

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Основной Закон нашей жизни | 471 |
| Брянцев В. Ф. Исследование кругосветных сигналов в экваториальной зоне Атлантики | 476 |
| Вигдорчик Н. Е. Тензор напряжений для плазмы в высокочастотном электромагнитном и постоянном электрическом полях с учетом столкновений | 481 |
| Беллюстин Н. С. Линейная трансформация волн в ионосфере и образование ионных свистов | 487 |
| Каладзе Т. Д., Кринберг И. А. Возбуждение электростатических циклотронных колебаний ионосферной плазмы при фотоионизации | 494 |
| Введенский В. Н., Кузнецов Ю. А., Черняев Е. Н. К вопросу об определении статистических характеристик огибающей нестационарных радиосигналов по данным эксперимента | 505 |
| Овчинников А. О. К учету конечной проводимости при распространении магнитогидродинамических волн в неоднородных средах | 511 |
| Носков Н. Н. О проблеме турбулентного «динами» | 514 |
| Власов С. Н., Гапонов В. А., Еремина И. В., Пискунова Л. В. Самофокусировка волновых пучков с эллиптической поляризацией | 521 |
| Яковлев В. П. Оценка протяженности финитного входа | 528 |
| Музычук О. В. О статистических характеристиках осциллятора с флукутирующими параметрами | 534 |
| Потемкин В. В., Бузько А. М., Тарасов М. А. Влияние внешних случайных полей на магнитный шум | 540 |
| Саичев А. И. О лучевом описании тонкого волнового пучка в случайно-неоднородной среде | 543 |
| Юрков Н. К. К вопросу об описании поляризационных свойств зеркальных антенн | 551 |
| Коробкин В. А., Хижняк Н. А. Волноводно-диэлектрический резонанс диэлектрического образца в прямоугольном волноводе | 558 |
| Исаев В. А., Круглов В. Н., Лунин Н. В., Марков Г. А., Полуяхтов Б. К. О распространении интенсивной электромагнитной волны в условиях СВЧ-пробоя газа в волноводе | 566 |
| Лупан Ю. А., Красецкий А. А. Импульсный высокочастотный пробой воздуха у индуктивной диафрагмы в волноводе | 572 |
| Милантьев В. П. К теории движения заряженных частиц в высокочастотных полях в присутствии сильного магнитного поля | 582 |
| Ванке В. А., Зайцев А. А., Мошков А. В. Роль несинхронной пространственной гармоники в ЛВВ с поперечным полем | 590 |
| Лузин Н. Н. О высокочастотном разряде на острие симметрично возбужденного конуса | 595 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Сысоев Ю. В. Регистрирующее устройство, применяемое в радиоастрономии и технике антенных измерений | 605 |
| Газазян Э. Д., Лазиев Э. М., Тер-Погосян А. Д. Отражение волны от движущейся закорачивающей стенки в волноводе | 606 |
| Калинин М. И. Об одногрупповом приближении для линейной динамической системы со многими флукутирующими параметрами | 608 |

Хроника

IV Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере 610

Аннотации депонированных статей

| | |
|---|-----|
| Боравенков В. Н., Голиков О. Б., Смирнов Л. И., Устинов Б. А. Распространение электромагнитных сигналов в однородной слабоионизированной поглощающей плазме | 612 |
| Боравенков В. Н., Устинов Б. А. Импульсная характеристика однородной диспергирующей плазмы с поглощением | 612 |
| Боравенков В. Н., Устинов Б. А. Распространение электромагнитного скачка с заполнением в однородной поглощающей дисперсной плазме | 612 |
| Калмык В. А., Павловская Г. В., Раевский С. Б. Особенности волны E_{01} в круглом двухслойном волноводе с резистивной пленкой | 613 |
| Сиренко Ю. К. Строгое решение задачи дифракции волн на решетке из полу плоскостей со сложной структурой периода | 613 |

ОСНОВНОЙ ЗАКОН НАШЕЙ ЖИЗНИ

Минувший 1977 год стал достоянием истории. В октябре внеочередная седьмая сессия Верховного Совета СССР, действуя от имени советского народа и выражая его суверенную волю, приняла новую Конституцию. Это крупнейшее событие в жизни нашей страны совпало по времени с кануном 60-летия Великой Октябрьской социалистической революции. Связь между этими событиями «гораздо глубже», — отмечал на сессии Л. И. Брежnev. — Новая Конституция — это, можно сказать, концентрированный итог всего шестидесятилетнего развития Советского государства. Она ярко свидетельствует о том, что идеи, провозглашенные Октябрем, заветы Ленина успешно претворяются в жизнь».

Основным итогом пройденного нашей страной исторического пути явилось создание в СССР развитого социалистического общества. Закрепив этот закономерный рубеж в поступательном развитии нашего общества, новая Конституция освещает путь советского народа к заветной цели — построению коммунизма.

Сопоставление конституций, действующих в социалистических и капиталистических странах, позволяет выявить их принципиальные различия. Коротко они сводятся к следующему:

Во-первых, конституции социалистического типа отражают лишь определенный этап на пути строительства коммунистического общества, тогда как буржуазные конституции пытаются увековечить социальные и политические основы господства буржуазии.

Во-вторых, конституции социалистического типа открыто исходят из классового характера государства и демократии, тогда как буржуазные рассматривают государство как явление надклассовое, которое, якобы, может действовать в интересах любого большинства в обществе, основанном на антагонизме классов. Отсюда рассуждения об абсолютной ценности демократических принципов или чистой демократии.

В-третьих, конституции социалистического типа переносят центр тяжести на гарантию свобод и прав граждан, тогда как буржуазные ограничиваются их формальным провозглашением.

Конституция СССР 1977 года — выдающийся документ советского правотворчества. Она базируется на марксистско-ленинском анализе социально-экономических и политических процессов и тех изменений, которые произошли во всех сферах жизни первого в мире государства рабочих и крестьян, а также на мировой арене со временем вступления в силу Конституции 1936 года. Всенародное и заинтересованное обсуждение проекта новой Конституции, в котором приняло участие свыше 140 миллионов человек, позволило Генеральному секретарю ЦК КПСС Л. И. Брежневу заявить на сессии, что ее творцом явился весь советский народ.

Главная, ведущая особенность новой Конституции — дальнейшее расширение и углубление социалистической демократии. Определяя социально-классовую природу Советского государства, она указывает, что «СССР есть социалистическое общенародное государство, выраждающее волю и интересы рабочих, крестьян, интеллигенции, трудящихся всех наций и народностей страны». Статья 19 констатирует, что «социальную

основу СССР составляет нерушимый союз рабочих, крестьян и интеллигенции».

Сохраняя преемственность в принципах, новая Конституция провозглашает коллективный, свободный от эксплуатации труд советских людей основой сплочения всех членов общества, развития социализма и строительства коммунизма, могущества государства, его интернационалистической политики. Высшей целью общественного производства провозглашается наиболее полное удовлетворение постоянно растущих материальных и духовных потребностей людей. И это закономерно, так как в социалистическом государстве человек выступает как высшая социальная ценность.

Новая Конституция подтвердила, что основу всей экономической системы СССР составляет социалистическая собственность на средства производства. Личная же собственность покоятся на трудовых доходах граждан. Конституция 1977 года рассматривает трудовые коллектизы как ячейку политической и хозяйственной организации советского общества. Построение в СССР развитого социализма привело на основе сближения всех классов и социальных групп, правового и социального равенства всех наций и народностей, их братского сотрудничества к возникновению новой исторической общности людей — советского народа.

Новая Конституция законодательно закрепила основную тенденцию в развитии политической системы советского общества, которая находит свое выражение в неразрывной связи представительной демократии с непосредственным демократизмом, социально-политической активностью самих тружеников и их организаций.

Наша страна — страна подлинного народовластия. Формы его на стадии зрелого социализма еще более содержательны, чем ранее. Статья 2 Конституции констатирует, что политической основой нашего общества являются Советы народных депутатов. Все же другие государственные органы подконтрольны и подотчетны им.

Осуществление в СССР всеобщего и равного избирательного права не ограничивается самим актом участия в выборах. Избиратели дают наказы депутатам. Новая Конституция обязывает Советы народных депутатов рассматривать их при разработке планов социально-экономического развития, претворять их в жизнь. Статья 113 обязывает депутата и Советы периодически отчитываться перед избирателями. Конституция сохраняет положение, по которому депутат не должен порывать с производственной или служебной деятельностью. Оно направлено против появления в СССР категории профессиональных парламентариев, огорванных от народа и не зависимых от избирателей. Как известно, этот институт характеризует буржуазную парламентскую систему.

Новая Конституция еще более расширяет непосредственное участие граждан в управлении общественными и государственными делами посредством обсуждения и принятия законов и решений общегосударственного и местного значения. Так, статья 108 гласит, что законы СССР принимаются либо Верховным Советом, либо, по его решению, всенародным голосованием (референдумом). Ярким примером этой непосредственной демократии явился сам факт всенародного обсуждения проекта принятой Конституции. В ходе его в конституционную комиссию поступило около 400 тысяч предложений и поправок. На их основании в проект было внесено 150 поправок и уточнений, не считая редакционных.

Одним из институтов, характеризующих социалистическую демократию, является участие тружеников в органах народного контроля. Народный контроль — действенное средство в борьбе с нарушениями госу-

дарственной дисциплины, проявлениями местничества и узковедомственного подхода, с бесхозяйственностью и расточительством, волокитой и бюрократизмом. Органы народного контроля призваны следить за выполнением государственных планов и заданий, способствовать более четкой и слаженной работе государственного аппарата.

Новая Конституция в специальной статье закрепила руководящую и направляющую роль КПСС, рассматривая ее как ядро всей политической системы, государственных и общественных организаций. Она существует для народа и служит его интересам. КПСС, определяя политическую линию в решении узловых вопросов государственной жизни, действует в рамках Конституции. Оставаясь по своей природе партией рабочего класса, КПСС в условиях зрелого социализма стала авангардом всего народа, принявшего на вооружение марксистско-ленинскую теорию и коммунистические идеалы рабочего класса. Вступление в силу новой Конституции еще более увеличивает ответственность КПСС перед народом.

«По мере того, как советские люди будут решать все более сложные и ответственные задачи строительства коммунизма,— говорил Л. И. Брежнев,— роль Коммунистической партии будет все более возрастать. И это ведет не к ограничению, а ко все более глубокому развитию социалистической демократии — в полном соответствии с Программой нашей партии».

Диалектика развития нашего общества такова, что по мере совершенствования всей политической системы миллионы граждан все более активно участвуют в работе органов власти, народного контроля, правосудия, в управлении производством, социальным и культурным развитием. Рост общественно-политической активности трудящихся, все большее их вовлечение в управление государством и обществом будет способствовать постепенному перерастанию государственности в коммунистическое общественное самоуправление. И новая Конституция будет служить достижению этой цели коммунистического строительства.

Новая Конституция, опираясь на завоевания советского народа во всех областях жизни, существенно расширяет основные права и свободы граждан. Она указывает на социалистический строй как главную гарантию прав и свобод граждан, улучшения условий жизни советского человека.

Конституция 1977 года углубляет содержание тех прав, которыми и ранее пользовался советский человек. Так, право на труд теперь дополняется правом на выбор профессии, рода занятий и работы в соответствии с призванием, способностями и образованием. Это стало возможным в результате огромных достижений в области образования и профессионального обучения. Последнее же само связано с расширением гарантий права на отдых, высвобождения времени для занятий в школах, вузах, на курсах повышения квалификации.

Ранее гарантированное право на материальное обеспечение в случае болезни или потери трудоспособности ныне дополняется правом на охрану здоровья. Даже, казалось бы, простое воспроизведение того, что было в Конституции 1936 года, на поверку оказывается далеко не тем. Если, например, в 1936 году правом на материальное обеспечение в старости пользовалось около миллиона человек, то сейчас им пользуется 46 миллионов советских граждан. За истекшие 40 лет существенно выросли размеры пенсий. Грандиозное жилищное строительство, развернувшееся в нашей стране в послевоенные годы, позволило включить в Основной закон право советского человека на жилище. Кроме того, новая Конституция гарантирует свободу творчества и право советского граждани-

на на критику и внесение конкретных предложений по совершенствованию всех сторон жизни, работы государственных учреждений и пр.

В СССР не только провозглашено, но и реально обеспечено право граждан участвовать в управлении государством. Каждый советский человек может пользоваться свободой слова, печати, собраний. Ему гарантированы свобода совести и убеждений, неприкосновенность личности и жилища, тайна переписки и пр. Новая Конституция содержит положения, которые прямо преследуют цель — исключить из жизни советского общества всякую возможность нарушения прав и свобод граждан.

Таким образом, новая Конституция СССР предоставляет гражданам самые широкие политические и гражданские права и свободы.

Вместе с тем, Основной закон исходит из принципа, что подлинный демократизм невозможен без дальнейшего укрепления общественной и государственной дисциплины, неукоснительного соблюдения всеми гражданами их обязанностей перед социалистическим государством и обществом. Самой природе социализма, при котором интересы общества и личности в основном, главном совпадают, чужда всякая попытка использовать конституционные права и свободы для нанесения ущерба или подрыва основ социалистического строя.

Этого никак не хотят понять наши «доброжелатели» в мире капитала. Проявляя мнимую «заботу» о правах человека в социалистических странах, они раздувают крикливую антисоветскую кампанию по поводу якобы имеющих место в СССР нарушений прав человека. Смысл этой шумихи — навязать советскому человеку извращенное и опошленное буржуазной пропагандой толкование понятий демократии и права, создать видимость существования какой-то оппозиции социальному и политическому строю в СССР, привить трудящимся своих стран взгляд на реальный социализм как антипод демократии, выставить капитализм в выгодном для него свете.

Разоблачая лицемерие и фальшь антисоветской пропагандистской шумихи в «защиту прав человека», Л. И. Брежнев на внеочередной сессии Верховного Совета СССР дал достойную отповедь ее организаторам и вдохновителям. Он говорил, что для трудящихся капиталистических стран «неограниченные права и свободы» на деле отливаются в «право» десятков миллионов на безработицу; «право» больных обходиться без врачебной помощи; «право» национальных меньшинств на униzierительную дискриминацию в труде и образовании, в быту и политической жизни; «право» жить в вечном страхе перед всемогуществом организованного преступного мира и видеть, как печать, радио, телевидение делают все, чтобы воспитывать молодежь в духе эгоизма, жестокости и насилия.

Отличительной особенностью новой Конституции является юридическое закрепление миролюбивого внешнеполитического курса СССР.

Определяя основы своих отношений с внешним миром, советский народ записал в Конституции, что внешняя политика Советского Союза направлена на обеспечение благоприятных международных условий для построения коммунизма в СССР, защиты его государственных интересов, укрепления позиций мирового социализма, поддержки борьбы народов за национальное освобождение и социальный прогресс.

Одновременно она лишний раз подтвердила приверженность СССР политике мира, борьбе за предотвращение агрессивных войн, достижение всеобщего и полного разоружения, последовательному осуществлению принципа мирного сосуществования государств с различным социальным строем.

Новая Конституция СССР — Конституция единого союзного многонационального государства, образованного на основе социалистического федерализма. Основной закон оберегает и снова закрепляет ленинские принципы равенства, свободного самоопределения наций и социалистического федерализма. Он не вносит каких-либо принципиальных изменений в формы советской социалистической федерации.

Это объясняется тем, что сложившиеся в СССР формы национально-государственного устройства наилучшим образом отвечают задачам и тому курсу, который проводят в жизнь КПСС и Советское государство.

Предложения о ликвидации национальной государственности, а также об ограничении суверенитета Советских Социалистических Республик, выдвинутые в процессе обсуждения новой Конституции, были отвергнуты, как искусственная попытка форсировать объективный процесс сближения народов и национальностей СССР, стирания национальных различий и взаимообогащения национальных культур.

Новая Конституция СССР вступила в силу. Она вызывает горячее одобрение миллионов людей во всем мире. Они твердо убеждены, что Основной закон Страны Советов явится мощным маяком, ориентиром для всех народов на их нелегком пути борьбы за свое светлое будущее, мир и социальный прогресс на земле.

БЕЛЯНЦЕВ Е. И.

УДК 621.371.24

ИССЛЕДОВАНИЕ КРУГОСВЕТНЫХ СИГНАЛОВ В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЗОНЕ АТЛАНТИКИ*

В. Ф. Брянцев

Приведены результаты наблюдений, проведенных в экваториальной области на борту научно-исследовательского судна «Боровичи», за прохождением кругосветных сигналов (КС) судового передатчика и сигналов обратного эха (СОЭ) Иркутской станции единого времени. Отмечено улучшение условий приема КС в дневное время при переходе судна из летнего полушария в зимнее. Приведены результаты наблюдений кругосветных и обратных сигналов, распространяющихся вдоль сумеречной зоны

В последние годы исследования кругосветных сигналов проводились в различных районах земного шара [1–5]. Однако большинство из них относятся к средним или высоким широтам. Вместе с тем, большой интерес представляют наблюдения КС в экваториальной зоне, где есть возможность исследовать прохождение сигналов по трассе с любой ориентацией, начиная от полярной и кончая экваториальной.

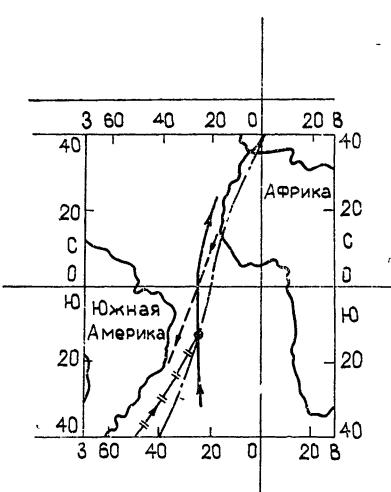


Рис. 1.

Описываемые ниже наблюдения проводились на борту научно-исследовательского судна «Боровичи» в мае–июле 1975 года. За время наблюдений судном пройдены два маршрута, показанные на рис. 1. (сплошная линия и пунктир). В период с 24 до 31 мая был пройден маршрут из Северной Атлантики в Южную (пунктир). Пройдя экватор, судно перешло из летнего полушария в зимнее. Во время перехода на борту судна проводились наблюдения за прохождением кругосветных сигналов. В эксперименте использовался судовой передатчик мощностью порядка 3 кВт, работающий на ненаправленную антенну. Приемная антенна также была ненаправленной. На каждой частоте проводились измерения уровня КС на входе

приемника. Для усреднения амплитуд и регистрации слабых сигналов использовался накопитель, время накопления было выбрано равным 60 секундам.

Перед началом эксперимента, 13 мая, были проведены пробные кругосуточные наблюдения. В это время судно находилось на 10° северной широты вблизи западного побережья Африки. Во время этих наблю-

* Деложено на Всесоюзном совещании «Некоторые вопросы распространения радиоволн в ионосфере и космосе» (Горький, сентябрь, 1976 г.).

дений КС в диапазоне $15 \div 21 \text{ МГц}$ были зарегистрированы в дневные и ранние послезаходные часы. Вечернее прохождение КС закончилось спустя два часа после захода Солнца.

Во время эксперимента, проводившегося с 24 по 31 мая, наблюдения проводились сеансами только в дневные и ранние послезаходные часы. Сеансы проводились раз в $1,5 \div 3$ часа, их расписание было привязано к местному (корабельному) времени. Продолжительность сеанса равнялась 60 минутам. В течение каждого сеанса проводился последовательный поиск КС на частотах, кратных 1 МГц в диапазоне $8 \div 23 \text{ МГц}$.

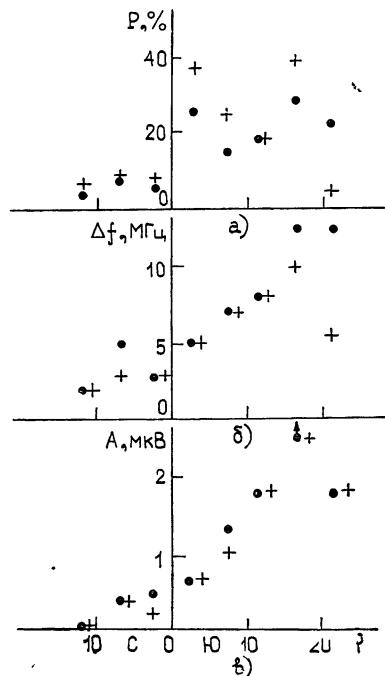
Всего в период с 24 по 31 мая было проведено 43 сеанса наблюдений, из них в 23 был зарегистрирован кругосветный сигнал. Регулярно отмечалось прохождение КС при наблюдениях в послевосходные часы, что свидетельствует о прохождении через точку судна оптимального кругосветного канала (ОКК) [1, 2]. Вместе с тем, кругосветные сигналы нередко наблюдались и в те периоды времени, когда трасса никак не могла попасть в ОКК. Обычно кругосветные сигналы, пересекающие сумеречную зону, регистрировались в течение первой половины дня, хотя в некоторых случаях они зарегистрированы и во второй половине.

На основании полученных данных определялась вероятность появления КС в течение суток (P), максимальная суточная амплитуда КС (A) и полоса частот (Δf), в которой регистрировался КС в течение дня. Под случаем появления КС понималось обнаружение КС на любой из частот в диапазоне $8 \div 23 \text{ МГц}$ в одном сеансе. Если сигнал регистрировался в диапазоне частот, то считалось, что отмечено n случаев появления КС, где n равно полосе частот, в которой регистрировался КС, выраженной в мегагерцах. Вероятность появления КС в течение суток рассчитывалась как отношение числа случаев регистрации КС за сутки к произведению числа сеансов за сутки на ширину полосы частот, в которой проводилось наблюдение. Максимальной суточной амплитудой КС считалась наибольшая из всех измеренных за все сеансы этого дня амплитуда КС в диапазоне $15 \div$

$\div 16 \text{ МГц}$. Этот диапазон был выбран потому, что в нем было зарегистрировано наибольшее число случаев прохождения КС.

Полученные во время эксперимента зависимости P , Δf и A приведены на рисунках 2 а, б, в точками. Из них видно, что по мере перемещения судна из летнего полушария в зимнее все три величины возрастали.

Во время обратного перехода судна, маршрут которого нанесен на рис. 1 сплошной линией, программа работы была изменена. В этой части эксперимента была сделана попытка подробно исследовать ход амплитуд КС в зависимости от времени вблизи момента прохождения через точку судна оптимального кругосветного канала при работе передатчика в различных точках линии терминалов. Наблюдения проводились с 26 июня по 7 июля 1975 г. во время вечерних сумерек в точке корабля. При этом по четным числам проводились наблюдения



кругосветных сигналов судового передатчика на частоте 10 МГц, а по нечетным в это же время принимались сигналы станции единого времени РКМ, расположенной вблизи г. Иркутска и также работающей на частоте 10 МГц. Трасса Иркутск—корабль была в это время близка к линии терминатора. Для примера на рис. 1 нанесен участок линии терминатора (штрих-пунктирная линия) на 20 часов 43 минуты московского времени 30.06.75, а также часть обратной трассы Иркутск—корабль в этот же день (двойной штрих-пунктир). Из рисунка видно, что трасса Иркутск—корабль могла попадать в оптимальный кольцевой канал, и в вечерние часы (по местному времени корабля) на ней можно было ожидать улучшение условий распространения КС. Поочередное наблюдение КС судового передатчика и сигнала обратного эхо (СОЭ) станции РКМ позволило сравнить условия прохождения сигнала вдоль сумеречной зоны при работе передатчика на вечернем (корабль) и на утреннем (РКМ) участках линии терминатора. Перемещение судна происходило вдоль линии терминатора (рис. 1), что позволило провести наблюдения в различных точках вечерней половины линии терминатора. Кругосветный сигнал судового передатчика и сигнал обратного эхо станции РКМ были зарегистрированы 28, 29, 30 июня, 1, 6 и 7 июля. Между 1 и 6 июля, т. е. в те дни, когда судно находилось вблизи экватора, эти сигналы обнаружить не удалось.

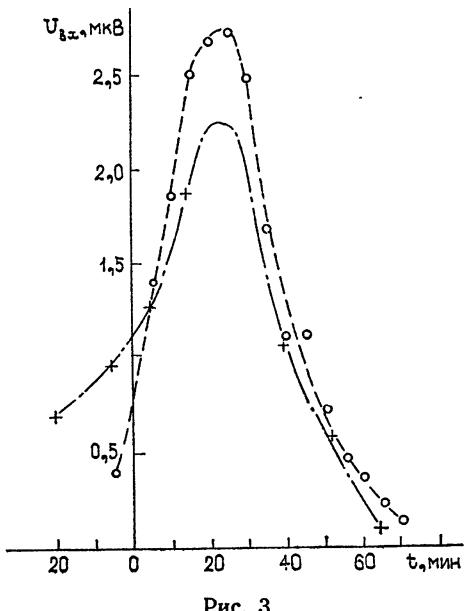


Рис. 3.

На рис. 3 приведена зависимость амплитуд КС и СОЭ от времени, снятая по двум последовательным дням 28 и 29 июня. В это время судно находилось в зимнем, южном полушарии на широте, приблизительно равной 20°. По горизонтальной оси на рисунке отложено время в минутах, отсчитанное от момента захода Солнца на уровне Земли в точке корабля, а по вертикальной — амплитуда сигнала на входе приемника. Кружками отмечен уровень кругосветного сигнала, крестиками — сигнала обратного эха станции РКМ. Из рисунка видно большое подобие амплитудного хода обоих сигналов. Оба сигнала достигали максимальной амплитуды спустя 20 минут после захода Солнца в точке корабля.

Продолжительность прохождения как обратного, так и кругосветного сигналов не превышала 90 минут, а возрастание амплитуды сигнала от минимально обнаружимой до максимальной происходило очень быстро — увеличение амплитуды на 10–15 дБ происходило всего лишь за 20–25 мин. Уменьшалась амплитуда почти так же быстро. То же самое было характерно и для других наблюдений, проведенных как в зимнем, так и в летнем полушариях. Сходство амплитудных характеристик говорит о том, что оба сигнала, по-видимому, распространяются в одном ионосферном канале. Одновременное наблюдение КС и СОЭ в различных точках маршрута свидетельствует о том, что при распространении вдоль линии терминатора кругосветный сигнал может быть зафиксирован, если не вдоль всей трассы, то по крайней мере на

ряде ее участков, лежащих как на восходной, так и заходной частях линии терминатора. Этот результат согласуется с другими наблюдениями КС и СОЭ [1-3, 6, 7], которые проводились как в вечерние, так и в утренние сумерки.

Как отмечалось выше, в вечерние часы КС пропадали спустя 90 минут после заката, т. е. могли наблюдаваться лишь на трассах, пересекающих линию терминатора под углом, не большим $20 \div 25^\circ$. Вместе с тем, в зимнем полушарии в дневное время КС наблюдались также и в те часы, когда их трасса не могла пересекать линию терминатора под углом, меньшим 50° . Из этого следует, что вход в кругосветный канал или выход из него на трассах, пересекающих линию терминатора под углом, большим 25° , на ночных участках был невозможен. Можно предположить, что КС на этих трассах распространялись на ночной стороне в оторванном от Земли канале, как это описано в [4].

На рис. 2 а, б, в крестиками отмечены значения P , Δf и A только для дневных сеансов, которыми считались сеансы, проведенные не раньше, чем через два часа после восхода, и не позднее, чем за два часа до захода Солнца в точке корабля. Как видно из рисунка, условия прохождения КС в дневное время существенно улучшались по мере движения судна.

Если этот эффект в первую очередь является следствием перехода судна из летнего полушария в зимнее, то в одной точке он должен проявиться в сезонных изменениях условий прохождения КС. Исследования сезонных изменений вероятности появления КС описаны в [5]. Эти наблюдения, проводившиеся вблизи г. Хабаровска, показали увеличение вероятности появления КС днем в зимнее время по сравнению с летним днем, что согласуется с описанными выше результатами. Вместе с тем в этих наблюдениях отмечено прохождение КС летней ночью, чего не обнаружено в наблюдениях на корабле. Возможно, что это различие объясняется различием широт точек наблюдения.

Отметим еще одно различие в характеристиках КС в дневное и сумеречное время. На рис. 4 приведены гистограммы, показывающие количество случаев обнаружения КС на различных частотах в процентах по отношению к общему числу сеансов. Сплошная линия относится к сеансам, приведенным в сумеречные часы, а пунктир — к дневным сеансам. Из рисунка видно, что в сумеречные часы КС наблюдались на более низких частотах, чем в дневное время. Вдоль сумеречной зоны были зарегистрированы КС на частотах вплоть до 8 МГц . В дневное время КС не были зафиксированы на частотах ниже 12 МГц . Однако происходило расширение диапазона частот в область более высоких частот.

Подводя итог всему изложенному, можно сделать следующие основные выводы.

1. В описанном эксперименте часто наблюдалось прохождение КС вдоль сумеречной зоны, причем КС на частоте 10 МГц , по-видимому, можно было наблюдать на многих участках трассы, лежавших как на восходной, так и на заходной частях линии терминатора.

2. В зимнем полушарии в дневное время наблюдались КС, пересекающие линию терминатора под значительными углами, достигавшими

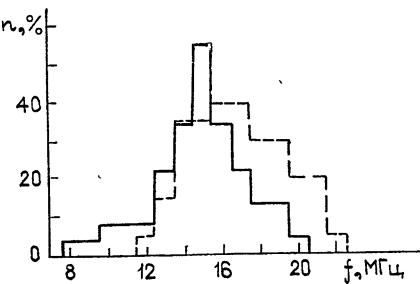


Рис. 4.

значений, больших 50° . Обнаружить КС на таких же трассах в ночной части летнего полушария не удалось.

3. По мере движения судна из летнего полушария в зимнее отмечалось улучшение условий прохождения КС в дневное время. Днем кругосветные сигналы в среднем наблюдались на более высоких частотах, чем в сумеречные часы.

Сравнивая описанные результаты наблюдений КС с результатами, полученными в средних и высоких широтах [1-3, 6, 7], можно отметить, что в экваториальной области, по-видимому, существуют лучшие условия для регистрации КС, о чем свидетельствуют регулярное обнаружение КС в широком диапазоне частот и сравнительно высокие уровни принимаемого сигнала.

