4}, \quad \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \overset{\wedge}{3}$$

и т. д.

При изложенной в разд. 1 трактовке оператора упорядочения Q в схеме Кубо сложных моментов или кумулянтов вообще не возникает, однако сложные кумулянты появляются, если, например, выразить ядро простого момента $\langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1}, \overset{\vee}{\chi}_{t_2}, \dots, \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle \equiv \langle \overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \dots \hat{n} \rangle$ через кумулянты ядра $\overset{\vee}{\chi}_t$. Такое разложение по неупорядоченным кумулянтам может оказаться полезным, поскольку для статистически независимых операторов $\overset{\vee}{\chi}_{t_1}, \overset{\vee}{\chi}_{t_2}, \dots, \overset{\vee}{\chi}_{t_n}$ ядра $\overset{\vee}{\chi}_{t_1}(x, y), \overset{\vee}{\chi}_{t_2}(x, y), \dots, \overset{\vee}{\chi}_{t_n}(x, y)$ также статистически

независимы, и поэтому оператор $\overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \dots \hat{n}$ обращается в нуль в

соответствии с хорошо известным свойством обычных кумулянтов. При

этом порядок следования сомножителей i в кумулянте

$$\overset{\wedge}{1} \overset{\wedge}{2} \dots \hat{n}$$

несуществен, что оправдывает название «неупорядоченный кумулянт».

Можно показать, что разложение по неупорядоченным кумулянтам будет выполнимо и в рамках схемы Кубо, если в качестве Q рассмотреть обобщение $\overset{\vee}{T}_x$ хронологического оператора Дайсона, которое мы зададим следующим образом: $\overset{\vee}{T}_x$ — линейный оператор, определенный

на множестве линейных комбинаций произведений вида $\overbrace{1 \cdot 2 \cdots n}$,

где символы $\overbrace{\dots}$ расставлены произвольно и могут, в част-

ности, отсутствовать, причем $\overset{\vee}{T}_x$ расставляет сомножители i в некотором произвольном, однажды фиксированном порядке следования аргу-

ментов t_i с сохранением кумулянтных связей $\overbrace{\dots}$. Для даль-

нейшего порядок следования аргументов в определении $\overset{\vee}{T}_x$ выберем «правильным», т. е. возрастающим справа налево. Таким образом, по определению, для произвольных постоянных a_n

$$\overset{\vee}{T}_x \sum_n a_n \overbrace{1 \cdot 2 \cdots n} = \sum_n a_n \overset{\vee}{T}_x \overbrace{1 \cdot 2 \cdots n}, \quad (21)$$

причем

$$\overset{\vee}{T}_x \overbrace{i_1 i_2 \cdots i_n} = \overbrace{1 \cdot 2 \cdots n}, \quad t_1 > t_2 > \dots > t_n, \quad (22)$$

где (i_1, i_2, \dots, i_n) — произвольная перестановка $(1, 2, \dots, n)$. Например,

$$\overset{\vee}{T}_x \overbrace{1 \cdot 3 \cdot 2} = \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \overset{\vee}{T}_x \overbrace{3 \cdot 2 \cdot 1} = \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

и т. д.

Нетрудно видеть, что данное определение $\overset{\vee}{T}_x$ на множестве произведений кумулянтов индуцирует вполне аналогичное определение $\overset{\vee}{T}_x^V$ на множестве произведений моментов, причем в последнем случае $\overset{\vee}{T}_x^V$ переставляет $\overset{\vee}{\chi}_{t_i}$ с сохранением моментных связей $\overbrace{\dots}$.

Использование оператора $\overset{\vee}{T}_x$ позволяет записать разложение простых кумулянтов по неупорядоченным моментам в виде (14), где $Q = \overset{\vee}{T}_x$, причем операторы Q , стоящие в правой части (14) внутри моментных скобок, можно опустить. Аналогичный вид имеет выражение для моментов $\langle 1 \cdot 2 \cdots n \rangle$ через неупорядоченные кумулянты. При этом введение оператора $\overset{\vee}{T}_x$ полностью снимает специфику, связанную с некоммутативностью $\overset{\vee}{\chi}_t$ в разные моменты времени.

3. УПОРЯДОЧЕННЫЕ КУМУЛЯНТЫ ВАН КАМПЕНА И ФОКСА В РАМКАХ СХЕМЫ КУБО

Ван Кампен [6] и Фокс [7, 8] ввели так называемые упорядоченные кумулянты, рассматривая среднее значение оператора $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$, определенного как решение линейной стохастической задачи вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \overset{\vee}{G}_{tt_0} = \xi_t \overset{\vee}{\chi}_t \overset{\vee}{G}_{tt_0}; \quad (23)$$

$$\overset{\vee}{G}_{t_0 t_0} = \overset{\vee}{1}, \quad (24)$$

где $\overset{\vee}{\chi}_t$ — случайный оператор, $\overset{\vee}{1}$ — единичный оператор, а ξ_t — вспомогательная функция, которую мы ввели для единообразия изложения. На практике при решении конкретных задач обычно предполагается, что $\langle \overset{\vee}{\chi}_t \rangle = 0$, причем случай $\langle \overset{\vee}{\chi}_t \rangle \neq 0$ приводится к $\langle \overset{\vee}{\gamma}_t \rangle = 0$ переходом в представление взаимодействия, однако для наших целей такой переход не является необходимым.

Система (23), (24) охватывает широкий класс линейных статистических задач, примеры которых приведены во Введении. Точное решение задачи (23), (24) найти обычно не удается. Если же искать $\overset{\vee}{G}_{tt_0}$ в виде ряда теории возмущений по $\overset{\vee}{\chi}_t$, то среднее значение $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$ выразится в виде ряда

$$\begin{aligned} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \times \\ &\times \langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle dt_n \dots dt_1 \equiv \left\langle \overset{\vee}{T} \exp \left(\int_{t_0}^t \xi_{t'} \overset{\vee}{\chi}_{t'} dt' \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\overset{\vee}{T}$ — обычный хронологический оператор Дайсона. Последовательные члены этого ряда содержат секулярные (т. е. неограниченно растущие с ростом t) члены, что ограничивает малыми t область применимости любого конечного приближения теории возмущений. Указанное ограничение удается ослабить, рассматривая уравнения для $\langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle$. Простейшая и наиболее распространенная схема вывода такого уравнения (см., например, обзор [10]) приводит к хорошо известному уравнению Дайсона:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \int_{t_0}^t \overset{\vee}{D}_{t-t'} \langle \overset{\vee}{G}_{t'-t_0} \rangle dt', \quad (26)$$

где оператор $\overset{\vee}{D}_t$ выражается через моменты $\overset{\vee}{\chi}_t$. В [6–8] рассмотрена другая схема, приводящая к уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \overset{\vee}{D}_t \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle, \quad (27)$$

причем при построении оператора $\overset{\vee}{D}_t$ и возникают упорядоченные кумулянты.

Получим явный вид $\overset{\vee}{D}_t$ по схеме Кубо. С этой целью определим,

оператор упорядочения $\overset{\vee}{Q}$ следующим образом (см. замечание в конце разд. 1): $\overset{\vee}{Q} = \overset{\vee}{T}$ на множестве произведений вида $\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}$, а на множестве Q -кумулянтов $\overset{\vee}{Q} = \overset{\vee}{T}_D$, где оператор $\overset{\vee}{T}_D$ расставляет Q -кумулянты $\langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c \equiv \langle \overset{\vee}{T} 1 2 \dots n \rangle_c$ в правильном хронологическом порядке по наибольшему из аргументов t_i . Тогда в соответствии с (25) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle &\equiv \left\langle \overset{\vee}{T} \exp \left(\int_{t_0}^t \xi_{t'} \overset{\vee}{\chi}_{t'} dt' \right) \right\rangle \equiv \left\langle \overset{\vee}{Q} \exp \left(\int_{t_0}^t \xi_{t'} \overset{\vee}{\chi}_{t'} dt' \right) \right\rangle = \\ &= \overset{\vee}{Q} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^n dt_j \right) \equiv \overset{\vee}{T}_D \exp \left(\int_{t_0}^t \overset{\vee}{D}_{t'} dt' \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\overset{\vee}{D}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \langle \overset{\vee}{T} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c dt_2 \dots dt_n \right)_{t_i=t}. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что $\overset{\vee}{T}_D$ — это обычный хронологический оператор Дайсона относительно $\overset{\vee}{D}_t$. Учитывая это и дифференцируя (28) по времени, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle = \overset{\vee}{T}_D \overset{\vee}{D}_t \exp \int_{t_0}^t \overset{\vee}{D}_{t'} dt' \equiv \overset{\vee}{D}_t \langle \overset{\vee}{G}_{tt_0} \rangle, \quad (30)$$

совпадающее с (27). При этом соотношение (29) дает разложение оператора $\overset{\vee}{D}_t$ по Q -кумулянтам, тождественное разложению Ван Кампена и Фокса [6–8]. Таким образом, упорядоченные кумулянты являются частным случаем Q -кумулянтов Кубо, а уравнение (30) естественно вытекает из его общей схемы.

Как уже отмечалось, задание оператора $\overset{\vee}{Q}$ на множестве Q -кумулянтов индуцирует определение $\overset{\vee}{Q}$ на множестве Q -моментов. Общий алгоритм выражения упорядоченных кумулянтов через моменты приведен Ван Кампеном в [6] (другими словами, им указан явный вид оператора $\overset{\vee}{Q}$ на множестве Q -моментов). Здесь мы ограничимся тем, что выпишем выражения для первых трех упорядоченных кумулянтов и моментов. Считая, что $t_1 > t_2 > t_3$, в соответствии с замечанием, предшествующим формуле (14), находим

$$\begin{aligned} \langle T1 \rangle &= \langle 1 \rangle = T_D \langle T1 \rangle = \langle T1 \rangle_c, \\ \langle T12 \rangle &= \langle 12 \rangle = T_D (\langle T1 \rangle_c \langle T2 \rangle_c + \langle T12 \rangle_c) = \\ &= \langle T1 \rangle_c \langle T2 \rangle_c + \langle T12 \rangle_c, \\ \langle T123 \rangle &= \langle 123 \rangle = \langle T1 \rangle_c \langle T2 \rangle_c \langle T3 \rangle_c + \langle T12 \rangle_c \langle T3 \rangle_c + \\ &+ \langle T13 \rangle_c \langle T2 \rangle_c + \langle T1 \rangle_c \langle T23 \rangle_c + \langle T123 \rangle_c. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда непосредственно получаются следующие выражения для упорядоченных кумулянтов:

$$\begin{aligned} \langle T1 \rangle_c &= \langle 1 \rangle, \\ \langle T12 \rangle_c &= \langle 12 \rangle - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\ \langle T123 \rangle_c &= \langle 123 \rangle - \langle 1 \rangle \langle 23 \rangle - \langle 13 \rangle \langle 2 \rangle - \\ &- \langle 12 \rangle \langle 3 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle \langle 2 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично можно выразить и упорядоченные кумулянты $\langle T12\dots n \rangle_c$ произвольного порядка n .

4. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ И УПОРЯДОЧЕННЫХ КУМУЛЯНТОВ

Сравним групповые свойства неупорядоченных и упорядоченных кумулянтов. Как указано в разд. 2, если хотя бы один из операторов

$$\stackrel{\vee}{\chi}_{t_i} \text{ в неупорядоченном кумулянте } \stackrel{\vee}{\chi}_{t_1} \stackrel{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_n} \text{ статистически}$$

не зависит от остальных операторов, то неупорядоченный кумулянт обращается в нуль. При этом порядок следования сомножителей в таком кумулянте несуществен, поскольку групповое свойство неупорядоченных кумулянтов совпадает с обычным групповым свойством кумулянтов от ядер соответствующих операторов.

Фокс [8] показал, что упорядоченные кумулянты обладают свойством, которое, в отличие от описанного выше группового свойства, мы назовем «слабым групповым свойством»: если для $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ при $|t_i - t_{i+1}| > \tau_k$ (τ_k — некоторое характерное время корреляции) выполняется равенство

$$\langle \stackrel{\vee}{\chi}_{t_1} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_i} \stackrel{\vee}{\chi}_{t_{i+1}} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle = \langle \stackrel{\vee}{\chi}_{t_1} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_i} \rangle \langle \stackrel{\vee}{\chi}_{t_{i+1}} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle, \quad (33)$$

то упорядоченный кумулянт $\langle \stackrel{\vee}{T} \stackrel{\vee}{\chi}_{t_1} \stackrel{\vee}{\chi}_{t_2} \dots \stackrel{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c$ обращается в нуль. Физически (33) означает статистическую независимость $\stackrel{\vee}{\chi}_t$ на интервалах (t_n, t_{n+1}) и (t_i, t_1) , разнесенных на время, большее τ_k .

Приведенное в [8] доказательство этого свойства довольно громоздко. Покажем, что слабое групповое свойство непосредственно вытекает из общих соотношений (15) и (16). Пусть операторы $\stackrel{\vee}{\chi}_t^{(1)}$ и $\stackrel{\vee}{\chi}_t^{(2)}$ отличны от нуля и совпадают с $\stackrel{\vee}{\chi}_t$ лишь в непересекающихся окрестностях точек t_1, t_2, \dots, t_i и $t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n$ соответственно, причем интервалы (t_n, t_{n+1}) и (t_i, t_1) разнесены на время, большее τ_k , так что $\stackrel{\vee}{\chi}_t^{(1)}$ и $\stackrel{\vee}{\chi}_t^{(2)}$ статистически независимы. Тогда непосредственно из данного в предыдущем разделе определения оператора $\stackrel{\vee}{Q}$, соответствующего упорядоченным кумулянтам, следует, что

$$\begin{aligned} \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(1)} + \stackrel{\vee}{\chi}^{(2)}} \rangle &= \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(1)}} e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(2)}} \rangle = \\ &= \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(1)}} \rangle \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(2)}} \rangle = \stackrel{\vee}{Q} \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(1)}} \rangle \langle e_Q^{\xi, \stackrel{\vee}{\chi}^{(2)}} \rangle, \end{aligned} \quad (34)$$

т. е. для операторов $\overset{\vee}{\chi}_t^{(1)}$ и $\overset{\vee}{\chi}_t^{(2)}$ выполняется соотношение (15). Следовательно, в соответствии с (16)

$$\begin{aligned} \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n} \rangle_c &\equiv \overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)} + \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)} \right\} = \overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(1)} \right\} + \\ &+ \overset{\vee}{S}_n^Q \left\{ \overset{\vee}{\chi}_t^{(2)} \right\} = \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1}^{(1)} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}^{(1)} \rangle_c + \langle \overset{\vee}{Q} \overset{\vee}{\chi}_{t_1}^{(2)} \dots \overset{\vee}{\chi}_{t_n}^{(2)} \rangle_c = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

т. е. упорядоченный кумулянт обращается в нуль.

Нетрудно видеть, что слабое групповое свойство действительно слабее группового свойства. Покажем это на простейшем примере. Пусть при $t_1 > t_2 > t_3$ значения $\overset{\vee}{\chi}_{t_1}$ и $\overset{\vee}{\chi}_{t_3}$ статистически не зависят от $\overset{\vee}{\chi}_{t_2}$, но $\overset{\vee}{\chi}_{t_1}$ и $\overset{\vee}{\chi}_{t_3}$ не являются статистически независимыми. Тогда неупорядоченный кумулянт

$$\overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \overset{\vee}{\chi}_{t_3} \equiv \overbrace{1 \ 2 \ 3} \text{ равен}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{1 \ 2 \ 3} &= \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} + \overbrace{1 \ 2 \ 3} + \overbrace{1 \ 2 \ 3} = \\ &= \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} + \overbrace{1 \ 2 \ 3} + \overbrace{1 \ 2 \ 3} = 0, \end{aligned}$$

а упорядоченный кумулянт, согласно (32), выражается как

$$\begin{aligned} \langle \overset{\vee}{\chi}_{t_1} \overset{\vee}{\chi}_{t_2} \overset{\vee}{\chi}_{t_3} \rangle_c &= \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 3 \ 2} + \overbrace{1 \ 2 \ 3} + \overbrace{1 \ 3 \ 2} = \\ &= \overbrace{1 \ 2 \ 3} - \overbrace{1 \ 3 \ 2} \end{aligned}$$

и, вообще говоря, отличен от нуля.

Таким образом, если неупорядоченные кумулянты учитывают статистические связи в группе операторов при произвольном порядке следования сомножителей, то для упорядоченных кумулянтов порядок следования операторов является существенным. Вполне аналогично можно рассмотреть групповые свойства Q -кумулянтов при других определениях оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$.

В заключение заметим, что Фокс в [8] указывал на несовпадение упорядоченных кумулянтов с кумулянтами Кубо. В действительности, как показано в данной работе, при правильном понимании оператора упорядочения $\overset{\vee}{Q}$ основные результаты Ван Кампена и Фокса естественно вытекают как частный случай из общей схемы Кубо. (Последнее не относится к найденному Ван Кампеном в [6] алгоритму явного построения упорядоченных кумулянтов произвольного порядка.)

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
- 2 А. Н. Малахов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).

3. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, Изв вузов—Радиофизика, **19**, № 8, 1179 (1976).
4. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, ДАН СССР, **222**, 793 (1975).
5. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, **17**, 1100 (1962).
6. N. G. Van Kampen, Physica, **74**, 239 (1974).
7. R. F. Fox, J. Math. Phys., **16**, 289 (1975).
8. R. F. Fox, J. Math. Phys., **17**, 1148 (1976).
9. E. Meergop, J. Chem. Phys., **27**, 1238 (1957).
10. Л. А. Апресян, Изв. вузов — Радиофизика, **17**, № 2, 165 (1974).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
21 июля 1976 г.

TO THE CUMULANT ANALYSIS OF STOCHASTIC LINEAR OPERATORS

L. A. Apresyan

Peculiarities of plotting of cumulant linear stochastic operators according to Cubo scheme are considered. It is shown that ordered cumulants introduced by Van Compen and Fox result from the general Cubo scheme at the corresponding definition of the ordering operator. The concept of the unordered operational cumulants is analysed and the difference is shown between the grouped properties of unordered cumulants and the weak grouped properties of the ordered cumulants by Van Compen and Fox

УДК 621 396 96

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЗВОЛНОВАННОСТИ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

A. I. Баскаков

Найдены корреляционная функция и усредненная мощность импульсного сигнала с линейной частотной модуляцией, отраженного от взволнистой морской поверхности и прошедшего согласованный фильтр приемника. Показано, что усредненная форма этого сигнала чувствительна к высоте морских волн.

Для дистанционной индикации состояния морской поверхности можно использовать радиолокационный метод вертикального зондирования [1]. Запишем импульсный сигнал, излученный передатчиком РЛС по направлению нормали к среднему уровню поверхности моря, как

$$S(t) = -\operatorname{Re} [\sqrt{2P_0} U(t) e^{i\omega_0 t}], \quad (1)$$

где $\dot{U}(t) = U_a(t) e^{i\psi(t)}$ — комплексный закон модуляции. Используя феноменологическую модель морской поверхности в виде совокупности элементарных отражателей, парциальные сигналы от которых независимы, имеют случайную амплитуду, задержку и равномерно распределенную случайную фазу от 0 до 2π [2], можем корреляционную функцию сигнала, отраженного от морской поверхности и прошедшего согласованный фильтр приемника, представить выражением [3]

$$R(t_1, t_2) = \operatorname{Re} \left[\frac{2P_0\lambda^2 G_0^2 \sigma_0}{(4\pi)^3} \int_S \frac{F^2(\Theta, \varphi)}{R^4(\Theta, \varphi)} \times \right. \\ \left. \times \exp(i\omega_0(t_1 - t_2)) \int_{-\infty}^{\infty} P(\eta) \rho(t_1 - \tau - \eta) \rho^*(t_2 - \tau - \eta) d\eta dS \right], \quad (2)$$

где P_0 — излучаемая передатчиком мощность, λ — длина радиолокационной волны, G_0 — коэффициент усиления антенны (передающую и приемную антенну считаем совмещенными), σ_0 — удельная эффективная площадь отражения морской поверхности для нормально падающей радиоволны, $F(\Theta, \varphi)$ — нормированный коэффициент, определяемый диаграммой направленности антенны (ДНА) и диаграммой обратного рассеяния поверхности (ДОР), $R(\Theta, \varphi)$ — дальность от РЛС до какого-либо элемента поверхности в зоне облучения, $\rho(\cdot)$ — автокорреляционная функция зондирующего сигнала, $P(\eta)$ — закон распределения случайной компоненты времени задержки η , зависящей от высоты морских волн.

Поскольку закон распределения ординат морских волн можно считать нормальным [4], то

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

где $\sigma = \frac{2\sigma_z}{C}$, σ_z — среднеквадратичная высота морских волн, причем σ_z

много больше длины излучаемой СВЧ-радиоволны λ . В выражении (2) зависимостью отраженного сигнала от частоты Доплера ω_d и зависимостью $F(\Theta, \varphi)$, $R(\Theta, \varphi)$ от времени пренебрегали, так как на практике обычно выполняется соотношение $VT_i \sin \Theta < \lambda/4$, где V — скорость РЛС, T_i — длительность зондирующего импульса. Следовательно, поверхность можно считать «замороженной» с точки зрения высокочастотной фазы за время T_i . Геометрия задачи дана на рис. 1, где

$$\tau = \tau_0 + \frac{r^2}{CH}, \quad \tau_0 = \frac{2H}{C}, \quad \eta = -\frac{2z}{C}. \quad (4)$$

Считаем, что ширина ДНА по половинной мощности при работе в радиовысотомерном режиме не превосходит $\Theta_0 \leqslant 30^\circ$. Апроксимируем ее гауссовой кривой, а выражение для диаграммы обратного рассеяния морской поверхности при углах зондирования вблизи вертикали возвьем из [2]:

$$F(\Theta, \varphi) = \exp\left(-5,55 \frac{\Theta^2}{\Theta_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\operatorname{tg}^2 \Theta}{a_{\text{ш}}^2}\right), \quad (5)$$

где $a_{\text{ш}}$ — параметр шероховатости (удвоенный средний квадрат наклонов крупных морских волн). Выражение (2) представим в полярных координатах r, φ и сделаем замену переменного $\gamma = \frac{r^2}{CH}$. Тогда получим

$$R(t_1 + \tau_0, t_2 + \tau_0) = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi P_1 C}{H^3} e^{i\omega_0(t_1 - t_2)} \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty e^{-a\gamma} \int_{-\infty}^\infty P(\eta) \rho(t_1 - \gamma - \eta) \rho^*(t_2 - \gamma - \eta) d\eta d\gamma \right], \quad (6)$$

$$C — \text{скорость света}, \quad a = \frac{C}{H\Psi^2}, \quad \Psi^2 = \frac{a_{\text{ш}}^2 \Theta_0^2}{5,55 a_{\text{ш}}^2 + \Theta_0^2}, \quad P_1 = \frac{2P_0 \lambda^2 G_0^2 \sigma_0}{(4\pi)^3}.$$

В (6) считали, что размеры облучаемой на поверхности моря зоны невелики по сравнению с расстоянием ее до источника облучения, поэтому $R \approx H$ можно вывести за знак интегрирования. Внешний интеграл по γ отличен от нуля только вблизи начала координат, поэтому верхний предел интегрирования взяли равным бесконечности.

В [3] показано, что для повышения чувствительности отраженного сигнала к слабому волнению необходимо использовать более широкополосные сигналы. Например, если $\sigma_z = 0,5 \text{ м}$, необходимо иметь широкополосность зондирующего сигнала $\Delta f = 250 \div 300 \text{ МГц}$. Добиваться этого сужением до наносекундной длительности простых радиоимпульсов вряд ли целесообразно, поскольку путь ведет к уменьшению энергии сигнала. Решение может быть получено путем использования сложных сигналов. Для получения окончательного выражения в аналитическом виде удобно рассмотреть зондирующий сигнал с гауссовой огибающей и внутриимпульсной линейной частотной модуляцией

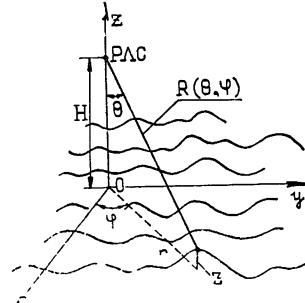


Рис. 1.

$$U(t) = \exp [-(g^2 - ib)t^2], \quad (7)$$

где $g = \frac{\sqrt{\pi}}{T_n}$, T_n — длительность огибающей импульса на уровне 0,46; $b = \pi \frac{\Delta f_m}{T_n}$, Δf_m — девиация частоты.