Регистрация КС в течение длительного времени оказалась возможной, несмотря на небольшую мощность передатчика и применение ненаправленных антенн. Кругосветные сигналы были зарегистрированы на трассах, пересекающих линию терминатора под большими углами, что в средних широтах удается сделать только при применении мощных передатчиков и остронаправленных антенн.

Вместе с тем отметим, что оптимальный кругосветный канал, обнаруженный ранее в средних и высоких широтах, [1, 2, 5-7], удалось проследить и в экваториальной зоне, о чем говорят результаты наблюдения КС и СОЭ в сумеречные часы. В связи с этим представляется целесообразным одновременное проведение в дальнейшем наблюдений в различных точках ОКК, находящихся в разных широтах, что позволит уточнить расположение ОКК и его характеристики на различных участках.

В заключение автор выражает признательность Е. А. Бенедиктову за обсуждение работы, а также Е. В. Смирнову и Н. П. Шестову за помощь в проведении наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. Ф. Голян, сб. Вопросы распространения коротких радиоволн, ч. 2, М., 1971, стр. 30.
- 2 С. Ф. Голян, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1370 (1975).
- 3 И. Н. Островский, А. Г. Шлионский, сб. Ионосферное распространение коротких радиоволн, М., 1975, стр. 76.
- 4 R. B. Fenwick and O. G. Willard, J. Geophys. Res., 68, № 20, 5659 (1963).
- 5 И. Я. Островский, Ш. Г. Шлионский, сб. Вопросы распространения коротких радиоволн, ч. 2, М., 1974, стр. 52.
- 6 Е. А. Бенедиктов, Н. П. Бенькова, Г. В. Букин, С. Н. Матюгин, Н. А. Митяков, Ю. К. Перехватов, сб. Вопросы распространения коротких радиоволн, ч. 2, 1971, стр. 17.
- 7 Г. В. Букин, В. С. Караванов, С. Н. Матюгин, В. П. Урядов, Геомагнетизм и аэрономия, 15, № 3, 467 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 апреля 1977 г.

INVESTIGATION OF ROUND-THE-WORLD SIGNALS IN THE EQUATORIAL ZONE OF ATLANTIC

V. F. Bryantsev

The results of observations made in the equatorial region on the board of the scientific research ship „Borovichi“ are presented. The propagation of round-the-world signals (RWS) of the ship transmitter and echo signals were observed at the Irkutsk station of common time. It is noted that the RWS reception conditions at the daytime become better when the ship goes from summer to winter hemisphere. The observational data on round-the-world and echo signals propagating along the twilight region are presented.

УДК 533.9.01

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛАЗМЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ И ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ СТОЛКНОВЕНИЙ

H. E. Вигдорчик

Получено выражение тензора напряжений для плазмы, помещенной в высокочастотное электромагнитное и постоянное электрическое поля. Исходными являются кинетические уравнения с учетом столкновений. Рассмотрена слабо ионизированная и полностью ионизованная плазма. Показано, что тензор напряжений для полностью ионизованной плазмы существенно отличен от тензора напряжений для прозрачных сред.

ВВЕДЕНИЕ

Тензор напряжений для плазмы, помещенной в высокочастотное электромагнитное поле с частотой, попадающей в область прозрачности, был получен Питаевским [1]. Исходя из микроскопических уравнений, Перель и Пинский [2] получили тензор напряжений для плазмы с учетом столкновений. В своей работе они показали, что результат Питаевского для тензора напряжений, усредненного по быстрым колебаниям, справедлив, лишь когда характерное время изменения поля много меньше времени свободного пробега. В противоположном предельном случае, когда характерный размер неоднородностей поля много больше длины свободного пробега, результат отличается от результата Питаевского и существенно зависит от характера столкновений.

Однако в ряде случаев требуется найти неусредненное значение тензора напряжений, например, при вычислении спектра колебаний плазмы во внешнем постоянном электрическом поле или при исследовании динамики солитонов в плазме с током.

В настоящей работе рассматривается тензор напряжений для плазмы, помещенной в высокочастотное электромагнитное и постоянное электрическое поля, для случая, когда существенны столкновения частиц. При этом усреднение по быстрым колебаниям не проводится. Оказывается, что тензор напряжений в этом случае состоит из трех частей: части, связанной с квадратом постоянного внешнего поля E_0 , части, квадратичной по амплитуде высокочастотного поля E , аналогичной выражению, полученному Перелем и Пинским, и части, линейной по E_0 и E и обращающейся в нуль при усреднении. Часть тензора напряжений, связанная с квадратом постоянного электрического поля, много меньше постоянной части тензора, связанной с давлением плазмы, и ею можно пренебречь. Все рассмотрение проводится в предположении, что электрическое поле не производит разогрева электронов и ионов.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем исходить из кинетических уравнений для частиц (электронов, ионов, атомов)

$$\frac{\partial f^a}{\partial t} + v_a \frac{\partial f^a}{\partial x_a} + \frac{e_a}{m_a} \left\{ \tilde{E}_a + E_{0a} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{H}}]_a \right\} \frac{\partial f^a}{\partial v_a} = \sum_b S_{ab}(f^a, f^b), \quad (1)$$

Здесь $f^a(r, v, t)$ — функция распределения частиц сорта a , e_a — заряд частицы, m_a — масса частицы, S_{ab} — интеграл столкновений,

$$S_{ab}(f^a, f^b) = \int [f^a(v') f^b(v'_1) - f^a(v) f^b(v_1)] \sigma(|v-v_1|, \vartheta) |v-v_1| d^3v_1 d\Omega, \quad (2)$$

σ — дифференциальное эффективное сечение для столкновения частиц a и b ; v, v_1 и v' , v'_1 — скорости этих частиц до и после столкновения;

$$\tilde{E} = \operatorname{Re} E e^{-i\omega t}, \quad \tilde{H} = \operatorname{Re} H e^{-i\omega t} \quad (3)$$

— напряженности высокочастотного электрического и магнитного полей, E_0 — напряженность постоянного электрического поля.

При этом считаем, что электрическое поле не вызывает разогрева электронов и ионов. По дважды повторяющимся греческим индексам в формуле (1) и далее предполагается суммирование.

Функции распределения будем искать в форме их разложения в ряд Фурье [3]:

$$f^a = \sum_{p=0}^{\infty} \left[f_0^{ap} e^{-p\imath\omega t} + \left(f_1^{ap} \frac{v}{v} \right) e^{-p\imath\omega t} + \text{к. с.} \right]. \quad (4)$$

Здесь f_0^a и f_1^a — симметричная и несимметричная части функции распределения, слабо зависящие от координат и времени.

Пренебрегая высшими гармониками, ограничимся членами, не зависящими от времени ($p = 0$), и членами, меняющимися к основной частоте ω ($p = 1$), что оправдано, если [4]

$$\omega \gg \frac{m}{M-m} v_m,$$

где m и M — массы электрона и атома, v_m — эффективная частота столкновений для передачи импульса при рассеянии электронов на нейтральных частицах.

Подставив f^a , определяемые формулой (4), в (1), получим систему уравнений для симметричной части функции распределения. Будем решать эти уравнения методом, аналогичным [2]. В нулевом приближении по столкновениям система удовлетворяется максвелловскими функциями распределения $\Phi^a(w)$.

В соответствии с этим

$$f_0^a = \Phi^a(w) + \Psi^a(w) + \frac{1}{2} [f_0'^a(w) e^{-i\omega t} + f_0^{a*} e^{i\omega t}], \quad (5)$$

где $w = v - u$, u — гидродинамическая скорость плазмы, w — хаотическая скорость частиц, Ψ^a и $f_0'^a$ — соответственно усредненная и пропорциональная основной частоте поправки к функциям распределения, T — температура в энергетических единицах.

На функции $\Psi^a(w)$, $f_0'^a(w)$ наложим дополнительные условия:

$$\int \Psi^a d^3w = 0, \quad \sum_a \int \Psi^a m_a w_a d^3w = 0, \quad (6)$$

$$\sum_a \frac{m_a}{2} \int \Psi^a w^2 d^3w = 0;$$

$$\int f'_0{}^a d^3w = 0, \quad \sum_a \int f'_0{}^a m_a w_a d^3w = 0, \quad (7)$$

$$\sum_a \frac{m_a}{2} \int f'_0{}^a w^a d^3w = 0.$$

Обычным образом можно показать, что уравнения движения имеют вид

$$\rho \frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \quad (8)$$

где $P_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^0$ — полный тензор напряжений, $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$, $T_{\alpha\beta}^0$ — максвелловский тензор напряжений, $p = \sum_a n_a T$ — полное давление, ρ — плотность,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Тензор $T_{\alpha\beta}$ выражается через функции Ψ^α и $f'_0{}^\alpha$ следующим образом:

$$T_{\alpha\beta} = - \sum_a m_a \int \Psi^\alpha w_a w_\beta d^3w - \operatorname{Re} \sum_a m_a \int f'_0{}^\alpha e^{-i\omega t} w_\alpha w_\beta d^3w. \quad (9)$$

В приближении, линейном по градиентам, функции Ψ^α и $f'_0{}^\alpha$ следует искать без учета градиентов. Тогда получим систему уравнений для $f'_0{}^\alpha$ и Ψ^α :

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e_a}{m_a} E_a^* \frac{\partial f'_1{}^a}{\partial w_\alpha} \frac{\psi}{v} + \frac{e_a}{m_a} E_{0a} \frac{\partial f_1^{0a}}{\partial w_\alpha} \frac{\psi}{v} \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_b S_{ab} \left(f'_1{}^a \frac{\psi}{v}, f'_1{}^b \frac{\psi}{v_1} \right) - \sum_b S_{ab} \left(f_1^{0a} \frac{\psi}{v}, f_1^{0b} \frac{\psi}{v_1} \right) =$$

$$= \sum_b [S_{ab}(\Psi^\alpha, \Phi^b) + S_{ab}(\Phi^\alpha, \Psi^b)];$$

$$- i \omega f'_1{}^a \frac{\psi}{v} + \frac{e_a}{m_a} E_a \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial w_\alpha} + \frac{e_a}{m_a} E_{0a} \frac{\partial f'_0{}^a}{\partial w_\alpha} =$$

$$= \sum_b \left[S_{ab} \left(\Phi^\alpha, f'_1{}^b \frac{\psi}{v_1} \right) + S_{ab} \left(f'_1{}^a \frac{\psi}{v}, \Phi^b \right) \right];$$

$$\frac{e_a}{m_a} E_{0a} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial w_\alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{e_a}{m_a} E_a^* \frac{\partial f'_0{}^a}{\partial w_\alpha} =$$

$$= \sum_b \left[S_{ab} \left(\Phi^\alpha, f_1^{0b} \frac{\psi}{v_1} \right) + S_{ab} \left(f_1^{0a} \frac{\psi}{v}, \Phi^b \right) \right]; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 -i\omega f_0'^a + \frac{e_a}{m_a} E_{0a} \frac{\partial f_1'^a \frac{v}{v}}{\partial w_a} + \frac{e_a}{m_a} E_a \frac{\partial f_1^{0a} \frac{v}{v}}{\partial w_a} = \sum_b [S_{ab}(\Phi^a, f_0'^b) + S_{ab}(f_0'^a, \Phi^b)] + \\
 + \sum_b \left[S_{ab} \left(f_1^{0a} \frac{v}{v}, f_1'^b \frac{v_1}{v_1} \right) + S_{ab} \left(f_1'^a \frac{v}{v}, f_1^{0b} \frac{v_1}{v_1} \right) \right]. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Решение системы можно искать в виде

$$\Psi^a = G_{\alpha\beta}^a(w^2) w_{\alpha\beta} + F^a(w^2) + C_1^a \Phi^a + C_{2a} w_a m_a \Phi^{a'} + C_3 w^2 m_a \Phi^a; \tag{14}$$

$$f_0'^a = D_{\alpha\beta}^a(w^2) w_{\alpha\beta} + E^a(w^2) + C_4^a \Phi^a + C_{5a} w_a m_a \Phi^a + C_6 w^2 m_a \Phi^a, \tag{15}$$

где $w_{\alpha\beta} = w_\alpha w_\beta - \frac{1}{3} w^2 \delta_{\alpha\beta}$.

Для определения тензора напряжений нужны только функции $G_{\alpha\beta}^a$ и $D_{\alpha\beta}^a$. Определим функции $G_{\alpha\beta}^a$ и $D_{\alpha\beta}^a$ и тензор напряжений для случая сильно ионизированной плазмы низкого давления и слабо ионизированной плазмы.

В случае низких давлений, когда $\omega \tau \gg 1$ (τ — время между столкновениями), можно решать систему итерациями, считая интегралы столкновений малыми. Тогда в первом приближении для функции $f_1'^a$ получим

$$\left(f_1'^a \frac{v}{v} \right) = \left(f_1'^{a0} \frac{v}{v} \right) - \frac{1}{i\omega} \sum_b \left[S_{ab} \left(f_1'^{a0} \frac{v}{v}, \Phi^b \right) + S_{ab} \left(\Phi^a, f_1'^{b0} \frac{v_1}{v_1} \right) \right], \tag{16}$$

где

$$f_1'^{a0} \frac{v}{v} = \frac{1}{i\omega} \frac{e_a}{m_a} E_a \frac{\partial \Phi^a}{\partial w_a}.$$

Для функции $f_1'^a$ в том же приближении имеем

$$f_1^{0a} \frac{v}{v} = - \frac{e_a}{m_a} \frac{1}{v_{ab}} E_{0a} \frac{\partial \Phi^a}{\partial w_a}, \tag{17}$$

где v_{ab} — частота столкновений частиц сорта a , рассеивающихся на частицах сорта b .

Функции $f_0'^a$ можно искать в виде (15), причем положим

$$D_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{4\omega^2} \frac{e^2}{T^2} B'_{\alpha\beta} \Phi^a \chi^a, \tag{18}$$

где χ^a — новая неизвестная функция, $B'_{\alpha\beta} = E_{0\alpha} E_\beta + E_{0\beta} E_\alpha$.

Используя тождества, приведенные в [2], и ограничиваясь для простоты случаем полностью ионизованной плазмы, можно показать, что для лоренцева газа выражение для χ^a имеет вид

$$\chi^a = \frac{2}{v_1^*} \left(v_1 - \frac{T}{m} \frac{1}{\omega} \frac{\partial v_1}{\partial w} \right), \tag{19}$$

где v_1 и v_1^* — определяются формулами

$$v_1 = n_a w \int \sigma(w, \vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\Omega,$$

$$\nu_1^* = \frac{3}{2} n_a w \int \sigma(w, \vartheta) \sin^2 \vartheta d\Omega.$$

В рассмотренном случае полностью ионизованной плазмы под σ следует понимать сечение рассеяния электронов с ионами, и для ν_1 и ν_1^* можно получить

$$\nu_1 = 4\pi n_p w \left(\frac{ze^2}{mw^2} \right)^2 \lambda, \quad \nu_1^* = 3\nu_1, \quad (20)$$

где λ — кулоновский логарифм, и индексы e и p относятся соответственно к электронам и ионам.

Функции $G_{\alpha\beta}^a$ можно искать в виде (14), причем положим

$$G_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{4\omega^2} \frac{e^2}{T^2} \Phi^a (B_{\alpha\beta} \gamma^a + B_{\alpha\beta}^0 \Sigma^a), \quad (21)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = E_\alpha^* E_\beta + E_\beta^* E_\alpha,$$

$$B_{\alpha\beta}^0 = E_{0\alpha} E_{0\beta}.$$

Учитывая, что

$$\nu_{te} = \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \nu_{ei},$$

после несложных преобразований можно получить

$$\gamma^e = \frac{1}{\nu_1^*} \left(\nu_1 - \frac{T}{m} \frac{1}{w} \frac{\partial \nu_1}{\partial w} \right) \quad (22)$$

и

$$\Sigma^e = 4z \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \frac{\omega^2}{\nu_1^2} \left[1 - \frac{1}{\nu_1^*} \left(\nu_1 - \frac{T}{m} \frac{1}{w} \frac{\partial \nu_1}{\partial w} \right) \right]. \quad (23)$$

Воспользовавшись формулой (9), получим следующее выражение для тензора напряжений:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{399}{8} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \frac{V^3}{e^6 n \lambda^2 \pi^2 z} \left(B_{\alpha\beta}^0 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B_{11}^0 \right) - \\ - \frac{e^2 n}{4m \omega^2} \left(B_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B_{11} \right) \frac{16}{15} - \frac{e^2 n}{2m \omega^2} \left(B'_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B'_{11} \right) \frac{16}{15} \cos \omega t. \quad (24)$$

Тензор напряжений для полностью ионизованной плазмы при низких давлениях имеет ту же структуру, что и для слабо ионизированной плазмы. Ввиду того, что поле E_0 не греющее, член, пропорциональный $B_{\alpha\beta}^0$, мал по сравнению с давлением плазмы, и им можно пренебречь.

В случае слабо ионизированной плазмы аналогичным образом можно получить следующий тензор напряжений:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta} = & -\frac{e^2}{30T} \left(B_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B_{\gamma\gamma} \right) \int_0^\infty \frac{\nu \Phi^e}{\nu^2 + \omega^2} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{w^5}{\nu_1^*} \right) d^3 w - \\
 & - \frac{2e^2}{15T} \left(B_{\alpha\beta}^0 - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B_{\gamma\gamma}^0 \right) \int_0^\infty \frac{\Phi^e}{\nu} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{w^5}{\nu_1^*} \right) d^3 w - \\
 & - \frac{e^2}{15T} \left(B'_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} B'_{\gamma\gamma} \right) \left\{ \left[\int_0^\infty \frac{(2\nu^2 + \omega^2)}{\nu(\nu^2 + \omega^2)} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\nu_1^* w^5}{\nu_1^{*2} + \omega^2} \right) d^3 w - \right. \right. \\
 & - \int_0^\infty \frac{\omega \Phi^e}{\nu^2 + \omega^2} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\omega w^5}{\nu_1^* + \omega^2} \right) d^3 w \Big] \cos \omega t + \\
 & + \left[\int_0^\infty \frac{(2\nu^2 + \omega^2) \Phi^e}{\nu(\nu^2 + \omega^2)} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\omega w^5}{\nu_1^{*2} + \omega^2} \right) d^3 w + \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^\infty \frac{\omega \Phi^e}{\nu^2 + \omega^2} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\nu_1^* w^5}{\nu_1^{*2} + \omega^2} \right) d^3 w \right] \sin \omega t \right\}.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 39, вып. 11, 1450 (1960).
- В. И. Перель, Я. М. Пинский, ЖЭТФ, 54, вып. 6, 1889 (1968).
- И. Шкарофский, Т. Джонстон, М. Бачинский, Кинетика частиц плазмы, Атомиздат, М., 1969.
- H. Margenau, Phys. Rev., 73, 309 (1948).

Ленинградский технологический институт

Поступила в редакцию
17 августа 1976 г.,
после переработки
22 апреля 1977 г.

THE VOLTAGE TENSOR FOR PLASMA IN HF ELECTROMAGNETIC AND CONSTANT ELECTRIC FIELDS IN THE PRESENCE OF COLLISIONS

N. E. Vigdorchik

The voltage tensor expression is obtained for plasma placed in a HF electromagnetic and constant electric fields. The kinetic equations with allowance for collisions are initial. Weakly ionized and completely ionized plasmas are considered. The voltage tensor for completely ionized plasma differs essentially from that for transparent media.

УДК 621.371.25

ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ И ОБРАЗОВАНИЕ ИОННЫХ СВИСТОВ

H. C. Беллюстин

Рассмотрено линейное взаимодействие нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, которое имеет место в области, где показатели преломления волн сближаются и, в предельном случае, пересекаются (crossover). Коэффициенты трансформации волн найдены методом фазовых интегралов. Показано, что полученные результаты можно успешно использовать в теории образования ионных свистов в земной ионосфере.

После того как на спектрограммах искусственных спутников Земли были обнаружены сигналы сложной формы на частотах нескольких сотен герц [1], получившие впоследствии название ионных свистов, интерес к исследованиям электромагнитных волн этого диапазона заметно возрос. Основные свойства наблюдаемых сигналов можно теоретически объяснить, если учесть влияние однозарядных ионов H^+ , He^+ , O^+ на распространение волн в ионосфере. Зависимость показателей преломления нормальных волн n_1, n_2 от высоты при фиксированной частоте ω и небольшом угле ϑ волнового вектора с внешним магнитным полем качественно имеет вид, изображенный на рис. 1 [2]. На высотах, где $n_1 \approx n_2$, происходит перераспределение энергии между волнами обоих типов из-за линейного взаимодействия волн в неоднородной плазме [3]. Видно, что если источник расположен вблизи поверхности Земли, то в областях I, III, V можно обнаружить лишь правополяризованную R -волну — обычный электронный свист, а в областях II и IV — также и левополяризованную L -волну — ионный свист. Если учесть, что с уменьшением ω значения z_i , $i=1, 2, \dots, 5$ (рис. 1), растут, можно объяснить большую часть экспериментальных данных приходящими снизу широкополосными сигналами естественного происхождения [4].

Вопрос о том, как перераспределяется энергия на уровне взаимодействия, является в теории образования ионных свистов одним из центральных. Джонс [4, 5] предположил, что, хотя приближение геометричес-

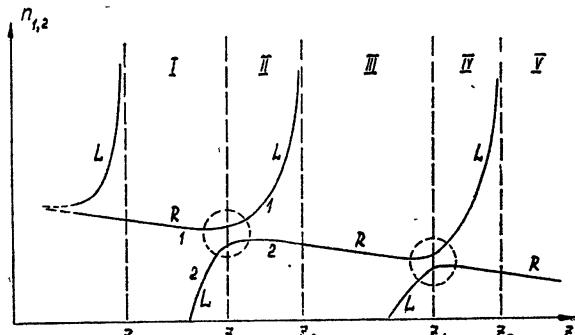


Рис. 1.

ской оптики и нарушается в области $n_1 \approx n_2$, оно может быть взято за основу при описании взаимодействия волн. Тогда согласно [4] при $\vartheta < \vartheta_{kp}$ R -волна после прохождения области взаимодействия остается правополяризованной и ионный свист не возникает, при $\vartheta > \vartheta_{kp}$ происходит инверсия поляризации и образуется L -волна. Величина критического угла ϑ_{kp} возрастает при увеличении соударений и равна нулю в бесстолкновительной плазме; в ионосфере, как правило, ϑ_{kp} не превышает нескольких градусов.

Как отмечалось в [6], результаты геометрооптической теории не согласуются с экспериментальными данными о широтном распределении ионных свистов. Расчеты, сделанные на ЭВМ [7, 8], свидетельствуют о том, что существенное изменение распределения энергии между R - и L -волнами наблюдается при $\vartheta \approx 20^\circ$ и значение этого угла практически не зависит от числа соударений.

В настоящей работе методом фазовых интегралов (ВКБ) рассмотрено взаимодействие волн в случае их вертикального падения и получены результаты, хорошо совпадающие с численными расчетами [7, 8] и экспериментальными данными. В первой части статьи найдены коэффициенты трансформации волн в непоглощающей плазме, во второй — задача решена с учетом поглощения.

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПЛАЗМЕ

Если внешнее магнитное поле лежит в плоскости yz , исходные уравнения для величин $F_+ = E_x + iE_y$, $F_- = E_y + iE_x$ можно записать в виде

$$\frac{d^2F_+}{dz^2} + k_0^2(C + B)F_+ = -ik_0^2AF_-, \quad \frac{d^2F_-}{dz^2} + k_0^2(C - B)F_- = ik_0^2AF_+; \quad (1.1)$$

$$A = \frac{(\epsilon\eta - \epsilon^2 + g^2)\sin^2\vartheta}{2(\epsilon\sin^2\vartheta + \eta\cos^2\vartheta)} \approx \frac{1}{2}\epsilon\tg^2\vartheta,$$

$$B = \frac{g\eta\cos\vartheta}{\epsilon\sin^2\vartheta + \eta\cos^2\vartheta} \approx \frac{g}{\cos\vartheta}, \quad (1.2)$$

$$C = \frac{\epsilon\eta - \frac{1}{2}(\epsilon\eta - \epsilon^2 + g^2)\sin^2\vartheta}{\epsilon\sin^2\vartheta + \eta\cos^2\vartheta} \approx \frac{\epsilon(1 + \cos^2\vartheta)}{2\cos^2\vartheta}.$$

Здесь ϵ , g , η — компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы [9]:

$$\epsilon = 1 - \sum_i \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2},$$

$$g = \sum_i \frac{\omega_{0i}^2 \omega_{Hi}}{\omega(\omega^2 - \omega_{Hi}^2)}, \quad \eta = 1 - \sum_i \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2},$$

ω_{0i} , ω_{Hi} — плазменные и гирочастоты заряженных частиц, составляющих плазму. Приближенные равенства в (1.2) с большой точностью справедливы в низкочастотном диапазоне при $\vartheta \neq \pi/2$. Для продольного распространения (1.1) — два независимых уравнения для циркулярно поляризованных волн. В общем случае система связанных уравнений (1.1) эквивалентна уравнению четвертого порядка для одной из величин

F_{\pm} . Будем считать, что параметры среды меняются достаточно медленно и вдали от области взаимодействия справедливо приближение геометрической оптики:

$$F_+ = \frac{\sqrt{1 + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \left\{ C_1 \exp \left(ik_0 \int n_1 dz \right) + D_1 \exp \left(-ik_0 \int n_1 dz \right) \right\}}{\sqrt{n_1}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \left\{ C_2 \exp \left(ik_0 \int n_2 dz \right) + D_2 \exp \left(-ik_0 \int n_2 dz \right) \right\}}{\sqrt{n_2}} ;$$

$$n_{1,2} = \sqrt{C \pm \sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.4)$$

Во всех приведенных выражениях координата z является по своему смыслу величиной действительной, но можно аналитически продолжить все функции в комплексную плоскость и считать в (1.1) и (1.3) z комплексной переменной. Тогда точное решение системы (1.1) должно быть аналитической функцией во всей комплексной плоскости, в то время как решение (1.3) является многозначным и обращается в бесконечность в точках ветвления $n_{1,2} = 0$ и $n_1 = n_2$. В окрестности этих точек геометрическая оптика непригодна, и для того, чтобы (1.3) было главным членом асимптотики во всех областях комплексной плоскости, необходимо, чтобы на некоторых линиях, выходящих из этих точек (линиях Стокса), изменялись коэффициенты в (1.3). В задачах о распространении волн в неоднородных средах широко используется метод фазовых интегралов, базирующийся на скачкообразном изменении постоянных в асимптотическом разложении (см. [11, 3]).

Если область взаимодействия находится достаточно далеко от других областей, где нарушается геометрическая оптика, волны встречных направлений можно рассматривать независимо; мы положим в (1.3) $D_1 = D_2 = 0$, кроме того, будем считать, что

$$\epsilon = a + bz, \quad 2g = c + dz. \quad (1.5)$$

Равенство $n_1 = n_2$ выполнено в двух комплексно-сопряженных точках $z = z_0 \pm iz_k$, где

$$z_0 = -\frac{ab \sin^4 \vartheta + cd \cos^2 \vartheta}{b^2 \sin^4 \vartheta + d^2 \cos^2 \vartheta},$$

$$z_k = \frac{(ad - bc) \sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{b^2 \sin^4 \vartheta + d^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (1.6)$$

Выходящие из этих точек линии Стокса определяются уравнениями

$$\arg \left(\pm ik_0 \int_{z_0 \pm iz_k}^z \frac{n_1 - n_2}{2} dz' \right) = \pi + 2m\pi \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (1.7)$$

и изображены на рис. 2 плавными кривыми, надписи n_1 и n_2 показывают, какое из слагаемых в (1.3) является спадающим на данной линии. Обозначенные волнистыми линиями разрезы в соответствии

с (1.4) не пересекают действительной оси, при переходе через эти линии $\sqrt{A^2 + B^2}$ меняет знак, а n_1 и n_2 меняются местами.

Наша задача — найти правило изменения коэффициентов в (1.3) при переходе через линию Стокса, соединяющую точки $z_0 \pm iz_k$, в то время как известно, что при переходе через уходящие в бесконечность стоксовы линии коэффициент при спадающем слагаемом меняется на величину, пропорциональную коэффициенту при слагаемом нарастающем. Возьмем для решения слева нижний предел интегралов (1.3) в точке 1, справа в точке 6. Будемходить теперь по пути K , выбирая нижний предел фазовых интегралов в точках 1—6 последовательно, общий множитель $\exp ik_0 \int \frac{n_1 + n_2}{2} dz$, являющийся аналитической функцией, можно при этом не рассматривать. В итоге имеем (см. [10])

$$\begin{aligned} C'_1 &= C_2 (1 + \alpha\beta) e^{\delta_0} - \beta C_1, \\ C'_2 &= C_1 e^{-\delta_0} - \alpha C_2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь α и β — постоянные Стокса, δ_0 — параметр взаимодействия:

$$\delta_0 = -ik_0 \int_1^{z+iz_k} (n_1 - n_2) dz \quad (1.9)$$

— действительная положительная величина. Мы видим, что, если снизу падает R -волна 1 ($C_2 = 0$), соотношение (1.8) однозначно определяет амплитуду и фазу R -волны 2 выше области взаимодействия. Таким образом, доля энергии, прошедшая в R -волну,

$$\tau_{RR} = e^{-2\delta_0}. \quad (1.10)$$

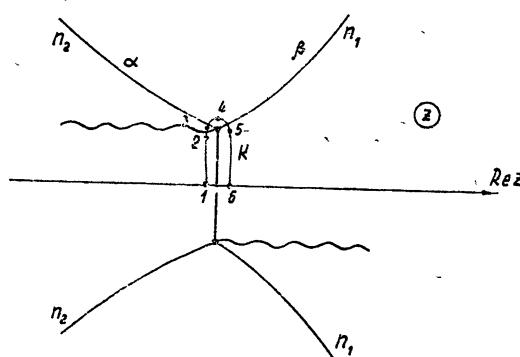


Рис. 2.

Энергетический коэффициент трансформации в L -волну ясен из условия сохранения энергии:

$$\tau_{RL} = 1 - e^{-2\delta_0}.$$

Если угол ϑ не слишком велик и выполнено условие

$$b^2 \sin^4 \vartheta \ll d^2 \cos^2 \vartheta, \quad (1.11)$$

параметр δ_0 легко вычисляется:

$$\delta_0 = \frac{\pi k_0 (ad - bc)^{3/2} \sin^4 \vartheta}{4\sqrt{2} d^{5/2} \cos^2 \vartheta \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta}} = \frac{\ln \sqrt{2}}{q} \frac{\sin^4 \vartheta}{\cos^2 \vartheta \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta}}. \quad (1.12)$$

При условии $qb^2 \ll d^2$, что обычно выполнено, требование (1.11) нарушается лишь при углах ϑ , для которых $\delta_0 \gg 1$ и взаимодействие чисто. Значение угла $\vartheta_{0,5}$, при котором энергия распределяется поровну между R - и L -волнами, можно приближенно записать в виде

$$\vartheta_{0,5} \approx \arcsin \sqrt{\sqrt{\frac{25}{64} q^2 + q} - \frac{5}{8} q}. \quad (1.13)$$

Это выражение и должно заменить критический угол ϑ_{kp} в теории образования ионных свистов [5].

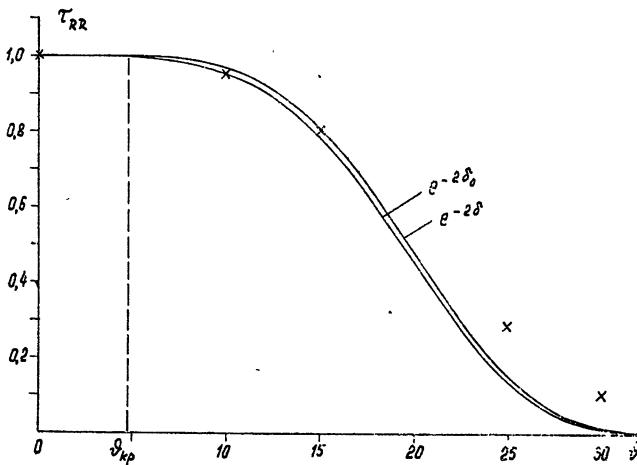


Рис. 3.

В качестве примера возьмем взаимодействие волн частоты $f = 400 \text{ Гц}$ на высоте $z \sim 800 \text{ км}$. Используя приведенное в [7] распределение концентрации частиц, построим по формулам (1.10), (1.12) зависимость τ_{RR} от угла (см. рис. 3), из (1.13) — $\vartheta_{0,5} \approx 19^\circ 20'$. Условие (1.11) в этом случае ($b \approx 4,8 \text{ км}^{-1}$, $d \approx 15,4 \text{ км}^{-1}$) хорошо выполнено даже при $\vartheta \sim 60^\circ$. Точками на рисунке показаны результаты численного счета [7]. Видно хорошее совпадение при $\vartheta \leq 15^\circ$ и различие при больших значениях угла. Это объясняется тем, что длина области взаимодействия $l_{\text{вз}}$ (1.6) растет с ростом ϑ ($\vartheta = 15^\circ$, $z_k \approx 10 \text{ км}$, $\vartheta = 30^\circ$, $z_k \approx 45 \text{ км}$, $\vartheta = 60^\circ$, $z_k \approx 200 \text{ км}$), а в [7] найдено взаимодействие волн в слое толщиной лишь 20 км , который при $\vartheta \geq 15^\circ$ существенно меньше области взаимодействия волн.

2. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН ПРИ УЧЕТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ

Рассмотрим, как влияют соударения в плазме на взаимодействие волн. Формулы (1.1) — (1.5) остаются в силе, но в (1.5) $a = a' + ia''$, $c = c' + ic''$, $a'' > 0$, $c'' > 0$; b и d можно по-прежнему считать действительными, не учитывая фактически изменения поглощения на длине

области взаимодействия. Будем полагать, что поглощение достаточно мало и мнимые части a и c малы по сравнению с действительными, тогда $a'' \sim \nu$, $c'' \sim \nu$, а остальные величины от τ не зависят, здесь ν — эффективное число соударений. Величины z_0 и z_k (1.6) теперь комплексны ($\operatorname{Im} z_0 < 0$), и картина стоксовых линий, определяемых уравнением (1.7), имеет качественно иной вид (рис. 4 а). Поскольку нас не интересует структура поля в области взаимодействия, мы можем деформировать линии скачкообразного изменения постоянных в (1.3) в этой области, как показано на рис. 4 а. Будем считать, что постоянные изменяются на линиях, изображенных на рис. 4 б. Тогда задача становится аналогичной рассмотренному выше случаю без поглощения, и, обойдя по контуру K_1 , получим (ср. (1.7))

$$\begin{aligned} C'_1 &= C_2 (1 + \alpha\beta) e^{-\delta} - \beta C_1, \\ C'_2 &= C_1 e^{-\delta} - \alpha C_2; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin p - \frac{2}{\pi} p \sqrt{1 - p^2} \right) e^{2i\varphi}. \quad (2.2)$$

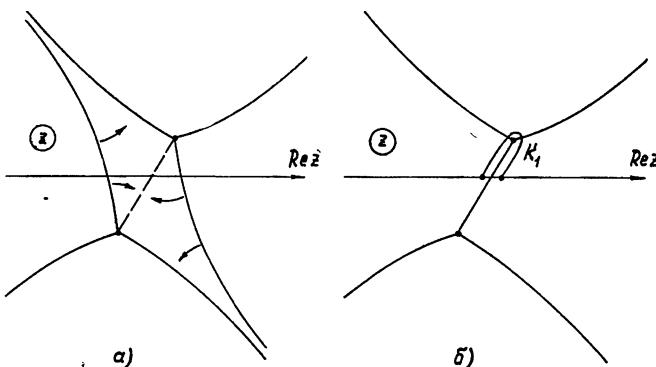


Рис. 4.

Здесь δ_0 имеет вид (1.12), где под a и c нужно понимать a' и c' соответственно, $\varphi = \arg z_k$. Параметр p пропорционален числу соударений:

$$p = \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Re} z_k} = \frac{a''b \sin^4 \vartheta + c''d \cos^2 \vartheta}{(a'd - bc') \sin^2 \vartheta \cos \vartheta} = \frac{\nu}{\nu_{kp}}. \quad (2.3)$$

Энергетические коэффициенты трансформации R - и L -волн определяются формулами

$$\tau_{RR} = e^{-2\operatorname{Re} \delta}, \quad \tau_{RL} = 1 - e^{-2\operatorname{Re} \delta} \quad (2.4)$$

и (2.2). Видно, что учет соударений улучшает прохождение R -волны и ухудшает образование ионных свистов. Если число соударений превышает критическое значение $\nu_{kp}(\vartheta)$, L -волна не образуется. В силу экспоненциального характера зависимости $\tau_{RR}(\vartheta)$ учет поглощения слабо на нее влияет. Для рассмотренного выше примера взаимодействия волн зависимость τ_{RR} при $\vartheta_{kp} = 5^\circ$, $\varphi = 0$ показана на рис. 3. Угол $\vartheta_{0,5}$ изменяется при учете поглощения лишь на величину $\sim 20'$, существенно меньшую критического угла. Этот результат согласуется с выводом [8] о том, что учет соударений практически не меняет зависимости $\tau_{RR}(\vartheta)$.

Автор признателен Н. Г. Денисову за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Smith, N. M. Brice, T. Katsufakis, D. A. Gurnett, S. D. Shawhan, J. S. Belrose and R. E. Barcington, *Nature*, **204**, 274 (1964).
2. D. A. Gurnett, S. D. Shawhan, N. M. Brice and R. L. Smith, *J. Geophys. Res.*, **70**, 1665 (1965).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1967.
4. D. Jones, *J. Atm. Terr. Phys.*, **31**, 971 (1969).
5. D. Jones, *Ann. Geophys.*, **28**, 527 (1972).
6. P. Rodriguez and D. A. Gurnett, *J. Geophys. Res.*, **76**, 960 (1971).
7. T. Wang, *J. Geophys. Res.*, **76**, 947 (1971).
8. E. Fijalkow, C. Altman and H. Sogu, *J. Atm. Terr. Phys.*, **35**, 317 (1973).
9. Электродинамика плазмы, под ред. Ахиезера, изд. Наука, М., 1974.
10. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), изд. Мир, М., 1965.
11. Н. Г. Денисов, Ученые записки ГГУ (серия физическая), **35**, 3 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 апреля 1977 г.LINEAR WAVE TRANSFORMATION IN THE IONOSPHERE
AND ION WHISTLER FORMATION*N. S. Bellyustin*

A linear interaction of normal waves in an inhomogeneous magnetoactive plasma is considered. It takes place in the region where the refractive indexes of waves become similar and crossover each other in the limit case. The wave transformation coefficients are found by the phase integral method. It is shown that the results obtained may be successfully used in the theory of ion whistler formation in the Earth's ionosphere.

УДК 551.510.535

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЦИКЛОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ ФОТОИОНИЗАЦИИ

Т. Д. Каладзе, И. А. Кринберг

Рассматривается неустойчивость электростатических циклотронных колебаний однородной плазмы, состоящей из тепловых электронов и ионов и малой группы быстрых электронов. Предполагается, что тепловые электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, а распределение быстрых электронов является изотропным или слабо анизотропным и характеризуется малым или большим разбросом по модулю скорости. Получены критерии развития неустойчивости и выражения для инкрементов, и исследована их зависимость от соотношения между параметрами тепловых и быстрых электронов. Показано, что в условиях нижней ионосферы образующиеся при фотоионизации быстрые электроны могут возбуждать распространяющиеся перпендикулярно к магнитному полю плазменные волны на циклотронных электронных гармониках с $s = 5 \div 10$.

Генерация плазменных волн на гармониках циклотронной частоты неоднократно наблюдалась как в лабораторных установках [1-3], так и в космической плазме [4, 5], а также интенсивно изучалась теоретически (см. [6, 7] и цитированную там литературу). Значительное число работ посвящено случаю возбуждения таких волн в двухкомпонентной системе из равновесной плазмы и быстрых частиц. При этом распределение быстрых частиц по скоростям обычно считается сильно анизотропным [8-13].

В настоящей работе исследуется возбуждение электростатических колебаний на циклотронных электронных гармониках малой группой быстрых электронов с изотропным или слабоанизотропным распределением по скоростям. Рассматриваются случаи моноэнергетических электронов и электронов с малым и большим разбросом по энергиям. Плазма и магнитное поле предполагаются однородными. Полученные результаты применяются к ионосферной плазме, в которой быстрые электроны (с подобными распределениями по скоростям) образуются при фотоионизации нейтральных частиц солнечным излучением, а длина волны электростатических колебаний много меньше масштаба пространственной неоднородности плазмы и магнитного поля.

Связанная с фотоионизацией неустойчивость плазмы во многом аналогична рассмотренной в [14] неустойчивости, возникающей при изотропном выделении моноэнергетических ионов в ядерных реакциях.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ДНЕВНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Основную массу ионосферных электронов на высотах $h = 120 \div 250$ км составляют тепловые электроны с максвелловской функцией распределения

$$f_0(v) = \frac{n_0}{4\pi} F_0(v) = \frac{n_0}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} v_T^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_T^2}\right), \quad (1)$$

концентрацией $n_0 \approx 10^5 \div 10^6 \text{ см}^{-3}$, температурой $T_e \approx 0,1 \text{ эВ}$ и тепловой скоростью $v_T = \sqrt{T_e/m} \approx 10^7 \text{ см/с}$.

В дневное время в ионосфере, кроме того, всегда присутствует малая группа только что образовавшихся (не успевших претерпеть столкновение) быстрых фотоэлектронов со средней энергией $E_0 \approx 25 \text{ эВ}$ и концентрацией $\delta n \approx 10^{-2} \div 10^1 \text{ см}^{-3}$.

Так как основная часть ионизирующего излучения Солнца сосредоточена в спектральных линиях (или узких участках непрерывного спектра) [15], то функцию распределения фотоэлектронов можно представить в виде суммы:

$$\delta f(v) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(v) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} F_{\alpha}(v) \Psi_{\alpha}(\theta), \quad (2)$$

где

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w v_0^2}} \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2w^2}\right) \quad (w < v_0). \quad (3)$$

Здесь n_{α} — концентрация электронов с энергией $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{hc}{\lambda_{\alpha}} - E_i$ (hc/λ_{α} — энергия фотона, λ_{α} — длина волны, E_i — энергия ионизации нейтральной частицы), $w^2 \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda} v_0^2$ — величина, характеризующая разброс электронов по энергиям, связанный с конечной шириной спектральной линии $\Delta\lambda$ или с интервалом длин волн непрерывного спектра, θ — угол между вектором скорости и магнитным полем Земли \mathbf{B} .

Учитывая, что для отдельной спектральной линии $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ [16], можно взять $F(v)$ и в более простой форме:

$$F(v) = \frac{1}{v^2} \delta(v - v_0). \quad (4)$$

Функция $\Psi(\theta)$ в формуле (2) представляет собой отношение дифференциального сечения $I_{\lambda}(\lambda, \theta_1)$, характеризующего вероятность вылета фотоэлектрона под углом θ_1 к направлению луча света, к полному сечению фотоионизации $\sigma_{\lambda}(\lambda) = \int I_{\lambda}(\lambda, \theta_1) d\Omega$. В случае распространения света вдоль магнитного поля ($\theta_1 = \theta$) имеем [17, 18]

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{4\pi} (1 - \xi P_2(\cos \theta)), \quad (5)$$

где $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$ — полином Лежандра, $\xi = \kappa(\lambda)$ — параметр, характеризующий анизотропию испускаемых фотоэлектронов*. Если же свет распространяется под углом χ к магнитному полю, то распределение электронов, симметричное относительно луча света, не будет иметь такой симметрии по отношению к магнитному полю, т. е. $\Psi(\theta_1) = \Psi(\theta, \varphi)$. Однако уже за период циклотронного вращения

* Следует отметить, что хотя образующиеся при фотоионизации электроны являются анизотропными, однако они не образуют направленного потока (т. е. $j = \int v \delta f(v) dv = 0$), так как сечение $I_{\lambda}(\theta_1)$ есть четная функция от $\cos \theta_1$ [17, 18]. Поэтому сделанное в [19] при анализе связанных с фотозелектронами неустойчивостей предположение $j \neq 0$ является неправильным.

$\frac{1}{\omega_B} = \frac{mc}{eB}$ произойдет усреднение по углу φ , вследствие чего при рассмотрении колебаний с инкрементом $\gamma \ll \omega_B$ можно по-прежнему использовать выражение (5), положив в нем $\xi = \chi(\lambda) P_2(\cos \chi)$ [18, 20].

При изучении влияния анизотропии на возбуждение циклотронных колебаний всю совокупность образующихся фотоэлектронов удобно характеризовать с помощью функции

$$F(v) = \frac{v}{6v_*^4} \exp\left(-\frac{v}{v_*}\right), \quad (6)$$

где $\frac{1}{2}mv_*^2 \sim E_0$ по порядку величины соответствует средней энергии фотоэлектронов. Функция вида (6) приближенно соответствует функции (3) с $w \sim v_0$ (большой разброс по скоростям), однако (6) более удобна при проведении вычислений. Исключение из рассмотрения фотоэлектронов с наименее низкими значениями энергии ($F \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$) оправдано также тем, что коэффициент анизотропии $\chi(\xi)$ близок к нулю при $E < 5 eV$ (при $E = 5 \div 50 eV$ $\chi \approx \text{const} \approx 1/2$ [18] и $\chi = 1$ при $E \gg E_i$ [17]).

Отметим, что функция распределения фотоэлектронов, претерпевших столкновение, также может быть представлена выражением вида (2), (3), (5), однако с более значительным разбросом по скоростям w/v_0 и с меньшим параметром анизотропии $\xi' = \frac{\sigma_h}{\sigma_y + \sigma_h} \xi < \xi$ (σ_y и σ_h — сечения упругих и неупругих столкновений электрона с нейтральными частицами) [20, 21].

2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ

Дисперсионное уравнение для электростатических колебаний плазмы, состоящей из произвольного числа компонент, как известно [6, 7], имеет вид

$$\epsilon_0 = 1 + \sum_{\alpha} \epsilon^{(\alpha)} = 0, \quad (7)$$

где

$$\epsilon^{(\alpha)} = \frac{\omega_{p\alpha}}{n_{\alpha} k^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \frac{J_s^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega - s\omega_B - k_{\parallel} v_{\parallel}}\right)}{\omega - s\omega_B - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left(\frac{s\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{\parallel}} \right) dv. \quad (8)$$

Здесь ϵ_0 — скалярная диэлектрическая проницаемость плазмы, v_{\parallel} и v_{\perp} — составляющие вектора скорости частицы вдоль и поперек магнитного поля, $\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n_{\alpha}/m}$ — плазменная частота, α — компоненты с концентрацией $n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d\mathbf{v}$, $J_s(x)$ — функция Бесселя первого рода. Выражение (7) записано в системе координат с осью z вдоль магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ и волновым вектором $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$, лежащим в плоскости XOZ . Для максвелловской функции (1) тепловых электронов ($\alpha = 0$)

$$\epsilon^{(0)} = \frac{\omega_p^2}{k^2 v_T^2} \left(1 + i \sqrt{\pi} z_0 e^{-x^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(x^2) W(z_s) \right), \quad (9)$$

где $\omega_p \equiv \omega_{p0}$, $x = k_{\perp} v_T / \omega_B$, $z_s = (\omega - s\omega_B) / \sqrt{2} k_{\parallel} v_T$, $I_s(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $W(z)$ — функция Крампа,

Для изотропной функции распределения вида (4) имеем

$$\varepsilon^{(\alpha)} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_0^2} \left(1 + \frac{\omega v_0^2}{2} \int_0^\infty dv v \frac{\partial F}{\partial v} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{J_s^2 \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_B} \right)}{\omega - s \omega_B - k_\parallel v_\parallel} \right). \quad (10)$$

В случае поперечного распространения волн ($k_\perp = k$, $k_\parallel = 0$) равенство (8) можно привести к виду

$$\varepsilon^{(\alpha)} = -\omega_{p\alpha}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2}{\omega^2 - s^2 \omega_B^2} a_s^{(\alpha)}, \quad (11)$$

где

$$a_s^{(\alpha)} = -\frac{2\omega_B^2}{n_\alpha k^2} \int J_s^2 \left(\frac{k v_\perp}{\omega_B} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\perp} \frac{dv}{v_\perp}. \quad (12)$$

Если зависимость функции распределения $f_\alpha(v)$ от угла θ определяется соотношениями (2), (5), то $\frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\perp} = \frac{2+\xi}{8\pi v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial v} - \frac{3\xi}{8\pi} \cos^2 \theta v \times \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F_\alpha}{v^2} \right)$. Тогда, выполняя интегрирование по $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ (аналогично тому, как это сделано в [14] для изотропной функции) и интегрируя по частям по dv , получим

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{\omega_B^2}{k^2} \int_0^\infty J_{2s} \left(2 \frac{k v}{\omega_B} \right) \left((2+\xi) F_\alpha(v) - 3\xi \int_v^\infty F_\alpha(v') \frac{dv'}{v'} \right) dv. \quad (13)$$

Для максвелловского распределения отсюда, как и из (9), получается соотношение

$$a_s^{(0)} = \frac{2}{x^2} e^{-x^2} I_s(x^2), \quad (14)$$

которое при $x^2 \ll 1$ принимает вид

$$a_s^{(0)} = \frac{1}{s!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{s-1}. \quad (15)$$

Для распределения (4) из (13) следует

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{1}{x_0^2} \left((2+\xi) J_{2s}(2x_0) - \frac{3}{2} \frac{\xi}{x_0} \int_0^{2x_0} J_{2s}(t) dt \right), \quad (16)$$

где $x_0 = kv_0/\omega_B$. Выражения (13), (16) при $\xi = 0$ (изотропный случай) переходят в соответствующие формулы работы [14].

Если $F(v)$ определяется формулой (6), то интеграл (13) выражается через элементарные функции:

$$a_s^{(\alpha)} = \left(\frac{\sqrt{4x_*^2 + 1} - 1}{2x_*} \right)^{2s} \frac{1 - \xi + s(2+\xi)\sqrt{4x_*^2 + 1} - 6\xi x_*^2}{3x_*^2 (4x_*^2 + 1)^{3/2}}, \quad (17)$$

а при $x_* = kv_*/\omega_B > 1$ принимает еще более простой вид:

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{s(2+\xi) - 3\xi x_*}{12x_*^4}. \quad (18)$$

Вычислим также значение $a_s^{(\alpha)}$ для функции $F_\alpha(v)$ вида (3) в случае изотропного распределения ($\xi = 0$). Используя теорему сложения для функций Бесселя, из (3), (13) получим

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{2}{x_0^2} e^{-x_1^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2s+2k}(2x_0) I_k(x_1^2), \quad (19)$$

где $x_0 = kv_0/\omega_B$, $x_1 = kw/\omega_B$. Для $x_1^2 \ll 1$, учитывая $I_k(x_1^2) \approx \frac{1}{k!} \left(\frac{x_1^2}{2}\right)^k$, с точностью до членов порядка x_1^2 имеем

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{2}{x_0^2} J_{2s}(2x_0) \left[1 - 2x_1^2 \left(1 - \frac{s^2}{x_0^2} + \frac{1}{2x_0} \frac{J'_{2s}(2x_0)}{J_{2s}(2x_0)} \right) \right]. \quad (20)$$

В другом, предельном случае, $x_1^2 \gg 1$ и $I_k(x_1^2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_1} e^{-x_1^2}$, из (19) следует

$$a_s^{(\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} x_0^2 x_1}. \quad (21)$$

3. ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ($k_\parallel = 0$)

Рассмотрим возбуждение электростатических колебаний в максвелловской плазме с малой группой быстрых электронов при распространении волн перпендикулярно магнитному полю ($k = k_\perp$). Будем рассматривать высокочастотные длинноволновые колебания с большой фазовой скоростью, для которых

$$x^2 = \left(\frac{kv_T^2}{\omega_B} \right)^2 \ll 1 \quad (22)$$

и можно пренебречь движением ионов. Будем считать, что быстрые электроны ($\alpha \neq 0$) составляют малую долю медленных ($\alpha = 0$), т. е.

$\delta_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_{p0}^2} \ll 1$, где n_0 — концентрация медленных электронов с температурой $T_e = mv_T^2$ и равновесной функцией распределения (1).

Дисперсионное уравнение в случае $k_\parallel = 0$, как следует из (7), (11), принимает вид

$$1 - \omega_p^2 \sum_{s_1=1}^{\infty} \frac{s_1^2}{\omega^2 - s_1^2 \omega_B^2} \sum_{\alpha=0} \delta_\alpha a_{s_1}^{(\alpha)} = 0. \quad (23)$$

Будем считать частоту ω близкой к s -й циклотронной гармонике, т. е. $\omega = s\omega_B(1 + \Delta)$, где $|\Delta| \ll 1$. Тогда в сумме по s_1 достаточно сохранить слагаемые с $s_1 = s$, а также член с $s_1 = 1$ и $\alpha = 0$, так как $\delta_0 = 1$ и $a_0^{(0)} = 1$. В результате (23) принимает вид

$$(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - s^2 \omega_B^2) = s^2 \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_B^2) \sum_{\alpha=0} \delta_\alpha a_s^{(\alpha)}, \quad (24)$$

где $\omega_+^2 = \omega_p^2 + \omega_B^2$ ($\omega_p \equiv \omega_{p0}$ — плазменная частота медленных максвелловских электронов).

Рассмотрим решение дисперсионного уравнения в условиях $\omega_+ \approx s\omega_B$, когда оба сомножителя в левой части (24) оказываются одного порядка (случай двойного резонанса). Решая уравнение (24) относительно $\Delta = \omega/s\omega_B - 1$, получим [22]:

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{s\omega_B} - 1 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_+}{s\omega_B} - 1 \right)^2 + \frac{s^2 - 1}{s^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \sum_{\alpha=0} \delta_\alpha a_s^{(\alpha)}}. \quad (25)$$

Как видно из (25), если колебания неустойчивы, то инкремент будет максимальен в условиях точного резонанса $\omega_+ = s\omega_B$. Критерий неустойчивости тогда имеет вид

$$\sum_{\alpha=0} \delta_\alpha a_s^{(\alpha)} < 0 \quad (s \geq 2). \quad (26)$$

Далее будем рассматривать случай, когда в сумме по $\alpha \geq 1$ (т. е. для быстрых электронов) в некоторой области значений волнового вектора k преобладает одно из слагаемых, т. е. $\sum_{\alpha=1} \delta_\alpha a_s^{(\alpha)} \approx \delta_1 a_s^{(1)} =$

$= \frac{n_1}{n_0} a_s^{(1)}$. Так как для максвелловских электронов $\delta_0 = 1$ и, согласно (15), $a_s^{(1)} > 0$, то критерий неустойчивости (26) можно переписать в виде

$$a_s^{(1)} < 0; \quad (27)$$

$$\frac{n_1}{n_0} |a_s^{(1)}| > a_s^{(0)}, \quad (28)$$

где значение $a_s^{(0)}$ для максвелловских электронов определяется равенством (15), а значения $a_s^{(1)}$ для быстрых электронов — одним из соотношений (16)–(21). Неравенство (27) налагает определенные ограничения на функцию распределения быстрых электронов, при выполнении которых возможно развитие неустойчивости, а неравенство (28) отражает влияние малого теплового разброса медленных электронов (т. е. основной электронной компоненты плазмы) на неустойчивость колебаний.

При выполнении условий (27), (28) инкремент колебаний $\gamma = s\omega_B \operatorname{Im} \Delta$ для поперечного распространения волн ($k_{\parallel} = 0$), как следует из (25), оказывается равным [14, 22]:

$$\gamma = \frac{1}{2} s\omega_p \sqrt{\frac{n_1}{n_0} |a_s^{(1)}|}, \quad (29)$$

т. е. инкремент пропорционален квадратному корню из отношения концентраций $n_1/n_0 \ll 1$ быстрых и медленных электронов.

В случае наклонного распространения волн ($k_{\parallel} \neq 0$) инкремент колебаний, как показано в [22], пропорционален самому отношению n_1/n_0 , и, следовательно, такие колебания будут возрастать значительно медленнее. Мы не будем останавливаться на них подробнее, так как оценки показывают, что в ионосфере инкремент циклотронных колебаний при наклонном распространении волн оказывается меньше частоты столкновений.

4. ИЗОТРОПНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Для изотропного распределения $f_1(v) = \frac{n_1}{4\pi} F_1(v)$ быстрых электронов по скоростям развитие неустойчивости (при наличии магнитного

поля) возможно вследствие немонотонной зависимости $F_1(v)$ [14, 22]. В простейшем случае моноэнергетических электронов функция $F_1(v)$ определяется формулой (4), а $a_s^{(1)}(k)$ — формулой (16) при $\xi = 0$. Согласно (27), неустойчивость будет иметь место, если $a_s^{(1)}(k) < 0$. Максимальное отрицательное значение величина $a_s^{(1)}$ принимает в области первого минимума функции Бесселя $J_{2s}(2x_0)$, где $x_0 = kv_0/\omega_B$. Для определения положения этого минимума уже при $s \geq 2$ с точностью порядка 20—30% [23] можно использовать асимптотическое представление

$$J_{2s}(2x_0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi x_0}} \cos \left(2x_0 - \pi s - \frac{\pi}{4} \right), \quad (30)$$

из которого видно, что функция Бесселя принимает наибольшее отрицательное значение $J_{2s}(2x_0) \approx -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{s}}$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}s + \frac{5\pi}{8} \approx \frac{\pi}{2}s$, т. е.

при значении волнового вектора $k \approx \frac{\pi}{2} \frac{s \omega_B}{v_0}$. Инкремент колебаний в этих условиях, согласно (16), (29), (30), становится равным

$$\tau \approx \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \left(\frac{2}{s} \right)^{1/4} \omega_p \sqrt{\frac{n_1}{n_0}}. \quad (31)$$

Условие (28) слабого влияния теплового разброса медленных электронов на неустойчивость колебаний для данного значения волнового вектора k , согласно (15), (16), (30), принимает вид

$$\frac{n_1}{n_0} > \frac{1}{s!} \left(\frac{\pi s}{4} \right)^{2s+1/2} \left(\frac{T_e}{E_0} \right)^{s-1}, \quad (32)$$

где $T_e/E_0 = 2v_T^2/v_0^2$ — отношение энергий медленных и быстрых электронов.

Чтобы оценить влияние на неустойчивость колебаний возможного разброса быстрых электронов по энергиям, вместо моноэнергетического распределения (4) следует использовать распределение (3). Значение $a_s^{(1)}$ тогда определяется формулой (20) и отличается от соответствующего значения (16) для моноэнергетических электронов лишь дополнительным множителем порядка $1 - 2x_1^2 = 1 - \frac{\Delta E}{E_0} x_0^2$, где $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\omega^2}{v_0^2}$ — отрицательный разброс быстрых электронов по энергиям. Наличие этого множителя приводит к дополнительному условию малости энергетического разброса быстрых электронов

$$\frac{\Delta E}{E_0} < \frac{1}{x_0^2} \approx \frac{1}{s^2}, \quad (33)$$

выполнение которого необходимо для развития неустойчивости.

5. АНИЗОТРОПНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим теперь влияние анизотропии, степень которой характеризует коэффициент ξ в формуле (5). Этот коэффициент связан с отношением средних энергий продольного и поперечного движения быстрых электронов (при произвольной зависимости $F_1(v)$) равенством

$\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{5-2\xi}{5+\xi}$, откуда видно, что при $\xi > 0$ $\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} < 1$, при $\xi < 0$ $\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} > 1$ и при $\xi = 0$ $E_{\parallel} = E_{\perp}$ (изотропный случай).

Как видно из (16), в случае моноэнергетических электронов при выполнении условия $J_{2s}(2x_0) < 0$ при $\xi > 0$ анизотропия способствует, а при $\xi < 0$ препятствует развитию неустойчивости (полностью подавляя ее при $\xi < -2$), так как интеграл от функции Бесселя всегда является положительной величиной. Если же функция Бесселя в формуле (16) положительна, то при $\xi > 0$ неустойчивость возможна только вблизи нулей функции Бесселя, а при $\xi < -2$ почти во всей области, где $J_{2s}(2x_0) > 0$. Инкремент колебаний в основном остается того же порядка, что и инкремент γ , определенный формулой (31).