Автокорреляционная функция для этого сигнала будет [5]

$$\rho(\tau) = \sqrt{0.5} \sqrt{1 + b^2/g^4} \exp [-0.5 g^2 (1 + b^2/g^4) \tau^2], \quad (8)$$

где $D = \sqrt{1 + b^2/g^4} \approx \Delta f_m T_n$ — коэффициент сжатия, $gD = \sqrt{\pi} \Delta f_m$.

Подставив (8) в (6) и заменяя $t_1 + \tau_0 = t$, $t_2 + \tau_0 = t + \tau$, получим

$$R(t; t + \tau) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P_0 \lambda^2 G_0^2 \sigma_0 C D}{64 \pi^2 H^3 \Delta f_m} \exp \left\{ \frac{a^2 [1 + (Dg)^2]}{2(Dg)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(Dg)^2 [\tau + a/(Dg)^2]^2}{4} - at \right\} \left[\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{a \sqrt{1 + 2(Dg)^2}}{2Dg} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(2t + \tau) Dg}{2\sqrt{1 + 2(Dg)^2}} \right) \right] \exp (-i \omega_0 \tau) \right\}, \quad (9)$$

где Φ — интеграл вероятности вида $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$, постоянную задержку в согласованном фильтре t_ϕ взяли для упрощения равной нулю.

Положив $\tau = 0$, получим усредненную мощность сигнала, характеризующую форму отраженного от поверхности моря импульса, прошедшего согласованный фильтр и квадратичный детектор приемника:

$$P(t) = \frac{P_0 \lambda^2 G_0^2 \sigma_0 C D}{64 \pi^2 H^3 \Delta f_m} \exp \left(\frac{a^2 \mu^2}{4} - at \right) \left[\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{a \mu}{2} - \frac{t}{\mu} \right) \right], \quad (10)$$

где $\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta f_m} \right)^2 + 2 \sigma^2}$. Это выражение аналогично выражению.

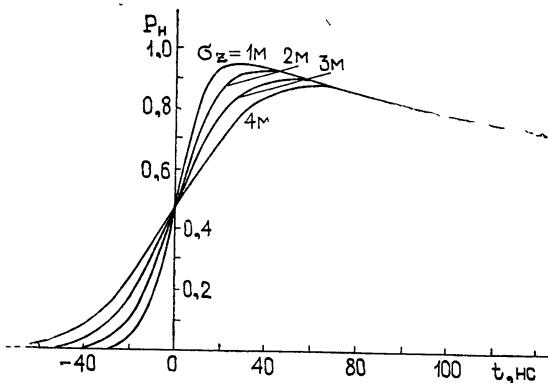


Рис. 2.

полученному в [3] для простого гауссова зондирующего радиоимпульса. При одинаковой широкополосности зондирующих сигналов энергия от-

раженного сигнала с линейной частотной модуляцией больше энергии отраженного радиоимпульса в D раз (D — коэффициент сжатия). На рис. 2 нормированная усредненная форма отраженного сигнала ($\Delta f_m = 50 \text{ МГц}$, $a = 2,12 \cdot 10^6 \text{ Гц}$)

$$P_n(t) = \exp\left(\frac{a^2 \mu^2}{4} - at\right) \left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a\mu}{2} - \frac{t}{\mu}\right) \right]$$

представлена для $\sigma_z = 1 \div 4 \text{ м}$. Следовательно, регистрируя форму отраженного импульса, можно оценивать среднеквадратичную высоту морских волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. T. McGooan, L. S. Miller, G. S. Brown and G. S. Hayne, Proc. IEEE, **62**, № 6, 793 (1974).
2. С. Г. Зубкович, Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1968.
3. А. И. Баскаков, Труды МЭИ, вып. 288, 102 (1976).
4. Ю. М. Крылов, Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн, изд. Гидрометеоиздат, Л., 1966.
5. Радиолокационные устройства, под ред. В. В. Григорина-Рябова, изд. Сов. радио, М., 1970.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
12 апреля 1977 г.

THE POSSIBILITY OF THE SIGNAL USE WITH THE LINEAR FREQUENCY MODULATION TO ESTIMATE THE ROUGHNESS OF THE SEA SURFACE

A. I. Baskakov

Correlation function are found and the power is averaged of a pulse signal with LFM reflected from the ruffled sea surface and passing through the matched receiver filter. It is shown that the averaged form of this signal is sensitive to the height of the sea waves.

УДК 538 576 2

РЯД ПО КРАТНОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

B. E. Осташев, B. I. Татарский

В задаче о распространении волн в неоднородных средах строится ряд по кратности обратного рассеяния. Каждый член этого ряда представляет собой бесконечную сумму, составленную из перегруппированных членов ряда теории возмущений, и может быть найден как решение полученных в работе уравнений. В случае, когда полную функцию Грина для однородного волнового уравнения можно заменить на ее френелевское приближение, первый член полученного ряда переходит в решение известного параболического уравнения. В качестве примера рассматривается задача о вычислении среднего поля в среде со случайными неоднородностями.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЯДА ПО КРАТНОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Как известно, большинство задач о распространении волн в неоднородных средах решается лишь приближенными методами. В настоящей работе развивается новый приближенный метод решения таких задач, в котором малым параметром является отношение амплитуд волн с $(n+1)$ -кратным и n -кратным обратным рассеянием. Вначале мы рассмотрим простейший случай слоисто-неоднородной среды, обобщение на трехмерный случай будет сделано ниже.

Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + k^2 (1 + \tilde{\epsilon}(x)) E(x) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь функция $\tilde{\epsilon}$ описывает вариации диэлектрической проницаемости (в дальнейшем мы рассмотрим случай, когда $\tilde{\epsilon}$ — случайная функция), k — волновое число, E — комплексная амплитуда одной из компонент электрического поля. Будем считать, $\tilde{\epsilon}(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $x \geq L$ (т. е. мы считаем, что нет скачков $\tilde{\epsilon}$ при $x = 0$ и $x = L$, и поэтому отражения волн в этих точках не происходит (см. сноску на стр. 719)). Слева на слой падает невозмущенная волна $E^{(0)}(x) = v_0 e^{ikx}$. Перейдем от уравнения (1.1) к интегральному уравнению

$$E(x) = E^{(0)}(x) - k^2 \int_0^L G(x - x_1) \tilde{\epsilon}(x_1) E(x_1) dx_1, \quad (1.2)$$

где $G(x - x_1) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_1|}$ — функция Грина волнового уравнения (1.1) в однородной среде.

Если записать решение (1.2) в виде итерационного ряда, то получим хорошо известный ряд теории возмущений:

$$E(x) = E^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)}(x), \quad (1.3)$$

где

$$E^{(n)}(x) = (-1)^n k^{2n} \int_0^L \dots \int_0^L \prod_{l=1}^n dx_l G(x_{l-1} - x_l) \tilde{\varepsilon}(x_l) E^{(0)}(x_n) \quad (1.4)$$

$$(x_0 = x),$$

n — кратно рассеянное поле.

Представим функцию $G(x)$ в виде

$$G(x) = G(x) \theta(x) + G(x) \theta(-x),$$

где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Тогда поле $E^{(1)}$ запишется (здесь и далее $0 \leq x \leq L$):

$$E^{(1)} = -k^2 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) E^{(0)}(x_1) dx_1 - \quad (1.5)$$

$$-k^2 \int_x^L G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) E^{(0)}(x_1) dx_1.$$

Таким образом, однократно рассеянное поле $E^{(1)}$ представляется в точке x в виде суммы двух полей: первое из них является суммой всех волн, испытавших однократное рассеяние вперед, второе — сумма всех волн, испытавших обратное рассеяние.

Так же как и $E^{(1)}$, преобразуем $E^{(2)}$:

$$E^{(2)} = k^4 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) \times$$

$$\times E^{(0)}(x_2) dx_2 + k^4 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_{x_1}^L G(x_1 - x_2) \times$$

$$\times \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 + k^4 \int_x^L G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \times \quad (1.6)$$

$$\times \int_{x_1}^L G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 + k^4 \int_x^L G(x - x_1) \times$$

$$\times \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2,$$

Из (1.6) следует, что $E^{(2)}$ в точке x является суммой четырех полей: первое из них — сумма всех волн, испытавших двукратное рассеяние вперед, второе — сумма всех волн, два раза испытавших обратное рассеяние. Точно так же третье слагаемое — сумма всех волн, испытавших одно обратное рассеяние, а затем рассеянных в направлении распространения, четвертое — сумма всех волн, сначала рассеянных в направлении падающего излучения, а затем испытавших обратное рассеяние.

Аналогично представим $E^{(3)}$ как сумму 8 полей, $E^{(4)}$ — 16 и т. п. Таким образом, вместо ряда теории возмущений (1.3) получим новый, вообще говоря, более громоздкий ряд.

Обозначим через $E_0(x)$ сумму всех тех членов этого нового ряда, которые не испытывали ни одного обратного рассеяния. В E_0 войдут: $E^{(0)}$, первое слагаемое из $E^{(1)}$, первое слагаемое из $E^{(2)}$ и т. д.:

$$E_0(x) = E^{(0)}(x) - k^2 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) E^{(0)}(x_1) dx_1 + \\ + k^4 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 - \dots$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$E_0(x) = E^{(0)}(x) - k^2 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) [E^{(0)}(x_1) - \\ - k^2 \int_0^{x_1} G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 + \dots] dx_1.$$

Сумма в квадратных скобках в правой части является полем $E_0(x_1)$, поэтому получаем интегральное уравнение относительно E_0 :

$$E_0(x) = E^{(0)}(x) - k^2 \int_0^x G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) E_0(x_1) dx_1. \quad (1.7)$$

Это уравнение можно записать также и в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dE_0}{dx} - ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right) E_0 = 0, \quad E_0(x=0) = v_0. \quad (1.8)$$

Через $E_1(x)$ обозначим сумму всех волн, испытавших многократное рассеяние в направлении распространения и лишь один раз обратное рассеяние. В E_1 войдут: второе слагаемое из $E^{(1)}$, третье и четвертое слагаемые из $E^{(2)}$ и т. д.:

$$E_1(x) = k^2 \int_x^L G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) E^{(0)}(x_1) dx_1 + \\ + k^4 \int_x^L G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_{x_1}^L G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) \times \\ \times E^{(0)}(x_2) dx_2 - \dots + k^4 \int_x^{x_1} G(x - x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \times \\ \times \int_0^{x_1} G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 - k^6 \int_x^L G(x - x_1) \times \\ \times \tilde{\varepsilon}(x_1) dx_1 \int_{x_1}^L G(x_1 - x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) dx_2 \int_0^{x_2} G(x_2 - x_3) \times \\ \times \tilde{\varepsilon}(x_3) E^{(0)}(x_3) dx_3 + \dots - \\ - \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Правую часть этого выражения преобразуем так же, как и E_0 :

$$\begin{aligned}
E_1(x) = & -k^2 \int_x^L G(x-x_1) \tilde{\varepsilon}(x_1) \left[E^{(0)}(x_1) - k^2 \int_{x_1}^L G(x_1-x_2) \times \right. \\
& \times \tilde{\varepsilon}(x_2) E^{(0)}(x_2) dx_2 + \dots - k^2 \int_0^{x_1} G(x_1-x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) \times \\
& \times E^{(0)}(x_2) dx_2 + k^4 \int_{x_1}^L G(x_1-x_2) \tilde{\varepsilon}(x_2) dx_2 \times \\
& \times \left. \int_0^{x_2} G(x_2-x_3) \tilde{\varepsilon}(x_3) E^{(0)}(x_3) dx_3 - \dots + \dots \right] dx_1.
\end{aligned}$$

В квадратной скобке в правой части последнего выражения для E_1 сумма первых членов частных сумм равна $E_0(x_1)$, а сумма остальных членов — $E_1(x_1)$. Поэтому

$$E_1(x) = -k^2 \int_{-\infty}^L G(x-x_1) \tilde{\epsilon}(x_1) [E_0(x_1) + E_1(x_1)] dx_1,$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению:

$$\frac{dE_1}{dx} + ik \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) E_1 = -\frac{ik}{2} \varepsilon E_0, \quad E_1(x = L) = 0. \quad (1.9)$$

Действуя подобным образом, можно написать уравнения для E_2 , E_3 и т. д. Окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dE_0}{dx} - ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \right) E_0 = 0, \quad E_0(x=0) = v_0,$$

$$\frac{dE_1}{dx} + ik \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right) E_1 = -\frac{ik}{2} \tilde{\epsilon} E_0, \quad E_1(x=L) = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{dE_{2n}}{dx} - ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_{2n} = \frac{ik}{2} \tilde{\varepsilon} E_{2n-1}, \quad E_{2n}(x=0) = 0,$$

$$\frac{dE_{2n+1}}{dx} + ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_{2n+1} = -\frac{ik}{2} \tilde{\varepsilon} E_{2n}, \quad E_{2n+1}(x=L) = 0.$$

Отметим, что каждое из полей E_n является суммой бесконечного числа слагаемых, содержащихся в ряде теории возмущений (1.3). Из системы (1.10) видно, что «источником» поля E_n , испытавшего n -кратное обратное рассеяние, является поле E_{n-1} , испытавшее $(n-1)$ -кратное обратное рассеяние.

расеяния Положим

$$E_+ = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}, \quad E_- = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1},$$

где E_+ — сумма всевозможных волн, испытавших четное число обрат-

ных рассеяний. Тогда, складывая все четные уравнения (1.10), а затем все нечетные, получим

$$\begin{aligned} \frac{dE_+}{dx} - ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_+ &= \frac{ik}{2} \tilde{\varepsilon} E_-, \quad E_+(x=0) = v_0, \\ \frac{dE_-}{dx} + ik \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_- &= -\frac{ik}{2} \tilde{\varepsilon} E_+, \quad E_-(x=L) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.11) известна (см., например, [1]) и может быть просто получена из волнового уравнения (1.1). Если систему уравнений (1.11) решать последовательными итерациями, то можно снова получить систему (1.10). Такой вывод системы (1.10) гораздо проще (именно так мы поступим в трехмерном случае), однако физически он намного менее нагляден. Ряд

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad (1.12)$$

где E_n — решение соответствующих уравнений системы (1.10), будем называть рядом по кратности обратного рассеяния.

Решая последовательно уравнения системы (1.10), получаем

$$\begin{aligned} E_{2n} &= (-1)^n 2^{-2n} v_0 \exp \left(ikx + \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right) \int_0^x dx_1 \times \\ &\times \int_{x_1}^L dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_{x_{2n-1}}^L dx_{2n} \exp (2ik(-x_1 + x_2 - \dots + x_{2n})) \times \\ &\times \frac{\partial^{2n}}{\partial x_1 \dots \partial x_{2n}} \exp \left(ik \left(\int_{x_1}^{x_2} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta + \int_{x_3}^{x_4} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta + \dots + \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right) \right); \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} E_{2n+1} &= (-1)^n 2^{-2n-1} v_0 \exp \left(-ikx + \frac{ik}{2} \int_x^x \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right) \int_x^L dx_1 \times \\ &\times \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} dx_{2n+1} \exp (2ik(x_1 - x_2 + \dots + x_{2n+1})) \times \\ &\times \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x_1 \dots \partial x_{2n+1}} \exp \left(ik \left(\int_x^{x_1} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta + \int_{x_2}^{x_3} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta + \dots + \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right) \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

При $n = 0$ получаем

$$E_0(x) = v_0 \exp \left(ikx + \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right); \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{ik}{2} v_0 \exp \left[-ikx + \frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right] \int_x^L \tilde{\varepsilon}(x_1) \times \\ &\times \exp \left(2ikx_1 + ik \int_x^{x_1} \tilde{\varepsilon}(\zeta) d\zeta \right) dx_1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Напомним, что представление E в виде ряда (1.12) получено при $0 \leq x \leq L$. Нетрудно показать, что при $x < 0$

$$E(x) = v_0 e^{ikx} + e^{-ikx} \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}(0),$$

а при $x > L$ —

$$E(x) = e^{ik(x-L)} \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(L).$$

Как отмечалось выше, требование $\tilde{\epsilon}(x) = 0$ при $x = 0$; L достаточно для выполнения граничных условий в этих точках*.

Сделаем одно замечание. Поле E_0 всегда представляет собой волну, распространяющуюся вперед. Поле E_{2n+1} внутри неоднородного слоя является некоторой суммой рассеянных назад волн, т. е. может быть представлено в виде $E_{2n+1}(x) = e^{-ikx} u_{2n+1}(x)$. Однако оказывается, что амплитуда u_{2n+1} внутри неоднородного слоя может содержать слагаемое, пропорциональное e^{2ikx} , так что поле E_{2n+1} представимо в виде суммы двух волн, распространяющихся в разные стороны. При $x < 0$ остается только распространяющаяся назад волна. Аналогично обстоит дело и с E_{2n} .

Поясним сказанное на примере. Пусть $\tilde{\epsilon}(x) = \sum_{n=0}^N a_n \delta(x - x_n)$, где $x_n = n\lambda$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, а a — малый параметр. Обозначим через $\tilde{E}(x)$ сумму рассеянных назад волн в приближении однократного рассеяния

$$\tilde{E}(x) = e^{-ikx} \tilde{u}(x),$$

где амплитуда $\tilde{u}(x) = \frac{ik}{2} v_0 a \sum_{n=0}^{\infty} e^{2ikx_n} \theta(x_n - x)$.

Рассмотрим две точки $\tilde{x}_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, $\tilde{x}_2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$. Здесь m — целое и $0 < m < N$. Тогда $\frac{\tilde{u}(\tilde{x}_2) - \tilde{u}(\tilde{x}_1)}{\tilde{u}(\tilde{x}_1)} = e^{2ikm\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2ikx_n} \theta(x_n - \tilde{x}_1) \right)^{-1}$ может быть величиной порядка единицы. Итак, внутри неоднородного слоя амплитуда $\tilde{u}(x)$ может сильно меняться на расстоянии порядка длины волны. Вне неоднородного слоя при $m < 0$ $\frac{\tilde{u}(\tilde{x}_2) - \tilde{u}(\tilde{x}_1)}{\tilde{u}(\tilde{x}_1)} \equiv 0$.

* Уравнение (1.1) должно быть дополнено граничными условиями поле и его производная непрерывны при $x = 0$, $x = L$. Таким же условиям должно удовлетворять решение уравнения (1.2). Выпишем эти условия в явном виде:

$$A_{\text{отр}} + v_0 = E_+(0) + E_-(0), \quad -ikA_{\text{отр}} + ikv_0 = E'_+(0) + E'_-(0),$$

$$A_{\text{прош}} e^{ikL} = E_+(L) + E_-(L), \quad ikA_{\text{прош}} e^{ikL} = E'_+(L) + E'_-(L).$$

Здесь $A_{\text{отр}}$ — амплитуда отраженной от слоя волны, $A_{\text{прош}}$ — амплитуда прошедшей волны. Если подставить теперь в эти уравнения $E_+ = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}$, $E_- = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1}$ и воспользоваться явным видом для E_n (формулы (1.13), (1.14)), то достаточным условием справедливости граничных условий будет $\tilde{\epsilon}(0) = \tilde{\epsilon}(L) = 0$.

Подчеркнем, что ряд (1.12) следует отличать от полученного в [2] ряда (см. также [3]), первым членом которого является приближение ВКБ:

$$E_{\text{ВКБ}}(x) = (1 + \tilde{\varepsilon}(x))^{-1/4} \exp \left(ik \int_0^x \sqrt{1 + \tilde{\varepsilon}(\zeta)} d\zeta \right). \quad (1.17)$$

Выражение (1.17) можно представить в виде

$$E_{\text{ВКБ}}(x) = E_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{\varepsilon}^n(x) \exp \left(ik \int_0^x \sum_{m=1}^{\infty} b_m \tilde{\varepsilon}^{m+1}(\zeta) d\zeta \right), \quad (1.18)$$

a_n, b_n — численные коэффициенты. Из (1.18) видно, что $E_{\text{ВКБ}}$ отличается от E_0 — суммы многократно рассеянных вперед волн, не испытавших обратного рассеяния.

Итак, мы получили новый ряд (1.12), являющийся рядом по кратности обратного рассеяния. Первыми двумя членами этого ряда E_0 и E_1 мы в дальнейшем воспользуемся для вычисления средних характеристик рассеянных волн.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЯДА ПО КРАТНОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Задача ставится следующим образом: неоднородная среда заполняет пространство между плоскостями $x=0$ и $x=L$. Слева на неоднородную среду падает волна $E^{(0)}(\mathbf{r})$. Требуется определить рассеянное поле.

Исходным является трехмерное волновое уравнение

$$\Delta E(\mathbf{r}) + k^2 (1 + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})) E(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.1)$$

где $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) = 0$ при $x \leq 0$ и $x \geq L$. Запишем уравнение (2.1) в виде интегрального уравнения:

$$E(\mathbf{r}) = E^{(0)}(\mathbf{r}) + k^2 \int_0^L dx_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) E(\mathbf{r}_1). \quad (2.2)$$

В (2.2) $\mathbf{r} = (x, \rho)$, а

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2.3)$$

— функция Грина волнового уравнения (2.1) в однородной среде.

Разобьем исковую функцию $E(\mathbf{r})$ на два слагаемых:

$$E(\mathbf{r}) = E_+(\mathbf{r}) + E_-(\mathbf{r}),$$

где, как будет видно из дальнейшего, E_+ — сумма всех рассеянных вперед волн, E_- — сумма всех рассеянных назад волн.

Представим, кроме того, функцию $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ в виде

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \theta(x) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \theta(-x) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1).$$

Тогда (2.2) при $0 \leq x \leq L$ примет вид

$$E_+ + E_- = E^{(0)} + k^2 \int_0^x dx_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \times$$

$$\times [E_+(\mathbf{r}_1) + E_-(\mathbf{r}_1)] + k^2 \int_x^L dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \\ \times \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) [E_+(\mathbf{r}_1) + E_-(\mathbf{r}_1)]. \quad (2.4)$$

Поскольку вместо одной функции E мы ввели две функции E_+ и E_- , то уравнение (2.4) можно дополнить еще одним произвольным уравнением, связывающим E_+ и E_- . Выберем его следующим:

$$E_+(\mathbf{r}) = E^{(0)}(\mathbf{r}) + k^2 \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) [E_+(\mathbf{r}_1) + E_-(\mathbf{r}_1)]. \quad (2.5)$$

Вычитая (2.5) из (2.4), получим

$$E_-(\mathbf{r}) = k^2 \int_x^L dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) [E_+(\mathbf{r}_1) + E_-(\mathbf{r}_1)]. \quad (2.6)$$

Таким образом, для определения двух функций E_+ и E_- мы имеем систему из двух уравнений (2.5) и (2.6).

Будем искать решение системы уравнений (2.5), (2.6) в следующем виде:

$$E_+ = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}, \quad E_- = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1},$$

причем E_n подчиним уравнениям:

$$E_{2n} = E^{(0)} \delta_{n0} + k^2 \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) [E_{2n}(\mathbf{r}_1) + E_{2n-1}(\mathbf{r}_1)], \\ E_{2n+1} = k^2 \int_x^L dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) [E_{2n+1}(\mathbf{r}_1) + E_{2n}(\mathbf{r}_1)]. \quad (2.7)$$

Здесь δ_{n0} — символ Кронекера, $E_{-1} \equiv 0$. Уравнения (2.7) получаются из (2.5), (2.6), если в них заменить E_- на E_{2n-1} и E_+ на E_{2n} . Таким образом, уравнения (2.7) осуществляют процедуру последовательных приближений при решении (2.5), (2.6).