В случае большого разброса быстрых электронов по энергиям, когда $F_1(v)$ определяется формулой (6), неустойчивость возможна только при наличии анизотропии. Необходимое условие ее возбуждения на s -й гармонике, как следует из (17), (18), при $\xi > 0$ имеет вид

$$x_*^2 > \frac{2 + \xi}{3\xi} s. \quad (34)$$

Так как одновременно необходимо и выполнение условия (28), то, согласно (15), (18), это дает критерий

$$x_*^2 < \left(2^{s-3} s! \xi \frac{n_1}{n_0} \right)^{\frac{2}{1+2s}} \left(\frac{T_e}{E_*} \right)^{2-2s}, \quad (35)$$

где $\frac{T_e}{E_*} = \frac{v_T^2}{v_*^2}$ — отношение энергий тепловых и быстрых электронов.

При выполнении неравенств (34), (35) максимальное значение инкремента равно

$$\gamma = \frac{1}{4} s \omega_p \sqrt{(s^2 - 1) \frac{\xi}{x_*^3} \frac{n_1}{n_0}} \approx \xi s \omega_p \sqrt{\frac{n_1}{n_0}}, \quad (36)$$

так как при $\xi \leq 1$ $x_*^2 \approx s/\xi$.

Для отрицательных значений ($\xi < 0$) необходимым (но не достаточным) условием возбуждения неустойчивости, как видно из (17), (18) является неравенство $\xi < -2$.

6. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

Оценим возможность генерации фотоэлектронами электростатических циклотронных колебаний при реальных значениях ионосферных параметров. Для этого воспользуемся данными табл. 1, где приведены значения концентраций n_0 и температуры T_e тепловых электронов в дневной ионосфере, взятые из работ [24, 25], средние значения энергии фотоэлектронов E_0 [26], частоты столкновений электронов с тяжелыми частицами v [24, 27], а также плазменные частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$. Так как на высотах нижней ионосферы магнитное поле Земли $B \approx 0,32$ Гс [28], то $\omega_B = eB/mc \approx 5,6 \cdot 10^6$ с⁻¹, а $s = \sqrt{(\omega_p/\omega_B)^2 + 1} \approx \omega_p/\omega_B \approx 10^{-2} \sqrt{n_0}$, где n_0 — в см⁻³.

Отношение концентраций быстрых и медленных электронов n_1/n_0 можно оценить следующим образом. В локальном квазистационарном приближении (справедливом для нижней ионосферы в дневных условиях [29]) $n_1 = q\tau_n$ и $n_0 = q\tau_R$, где q — скорость образования фотоэлектронов,

$\tau_h = (v_0 \sigma_h N)^{-1}$ — время жизни быстрых электронов (фотоэлектронов), которые исчезают (т. е. термализуются) в результате неупругих столкновений с нейтральными частицами, $\tau_R = (\alpha_R n_i)^{-1}$ — время жизни медленных (тепловых) электронов, гибнущих при диссоциативной рекомбинации. Так как источником тепловых электронов являются потерявшие энергию фотоэлектроны, то в выражениях для n_1 и n_0 скорость образования q одна и та же. Поэтому $\frac{n_1}{n_0} = \frac{\tau_h}{\tau_R} = \frac{\alpha_R}{v_0 \sigma_h} \frac{n_i}{N} \approx \frac{n_i}{N}$. Здесь n_i и N — концентрации молекулярных ионов и нейтральных частиц, $\alpha_R \approx \approx 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ — коэффициент диссоциативной рекомбинации [15, 24], $\sigma_h \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2}$ — значение сечения неупругих столкновений при энергии E_0 , $v_0 = \sqrt{2E_0/m} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Вычисленная по приведенным в [24, 25] концентрациям n_i и N величина отношения n_1/n_0 дана в табл. 1.

Таблица 1

| $h, \text{ км}$ | $n_0 \cdot 10^{-5}, \text{ см}^{-3}$ | n_1/n_0 | $T_e, \text{ эВ}$ | $E_0, \text{ эВ}$ | s | $\omega_p, \text{ с}^{-1}$ | $\gamma, \text{ с}^{-1}$ | $\nu, \text{ с}^{-1}$ |
|-----------------|--------------------------------------|------------------|-------------------|-------------------|------|----------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 120 | 1 | 10 ⁻⁷ | 0,03—0,04 | 40—60 | 3 | $2 \cdot 10^7$ | $2 \cdot 10^3$ | $7 \cdot 10^3$ |
| 150 | 2—3 | 10 ⁻⁵ | 0,07—0,10 | 25—40 | 5 | $3 \cdot 10^7$ | $2 \cdot 10^4$ | $1,4 \cdot 10^3$ |
| 200 | 3—5 | 10 ⁻⁵ | 0,11—0,15 | 20—25 | 6—7 | $4 \cdot 10^7$ | $2 \cdot 10^4$ | $6 \cdot 10^2$ |
| 250 | 5—10 | 10 ⁻⁵ | 0,15—0,18 | 20 | 7—10 | $5 \cdot 10^7$ | $2 \cdot 10^4$ | $7 \cdot 10^2$ |

Значения ω_p и s , приведенные в таблице, показывают, что условие двойного резонанса $\omega = s \omega_B = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_B^2}$ в дневной ионосфере может выполняться на гармониках $s = 3—10$. Чтобы генерация колебаний на этих гармониках действительно имела место, необходимо превышение инкремента колебаний γ над частотой столкновений ν , а также выполнение условий (28), (32), (35) слабости влияния теплового разброса медленных электронов на неустойчивость колебаний.

В случае возбуждения колебаний быстрыми изотропными электронами инкремент γ определяется формулой (31). Вычисленные с ее помощью значения γ сопоставлены в табл. 1 с частотой столкновений ν . Видно, что на высотах $h \geq 150 \text{ км}$ неравенство $\gamma \gg \nu$ выполняется с запасом в 10—30 раз. Довольно жесткие ограничения на генерацию плазменных волн накладывает критерий (32), который выполняется (в случае $n_1/n_0 = 10^{-5}$) для $s = 5$ при $E_0/T_e \geq 300$, для $s = 7$ при $E_0/T_e \geq 150$, для $s = 10$ при $E_0/T_e \geq 100$. Наиболее благоприятные условия для его выполнения существуют в утренние и вечерние часы (в освещенный период), когда средняя энергия фотоэлектронов E_0 увеличивается [26], а температура тепловых электронов T_e уменьшается.

При оценке влияния анизотропии образующихся фотоэлектронов прежде всего учтем, что параметр анизотропии ξ меняется от $-\pi/2$ (когда $\chi = \pi/2$, т. е. свет падает перпендикулярно к магнитному полю) до $+\pi$ ($\chi = 0$ — распространение света вдоль поля). Для характерных энергий фотоэлектронов $E = 10 \div 60 \text{ эВ}$, согласно [18], $\chi \approx 1/2$, что дает пределы $\frac{1}{2} \geq \xi \geq -\frac{1}{4}$. Отсюда видно, что в случае $\xi < 0$ (угол между

лучом света и магнитным полем $\chi > \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{\pi}{3}$) анизотропия не приводит к развитию неустойчивости, так как $|\xi| < 2$. Если $\xi > 0$, то выполнение неравенств (34), (35) и возбуждение неустойчивости возможно при $s \geq 5$ и $\xi \geq 1/s$. При этом инкремент γ , вычисленный по

формуле (36), будет принимать значения, близкие к найденным по формуле (31) и приведенным в табл. 1.

Таким образом, в нижней ионосфере оказывается возможным возбуждение электронных циклотронных колебаний на гармониках $s = 5 \div 10$. Наиболее благоприятные условия для их возбуждения существуют на высотах $160 - 200$ км, где $n_0 \approx (3 \div 5) \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ и $s \approx \omega_p/\omega_B \approx 5 \div 7$, а температура T_e еще не слишком велика ($E_0/T_e = 200 - 300$). Возникновение неустойчивости будет приводить к увеличению скорости обмена энергий между фотоэлектронами и тепловыми электронами, к уменьшению анизотропии и увеличению разброса быстрых электронов по энергиям. Вследствие этого будет происходить «размывание» резких пиков в распределении электронов по энергиям, согласно критерию (33), до величины $\Delta E \approx E_0/s^2 \approx 1$ эВ.

Наличие в плазме неоднородностей плотности делает возможным трансформацию электростатических колебаний с частотой $\omega_+ \approx s\omega_B$ в поперечные электромагнитные волны, выходящие из плазмы. Излучение должно носить пульсирующий характер, так как в тех областях, где выполняется условие $\omega_+ = s\omega_B$, должно наблюдаться резкое увеличение генерируемой мощности.

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Михайловскому за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. W. Crawford, Nucl. Fusion, 5, № 1, 73 (1965).
2. О. С. Павличенко, Л. А. Душин, Ю. К. Кузнецов, И. Ю. Адамов, ЖТФ, 35, № 8, 1394 (1965).
3. Д. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд. Мир, М., 1971.
4. G. E. K. Lockwood, Can. J. Phys., 41, № 1, 190 (1963).
5. W. Calvert and J. R. McAfee, Proc. IEEE, 57, № 6, 1089 (1969).
6. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Атомиздат, М., 1970.
7. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Электродинамика плазмы, изд. Наука, М., 1974.
8. L. D. Peirlstein, M. N. Rosenbluth and D. B. Chang, Phys. Fluids, 9, № 5, 953 (1966).
9. A. Bers and S. Gruber, Appl. Phys. Lett., 6, № 1, 27 (1965).
10. F. W. Perkins, J. Geophys. Res., 73, № 21, 6631 (1968).
11. J. A. Tatarenko and F. W. Crawford, J. Plasma Phys., 4, № 2, 231 (1970).
12. Е. Я. Злотник, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 11, 1652 (1973).
13. Е. Я. Злотник, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 1, 5 (1975).
14. Л. В. Кораблев, ЖЭТФ, 53, № 5, 1600 (1967).
15. Г. С. Иванов-Холодный, Г. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
16. G. W. Cushman, L. Farwell, G. Godden and W. A. Rense, J. Geophys. Res., 80, 482 (1975).
17. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
18. D. J. Kennedy and S. T. Manson, Planet. Space Sci., 20, № 4, 621 (1972).
19. Г. Г. Бутвин, Г. В. Попов, Г. В. Хазанов, Космич. исслед., 13, № 4, 607 (1975).
20. И. А. Кринберг, Геомагн. и аэрономия, 15, № 6, 982 (1975).
21. I. A. Krinberg, L. A. Garifullina and L. A. Akatova, J. Atm. Terr. Phys., 36, № 11, 1727 (1974).
22. Т. Д. Каладзе, К. Н. Степанов, УФЖ, 16, 1631 (1971).
23. В. Н. Фадеева, М. К. Гавурин, Табл. функций Бесселя, Гостехтеориздат, М. — Л., 1950.
24. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
25. С. И. Белинская, А. В. Виницкий, В. В. Кошелев, Препринт СиБИЗМИР, СО АН СССР, № 7—76, Иркутск, 1976.
26. Л. А. Акатова, И. А. Кринберг, сб. Физика ионосферы, изд. Наука, М., 1976, стр. 104.

27. Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
28. В. Хесс, Радиационный пояс и магнитосфера, Атомиздат, М., 1972.
29. И. А. Кринберг, Н. Н. Климов, Б. Н. Величанский, Геомагн. и аэроно-
мия, 9, № 3, 557 (1969).

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосфера и распространение радиоволн
СО АН СССР

Поступила в редакцию
13 февраля 1976 г.,
после доработки
15 августа 1977 г.

EXCITATION OF ELECTRO-STATIC CYCLOTRON OSCILLATION OF IONOSPHERIC PLASMA AT PHOTO-IONIZATION

T. D. Kaladze, I. A. Krinberg

The instability of electro-static cyclotron oscillations of a homogeneous plasma consisting of thermal electrons and ions and a small group of fast electrons is considered. It is assumed that the thermal electrons have the Maxwellian velocity distribution and the fast electron distribution is isotropic or weakly anisotropic and characterized by a small or large velocity modulus scatter. The criteria of the instability development and expressions for the increments are derived. Their dependence versus the relation between the parameters of thermal and fast electrons is investigated. It is shown that under the conditions of the lower ionosphere the fast electron formed during photo-ionization may excite plasma waves directed perpendicularly to the magnetic field at cyclotron electron harmonic with $s=5 \div 10$.

УДК 538.56 : 519 25

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОГИБАЮЩЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ ПО ДАННЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

В. Н. Введенский, Ю. А. Кузнецов, Е. Н. Черняев

Для исследования нестационарных мультиплекативных процессов, представляющих собой произведение стационарного эргодического процесса и медленной неизвестной функции времени, предлагается использовать распределение частного независимых отсчетов огибающей. Приведен пример применения метода частного для случая, когда стационарная часть исходного процесса подчиняется закону Рэлея — Райса. Даются рекомендации по практическому применению метода.

Исследование характеристик огибающей радиосигналов в течение многих лет продолжает оставаться одним из основных методов при изучении ионосферы, радиосвязи на длинных трассах, рассеяния радиоволн земной поверхностью и др. Обработка экспериментальных данных при этом обычно заключается в сопоставлении полученных распределений с выбранной теоретической моделью. Непосредственное сопоставление осуществляется путем использования статистических критериев согласия (см., например, [1, 2]). Широко применяется также косвенное сопоставление, которое состоит в сравнении оценки некоторого параметра с его значением для теоретической модели. Чаще всего с этой целью используют либо отношение среднеквадратичного отклонения к среднему значению (или однозначно связанное с ним отношение среднего квадрата к квадрату среднего), либо отношение двух уровней, соответствующих заданным вероятностям их превышения огибающей [3—6].

Строго говоря, такого рода подход применим только к стационарным эргодическим процессам. Однако экспериментаторы в большинстве случаев имеют дело с процессами, не обладающими свойствами стационарности и эргодичности. Чтобы иметь возможность исследования нестационарных процессов, прибегают к приближению квазистационарности, ограничивая время наблюдения и рассматривая процесс как кусочно-стационарный. При выборе оптимального времени наблюдения возникает следующая дилемма: снижение флуктуационной ошибки измерений требует увеличения времени наблюдения, с другой стороны, при его увеличении сильнее проявляется влияние нестационарности, в результате чего возрастает смещение оценки.

На практике нередко встречаются нестационарные процессы, представляющие собой произведение медленной функции времени и стационарного эргодического процесса, для которых имеется возможность разработки методов исследования, практически исключающих влияние нестационарности.

Рассмотрим частное двух значений огибающей нестационарного радиосигнала указанного выше вида:

$$\eta(t, \tau) = \frac{R(t - \tau)}{R(t)} = \frac{x(t - \tau) f(t - \tau)}{x(t) f(t)}, \quad (1)$$

где

$$R(t) = x(t)f(t), \quad (2)$$

$x(t)$ — стационарный эргодический процесс, $f(t)$ — неизвестная медленная функция времени, для которой выполняется следующее неравенство:

$$\left| 1 - \frac{f(t-T_f)}{f(t)} \right| \ll 1 \text{ при } T_f > \tau_x, \quad (3)$$

где τ_x — интервал автокорреляции процесса $x(t)$.

В общем случае характеристики процесса (1) определяются характеристиками процесса $x(t)$, видом функции $f(t)$ и величиной сдвига по времени τ . Однако, если временной сдвиг τ удовлетворяет условию

$$T_f > \tau > \tau_x, \quad (4)$$

то характеристики процесса $x(t)$ с достаточной для большинства практических задач точностью определяются процессом $\eta(t, \tau)$. Строго говоря, процесс $\eta(t, \tau)$, так же как и исходный, не является стационарным, однако можно показать, что обращение с ним как со стационарным и эргодическим процессом приводит к значительно лучшим результатам, чем обработка известными методами исходного процесса в квазистационарном приближении.

В качестве примера практического применения изложенного выше подхода рассмотрим частный случай исследования огибающей, когда процесс $x(t)$ подчиняется закону Рэлея — Райса.

Стандартная процедура вычисления плотности вероятности частного

$\eta_x = \frac{x(t-\tau)}{x(t)}$ дает при этом следующее выражение:

$$W(\eta_x) = \frac{2\eta_x}{(1+\eta_x^2)^2} \left[(1+q) I_0 \left(2q \frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} \right) + 2q \frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} I_1 \left(2q \frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} \right) \right] e^{-q} \quad (5)$$

$$(0 \leq \eta_x < \infty),$$

где $q = A_m^2/2\sigma^2$ — отношение мощностей регулярной и случайной компонент, I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка.

Определим из (5) математическое ожидание величины η_x :

$$\bar{\eta}_x = \frac{\pi}{2} \left[(1+q) I_0 \left(\frac{q}{2} \right) + q I_1 \left(\frac{q}{2} \right) \right] I_0 \left(\frac{q}{2} \right) e^{-q}. \quad (6)$$

Полагая для исходного процесса выполненные условия (3), (4), будем считать

$$\bar{\eta} \approx \bar{\eta}_x. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) следует, что математическое ожидание частного η есть однозначная функция параметра q и при изменении q от 0 до ∞ меняется от $\pi/2$ до 1. Выражение (6) может быть положено в основу определения параметра q . Результат расчета по (6) представлен на рис. 1 и позволяет выделить целесообразную область применения метода $0 \leq q \leq 5 \div 8$.

Отметим, что райсовский нестационарный процесс вида (2) при выполнении условий (3) и (4) может быть исследован на основе соотно-

шения (6) и в том случае, когда параметр q является медленной функцией времени, т. е. когда для функции $q(t)$ выполняются условия (3) и (4). При этом оценка q по параметру η будет представлять некоторое промежуточное значение, заключенное внутри интервала изменения $q(t)$ за время наблюдения.

В рассмотренном примере при оценке флюктуационной ошибки возникает затруднение, связанное с тем, что дисперсия частного расходится. На практике, однако, это затруднение легко преодолеть путем исключения из обработки всех тех значений частного, которые превышают некоторую пороговую величину. Возникающее при этом смещение оценки η соответствующим выбором порога может быть сделано достаточно малым. Так, при $q = 0$ и пороге $\eta_0 = 100$ смещение оценки η не превышает 0,02. Дисперсия частного в этом случае равна 5,806. Отметим здесь, что квантование значений огибающей в свою очередь также снижает дисперсию частного.

Представляет интерес оценка методической погрешности, связанной с неравенством (3), поскольку выражение (7) является точным равенством только в том случае, когда левая часть неравенства (3) равна нулю.

Пусть оценка величины $\bar{\eta}$ производится усреднением $\eta(t, \tau)$ по времени:

$$\bar{\eta}^* = \frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T \frac{x(t - \tau)}{x(t)} \frac{f(t - \tau)}{f(t)} dt. \quad (8)$$

Математическое ожидание оценки $\bar{\eta}^*$ найдем статистическим усреднением выражения (8):

$$\langle \bar{\eta}^* \rangle = \frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T \left\langle \frac{x(t - \tau)}{x(t)} \frac{f(t - \tau)}{f(t)} \right\rangle dt = \bar{\eta}_x \frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T \frac{f(t - \tau)}{f(t)} dt. \quad (9)$$

Методическая погрешность определения $\bar{\eta}_x$ представляет собой разность между $\langle \bar{\eta}^* \rangle$ и $\bar{\eta}_x$:

$$\Delta_m(\bar{\eta}_x) = \bar{\eta}_x \left[\frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T \frac{f(t - \tau)}{f(t)} dt - 1 \right]. \quad (10)$$

Таким образом, в случае, когда известен конкретный вид функции $f(t)$, вычисление этой погрешности не представляет затруднений. В общем случае можно найти ее приближенное значение, если функция $f(t)$ допускает разложение в ряд Тейлора. Ограничиваюсь двумя первыми членами разложения и производя интегрирование, получаем

$$\Delta_m(\bar{\eta}_x) \approx \bar{\eta}_x \frac{1}{N - 1} \ln \frac{f(\tau)}{f(T)} \approx -\bar{\eta}_x \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i, \quad (11)$$

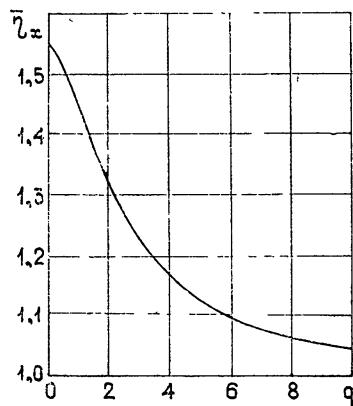


Рис. 1.

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= 1 - \frac{f(i\tau)}{f(i\tau + \tau)} \approx \frac{f'(i\tau)}{f(i\tau)} \tau, \\ N &= E\left(\frac{T}{\tau}\right) \quad (N \gg 1),\end{aligned}\tag{12}$$

$E(v)$ — целая часть числа v .

Теперь для определения интересующей нас погрешности в линейном приближении можно воспользоваться следующим выражением:

$$\Delta_m[q(\bar{\eta}_x)] \approx \frac{dq}{d\bar{\eta}_x} \Delta_m(\bar{\eta}_x), \tag{13}$$

где

$$\frac{dq}{d\bar{\eta}_x} = -\frac{2}{\pi} \frac{e^q}{\frac{q}{2} \left[I_0^2\left(\frac{q}{2}\right) - I_1^2\left(\frac{q}{2}\right) \right] - I_0\left(\frac{q}{2}\right) I_1\left(\frac{q}{2}\right)}. \tag{14}$$

Сравним полученный результат с аналогичной погрешностью для одного из вариантов кусочно-стационарной обработки — широко применяемого метода определения параметра q по величине отношения среднего квадрата огибающей к квадрату ее среднего [3, 4]. Строго говоря, для такого сравнения необходимо определить величину $\langle \bar{R}^{*2}/(\bar{R}^*)^2 \rangle$, где

$$\bar{R}^{*2} = \frac{1}{T} \int_0^T R^2(t) dt; \tag{15}$$

$$\bar{R}^* = \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt. \tag{16}$$

Сравнивая методические погрешности, мы ограничимся случаем достаточно большой статистики, т. е. такой, при которой можно пренебречь статистическим смещением оценки $\bar{R}^{*2}/(\bar{R}^*)^2$. В этом случае

$$\left\langle \frac{\bar{R}^{*2}}{(\bar{R}^*)^2} \right\rangle \approx \frac{\langle \bar{R}^{*2} \rangle}{\langle \bar{R}^* \rangle^2}. \tag{17}$$

Тогда аналогично (13) с учетом выражения (B.4) работы [4] имеем

$$\Delta_m\left[q\left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)\right] \approx \frac{dq}{d\left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)} \Delta_m\left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right), \tag{18}$$

где

$$\Delta_m\left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right) = \frac{\bar{x}^2}{x^2} \frac{\sigma_f^2}{\bar{f}(t)^2}, \tag{19}$$

$$\sigma_f^2 = \bar{f}^2(t) - \bar{f}(t)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt - \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right]^2;$$

$$\frac{dq}{d\left(\frac{\bar{x}^2}{x^2}\right)} = -\frac{\pi}{4} \frac{\left[(1+q)I_0\left(\frac{q}{2}\right) + qI_1\left(\frac{q}{2}\right)\right]^3}{e^q I_1\left(\frac{q}{2}\right)}. \quad (20)$$

Для сравнения методических погрешностей (13) и (18) рассмотрим модуль их отношения:

$$\left| \frac{\Delta_m \left[q \left(\frac{\bar{x}^2}{x^2} \right) \right]}{\Delta_m [q (\bar{\eta}_x)]} \right| = |A B|, \quad (21)$$

где

$$A = (1+q) \left\{ \frac{q \left[I_0^2\left(\frac{q}{2}\right) - I_1^2\left(\frac{q}{2}\right) \right]}{2I_0\left(\frac{q}{2}\right) I_1\left(\frac{q}{2}\right)} - 1 \right\}; \quad (22)$$

$$B = -\frac{\sigma_f^2}{\hat{f}(t)^2} \frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i}. \quad (23)$$

Сомножитель A выражения (21) зависит только от параметра q и при изменении q от 0 до ∞ не принимает значений, меньших единицы. Его максимальное значение, примерно равное 2,5, достигается при $q \approx 2,8$. Величина сомножителя B определяется видом функции $f(t)$. Поэтому из (21) — (23) можно сделать вывод, что метод частного имеет существенно меньшую погрешность оценки параметра q , связанную с наличием мультиплективной нестационарности, по сравнению с аналогичной погрешностью при кусочно-стационарной обработке рассматриваемого здесь вида при $|B| \gg 1/A$, т. е. в тех случаях, когда среднеквадратическое относительное изменение функции $f(t)$ за время наблюдения T значительно превосходит ее среднее относительное изменение на интервале автокорреляции процесса $x(t)$. К подобному заключению можно прийти, рассматривая и другие известные методы кусочно-стационарной обработки.

Математический аппарат для работы со статистическими характеристиками частного до настоящего времени разрабатывался применительно к стационарным задачам, например, для исследования поляризационных характеристик. Однако многие результаты, полученные в этих исследованиях, могут представлять интерес и для рассматриваемой проблемы. Полезные выражения, в частности, содержат работы [7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Митихин, Р. А. Перцовский, Электросвязь, № 9, 27 (1972)
2. В. А. Алимов, Г. П. Комраков, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1581 (1972).
3. Я. Л. Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972
4. И. С. Всехсвятская, Статистические свойства сигналов, отраженных от ионосферы, изд. Наука, М., 1973.

5. К. Л. Афанасьев, Э. В. Большаков, А. А. Гарнакерьян и др., Труды Таганрогского радиотехнического института, вып. 22, 148 (1971).
6. Ю. М. Поплищук, Радиотехника и электроника, 15, № 5, 891 (1970).
7. В. Ф. Неструк, Н. Н. Порфириева, Изв. вузов—Радиоэлектроника, 14, № 3, 253 (1971).
8. С. И. Поздняк, В. Н. Мелитинский, Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1974.

Поступила в редакцию
6 августа 1975 г.,
после переработки
30 июня 1977 г.

THE DETERMINATION OF STATISTICAL CHARACTERISTICS OF ENVELOPE OF NONSTATIONARY RADIO SIGNALS FROM EXPERIMENTAL DATA

V. N. Vvedensky, Yu. A. Kuznetsov, E. N. Chernyaev

The distribution of the quotient of independent envelope readings is suggested to investigate nonstationary multiplicative processes which are represented as the product of a stationary ergodic process and a slow unknown time function. The example of applying the „quotient“ method in the case when the stationary part of the initial process is subject to the Relay—Ryce law recommendations on the practical use of this method are given.

УДК 533.951 : 535.31

**К УЧЕТУ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

A. O. Овчинников

Методом геометрической оптики рассматривается распространение магнитогидродинамических волн в холодной неоднородной плазме. Магнитная вязкость считается отличной от нуля плавнomenяющейся функцией координат. Получены формулы, позволяющие в нулевом приближении вычислить изменение амплитуды и дополнительный фазовый набег при распространении волн. Отмечена необходимость учета малой магнитной вязкости при геометрооптическом описании в рамках МГД.

Геометрическая оптика (ГО) обычно применяется к задачам распространения магнитогидродинамических волн в предположении идеальной проводимости [1]. В [2] оценена роль проводимости и вязкости в частном случае однородной среды. В [3] конечная постоянная проводимость σ учитывается с помощью некоторого асимптотического ряда по обратным степеням σ , а решение имеет существенную особенность при $\sigma \rightarrow \infty$. В настоящей работе в ГО приближении исследуется, как влияет конечная медленно меняющаяся проводимость на распространение возмущений в неоднородной МГД среде, причем полученное решение допускает предельный переход $\sigma \rightarrow \infty$.

Рассмотрим монохроматические ($\exp(-i\omega t)$) магнитогидродинамические процессы в холодной плазме, которые в линейном приближении подчиняются уравнениям (в СИ)

$$\begin{aligned} -i\omega \tilde{\mathbf{H}} &= \operatorname{rot}[\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{H}] - \operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}), \\ -i\omega \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{\mu_0}{\rho} [\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}], \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ — малые возмущения магнитного поля и скорости движения среды; \mathbf{H} , ρ — медленно меняющиеся в пространстве магнитное поле и плотность при отсутствии возмущений в среде, $\eta = 1/\mu_0\sigma$ — магнитная вязкость. Невозмущенное состояние считаем стационарным, среду неподвижной.

При лучевом описании процесса распространения малых возмущений они обычно [4] ищутся в виде рядов по обратным степеням частоты ω :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{i\omega(\tau-t)}}{(i\omega)^k} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{H}_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $t = \tau(r)$ — уравнение фронта волны в момент времени t ,

Будем считать потери настолько малыми и плавнomenяющими, что выполнены соотношения:

$$\omega \eta (\nabla \tau)^2 \ll 1, \quad (3)$$

это неравенство должно выполняться в силу условий применимости МГД (пренебрегаем токами смещения по сравнению с токами проводимости):

$$\lambda |\nabla \eta| \leq \eta, \quad (4)$$

где λ — длина волны. Подставив (2) в (1), учитывая, что члены, содержащие η и $\nabla \eta$, в силу неравенств (3), (4) попадают в уравнения первого приближения и решая полученные уравнения относительно скорости, найдем в нулевом и первом приближении

$$\mathbf{v}_0 - \frac{\mu_0}{\rho} \{ [(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla \tau] \times \nabla \tau \} \times \mathbf{H} = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \frac{\mu_0}{\rho} \{ [(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) \times \nabla \tau] \times \nabla \tau \} \times \mathbf{H} - [\text{rot}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}) \times \nabla \tau] \times \\ \times \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H} - \omega^2 \eta (\nabla \tau)^2 (\mathbf{H}_0 \times \nabla \tau) \times \mathbf{H} + \\ + i \omega \{ [(\nabla \tau \times \mathbf{H}_0) \times \nabla \eta] \times \nabla \tau \} \times \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Приравняв к нулю определитель, соответствующий (5), получим два уравнения эйконала [1]:

$1 - (\nabla \tau \cdot \mathbf{C}_A)^2 = 0$ — соответствует волне Альфвена,

$1 - (\nabla \tau)^2 C_A^2 = 0$ — соответствует быстрой магнитозвуковой волне (БМЗ).

Здесь $\mathbf{C}_A = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \mathbf{H}$, $C_A = |\mathbf{C}_A|$.