Рассмотрим подробнее первое уравнение системы (2.7):

$$E_0(\mathbf{r}) = E^{(0)}(\mathbf{r}) + k^2 \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) E_0(\mathbf{r}_1). \quad (2.8)$$

Решая его путем последовательных итераций, получим

$$E_0(\mathbf{r}) = E^{(0)}(\mathbf{r}) + k^2 \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 G(x - x_1, \rho - \rho_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) E^{(0)}(\mathbf{r}_1) + \\ + k^4 \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_2 G(x - x_1, \rho - \rho_1) \times \\ \times G(x_1 - x_2, \rho_1 - \rho_2) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_1) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_2) E^{(0)}(\mathbf{r}_2) + \dots$$

Второй член ряда содержит $G(x - x_1, \rho - \rho_1)$, т. е. в точку (x, ρ) приходят рассеянные волны из точек (x_1, ρ_1) , где $x_1 \leq x$ — из пред-

шествующих по x точек пространства. Это означает, что второй член этого ряда является суммой всех волн, испытавших однократное рассеяние вперед. Точно так же из того, что в третьем члене ряда стоит произведение $G(x - x_1, \rho - \rho_1) G(x_1 - x_2, \rho_1 - \rho_2)$ и $x_2 \leqslant x_1 \leqslant x$, следует, что он является суммой всех двукратно рассеянных вперед волн. Таким образом, E_0 — сумма многократно рассеянных вперед волн, не испытавших ни одного обратного рассеяния.

Источником волны E_1 , как это следует из второго уравнения системы (2.7) при $n' = 0$, является E_0 . Если записать решение уравнения для E_1 в виде итерационного ряда, то станет ясно, что E_1 является суммой всех многократно рассеянных волн, испытавших одно обратное рассеяние (что обусловлено наличием одного сомножителя $G(x_1 - x_2, p_1 - p)$ с $x_1 < x_2$).

Аналогично можно показать, что E_n — сумма всех многократно рассеянных волн, испытавших n обратных рассеяний.

Таким образом, система (2.7) является обобщением системы (1.10) на трехмерный случай. Ряд

$$E(r) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(r)$$

является рядом по кратности обратного рассеяния.

Уравнение (2.8) определяет функцию E_0 . Если E_0 известно, то уравнение для E_1 получается замкнутым. Определив из него E_1 , получаем возможность определить E_2 и т. д. Если заменить точную функцию Грина (2.3) на ее френелевское приближение:

$$\tilde{G}(r - r_1) = \frac{\exp\left(ik|x - x_1| + \frac{ik(\rho - \rho_1)^2}{2|x - x_1|}\right)}{4\pi|x - x_1|}, \quad (2.9)$$

то (27) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial E_0}{\partial x} + \Delta_{\perp} E_0 + 2k^2 \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_0 &= 0, \quad E_0(x = 0) = v_0, \\ -2ik \frac{\partial E_1}{\partial x} + \Delta_{\perp} E_1 + 2k^2 \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_1 &= -k^2 \tilde{\varepsilon} E_0, \\ E_1(x = L) &= 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$2ik \frac{\partial E_{2n}}{\partial x} + \Delta_\perp E_{2n} + 2k^2 \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right) E_{2n} = -k^2 \tilde{\varepsilon} E_{2n-1},$$

$$F_{\text{sp}}(x=0) \equiv 0$$

$$-2ik\frac{\partial E_{2n+1}}{\partial x} + \Delta_{\perp}E_{2n+1} + 2k^2\left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)E_{2n+1} = -k^2\tilde{\varepsilon}E_{2n}, \quad .$$

$$E_{2n+1}(x = L) = 0,$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \quad \text{и считается, что } E^{(0)}(\mathbf{r}) = v_0 e^{i k \cdot \mathbf{r}}.$$

Первое уравнение системы (2.10) подстановкой $E_0 = e^{ikx} u_0$ сводится к известному параболическому уравнению Леонтьевича для амплитуды u_0 рассеянной вперед волны. Остальные уравнения (2.10) аналогичными подстановками также приводятся к подобному виду. Отметим, что параболическое уравнение получается из точного уравнения (2.8) для много-кратно рассеянной вперед волны путем замены $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ на $\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$. Остальные уравнения системы (2.10) являются также параболическими, поэтому мы назовем систему (2.10) системой параболических уравнений. Складывая все четные, а затем все нечетные уравнения (2.10), получим

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial E_+}{\partial x} + \Delta_\perp E_+ + 2k^2 \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right) E_+ &= -k^2 \tilde{\epsilon} E_-, \quad E_+(x=0) = v_0, \\ -2ik \frac{\partial E_-}{\partial x} + \Delta_\perp E_- + 2k^2 \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right) E_- &= -k^2 \tilde{\epsilon} E_+, \quad E_-(x=L) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В слоистой среде $\Delta_\perp E_+ = \Delta_\perp E_- = 0$ и (2.11) совпадает с (1.10).

В следующем разделе мы вычислим средние значения первых членов ряда по кратности обратного рассеяния в случайно-неоднородной среде, т. е. будем предполагать, что $\tilde{\epsilon}$ — случайная функция координат.

3. СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Мы рассмотрим как одномерный, так и трехмерный случаи. Сначала рассмотрим слоистую среду.

Будем предполагать, что $\tilde{\epsilon}$ — гауссова случайная функция, для которой $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$, а

$$\langle \tilde{\epsilon}(x' + x) \tilde{\epsilon}(x') \rangle \equiv B(x) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right),$$

где σ^2 — среднеквадратичное значение флуктуаций диэлектрической проницаемости, l — радиус корреляции неоднородностей. Среднее поле $\langle E_0 \rangle$ определим, усредняя (1.15):

$$\langle E_0(x) \rangle = v_0 \exp\left(ikx - \frac{k^2 \sigma^2 l^2}{4} \left(\frac{x}{l} - 1 + e^{-\frac{x}{l}}\right)\right). \quad (3.1)$$

Таким образом, среднее поле $\langle E_0 \rangle$ экспоненциально затухает; в экспоненте содержится величина $k^2 \sigma^2 l x / 4$ при $x \gg l$ и $k^2 \sigma^2 x^2 / 8$ при $x \ll l$.

Для продольной корреляции поля E_0 получаем

$$\langle E_0(x') E_0^*(x' + x) \rangle = v_0^2 \exp\left(-ikx - \frac{k^2 \sigma^2 l^2}{4} \left(\frac{x}{l} - 1 + e^{-\frac{x}{l}}\right)\right). \quad (3.2)$$

Как видно из сравнения (3.1) и (3.2), экспоненциальное затухание продольной корреляции поля равно затуханию среднего поля на участке $(x', x' + x)$. Средняя интенсивность поля E_0 , на основании (3.2), не зависит от x' и равна v_0^2 .

Рассмотрим теперь $E_1(x)$. Для среднего поля $\langle E_1 \rangle$, усредняя (1.16), получим

$$\langle E_1(x) \rangle = \frac{v_0}{2} e^{-ikx'} \int_x^L e^{2ikx} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\langle \exp\left(\frac{ik}{2} \int_0^x \tilde{\epsilon}(\zeta) d\zeta + ik \int_{x'}^x \tilde{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \right\rangle dx_1. \quad (3.3)$$

Из (3.3) можно показать, что $|\langle E_1 \rangle| \ll v_0$. Если $L \rightarrow \infty$, то интегрирование в (3.3) удается выполнить. Физический переход к $L \rightarrow \infty$ означает, что $L \gg \max \left\{ l, L_{\text{экс}} = \frac{l}{k^2 \sigma^2 l^2} \right\}$. В этом случае

$$\langle E_1 \rangle = \frac{v_0}{2} \exp \left(ikx - \frac{k^2 \sigma^2 l^2}{4} \left(\frac{x}{l} - 1 + e^{-\frac{x}{l}} \right) \right) [\Omega - 1], \quad (3.4)$$

$$\text{где } \Omega = \frac{\Phi(1, 1 + \alpha + \beta; \alpha\gamma)}{1 + \alpha/\beta}, \quad \alpha = k^2 \sigma^2 l^2, \quad \beta = -2ikl, \quad \gamma = \frac{1+e^{-\frac{x}{l}}}{2},$$

а Φ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В конце 1-го раздела было показано, что E_1 в неоднородной среде в общем случае может быть представлено как сумма двух распространяющихся в разные стороны волн. В данной конкретной задаче, когда ϵ — гауссова случайная функция и L велико, $\langle E_1 \rangle$ содержит только одну из этих волн, которая распространяется в направлении падающего излучения. Там же было показано, что $\langle E_1(0) \rangle$ — средняя амплитуда отраженной от слоя волны, если пренебречь волнами, испытавшими три и более актов обратного рассеяния. Если $|\langle E_1 \rangle|$ сравнимо с $|\langle E_0 \rangle|$, то для вычисления средних характеристик рассеянных волн надо суммировать все члены ряда (1.12). Если же

$$|\langle E_0 \rangle| \gg |\langle E_1 \rangle| \gg |\langle E_2 \rangle| \gg \dots,$$

то можно надеяться, что первые члены ряда по кратности обратного рассеяния хорошо описывают средние характеристики рассеянных волн.

Сравнивая (3.4) и (3.1), убеждаемся, что неравенство

$$|\langle E_0 \rangle| \gg |\langle E_1 \rangle|$$

справедливо при следующих ограничениях на k, l, σ :

$$kl \gg 1, \quad kl \sigma^2 \ll 1. \quad (3.5)$$

Если условия (3.5) выполняются, то

$$\begin{aligned} \langle E_1 \rangle &= v_0 \exp \left[ikx - \frac{k^2 \sigma^2 l^2}{4} \left(\frac{x}{l} - 1 + e^{-\frac{x}{l}} \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{kl \sigma^2}{4i} (1 - \gamma) + \frac{\sigma^2 \gamma}{8} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При $x = 0$

$$\langle E_1(0) \rangle = \frac{v_0 \sigma^2}{8}. \quad (3.7)$$

Сравнение (3.1) и (3.6) показывает, что

$$\left| \frac{\langle E_1 \rangle}{\langle E_0 \rangle} \right| \ll \frac{kl \sigma^2}{4} \ll 1.$$

Итак, при выполнении (3.5) среднее рассеянное вперед поле в неоднородной среде дается выражением (3.1), а средняя амплитуда отраженной волны выражением (3.7).

Теперь рассмотрим трехмерный случай. Нашей задачей будет вычисление $\langle E_0(r) \rangle$. Случайное поле $\tilde{\epsilon}(r)$ будем предполагать гаус-

совым, дельта-коррелированным вдоль x случайным полем, с корреляционной функцией, равной

$$B(x, \rho) = \delta(x) A(\rho).$$

Исходным является причинное уравнение (2.8). Процедура усреднения функции E_0 , подчиняющейся причинному уравнению, хорошо известна (см. [4]), поэтому выкладки мы опустим. $\langle E_0 \rangle$ может быть определено как решение следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \langle E_0 \rangle = E^{(0)} + \frac{k^4}{2} \int_0^x dx_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_1 \langle E_0(r_1) \rangle \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 \rho_2 \times \\ \times G(x - x_1, \rho - \rho_2) G(\rho_1 - \rho_2) A(\rho_1 - \rho_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если падающая волна плоская, т. е. $E^{(0)} = v_0 e^{ikx}$, то уравнение (3.8) удается решить:

$$\langle E_0 \rangle = v_0 \exp \left[ikx - \frac{\pi}{4} k^2 x \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 x \frac{\Phi_{\epsilon}(0, x)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}}} \right], \quad (3.9)$$

где $\Phi_{\epsilon}(p, x)$ — трехмерный спектр неоднородностей. Если поперечный радиус корреляции неоднородностей $l_1 \gg \lambda$, то $\Phi_{\epsilon}(0, x)$ отлично от

нуля лишь при $x \ll k$. Тогда в (3.9) $\sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}} \approx 1$ и

$$\langle E_0 \rangle = v_0 \exp \left(ikx - \frac{\pi}{4} k^2 x \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 x \Phi_{\epsilon}(0, x) \right). \quad (3.10)$$

Эта формула соответствует известному решению для $\langle E_0 \rangle$, которое получено из параболического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 8, 1240 (1973).
2. Н. Времтег, Physica, 15, 593 (1949).
3. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М. 1973.
4. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт, ОФАГ АН СССР, М., 1970.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.

A SERIES OF FOLDING OF BACK SCATTERING IN PROBLEMS OF WAVE PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA

V. E. Ostashev, V. I. Tatarskii

A series of folding of back scattering is built in the problem on the wave propagation in inhomogeneous media. Each member of this series involves an infinite sum composed of regrouped series members of the disturbed theory and may be found as a solution of equations obtained in operation. In the case when the complete Green function for the homogeneous wave equation may be substituted by its Fresnel approximation the first member of the series obtained transforms to the solution of the known parabolic equation. As an example, the problem is considered on the calculation of the average field in the medium with random inhomogeneities.

УДК 535.39

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АПЕРТУРЫ ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМ НА РАДИООПТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

C. H. Менсов

Теоретически и экспериментально исследовано распределение поля за апертурно-ограниченной фокусирующей системой с целью анализа ошибок при экспериментальном определении ее фокуса. Показано, что в связи с несимметричным распределением поля относительно фокальной плоскости эта ошибка может значительно влиять на радиооптические преобразования, особенно при малых апертурах фокусирующих систем.

В настоящее время широкое распространение в системах сбора и обработки информации в различных диапазонах электромагнитных и акустических волн нашли оптические методы, которые позволяют оперативно производить некоторые интегральные преобразования над большими массивами данных, в частности преобразование Фурье и Френеля [¹]. Определяющими элементами радиооптических систем, производящих эти операции, являются свободное пространство и фокусирующие системы [²]. Любые искажения в этих элементах приводят к получению «ложных» результатов, если они неправильно учитываются при расчете радиооптических систем.

Одним из таких искажающих факторов может быть неточное определение геометрического фокуса реальной фокусирующей системы, на котором, как правило, строится расчет радиооптических систем. Его положение определяется местом одинакового оптического хода лучей от раскрыва фокусирующей системы [³]. Для идеальной фокусирующей системы с бесконечной апертурой его можно найти — используя свойство этой фокусирующей системы, фокусировать плоскую волну в фокусе. В этом случае там должна быть максимальная интенсивность поля на оптической оси системы и самый узкий отклик в перпендикулярном к этой оси сечении [⁴]. В случае реальной фокусирующей системы это не всегда выполняется [⁵]. Поэтому, помимо геометрического фокуса, имеет смысл ввести критерии определения экспериментальных фокусов системы: 1) фокуса по интенсивности, 2) фокуса по ширине отклика. Положение фокуса, найденного по экспериментальным критериям, может сильно зависеть от искажений в реальной фокусирующей системе, что не позволяет однозначно оценивать полученные на радиооптических приборах результаты.

В настоящей работе исследуются погрешности, вносимые наибольее часто встречающимися искажениями фокусирующих систем, связанными с конечностью ее апертуры, при экспериментальном определении фокуса, и дана рекомендация по их учету при расчете реальных радиооптических систем.

ПОЛОЖЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ФОКУСОВ ОГРАНИЧЕННОЙ ФОКУСИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

С целью определения положения экспериментальных фокусов рассмотрим дифракцию плоской волны на ограниченной идеальной фоку-

сфокусирующей системе (рис. 1), амплитудное пропускание которой описывается следующим образом:

$$L(x) = M(x) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda} (\sqrt{F^2 + x^2} - F) \right], \quad (1)$$

где

$$M(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \not\in [-a, a] \end{cases} \quad (1a)$$

— множитель, характеризующий конечные размеры фокусирующей системы, а F — величина истинного фокусного расстояния. В этом случае одномерное распределение интенсивности монохроматического поля в произвольной точке (y, z) за фокусирующей системой в параксиальном приближении Френеля [6] (которое справедливо для большинства радиоспиральных систем [2]) имеет вид

$$J(q, \tilde{y}) = \frac{J_0}{|1-q|} \left| \int_{-\tilde{\beta} \left(1 + \frac{\tilde{y}}{1-q} \right)}^{\tilde{\beta} \left(1 - \frac{\tilde{y}}{1-q} \right)} \exp \left(\frac{\pi i}{2} x^2 \right) dx \right|^2, \quad (2)$$

где J_0 — значение интенсивности поля в плоскости $z = 0$, а $q = z/F$, $p = 2a^2/\lambda F$, $\tilde{y} = y/a$, $\beta = \sqrt{p(1/q - 1)}$ — параметры, характеризующие оптическую систему. Область применимости (2)

$$q \gg \sqrt[3]{\frac{\pi}{16} p^2 \frac{\lambda}{F}}. \quad (3)$$

Выражение (2) несимметрично относительно плоскости $z = F$ [7], что указывает на принципиальную возможность несовпадения положения экспериментальных фокусов и геометрического.

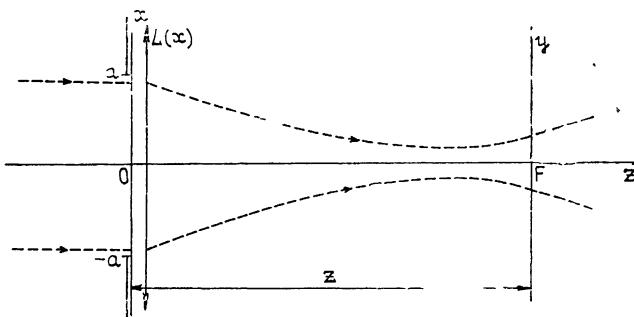


Рис. 1.

На рис. 2 приведен результат численного расчета выражения (2) при $\tilde{y} = 0$ для различных параметров p . Точность вычислений 1%. Из полученных данных видно, что

1) распределение интенсивности поля по оптической оси имеет максимум не в фокальной плоскости; положение и величина максимума зависит от апертуры системы;

2) помимо основного максимума, существуют и другие, амплитуды которых значительно меньше, что необходимо учитывать при определении положения экспериментального фокуса.

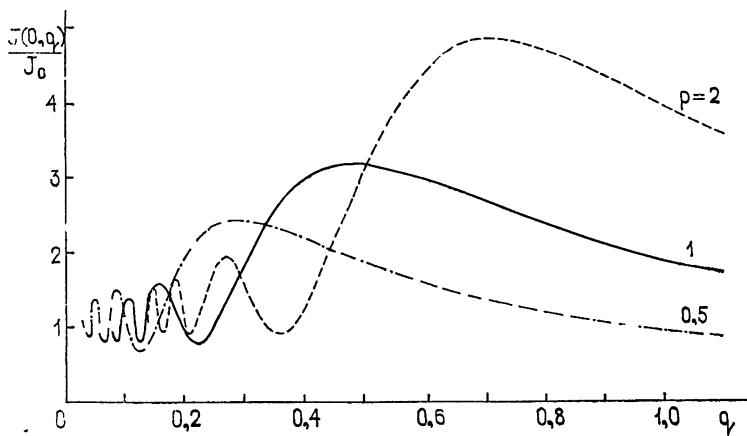


Рис. 2.

Зависимость положения максимума интенсивности \tilde{q} от апертуры системы можно получить, исследуя на экстремум по q выражение (2) (при $\tilde{y}=0$). В результате этого получается функциональное уравнение

$$\frac{\tilde{q}}{\sqrt{p\left(\frac{1}{\tilde{q}}-1\right)}} \left[\left(\int_0^{\tilde{q}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 + \left(\int_0^{\tilde{q}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 \right] = \sqrt{p\left(\frac{1}{\tilde{q}}-1\right)} \\ = \int_0^{\tilde{q}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx \cos \frac{\pi}{2} p \left(\frac{1}{\tilde{q}} - 1 \right) + \int_0^{\tilde{q}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \sin \frac{\pi}{2} p \left(\frac{1}{\tilde{q}} - 1 \right), \quad (4)$$

определенноее $p = f(\tilde{q})$ для абсолютного максимума по интенсивности.

Выражение (4) справедливо при условии (3) и $\tilde{q} \neq 0$ и $\tilde{q} \neq 1$. Результат численного решения этого уравнения представлен на рис. 3 (кривая 1). Из рисунка видно, что с увеличением апертуры фокусирующей системы максимум интенсивности стремится к геометрическому фокусу, т. е. система приближается к идеальной. Если же апертура системы уменьшается, экстремум смещается в противоположную сторону: начинают преобладать дифракционные эффекты.

Теперь рассмотрим распределение поля в поперечном оптической оси сечений, что необходимо для нахождения положения фокуса по ширине. На рис. 4 приведены результаты расчета выражения (2) для нескольких значений q при $p = 1$. Из полученных данных видно:

1) кривые поперечного распределения поля не подобны по форме для различных значений q , поэтому для оценки ширины отклика необходимо выбирать конкретный уровень в сечении интенсивности;

2) поперечное сечение в точке максимума по интенсивности не имеет минимальной ширины.

Для нахождения минимального по ширине (на уровне k) поперечного сечения необходимо исследовать на экстремум функцию $\tilde{y}_k(q)$, определяющую ширину отклика в точке, где интенсивность в k раз меньше, чем на оси z .

Неявный вид $\tilde{y}_k(q)$ задается уравнением

$$\left| \int_{-\beta}^{\beta} \exp\left(\frac{\pi i}{2} x^2\right) dx \right|^2 = k \left| \int_{-\beta}^{\beta} \exp\left(\frac{\pi i}{2} x^2\right) dx \right|^2. \quad (5)$$

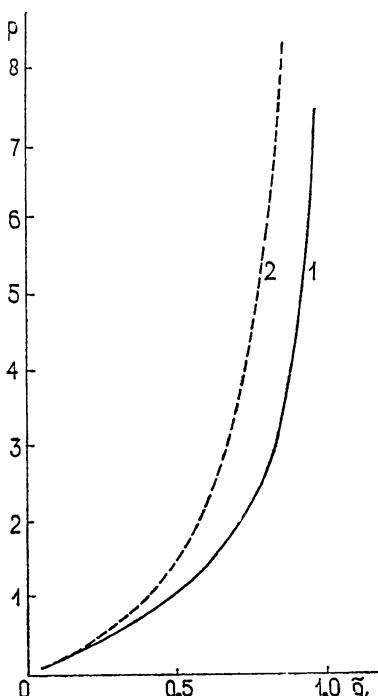


Рис. 3. Зависимость положения максимума интенсивности (1) и минимального поперечного сечения (2) от апертуры фокусирующей системы.

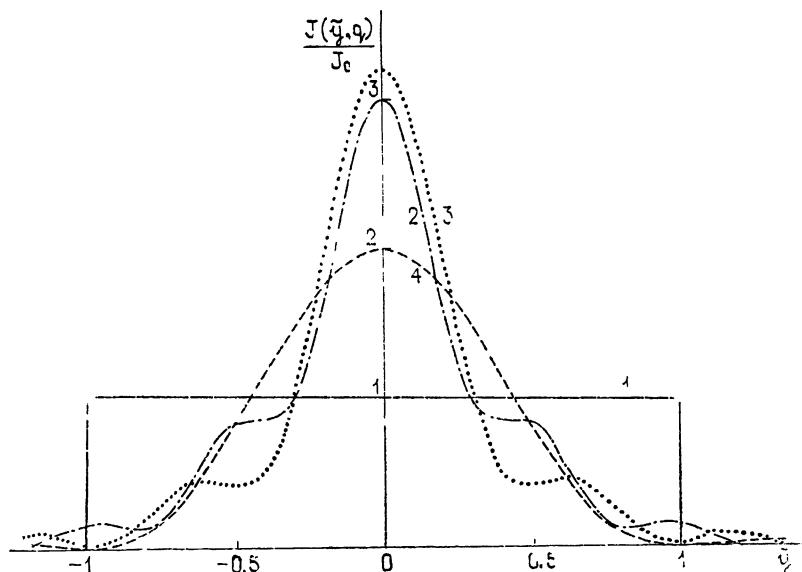


Рис. 4. Поперечное распределение интенсивности поля за ограниченной фокусирующей системой:
 $1-q = 0$, $2-q = 0,4$ (сечение в фокусе по ширине), $3-q = 0,48$ (сечение в фокусе по интенсивности), $4-q = 1$.