Воспользуемся теперь связью между \mathbf{v}_0 и \mathbf{H}_0 [1] и тем, что в силу (5) сумма первых двух членов (6) есть вектор, перпендикулярный \mathbf{v}_0 . Тогда, выбрав альфвеновский эйконал и умножив (6) скалярно на \mathbf{v}_0 , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \left\{ \text{rot}[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \times \nabla \tau \right\} \times \mathbf{H} - \text{rot} \left(\mathbf{v}_0 \frac{\mathbf{H}}{C_A} \right) \times \mathbf{H} + \\ + \frac{\mathbf{H}}{C_A} \eta (\nabla \tau)^2 \omega^2 (\mathbf{v}_0 \times \nabla \tau) \times \mathbf{H} + \left(\frac{\mathbf{H}}{C_A} \right)^2 \mathbf{v}_0 (\nabla \eta \nabla \tau) i \omega \} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение (7) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0 \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} \int_0^h \frac{\eta}{C_A^3 \cos^2 \alpha} dh \right) \exp \left(i \omega \int_0^h \frac{(\nabla \eta \nabla \tau)}{2C_A} dh \right), \quad (8)$$

где h — координата вдоль силовой линии магнитного поля, α — угол между \mathbf{H} и $\nabla \tau$.

При этом мы считаем известным ГО решение \mathbf{v}'_0 в непоглощающем случае $\eta = 0$ [1].

Второй экспоненциальный множитель в (8) соответствует дополнительному набегу фазы. Фактически уравнение фазового фронта в мо-

мент t заменяется на $t = \tau + \int_0^h \frac{(\nabla \eta \nabla \tau)}{2C_A} dh$. Однако, дополнительный набег

фазы на длине волны τ крайне мал в силу соотношений (3) и (4). Здесь τ по-прежнему играет основную роль, в частности v_0 и $H_0 \perp \nabla \tau$.

Неравенство (3) можно переписать в виде

$$\eta \ll C_A \lambda \cos^2 \alpha \text{ — для альфвеновской волны; } \quad (9)$$

$$\eta \ll C_A \lambda \text{ — для БМЗ волны. } \quad (10)$$

Например, на высоте 300 км в ионосфере η на четыре порядка меньше $C_A \lambda$ даже для высокочастотной границы [5]. Неравенство (10) необходимо, чтобы затухание было мало, при этом на (9) нужно смотреть как на определяющее область углов α с достаточно малым затуханием. В ионосфере на высотах 200—300 км (9) хорошо выполняется вплоть до углов $\alpha \approx 89^\circ$. Фактически (9) запрещает рассматривать углы, очень близкие к $\pi/2$, где уравнения МГД неприменимы [2].

При $\eta \gg \lambda C_A$, уже на уровне эйконала решение получается затухающим, причем затухание на длине волны значительно, при этом нарушаются условия применимости МГД приближения, поэтому мы рассматриваем только случай выполнения неравенств (9) и (10).

В заключение заметим, что подобные расчеты для БМЗ волны приводят к формуле

$$v_0 = v'_0 \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} \int_0^s \frac{\eta ds}{C_A^3} \right) \exp \left(i \omega \int_0^s \frac{(\nabla \eta \nabla \tau)}{2C_A} ds \right), \quad (11)$$

где s — координата вдоль луча. Аналогично можно учесть и другие процессы, приводящие к диссипации энергии. Например, учет обычной вязкости приводит к тому, что в факторе, определяющем затухание для альфвеновской волны, η надо заменить на сумму η и коэффициента кинематической вязкости. Для БМЗ волны η заменяется на

$$\left[\eta + \frac{\eta'}{\rho} + \left(\frac{\eta'}{3\rho} + \frac{\xi}{\rho} \right) \sin^2 \alpha \right],$$

где η' и ξ — первый и второй коэффициенты вязкости.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В. Н. Красильникову за постоянное внимание и помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Vazer and J. Hurgby, J. Geophys. Res., 68, № 1, 147 (1963).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. В. А. Дубровский, Г. А. Скуридин, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 2, 234 (1965).
4. В. М. Бабич, А. С. Алексеев, в сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5, изд. ЛГУ, 1961.
5. Я. Л. Альперт, Волны и искусственные тела в приземной плазме, М., 1974.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
15 февраля 1977 г.

THE ALLOWANCE FOR THE FINITE CONDUCTIVITY AT MAGNETO-HYDRODYNAMIC WAVE PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA

A. O. Ovchinnikov

The propagation of magneto-hydrodynamic wave in a cold inhomogeneous plasma is considered by the geometrical optics method. The magnetic viscosity differs from zero of the smoothly varying coordinate. Formulas are obtained permitting to calculate in the zero approximation the amplitude and additional phase incidence at wave propagation. A small magnetic viscosity is necessary to be taken into account in the geometrical optics description in the frame of the magneto-hydrodynamics.

УДК 538.4

О ПРОБЛЕМЕ ТУРБУЛЕНТНОГО «ДИНАМО»

H. H. Носков

В рамках уравнений магнитной гидродинамики изучается проблема турбулентного «динамо». Показано, что турбулентность магнитогидродинамических волн может приводить к генерации крупномасштабного магнитного поля. Как и в кинематической постановке [1], генерация обязана гиротропности турбулентности.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема динамо (генерация магнитных полей) имеет астрофизическое происхождение, т. е. связана с попыткой объяснить наличие и поведение достаточно больших регулярных магнитных полей в звездах и других космических объектах. В имеющейся литературе по данному вопросу принято разделять два подхода: генерация магнитного поля регулярными движениями проводящей среды или турбулентными движениями. Именно, в последней формулировке нас и будет интересовать проблема динамо. Задачу в такой постановке принято называть проблемой турбулентного динамо [1, 2].

За исключением отдельных попыток [3] обычно проблема турбулентного динамо решается в кинематической постановке, т. е. задается поле скоростей среды и исследуется поведение затравочного магнитного поля. Ясно, что задача в такой постановке имеет смысл при выполнении условия $\rho \mathbf{v}^2/2 \gg \mathbf{H}^2/8\pi$. Реально же это условие часто нарушается, и плотности энергий могут быть одного порядка. Тогда проблема становится существенно сложнее. При этом уже необходимо учитывать влияние регулярного магнитного поля на поле скоростей. Задачу в этом случае следует решать в рамках уравнений МГД. Естественно считать жидкость несжимаемой. Как известно, в этом случае существуют две ветви вырожденных колебаний: альфвеновские и медленные магнитозвуковые волны с законом дисперсии $\omega = |(\mathbf{v}_A \mathbf{k})|$, $\mathbf{v}_A = \mathbf{H}_0 / \sqrt{4\pi\rho}$, где \mathbf{H}_0 — внешнее магнитное поле. В силу линейности законов дисперсии и несжимаемости такая турбулентность является сильной. Согласно гипотезе Колмогорова [10] в сильной турбулентности взаимодействуют между собой волны только с близкими масштабами, т. е. взаимодействие между мелкомасштабными и крупномасштабными движениями является слабым. Последнее обстоятельство позволяет использовать приближение слабой турбулентности в задаче о генерации регулярного (крупномасштабного) магнитного поля мелкомасштабной турбулентностью.

В данной работе мы рассмотрим лишь начальную стадию этого процесса — генерацию длинноволновых колебаний (т. е. среднего магнитного поля) турбулентными коротковолновыми пульсациями. Такую задачу удобно рассматривать, используя гамильтонов формализм МГД уравнений.

Хорошо известно, что при трехволновых взаимодействиях можно выделить два резонансных процесса [8]: первый представляет собой распад волны \mathbf{k}_0 , при котором

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (1)$$

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2},$$

второй — процесс слияния, при котором

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1, \quad (2)$$

$$\omega_{k_0} + \omega_{k_2} = \omega_{k_1}.$$

К неустойчивости может привести только первый процесс с максимальным инкрементом

$$\gamma_{\max} \approx 2 |V_{k_0, k, k_0-k}| A,$$

где A — амплитуда исходной волны.

Для вырожденных альфеноэвских и медленных магнитозвуковых колебаний процессы распада (1) отсутствуют, так как матричный элемент V_{k_0, k, k_0-k} тождественно равен нулю.

Разбиение нелинейного взаимодействия на два, существенных соответственно у поверхности (1) и у поверхности (2), и исследование их по отдельности имеет смысл только в том случае, если эти поверхности достаточно далеко разнесены друг от друга. В противном случае задачу об устойчивости нужно решать в точной постановке. При этом может иметь место, так называемая, модифицированная распадная неустойчивость [8]. Обычно инкремент такой неустойчивости $\gamma \sim |A|^{2/3}$. Условие, которое должно при этом выполняться,

$$(x\omega'_k) \gg \gamma_{\max} \gg \omega_x \quad (3)$$

нарушается при линейном законе дисперсии. В разд. 1 мы найдем аналог такой неустойчивости для узкого пакета волн.

Вопрос о генерации длинноволнового магнитного поля турбулентным фоном рассмотрен в разд. 2. Неустойчивость турбулентного фона, как и для узкого пакета волн, обязана наличию гиротропного члена в корреляционной функции скоростей (сравни с кинематической постановкой [4]).

Показано (разд. 3), что гиротропность турбулентности связана с круговой поляризацией волн, т. е. спиновой частью момента импульса системы.

1. Рассмотрим уравнения идеальной несжимаемой МГД. Эти уравнения сохраняют энергию

$$H^* = \int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \right) dr.$$

Следуя работе [6], введем в рассмотрение новую переменную S , определяемую из соотношения

$$v = \frac{1}{\rho} [H \operatorname{rot} S] + \nabla \Phi, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (4)$$

В новых переменных уравнения МГД имеют форму уравнений Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta S}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta H}, \quad (5)$$

где H совпадает с полной энергией системы. Далее представим магнитное поле в виде $H = H_0 + h$, где H_0 — среднее магнитное поле, которое

мы будем считать постоянным; \mathbf{h} — пульсации магнитного поля. Тогда гамильтониан можно представить в виде ряда по степеням \mathbf{h} и \mathcal{S} . Ограничивааясь лишь трехволновыми членами, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{int}}, \\ \mathbf{H}_0 &= \int \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} \right) d\mathbf{r}, \\ \mathbf{H}_{\text{int}} &= \int (\rho v_1 v_2) d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

где скорость

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\rho} [\mathbf{H}_0 \text{rot } \mathcal{S}] + \nabla \Phi_1, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\rho} [\mathbf{h} \text{rot } \mathcal{S}] + \nabla \Phi_2. \end{aligned}$$

Совершим преобразование Фурье по координатам и перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k &= \sum_{\lambda=1,2} \sqrt{2\pi\omega_k} \mathbf{l}_{k\lambda} (a_{k\lambda} + a_{-k\lambda}^*), \\ \mathcal{S}_k &= -i \sum_{\lambda=1,2} \frac{1}{2\sqrt{8\pi\omega_k}} \mathbf{l}_{k\lambda} (a_{k\lambda} - a_{-k\lambda}^*), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{l}_{k\lambda} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{|\mathbf{k}_\perp| |(\mathbf{k}\mathbf{n})|}$, $\mathbf{l}_{k\lambda} = \frac{[k|\mathbf{k}\mathbf{n}|]}{|k||\mathbf{k}_\perp|}$ — векторы поляризации соответственно альфеновских и медленных магнитозвуковых волн ($\mathbf{n} = \mathbf{H}_0/|\mathbf{H}_0|$), $a_{k\lambda}$ — их амплитуды. В этих переменных система (5) принимает вид

$$\frac{\partial a_{k\lambda}}{\partial t} + i \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta a_{k\lambda}^*} = 0.$$

Гамильтониан \mathbf{H}_0 при таком преобразовании диагонализируется,

$$\mathbf{H}_0 = \sum_{\lambda=1,2} \int \omega_k |a_{k\lambda}|^2 d\mathbf{k},$$

а гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int \left\{ \sum_{\lambda\lambda_1\lambda_2} V_{\mathbf{k}}^{\lambda\lambda_1\lambda_2} a_{k\lambda} a_{k_1\lambda_1}^* a_{k_2\lambda_2}^* + \text{к. с.} \right\} \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) dk dk_1 dk_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}}^{\lambda\lambda_1\lambda_2} &= \frac{1}{\sqrt{8\rho\omega_k\omega_{k_1}\omega_{k_2}}} \times \\ &\quad \times \{ (\mathbf{v}_A \mathbf{k}_2) \omega_k (l_{k_2\lambda_2} [l_{k\lambda} [l_{k_1\lambda_1} \mathbf{k}_1]]) + (\mathbf{v}_A \mathbf{k}) \bar{\omega}_{k_2} (l_{k\lambda} [l_{k_2\lambda_2} [l_{k_1\lambda_1} \mathbf{k}_1]]) + \\ &\quad + (\mathbf{v}_A \mathbf{k}_1) \omega_{k_2} (l_{k_1\lambda_1} [l_{k_2\lambda_2} [l_{k\lambda} \mathbf{k}]]) + (\mathbf{v}_A \mathbf{k}_2) \omega_{k_1} (l_{k_2\lambda_2} [l_{k_1\lambda_1} [l_{k\lambda} \mathbf{k}]]) + \\ &\quad + (\mathbf{v}_A \mathbf{k}) \omega_{k_1} (l_{k\lambda} [l_{k_1\lambda_1} [l_{k_2\lambda_2} \mathbf{k}_2]]) + (\mathbf{v}_A \mathbf{k}_1) \omega_k (l_{k_1\lambda_1} [l_{k\lambda} [l_{k_2\lambda_2} \mathbf{k}_2]])) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что матричный элемент тождественно равен нулю при $(nk)(nk_1)(nk_2) \geq 0$.

Принимая гипотезу локальности, т. е. считая взаимодействие волн разных масштабов слабым, выделим из (7) гамильтониан взаимодействия высокочастотных волн $a_{k\lambda}$ с низкочастотными волнами $b_{k\lambda}$:

$$H_{\text{Int}} = \int \left\{ \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k_1 k_2 k_3}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} a_{k_1 \lambda_1} a_{k_2 \lambda_2}^* b_{k_3 \lambda_3}^* + \text{к. с.} \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

откуда следуют уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{da_{k\lambda}}{dt} + i\omega_k a_{k\lambda} &= -i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k_1 k_2 k_3}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} a_{k_1 \lambda_1} b_{k_3 \lambda_3}^* \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ &- i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k_1 k_2 k_3}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} a_{k_1 \lambda_1} b_{k_3 \lambda_3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \\ \frac{db_{k\lambda}}{dt} + i\omega_k b_{k\lambda} &= -i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k_1 k_2 k_3}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} a_{k_2 \lambda_2} a_{k_3 \lambda_3}^* \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом в матричных элементах удержим члены до второго порядка малости по \mathbf{x}/\mathbf{k} :

$$V_{k, k+x, -x}^{\lambda, \lambda_1, \lambda_2} = S^{\lambda_2} \delta_{\lambda \lambda_1} + \mu^{\lambda_2} \mathcal{E}_{\lambda \lambda_1} + E_{\lambda \lambda_1 \lambda_2},$$

где S , μ , E соответственно члены нулевого, первого и второго порядков, $\mathcal{E}_{\lambda \lambda}$ — антисимметричный тензор.

Система уравнений (9) имеет точное решение:

$$b_{k\lambda} = 0, \quad a_{k\lambda} = A_\lambda e^{-i\omega_0 t} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad \omega_0 = \omega_k, \quad (10)$$

представляющее собой монохроматическую волну. Линеаризуем систему (9) на фоне решения (10), полагая b_k , b_k^* , δa_k , δa_k^* зависящими от времени, как $e^{-i\Omega t}$. Для Ω имеем дисперсионное уравнение

$$(\Omega^2 - \omega_k^2)^2 - M^2 = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} M &= |A_2 A_1^* - A_1 A_2^*| [S'(E_{212} - E_{122}) - S^2(E_{211} - E_{121})] = \\ &= |A_2 A_1^* - A_1 A_2^*| \frac{v_A x^3}{\rho} \cos \varphi f(\theta, \varphi, \alpha), \end{aligned}$$

θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{n} , φ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{n} , α — угол между плоскостями (\mathbf{k}, \mathbf{n}) и (\mathbf{x}, \mathbf{n}) .

Из (11) Ω выражается следующим образом:

$$\Omega = \left[v_A^2 x^2 \cos^2 \varphi \pm v_A x \cos \varphi \frac{x^2}{\rho} |A_2 A_1^* - A_1 A_2^*| f(\theta, \varphi, \alpha) \right]^{1/2},$$

где $f(\theta, \varphi, \alpha)$ — безразмерная функция углов.

В рассматриваемой нами задаче считается, что $W/\rho v_A^2 \ll 1$, где W — плотность энергии волны. Из этого ограничения и выражения для Ω немедленно следует, что неустойчивость может иметь место только при $\cos \varphi \ll 1$. Последнее позволяет существенно упростить функцию f :

$$f = \cos^2 \alpha \sin^3 \theta - \cos \alpha \sin \theta.$$

Максимум инкремента достигается на поверхности $\cos \alpha \sin \theta = 1/\sqrt{3}$,

$$\cos \varphi = \frac{x}{3\sqrt{3} v_A \rho} |A_1 A_2^* - A_2 A_1^*| \text{ и } \gamma_{\max} \text{ имеет вид}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{x^2}{3V3\rho} |A_1 A_2^* - A_2 A_1^*|.$$

2. Рассмотрим случай широкого пакета волн. Для описания системы введем корреляционные функции

$$n_{k'k\lambda'\lambda} = \langle a_{k'\lambda'} a_{k\lambda}^* \rangle = n_{\sim k \times \lambda' \lambda}, \quad \tilde{k} = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{2}, \quad x = \mathbf{k}' - \mathbf{k}.$$

В силу сказанного выше о характере турбулентности будем учитывать взаимодействие волн только с близкими \tilde{k} , т. е. $x \ll k$.

Из системы (9) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_{\sim k \times \lambda' \lambda}}{\partial t} + i(\mathbf{v}_A x) n_{\sim k \times \lambda' \lambda} = \\ & = -i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k+x/2, \tilde{k}+x/2-k_2, k_2}^* \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 n_{\sim k-k_2/2, x-k_2 \lambda_1 \lambda} \langle b_{-k_2 \lambda_2}^* \rangle d\mathbf{k}_2 - \\ & - i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k+x/2, \tilde{k}+x/2-k_2, k_2}^* \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 n_{\sim k-k_2/2, x-k_2 \lambda_1 \lambda} \langle b_{k_2 \lambda_2} \rangle d\mathbf{k}_2 + \\ & + i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k-x/2, \tilde{k}-x/2+k_2, k_2}^* \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 n_{\sim k+k_2/2, x-k_2 \lambda' \lambda_1} \langle b_{k_2 \lambda_2} \rangle d\mathbf{k}_2 + \\ & + i \int \sum_{\lambda_1 \lambda_2} V_{k-x/2, \tilde{k}-x/2+k_2, -k_2}^* \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 n_{\sim k+k_2/2, x-k_2 \lambda' \lambda_1} \langle b_{-k_2 \lambda_2}^* \rangle d\mathbf{k}_2; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \langle b_{k\lambda} \rangle}{\partial t} + i \omega_k \langle b_{k\lambda} \rangle = -i \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \int V_{k_1+k/2, k_1-k/2, k}^* \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_1 n_{k, k \lambda_2 \lambda_1} d\mathbf{k}_1. \quad (13)$$

При выводе (12) возникают корреляторы вида $\langle aa^* b \rangle$. Будем считать, что эти корреляторы расцепляются в виде $\langle b \rangle \langle aa^* \rangle$, что соответствует приближению самосогласованного поля.

Исследуем систему уравнений (12), (13) относительно длинноволновых возмущений вида

$$\langle b_{k\lambda} \rangle \sim \delta(k + x) e^{i\Omega t}, \quad \delta n_{\sim k, k} \sim \delta(k + x) e^{i\Omega t},$$

где $\delta n_{\sim k, k \lambda, \lambda} = n_{\sim k, k \lambda, \lambda} - n_{\sim k, k \lambda, \lambda}^0 \delta(\mathbf{k})$, $n_{\sim k, k \lambda, \lambda}^0$ — невозмущенная плотность турбулентного фона. Для этого разложим правую часть (12) до членов второго порядка по x и правую часть (13) — до членов первого порядка. Линеаризуем эту систему. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle b_{-x\lambda} \rangle}{\partial t} + i \omega_x \langle b_{-x\lambda} \rangle = -i \int V_{k, k, -x}^* \tilde{\lambda} \delta n_{k, -x} d\mathbf{k} + \\ & + i \int (x \nabla_k V_{k, k, -x}^{1/2, \lambda}) \delta \sigma_{k, -x} d\mathbf{k}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \delta n_{k, -x}}{\partial t} - i \omega_x \delta n_{k, -x} = i(x \nabla_k V_{k, k, -x}^{1/2, \lambda}) (x \nabla_k \sigma_k^0) \langle b_{-x\lambda} \rangle; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta \sigma_{k, -x}}{\partial t} - i \omega_x \delta \sigma_{k, -x} = -i V_{k, k, -x} \tilde{\lambda} (x \nabla_k \sigma_k^0) \langle b_{-x\lambda} \rangle, \quad (16)$$

где черта под \underline{k} означает, что берется производная именно по этому \mathbf{k} ,

$$n_{k_x} = n_{k_{x11}} + n_{k_{x22}},$$

$$\sigma_{k_x} = \langle a_{k_{x1}} a_{k_2}^* \rangle - \langle a_{k_{x2}} a_{k_1}^* \rangle.$$

При выводе (14) — (16) используются следующие свойства матричного элемента:

$$\nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{1 \frac{1}{2} \lambda} = \nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{2 \frac{1}{2} \lambda}, \quad \nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{1 \frac{2}{2} \lambda} = - \nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{2 \frac{1}{2} \lambda},$$

$$(x \nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{1 \frac{1}{2} \lambda}) = (x \nabla_k V_{\underline{k} \underline{k} x}^{2 \frac{2}{2} \lambda}) = 0.$$

Дисперсионное уравнение системы (14) — (16) аналогично (11).

$$(\Omega^2 - \omega_x^2)^2 - \frac{1}{4} N^2 = 0,$$

где $N = \int M dk$, M — та же самая величина, что и в (11), только вместо степени круговой поляризации волны $|A_1 A_2^* - A_1^* A_2|$ стоит $|\sigma_k^0|$.

Максимум инкремента достигается при $\cos \varphi = \frac{1}{2v_A^2 x^2} \frac{|\tilde{N}|}{2}$, и γ_{\max}

имеет вид

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2v_A^2 x^2} \frac{|\tilde{N}|}{2},$$

где $\tilde{N} = \frac{v_A^2 x^3}{\rho} \int dk |\sigma_k^0| (\cos^3 \alpha \sin^3 \theta - \cos \alpha \sin \theta)$. Таким образом, неустойчивость имеет место как для узкого, так и для широкого пакетов волн только при наличии коррелятора σ_k .

3. Как уже отмечалось выше (см. также [4, 5]), необходимым условием генерации магнитного поля турбулентным полем скоростей является наличие гиротропного члена в корреляторе скоростей вида $iE \mathcal{E}_{ij_n} k_n$. Этот член антисимметричен относительно перестановки индексов и замены k на $-k$.

Вычислим коррелятор скоростей, а точнее, выделим только член с аналогичными свойствами. Используя соотношения между обычными переменными и каноническими и (6), получаем

$$\frac{(H_0 k)^2 k_\perp^2}{\rho^2 8\pi \omega_k} \mathcal{E}_{ij_n} k_n \{ \sigma_{k_{12}}^0 - \sigma_{k_{21}}^0 \}. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что $\sigma_{k_{12}} - \sigma_{k_{21}} = 2i \operatorname{Im} \sigma_{k_{12}} = i |\sigma_k^0|$. Таким образом, необходимым условием генерации магнитного поля турбулентным фоном является существование пиротропности.

Легко понять, что гиротропный член (в случае $h \ll H_0$) может быть связан с поляризационным тензором для электромагнитных волн [7] (в данном случае — альфвеновских и медленных магнитозвуковых)

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} \mathcal{E}_{\alpha\beta} A, \quad (18)$$

где $S_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор, $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор. Первый определяет степень линейной поляризации, второй — степень круговой поляризации волн и однозначно связан с $\operatorname{Im} \sigma_{k_{12}}$.

$$A = \frac{2 |\operatorname{Im} \sigma_{k_1}|}{n_k} = \frac{|\sigma_k|}{n_k}$$

С другой стороны, степень круговой поляризации прямо связана со спиновой плотностью момента импульса.

Система, для которой может быть сформулирован вариационный принцип, сохраняет момент импульса. Выражение для момента импульса системы имеет вид

$$\mathbf{L} = \int \rho [\mathbf{r} \mathbf{v}] d\mathbf{r}. \quad (19)$$

Переходя в (19) к каноническим переменным S и H , L , можно представить в виде суммы орбитального и спинового моментов импульса:

$$\mathbf{L} = \int [\mathbf{r} \mathbf{p}] d\mathbf{r} + \int [\mathbf{H} \mathbf{S}] d\mathbf{r}, \quad (20)$$

где $\mathbf{p} = H_i \nabla S_i$ — плотность импульса.

Отсюда следует выражение для спинового момента

$$L_{\text{spin}} = - \int \frac{(kn)}{|(kn)|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} |\sigma_k| d\mathbf{k}.$$

Известно, что для большинства космических объектов характерно как вращение, т. е. существование момента импульса, так и движение внутри звезды конвективного характера.

Поэтому перекачка энергии по спектру от длинноволновых пульсаций к коротковолновым должна сопровождаться перераспределением момента импульса по этим масштабам. Кроме того, в малых масштабах турбулентность можно считать однородной и тогда в силу сохранения момента импульса (20) такая турбулентность должна обладать гиротропией, т. е. для нее отличен от нуля коррелятор σ_k .

Автор выражает благодарность Е. А. Кузнецовой за постановку задачи и помочь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН, 106, 431 (1972).
2. С. И. Вайнштейн, УФН, 120, 613 (1976).
3. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ, 61, 612 (1971).
4. М. Штеенбек, Ф. Краузе, З, 19 (1967).
5. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ, 58, 153 (1970).
6. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецова, ДАН СССР, 194, 1288 (1970).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
8. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ПМТФ, 5, 84 (1972).
9. А. М. Рубенчик, Бесстолкновительная кинетика волн, Изв. вузов — Радиофизика, 17, 1635 (1974).
10. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 30, 299 (1941).

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию
3 мая 1976 г.,
после переработки
11 июля 1977 г.

TURBULENT „DYNAMO“ PROBLEM

N. N. Noskov

The turbulent „dynamo“ problem is studied in the frame of the magnetic hydrodynamics equations. It is shown that the turbulence of magnetohydrodynamic waves may result in the large scale magnetic field generation. As in the kinematic formulation [1] the generation is due to the gyrotropic turbulence.

УДК 621.371.24

САМОФОКУСИРОВКА ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

С. Н. Власов, | В. А. Гапонов, | И. В. Еремина, Л. В. Пискунова

Рассмотрено распространение эллиптически поляризованных пучков в кубических средах. Данна общая классификация однородных, т. е. не меняющих своей структуры вдоль направления распространения пучков. Показано, что при произвольной поляризации однородный пучок представляется в виде суперпозиции двух ортогональных компонент, распространяющихся с разными фазовыми скоростями, причем при любой мощности $P > P_{\text{кр}}$ существует по крайней мере один тип однородного пучка. Приводятся результаты численного моделирования и экспериментального исследования процесса самофокусировки эллиптически поляризованного света, которые хорошо согласуются между собой.

Известно, что в средах с недиагональным тензором нелинейной поляризуемости самофокусировка [1] световых пучков с различной поляризацией протекает по-разному. В частности, было теоретически показано, что при переходе от линейной поляризации к круговой критическая мощность самофокусировки ($P_{\text{кр}}$) должна возрастать в четыре раза в средах с керровским механизмом нелинейности [5] и в три раза — в средах с электронным механизмом. Использование пучков с круговой поляризацией, казалось бы, открывает возможности для увеличения выходной мощности твердотельных оптических квантовых генераторов с синхронизацией мод, так как последняя в большинстве случаев ограничена самофокусировкой в активном веществе. Однако проведенные измерения критической мощности циркулярно поляризованных пучков в различных керровских жидкостях [7, 8] дали результаты, отличающиеся от соответствующих значений для пучков с линейной поляризацией не более, чем в два раза. Было высказано предположение, что расхождение экспериментальных и теоретических данных связано с присутствием в циркулярно-поляризованном пучке примеси со встречной поляризацией [7, 8]. В настоящей работе проводится подробное исследование самофокусировки волновых пучков в зависимости от степени эллиптичности их поляризации и показывается, что результаты эксперимента и теории хорошо согласуются между собой.

1. ОДНОРОДНЫЕ ПУЧКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

Критическая мощность самофокусировки обычно связывается с мощностью так называемых однородных пучков, поперечная структура которых не меняется вдоль направления распространения. Различие между мощностью колоколообразного однородного пучка ($P_{\text{одн}}$) и величиной $P_{\text{кр}}$, определенной для произвольного колоколообразного пучка, зависит от поперечной структуры последнего и не превышает обычно нескольких процентов. Поэтому мы выясним сначала, какие однородные пучки могут существовать в средах с керровской и электронной нелинейностями, и как их мощность зависит от поляризации.

Обычно однородные пучки рассматривались в виде единой структуры, бегущей с определенной фазовой скоростью [1-3]. В работе [6] было указано на возможность существования сложных однородных пучков, различные компоненты которых распространяются с разными фазовыми скоростями. Некоторые свойства таких пучков в однородном случае обсуждались в [6, 9]. Мы рассмотрим подобные решения трехмерной задачи, обращая особое внимание на зависимость мощности однородного пучка от его поляризации.