Как видно из выражения (5), положение фокуса по ширине не зависит от амплитудного множителя (см. (2)). В то же время оно не меняется, если при изменении p и q параметр β остается постоянным. Следовательно, в распределении поля при различных p_1 и p_2 можно найти два таких поперечных сечения (правда, на разных расстояниях q), в которых распределения поля будут подобны по форме с учетом приведенной координаты

$$\tilde{y}_k^n = \frac{\tilde{y}_k}{1 - q}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что минимум функции $y_k(q)$ определяется значением параметра β . Из численного решения уравнения (5) следует, что для $k = 0,5$ ширина распределения минимальна при

$$\sqrt{p \left(\frac{1}{\tilde{q}} - 1 \right)} \approx 1,22. \quad (7)$$

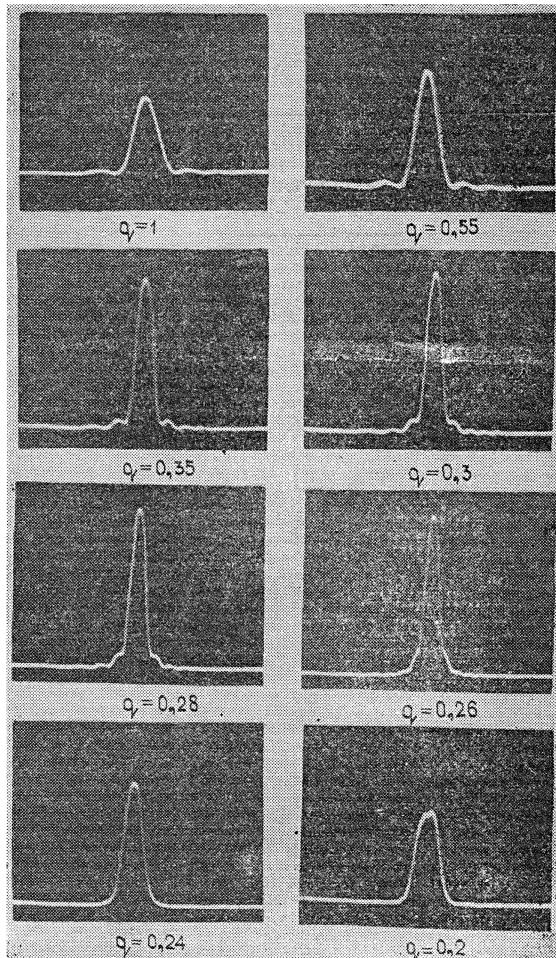


Рис. 5.

Если провести аналогию с дифракционной задачей на отверстии без фокусирующей системы, которая характеризуется

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{2a^2}{\lambda z}},$$

то нетрудно заметить, что $\tilde{\beta}$ является частным видом параметра β при $F = \infty$. Как показано в [8], при $\tilde{\beta} = 1,22$ происходит подфокусировка дифрагируемого ограниченного пучка.

Явный вид зависимости p от q для (7) приведен на рис. 3 (кривая 2). Из этого рисунка видно, что положения фокуса по ширине и фокуса по интенсивности для различных параметров p в общем случае не совпадают, но качественное их поведение подобно. При малых значениях p их положение существенно отличается от положения геометрического фокуса ограниченной фокусирующей системы.

Полученные результаты были экспериментально проверены в оптическом диапазоне для достаточно хороших фокусирующих систем (объективы «И-37» и «Эра-12»), ограниченных щелевой диафрагмой. Экспериментальные значения фокусов по ширине и интенсивности с достаточной точностью совпадают с рассчитанными теоретически.

Поперечные распределения интенсивности для нескольких значений q при $p = 0,5$ (для объектива «И-37»), полученные с помощью френелевского когерентного анализатора [9], приведены на рис. 5.

ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С НЕТОЧНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАСТРОЙКОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим работу когерентного фурье-анализатора, содержащего ограниченную фокусирующую систему.

Если транспарант с анализируемой структурой $T(x)$ помещен сразу после ограниченной фокусирующей системы (1) достаточно хорошего качества и освещается плоской волной, то в приближении Френеля в плоскости геометрического фокуса интенсивность будет меняться по закону [6]

$$J_F(y) = J_0 \left| \int_{-\infty}^{\infty} M(x) T(x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda F} xy\right) dx \right|^2 \frac{1}{\lambda F}, \quad (8)$$

где J_0 — интенсивность освещдающей волны.

Если эффективный размер $T(x)$ меньше апертуры фокусирующей системы, то можно записать (8) в виде

$$\begin{aligned} J_F(y) &= J_0 \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \exp\left(-\frac{2\pi i}{\lambda F} xy\right) dx \right|^2 \frac{1}{\lambda F} = \\ &= \left| F \left\{ T(x), x, \frac{y}{\lambda F} \right\} \right|^2 \frac{1}{\lambda F}. \end{aligned} \quad (8a)$$

В этом случае отклик системы тождественно равен квадрату модуля фурье-образа входного распределения. Это условие ограничивает снизу частотный диапазон анализатора [2]. Но даже при выполнении этого условия при работе с таким анализатором спектра может возникнуть погрешность в измерениях, если неправильно определен геометрический фокус фокусирующей системы. Если фокус определяется по критерию

максимума интенсивности или критерию минимальной ширины отклика, то его значение f будет в общем случае отличаться от значения геометрического фокуса F . Тогда распределение интенсивности в плоскости анализа будет иметь вид

$$J_f(y) = J_0 \left| F \left\{ T(x), x, \frac{y}{\lambda f} \right\} * \right. \\ \left. * \left(\sqrt{\frac{F}{F-f}} \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi i y^2 F}{\lambda f (F-f)} \right] \right\} \right) \right|^2 \frac{1}{\lambda f}, \quad (9)$$

где $*$ — символ операции свертки [6]. Это распределение в некоторых случаях может значительно отличаться от фурье-образа входного сигнала.

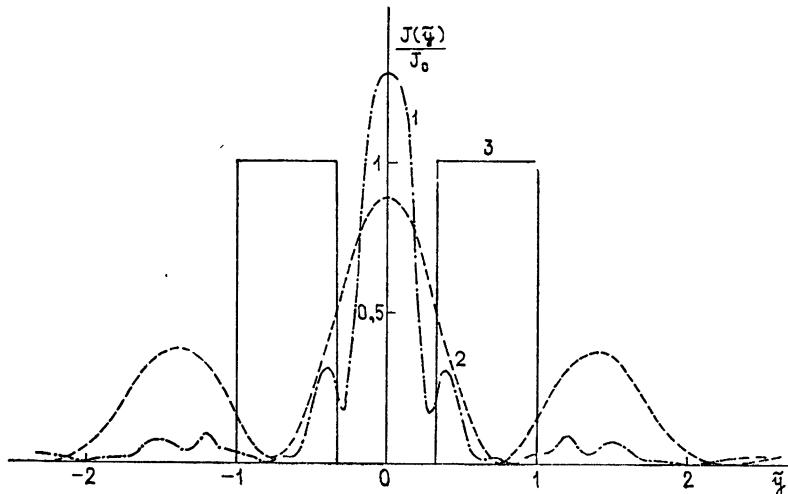


Рис. 6.

В качестве примера на рис. 6 приведено распределение интенсивности поля от решетки с периодом $\frac{4}{3}a$ (кривая 3), помещенной на вход оптического анализатора, в плоскости геометрического фокуса (кривая 2) и экспериментального по ширине (кривая 1) при $p = 1$ для фокусирующей системы.

Как видно из приведенных выше рассуждений, для осуществления неискаженного фурье-преобразования нужно настраивать систему по геометрическому фокусу. Его можно найти следующим образом:

1) по размерам фокусирующей системы и положению одного из экспериментальных фокусов, используя кривые, приведенные на рис. 3;

2) подавая на вход анализатора сигнал, фурье-образ которого можно теоретически рассчитать (например, прямоугольное отверстие), и изменяя продольную настройку прибора, искать распределение интенсивности поля в выходной плоскости, тождественно равное спектру этой структуры.

Если предмет $T(x)$ помещен перед идеальной фокусирующей системой и освещен плоской когерентной волной, то при условии оптического сопряжения

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad (10)$$

(где F — геометрический фокус системы, c — расстояние от предмета до фокусирующей системы, b — расстояние от нее до плоскости наблюдения) в плоскости наблюдения возникает распределение интенсивности

$$J_b(y) = \frac{J_0}{\lambda^2 cb} \left| T \left(-y \frac{c}{b} \right) \exp \left(\frac{\pi i c}{\lambda b^2} y^2 \right) \right|^2, \quad (11)$$

соответствующее распределению прозрачности входной структуры. Если фокусирующая система ограничена диафрагмой размером $2a$, то распределение интенсивности (11) принимает вид

$$J_b(y) = \frac{J_0}{\lambda^2 cb} \left| \left(T \left(-y \frac{c}{b} \right) \exp \left(\frac{\pi i c}{\lambda b^2} y^2 \right) \right) * \frac{\sin \frac{2\pi ay}{\lambda b}}{\frac{2\pi ay}{\lambda b}} \right|^2. \quad (11a)$$

В этом случае искажения, вносимые ограниченностью апертуры, будут определять разрешающую способность системы, что обычно учитывают при ее расчете [1].

Другой вид искажений в получаемом изображении предмета может возникнуть при неправильном определении сопряженной плоскости (расстояние b). Обычно ее положение определяют двумя способами.

1) Определяют экспериментально положение фокуса, а потом расчет системы ведут по формуле (10). Трудности этого метода заключаются в определении фокуса фокусирующей системы, на что указано выше.

2) На вход системы, строящей изображение, помещают точечный источник, и сопряженную ему плоскость находят по максимуму интенсивности или минимальному по ширине отклику за фокусирующей системой. В этом случае для точечного источника интенсивность за ограниченной системой в приближении (3) имеет вид

$$J(q, \tilde{y}) = \frac{J_0}{|1-q|} \left| \int_{-\beta_b \left(1 + \frac{\tilde{y}}{1-q} \right)}^{\beta_b \left(1 - \frac{\tilde{y}}{1-q} \right)} \exp \left(\frac{\pi i}{2} x^2 \right) dx \right|^2, \quad (12)$$

где $\beta_b = \sqrt{p_b \left(\frac{1}{q} - 1 \right)}$, $p_b = \frac{2a^2}{\lambda b}$, а координаты по оси z отчитываются от раскрыва фокусирующей системы.

При сравнении выражения (12) с (2), которое было получено при решении задачи о фокусировке плоской волны ограниченной фокусирующей системой, нетрудно заметить, что нахождение сопряженной плоскости таким методом аналогично определению фокуса фокусирующей системы с приведенным фокусным расстоянием b . В этом случае мы экспериментально найдем другое расстояние b' , которое может значительно отличаться от расстояния b . Если не учитывать этого фактора, то «изображение», полученное в экспериментально найденной сопряженной плоскости $z = b'$, может значительно отличаться от ожидаемого результата, так как распределение интенсивности в этой плоскости

$$J_{b'}(y) = \frac{J_0}{\lambda^2 c^2} \left| \left(T \left(-y \frac{c}{b'} \right) \exp \left(\frac{\pi i c}{b'^2} y^2 \right) \right) * \right|^2$$

$$* \left(\sqrt{\frac{b}{b-b'}} \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi y^2 b}{\lambda b' (b-b')} \right] \right\} \right)^2. \quad (13)$$

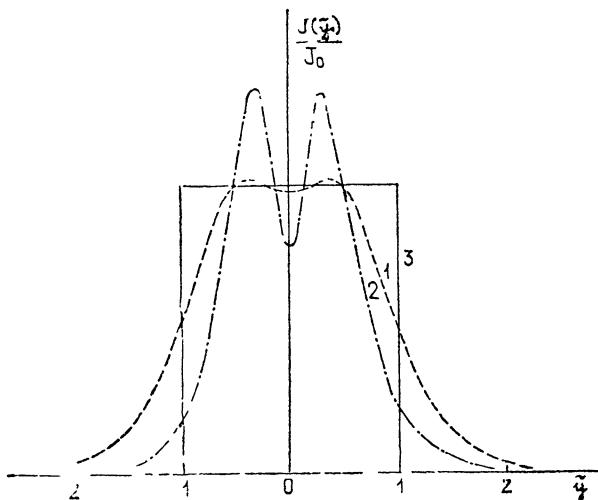


Рис. 7.

Для примера на рис. 7 приведено распределение интенсивности в плоскости b (кривая 1) и в b' (кривая 2) для системы с $p_b = 0,5$, на вход которой подано прямоугольное распределение прозрачности (кривая 3). Избавиться от этого эффекта можно следующим образом. Найти экспериментальное положение b' , а потом при помощи кривой, приведенной на рис. 2, определить истинное положение сопряженной плоскости, положив вместо параметра p параметр p_b . Или, задав на входе системы распределение, вид которого в сопряженной плоскости можно теоретически рассчитать с учетом ограниченности фокусирующей системы по формуле (11 а), искать положение такой плоскости, где распределение интенсивности подобно рассчитанному.

Эффекты, связанные с неправильным экспериментальным определением геометрического фокуса ограниченной фокусирующей системы, оказывают значительное влияние на радиооптические преобразования при малых параметрах p . Особенно это явление характерно для «длинноволновых диапазонов» (акустика, СВЧ), где арсенал средств экспериментального исследования фокусирующих систем меньше, чем в оптике. Только для $p \geq 103$ при определении фокуса по минимальной ширине отклика и для $p \geq 76$ при определении по максимуму интенсивности (с точностью не хуже 1%) можно утверждать, что фокусное расстояние, определенное по экспериментальным критериям, совпадает с истинным.

В данной работе приведено только два примера влияния ошибки неправильного определения фокуса на радиооптические преобразования. Но подобные эффекты могут наблюдаться и в других задачах: нахождение плоскости наблюдения изображения, восстановленного с голограммы, электронная микроскопия и т. п., где параметр p мал.

Одним из возможных методов устранения этого нежелательного явления может быть проведение аналогии между рассматриваемой

задачей и задачей о фокусировке плоской волны, ограниченной фокусирующей системой, как это было сделано в задаче о нахождении сопряженной плоскости.

Автор выражает благодарность Э. И. Гельфер и Н. И. Муравьеву за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л М Сорокин, Основы голограмии и когерентной оптики, изд Наука, М, 1971.
- 2 В. А. Зверев, Радиооптика, изд Сов радио, М, 1975
- 3 Р. Дитчберн, Физическая оптика, изд Наука, М, 1965
- 4 М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М, 1973
- 5 D. A Holmes, Appl. Opt., 11, № 3 (1972)
- 6 Д Гудмен, Введение в фурье-оптику, изд. Мир, М, 1970
- 7 J W. Shergman, IRE Trans on Ant. and Propag., AP-10, № 4, 399 (1962).
- 8 Г С Горелик, Колебания и волны, М, 1959
- 9 Г С Егоров, С Н. Менсов, Физика, Методический сб статей (в печати)

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 февраля 1977 г

THE INFLUENCE OF THE LIMITATION OF FOCUSING SYSTEMS APERTURE ON THE RADIO OPTICAL TRANSFORMATIONS

S N. Mensov

The distribution of the field behind the aperture limited focusing system has been theoretically and experimentally investigated with the aim of error analysis at the experimental definition of its focus. It is shown that due to the nonsymmetric distribution of the field relative to the focal plane this error may considerably influence on the radio optical transformations especially with small apertures of the focusing systems.

УДК 538.311

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ
СРЕДЕ С ЧАСТОТНОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

Ю. С. Бараш

Получены общие выражения для плотности энергии и плотности потока энергии зависящего произвольным образом от времени и координат электромагнитного поля в непоглощающей среде с частотной и пространственной дисперсией. В частном случае, когда в среде распространяется одна монохроматическая волна, полученные результаты переходят в известные ранее выражения. Для случая одновременного распространения двух монохроматических волн получены энергетические характеристики с учетом интерференционных членов.

Соотношения, связывающие некоторые физические величины с диэлектрической проницаемостью вещества, представляют значительный интерес, в особенности, если учесть, что диэлектрическая проницаемость — экспериментально измеримая величина. Как известно, обычно измеряется минимальная часть диэлектрической проницаемости, характеризующая поглощение электромагнитных волн; вещественную часть можно восстановить затем с помощью соотношений Крамерса—Кронига или измерить ее независимо.

Связь между энергетическими характеристиками электромагнитного поля в среде с диэлектрической проницаемостью носит, как известно, довольно специфический характер [^{1–3}]. В тех областях спектра, где существенную роль играет поглощение электромагнитных волн, прямых общих связей между плотностью энергии поля в среде и диэлектрической проницаемостью не существует, и для этого имеются определенные физические основания. Поэтому, чтобы написать выражение для плотности энергии при учете поглощения, нужно, вообще говоря, ввести помимо диэлектрической проницаемости дополнительные характеристизующие среду параметры, появляющиеся при микроскопическом рассмотрении конкретных случаев. Формально же, при макроскопическом подходе, трудность связана с невозможностью отделить в общем случае в соотношении Пойнтинга выражение для энергии поля от выражения для тепловых потерь.

С другой стороны, в тех областях спектра, где поглощением электромагнитных волн можно пренебречь, энергетические характеристики поля в среде непосредственно связаны с диэлектрической проницаемостью этой среды. До последнего времени, как и в первых работах по этому вопросу [^{4, 5}], подобные выражения рассматривались лишь в связи с распространением в диспергирующей среде одной монохроматической волны (см., например, [^{2, 3, 6}]). Однако уже в случае двух когерентных монохроматических волн с частотами Ω_1 и Ω_2 , одновременно распространяющихся в среде, энергетические характеристики (в силу их квадратичной зависимости от амплитуд полей) не сводятся к сумме соответствующих величин для каждой из волн в отдельности, но имеются еще

дополнительные члены, связанные с интерференционными эффектами. Исследование таких членов представляет интерес, так как при наличии дисперсии картина интерференции волн в среде может существенно измениться. Представляет интерес, разумеется, не только указанная выше задача о распространении двух монохроматических волн, но и более общая постановка вопроса об энергетических характеристиках произвольным образом зависящего от времени и координат поля в среде с частотной и пространственной дисперсией. При пренебрежении пространственной дисперсией соответствующее выражение для плотности энергии поля в среде было получено в Приложении к статье [1]. В среде без пространственной дисперсии плотность потока электромагнитной

энергии задается, как известно, вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$. При

учете же пространственной дисперсии среды плотность потока энергии есть сумма двух векторов $\mathbf{S} + \mathbf{S}^{(1)}$, где вектор $\mathbf{S}^{(1)}$ представляет собой дополнительную плотность потока энергии, обусловленную движением частиц. Для монохроматической во времени и пространстве электромагнитной волны усредненный во времени вектор $\mathbf{S}^{(1)}$ был впервые найден в статье [5] (см. также [3, 7]).

Таким образом, если при пренебрежении пространственной дисперсии для плотности энергии поля в среде $W(t, \mathbf{r})$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{r}) &= W_E(t, \mathbf{r}) + W_B(t, \mathbf{r}), \\ \frac{\partial W_E(t, \mathbf{r})}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad W_B(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}^2(t, \mathbf{r})}{8\pi}, \end{aligned} \quad (1)$$

то для пространственно-диспергирующей среды имеем в отличие от (1)

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{\partial W_E(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}^{(1)}(t, \mathbf{r}). \quad (2)$$

Поэтому при учете пространственной дисперсии требуется рассмотреть заново как вопрос о плотности потока энергии поля в среде, так и вывод выражения для плотности энергии поля.

С целью получить указанные выше общие выражения представим величину $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$, фигурирующую в (2), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_1) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r}_1)}{\partial t} &= -\frac{i}{8\pi} \int d\mathbf{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \times \\ &\times [\omega_1 \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \omega_2 \epsilon_{ij}(\omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{r}_2) - \\ &- \frac{i}{8\pi} \int d\mathbf{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] [\omega_1 \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ &+ \omega_2 \epsilon_{ij}(\omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — диэлектрическая проницаемость неоднородной анизотропной среды с частотной и пространственной дисперсией, связывающая спектральные компоненты векторов электрической индукции и электрического поля (см., например, [3]).

При учете пространственной дисперсии, как известно, с помощью диэлектрической проницаемости, вообще говоря, учитываются и магнитные свойства среды. В последнем случае величина $W_E(t, \mathbf{r})$ уже

не является чисто «электрической» частью полной плотности энергии $W(t, \mathbf{r})$, однако, чтобы не выписывать каждый раз член $\mathbf{B}^2(t, \mathbf{r})/8\pi$, мы и при учете пространственной дисперсии выделим его из выражения для $W(t, \mathbf{r})$ (см. (1)), причем для оставшейся части будем по-прежнему использовать обозначение $W_E(t, \mathbf{r})$.

В дальнейшем будет видно, что произведенное в (3) разделение члена $\frac{1}{4\pi} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_1) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r}_1)}{\partial t}$ на два слагаемых и отождествление их с величинами $\frac{\partial W_E(t, \mathbf{r})}{\partial t}$ и $\operatorname{div} \mathcal{S}^{(1)}(t, \mathbf{r})$ в случае непоглощающей среды однозначно, так как только при таком разделении одновременно выполняются очевидные требования о том, чтобы были конечными плотность энергии для периодического во времени поля и вектор $\mathcal{S}^{(1)}$ для поля, периодического по пространственным координатам в случае однородной среды. Помимо этого, разумеется, полученные ниже общие выражения для $W(t, \mathbf{r})$ и $\mathcal{S}^{(1)}(t, \mathbf{r})$ в известных частных случаях приводят к правильным соотношениям. Наконец, нетрудно убедиться в том, что в непоглощающей среде интеграл по объему от второго слагаемого в (3) равен нулю (а при пренебрежении пространственной дисперсией равно нулю само это слагаемое), а значит представление этого члена в виде дивергенции некоторого вектора действительно возможно.

Интегрируя по времени первый член в правой части соотношения (3), получаем искомое общее выражение для плотности энергии электромагнитного поля в диспергирующей среде при произвольной зависимости поля от времени и координат:

$$\begin{aligned} W_E(t, \mathbf{r}_1) = & \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r}_2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \frac{\omega_1 \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \omega_2 \epsilon_{ij}(\omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\omega_1 - \omega_2} E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{r}_2) \times \\ & \times \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для применимости выражения (4) необходимо, чтобы спектральные компоненты поля существенно отличались от нуля лишь в таких областях спектра, где поглощением среды можно пренебречь.

В частном случае однородной среды выражение (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} W_E(t, \mathbf{r}_1) = & \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \iint \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\omega_1 \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{k}) - \omega_2 \epsilon_{ij}(\omega_2, \mathbf{k})}{\omega_1 - \omega_2} \times \\ & \times E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r}_1 - i(\omega_1 - \omega_2)t], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (6)$$

Отметим, что полученные формулы (4), (5) автоматически приводят к правильному ответу для монохроматического поля, и поэтому не требуется, чтобы сначала вычислялась энергия квазимонохроматического поля и лишь затем брался предельный переход к строгой монохроматичности. Действительно, если $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \pi [E_0(\mathbf{r}) \delta(\omega - \Omega) + E_0^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \Omega)]$, то из (4) получаем

$$W_{E_0}^{\Omega}(t, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{16\pi} \int d\mathbf{r}_2 \operatorname{Re} \left[\frac{d(\Omega \epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))}{d\Omega} E_{0i}^*(\mathbf{r}_1) E_{0j}(\mathbf{r}_2) \right] + \\ + \frac{1}{16\pi} \int d\mathbf{r}_2 \operatorname{Re} [\epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \operatorname{Re} [E_{0i}(\mathbf{r}_1) E_{0j}(\mathbf{r}_2) e^{-2i\Omega t}]. \quad (7)$$

В случае однородной среды и монохроматической волны, т. е. если $E_0(\mathbf{r}) = E_0 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})$, $E(\omega, \mathbf{k}) = \pi(2\pi)^3 [E_0 \delta(\omega - \Omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + E_0^* \delta(\omega + \Omega) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)]$, из (7) или непосредственно из (5) следует, что

$$W_{E_0}^{\Omega, \mathbf{k}_1}(t, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\Omega \epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{k}_1))}{d\Omega} E_{0i}^* E_{0j} + \\ + \frac{1}{16\pi} \operatorname{Re} \{ \epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{k}_1) E_{0i} E_{0j} \exp[-2i(\Omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1)] \}. \quad (8)$$

Выражение (8) после усреднения по времени совпадает с известным выражением для средней за период плотности энергии монохроматической волны в диспергирующей среде (см., например, [3]).

Если в среде одновременно распространяются две монохроматические волны с частотами Ω_1 и Ω_2 , т. е. если $E(\omega, \mathbf{r}) = \pi [E_{01}(\mathbf{r}) \delta(\omega - \Omega_1) + E_{01}^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \Omega_1) + E_{02}(\mathbf{r}) \delta(\omega - \Omega_2) + E_{02}^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \Omega_2)]$, то из (4) следует, что в этом случае

$$W_E(t, \mathbf{r}_1) = W_{E_{01}}^{\Omega_1}(t, \mathbf{r}_1) + W_{E_{02}}^{\Omega_2}(t, \mathbf{r}_1) + W_{12}(t, \mathbf{r}_1), \quad (9)$$

где слагаемые $W_{E_{01}}^{\Omega_1}(t, \mathbf{r}_1)$ и $W_{E_{02}}^{\Omega_2}(t, \mathbf{r}_1)$ задаются выражением (7), а интерференционный член имеет следующий вид:

$$W_{12}(t, \mathbf{r}_1) = \frac{1}{16\pi} \int d\mathbf{r}_2 \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\Omega_1 - \Omega_2)t} \left[\frac{\Omega_1 \epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \Omega_2 \epsilon_{ij}(\Omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\Omega_1 - \Omega_2} \times \right. \right. \\ \times E_{02i}^*(\mathbf{r}_1) E_{01j}(\mathbf{r}_2) + \frac{\Omega_1 \epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - \Omega_2 \epsilon_{ij}(\Omega_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\Omega_1 - \Omega_2} \times \\ \times E_{02i}^*(\mathbf{r}_2) E_{01j}(\mathbf{r}_1) \left. \right] \} + \frac{1}{16\pi} \int d\mathbf{r}_2 \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\Omega_1 + \Omega_2)t} \times \right. \\ \times \left[\frac{\Omega_1 \epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \Omega_2 \epsilon_{ij}^*(\Omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\Omega_1 + \Omega_2} E_{02i}(\mathbf{r}_1) E_{01j}(\mathbf{r}_2) + \right. \\ \left. \left. + \frac{\Omega_1 \epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \Omega_2 \epsilon_{ij}^*(\Omega_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}{\Omega_1 + \Omega_2} E_{02i}(\mathbf{r}_2) E_{01j}(\mathbf{r}_1) \right] \right\}. \quad (10)$$

Поскольку плотность энергии квадратично зависит от амплитуд поля, то вполне естественно, что интерференционный член $W_{12}(t, \mathbf{r}_1)$ содержит два слагаемых, одно из которых осциллирует с частотой $\Omega_1 - \Omega_2$, а другое — с частотой $\Omega_1 + \Omega_2$.

При распространении одной монохроматической волны обычно интересует лишь постоянное во времени слагаемое в (8), поэтому производят усреднение по высокой частоте Ω (скажем, оптического диапазона частот). Отметим в этой связи для случая распространения двух волн, что если их частоты одного порядка и $|\Omega_1 - \Omega_2| \ll \Omega_1 + \Omega_2$, то первое слагаемое в (10) будет изменяться со временем достаточно медленно и после усреднения по высокой частоте останется неизменным.

Выражение (7) описывает плотность энергии монохроматической волны в среде. Фактически, волна всегда является квазимонохроматической, т. е. представляет собой узкий «пакет» волн, и если этот «пакет» имеет все же не очень малую ширину линии $\Delta\omega$, то может возникнуть необходимость учесть поправки к формуле (7). Мы не будем здесь приводить соответствующие выражения, их вывод аналогичен тому, как это делается в Приложении к статье [1] при пренебрежении пространственной дисперсией среды.

Уже упоминалось, что $W_E(t, \mathbf{r})$ есть лишь часть плотности энергии, а полная плотность энергии $W(t, \mathbf{r}) = W_E(t, \mathbf{r}) + \frac{B^2(t, \mathbf{r})}{8\pi}$. При рассмотрении полной энергии электромагнитного поля в среде, $W(t) = \int d\mathbf{r} W(t, \mathbf{r})$, удобно выразить магнитную индукцию через электрическое поле с помощью уравнений Максвелла. При отсутствии внешних источников поля получаем тогда после несложных преобразований

$$W(t) = \frac{1}{16\pi} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\omega_1^2 \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \omega_2^2 \epsilon_{ij}(\omega_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\omega_1 - \omega_2} \times \\ \times \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2} E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{r}_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}. \quad (11)$$

При рассмотрении стационарных флюктуаций электромагнитного поля, когда выполняется соотношение

$$\langle E_i^*(\omega_2, \mathbf{r}_1) E_j(\omega_1, \mathbf{r}_2) \rangle = 2\pi \langle E_i(\mathbf{r}_1) E_j(\mathbf{r}_2) \rangle_{\omega_1} \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (12)$$

из (11) получаем для усредненной энергии флюктуационного поля в непоглощающей среде выражение

$$\langle W(t) \rangle = \frac{1}{8\pi} \iint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi\omega} \frac{d(\omega^2 \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))}{d\omega} \langle E_i(\mathbf{r}_1) E_j(\mathbf{r}_2) \rangle_{\omega}. \quad (13)$$

Перейдем теперь к рассмотрению плотности потока энергии, которое проведем для случая однородной среды. Преобразуем с учетом (2) второе слагаемое в (3), используя пространственные фурье-компоненты для полей. Произведем затем замену переменных интегрирования, учитывая, что в силу вещественности полей $E(t, \mathbf{r})$ и $D(t, \mathbf{r})$ выполняются соотношения $\epsilon_{ij}(-\omega, -\mathbf{k}) = \epsilon_{ij}^*(-\omega, \mathbf{k})$, $E(-\omega, -\mathbf{k}) = E^*(-\omega, \mathbf{k})$ и, кроме того, в непоглощающей среде $\epsilon_{ij}^*(-\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. В результате получаем искомое выражение для дополнительной плотности потока энергии в непоглощающей однородной анизотропной среде с частотной и пространственной дисперсией при произвольной зависимости поля от времени и координат:

$$S^{(1)}(t, \mathbf{r}_1) = -\frac{1}{8\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6} \omega_1 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ \times \frac{\epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{k}_1) - \epsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{k}_2)}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} E_i^*(\omega_2, \mathbf{k}_2) E_j(\omega_1, \mathbf{k}_1) \times \\ \times e^{i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\cdot \mathbf{r}_1}. \quad (14)$$

Отметим, что при выводе формулы (14) преобразования проведены таким образом, чтобы подынтегральное выражение не имело особенностей при $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. Это позволяет непосредственно использовать полу-

ченный результат не только для квазипериодических в пространстве полей, но и для случая строго периодического поля.

В частном случае монохроматической волны, когда $E(\omega, \mathbf{k}) = \pi(2\pi)^3 [E_0 \delta(\omega - \Omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + E_0^* \delta(\omega + \Omega) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)]$, из (14) получаем

$$\begin{aligned} S_{E_0}^{(1)\Omega, k_0}(t, r_1) = & -\frac{\Omega}{16\pi} \frac{\partial \epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}_0} E_{0i}^* E_{0j} - \\ & -\frac{\Omega \mathbf{k}_0}{32\pi k_0^2} \operatorname{Re} \{ [\epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{k}_0) - \epsilon_{ij}(\Omega, -\mathbf{k}_0)] E_{0i} E_{0j} e^{-2i\Omega t + 2i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} \}. \end{aligned} \quad (15)$$

При усреднении по частоте Ω , когда второй член в (15) равен нулю, полученное выражение совпадает с известным ранее (см. [5, 7]). Интересно отметить, что в негиротропной среде второй член в (15) равен нулю строго и никаких осцилляций вообще не существует. При наличии же гиротропии осцилляции происходят в направлении волнового вектора \mathbf{k}_0 , и в результате вектор $S_{E_0}^{(1)\Omega, k_0}(t, r_1)$ колебается около направления $-\frac{\partial \epsilon_{ij}(\Omega, \mathbf{k}_0)}{\partial \mathbf{k}_0} E_{0i}^* E_{0j}$, осциллируя при этом и по величине. Отметим, что в гиротропной среде, как известно, осциллирует также и вектор Пойнтинга (см. [2]).

Если в среде одновременно распространяются две волны и, значит, $E(\omega, \mathbf{k}) = 2(2\pi)^3 [E_{01} \delta(\omega - \Omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + E_{01}^* \delta(\omega + \Omega_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) + E_{02} \delta(\omega - \Omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) + E_{02}^* \delta(\omega + \Omega_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2)]$, то из (14) получаем

$$S^{(1)}(t, r_1) = S_{E_{01}}^{(1)\Omega_1, k_1}(t, r_1) + S_{E_{02}}^{(1)\Omega_2, k_2}(t, r_1) + S_{12}^{(1)}(t, r_1), \quad (16)$$

где первые два слагаемых задаются выражением (15), а последний член имеет вид

$$\begin{aligned} S_{12}^{(1)}(t, r_1) = & -\frac{1}{16\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} [\Omega_1 [\epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{k}_1) - \epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{k}_2)] + \right. \\ & + \Omega_2 [\epsilon_{ij}(\Omega_2, \mathbf{k}_1) - \epsilon_{ij}(\Omega_2, \mathbf{k}_2)]] E_{01i} E_{02i}^* e^{-i(\Omega_1 - \Omega_2)t + i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_1} \Big\} - \\ & -\frac{1}{16\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2} [\Omega_1 [\epsilon_{ij}(\Omega_1, \mathbf{k}_1) - \epsilon_{ij}(\Omega_1, -\mathbf{k}_2)] E_{01j} E_{02i} + \right. \\ & \left. + \Omega_2 [\epsilon_{ij}(\Omega_2, \mathbf{k}_2) - \epsilon_{ij}(\Omega_2, -\mathbf{k}_1)] E_{01i} E_{02j}] e^{-i(\Omega_1 + \Omega_2)t + i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_1} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, интерференционный член состоит из двух векторов, коллинеарных направлениям $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. Л. Гинзбургу за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ю С Бараш, В Л Гинзбург, УФН, 118, 523 (1976).
- 2 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967
- 3 В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965
- 4 С. М. Рытов, ЖЭТФ, 17, 930 (1947)
- 5 М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 26, 680 (1954).

6. Л. Д. Ландау, Е М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат,
М., 1957
7 В. Л. Гинзбург, Изв. вузов — Радиофизика, 5, 473 (1962).

Институт земного магнетизма, ионосфера
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.,
после доработки
9 июня 1977 г.

ENERGETIC CHARACTERISTICS FOR THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN AN NONABSORBING MEDIUM WITH THE FREQUENCY AND SPACE DISPERSION

Yu. S. Barash

General expressions have been obtained for the energy density and the energy flux density in the electromagnetic field dependent arbitrary on the time and coordinates in an nonabsorbing medium with the frequency and space dispersion. In a particular case when a monochromatic wave propagates in the medium the results obtained are transformed to the known earlier expressions. Energetic characteristics are obtained taking into account the interference terms for the case of the simultaneous propagation of two monochromatic waves.

УДК 621.371 25

КОМПЛЕКСНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ЛУЧЕВАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАУССОВЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. И. Орлов, А. П. Аютин

На основе аппарата комплексных пространственно-временных лучей рассматриваются задачи распространения плоского и сферического гауссовых радиоимпульсов в однородной и неоднородной диспергирующих средах (в частности, плазме). Исследована геометрия основных и краевых (дифракционных) комплексных пространственно-временных лучей. Получены и исследованы асимптотические выражения для полей гауссовых импульсов в приближениях комплексных пространственно-временных геометрической оптики, геометрической теории дифракции, каустической асимптотики, а также в параксиальном (квазигармоническом) приближении. Показана адекватность методов геометрической оптики и геометрической теории дифракции, что обеспечивает равномерность полученных асимптотик в ближней, промежуточной и дальней зонах гауссова импульса. Проведено сравнение и показано совпадение полученных результатов с асимптотиками точных решений волнового уравнения на основе спектрального подхода.

Развитие асимптотических методов [1–8] для расчета полей радиоимпульсов в диспергирующих средах (в частности, плазме) в последнее время связано с перенесением подходов, используемых в пространственных задачах дифракции и распространения волн на временную область. Как известно [9–13], распространение гауссовых волновых пучков в пространстве эффективно описывается в терминах комплексной геометрической оптики (ГО). Аналогично этому для расчета поля гауссовых радиоимпульсов в диспергирующей среде может быть использована комплексная пространственно-временная лучевая теория, чему и посвящена данная статья. Отметим, что некоторые аспекты комплексной пространственно-временной геометрической оптики уже обсуждались в литературе [14, 15]. Однако ряд важных вопросов, относящихся к кинематике распространения гауссовых радиоимпульсов в однородной и особенно в неоднородной диспергирующей среде, оказался изученным недостаточно. В частности, не проводился сравнительный анализ поведения семейства лучей ГО и лучей геометрической теории дифракции (ГТД). Поэтому не были исследованы и области применимости методов пространственно-временных ГО и ГТД в случае гауссова радиоимпульса.

Как показано в данной работе, приближения комплексных ГО и ГТД для гауссовых радиоимпульсов совпадают, в результате чего единое лучевое приближение оказывается применимым (в отсутствие каустик) вдоль всей трассы распространения импульса. При образовании пространственно-временной комплексной каустики (в неоднородной среде, а для ЧМ-радиоимпульса и в однородной среде) для расчета поля гауссовых радиоимпульсов используется комплексная пространственно-временная каустическая асимптотика, которая является модификацией лучевого приближения.

Отметим, что распространение гауссовых радиоимпульсов в диспергирующих средах на основе спектрального подхода (метода Фурье) рассматривалось в ряде работ, в частности в [4, 16–19]. Как показано ниже, приближение комплексной пространственно-временной ГТД (ГО) и каустическая асимптотика в областях их применимости совпадают с асимптотикой точных решений (интегралов Фурье).

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ЛУЧЕВОГО МЕТОДА

Будем считать, что поле E произвольной нестационарной волны в неоднородной диспергирующей среде удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \frac{\omega_p^2(\mathbf{r})}{c^2} E = 0, \quad (1)$$

где c — скорость света в вакууме, $\omega_p(\mathbf{r})$ — критическая частота среды. Пусть известно начальное пространственно-временное распределение поля нестационарной волны $E(\mathbf{R}_0) = U_0(\Gamma) \exp[i\varphi_0(\Gamma)]$ на некоторой исходной гиперповерхности Σ_0 , векторное параметрическое уравнение которой в пространстве-времени имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\Gamma)$, $t = t_0(\Gamma)$ или $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\Gamma)$, где $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{R}_0 \equiv (\mathbf{r}_0, t)$, $\Gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Предполагая, что выполняются обычные условия медленности пространственно-временного изменения поля и параметров среды, поле волны E вне исходной гиперповерхности Σ_0 можно найти с помощью пространственно-временного лучевого метода [1–7]. Для этого «выпустим» из каждой точки Σ_0 лучи — решения характеристической системы уравнений [2]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla_{\mathbf{k}} \Omega, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \Omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Omega, \quad (2)$$

где $\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$ — локальное дисперсионное уравнение, которое в случае волнового уравнения (1) может быть представлено в следующем виде: $\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2(\mathbf{r})} \equiv \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Используя это явное выражение для функции $\Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, уравнения лучей (2) можно записать в канонической гамильтоновой форме

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c^2}{\omega_s(\Gamma)} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{1}{2\omega_s(\Gamma)} \nabla \omega_p^2(\mathbf{r}) \quad (3a)$$

или в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2\omega_s^2(\Gamma)} \nabla \omega_p^2(\mathbf{r}). \quad (3b)$$

Здесь учтено, что согласно (2) в стационарной среде $\omega = \text{const}$ на каждом луче и определяется начальными условиями на Σ_0 : $\omega = \omega_s(\Gamma)$. Границные условия для уравнений луча (3) имеют вид $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0(\Gamma)$, $\mathbf{k}(t_0) = \mathbf{k}_0(\Gamma) = \frac{1}{c} \omega_s(\Gamma) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Big|_{t=t_0}$, где $\mathbf{k}_0(\Gamma)$ и $\omega_s(\Gamma)$ находятся из системы уравнений

$$\mathbf{k}_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \gamma_j} + \omega_s \frac{\partial t_0}{\partial \gamma_j}, \quad c^2 k_0^2 = \omega_s^2 - \omega_p^2(r_0),$$

которые следуют из начального условия для поля $E(\mathbf{R}_0)$ на Σ_0 и из равенств $\mathbf{k} = \nabla \varphi$, $\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Если решение уравнения лучей (3) найдено и имеет вид $\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)$, то фаза φ нестационарной волны, удовлетворяющая пространственно-временному уравнению эйконала (дисперсионному уравнению):

$$c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_p^2(\mathbf{r}) \equiv c^2 (\nabla \varphi)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \omega_p^2(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

находится с помощью квадратур:

$$\varphi(t, \Gamma) = \varphi_0(\Gamma) - \frac{1}{\omega_s(\Gamma)} \int_{t_0}^t \omega_p^2[\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)] dt. \quad (5)$$

Амплитуда поля U , являющаяся решением пространственно-временного уравнения переноса

$$2 \left(\nabla U \nabla \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + U \left(\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (6)$$

определяется при этом выражением

$$U(t, \Gamma) = U_0(\Gamma) \left[\frac{D(t_0, \Gamma)}{D(t, \Gamma)} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где $D(t, \Gamma) = \left| \frac{\partial \rho}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \rho}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \rho}{\partial \gamma_3} \right|$ — якобиан перехода от лучевых координат $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ к пространственным \mathbf{r} , который физически пропорционален сечению элементарной трубы пространственно-временных лучей $\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)$.

В задаче об излучении источника нестационарной волны решение уравнения переноса (6) для амплитуды поля имеет вид

$$U(t, \Gamma) = f_0(\Gamma) [D(t, \Gamma)]^{-1/2}, \quad (8)$$

где $D(t, \Gamma)$ дается тем же выражением, что и в (7), а лучевые координаты $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ характеризуют направление выхода луча $\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)$ из источника. Функция $f_0(\Gamma)$ в (8) определяется аналогично пространственному случаю [20, 21] из принципа локальности, который требует, чтобы в пределе малой окрестности источника в неоднородной среде выражение (8) совпадало с решением задачи об излучении точечного источника в соответствующей однородной среде.

Совместно с уравнением лучей $\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)$ формулы (5), (7), (8) описывают поле нестационарной волны $E(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$ в параметрической форме. Явная зависимость поля от \mathbf{r}, t может быть найдена исключением из (5), (7), (8) лучевых координат $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, для чего из уравнения луча $\mathbf{r} = \rho(t, \Gamma)$ следует найти все решения $\Gamma = \Gamma_j(\mathbf{r}, t)$. Тогда полное поле равно сумме полей (5), (7), (8) отдельных лучей, проходящих через точку наблюдения \mathbf{r}, t и соответствующих различным Γ_j : $E = \sum_j U_j \exp(i\varphi_j)$.

Если аналогично пространственному случаю [9] допустить существование комплексных решений уравнения (3) пространственно-временных

лучей (3), соответствующих комплексным лучевым координатам Γ то можно прийти к комплексной пространственно-временной ГО (5), (7), (8), которая существенно расширяет возможности лучевого метода. Очевидно, что комплексные пространственно-временные лучи определяют поле нестационарной волны в области каустической тени, в средах с потерями, а также при комплексном значении начальной фазы поля. Последняя ситуация как раз и возникает при распространении гауссовых радиоимпульсов в диспергирующей среде без потерь.

2. ГАУССОВ РАДИОИМПУЛЬС В ОДНОРОДНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Пусть в некотором начальном сечении $z = 0$ однородной диспергирующей среды поле плоского гауссова радиоимпульса равно

$$\begin{aligned} E_0(t) &= \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2} - i\omega_0 t\right) = \\ &= \exp\left[-i\left(\omega_0 t - i\frac{t^2}{2\tau^2}\right)\right] \equiv \exp[i\varphi_0(t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (9) начальное распределение фазы при $z = 0, t = \eta$ является комплексным: $\varphi_0(\eta) = -\omega_0\eta + i\eta^2/2\tau^2$. Отсюда находим начальное значение частоты $\omega_s = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} = \omega_0 - i\eta\tau^{-2} \equiv \omega_s(\eta)$, которое так же, как и $\varphi_0(\eta)$, является комплексным и сохраняется неизменным на каждом пространственно-временном луче (3).

Решение уравнений лучей (3б) при $\omega_p = \text{const}$ имеет вид

$$z = c(t - \eta)\sqrt{1 - \omega_p^2 \omega_s^{-2}(\eta)} = v_{rp}(\omega_s)(t - \eta) \equiv z_{\text{осн}}(t, \eta), \quad (10)$$

где $v_{rp}(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \omega_p^2 \omega^{-2}}$ — локальная групповая скорость импульса на текущей частоте ω . Выражение (10) описывает семейство основных (геометрооптических) [5–8] комплексных пространственно-временных лучей $z = z_{\text{осн}}(t, \eta)$, где η — параметр семейства, определяющий физически время выхода луча из начального сечения $z = 0$. Величину η удобно выбрать в качестве лучевой координаты.

Амплитуда поля радиоимпульса согласно формуле ГО (7) определяется сечением элементарной трубы лучей (10): $D(t, \eta) = \frac{\partial}{\partial\eta} z_{\text{осн}}(t, \eta)$.

Поэтому поле плоского гауссова радиоимпульса (9) при $z \geq 0$ в лучевом приближении (5), (7) равно

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \left\{ \frac{D(t = \eta, \eta)}{D(t, \eta)} \right\}^{1/2} \exp\left[i\varphi_0(\eta) - i\frac{\omega_p^2}{\omega_s}(t - \eta)\right] = \\ &= \left(1 + i\frac{z}{z_s}\right)^{-1/2} \exp\left[i\left(\frac{z}{c}\sqrt{\omega_s^2 - \omega_p^2} - \omega_s t\right) + \frac{\eta^2}{2\tau^2}\right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} z_s &= \tau^2 v_{rp}^2(\omega_s) \left[\frac{d}{d\omega} v_{rp}(\omega_s) \right]^{-1} = c\tau^2 \omega_p^2 (\omega_s^2 - \omega_p^2)^{3/2}, \\ \omega_s &= \omega_0 - i\eta\tau^{-2}, \end{aligned} \quad (12)$$

а $\eta = \eta(z, t)$ — корень уравнения лучей (10) при заданных координатах

(z, t) точки наблюдения. Согласно (10) лучевая координата η является комплекснозначной функцией z, t^* . Формула (11) описывает дисперсионные искажения гауссова радиоимпульса в однородной диспергирующей среде (плазме) в приближении комплексной пространственно-временной ГО.