В квазиоптическом приближении эллиптически поляризованный пучок удобно представить в виде суперпозиции двух циркулярно-поляризованных пучков, комплексные амплитуды полей которых описываются системой уравнений (1), записанной в безразмерных переменных:

$$\Delta_{\perp} E^+ - 2i \frac{\partial E^+}{\partial z} + \frac{2}{1+\alpha} (|E^+|^2 + \alpha |E^-|^2) E^+ = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_{\perp} E^- - 2i \frac{\partial E^-}{\partial z} + \frac{2}{1+\alpha} (|E^-|^2 + \alpha |E^+|^2) E^- = 0,$$

$\alpha = 7$ при керровском механизме нелинейности, $\alpha = 5$ при электронном механизме нелинейности. Будем искать решение системы (1) в виде двух однородных пучков: $E^+ = E_0^+(r_{ct}) \exp(-ih_1 z - im\varphi)$ и $E^- = E_0^-(r_{ct}) \exp(-ih_2 z - in\varphi)$. Для определения зависимости амплитуд полей от поперечной координаты получим систему уравнений

$$E''_{1rr} + \frac{1}{r} E'_{1r} - E_1 - \frac{m^2}{r^2} E_1 + \frac{2}{1+\alpha} (E_1^2 + \alpha E_2^2) E_1 = 0, \quad (2)$$

$$E''_{2rr} + \frac{1}{r} E'_{2r} - \lambda E_2 - \frac{n^2}{r^2} E_2 + \frac{2}{1+\alpha} (E_2^2 + \alpha E_1^2) E_2 = 0,$$

где

$$E_1 = (h_1)^{-1/2} E_0^+, \quad E_2 = (h_1)^{-1/2} E_0^-, \quad r = (h_1)^{1/2} r_{ct}, \quad \lambda = \frac{h_2}{h_1},$$

которую необходимо решать численно при следующих граничных условиях:

$$E_1 \rightarrow 0, \quad E_2 \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

$$E_1 \rightarrow A_1 r^m, \quad E_2 \rightarrow A_2 r^n \text{ при } r \rightarrow 0, \quad A_1/A_2 = \beta.$$

При заданном значении β — отношения амплитуд на оси пучка — локализованное решение системы (2) существует только при определенных значениях A_1 . В общем случае решение представляется в виде двух пучков, имеющих различную поперечную структуру, и может характеризоваться матрицей $\begin{pmatrix} p & m \\ q & n \end{pmatrix}$ с радиальными $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ и азимутальными $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ столбцами в соответствии с числом осцилляций в поперечном распределении каждого из пучков. Мощность однородного пучка $P_{(p,m)}^{(q,n)} = P_{(p,m)}^+ + P_{(q,n)}^-$,

а также отношение постоянных распространения $\lambda_{(p,m)}^{(q,n)}$ при изменении β меняется непрерывно в некотором интервале значений, зависящем от типа пучка и вида нелинейности (значения коэффициента α). Поляризация поля может изменяться по сечению пучка в широких пределах: от линейной в точках $E_1(r_0) = E_2(r_0)$ до круговой в точках $E_1 = 0$ или $E_2 = 0$. Рассмотрим более подробно несколько первых типов однородных пучков.

Простейшим решением системы (2) является пучок типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, состоящий из двух колоколообразных пучков, по структуре близких к «таунсовому» [1]. В среде с керровской нелинейностью мощность такого пучка непрерывно меняется от P_t до $4P_t$ (P_t — мощность «таунсова» пучка [1]) при изменении поляризации на оси от линейной до круговой (рис. 1). В случае электронной нелинейности интервал изменения мощности уменьшается до $[P_t, 3P_t]$, а в случае стрикционной ($\alpha = 1$) стягивается в точку $P_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = P_t$. Следующее по сложности решение — пучок типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поперечное распределение поля в котором при $\beta = 0,4$ приведено на рис. 2. Мощность его в средах с керровской нелинейностью меняется в интервале $[3,55 P_t, 26,7 P_t]$. Более сложные пучки существуют на мощностях $P \gg \frac{1+\alpha}{2} P_t$ и здесь рассматриваться не будут. Подчеркнем еще раз, что в отличие от случаев линейной и круговой поляризаций, когда однородные пучки существуют лишь при дискретных значениях мощности [1, 3], в случае эллиптической поляризации на любой мощности $P \geq P_t$ можно указать, по крайней мере, один тип однородного пучка.

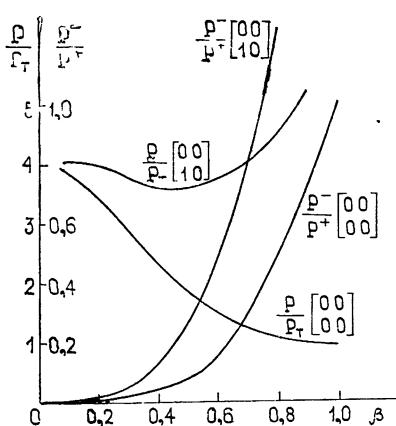


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость мощности однородных пучков от отношения их амплитуд на оси.

Рис. 2. Структура пучков, один из которых имеет нуль в поперечном сечении.

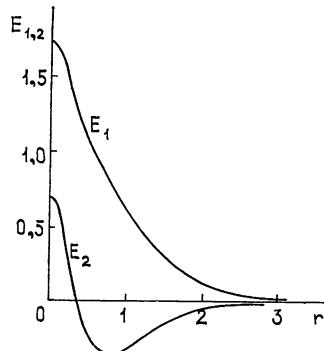


Рис. 2.

Зависимости мощностей однородных пучков от β , полученные выше путем численного интегрирования системы уравнений (1), могут быть с достаточно хорошей точностью рассчитаны аналитически. Для этого воспользуемся усредненным описанием волновых пучков в нелинейных средах [1]. Следуя [11, 12], для критической мощности коллимированного пучка с эллиптической поляризацией и распределениями поля $E_1 = -E_1^0 f_1(r)$, $E_2 = E_2^0 f_2(r)$ имеем выражение

$$P_{kp} = \frac{cn}{4\pi\hbar^2\varepsilon'} \frac{1+\alpha}{2} \frac{\left(\int f_1^2 dS_\perp + \beta^2 \int f_2^2 dS_\perp \right) \left(\int (\nabla_\perp f_1^2) dS_\perp + \beta^2 \int (\nabla_\perp f_2)^2 dS_\perp \right)}{\int f_1^4 dS_\perp + \beta^4 \int f_2^4 dS_\perp + 2\alpha\beta^2 \int f_1^2 f_2^2 dS_\perp}. \quad (3)$$

Критическая мощность, определяемая выражением (3), минимальна для пучков, поперечное распределение поля в которых удовлетворяет системе уравнений (2) [11, 12]. Стационарные свойства функционала (3) позволяют вычислять мощности однородных пучков, используя в качестве пробных функций функции Эрмита, близкие по структуре к точным решениям системы (2). Мощность однородного пучка находится из условия минимального значения $P_{\text{кр}}$ при заданном отношении полей на оси парциальных пучков. Мощность пучка типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, например, описывается выражением

$$P_{\text{кр}} = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \frac{1 + \alpha}{2} \frac{(1 + \beta^2)(1 + \beta^2 \delta^2)}{1 + \beta^2 \delta^2 + 4\alpha \beta^2} \frac{\delta^2}{1 + \delta^2}, \quad (4)$$

где отношение ширины пучка δ удовлетворяет уравнению

$$(1 - \delta_{\text{одн}}^2 \beta^2)(1 + \delta_{\text{одн}}^2)^2 + 4\alpha \delta^2 (\delta_{\text{одн}}^2 - \beta^2) = 0. \quad (5)$$

Зависимость, описываемая соотношениями (4) и (5), хорошо согласуется с приведенной на рис. 1.

В заключение параграфа отметим, что аналогичные структуры имеют место в решениях не параболического, а волнового уравнений. В частности, в одномерном и двумерном аксиально-симметричном случаях существуют трехкомпонентные решения, представляющие суперпозиции TE и TM -пучков, бегущих вдоль осевой координаты с разной фазовой скоростью. В одномерном случае существует только один тип решений колоколообразной формы, в аксиально-симметричном случае существует набор решений, имеющих различное число вариаций в плоскости, перпендикулярной оси, и различную мощность в зависимости от отношения компонент TE и TM .

2. САМОФОКУСИРОВКА ПОЧТИ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПУЧКОВ

Как уже упоминалось выше, в реальных экспериментах циркулярная поляризация может быть достигнута лишь с некоторой степенью точности. Поэтому представляет интерес выяснить, как влияет небольшая (порядка нескольких процентов по мощности) примесь излучения со встречной поляризацией на самофокусировку циркулярно-поляризованного пучка. Критическую мощность можно определить, воспользовавшись результатами предыдущего параграфа, учитывая, что при заданном отношении мощностей парциальных пучков P^-/P^+ величина $P_{\text{кр}}$ для произвольного колоколообразного пучка близка к мощности соответствующего однородного пучка типа $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *. Последняя, как мы видели, существенно зависит от поляризации пучка. Однако небольшое отклонение от циркулярной поляризации ($P^-/P^+ = 0,01$ по данным работы [8]). ведет, как можно видеть из рис. 1 для среды с керровской нелинейностью, к снижению значения $P_{\text{одн}}$ лишь на 15%, что не согласуется с результатами [8].

Для устранения противоречия отметим, что в экспериментах обычно измеряется не непосредственно величина $P_{\text{кр}}$, т. е. мощность, при кото-

* Для определения критической мощности можно также воспользоваться формулой (3), однако она дает несколько завышенный результат, так как определяет порог самофокусировки пучка по обращению в нуль его эффективной ширины, в то время как фокальная точка на оси пучка может образоваться и при несколько меньшей мощности [11].

рой нелинейный фокус находится на бесконечности, а зависимость длины самофокусировки от мощности пучка. Следуя [13], принято аппроксимировать зависимость $\frac{1}{z_\phi} (\sqrt{P})$ прямой линией, по пересечению ее

с осью $1/z_\phi = 0$ определять значение $P_{\text{кр}}$. Такой метод, однако, дает

заниженное значение для критической мощности даже в случае линейной поляризации. Численное интегрирование нелинейного параболического уравнения, проведенное в [10], показало, что зависимость

$\frac{1}{z_\phi} (\sqrt{P})$ существенно отличается

от линейной в области $1/z_\phi \ll 1$. Естественно ожидать, что и для эллиптически поляризованных пучков обсуждаемая зависимость будет отличаться от прямой линии, что может служить причиной расхождения экспериментальных и теоретических значений критической мощности.

Определить точный вид зависимости $\frac{1}{z_\phi} (\sqrt{P})$ удается лишь путем численного интегрирования системы уравнений (1). Такое интегрирование было проведено при начальных условиях

$$E^+ = E_0^+ e^{-r^2/2}, \quad E^- = E_0^- \beta_0 e^{-r^2/2}, \quad \beta_0 = 0,045; 0,1; 0,22$$

для сред с керровской ($\alpha = 7$) нелинейностью. Результаты приведены на рис. 3, 4. Существенной особенностью самофокусировки эллиптически поляризованного света является перераспределение поляризации по сечению пучка в процессе самофокусировки. Слабый пучок, нелинейное изменение показателя преломления для которого значительно больше, чем для сильного, на начальной стадии процесса фокусируется более резко, вследствие чего поляризация в приосевой области приближается к линейной (рис. 3). Это, в свою очередь, приводит к более быстрой фокусировке сильного пучка, чем в отсутствие примеси. В зависимостях обратных длин самофокусировки от мощности пучка, приведенных на рис. 4, можно выделить следующие характерные области. При больших мощностях пучка со встречной поляризацией ($\beta_0^2 P > P_t/2$) в образовании фокальной точки принимает участие лишь приосевая область, поляризация в которой в процессе самофокусировки становится практически линейной. В этой области пороговые мощности самофокусировки на заданной длине слабо зависят от наличия примеси и близки к пороговым мощностям при линейной поляризации. При малой мощности пучка со встречной поляризацией ($\beta_0^2 P \ll P_t/2$), несмотря на перестройку, поляризация на оси остается близкой к циркулярной. Величина примеси сводится к переопределению критической мощности в соответствии с разд. 1. В этой области ($\sqrt{P/P_t} < 3$ при $P^-/P^+ = 0,01$ и $\sqrt{P/P_t} < 5$ при $P^-/P^+ = 0,002$) пороговые мощности самофокусировки близки к пороговым мощностям пучков с чисто циркулярной поляризацией. В промежуточном случае, $\beta_0^2 P \sim P_t/2$, имеет место сильная зависимость пороговой мощности самофокусировки от степени примеси.

Экспериментальные результаты работы [8] хорошо ложатся на кривую (2) рис. 4. Некоторое расхождение в области малых $1/z_\phi$ может

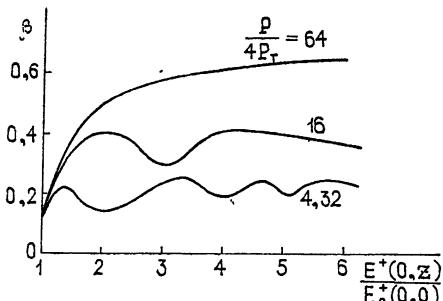


Рис. 3. Поляризация пучка на оси как функция амплитуды сильного пучка.

быть объяснено способом регистрации самофокусировки по возникновению вынужденного комбинационного рассеяния, использованном в [8], при больших длинах самофокусировки необходимый инкремент ВКР может накапливаться и без возникновения фокальной точки.

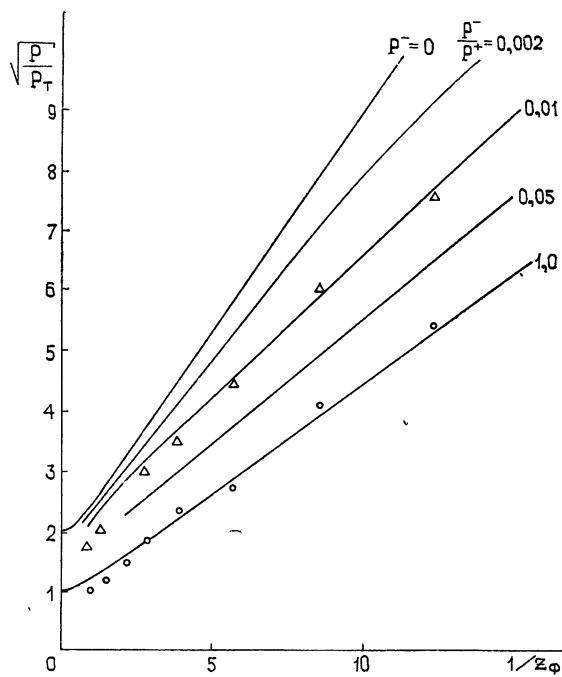


Рис. 4. Зависимость длины склонивания от мощности пучков с различной поляризацией (сплошные кривые):

- а) пучок с линейной поляризацией (кружки—экспериментальные точки [7]),
 б) пучок с почти круговой поляризацией (примесь пучка с ортогональной поляризацией составляет один процент)
 (треугольники—экспериментальные точки [7]).

Таким образом, численные расчеты показывают, что при малой длине среды даже небольшая примесь излучения со встречной поляризацией может привести к существенному уменьшению пороговой мощности самофокусировки циркулярно-поляризованного пучка. Нами было измерено возрастание порога самофокусировки при электронном механизме нелинейности при переходе от линейно-поляризованного к почти циркулярно поляризованному свету. При исследовании использовался генератор, описанный в [14]. Определялась пороговая мощность самофокусировки в пассивном стержне из неодимового стекла длиной $L = 60 \text{ см}$ при ширине светового пучка $2a = 1 \text{ мм}$. Примесь противоположно вращающейся поляризации составляла не более 5% мощности пучка. Пороговая мощность в случае почти циркулярно-поляризованного света увеличивалась в 1,4 раза, что удовлетворительно согласуется с расчетом.

Для выяснения влияния поляризации света на самофокусировку в активном элементе ОКГ был собран генератор, в котором свет при прохождении им активного элемента был почти циркулярно-поляризован. Для этого по обе стороны от активного элемента в резонатор поместились кварцевые пластинки в $\lambda/4$ с оптическими осями, развернутыми под углом $\pi/2$ друг к другу. В качестве селектирующего элемента

использовалась шпатовая клиновая пластина, расположенная под углом Брюстера между одной из $\lambda/2$ -пластин и выходным зеркалом, так что излучение на выходе из генератора было линейно-поляризовано. Измерения показали, что выходная энергия генератора не меняется, в то время как пикировая мощность возрастает в 1,5 раза при переходе от линейной поляризации к почти циркулярной*. Это согласуется с результатами измерений пороговой мощности самофокусировки в пассивном стержне и представлениями об ограничении мощности генерации ОКГ самофокусировкой в активном элементе.

Автор благодарит В. И. Таланова за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Chiao, E. Garmire and C. H. Townes, Phys. Rev. Lett., **13**, 479 (1964).
2. В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, 564 (1964).
3. З. К. Янкаускас, Изв. вузов — Радиофизика, **9**, 412 (1966).
4. В. М. Елеонский, Л. Г. Оганисьянц, В. П. Силин, ЖЭТФ, **63**, 532 (1972).
5. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Письма в ЖЭТФ, **3**, 137 (1965).
6. А. Л. Берхорер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **58**, 903 (1970).
7. D. H. Close, C. R. Giuliano, R. W. Hellwagth, F. J. McClung and W. G. Wagner, IEEE J. Quant. Electr., **QE-2**, 1964 (1966).
8. C. C. Wang, Phys. Rev., **152**, 149 (1966).
9. Е. И. Якубович, Тезисы докладов, представленных на V Всесоюзный симпозиум по нелинейной оптике, Кишинев, 1970.
10. В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, 674 (1967).
11. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, **14**, 1353 (1971).
12. А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, 1341 (1972).
13. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett., **15**, 1005 (1965).
14. Н. Г. Бондаренко, И. В. Еремина, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, **12**, 125 (1970).
15. Ю. К. Веревкин, С. Н. Власов, Квантовая электроника, **3**, 991 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
23 сентября 1976 г.

SELF-FOCUSING OF WAVE BEAMS WITH ELLIPTIC POLARIZATION

S. N. Vlasov, | V. A. Gaponov |, I. V. Eremina, L. V. Piskunova

The propagation of elliptically polarized beams in cubic media is considered. A general classification of homogeneous beams (i. e. which do not change its structure along the propagation direction) is given. The arbitrarily-polarized homogeneous beam is shown to be represented as a super-position of two orthogonal components propagating with different phase velocities, there existing at least one type of the homogeneous beam at any power $P > P_c$. The results of numerical modelling and experimental investigation of self-focusing of elliptically-polarized light are given. They agree well with each other.

* Пиковая мощность определялась по методике, основанной на результатах [14] и использованной в [15].

УДК 621.37

ОЦЕНКА ПРОТЯЖЕННОСТИ ФИНИТНОГО ВХОДА

В. П. Яковлев

Рассмотрена задача измерения протяженности входа линейного прибора по его выходу, смешанному с аддитивным шумом. Показано, что оценка протяженности может быть проведена в результате замены неизвестного входа тремя простейшими базисными функциями полной системы.

При исследовании задачи восстановления входного воздействия $f(x)$ по выходу $F(y)$ линейной пассивной системы с аппаратной функцией $h(z)$ необходимо решить интегральное уравнение

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(y - x) dx. \quad (1)$$

Подобная задача возникает в оптике при попытке исключить дифракцию в телескопе, микроскопе или спектрографе, в радиоастрономии и радиолокации — с целью устранения сглаживающего действия антенны, и т. д. Известно, что процедура решения интегрального уравнения (1) типа свертки относительно $f(x)$ является некорректной. Однако при необходимости определения некоторых параметров $f(x)$ возможна более благоприятная ситуация. Мы покажем, что при расчете протяженности $f(x)$ удается построить корректную процедуру решения в результате замены неизвестного входа $f(x)$ тремя простейшими базисными функциями полной системы. Упрощение входа, законность которого показана в статье, позволяет строить эффективные методы оценки размеров объектов в условиях, когда критерий Рэлея не выполняется.

Метод Фурье дает возможность выразить спектр входа $\tilde{f}(\omega)$ через спектры $\tilde{F}(\omega)$ и $\tilde{h}(\omega)$ выхода и аппаратной функции для тех значений $|\omega| \leq \Omega$, где $\tilde{h}(\omega)$ известна и не обращается в нуль. Не нарушая общности, можно считать $\tilde{h}(\omega) = 1$ в области $[-\Omega, +\Omega]$, где она отлична от нуля, тогда $\tilde{f}(\omega) = \tilde{F}(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega$. Таким образом, при любых измерениях удается выделить участок спектра $\tilde{f}(\omega)$ шириной 2Ω , причем $\Omega \neq 0$. В тех случаях, когда ширина $\tilde{f}(\omega)$ много больше 2Ω , восстановить $\tilde{f}(\omega)$ для $|\omega| > \Omega$, вообще говоря, не удается, и согласно критерию Рэлея система не разрешает вход. Однако, если $f(x)$ — финитная функция, т. е. $f(x) \equiv 0$ при $|x| > \alpha$, ситуация изменяется: возможно приближенное восстановление, причем чем меньше погрешность в определении $\tilde{f}(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega$, тем точнее находится $f(x)$. Соответствующая методика для случая, когда величина α известна, подробно изложена в [1]. Для полного решения задачи весьма важна оценка α . Более того, во многих применениях измерение α представляет основной интерес,

Будем считать, что на интервале $[-\Omega, +\Omega]$ вместо $\tilde{f}(\omega)$ известна функция $\tilde{f}(\omega) + n(\omega)$, где $n(\omega)$ — гауссов процесс с корреляционной функцией $\kappa\delta(\omega - \omega')$. Рассмотрим входное воздействие

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \psi_k(x/\alpha, c) \quad (|x| \leq \alpha), \quad (2)$$

где $c = \Omega\alpha$, а $\psi_k(z, c)$ — вытянутые волновые сфероидальные функции, удовлетворяющие интегральному уравнению [2]

$$\lambda_k \psi_k(z, c) = \int_{-1}^1 e^{iczy} \psi_k(y, c) dy \quad (|z| \leq 1) \quad (3)$$

и дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\psi_k(z, c)}{dz} \right] - c^2 z^2 \psi_k(z, c) = \mu_k \psi_k(z, c). \quad (4)$$

Так как $\psi_k(z, c)$ — собственные функции преобразования Фурье, то

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{c}{\Omega} \sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda_k \psi_k \left(\frac{\omega}{\Omega}, c \right). \quad (5)$$

Будем считать, что положение «центра» входа известно, и $f(x)$ имеет симметричную относительно центра вещественную часть и асимметричную мнимую часть, т. е. $\tilde{f}(\omega)$ — вещественная функция. Предположим, что α_k — вещественные гауссовые величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией M , не зависящие от $n(\omega)$ и между собой. Оценку c величины c найдем из уравнения правдоподобия [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t, s, c) R(s, \tau, c) ds = \delta(t - \tau), \quad (6)$$

где $R(\omega, \omega', c)$ — корреляционная функция $n(\omega) + \tilde{f}(\omega)$:

$$R(\omega, \omega', c) = \kappa\delta(\omega - \omega') + \frac{c^2}{\Omega^2} M \sum_{k=0}^N |\lambda_k|^2 \psi_k \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) \psi_k \left(\frac{\omega'}{\Omega} \right) = \\ = \kappa\delta(\omega - \omega') + \rho(\omega, \omega'). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, пользуясь свойством двойной ортогональности $\psi_k(x, c)$, что решение уравнения (6) имеет вид

$$w(\omega, \omega', c) = \frac{1}{\kappa} \delta(\omega - \omega') - \frac{1}{\beta M} \sum_{k=0}^M \frac{\sigma_k}{\sigma_k + \beta} \psi_k \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) \psi_k \left(\frac{\omega'}{\Omega} \right), \quad (8)$$

где $\beta = \kappa M / \Omega$, $\sigma_k = c^2 |\lambda_k|^2$. Можно показать, что дисперсия оценки σ находится из соотношения [3]

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w(t, s, c)}{\partial c} \frac{\partial R(t, s, c)}{\partial c} dt ds = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2\beta} \left[\beta \sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{(\beta + \sigma_k)^2} + 2 \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_j \sigma_k}{\sigma_k + \beta} r_{kj}^2 \right],$$

где

$$\begin{aligned} r_{kj} &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial \psi_k(x, c)}{\partial c} \psi_j(x, c) dx \quad (k \neq j), \\ r_{kk}^2 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \psi_k(x, c)}{\partial c} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что величина M , пропорциональная средней энергии $\bar{f}(x)$, вообще говоря, зависит от длительности входа α , т. е. от c . Для большинства приложений можно считать $M = M_0 c^{\gamma-1}$, причем $\gamma = 1$ соответствует «некогерентному» входу $f(x)$, $\gamma = 2$ — «когерентному». Если $\gamma = 0$, средняя энергия не зависит от α . Можно показать, что все результаты расчета по соотношению (10) остаются в силе при любом γ , если заменить M на M_0 , β на $\frac{x\Omega}{M_0}$ и считать, что $\sigma_k = c^{\gamma+1} |\lambda_k|^2$.

По критерию Рэлея оценка α по $\tilde{f}(\omega)$ возможна лишь при $c > 1$. Мы рассмотрим противоположный случай $c \ll 1$. Согласно [2], при $c/k \ll 1$

$$|\lambda_k|^2 \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left(\frac{ec}{4k} \right)^{2k}. \quad (11)$$

Поэтому $\sigma_k \sim c^{2k+\gamma+1}$, т. е. $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$. Как следует из (4), функция $\psi_k(x, c)$ фактически зависит от c^2 , так что $|r_{kj}|^2 \sim c^2$.

Найдем асимптотическое представление дисперсии оценки (9) при $c \rightarrow 0$ для различных значений β . Пусть сначала $\beta \gg \sigma_0$, т. е. для всех k $\beta + \sigma_k \approx \beta$. Тогда, согласно (9),

$$\frac{1}{\sigma} \approx \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} \left[\sum_{k=0}^N \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 + 2 \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \sigma_k \sigma_j r_{kj}^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Используя асимптотические соотношения для σ_k и r_{kj} , получим

$$\frac{1}{\sigma} \approx \frac{1}{2\beta} \left\{ \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial c} \right)^2 + 2r_{00}^2 \sigma_0^2 \right] \right\} \approx \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial c} \right)^2. \quad (13)$$

Найдем соотношение для σ в случае, когда величина β близка к некоторому значению σ_l . При $k > l$ выполнено неравенство $\sigma_k \ll \sigma_l \sim \beta$, поэтому можно считать $\sigma_k + \beta \approx \beta$, если же $k < l$, то очевидно $\sigma_k \gg \sigma_l \sim \beta$ и $\sigma_k + \beta \sim \sigma_k$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} &\approx \frac{1}{2\beta} \left[\beta \sum_{k=0}^l \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{\sigma_k^2} + 2 \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^N \frac{\sigma_k \sigma_j}{\sigma_k} r_{kj}^2 + \frac{1}{\beta} \sum_{k=l+1}^N \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\beta} \sum_{k=l+1}^N \sum_{j=0}^N \sigma_k \sigma_j r_{kj}^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая асимптотику σ_k , r_{kj} , а также полагая $\beta = \sigma_l$, можно записать

$$\frac{1}{\sigma} \approx \frac{1}{2\beta} (A c^{2l+\gamma-1} + B c^{\gamma+3} + D c^{2l+\gamma-\gamma} + F c^{\gamma+5}), \quad (15)$$

где

$$A = \sum_{k=0}^l \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{\sigma_k^2} \frac{\beta c^2}{c^{2l+\gamma+1}}; \quad (16)$$

$$B = 2 \sum_{k=0}^l \frac{r_{kj}^2}{c^2} \frac{\sigma_0}{c^{j+1}}, \quad (17)$$

а величины D и F получаются в результате соответствующей оценки третьей и четвертой суммы в (14).

Учитывая, что величины A , B , F и D ограничены, можно заключить, что последними двумя слагаемыми в (15) можно пренебречь. Кроме того, первое слагаемое пренебрежимо мало при $l > 2$ по сравнению со вторым, поэтому при вычислении постоянной \bar{A} достаточно ограничиться тремя слагаемыми в (16). Учитывая это, можно записать следующее асимптотическое соотношение для дисперсии оценки, справедливое при любых значениях β :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2\beta} \left[\beta \sum_{k=0}^2 \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{(\beta + \sigma_k)^2} + 2\sigma_0 \sum_{j=0}^l r_{0j}^2 \right]. \quad (18)$$

Заметим, что величина l , соответствующая номеру параметра σ_l , наиболее близкого к β , слабо влияет на величину σ ; если этим влиянием пренебречь, можно сделать важный вывод о том, что для получения достаточно точной величины дисперсии оценки достаточно в (12) удержать

только слагаемые с $k, j = 0, 1, 2$. Это означает, что оценка c протяженности входа может быть получена после замены «сложного» входного воздействия, определяемого любым числом базисных функций $\psi_k(x, c)$ в (2), «простым» объектом, характеризуемым только тремя базисными функциями ψ_0, ψ_1, ψ_2 .

Можно показать, что при $c \rightarrow 0$

$$r_{01} = r_{10} = r_{21} = r_{12} = 0, \quad r_{02} = r_{20} = \frac{2}{3} \frac{c}{\sqrt{45}}, \quad r_{00} = \frac{4c^2}{9 \cdot 45}, \quad (19)$$

$$|\lambda_0|^2 = \left(2 - \frac{c^2}{9} \right)^2, \quad |\lambda_1|^2 = \frac{4}{9} c^2, \quad |\lambda_2|^2 = \frac{16}{45 \cdot 45} c^4,$$

и соотношение (9) в указанном приближении имеет вид

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{(\beta + \sigma_0)^2} + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{(\beta + \sigma_1)^2} + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial c} \right)^2 \frac{1}{(\beta + \sigma_2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{13c^2}{9 \cdot 45} \frac{1}{(\beta + \sigma_0)(\beta + \sigma_2)} \right]. \quad (20)$$

Из (20) можно убедиться, что необходимый закон изменения дисперсии в зависимости от c обеспечивает первые две базисные функции, т. е. простейшие четная и нечетная составляющие входа.