В «параксиальном» («малоугловом» или квазигармоническом) приближении, когда $|\eta| \ll \omega_0 \tau^2$ и справедливо приближение френелевской дифракции**, из (10) можно найти явное выражение для комплексной лучевой координаты

$$\eta \approx \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \left(1 + i \frac{z}{z_0} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где $z_0 = \tau^2 v_0^2 \frac{d\omega_0}{dv_0} = c \tau^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_p^2)^{3/2}$, а $v_0 \equiv v_{rp}(\omega_0)$ — групповая

скорость импульса на несущей частоте ω_0 . В результате с учетом (13) поле (11) гауссова импульса определяется как явная функция координат

$$E(z, t) = \left(1 + i \frac{z}{z_0} \right)^{-1/2} \exp \left[-i \omega_0 t + i \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} - \frac{1}{2 \tau^2} \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \left(1 + i \frac{z}{z_0} \right)^{-1} \right]. \quad (14)$$

Область применимости параксиального приближения (14) дается неравенствами $\left| t - \frac{z}{v_0} \right| \ll \omega_0 \tau^2$ при $t \ll \omega_0 \tau^2$ и $\left| t - \frac{z}{v_0} \right| \ll t$ при $t \gg \omega_0 \tau^2$ или равносильными неравенствами $|z - v_0 t| \ll v_0 \omega_0 \tau^2$ при $z \ll v_0 \omega_0 \tau^2$ и $|z - v_0 t| \ll z$ при $z \gg v_0 \omega_0 \tau^2$. Указанные условия определяют границы ближней и дальней зон гауссова импульса в параксиальном приближении. В частности, при $z \ll v_0 \omega_0 \tau^2$ (ближняя или прожекторная зона импульса) формула (14) описывает распространение неискаженного гауссова радиоимпульса с групповой скоростью $v_0 = v_{rp}(\omega_0)$ и соответствует приближению вещественной пространственно-временной ГО.

Покажем, что полученные выражения (11), (14) совпадают с асимптотикой точного решения волнового уравнения (1)***

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp [i\varphi(z, t, \omega, \eta)], \quad (15)$$

где

$$\varphi(z, t, \omega, \eta) = k(\omega)z + \eta(\omega - \omega_0) - \omega t + i \frac{\eta^2}{2\tau^2}, \quad (16)$$

* Уравнение луча (10) дает, вообще говоря, четыре комплексных корня $\eta_j(z, t)$. В решении (11) следует использовать значение η_j , соответствующее минимальной величине (правило «отбора» комплексных пространственно-временных лучей, аналогичное пространственному случаю [9]).

** При этом амплитуда импульса удовлетворяет параболическому уравнению [4, 25] в приближенно-лучевых координатах

*** Бесконечный верхний предел интеграла по η в (15) в соответствии с принципом причинности может быть заменен на конечный $\eta = t$. Это, естественно, не отражается на результате асимптотического вычисления интеграла, ибо, как показано в [5], граничная точка $\eta = t$ не дает дополнительного вклада в асимптотику интеграла типа (15).

а $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ — локальное волновое число на частоте ω . Перевальные точки двукратного интеграла (15) определяются условиями

$$\varphi'_\omega \equiv \eta + z[v_{rp}(\omega)]^{-1} - t = 0, \quad \varphi'_\tau \equiv \omega - (\omega_0 - i\eta\tau^{-2}) = 0, \quad (17)$$

которые приводят к уравнению (10) для семейства комплексных основных пространственно-временных лучей. Учитывая (17) и вычисляя интегралы (15) при $\omega_0\tau \gg 1$ с помощью двумерного метода перевала, получим выражение, совпадающее с приближением (11) пространственно-временной ГО, которая описывает обычно [5-7] поле лишь в ближней зоне импульса.

Асимптотика поля радиоимпульса в дальней зоне находится [2-4] в результате асимптотического вычисления интеграла Фурье, который аналогично (15) является точным решением задачи:

$$E(z, t) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\psi(z, t, \omega)], \quad (18)$$

где

$$\psi(z, t, \omega) = k(\omega)z - \omega t + i\frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_0)^2. \quad (19)$$

Стационарные частоты $\omega = \omega_l(z, t)$ интеграла (11) удовлетворяют условию $\varphi'_\omega = 0$, откуда следует уравнение

$$z = v_{rp}(\omega_l)[t - i\tau^2\omega_l - \omega_0] \equiv z_{rp}(t, \omega_l). \quad (20)$$

Это уравнение соответствует краевым (дифракционным) лучам [5-8], которые, очевидно, являются комплексными для бесконечного гауссова радиоимпульса.

Применяя метод перевала для вычисления интеграла (18), получим формулу комплексной пространственно-временной ГТД для гауссова радиоимпульса, которая и определяет асимптотику поля в дальней зоне:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \tau[-i\psi''_\omega(\omega_l)]^{-1/2} \exp[i\psi(z, t, \omega_l)] = \\ &= \left(1 + i\frac{z}{z_l}\right)^{-1/2} \exp[i\psi(z, t, \omega_l)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь z_l определяется формулой (12) для z_s , в которую вместо ω_s следует подставить $\omega_l : z_l \equiv z_s(\omega_s \rightarrow \omega_l)$.

Нетрудно видеть, что выражение (21) для поля краевых лучей совпадает с приближением ГО (11) для поля основных лучей*. В частности, выразив η через ω в формуле (10), находим, что уравнения комплексных основных (10) и краевых (20) лучей совпадают. Этим важным свойством гауссова импульса и можно объяснить тот факт, что лучевое приближение (11) оказывается справедливым как в ближней (основные лучи), так и в дальней (краевые лучи) зонах радиоимпульса. В этом смысле решение (11) является равномерным асимптотическим представлением поля плоского гауссова радиоимпульса в однородной диспергирующей среде. Из инвариантности выражений (15)-(20) сле-

* Математически это связано с тем, что асимптотика спектра гауссова радиоимпульса (2) при $\omega t \gg 1$ совпадает с его точным выражением,

дует, что сделанный вывод справедлив в случае произвольной диспергирующей среды с законом дисперсии $k = k(\omega)$, $k(\omega) = \frac{\omega}{c} V \epsilon(\omega)$.

Следует отметить, что параксиальное приближение (14) совпадает с локальной асимптотикой точного решения (18), если в последнем использовать разложение [4] фазовой функции ψ в ряд Тейлора вблизи частоты $\omega = \omega_0$:

$$\psi = \psi(\omega_0) + \psi'_{\omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \psi''_{\omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + O[(\omega - \omega_0)^3].$$

Это разложение по существу соответствует использованию метода возмущений в ГО, который оказывается справедлив для анализа лишь ограниченной (центральной, $|\eta| \ll \omega_0 \tau^2$) части гауссова импульса (см. [4, 17]).

3. СФЕРИЧЕСКИЙ ГАУССОВ РАДИОИМПУЛЬС В НЕОДНОРОДНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Рассмотрим распространение сферического гауссова радиоимпульса в одномерно неоднородной диспергирующей среде с монотонно возрастающей зависимостью $\omega_p(z) \geq 0$ при $z \geq 0$. Поле такого импульса удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \frac{\omega_p^2(z)}{c^2} E = -E_0(t) \frac{1}{r} \delta(r) \delta(z) \delta(\varphi), \quad (22)$$

где r, z, φ — цилиндрические координаты, а $E_0(t)$ — начальная форма (9) гауссова импульса. Для простоты положим ниже $\omega_p(0) = 0$.

Уравнения лучей (3) в рассматриваемом случае интегрируются в квадратурах. При этом семейство комплексных основных пространственно-временных лучей определяется при $z \geq 0$ уравнениями

$$r = c(t - \eta) \sin \theta, \quad t = \eta + \frac{\sin \theta}{c} \left(\int_0^{z_n} \mp \int_z^{z_n} \right) \frac{\omega_s dz}{\sqrt{\omega_s^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)}} \equiv \\ \equiv \eta + \frac{\sin \theta}{c} \xi(z, \omega_s, \theta). \quad (23)$$

Здесь $\omega_s = \omega_0 - i \eta \tau^{-2}$, z_n — координата точки поворота луча, удовлетворяющая уравнению $\omega_p(z_n) = \omega_s(\eta)$, $\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{dr}{dz} \right)_{z=0}$ — угол выхода

луча из источника, η — время, определяющее момент выхода луча. Верхний или нижний знак в (23) берется соответственно до или после точки поворота, т. е. при $t \leq t_n$ ($r \leq r_n$) или $t > t_n$ ($r > r_n$). Величины θ и η удобно выбрать в качестве лучевых координат точки наблюдения $\{r, z, t\}$.

Для определения амплитуды поля радиоимпульса в приближении ГО (8) вычислим величину якобиана $D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \varphi, \eta)}$, который вследствие осевой симметрии задачи равен $D = r \frac{\partial(r, z)}{\partial(\theta, \eta)}$. Дифференцируя уравнения лучей (23), найдем

$$D = \mp \frac{cr}{\omega_s} \sqrt{\omega_s^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)} L, \quad (24)$$

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} (\xi \sin \theta) - i \frac{r}{c \tau^2} \frac{\partial}{\partial \omega_s} (\xi \cos \theta),$$

где величина $\xi = \xi(z, \omega_s, \theta)$ определяется выражением (23). Функция $f_0(\Gamma)$ в формуле ГО (8), как это отмечалось при обсуждении выражения (8), выбирается из предельного условия $E \rightarrow \frac{1}{4\pi R} E_0(t)$ при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow 0$, откуда с учетом выражений (8), (24), (9) и условия $\omega_p(0) = 0$ получим

$$f_0 = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi R} |D|^{-1/2} \right\} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{c \sin \theta}. \quad (25)$$

Эйконал волны определяется формулой (5), из которой с учетом уравнений лучей (23) получим

$$\varphi = \varphi_0(\eta) - \frac{1}{c} \left(\int_0^{z_n} \mp \int_z^{z_n} \right) \frac{\omega_p^2(z) dz}{\sqrt{\omega_s^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)}} \equiv \varphi(z, t, \eta, \theta), \quad (26)$$

где $\varphi_0(\eta)$ — комплексная фаза гауссова импульса (9).

В результате поле сферического гауссова радиоимпульса в приближении комплексной пространственно-временной ГО (5), (8) определяется по формуле

$$E(r, z, t) = \sum_j \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{rL}{\omega_s \sin \theta_j} \sqrt{\omega_s^2 \cos^2 \theta_j - \omega_p^2(z)} \right\}^{-1/2} \times \\ \times \exp \left[i\varphi(z, t, \eta_j, \theta_j) \pm i\frac{\pi}{4} \right] \equiv \sum_j U_j \exp(i\varphi_j), \quad (27)$$

где величины L и φ определяются формулами (24), (26); лучевые координаты $\theta = \theta_j(r, z, t)$ и $\eta = \eta_j(r, z, t)$ находятся из уравнений лучей ГО (23). Суммирование в (27) проводится по лучам, проходящим через точку наблюдения $\{r, z, t\}$ и имеющим, в соответствии с указанным в разд. 2 правилом «отбора», минимальные значения $\text{Im } \varphi_j > 0^*$.

Формула (27) комплексной пространственно-временной ГО в неоднородной диспергирующей среде в общем случае не дает равномерной асимптотики поля. Это связано с образованием комплексной пространственно-временной каустики, влияние которой может быть существенным и на плоскости вещественных координат z, t **. Положение комплексной каустики лучей (26) определяется условием $L = 0$, которое при переходе к гармонической волне ($\tau \rightarrow \infty$) совпадает с обычным условием $\frac{dr}{d\theta} = 0$ [23]. В окрестности каустики, как обычно, лучевое приближение (27) несправедливо.

Равномерная асимптотика поля гауссова импульса при наличии

* Отметим, что фактическое исследование лучевой картины с целью определения числа комплексных лучей, проходящих через точку наблюдения, представляет в общем случае сложную самостоятельную задачу [23], которая в данной работе не рассматривалась.

** Как следует из (23), при $\eta \rightarrow 0$ ($\omega_s \rightarrow \omega_0$) комплексный луч (23) становится вещественным и касается каустики в вещественной точке $z = z_k$, определяемой условием $\omega_p(z_k) = \omega_0$. Иначе говоря, комплексная каустика пересекает вещественную плоскость z, t в вещественной точке $z = z_k$. Кроме того, при $\tau \rightarrow \infty$, когда происходит переход от импульса (2) к гармоническому полю, каустика становится вещественной всюду.

неособой комплексной каустики дается формулой комплексной пространственно-временной каустической асимптотики, аналогичной [24]:

$$E(r, z, t) = [(-\zeta)^{1/4} (iU_1 + U_2) v(-\zeta) + i(-\zeta)^{-1/4} \times \\ \times (iU_1 - U_2) v'(-\zeta)] \exp \left[i \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \right], \quad (28)$$

где $\zeta = \left[\frac{3}{4} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^{2/3}$, $U_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — амплитуды и фазы (27) двух комплексных пространственно-временных лучей (23), приходящих в точку наблюдения $\{r, z, t\}$, $v(-\zeta)$ — функция Эйри комплексного аргумента ζ , $v'(-\zeta)$ — ее производная. При этом считается, что на каустике сливаются только два комплексных луча, и, следовательно, на каустике $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\zeta = 0$. Вдали от каустики решение (28) асимптотически переходит в лучевую формулу (27).

Не останавливаясь подробно, отметим, что приближения комплексных пространственно-временных ГО (27) и каустической асимптотики (28) совпадают с асимптотикой точного решения волнового уравнения (22), которая может быть представлена в виде

$$E(r, z, t) = \frac{e^{i(\pi/4)}}{8\pi^2 \sqrt{2\pi r c}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} d\theta \times \\ \times \frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{\sqrt[4]{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)}} [\exp(i\varphi_I) - i \exp(i\varphi_{II})], \quad (29)$$

где

$$\varphi_{I, II} = \frac{\omega}{c} r \sin \theta + \omega(\eta - t) - \omega_0 \eta + i \frac{\eta^2}{2\tau^2} + \\ + \frac{1}{c} \left(\int_0^{z_n} \mp \int_z^{z_n} \right) \sqrt{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)} dz.$$

При этом перевальные точки интеграла (29), определяемые условиями $\frac{\partial}{\partial \omega} \varphi_{I, II} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi_{I, II} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_{I, II} = 0$, как обычно, приводят к уравнениям лучей ГО (23), а результат применения метода перевала совпадает с формулой ГО (27). Применение же модификации метода перевала в случае двух произвольно расположенных седловых точек [22] приводит к формуле комплексной каустической асимптотики (28).

При асимптотическом вычислении интеграла Фурье, который аналогично (29) является асимптотикой точного решения уравнения (22) и имеет вид

$$E(r, z, t) = \frac{\tau e^{i(\pi/4)}}{8\pi^2 \sqrt{cr}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} d\theta \frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{\sqrt[4]{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)}} \times \\ \times [\exp(i\psi_I) - i \exp(i\psi_{II})], \quad (30)$$

где

$$\psi_{I, II} = \frac{\omega}{c} r \sin \theta - \omega t + i \frac{1}{2} \tau^2 (\omega - \omega_0)^2 + \\ + \frac{1}{c} \left(\int_0^{z_n} \mp \int_z^{z_n} \right) \sqrt{\omega^2 \cos^2 \theta - \omega_p^2(z)} dz,$$

с помощью метода перевала получим приближение комплексной пространственно-временной ГТД. Аналогично случаю однородной среды нетрудно показать, что получающееся приближение ГТД совпадает с формулой ГО (27). Формально приближение ГТД для гауссова радиоимпульса следует из формулы ГО (27), если в (27) и в уравнениях лучей (23) выразить η через ω_s по формуле $\eta = i \tau^2 (\omega_s - \omega_0)$, заменить ω_s на ω и считать ω (вместо η) лучевой координатой.

Указанная в данной работе эквивалентность основных (геометрооптических) и краевых (дифракционных) комплексных пространственно-временных лучей является важным свойством гауссовых радиоимпульсов, которое позволяет получать равномерные асимптотические представления для полей, справедливые в ближней и дальней зонах импульса как в присутствии, так и при отсутствии каустик.

Отметим, что комплексная каустическая асимптотика в форме (28) справедлива не только в неоднородной среде, но и в однородной среде, когда каустика образуется в случае частотно-модулированного гауссова импульса. При образовании сложных (особых) комплексных пространственно-временных каустик следует использовать многомерную функцию Эйри [24]. Если же функция, определяющая закон частотной модуляции радиоимпульса, задана на конечном временном отрезке, то следует применять комплексную каустическую асимптотику [8] на основе неполной функции Эйри от комплексных аргументов.

Результаты работы допускают естественные обобщения на нестационарные волновые пучки с гауссовым законом распределения амплитуды поля в пространстве и во времени, на векторные поля, на произвольные неоднородные диспергирующие среды и системы с потерями и на ряд других случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. M. Lewis, Arch. Rat. Mech. Anal., 20, № 3, 191 (1965).
2. Ю. А. Кравцов, Л. А. Островский, Н. С. Степанов, ТИИЭР, 62, № 11, 91 (1974).
3. L. B. Felsen, IEEE Trans. Anten Propag., AP-17, № 2, 191 (1969); AP-19, № 3, 424 (1971); SIAM Rev., 12, 2424 (1970).
4. Л. А. Вайнштейн, сб. Распространение импульсов (IV Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн), изд. Рязанского радиотехнического института, Рязань, 1975.
5. R. M. Lewis, Electromagnetic Wave Theory (Proceedings of a Symposium held at Delft, The Netherland, Sept. 1965), part 2, Pergamon Press, 1967, p. 845.
6. А. П. Анутина, Ю. И. Орлов, Труды МЭИ, Прикладная электродинамика, вып. 237, 63 (1975).
7. А. П. Анутина, Ю. И. Орлов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 4, 495 (1976).
8. Ю. И. Орлов, А. П. Анутина, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 9, 1369 (1974).
9. Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
10. А. А. Измайлов, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 9, 1380 (1970).
11. G. A. Deschamps, Electron Lett., 7, № 23, 684 (1971), ТИИЭР, 62, № 11, 150 (1974).
12. С. Чоудхари, Л. Фелсен, ТИИЭР, 62, № 11, 136 (1974).
13. J. B. Keller and W. Streifer, J. Opt. Soc. Am., 61, № 1, 40 (1971).
14. К. Сухи, ТИИЭР, 62, № 11, 185 (1974).
15. К. Коннор, Л. Фелсен, ТИИЭР, 62, № 11, 203, 232 (1974).
16. K. P. Singh, P. K. Shukla and R. N. Singh, Int J Electron., 30, № 3, 249 (1971).
17. Е. С. Биргер, Л. А. Ванштейн, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 449 (1973); ЖТФ, 43, № 11, 2217 (1973).
18. Г. И. Терина, Радиотехника и электроника, 17, № 3, 611 (1972).
19. И. Г. Кондратьев, Радиотехника и электроника, 19, № 4, 730 (1974); 20, № 1, 59 (1975).
20. R. M. Lewis and J. B. Keller, New York University Res. Rep. EM-194, Jan. 1964, N.-Y.

- 21 В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972
 22 М. В. Федорюк, ЖВММФ, 4, 671 (1964)
 23 Ю. И. Орлов, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 3, 497 (1966)
 24 Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, 3 (1968)
 25 П. В. Блиох, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 3, 460 (1974)

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию

21 июня 1976 г.

после переработки

6 июля 1977 г

COMPLEX SPACE-TIME RAY THEORY OF GAUSSIAN RADIO PULSE PROPAGATION IN A DISPERSIVE MEDIUM

Yu. I. Orlov, A. P. Anyutin

Problems of plane and spherical Gaussian radio pulses propagation in a homogeneous and inhomogeneous dispersive media (in particular, in a plasma) are considered on the basis of the apparatus of complex space-time rays. The geometry of the principle and rim (diffraction) complex space-time rays is investigated. Asymptotic expressions have been obtained and studied for the fields of Gaussian pulses in the approximations of complex space-time geometrical optics, geometrical theory of diffraction, caustic asymptotic and also in the paraxial (quasi-harmonic) approximation. The adequacy of methods of the geometrical optics and the geometrical diffraction theory is shown that provides the uniformity of asymptotics obtained in the near, intermediate and far distant zones of Gaussian pulses. A comparison is made and the agreement is shown of the results obtained with the asymptotics of the wave equation accurate solutions on the basis of the spectral approach

УДК 533.951

О ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ ПУЧКОМ

C. M. Файнштейн

Рассмотрена задача о нелинейном взаимодействии релятивистского пучка с плазмой. Выяснены условия синхронизма волн, показана эффективность излучения электромагнитных волн за счет энергии плазменных волн. Определены условия стабилизации взрывной неустойчивости в плазме. Даются оценки для лабораторной плазмы.

Линейная неустойчивость в плазме с релятивистским пучком электронов изучена достаточно подробно (см., например, [1-3]). При достаточно больших амплитудах полей взаимодействующих волн развиваются нелинейные неустойчивости—взрывная или ВЧ нестабильности для продольных [4, 5] или поперечных электромагнитных волн [7-9]. Взрывная неустойчивость, характеризующаяся резким ростом амплитуд волн, может быть полезна для эффективного ускорения частиц плазмы [10, 11]; кроме того, при определенных условиях возможно эффективное СВЧ-излучение электромагнитных волн за счет распада пучковой волны, обладающей отрицательной энергией [9]. Однако во всех цитируемых по взрывной неустойчивости электромагнитных волнах работах для развития нестабильности необходимо присутствие двух электромагнитных волн, одна из которых имеет достаточно высокую частоту, т. е. преобразование частоты СВЧ-излучения вверх по спектру недостаточно велико; при этом нет прямого преобразования энергии продольного поля в электромагнитное излучение вследствие того, что спектр плазменных волн является нераспадным из-за специфики пульсаций волн, распространяющихся вдоль скорости потока электронов V_0 без постоянного магнитного поля (при этом учитывались лишь квадратичные нелинейности в исходных уравнениях).

В данной работе исследуется взаимодействие двух плазменных и одной электромагнитной волн в плазме с релятивистским пучком электронов при учете кубичной (нелинейности, связанной с зависимостью массы электрона от скорости. Выяснены условия синхронизма для волн; показана эффективность преобразования энергии продольного поля в электромагнитное излучение высокой частоты, показана возможность взрывной неустойчивости в указанной системе и определены условия ее стабилизации. Полученные результаты представляют интерес для получения достаточно мощного СВЧ-излучения в лабораторной плазме*, а также могут быть полезны для астрофизических приложений.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УСЛОВИЯ СИНХРОНИЗМА

В качестве исходной системы уравнений используем уравнения Максвелла и релятивистское гидродинамическое уравнение движения для электронов:

* Результаты теоретического исследования могут быть привлечены для объяснения СВЧ-излучения из системы релятивистской поток — плазма, наблюдавшегося экспериментально в [12].

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{v} - \frac{4\pi e n_s v_s}{c}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= -4\pi e(n + n_s - n_0), \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right), \\ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s &= -\frac{e}{m} \gamma_0 \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s \mathbf{H}] - \frac{\mathbf{v}_s}{c^2} (\mathbf{v}_s \mathbf{E}) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где n_0 — концентрация компенсирующих ионов, которые остаются неподвижными; n , n_s , \mathbf{v} , \mathbf{v}_s — соответственно концентрации и скорости электронов плазмы и пучка; $\gamma_0 = \sqrt{1 - v_s^2/c^2}$. В линейном приближении для волн, распространяющихся вдоль средней скорости пучка V_0 , получим соответствующие дисперсионные уравнения, описывающие нормальные волны в системе поток — плазма:

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - \frac{\omega_{0s}^2}{(\Omega - qV_0)^2} = 0; \quad (2)$$

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_0^2 - \bar{\omega}_{0s}^2)/c^2, \quad (3)$$

где $\omega_{0s}^2 = \frac{4\pi N_s e^2 \gamma^3}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$, $\gamma = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^{1/2}$, N , N_s — равновесные концентрации электронов плазмы и пучка; $\bar{\omega}_{0s}^2 = \frac{4\pi N_s e^2}{m} \gamma$ ($\gamma \ll 1$; $V_0 \leq c$)

уравнение (2) описывает плазменные волны частоты Ω и волнового числа q , а (3) — соответствующие поперечные волны с параметрами ω и k . Если расписать исходные уравнения (1) в проекциях на оси x и y ($0x \parallel V_0$) и разложить γ_0 в ряд Тейлора с точностью до кубических членов, то нетрудно убедиться, что при учете лишь квадратичных членов разложения невозможно возбуждение поперечной волны двумя продольными волнами. В случае, если учтем и кубичные члены в разложении γ_0 , оказывается возможным следующий процесс распада:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \Omega_1 + \omega + \omega, \\ q_2 &= q_1 + k + k, \end{aligned} \quad (4)$$

т. е. в четырехфотонном процессе участвуют два кванта электромагнитного поля в одном состоянии и два кванта продольного поля.