Базисные функции $\psi_k(x, c)$ удобны для расчетов, но полученные результаты трудно интерпретировать, поскольку при изменении c меняется не только протяженность, но и «форма» $\psi_k(x, c)$. Поэтому, предполагая c малым, рассмотрим $f(x)$ в виде тригонометрической суммы:

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \exp \left(i \frac{k\pi}{\alpha} x \right) \quad (|x| \leq \alpha). \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что при независимых α_k функция $\rho(\omega, \omega')$, входящая в (7), имеет вид

$$\rho(\omega, \omega') = M \sum_{k=-N}^N \frac{\sin \alpha(\omega - k\pi/\alpha)}{\alpha(\omega - k\pi/\alpha)} \frac{\sin \alpha(\omega' - k\pi/\alpha)}{\alpha(\omega' - k\pi/\alpha)}, \quad (22)$$

где $M = 4\alpha^2 M_0$, M_0 — дисперсия α_k . Заменяя $\rho(\omega, \omega')$ двумя членами ряда Тейлора по c^2 ,

$$\rho = M \{1 + \alpha^2 [A\omega\omega' - (\omega^2 + \omega'^2)]\}, \quad (23)$$

где

$$A = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}, \quad (24)$$

запишем решение уравнения (6) в виде

$$\omega(\omega, \omega') = \frac{1}{\kappa} \delta(\omega - \omega') + \psi_0 + c^2 \left[\gamma^2 (\omega^2 + \omega'^2) + b - \frac{M}{\kappa\Omega} A \omega\omega' \right], \quad (25)$$

где ψ_0 , b — постоянные.

Опуская очевидные выкладки, приведем окончательное выражение для дисперсии оценки σ^2 :

$$c^2 \sigma(\beta_1) = \frac{2}{9} \frac{1}{\beta_1(1 + \beta_1)} \left(\frac{1 + \beta_1}{\beta_1} A^2 + \frac{2}{45} + \frac{1}{9} \frac{\beta_1}{1 + \beta_1} \right), \quad (26)$$

где $\beta_1 = \frac{\kappa\Omega}{M}$. Нетрудно убедиться, что неравенство $\sigma < c$, которое должно выполняться во всех практически интересных случаях, имеет место лишь при $\beta_1 \ll 1$, когда

$$\sigma \approx \frac{9\beta_1^2}{2c^2 A^2}. \quad (27)$$

Расчет третьего приближения показал, что решение (25) имеет смысл при $c^2 \ll \frac{3\beta_1}{2A} \sim 10\beta_1$. Характерной особенностью соотношения (27)

для дисперсии оценки является зависимость от параметра A . Если в (21) выбрать $N = 0$, то соотношение (27) теряет смысл, т. е. имеет место отличная от (27) зависимость σ от c^2 и β_1 . С другой стороны, при любом $N \geq 1$ сохраняется необходимая зависимость σ от c . Таким образом, и в случае (21) вполне допустима замена «сложного» объекта более простым, который описывается двумя простейшими четными и одной нечетной функциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Финитные функции в физике и технике, изд. Наука, М., 1972
2. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике, под редакцией М. К. Размахнина, В. П. Яковleva, изд. Сов. радио, М., 1973.
3. П. А. Бакут, Изв. вузов — Радиофизика, 5, № 3, 326 (1962).

THE ESTIMATION OF FINITE INPUT EXTENSION

V. P. Yakovlev

The problem of the linear device input extension measurement according to its output mixed with the additive noise is considered. It is shown that the estimation of the extension may be made as a result of substitution of the input by three simplest base functions of the complete system.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ОСЦИЛЛЯТОРА С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

O. B. Музичук

Анализируются статистические характеристики выходного сигнала линейного стохастического фильтра 2-го порядка (гармонического осциллятора с флуктуациями собственной частоты и потерь), находящегося под воздействием случайной силы. Получены замкнутые уравнения диффузионного приближения для моментов произвольного порядка, исследованы условия моментной устойчивости, найдены стационарные значения моментов и кумулянтов. Показано, что с увеличением спектральных плотностей параметрических воздействий высшие кумулянты выходного сигнала растут быстрее дисперсии и его вероятностное распределение становится существенно негауссовым.

1. При статистическом описании динамических систем с флуктуирующими параметрами широко применяется аппарат марковских процессов (см., например, [1-3]). Однако в нетривиальных случаях обычно не удается найти решение уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП) для плотности вероятности, поэтому приходится ограничиваясь отысканием менее общих статистических характеристик, чаще всего, первых двух моментов «выхода». Ясно, однако, что в ряде случаев, например в задачах обнаружения и фильтрации слабых сигналов различной физической природы, весьма желательно также знание высших кумулянтов, несущих определенную информацию о виде вероятностного распределения выходной координаты стохастической системы.

Рассмотрим статистические характеристики линейного стохастического фильтра, описываемого уравнением 2-го порядка (осциллятора с флуктуирующими параметрами):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 h(t) \frac{dy}{dt} + \Omega^2(t) y = \Omega_0^2 x(t). \quad (1)$$

Примеры физических систем, анализ которых сводится к отысканию таких характеристик, можно найти, в частности, в [4, 5].

Пусть $\Omega^2(t) = \Omega_0^2 + \alpha(t)$, $h(t) = h_0 + \beta(t)$, а флуктуации параметров α , β и входной сигнал $x(t)$ — стационарные гауссовые процессы с нулевыми средними значениями, времена корреляции которых малы по сравнению с $\{h_0^{-1}, \Omega_0^{-1}\}$. Положим также $x(t)$ и флуктуации параметров статистически независимыми.

Введя импульс $z = \dot{y}$, от уравнения (1) нетрудно перейти к замкнутому уравнению диффузионного (марковского) приближения для эволюции среднего значения произвольной функции переменных y , z^* :

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} = \left\langle z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle - \Omega_0^2 \left\langle y \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle - 2 h_0 \left\langle z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle +$$

* Процедура получения и оценки условий применимости подобных уравнений рассмотрены, например, в [2].

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D_\alpha}{2} \left\langle y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\rangle + 2 D_\beta \left\langle z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\rangle + \\
 & + 2 D_{\alpha\beta}^0 \left\langle yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\rangle + \frac{\Omega_0^4 D_x}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\rangle,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Omega_1^2 = \Omega_0^2 - D_{\beta\alpha}, \quad h_1 = h_0 - D_\beta, \quad 2D_{\alpha\beta}^0 = D_{\alpha\beta} + D_{\beta\alpha},$$

$$D_{uv} = 2 \int_0^\infty \langle u(t) v(t + \tau) \rangle d\tau, \quad D_{uu} \equiv D_u, \quad u, v = \alpha, \beta, x.$$

Отсюда легко получить уравнение ЭФП для двумерной плотности вероятности $W(y, z) = \langle \delta[y - y(t)] \delta[z - z(t)] \rangle$, однако найти его решение не удается. Мы ограничимся рассмотрением смешанных моментов $(n+m)$ -го порядка. Положив в (2) $\psi = y^n z^m$, получим уравнение эволюции моментов:

$$\left(\frac{d}{dt} + a_m \right) \langle y^n z^m \rangle =$$

$$= n \langle y^{n-1} z^{m+1} \rangle - b_m \langle y^{n+1} z^{m-1} \rangle + c_m \langle y^{n+2} z^{m-2} \rangle + d_m \langle y^n z^{m-2} \rangle \quad (3)$$

$$(m, n = 0, 1, \dots).$$

Коэффициенты этого уравнения следующим образом зависят от спектральных плотностей флюктуирующих параметров:

$$\begin{aligned}
 a_m &= 2m(h_0 - m D_\beta), \quad b_m = m [\Omega_1^2 - 2(m-1) D_{\alpha\beta}^0], \\
 c_m &= \frac{m(m-1)}{2} D_\alpha, \quad d_m = \frac{m(m-1)}{2} \Omega_0^4 D_x \\
 (m &= 0, 1, \dots).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Наибольший интерес представляют моменты выходного колебания $\langle y^n(t) \rangle$; от системы (3) нетрудно перейти к уравнениям для таких моментов, исключая «лишние» переменные. В частности,

$$\begin{aligned}
 (p^2 + 2h_1 p + \Omega_1^2) \langle y(t) \rangle &= 0, \\
 (p^3 + \lambda_{22} p^2 + \lambda_{21} p + \lambda_{20}) \langle y^2(t) \rangle &= 2 \Omega_0^4 D_x,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$p \equiv \frac{d}{dt}, \quad \lambda_{22} = a_1 + a_2,$$

$$\lambda_{21} = a_1 a_2 + 2b_1 + b_2, \quad \lambda_{20} = 2a_2 b_1 - 2c_2.$$

Из-за громоздкости мы не будем приводить уравнений для высших моментов, ограничимся лишь исследованием моментной устойчивости и отысканием стационарных значений кумулянтов выходного колебания.

2. Из 2-го уравнения (5) следует условие среднеквадратичной устойчивости (как собственных, так и вынужденных колебаний)*

$$4(h_0 - 2D_\beta)\Omega_1^2 - D_\alpha > 0. \tag{6}$$

* Среднеквадратичная устойчивость стохастического осциллятора исследовалась в ряде работ, например, [2, 3, 6].

Анализ высших моментов решения упрощается в случае добротной системы ($Q = \Omega_0/2h_0 \gg 1$). При этом, как следует из (4), $a_k \ll b_k \approx k\Omega_0^2$. Результаты исследования устойчивости высших моментов (до четвертого) добротного осциллятора приведены ниже; здесь второй столбец соответствует флюктуациям собственной частоты, третий — потерю системы (флюктуации α и β считались статистически независимыми и рассматривались в отдельности):

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle : D_\alpha &< 4h_0\Omega_0^2, & D_\beta &< \frac{h_0}{2}, \\ \langle y^3 \rangle : D_\alpha &< 4h_0\Omega_0^2, & D_\beta &< \frac{3}{8}h_0, \\ \langle y^4 \rangle : D_\alpha &< \frac{8}{3}h_0\Omega_0^2, & D_\beta &< \frac{2}{7}h_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что ограничение $D_\beta < \frac{2}{7}h_0$ является лишь необходимым условием асимптотической устойчивости четвертого момента вынужденных колебаний, а все остальные неравенства в (7) — необходимые и достаточные условия устойчивости моментов как собственного, так и вынужденного решения*.

Для апериодической системы с $Q = 1$ ($\Omega_0 = 2h_0$) условия устойчивости 3-го и 4-го моментов осциллятора с флюктуациями собственной частоты соответственно примут вид

$$D_\alpha < 12h_0^3, \quad D_\beta < \frac{112}{15}h_0^3. \quad (8)$$

Как следует из (7), (8), с ростом номера момента растут и ограничения на величину спектральной плотности параметрического воздействия как для случая флюктуаций собственной частоты, так и потерь системы. Это дает основания полагать, что высшие моменты стохастического осциллятора являются неограниченными при $t \rightarrow \infty$, подобно тому, как это имеет место для системы 1-го порядка [1, 5, 7]. Такая ситуация свидетельствует о степенном законе спадания «крыльев» одномерного вероятностного распределения установившегося выходного сигнала, причем показатель степени обратно пропорционален величине эффективной мощности параметрического воздействия [8].

3. Проанализируем теперь выражения для стационарных значений моментов $\langle y^n \rangle \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle y^n(t) \rangle$ и соответствующих кумулянтов x_n выходного сигнала. Как можно показать из системы (3), стационарные значения нечетных моментов и кумулянтов выхода равны нулю, что свидетельствует о симметрии одномерного вероятностного распределения (и обусловлено, по-видимому, симметрией распределения входного шума). Для средней интенсивности и 4-го момента, характеризующего флюктуации интенсивности выходного шума, можно получить такие общие выражения:

$$\langle y^2 \rangle = \Omega_0^4 D_x [4(h_0 - 2D_\beta)\Omega_1^2 - D_\alpha]^{-1},$$

* Следует отметить ошибку, допущенную при определении устойчивости 4-го момента осциллятора с флюктуациями собственной частоты в примере, рассмотренном в [3]; соответствующий результат в (7) отличается в два раза.

$$\langle y^4 \rangle = \frac{3 \langle y^2 \rangle [(a_3 a_4 + b_4) d_2 + 2 b_1 d_4]}{b_1 (a_2 a_3 a_4 + 2 a_4 b_3 + a_2 b_4 - 2 c_4) - 3 c_2 (a_3 a_4 + b_4)}.$$

Положим далее флюктуации $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ статистически независимыми и перейдем к безразмерным параметрам

$$P = h_0 D_x, \quad \mu_\alpha = \frac{D_\alpha}{4h_0 Q_0^2}, \quad \mu_\beta = \frac{2 D_\beta}{h_0}.$$

Здесь P — мощность входного шума в полосе h_0 , μ_α и μ_β — эффективные мощности параметрических воздействий. В этих параметрах дисперсия выходного сигнала представляет собой

$$\langle y^2 \rangle = PQ^2(1 - \mu_\alpha - \mu_\beta)^{-1}, \quad (9)$$

а четвертый момент (в отсутствие флюктуаций потерь) —

$$\langle y^4 \rangle_{(\alpha)} = \frac{3 PQ^2 \left(1 + \frac{3}{4} Q^{-2}\right) \langle y^2 \rangle_{(\alpha)}}{1 + \frac{3}{4} Q^{-2} - \frac{3}{2} \mu_\alpha \left(1 + \frac{3}{2} Q^{-2}\right)}. \quad (10)$$

Здесь и ниже обозначено $\langle y^k \rangle_{(\alpha)} = \langle y^k \rangle|_{\mu_\beta=0}$, $\langle y^k \rangle_{(\beta)} = \langle y^k \rangle|_{\mu_\alpha=0}$.

Для случая добротной системы вычисления упрощаются, и нетрудно получить стационарные значения первых шести четных моментов:

$$\begin{aligned} \langle y^4 \rangle_{(\alpha)} &= 3 PQ^2 \langle y^2 \rangle_{(\alpha)} \left(1 - \frac{3}{2} \mu_\alpha\right)^{-1}, \\ \langle y^4 \rangle_{(\beta)} &= 3 PQ^2 \langle y^2 \rangle_{(\beta)} \left(1 - \frac{7}{4} \mu_\beta\right)^{-1}, \\ \langle y^6 \rangle_{(\alpha)} &= 5 PQ^2 \langle y^4 \rangle_{(\alpha)} (1 - 2 \mu_\alpha)^{-1}, \\ \langle y^6 \rangle_{(\beta)} &= 5 PQ^2 \langle y^4 \rangle_{(\beta)} \left(1 - \frac{5}{2} \mu_\beta\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из последних выражений следуют необходимые условия устойчивости 6-х моментов вынужденных колебаний: $\mu_\alpha < 1/2$, $\mu_\beta < 2/5$, которые, как можно было предполагать, несколько более жесткие, чем условия (7).

Приведем такие соответствующие (11) формулы для первых шести кумулянтов, характеризующих форму вероятностного распределения установившегося выходного сигнала. Поскольку нечетные кумулянты равны нулю, искомые кумулянты связаны с моментами соотношениями

$$\begin{aligned} x_2 &= \langle y^2 \rangle, \quad x_4 \equiv \gamma_4 x_2^2 = \langle y^4 \rangle - 3 \langle y^2 \rangle^2, \\ x_6 \equiv \gamma_6 x_2^3 &= \langle y^6 \rangle - 15 \langle y^2 \rangle \langle y^4 \rangle + 30 \langle y^2 \rangle^3. \end{aligned} \quad (12)$$

На основании (11) и (12) легко найти значения кумулянтных коэффициентов γ_k :

$$\begin{aligned} \gamma_{4(\alpha)} &= 3 \mu_\alpha (2 - 3 \mu_\alpha)^{-1}, \quad \gamma_{4(\beta)} = 9 \mu_\beta (4 - 7 \mu_\beta)^{-1}, \\ \gamma_{6(\alpha)} &= 5 \mu_\alpha \gamma_{4(\alpha)} (1 - 2 \mu_\alpha)^{-1}, \quad \gamma_{6(\beta)} = \frac{150}{9} \mu_\beta \gamma_{4(\beta)} (2 - 5 \mu_\beta)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда видно, что при $\mu_\alpha, \mu_\beta \rightarrow 0$ кумулянтные коэффициенты обра-

щаются в нуль, поскольку в отсутствие параметрических воздействий вероятностное распределение выхода—гауссово. В то же время, с ростом эффективной мощности флуктуаций параметров кумулянтные коэффициенты неограниченно возрастают. Это означает, что вероятностное распределение выходного сигнала становится существенно отличным от гауссова. Таким образом, «квазигауссова» аппроксимация выходного шума, используемая иногда при анализе стохастических систем, достаточно корректна лишь при относительно малых интенсивностях параметрических воздействий; следует также иметь в виду, что отличие разложения $2n$ -го момента $\langle y^{2n} \rangle$ от гауссова разложения $\langle y^{2n} \rangle = (2n - 1)!! \langle y^2 \rangle^n$ тем больше, чем выше его порядок n .

Зависимость стационарных значений четных кумулянтов стохастического осциллятора от эффективной мощности флуктуаций параметров показана на рис. 1. Здесь на осях отложены величины $\mu = \mu_\alpha = \mu_\beta$ и нормированные кумулянты $\bar{x}_{2n} = x_{2n} (PQ^2)^{-n}$, $n = \overline{1, 3}$. В этих обозначениях кривые для дисперсий совпадают: $x_{2(\alpha)} = x_{2(\beta)} = x_2$ (если понимать, соответственно, $\mu = \mu_\alpha$, $\mu = \mu_\beta$).

Сплошными линиями построена зависимость кумулянтов системы с флуктуациями собственной частоты, а пунктирными—осциллятора с флуктуациями потерь. Из рисунка видно, что высшие кумулянты существенно быстрее растут с увеличением эффективной мощности параметрического воздействия; заметим, однако, что при $\mu \ll 1$ $x_6 \sim \mu^2$, а $x_4 \sim \mu$. Можно заключить также, что несмотря на различные физические механизмы параметрического возбуждения системы флуктуациями собственной частоты и потерь, поведение рассмотренных статистических характеристик качественно подобно.

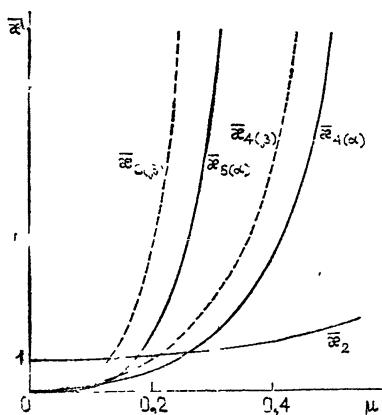


Рис. 1.

Укажем в заключение на результатов на высшие моменты. Тот факт, что условия ограниченности стационарных значений моментов $\langle y^{2n} \rangle$ накладывают с ростом n все большие ограничения на величину μ (см. (9), (11)), дает основания полагать, что закон спадания «крыльев» установившегося одномерного вероятностного распределения выходного сигнала имеет степенной вид:

$$W(y) \sim y^{-(r+s/\mu)}, \quad y \gg V\langle y^2 \rangle \quad (14)$$

(подобный же характер спадания «крыльев» вероятностного распределения у стохастического уравнения 1-го порядка [8]). Константы r и s можно определить из условий обращения в бесконечность, например, 2-го и 4-го моментов при известных значениях μ (соответственно $\mu = 1, 2/3$). Так для случая флуктуаций $\alpha(t)$ находим $r = -1, s = 4$. Отсюда, с учетом (14), приходим к условию устойчивости моментов порядка $2n$: $\mu_\alpha < 2/(n+1)$, $n = 1, 2, \dots$; в частности, для шестого момента это совпадает с результатом в (11). С другой стороны ясно, что при $\mu \rightarrow 0$ разложение моментов должно переходить в гауссово. Из этих соображений можно прийти к такой трехконтурной формуле для произвольных моментов:

$$\langle y^{2n} \rangle_{(\alpha)} = (2n - 1) PQ^2 \langle y^{2n-2} \rangle_{(\alpha)} \left(1 - \frac{n+1}{2} \mu_\alpha \right)^{-1}. \quad (15)$$

Аналогично рассуждая, получим для флюктуаций потерь $\beta(t)$:

$$\langle y^{2n} \rangle_{(\beta)} = (2n - 1) PQ^2 \langle y^{2n-2} \rangle_{(\beta)} \left(1 - \frac{3n+1}{4} \mu_\beta \right)^{-1} (n=1, 2, \dots). \quad (16)$$

Легко видеть, что формулы (9), (11) являются частными случаями последних, однако строгое доказательство справедливости выражений (15), (16) для произвольного n затруднительно.

Автор благодарен А. А. Дубкову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Хасьминский, Устойчивость системы дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, изд. Наука, М., 1976.
4. А. В. Соловьев, Ф. С. Петров, Линейные автоматические системы с переменными параметрами, изд. Наука, М., 1971.
5. В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов, Основы статистической теории автоматических систем, изд. Машиностроение, М., 1974.
6. K. K. Chen, Int. J. Control, 16, № 2, 209 (1972).
7. T. K. Saughey and J. K. Dienes, J. Math. Phys., 41, № 4, 300 (1962).
8. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв. вузов—Радиофизика, 21, № 1, 71 (1978).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
14 апреля 1977 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF OSCILLATOR WITH FLUCTUATION PARAMETERS

O. V. Muzychuk

The statistical characteristics of the output signal of the 2-nd order linear stochastic filter (harmonic oscillator with the natural frequency and loss fluctuations) affected by a random force are analyzed. Close equations of the diffusion approximation are obtained for the arbitrary moments. The conditions of the moment stability are investigated. The stationary values of a moments and cumulants are found. It is shown that as the spectral densities of parametric excitation increase, the highest cumulants of the output signal grow more rapidly than the dispersion ones and its probability distribution becomes essentially non-Gaussian.

УДК 539.216.2

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА МАГНИТНЫЙ ШУМ

B. V. Потемкин, A. M. Бузько, M. A. Тарасов

Исследуется корреляция шумов двух идентичных тонких магнитных пленок, возбуждаемых одним генератором накачки. Найдены условия, при которых существенно влияние внешних случайных полей на магнитные шумы по сравнению с внутренними флуктуациями доменной структуры.

Вопрос о природе магнитного шума при перемагничивании ферромагнитных образцов до настоящего времени полностью не изучен. Первые экспериментальные работы по выяснению природы магнитных шумов были сделаны Колачевским, который обнаружил влияние флуктуаций амплитуд переменного магнитного поля на неповторяемость скачков Баркгаузена в разных циклах перемагничивания [1, 2].

Магнитные шумы могут быть обусловлены рядом причин, таких, как флуктуации генератора накачки, случайные лабораторные поля, акустические шумы и внутренние факторы, в основе которых лежат тепловые колебания узлов кристаллической решетки. В общем случае нельзя точно указать, что является доминирующей причиной возникновения шума, поскольку это зависит от конкретных условий режима перемагничивания, свойств образца и условий эксперимента. Охлаждение ферромагнитных образцов вплоть до гелиевых температур выявило существенное снижение относительного уровня шумов циклического перемагничивания лишь для тонких магнитных пленок [3]. Это прежде всего связано с сокращением размеров случайных скачков доменных границ и поэтому не может служить исчерпывающим доводом в пользу их тепловой генерации. Для ответа на вопрос о причинах магнитных шумов представляет интерес проведение исследований корреляции шумов двух магнитных пленок, возбуждаемых в одинаковых условиях от одного генератора. Наличие такой корреляции указывало бы на роль внешних факторов в механизме возникновения магнитного шума. В работах [1, 2] исследована зависимость коэффициента корреляции магнитных шумов в двух массивных образцах от глубины хаотической амплитудной модуляции генератора накачки. Однако представляет интерес исследование корреляции в зависимости от режима перемагничивания, поскольку от него зависит как уровень флуктуаций, так и их спектральное распределение.

В настоящей работе экспериментально исследуется роль внешних факторов в процессе генерации шумов циклического перемагничивания пермаллоевых пленок. Выбор магнитной пленки в качестве объекта исследования обусловлен тем, что двумерная структура пленки наделяет ее свойствами, которые позволяют не только применять ее на высоких частотах, но и более отчетливо проследить физические процессы при ее перемагничивании, а имеющаяся в ней наведенная анизотропия дает возможность изменять петлю гистерезиса от прямоугольной до почти линейной.

В работе исследовалась корреляция шумов двух идентичных пленок, перемагничиваемых одним генератором накачки и в одинаковых условиях. Первые гармоники сигналов с пленок, усиленные по амплитуде, поступали на входы высокочастотных синхронных детекторов. Применение в данном случае метода детектирования обеспечивало исследование низкочастотных флуктуаций намагниченности [4]. Подбором коэффициентов усиления каждого из каналов добивались равенства шумовых сигналов $\bar{U}_1^2 = \bar{U}_2^2$ на входе суммирующего устройства. Тогда коэффициент корреляции будет иметь вид

$$K = \frac{\bar{U}_+^2 - \bar{U}_-^2}{\bar{U}_+^2 + \bar{U}_-^2},$$

где U_+ и U_- — суммарное и разностное напряжения на выходе сумматора. Перемагничивание пленок производилось на частоте 3 МГц, при которой пленки толщиной до 2000 Å сохраняют свою магнитную проницаемость.

В результате измерений было установлено отсутствие корреляции шумов образцов в широком диапазоне амплитуд перемагничивающих полей и при различных ориентациях анизотропных осей. Это указывает на несущественную роль внешних факторов в процессе генерации магнитных шумов в условиях нашего эксперимента. Отсутствие корреляции в двух пространственно-удаленных пленках при исследовании взаимного влияния их шумов в режиме квазистатического перемагничивания было обнаружено в работе [2].

Представляет интерес проследить возникновение корреляции шумов с двух пленок при увеличении флуктуаций перемагничивающего поля. Аддитивное добавление шумов с эталонного генератора шума Г2-1 создавало вклад как в амплитудные, так и в фазовые флуктуации перемагничивающего поля без дополнительного уширения линии генератора накачки.

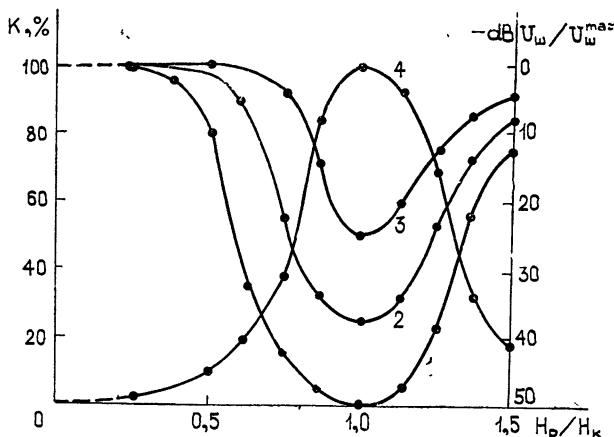


Рис. 1. Перемагничивание и съем по ОЛН.
Отношение сигнал/шум для кривой 1—50 дБ, для 2—35 дБ,
для 3—20 дБ. Кривая 4—спектральная плотность собственных
НЧ-флуктуаций пленки.

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента корреляции магнитных шумов двух пленок от амплитуды накачки (кривые 1, 2, 3). В качестве параметра использовалось соотношение сигнал/шум на выходе генератора.

Сравнение кривых 1, 2, 3 показывает, что увеличение уровня шумов перемагничивающего поля ведет к росту коэффициента корреляции. При фиксированном отношении сигнал/шум зависимость коэффициента корреляции от амплитуды перемагничивающего поля имеет минимум, совпадающий с максимумом шумов пленок. На этом же рисунке (кривая 4) изображена зависимость спектральной плотности флуктуаций первой гармоники сигнала перемагничивания одной из пленок от амплитуды накачки, полученная при выключенном генераторе шума.

Таким образом, можно предположить, что уменьшение коэффициента корреляции с ростом поля накачки обусловлено возрастанием некоррелированных собственных флуктуаций пленки. В случае больших или малых полей накачки флуктуации первой гармоники сигнала пленки обусловлены шумами генератора накачки.

Резюмируя вышесказанное, можно заключить, что в процессе возбуждения магнитного шума внешние факторы могут играть существенную роль в слабых полях накачки, когда перемагничивание происходит обратимо, а также в сильных полях перемагничивания, когда преобладают флуктуации момента переключения намагниченности образца, т. е. в наиболее интересных для практических применений случаях. В полях перемагничивания, имеющих порядок коэрцитивной силы или поля анизотропии, в процессе генерации магнитного шума, по-видимому, преобладают «внутренние» факторы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Колачевский, Радиотехника и электроника, 5, вып. 12, 1902 (1960).
2. Н. Н. Колачевский, Л. В. Стрыгин, Физика магнитных материалов, Калининский гос. университет, № 1, 5 (1973).
3. В. В. Потемкин, А. М. Буз'ко, Ю. В. Горохов, ФТТ, 17, 5, 1531 (1975).
4. А. М. Буз'ко, В. В. Потемкин, Вестник Моск. ун-та (серия физическая, астрономическая), № 3, 352 (1974).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
22 марта 1977 г.

INFLUENCE OF EXTERNAL RANDOM FIELDS ON MAGNETIC NOISE

V. V. Potemkin, A. M. Buz'ko, M. A. Tarasov

The correlation noise of two identical thin magnetic films excited by a single pump oscillator is investigated. The conditions are found under which the random fields have an essential influence upon magnetic noises as compared with external fluctuations of the domain structure.

УДК 621.371 : 535.3

О ЛУЧЕВОМ ОПИСАНИИ ТОНКОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

A. И. Саичев

В малоугловом приближении рассмотрена эволюция в случайно-неоднородной среде пучка, поперечные размеры которого много меньше характерных масштабов неоднородностей. Показано, что профиль интенсивности первоначального гауссова пучка всегда остается гауссовым. Обсуждаются вероятностные распределения интенсивности такого пучка в области сильных мерцаний. Найден средний квадрат площади гауссова пучка.

1. Долинным [1] было отмечено, что волну, распространяющуюся в однородной среде, можно представить в виде совокупности лучей. При надлежащем выборе граничных условий такое лучевое описание полностью учитывает дифракционные эффекты. Подобный лучевой подход нагляден и часто удобен при расчетах. Иногда в виде совокупности геометрооптических лучей можно представить и волны в неоднородной среде. При анализе их поведения удается эффективно использовать понятия геометрической оптики. Ниже рассмотрен один такой случай тонкого волнового пучка, поперечные размеры которого много меньше характерных масштабов неоднородностей среды, но много больше длины волны. Показано, что статистика интенсивности такого пучка в случайно-неоднородной среде в диффузационном приближении полностью определяется решением конечномерного уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП). Обсуждаются некоторые статистические свойства такого пучка.