Исследуя знак энергии взаимодействующих волн, определяем, что энергия поперечных волн всегда положительна, а энергия плазменных волн отрицательна при условии*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) &> \left(\frac{\omega_{0s}^2}{\omega_0^2} \right)^{1/3}, \\ \Omega - qV_0 &< 0, \end{aligned} \quad (5)$$

* Заметим, что обычную пучковую неустойчивость можно не учитывать, если инкремент нестабильности много меньше характерного времени «взрыва», т. е.

$$\left(\frac{N_s}{N} \right)^{1/3} \gamma \ll |a_{\max}|^{-1} \max \{ \sigma_{1,2} \sqrt{\sigma_{1,2}}, \sigma_1 \sigma_2 \}^{-1}$$

(смысл a , $\sigma_{1,2}$, σ пояснен дальше) Кроме того, по мере роста ВЧ-волн инкремент пучковой неустойчивости уменьшается (см [18]).

т. е. медленная пучковая волна (Ω_2, q_2) обладает отрицательной энергией, а плазменная волна с частотой $\Omega_1 = \omega_0 + \delta$ ($\delta \ll \omega_0$) имеет положительную энергию, если

$$\frac{2\delta}{\omega_0} < \left(\frac{N_s}{N}\right)^{1/3} \sqrt{2}\gamma \ll 1. \quad (6)$$

Таким образом, волна высшей частоты Ω_2 имеет отрицательную, а две другие волны—положительную энергию, т. е. в системе возможна взрывная неустойчивость (см. также [13, 14]).

Используя (2)–(4), определим частоту генерируемой электромагнитной волны:

$$\frac{\omega}{\omega_0} \sim \left(\frac{N_s}{N}\right)^{1/2} 2^{-3/4} \gamma^{-1/2} \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^{-1/2} \gg 1, \quad (7)$$

т. е. для достаточно релятивистского пучка ($\gamma \ll 1$) возможно эффективное преобразование энергии продольного поля в электромагнитное излучение высокой частоты.

Применив обычную методику [15, 16], получим уравнения для безразмерных комплексных амплитуд волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial t_\delta} + V_0 \frac{\partial a_2}{\partial x} &= i \sigma_2 b^2 a_1 - i \beta_1 |b|^2 a_2 - i \beta_2 |a_1|^2 a_2 - i \beta_3 |a_2|^2 a_1, \\ \frac{\partial a_1}{\partial t_\delta} + V_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} &= -i \sigma_1 b^{*2} a_2 + i \alpha_1 |b|^2 a_1 + i \alpha_2 |a_1|^2 + i \alpha_3 |a_2|^2 a_1, \\ \frac{\partial b}{\partial t_\delta} + c \frac{\partial b}{\partial x} &= -i \sigma a_2 a_1^* b^* - i \delta_1 |b|^2 b - i \delta_2 |a_1|^2 b - i \delta_3 |a_2|^2 b, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_{1,2}$, $b = E_{1,2,x,y} \left(\frac{m N_s c^2}{\gamma}\right)^{-1/2}$, $t_\delta = t \omega_0$, V_1 —групповая скорость плазменной волны на частоте $\Omega_1 = \omega_0 + \delta$,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\sim \frac{1}{4\pi\gamma^4} \frac{\delta\omega_{0s}}{\omega\omega_0}, \quad \sigma_2 \sim \frac{1}{4\pi\gamma^4} \frac{\omega_{0s}^2 \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right)^{1/2}}{\omega\omega_0}, \quad \sigma \sim \frac{2}{\pi\gamma^4} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega\omega_0}, \\ \alpha_1 &\sim \frac{1}{4\pi\gamma^4} \frac{\omega_{0s}\delta}{\omega\omega_0}, \quad \alpha_2 \sim \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2, \quad \alpha_3 \sim \frac{1}{8\pi\gamma} \frac{\delta}{\omega_0}, \\ \beta_1 &\sim \frac{1}{16\pi\gamma^2} \frac{\omega_{0s}^3}{\omega^2\omega_0}, \quad \beta_2 \sim \frac{1}{16\pi\gamma^2} \frac{2\delta\omega_{0s}}{\omega_0^2}, \quad \beta_3 \sim \frac{1}{16\pi\gamma^2} \frac{\omega_{0s}}{\omega_0}, \\ \delta_1 &\sim \frac{1}{2\pi\gamma^8} \frac{\omega_{0s}^4}{\omega^3\omega_0}, \quad \delta_2 \sim \frac{1}{2\pi\gamma^4} \frac{\omega_{0s}^2 2\delta}{\omega\omega_0^2}, \quad \delta_3 \sim \frac{1}{2\pi\gamma^4} \frac{\omega_{0s}^2}{\omega\omega_0}. \end{aligned}$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН

Для анализа уравнений (8) удобно сделать преобразование функций $a_{1,2}, b$ следующим образом:

$$a_{1,2} = \frac{u_{1,2}}{\sqrt{\sigma_{2,1}\sigma}}, \quad b = \frac{u_3}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}, \quad \tilde{t} = \frac{t_\delta}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}},$$

кроме того, перейдем к действительным амплитудам волн: $u_j = U_j e^{i\varphi_j}$. В результате в новых переменных получим пространственно-однородные уравнения для амплитуд и разности фаз волн*

$$\frac{dU_{1,2}}{d\tilde{t}} = \sin \Phi U_3^2 U_{2,1}, \quad \frac{dU_3}{d\tilde{t}} = \sin \Phi U_1 U_2 U_3, \quad (9)$$

$$\frac{d\Phi}{d\tilde{t}} = \cos \Phi \left\{ \frac{U_1 U_3^2}{U_2} + \frac{U_2 U_3^2}{U_1} + 2 U_1 U_2 \right\} - h_1 |U_3|^2 - h_2 |U_1|^2 - h_3 |U_2|^2,$$

где

$$\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\varphi_3, \quad h_1 = (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)(\sigma_1 \sigma_2)^{-1/2},$$

$$h_2 = (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{1}{\sigma}, \quad h_3 = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{1}{\sigma} (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3).$$

В общем случае исследование (9) затруднительно, поэтому ограничимся частными, но практически интересными случаями: 1) при одинаковых начальных условиях взрывная неустойчивость оказывается стабилизированной, если $(h_1 + h_2 + h_3) < 4$ (см. [17]); 2) в заданном поле плазменной НЧ-накачки частоты порядка ω_0 и при одинаковых малых затравках двух других волн, $|U_{2,3}| \ll |U_1^0|$, можно найти фазовый портрет системы (9) (см. рис. 1), определяемый фазовыми траекториями

$$\cos \Phi = \frac{h}{2U_1^0} \left(U + \frac{\Delta_0}{2U_1^0 U} + C \right), \quad (10)$$

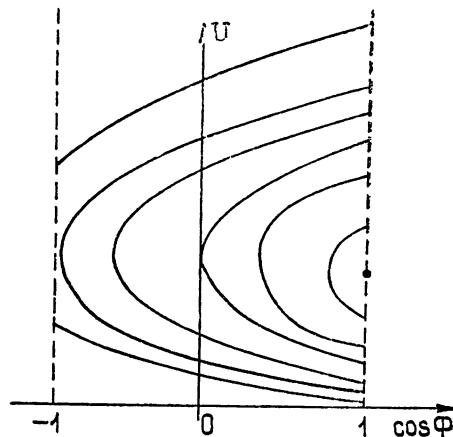


Рис. 1. Фазовый портрет системы при $U_1^0 \gg U_{2,3}$.

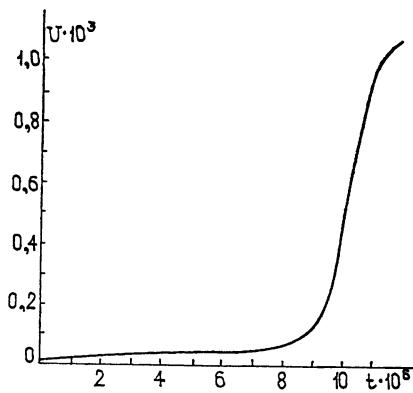


Рис. 2. Счет переходного процесса на ЭВМ при $h_1 \sim 4$, $h_2 \sim 10^{-3}$, $h_3 \sim 4,3$, $U_1^0 \sim 10^{-2} \sim \text{const}$.

где $h = h_1 + h_3$, $\Delta_0 = h_2 U_1^0$, C — произвольная постоянная. Из анализа фазового портрета системы можно определить, что поле ВЧ электромагнитной волны растет до определенной величины, которая может быть порядка $0,1 U_1^0$ (см. рис. 2).

Оценим параметры возбуждаемых электромагнитных колебаний для конкретной плазменной системы со следующими параметрами: $N \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\omega_0 \sim 6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $N_s/N \sim 10^{-3}$, $\gamma \sim 6 \cdot 10^{-2}$, ток пучка порядка 500 A/cm^2 , энергия электронов пучка $W \sim 20 \text{ МэВ}$. Тогда при наличии накачки $|E_1| \sim 2000 \text{ В/см}$ генерируется СВЧ-излу-

* Пространственно-однородный режим можно реализовать, например, для плазмы, помещенной в кольцевой или плоский резонатор.

чение с длиной волны $\lambda = 0,3 \text{ мм}$ и амплитудой $E \sim 200 \text{ В/см}$ (начальная амплитуда $E_0 \sim 0,2 \text{ В/см}$) за время $\Delta t \sim 10^{-5} \text{ с}$. Результаты численного счета переходного процесса представлены на рис. 2. Заметим, что уравнения (9) инвариантны относительно преобразования подобия: $U_j \rightarrow \lambda' j, t \rightarrow \lambda^{-2} t$ (λ — параметр подобия).

Таким образом, в системе релятивистский пучок — плазма возможно эффективное преобразование энергии продольных волн в электромагнитное излучение достаточно высокой частоты.

Автор признателен М. И. Петелину, М. И. Рабиновичу, А. В. Сморгонскому за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А И Ахиезер, И А Ахиезер, Р В Половин, А Г Ситенко, К Н Степанов, Электродинамика плазмы, изд Наука, М, 1974.
- 2 Л А Богданевич, А А Рухадзе, УФН, 105, 609 (1971)
- 3 С А Каплан, В Н Цытович, Плазменная астрофизика, изд Наука, М, (1972)
- 4 Н. Wilhelmsson, J Plasma Phys., 3, 215 (1969).
- 5 М И Рабинович, С М Файнштейн, ЖЭТФ, 57, 1308 (1969); 63, 1672 (1972)
- 6 С М Файнштейн, ЖЭТФ, 71, 1021 (1976)
- 7 Е Е Плоткин, С М Файнштейн, Изв вузов — Радиофизика, 17, 62 (1974).
- 8 С М Файнштейн, ЖТФ, 45, 1334 (1975); Изв. вузов — Радиофизика, 18, 1059 (1975)
- 9 А Н Карапшин, В П Рeutov, Изв вузов — Радиофизика, 18, 930 (1975)
- 10 M L Sloan and W E Drigmatond, Phys Rev Lett., 31, 1234 (1973).
- 11 В П Индыкул, И. П. Панченко, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Физика плазмы, 2, 775 (1976)
- 12 G C Goldenbaum, W. F Dove, K A Gerber and B. G Logan, Phys. Rev Lett., 32, 830 (1974).
- 13 Б. Б. Кадомцев, А Б Михайловский, А. В Тимофеев, ЖЭТФ, 47, 2266 (1964)
- 14 В Н Дикасов, Л И Рудаков, Д. Д Рютов, ЖЭТФ, 48, 913 (1965)
- 15 В Н Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд Наука, М, 1967
- 16 А В Гапонов, Л А Островский, М И Рабинович, Изв вузов — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970)
- 17 М И Рабинович, В П Рeutov, Изв вузов — Радиофизика, 16, 815 (1973)
- 18 Ю М Алиев, В П Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965)

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
16 мая 1977 г

GENERATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN PLASMA WITH A RELATIVISTIC BEAM

S. M. Fainshtein

A problem is considered on the nonlinear interaction of a relativistic beam with plasma. Conditions of the wave synchronism are found the efficiency of electromagnetic waves radiation due to the plasma wave energy is shown. Stabilization conditions of the explosion instability in the plasma are defined. Estimations are given for a laboratory plasma.

УДК 538.56 519.25

О КВАДРАТИЧНОЙ ГРУППИРОВКЕ ЭЛЕКТРОНОВ, НАПРАВЛЯЕМЫХ ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНЫМИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

М. В. Жучков, Ф. М. Клементьев, А. Ф. Курин, Ю. Н. Нестеренко

Дан анализ относительной эффективности механизмов квадратичной группировки, действующих в электронных пучках, направляемых поперечно-неоднородными магнитостатическими полями, при взаимодействии с высокочастотными полями в условиях циклотронного резонанса. Получены соотношения, характеризующие эффективность различных механизмов в зависимости от вида статического и высокочастотного полей.

В электронных пучках, направляемых поперечно-неоднородными магнитостатическими полями, при взаимодействии с высокочастотными полями в условиях циклотронного резонанса действует несколько механизмов квадратичной группировки электронов [1–3], благодаря которым могут осуществляться усиление и генерация СВЧ-колебаний. Ниже анализируется эффективность этих механизмов в зависимости от вида используемого статического фокусирующего поля и от вида высокочастотного поля.

Пусть магнитостатическое поле в декартовой системе координат имеет только y -составляющую $H_0(x) > 0$. В дальнейшем будем предполагать, что электроны не имеют y -составляющей скорости вдоль направления статического поля. Вращение электронов в этом случае происходит в плоскости $y = c \text{const}$, причем ведущие центры электронных орбит перемещаются вдоль линии $x = x_b = \text{const}$ (градиентный дрейф). Для определенности поперечное положение ведущего центра орбиты будем характеризовать координатой x_b , соответствующей точке траектории, в которой $\dot{z} = 0$.

Поле $H_0(x)$ на электронной траектории предположим слабонеоднородным, так что в разложении $H_0(x)$ в окрестности ведущего центра можно ограничиться квадратами отклонений от x_b , т. е.

$$H_0(x) = H_0(x_b) \left[1 + \frac{x - x_b}{L} + \frac{1}{2} \frac{(x - x_b)^2}{L_1^2} \right],$$

где

$$L = \left(H_0 \left| \frac{dH_0}{dx} \right|_{x_b} \right), \quad L_1^2 = \left(H_0 \left| \frac{d^2H_0}{dx^2} \right|_{x_b} \right),$$

$|x - x_b| \leq R$, R — характерный размер электронной орбиты. Величины второго порядка при этом удовлетворяют условиям

$$R^2/|L_1^2| \ll 1, \quad R^2/L^2 \ll 1. \quad (1)$$

Решая релятивистские уравнения движения электрона в таком поле, например, по асимптотическому методу Ляпунова [4], ограничиваясь при этом членами второго порядка малости, можно получить следующие выражения для траектории:

$$\begin{aligned}
 x &= x_b - \frac{3}{4} R \frac{R}{L} + R \left(1 + \frac{7}{16} \frac{R^2}{L^2} - \frac{3}{16} \frac{R^2}{L_1^2} \right) \cos \omega_0(t - t_0) + \\
 &+ \frac{1}{4} R \frac{R}{L} \cos 2\omega_0(t - t_0) + \frac{1}{16} R \left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{R^2}{L_1^2} \right) \cos 3\omega_0(t - t_0), \\
 z &= z_0 + \bar{v}_z(t - t_0) - R \left(1 + \frac{9}{16} \frac{R^2}{L^2} - \frac{5}{16} \frac{R^2}{L_1^2} \right) \sin \omega_0(t - t_0) - \\
 &- \frac{1}{4} R \frac{R}{L} \sin 2\omega_0(t - t_0) - \frac{1}{16} R \left(\frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{R^2}{L_1^2} \right) \sin 3\omega_0(t - t_0).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $R = mc/|e|H_0(x_b)$ имеет смысл циклотронного радиуса вращения электрона в однородном магнитном поле, равном по величине полю $H_0(x_b)$ на ведущем центре, v — полная скорость электрона, $m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$ — релятивистская масса, $\beta = v/c$, $\bar{v}_z = \frac{1}{2} \frac{|e|H_0(x_b)}{mc} R \frac{R}{L}$ — скорость градиентного дрейфа, $\omega_0 = \frac{|e|H_0(x_b)}{mc} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{4} \frac{R^2}{L_1^2} \right)$ — частота вращения электрона.

Рассматривая взаимодействие электронов с ВЧ-полем, предположим структуру этого поля такой, что на электроны не действуют силы, направленные вдоль статического магнитного поля, т. е. движение в ВЧ-поле остается плоским. Будем полагать также, что все электроны пучка имеют одинаковые исходную энергию и координату x_b .

Зависимость частоты колебаний и скорости градиентного дрейфа электронов от энергии и поперечного положения ведущего центра приводит к тому, что под действием ВЧ-поля в электронном пучке происходит процесс квадратичной группировки. Полученные выражения для невозмущенной траектории позволяют оценить эффективность различных механизмов группировки. Оценки будем проводить для случая основного циклотронного резонанса

$$\omega \mp h \bar{v}_z \approx \omega_0, \tag{3}$$

где h — постоянная распространения электромагнитных волн в направлении дрейфа электронов.

Ограничимся рассмотрением случая слабого релятивизма, $\beta^2 \ll 1$. Частоту колебаний и дрейфовую скорость электронов при этом можно записать как

$$\begin{aligned}
 \omega_0(\beta, x_b) &= \Omega \left[1 - \frac{1}{4} \beta^2 \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) - \frac{1}{2} \beta^2 \right], \\
 \bar{v}_z(\beta, x_b) &= \frac{1}{2} c \frac{\beta^2}{B}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Omega = \frac{|e|H_0(x_b)}{m_0 c}$, $B = 2\pi \frac{L}{\lambda}$, $B_1^2 = (2\pi)^2 \frac{L_1^2}{\lambda^2}$, $\lambda = 2\pi c/\Omega$ — длина волны ВЧ-поля, синхронного с колебаниями электронов.

Можно показать [3], что квадратичное по времени приращение фазы действующего на электроны ВЧ-поля за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ равно

$$\Delta\Phi_{\text{кв}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{d(\Delta\omega)}}{dt} \right)_0 (\Delta t)^2.$$

Здесь $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \mp h\bar{v}_z$ — относительная доплеровская частота действующего на электрон поля электромагнитной волны, $\overline{(d(\Delta\omega)/dt)}_0$ — начальное значение медленно меняющейся (усредненной по периоду $2\pi/\omega_0$) составляющей производной от $\Delta\omega$. Величиной $(d(\Delta\omega)/dt)_0$ можно характеризовать эффективность квадратичной группировки. Для оценок предположим, что производная $\overline{d(\Delta\omega)/dt}$ меняется настолько медленно, что на промежутке времени Δt ее значение можно считать постоянным, равным начальному, поэтому нулевой индекс при производной можно опустить.

Величина $\overline{d(\Delta\omega)/dt}$ для каждого электрона пучка различна в зависимости от начальной фазы действующих ВЧ-сил (благодаря этому различию и происходит группировка). Однако для оценки относительной эффективности механизмов группировки достаточно рассмотреть производную $\overline{d(\Delta\omega)/dt}$ для одного электрона с произвольной начальной фазой. Для вычисления $\overline{d(\Delta\omega)/dt}$ воспользуемся методом вариации канонически сопряженных интегралов движения [5]. В качестве варьируемых интегралов используем энергию электрона $\mathcal{E}(\beta)$ и продольную компоненту обобщенного импульса.

$$P_z = -\frac{|e|}{c} A_{0z}(x_b), \quad (5)$$

где $A_{0z}(x)$ — продольная (единственная) компонента векторного потенциала, через которую напряженность поля выражается как

$$H_0(x) = -dA_{0z}/dx.$$

Для β и x_b согласно [5] справедливы уравнения

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\mathcal{E}} \dot{F}\vec{r}, \quad \frac{dx_b}{dt} = \frac{dx_b}{dP_z} F_z, \quad (6)$$

где F — ВЧ-сила Лоренца, действующая на электрон. Уравнение (6) для x_b показывает, что поперечный дрейф ведущего центра происходит под действием продольной составляющей ВЧ-силы Лоренца, причем этот дрейф имеет место только в магнитном или неоднородном электрическом ВЧ-полях. Однородное электрическое ВЧ-поле не может вызвать среднего по времени поперечного смещения ведущего центра.

Имея уравнения (6), с помощью (4) можно записать производную

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta\omega)}{dt} &= \frac{\partial(\Delta\omega)}{\partial\beta} \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial(\Delta\omega)}{\partial x_b} \frac{dx_b}{dt} = \Omega\beta \frac{d\beta}{dt} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c}{B} (\bar{F}_z / \bar{F}\vec{r}) \mp \frac{hc}{\Omega B} \pm \frac{h\beta^2 c^2}{\Omega} \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{2B_1^2} \right) (\bar{F}_z / \bar{F}\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

При записи выражения (7) использованы соотношения

$$\frac{dP_z}{dx_b} = \frac{|e|}{c} H_0(x_b), \quad \frac{\partial\omega_0}{\partial x_b} \approx \frac{d\Omega}{dx_b}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\beta} \approx m_0 c^2 \beta,$$

первое из которых следует из (5), второе получено с учетом условий (1) и последнее — с учетом условия $\beta^2 \ll 1$. Принята также во внимание медленность изменения величин β и x_b , в силу которой при усреднении

по периоду $2\pi/\omega_0$ их можно считать постоянными величинами. Верхние знаки в (7) относятся к прямой (распространяющейся вдоль оси z) волне, нижние — к обратной.

В выражении (7) каждый член характеризует эффективность одного определенного механизма квадратичной группировки. Слагаемые расположены в следующем порядке:

I — фазовая группировка, вызванная релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии электронов; при оценке относительной эффективности различных механизмов группировки эффективность этого механизма примем за единицу;

II — фазовая группировка, вызванная нерелятивистской зависимостью частоты ω_0 от энергии вследствие неоднородности магнитостатического поля;

III — фазовая группировка за счет зависимости ω_0 от поперечного положения ведущего центра;

IV — продольная группировка, связанная с зависимостью скорости градиентного дрейфа v_z от энергии электронов;

V — продольная группировка, связанная с зависимостью \bar{v}_z от поперечного положения ведущего центра.

Выражение (7) позволяет сделать ряд выводов независимо от структуры ВЧ-полей. При $\left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2}\right) > 0$ фазовая группировка II син-

фазна с релятивистской группировкой I, при $\left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2}\right) < 0$ — противофазна ей. В случае $B^2 = 3B_1^2$ частота ω_0 в нерелятивистском приближении от энергии не зависит, и фазовая группировка II отсутствует. Например, для поля вида $H_0 = A/x^\nu$ это имеет место при $\nu = 0,5$.

Эффективность продольной группировки зависит от характерного размера продольной неоднородности ВЧ-поля h^{-1} . В присутствии замедляющих систем продольная группировка, естественно, эффективней, чем при взаимодействии с волнами в электродинамических системах с гладкими стенками. Так как знак \bar{v}_z совпадает со знаком B , то из (7) следует, что при взаимодействии со встречной по отношению к направлению поступательного перемещения электронов волной продольная группировка IV синфазна с группировкой I, а при взаимодействии с попутной волной противофазна ей. При $B^2 = 2B_1^2$ скорость градиентного дрейфа не зависит от положения ведущего центра, и группировка V отсутствует. Например, для поля вида $H_0 = A/x^\nu$ это имеет место при $\nu = 1$.

Проведем оценку относительной эффективности механизмов квадратичной группировки для МЦР с некоторыми электродинамическими системами.

1. Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направления дрейфа пучка и имеющие в плоскости электронной траектории $y = \text{const}$ вид

$$\begin{aligned} E &= \{E_0 \cos(\omega t \mp n \omega z/c), 0, 0\}, \\ H &= \{0, \pm nE_0 \cos(\omega t \mp n \omega z/c), 0\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $n = \lambda/\Lambda \ll 1$ — коэффициент замедления (Λ — длина волны в электродинамической системе, λ — длина волны в свободном пространстве). При $n = 1$ выражения (8) описывают ТЕМ-волны, при $n < 1$ — волны H_{01} прямоугольного волновода в плоскости максимума ВЧ электрического поля.

В данном случае электроны изменяют свою энергию под действием x -составляющей электрического ВЧ-поля, поперечный дрейф ведущих центров происходит под действием y -составляющей магнитного ВЧ-поля. Подставляя компоненты силы Лоренца, записанные для поля (8), в соотношение (7), получим

$$\frac{d(\Delta\omega)}{dt} \propto 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) \mp \frac{n}{B} \mp \frac{n}{B} + n^2 \beta^2 \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{2B_1^2} \right). \quad (9)$$

При выполнении условий (1) справедливо неравенство $\left| n^2 \beta^2 \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{2B_1^2} \right) \right| \ll 1$, и, следовательно, продольная группировка V пренебрежимо мала. Фазовая группировка III имеет ту же эффективность, что продольная группировка IV, и синфазна с ней.

Если частота поля в волноводе близка к критической, так что $n \rightarrow 0$, то действуют, в основном, два механизма фазовой группировки I и II, связанные с зависимостью частоты ω_0 от энергии. Если же частота поля в волноводе далека от критической, так что $n \sim 1$, а также в случае ТЕМ-волн может оказаться существенным каждый из механизмов I—IV.

При условии

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) \mp \frac{n}{B} \mp \frac{n}{B} \right| \ll 1$$

доминирует релятивистская группировка I. Это условие выполняется, в частности, при $|B| \gg 1$, $|B_1^2| \gg 1$ или в случае $n \approx 0$, $B^2 \approx 3B_1^2$.

При условии

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) \mp \frac{n}{B} \mp \frac{n}{B} \right| \gg 1,$$

которое выполняется при $|B| \ll n$, $|B_1^2| \ll 1$, релятивистским эффектом можно пренебречь. Если же одновременно выполняется условие $\left| \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) \right| \gg \frac{n}{|B|}$, то преобладает группировка II, и, наряду с релятивистским эффектом, можно пренебречь влиянием ВЧ-магнитного поля, действие которого приводит к группировке III.

В промежуточном случае

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) \mp \frac{n}{B} \mp \frac{n}{B} \right| \sim 1$$

существенны как релятивистские, так и нерелятивистские эффекты. Так, при выполнении условий $|B| \sim 1$, $n \sim 1$, $|B_1^2| \sim B^2$ все механизмы I—IV одинаково эффективны. Исключение составляет случай $B^2 = 3B_1^2$, когда группировка II отсутствует.

Таким образом, в целом, преобладанию релятивистского механизма способствует значительное превышение характерных размеров неоднородности статического поля над длиной генерируемой волны λ , а преобладанию нерелятивистских механизмов, наоборот, — значительное превышение длины волны над характерными размерами статического поля. Данный вывод согласуется с результатами работы [2].

Можно показать, что оценка (9) справедлива и для случая взаимодействия с волнами E_{11} прямоугольного волновода, если пучок движется в центре волновода в максимуме продольного электрического поля. Разница заключается в том, что изменение энергии электронов в этом случае происходит под действием компоненты E_z ВЧ-поля, а не E_x , поперечный же дрейф электронов осуществляется за счет продольной неоднородности компоненты E_z , а не под действием y -составляющей магнитного ВЧ-поля, как в случае поля (8).

2. Рассмотрим поле

$$\mathbf{E} = \{0, 0, E_0 \sin(\omega t/c) \cos \omega t\},$$

$$\mathbf{H} = \{0, E_0 \cos(\omega t/c) \sin \omega t, 0\},$$

образованное ТЕМ-волнами, распространяющимися в поперечном по отношению к дрейфу электронов направлении.

Энергия электронов в этом случае изменяется под действием составляющей E_z ВЧ-поля, поперечный дрейф ведущих центров вызывается компонентами H_y и E_z . Ввиду продольной однородности ВЧ-поля ($h = 0$) продольная группировка здесь отсутствует.

Пусть ведущие центры электронных орбит находятся в пучности электрического и, соответственно, в узле магнитного поля. В случае слабого релятивизма, когда характерный размер неоднородности ВЧ-поля значительно превышает размер электронной орбиты, так что $(R \omega/c)^2 \ll 1$, ВЧ-поля, действующие на электронной траектории, можно представить в виде рядов по степеням отклонения электрона от ведущего центра $x - x_b$ и ограничиться при этом низшими отличными от нуля членами этих рядов. Тогда можно записать

$$\overline{\dot{Fr}} = -e \overline{E_z(x_b, t)} \dot{z},$$

$$\overline{F_z} = -\frac{1}{2} e \overline{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x_b^2}(x - x_b)^2} - \frac{e}{c} \overline{\frac{\partial H_y}{\partial x_b}(x - x_b) \dot{x}}.$$

Используя выражение (2) для координаты x электронной траектории, нетрудно получить отношение

$$\overline{F_z}/\overline{Fr} \approx -\frac{5}{8c} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{R \omega}{c} \frac{R}{L}.$$

В результате (7) записывается как

$$\overline{\frac{d(\Delta\omega)}{dt}} \propto 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2} \right) + \frac{5}{8} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{R \omega}{cB} \frac{R}{L}.$$

Так как $|R \omega/c| (R/L) \ll 1$ и, кроме того, в условиях синхронизма выполняется условие $|(\omega - \omega_0)/\omega_0| \ll 1$, эффективность фазовой группировки III пренебрежимо мала. Таким образом, в рассматриваемом случае практически действуют только два механизма фазовой группировки, так же как при взаимодействии с полем волновода на частоте, близкой к критической.

3. В заключение остановимся на взаимодействии с волнами в замедляющей системе. Анализ, проведенный для волн

$$\mathbf{E} = \{\pm E_0 e^{-px} \cos(\omega t \mp n \omega z/c), 0, -E_0 (\sqrt{n^2 - 1/n}) e^{-px} \sin(\omega t \mp n \omega z/c)\},$$

$$\mathbf{H} = \{0, (E_0/n) e^{-px} \cos(\omega t \mp n \omega z/c), 0\}, \quad p = \omega \sqrt{n^2 - 1/c},$$

распространяющихся в гребенчатой структуре, образованной бесконечными в y -направлении тонкими проводящими пластинами, для случая не слишком большого замедления, а именно такого, чтобы не нарушалось условие $(Rh)^2 \ll 1$, дает оценку

$$\frac{d(\Delta\omega)}{dt} \sim \left(1 \pm \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{B^2} - \frac{1}{B_1^2}\right) \mp \frac{n}{B} \mp \frac{n}{B} + n^2 \beta^2 \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{2B_1^2}\right)\right].$$

Относительная эффективность механизмов группировки характеризуется соотношением, аналогичным (9), с той разницей, что в данном случае $n > 1$. По сравнению со случаем взаимодействия с незамедленными волнами здесь возрастает роль механизмов III—V.

Эффективность квадратичной группировки в целом пропорциональна величине $1 \pm \sqrt{n^2 - 1}/n$, т. е. взаимодействие с прямой волной эффективней, чем с обратной (при $dH_0/dx > 0$ прямая волна является попутной по отношению к пучку, при $dH_0/dx < 0$ — встречной). Это свойство невзаимного усиления электромагнитных волн, отмеченное в [2], обусловлено наличием двух компонент поля E , вследствие чего поляризация этого поля близка к круговой. Направление вращения вектора E у прямой волны совпадает с вращением электронов, а у обратной не совпадает.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что относительная эффективность механизмов квадратичной группировки существенно зависит от величин B и B_1^2 , связывающих характерные размеры неоднородности магнитостатического поля с длиной генерируемых волн, а также от вида ВЧ-поля. Полученные соотношения количественно характеризуют эту зависимость. Выбором вида статического и ВЧ-полей можно ослаблять или усиливать действие одних механизмов по сравнению с другими.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Лекции по электронике СВЧ, книга IV, изд. Саратовского ун-та, 1974
- 2 В. С. Перминов, М. И. Петелин, Тезисы докладов VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969
- 3 М. В. Жучков, Ф. М. Клементьев, А. Ф. Курин, Ю. Н. Нестеренко, Радиотехника и электроника, 22, № 5, 1023 (1977).
- 4 Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969
- 5 В. И. Гайдук, К. П. Палатов, Д. М. Петров, Физические основы электроники СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1971.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.

ON THE QUADRATIC GROUPING OF ELECTRONS DIRECTED BY TRANSVERSELY INHOMOGENEOUS MAGNETOSTATIC FIELDS

M. V. Zhuchkov, F. M. Klement'ev, A. F. Kurin, Yu. N. Nesterenko

The analysis is given of the relative efficiency of quadratic grouping mechanisms acting in electron beams directed by transversely inhomogeneous magnetostatic fields when interacting with high frequency fields under cyclotron resonance conditions. Relations have been obtained characterizing the efficiency of different mechanisms depending on the form of the static fields and on the high frequency one.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 537.525.8

ТЛЕЮЩИЙ РАЗРЯД С СИСТЕМОЙ ПОЛЫХ КАТОДОВ

Н. В. Волков, В. И. Добреньков, Л. А. Инжеватова, О. В. Трофимов

Между тлеющими разрядами с плоским и полым катодами имеются существенные различия как по внешнему виду, так и по электрическим характеристикам [1-3]. Эти отличия еще более значительны, если в разряде имеется не один, а несколько идентичных полых катодов.

В данной работе исследуется сравнение тлеющего разряда с плоским катодом и таким же режимом разряда, обладающим системой полых катодов равнозенной геометрии. Для обеспечения идентичности условий оба разряда поочередно создавались в одной и той же разрядной трубке и имели один и тот же разрядный промежуток, который был выполнен из двух плоскопараллельных никелевых электродов равного диаметра. В теле одного из электродов были сделаны сферические полости, которые соединялись с рабочей поверхностью цилиндрическими отверстиями. Диаметр цилиндрического отверстия d был в четыре раза меньше диаметра полости D (см. рис. 1). Переход от разряда с плоским катодом к разряду с полыми катодами осуществлялся с помощью переполоскии электродов. Поскольку диаметр каждого из электродов составлял 60 мм, а диаметр цилиндрического отверстия — 2 мм, площадь всех цилиндрических отверстий S_d была значительно меньше рабочей поверхности электрода S_D ,

$$S_d \ll S_D$$

(например, для 12 отверстий S_d составляла всего 1,3% S_D). Вследствие этого площади рабочих поверхностей обоих электродов можно считать одинаковыми.

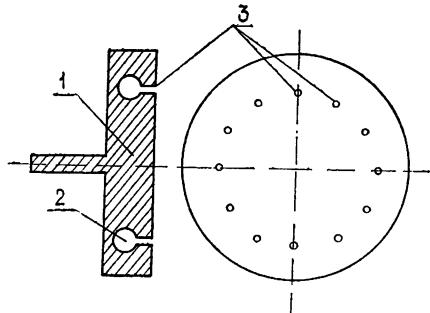


Рис. 1. Электрод с системой полых катодов:
1 — поперечное сечение электрода,

2 — сферические полости в теле плоского электрода,
3 — цилиндрические отверстия, соединяющие сферические полости с межэлектродным промежутком.

и полыми катодами. В разряде с плоским катодом при увеличении давления U монотонно убывает, а I монотонно возрастает. В разряде с системой полых катодов наблюдается немонотонная зависимость U и I от давления, причем максимумы и минимумы этой зависимости выражены более остро, вследствие чего и немонотонность выражена более резко, чем в работе [4]. В результате этого разряд с системой полых катодов по сравнению с разрядом, имеющим один полый катод, обнаруживает более значительное отличие от разряда с плоским катодом. При непосредственном наблюдении тлеющего

Описанное разрядное устройство после вакуумной обработки заполнялось водородом с давлением от $4 \cdot 10^{-3}$ до 5 тор. В указанном интервале давления снимались зависимости анодного напряжения U и разрядного тока I от давления наполняемого газа в разрядах с плоским и системой полых катодов. Сравнение указанных разрядов показало, что увеличение давления до $p=0,8$ тор не дает существенных различий в $U=f(p)$ и $I=\varphi(p)$. Следовательно, при малом давлении рабочая поверхность электрода с цилиндрическими отверстиями и полостями в режиме катода работает так же, как и без них. При этом отрицательное тлеющее свечение у данного электрода не отличается от подобного свечения разряда с плоским катодом.

При дальнейшем увеличении давления водорода ($p > 1$ тор) в указанных зависимостях наблюдаются существенные расхождения между разрядами с плоским

разряда с системой полых катодов на рабочей поверхности электрода просматриваются яркие отрицательные свечения грибовидной формы над каждым цилиндрическим отверстием. С ростом анодного напряжения яркость и объем свечения увеличиваются. При этом отрицательное свечение плоской поверхности катода было слабым или полностью отсутствовало.

Сравнение измеренных вольт-амперных характеристик тлеющих разрядов с плоским и полыми катодами при $p > 1$ tor обнаруживает новое характерное различие. Зависимость $I = f(U)$, соответствующая разряду с плоским катодом, имеет на графике обычный вид, причем в режиме нормального разряда наблюдается достаточно большой горизонтальный участок возрастания разрядного тока при постоянном анодном напряжении, а в области аномального режима возрастание тока происходит с увеличением напряжения.

Вольт-амперная характеристика тлеющего разряда с системой полых катодов имеет отличие не только по величине напряжения и форме, но и по структуре данной характеристики. В этом разряде зависимость $I = \varphi(U)$ имеет вид ступенчатой линии с небольшим подъемом. На любом участке этой характеристики ток возрастает на $(1,0 \div 1,2) \cdot 10^{-2}$ A при постоянном напряжении. Напряжение, в свою очередь, после указанного увеличения тока возрастает скачком на 6—8 V (см. рис. 2). Полученная ступенчатая форма данной зависимости на графике имеет вид ломаной линии с одинаковыми звеньями.

Образование ступенчатой вольт-амперной характеристики имеет следующие причины:

Когда в разрядном устройстве электрод со сферическими полостями выполняет роль катода, при плавном увеличении анодного напряжения в режиме полого катода включаются сразу не все сферические полости, а последовательно, одна за другой. При развитии эффекта полого катода в одной полости происходит возрастание тока при постоянном напряжении. В результате того, что размер сферической полости сравнительно мал и ее внутренняя площадь мала, возрастание тока будет ограничено. Дальнейшее увеличение тока возможно лишь при значительном увеличении напряжения. Поскольку над цилиндрическим отверстием первой сферической полости находится яркое отрицательное свечение грибовидной формы, у соседней сферической полости возрастает ионизация. При новом увеличении электрической мощности происходит не увеличение тока, а возникновение эффекта полого катода во второй сферической полости. Здесь также возрастание тока происходит при постоянном анодном напряжении. При новом увеличении мощности в режиме полого катода включается третья сферическая полость и т. д. Включение в разряд сферических полостей идет по окружности поочередно в одном или двух направлениях.

Установленная ступенчатая статическая вольт-амперная характеристика в данном тлеющем разряде не наблюдается не только в разряде с плоским катодом, но даже не обнаруживается в разряде с полым катодом, имеющим форму полого цилиндра, отдельной сферической полости, двух пластин и др.

Таким образом, тлеющий разряд с рассмотренной геометрией разрядного промежутка позволяет обнаружить еще одно характерное свойство разряда с полым катодом. Его исследование в различных газах и других условиях представляет определенный интерес.

Тлеющий разряд с такой геометрией и такими свойствами может найти применение в различных прикладных вопросах, например в таких, как кодирование и преобразование информации, многоступенчатая стабилизация и автоматическое регулирование напряжения и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. И. Москалев, Разряд с полым катодом, изд. Энергия, М., 1969.
- 2 E. Badache, C. Popovici and J. Jova, Ann. Phys., 15, 313 (1965).
- 3 F. Wächter, Ann. Phys., 8, 31 (1961).
- 4 В. А. Тиманюк, В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, Вестник Харьковского университета, 110, Радиофизика и электроника, вып. 3, 110 (1974).

О ПОГЛОЩЕНИИ МИКРОВОЛН В ПЕСЧАНЫХ И ГЛИНИСТЫХ ГРУНТАХ

С П Мовчан, Н А Старченко

Для решения ряда народно-хозяйственных задач необходимы сведения о величине электрических параметров грунтов различного состава и зависимости их электрических свойств от влажности и частоты. В работах [1-4] приведены результаты определения указанных параметров грунтов различной влажности в различных частотных диапазонах. Наиболее широкий диапазон 0,8—226 см был выбран авторами работы [2], при чем были измерены электрические параметры песчаного и глинистого грунтов методом короткого замыкания с помощью измерительных волноводов. Недостатком метода является трудность получения однородной по плотности набивки измерительных волноводов в случае пластичных грунтов с влажностью выше 10—15 %. Кроме того, дополнительный разброс экспериментальных значений относительной электрической проницаемости ϵ' и коэффициента затухания α ($\text{дБ}/\text{м}$) при влажностях песчаных и глинистых грунтов менее 10 % были вызваны неизбежным подсыханием рабочих образцов [2].

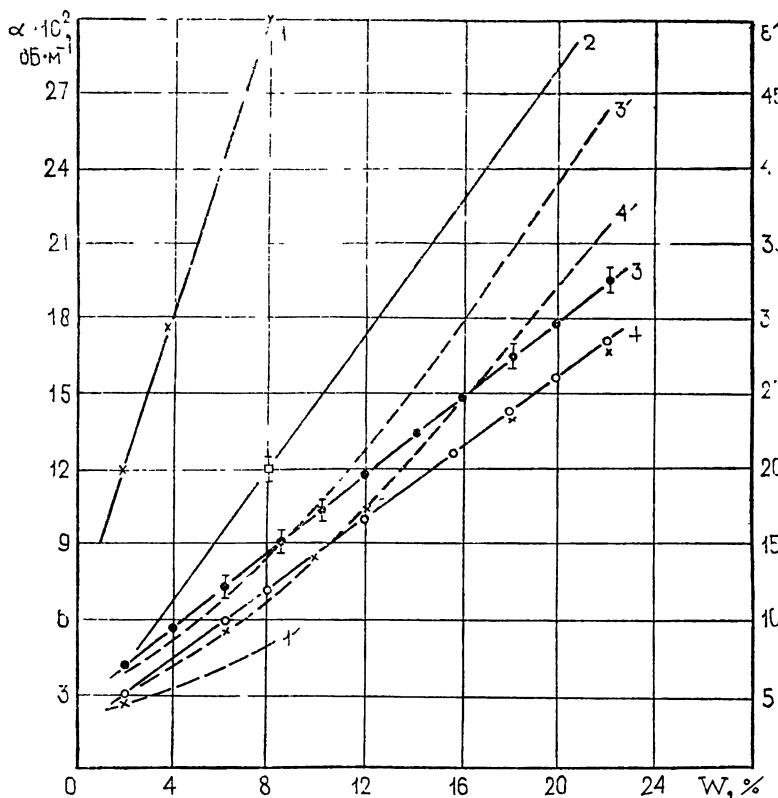


Рис. 1. Электрические параметры песчаных и глинистых грунтов (α — сплошные линии, ϵ' — пунктирные). 1 и 1' — песок, $\lambda = 0,8 \text{ см}$; 2 — грунт, $\lambda = 2 \text{ см}$ [1]; 3 и 3' — суглинок, $\lambda = 3,2 \text{ см}$, $d = (11, 15, 18) \pm 1 \text{ мм}$; 4 и 4' — песок, глина, $\lambda = 3,2 \text{ см}$, $d = (17, 20, 23) \pm 1 \text{ мм}$.

В связи с этим нами для определения коэффициента затухания при различной влажности грунтов был выбран метод поглощения микроволновой мощности в рабочем образце, который располагался в свободном пространстве между передающей и приемной рупорными антеннами. Измерения были проведены в диапазоне волн $\Delta\lambda = 0,8 \div 3,2 \text{ см}$, который обеспечивает максимальную чувствительность. Снижение погрешности измерения из-за дисперсного состояния сыпучих сред (песков, глин, суглинков) достигалось нами за счет измерения сред с крупнодисперсными частицами на длине волн $\lambda = 3,2 \text{ см}$, а мелкодисперсных сред (просеянного песка) — на длине волн

$\lambda \approx 0,8 \text{ см}$. Измерения на длине волны менее 8 мм нецелесообразны из-за рассеяния микроволн на частицах анизотропной рабочей среды. Исследовались образцы с различной толщиной d . Рабочие образцы горных пород различной толщины выбирались либо как часть парафинированных образцов, представленных изыскателями, либо как материал из карьеров, которым заполнялась кювета.

Основная задача экспериментальных исследований заключалась в определении зависимости коэффициента затухания α ($\text{dB}/\text{м}$) микроволновой мощности от влажности (в процентах) песков, суглинков и глин. Влажность исследуемых образцов W контролировалась с хорошей степенью точности (в пределах $\pm 0,1\%$) аналитическим весовым методом, соответствующим ГОСТу, и задавалась в интервале, представляющем практический интерес: 2—10% — для песков, 2—24% — для суглинков и глины.

Результаты измерения коэффициента погонного затухания α в песчаных, суглинистых и глинистых грунтах в указанном диапазоне влажности приведены на рис. 1. Здесь же представлены результаты (зависимость 2), полученные в работе [1] для грунта с влажностью до 20% методом короткого замыкания на длине волны $\lambda = 2 \text{ см}$. Коэффициент затухания α для всех грунтов увеличивается с ростом влажности W и уменьшением длины волны зондирующего сигнала. При этом значения α в песчаном и глинистом грунтах на длине волны $\lambda = 3,2 \text{ см}$ совпадают (зависимость 4 на рис. 1) и близки к значениям α для суглинков (зависимость 3). Аналогичный результат для влажных песчаных и глинистых грунтов наблюдался и авторами работ [1, 2] при длинах волн $\lambda \leq 3 \text{ см}$.

Таким образом, описываемый метод определения затухания, как и метод короткого замыкания, применявшийся в [2, 3], показывает, что зависимость α от длины волны при $\lambda \leq 3 \text{ см}$ обусловливается, в основном, поглощением микроволн молекулами воды. Небольшое количественное отличие в зависимостях 3 и 4 может быть вызвано более существенным влиянием на поглощение обменного комплекса суглинков. Предлагаемый метод позволяет наряду с измерением затухания определять значения относительной электрической проницаемости ϵ' песчаных и глинистых грунтов заданной влажности.

На рис. 1 пунктирными линиями изображены зависимости ϵ' от W . Связь между α и ϵ' описывается эмпирическим соотношением, приведенным в работе [1],

$$\alpha (\text{dB}/\text{м}) \approx 2,62 \frac{(\epsilon' - 3,0)^{0,635}}{\lambda_{1,24}}.$$

Соотношение наиболее применимо в диапазоне $\Delta\lambda$ от 0,8 до 3 см для грунтов с влажностью $W \geq 4\%$, так как введенная поправка, равная трем, определена как средняя электрическая проницаемость сухого грунта.

Учитывая возможные отличия в параметрах (плотность, минералогический состав и т. д.) рабочих образцов, соответствие приведенных на рис. 1 результатов данным, полученным в работах [2] и [3], можно считать удовлетворительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 2, 205 (1968).
2. Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, В. Д. Шумилин, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 4, 592 (1971).
3. A. W. Straiton and C. W. Tolbert, J. Franklin Institute, 246, № 1, 13 (1948).
4. Э. И. Пархоменко, Электрические свойства горных пород, изд. Наука, М., 1965.

Харьковский автомобильно-дорожный институт

Поступила в редакцию
16 мая 1977 г