2. При описании волны в качестве исходного возьмем параболическое уравнение [2]:

$$2i \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{k} \Delta_{\perp} E = k \epsilon(x, \rho) E. \quad (1)$$

Перейдем от него к уравнению для

$$\begin{aligned} B(R, s; x) &= E\left(x, R + \frac{s}{2}\right) E^*\left(x, R - \frac{s}{2}\right), \\ i \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{k} (\nabla_s \nabla_R) B &= \frac{k}{2} \left[\epsilon\left(x, R + \frac{s}{2}\right) - \epsilon\left(x, R - \frac{s}{2}\right) \right] B. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть волна представляет собой тонкий пучок, поперечные размеры которого $l \ll L$ -характерного масштаба неоднородностей среды. Тогда с точностью до членов порядка $(l/L)^2 \ll 1$ уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$i \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{k} (\nabla_s \nabla_R) B = \frac{k}{2} (s \nabla_R \epsilon(x, R)) B. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{v}; x) = \iint B(\mathbf{R}, s; x) e^{-ik(v s)} ds.$$

Уравнение для нее, вытекающее из (3), имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}}) f = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{R}} \epsilon(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{v}}) f. \quad (4)$$

Это уравнение Лиувилля в фазовом пространстве (\mathbf{R}, \mathbf{v}) для f —плотности лучей, распространяющихся по законам геометрической оптики. Однако лучевое описание волнового пучка, основанное на уравнении (4), вместе с граничным условием

$$f_0(\mathbf{R}, \mathbf{v}) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(\mathbf{R}, s; 0) e^{-ik(v s)} ds \quad (5)$$

учитывает и дифракцию. Отметим, что аналогичным заданием начальных условий дифракционные эффекты учитываются и в рамках уравнения переноса.

Лучевое описание нарушается только в области дифракции Фраунгофера или в области сверхсильных мерцаний, где из-за дифракционного расплывания или геометрической расходимости поперечные размеры пучка становятся порядка L .

3. В неоднородной среде волна имеет инвариант

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v} d\mathbf{R} = \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}, x) d\mathbf{R} = \text{const.} \quad (6)$$

В однородной среде волна обладает еще множеством инвариантов:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f^n(\mathbf{R}, \mathbf{v}; x) d\mathbf{R} = \text{const} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В приближении уравнения (4) тонкий пучок обладает и частью инвариантов волны в однородной среде:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f^n(\mathbf{R}, \mathbf{v}; x) d\mathbf{R} d\mathbf{v} = \text{const.}$$

Из уравнения (4) следуют также простые выражения для многих других функционалов поля в пучке. Чтобы показать это, перейдем от (4) к уравнению для среднего от $\langle \varphi[f] \rangle$ —произвольной функции f :

$$\frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}}) \langle \varphi \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla_{\mathbf{R}} \epsilon \nabla_{\mathbf{v}} \varphi \rangle, \quad (7)$$

и будем считать неоднородности среды гауссовыми с функцией корреляции

$$\langle \epsilon(x_1, \mathbf{R}) \epsilon(x_2, \mathbf{R} + \rho) \rangle = A[\rho] \delta(x_1 - x_2), \quad (8)$$

$$A[\rho] = A - D\rho^2 + \frac{B}{4}\rho^4 - \dots$$

В этом случае от (7) удается перейти к замкнутому уравнению для $\langle \varphi[f] \rangle$:

$$\frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x} + (\mathbf{v} \nabla_R) \langle \varphi \rangle = \frac{D}{4} \Delta_v \langle \varphi \rangle. \quad (9)$$

Последнее легко решается.

4. Решение уравнения (4) с граничным условием (5) имеет вид

$$f[\mathbf{R}, \mathbf{v}; x] = f_0[\mathbf{R}_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v}), v_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v})]. \quad (10)$$

Здесь v_0 и \mathbf{R}_0 — соответственно векторный угол отклонения от оси x и координаты при $x = 0$ луча, попадающего в точку $(x, \mathbf{R}, \mathbf{v})$. Функции $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x | \mathbf{R}_0, v_0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x | \mathbf{R}_0, v_0)$, обратные функциям \mathbf{R}_0 , v_0 , удовлетворяют лучевым уравнениям

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{v}, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} \nabla_R \epsilon(x, \mathbf{R}) \quad (11)$$

с граничными условиями $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$, $v(0) = v_0$. Очевидно, и $\mathbf{R}_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v})$, $v_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v})$ являются решениями обращенных по x уравнений (11). Введем функции $\mathbf{R}_0(x, s)$, $v_0(x, s)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\mathbf{R}_0}{ds} = -v_0, \quad \frac{dv_0}{ds} = \frac{1}{2} \nabla_{R_0} \epsilon(x - s, \mathbf{R}_0) \quad (12)$$

и граничным условиям $\mathbf{R}_0(x, 0) = \mathbf{R}$, $v_0(x, 0) = v$. Ясно, что интересующие нас $\mathbf{R}_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v})$ и $v_0(x | \mathbf{R}, \mathbf{v})$ равны соответственно $\mathbf{R}_0(x, x)$ и $v_0(x, x)$.

5. Пользуясь тем, что поперечные размеры пучка много меньше L , упростим описание эволюции пучка. Для этого выделим некоторый «центральный» луч пучка с начальными координатами \mathbf{R}_0^* , v_0^* , такими, что $f(\mathbf{R}, \mathbf{v}; x)$ практически равна нулю, как только $|\mathbf{R} - \mathbf{R}^*(x | \mathbf{R}_0^*, v_0^*)|$ превышает некоторую величину, много меньшую L . Перепишем (10) следующим образом:

$$f[\mathbf{R}, \mathbf{v}; x] = f_0[\mathbf{R}_0^* + \rho(x, x), v_0^* + u(x, x)]. \quad (13)$$

Входящие вспомогательные функции

$$\rho(x, x) = \mathbf{R}_0(x, x) - \mathbf{R}_0^*, \quad u(x, x) = v_0(x, x) - v_0^*$$

определим через решения уравнений (12). Согласно (12), $\rho(x, s)$ и $u(x, s)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\rho}{ds} = -u, \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{2} \nabla_{R_0^*} [\epsilon(x - s, \mathbf{R}_0^*(x, s) + \rho) - \epsilon(x - s, \mathbf{R}_0^*(x, s))]. \quad (14)$$

Так как по определению центрального луча существенный вклад в $f[\mathbf{R}, \mathbf{v}; x]$ вносят только те лучи, для которых $\rho \ll L$, перейдем от точных уравнений (14) к приближенным линейным уравнениям:

$$\frac{d\rho}{ds} = -u, \quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{2} \nabla_{R_0^*} (\rho \nabla_{R_0^*} \epsilon(x - s, \mathbf{R}_0^*(x, s))). \quad (15)$$

Граничные условия уравнений (14), (15) таковы:

$$\rho(x, 0) = \mathbf{R} - \mathbf{R}^*(x | \mathbf{R}_0^*, v_0^*), \quad u(x, 0) = v - v^*(x | \mathbf{R}_0^*, v_0^*),$$

где \mathbf{R}^* и v^* — координаты в плоскости x «центрального» луча. При этом, очевидно,

$$\rho(x, x) = R_0(x | R, v) - R_0^*,$$

$$u(x, x) = v_0(x | R, v) - v_0^*.$$

6. Воспользовавшись линейностью уравнений (15), представим их решения в виде

$$\begin{aligned} \rho &= y_1(R_1 - R_1^*) + y_2(R_2 - R_2^*) + y_3(v_1 - v_1^*) + y_4(v_2 - v_2^*), \\ u &= z_1(R_1 - R_1^*) + z_2(R_2 - R_2^*) + z_3(v_1 - v_1^*) + z_4(v_2 - v_2^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Входящие сюда пары $y_i(x, s)$, $z_i(x, s)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяют уравнениям (15)

$$\frac{dy_i}{ds} = -z_i, \quad \frac{dz_i}{ds} = \frac{1}{2} \nabla_{R_0^*}(y_i \nabla_{R_0^*}) \varepsilon(x - s, R_0^*(x, s)) \quad (17)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} y_{11}(x, 0) &= y_{22}(x, 0) = z_{31}(x, 0) = z_{42}(x, 0) = 1, \\ y_{12}(x, 0) &= y_{21}(x, 0) = y_{31}(x, 0) = y_{32}(x, 0) = \\ &= y_{41}(x, 0) = y_{42}(x, 0) = z_{11}(x, 0) = z_{12}(x, 0) = \\ &= z_{21}(x, 0) = z_{22}(x, 0) = z_{32}(x, 0) = z_{41}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (16) в (13), получим

$$\begin{aligned} f[R, v; x] &= f_0[R_0^* + (R_1 - R_1^*)y_1 + (R_2 - R_2^*)y_2 + \\ &+ (v_1 - v_1^*)y_3 + (v_2 - v_2^*)y_4, v_0^* + (R_1 - R_1^*)z_1 + \\ &+ (R_2 - R_2^*)z_2 + (v_1 - v_1^*)z_3 + (v_2 - v_2^*)z_4]. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку входящие сюда $y_i(x, x)$, $z_i(x, x)$, $R^*(x | R_0^*, v_0^*)$, $v^*(x | R_0^*, v_0^*)$ не зависят от R, v , то плотность $f(R, v; x)$ тонкого волнового пучка получается из начальной $f_0(R, v; x)$ аффинным преобразованием фазового пространства. Отсюда, в частности, следует, что первоначально гауссов пучок остается гауссовым. Отметим еще, что инвариант (6) можно рассматривать здесь как следствие теоремы Лиувилля о сохранении в фазовом пространстве «вмороженного» в лучи объема:

$$\frac{\partial(R_0, v_0)}{\partial(R, v)} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} & y_{42} \\ z_{11} & z_{21} & z_{31} & z_{41} \\ z_{12} & z_{22} & z_{32} & z_{42} \end{vmatrix} \equiv 1.$$

7. Переидем к анализу флуктуаций тонкого пучка в изотропной турбулентной среде. Тонкость пучка в данном случае означает, что его поперечные размеры много меньше внутреннего масштаба турбулентности. В диффузионном приближении удобно рассматривать вместо (19) более простое статистически эквивалентное ему выражение (см., например, [3]), заменив в (19) y_i , z_i , R^* и v^* функциями только x , удовлетворяющими статистически эквивалентным (12), (17) уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dR_k^*}{dx} &= -v_k^*, \quad \frac{dv_k^*}{dx} = \alpha_k(x), \\ \frac{dy_{ik}}{dx} &= -z_{ik}, \quad \frac{dz_{ik}}{dx} = y_{i1}\beta_{1k} + y_{i2}\beta_{2k} \end{aligned} \quad (20)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y_{11}(0) &= y_{22}(0) = z_{31}(0) = z_{42}(0) = 1, \\ y_{21}(0) &= y_{31}(0) = y_{41}(0) = y_{12}(0) = y_{32}(0) = \\ &= y_{42}(0) = z_{11}(0) = z_{41}(0) = z_{21}(0) = z_{12}(0) = z_{22}(0) = z_{32}(0) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

вытекающими из условий (18). Кроме того, примем для простоты, что пучок выходит из начала координат параллельно оси x , т. е.

$$R^*(0) = R_0^* = v^*(0) = v_0^* = 0.$$

Входящие в (20) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — в диффузационном приближении гауссовые с корреляционными функциями, следующими из (8):

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k(x_1) \alpha_k(x_2) \rangle &= \frac{D}{2} \delta(x_1 - x_2), \\ \langle \beta_{kk}(x_1) \beta_{kk}(x_2) \rangle &= \frac{3}{2} B \delta(x_1 - x_2), \\ \langle \beta_{11}(x_1) \beta_{22}(x_2) \rangle &= \langle \beta_{12}(x_1) \beta_{21}(x_2) \rangle = \frac{1}{2} B \delta(x_1 - x_2), \\ \langle \alpha_1(x_1) \alpha_2(x_2) \rangle &= \langle \alpha(x_1) \beta(x_2) \rangle = \langle \beta_{12}(x_1) \beta_{kk}(x_2) \rangle = 0, \\ \beta_{12}(x) &= \beta_{21}(x), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда видно, что все статистические свойства тонкого пучка определяются случайными функциями R^* , v^* , y_i , z_i , вероятностное распределение которых может быть найдено из решения конечномерного уравнения ЭФП.

8. Возьмем для определенности гауссов коллимированный пучок, для которого

$$f_0(R, v) = 4\pi l^2 \exp\left(-\frac{R^2}{l^2} - k^2 l^2 v^2\right).$$

При этом флюктуации интенсивности пучка, согласно (19), описываются выражением

$$\begin{aligned} I(R, x) &= \frac{l^2}{\theta} \exp\left\{-\frac{1}{k^4 \theta^2} [\alpha(x)(R_1 - R_1^*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + b(x)(R_2 - R_2^*)^2 - 2c(x)(R_1 - R_1^*)(R_2 - R_2^*)]\right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$a = h_{11}\theta^2 - h_{44}h_{13}^2 - h_{33}h_{14}^2 + 2h_{34}h_{13}h_{14},$$

$$b = h_{22}\theta^2 - h_{44}h_{23}^2 - h_{33}h_{24}^2 + 2h_{34}h_{23}h_{24},$$

$$c = h_{12} \theta^2 + h_{44} h_{13} h_{23} + h_{33} h_{14} h_{24} - 2 h_{34} (h_{13} h_{24} + h_{23} h_{14}),$$

$$\theta^2 = (1/k^4) (h_{33} h_{44} - h_{34}^2),$$

$$h_{ij} = (y_{i1} y_{j1} + y_{i2} y_{j2})/l^2 + k^2 l^2 (z_{i1} z_{j1} + z_{i2} z_{j2}),$$

$$(i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Будем интересоваться флюктуациями интенсивности в центре пучка, т. е. в точке (R^*, x) и в фиксированной точке пространства (R, x) . В центре статистика интенсивности определяется формулой

$$I(R^*, x) = l^2/\theta(x).$$

$\theta(x)$ имеет смысл площади поперечного сечения пучка в плоскости x на уровне e^{-1} от интенсивности в центре. Отметим еще, что $\theta(x)$ полностью определяет статистику усредненных по R моментов интенсивности гауссова пучка, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} I^n(R, x) dR = \frac{l^{2n}}{\sqrt{n} \theta^{n-1}(x)}. \quad (24)$$

9. Рассмотрим подробнее функцию $\theta(x)$. После несложных преобразований ее можно записать еще и так:

$$\theta^2 = \frac{\theta_1^2}{k^4 l^4} + l^4 \theta_2^2 + \frac{1}{k^2} (2\theta_3^2 + \theta_4^2 + \theta_5^2) = \left(\frac{\theta_1}{k^2 l^2} - l^2 \theta_2 \right)^2 + \frac{\tau^2}{k^2},$$

где

$$\theta_1 = y_{32} y_{41} - y_{31} y_{42}, \quad \theta_2 = z_{32} z_{41} - z_{31} z_{42},$$

$$\theta_3 = -y_{31} z_{41} + y_{41} z_{31} = y_{42} z_{32} - y_{32} z_{42},$$

$$\theta_4 = y_{42} z_{31} - y_{32} z_{41}, \quad \theta_5 = y_{31} z_{42} - y_{41} z_{32},$$

$$\tau = \theta_4 + \theta_5.$$

Нетрудно от (20) перейти к уравнениям для этих функций:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dx} + \theta_4 + \theta_5 &= 0, \quad \frac{d\theta_2}{dx} + \beta_{11}\theta_5 + \beta_{22}\theta_4 + 2\beta_{12}\theta_3 = 0, \\ \frac{d\theta_3}{dx} + \beta_{12}\theta_1 &= 0, \quad \frac{d\theta_4}{dx} + \theta_2 + \beta_{11}\theta_1 = 0, \quad \frac{d\theta_5}{dx} + \theta_2 + \\ &+ \beta_{22}\theta_1 = 0, \quad \theta_1(0) = \theta_3(0) = \theta_4(0) = \theta_5(0) = 0, \quad \theta_2(0) = -1, \end{aligned} \quad (25)$$

а от них — к уравнению ЭПФ для трехмерной плотности вероятности функций θ_1, θ_2, τ , полностью определяющей статистические свойства θ и, следовательно, интенсивности в центре пучка. Решение этого уравнения неизвестно. Однако из линейности уравнений (25) вытекает, что для четных моментов $\theta(x)$ всегда можно записать конечную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Так, $\langle \theta^2 \rangle$ определяется уравнением

$$\frac{d^6 \langle \theta^2 \rangle}{dx^6} - 28B \frac{d^3 \langle \theta^2 \rangle}{dx^3} - 80B^2 \langle \theta^2 \rangle = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями

$$\langle \theta^2 \rangle_0 = l^4, \quad \left. \frac{d \langle \theta^2 \rangle}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 \langle \theta^2 \rangle}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{4}{k^2}, \quad (27)$$

$$\left. \frac{d^3 \langle \theta^2 \rangle}{dx^3} \right|_{x=0} = 8Bl^4, \quad \left. \frac{d^4 \langle \theta^2 \rangle}{dx^4} \right|_{x=0} = \frac{24}{k^4 l^4}, \quad \left. \frac{d^5 \langle \theta^2 \rangle}{dx^5} \right|_{x=0} = 176 \frac{B}{k^2}.$$

Решая (27), будем иметь:

$$\begin{aligned}
\langle \theta^2(x) \rangle &= l^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{236}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(x_1 x) + \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{x_1}{2} x\right) \times \right. \\
&\times \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x \Big] + l^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{236}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(-x_2 x) + \frac{2}{3} \exp\left(\frac{x_2}{2} x\right) \times \right. \\
&\times \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x \Big] + \frac{1}{k^8} \left\{ \frac{1}{x_1^2} \left(2 + \frac{30}{\sqrt{59}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(x_1 x) - \right. \right. \\
&- \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{x_1}{2} x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x - \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{x_1}{2} x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x \Big] + \\
&+ \frac{1}{x_2^2} \left(2 - \frac{30}{\sqrt{59}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(-x_2 x) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{x_2}{2} x\right) \times \right. \\
&\times \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x + \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{x_2}{2} x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x \Big] + \frac{6}{B k^4 l^4 \sqrt{59}} \times \\
&\times \left\{ \frac{1}{x_1} \left[\frac{1}{3} \exp(x_1 x) - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{x_1}{2} x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x + \right. \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{x_1}{2} x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x \Big] + \frac{1}{x_2} \left[\frac{1}{3} \exp(-x_2 x) - \right. \\
&- \frac{1}{3} \exp\left(\frac{x_2}{2} x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x - \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{x_2}{2} x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x \Big] \Big\} \\
&\left. \left(x_{1,2} = \sqrt[3]{B 2 (\sqrt{59} \pm 7)} \right). \right. \tag{28}
\end{aligned}$$

10. Обсудим выражение (28) для среднего квадрата площади сечения тонкого гауссова пучка. Прежде всего отметим, что уравнение (26) для $\langle \theta^2 \rangle$ совпадает с уравнением для среднего квадрата расходности бесконечно тонкой лучевой трубки, пропорциональной среднему квадрату площади ее поперечного сечения. Это уравнение было получено в работе [4] в приближении геометрической оптики. Устремляя k в граничных условиях (27) к бесконечности, получим с точностью до коэффициента пропорциональности l^4 граничные условия уравнения, приведенного в [4]. Из (28) видно, что, как и следовало ожидать, дифракция ведет к более быстрому росту среднего квадрата площади сечения лучевой трубки, чем в приближении геометрической оптики.

В области сильных мерцаний ($x_1 x \gg 1$) $\langle \theta^2 \rangle$ экспоненциально нарастает и описывается асимптотической формулой:

$$\langle \theta^2(x) \rangle \approx l^4 [0,1 + 0,4d^2 + 0,1d^4] \exp(x_1 x).$$

Из нее видно, что в области сильных мерцаний относительный вклад в уширение пучка чисто геометрических и дифракционных эффектов с ростом x не меняется и характеризуется безразмерным параметром:

$$d = \frac{1}{l^2 k \sqrt[3]{B}} \sim \frac{L \lambda}{l^2} \frac{1}{\sqrt[3]{\langle \varepsilon^2 \rangle}}.$$

Этот параметр имеет простой физический смысл. Он по порядку величины равен величине волнового параметра $\lambda x_0/l^2$ в начале области сильных мерцаний, где $Bx_0^3 \sim 1$. Таким образом, если в начале области сильных мерцаний волновой параметр еще мал ($d \ll 1$), то $\langle \theta^2 \rangle$ на всех расстояниях достаточно точно описывается в приближении геометрической оптики. Если же начало области сильных мерцаний находится в области дифракции Френеля или Фраунгофера ($d \geq 1$), то вклад дифракционных эффектов в $\langle \theta^2 \rangle$ всегда существует.

Отметим еще, что в работе Воробьева [7] получено выражение для средней площади тонкого пучка, аналогичное выражению (28) для среднего квадрата площади пучка. Однако в [7] при этом использовалась слишком идеализированная модель щедры (круглые параболоиды).

11. Проанализируем статистику интенсивности гауссова пучка в фиксированной точке. Вычислим вначале моменты интенсивности в области сильных мерцаний, где $\langle R^{*2} \rangle \gg \theta \sim l^2$. Учтя, что R^* в диффузационном приближении статистически не зависит от a, b, c, θ , и используя (23), (24), получим

$$\langle I^n(R, x) \rangle = \frac{3l^{2n}}{\pi D x^3 \sqrt{n}} \exp\left(-\frac{3R^2}{D x^3}\right) \left\langle \frac{1}{\theta^{n-1}(x)} \right\rangle \quad (29)$$

$(n = 1, 2, \dots).$

Справа угловые скобки означают усреднение по θ . К выражениям (29) для моментов интенсивности приводит, очевидно, следующее вероятностное распределение:

$$W[I; R, x] = \frac{3}{\pi D x^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3(R-\rho)^2}{D x^3}\right) \langle \delta[I - l^2/\theta \exp(-\rho^2/\theta)] \rangle d\rho. \quad (30)$$

В отличие от (29) оно справедливо всюду, так как в области слабых мерцаний, где θ и $\langle R^{*2} \rangle$ сравнимы, гауссов пучок практически изотропен, а $\theta \approx l^2 + x^2/k^2 l^2$. Подставляя это θ в (30), мы получим найденное в [5] вероятностное распределение интенсивности гауссова пучка, полностью обусловленное эффектом дрожания пучка [6].

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе и С. Н. Гурбатову за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. С. Долин, Изв. вузов — Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).
- Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
- В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, вып. 4, 500 (1973).
- А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 6, 2080 (1974).
- K. Figutts, J. Opt. Soc. Am., 62, № 2, 240 (1972).
- А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, вып. 3, 415 (1974).
- В. В. Воробьев, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 6, 865 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
31 августа 1976 г.

THE RAY DESCRIPTION OF A THIN WAVE BEAM IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM

A. I. Saichev

The evolution in a randomly-inhomogeneous medium of the beam which dimensions are much less than the characteristic scales of inhomogeneities is considered in the small angular approximation. The intensity profile of the initial Gaussian beam is shown to remain always Gaussian. The probability intensity distributions of such a beam in a strong scintillation region are discussed. The mean square of the Gaussian beam area is found.

УДК 621.396.677.861

К ВОПРОСУ ОБ ОПИСАНИИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН

H. K. Юрков

На основе существующих матричных методов анализа работы антенных систем выводится матрица рассеяния зеркальной антенны, и на ее основе определяется условие синтеза зеркальной антенной системы с однородной поляризационной диаграммой.

В настоящее время широко применяются методы матричного анализа в исследовании антенных систем. При этом поляризационные характеристики антенн определяются как с помощью матрицы Мюллера [1], так и методом когерентных матриц [2], либо матрицы Джонса [3]. В работе [4] рассматривается антенная система с точки зрения ее свойств рассеяния, причем многополюсник произвольной антенны имеет бесконечное число выходов, определяемых сферическими гармониками разложения ее диаграммы направленности (ДН). Матрица рассеяния (МР) при этом имеет бесконечный порядок. Такое представление антенной системы мало наглядно, поэтому несомненный интерес представляет анализ антенных систем с помощью эквивалентных многополюсников с ограниченным числом каналов.

Поляризационные свойства антенной системы можно рассматривать на основе МР, причем антенна по аналогии с волноводными устройствами представляется в виде многополюсника, имеющего входные и выходные каналы, работающие на ортогональных поляризациях. В данной работе производится вывод МР зеркальной антенной системы, основанный на существующих матричных методах описания работы антенных систем.

Матрица Джонса [3] антенны двухканального поляриметра определяется ДН устройства на ортогональных поляризациях:

$$[G] = a_0 \begin{bmatrix} f_x & f_{yx} \\ f_{xy} & f_y \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где a_0 — постоянный комплексный множитель, f_x, f_y — ДН антенны на основных и f_{xy}, f_{yx} — на перекрестных поляризациях двух ортогонально-поляризованных каналов. Данная матрица в произвольном поляризационном базисе связывает амплитуды E_x и E_y ортогональных составляющих фидерного тракта с ортогональными составляющими E_x^t и E_y^t выходного излучения:

$$\begin{bmatrix} E_x^t \\ E_y^t \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $[G]$ — матрица Джонса, определенная в (1).

Поскольку ДН суть функции координат, то амплитуды ортогональных составляющих являются также функциями координат. Составляю-

щие E_x и E_y могут задавать волну как в фидерном тракте, например в волноводном излучателе, так и в поле фокальной плоскости произвольной зеркальной антенны [2]. В последнем случае они также являются некоторыми функциями координат.

Выражение (2) в развернутом виде записывается так:

$$\begin{aligned} E_x^T &= (f_x E_x + f_{yx} E_y) a_0, \\ E_y^T &= (f_y E_y + f_{xy} E_x) a_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Поляризационную характеристику антенны можно представить в виде двух ортогонально поляризованных составляющих, совпадающих с ортами e_1 и e_2 выбранного поляризационного базиса. Причем действующая высота антенны определяется разложением [6]

$$h(e_1, e_2, t) = h_{e_1}(e_1, e_2, t) e_1 + h_{e_2}(e_1, e_2, t) e_2,$$

где h_{e_1} , h_{e_2} — действующая высота составляющих e_1 и e_2 .

В дальнейшем будем рассматривать антенну в линейном поляризационном базисе, определяемом ортами x и y декартовой системы координат, что, впрочем, не снижает общности рассуждений.

Традиционное описание свойств антенных систем с помощью ДН и поляризационных характеристик неполно, поскольку при этом не происходит учета влияния свойств рассеяния антенны на характеристики излучения, а две антенные системы с идентичными ДН могут по-разному воздействовать на падающую электромагнитную волну за счет различия их свойств рассеяния. Поэтому выражения (3) не в полной мере отражают работу антенной системы.

В произвольном ортонормированном базисе $[e_1, e_2]$ эллиптически поляризованная волна может быть представлена суммой двух волн, поляризации которых определяются ортами e_1 и e_2 . Вследствие этого антенная система эллиптической поляризации в базисе $[e_1, e_2]$ рассматривается как двухканальная система, осуществляющая обработку сигналов ортогональных поляризаций. Антenna при этом представима эквивалентным восьмиполосником (рис. 1).

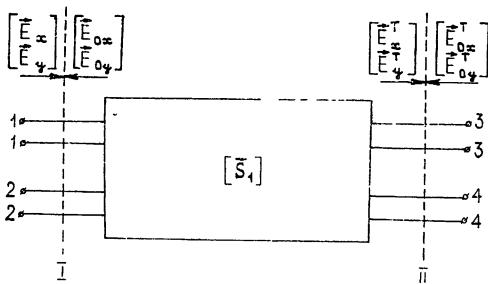


Рис. 1. Многополосник двухканальной антенной системы, работающей на ортогональных поляризациях:
I — фидерный тракт или фокальная плоскость антенны, II — дальняя зона излучения.

В выбранном базисе падающие и отраженные волны на входе антенны могут быть заданы матрицами-столбцами $[a_\alpha]$ и $[b_\alpha]$, а пространственное излучение соответственно $[a_\beta]$ и $[b_\beta]$. Антenna система реализует преобразование вида

$$[B] = \begin{bmatrix} [b_\alpha] \\ [b_\beta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{\alpha\alpha}] & [S_{\alpha\beta}] \\ [S_{\beta\alpha}] & [S_{\beta\beta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [a_\alpha] \\ [a_\beta] \end{bmatrix} = [S] [A],$$

где $[S]$ — МР антенной системы, $[A]$ и $[B]$ — соответственно матрицы-столбцы падающих и отраженных от устройства волн. При падении

электромагнитной волны возбуждения, определяемой вектором $[a_\alpha] = [E_x, E_y]_t$, где символ t означает операцию транспонирования, на входные клеммы антенны (рис. 1) на выходе антенны рассеивается волна, определяемая выражением

$$[b_\alpha] = [E_{0x}, E_{0y}]_t, \quad (4)$$

где

$$E_{0x} = s_{11}E_x + s_{12}E_y,$$

$$E_{0y} = s_{21}E_x + s_{22}E_y,$$

$$[S_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}.$$

Электромагнитная энергия анализируемого излучения $[a_\beta] = [E_{0x}^T, E_{0y}^T]_t$, поступая на antennную систему, образовывает за счет отражений от устройства обратную волну, характеризуемую следующим вектором:

$$[b_\beta] = [E_{0x}^T, E_{0y}^T]_t, \quad (5)$$

где

$$E_{0x}^T = s_{33}E_x^T + s_{34}E_y^T,$$

$$E_{0y}^T = s_{43}E_x^T + s_{44}E_y^T,$$

$$[S_{\beta\beta}] = \begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}.$$

Или с учетом выражений (3) — (5) имеем следующее матричное уравнение:

$$[B] = \begin{bmatrix} E_{0x}^T \\ E_{0y}^T \\ E_x^T \\ E_y^T \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ f_x & f_{xy} & s_{33} & s_{34} \\ f_{yx} & f_y & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

— МР двухканальной (всеполяризованной, т. е. работающей с сигналами произвольной поляризации) antennной системы. Элементы s_{11} , s_{22} , s_{33} , s_{44} этой матрицы задают характеристики отражения по соответствующим входам, s_{12} , s_{21} , s_{34} , s_{43} — взаимную связь каналов, а s_{13} , s_{14} , s_{23} и s_{24} представляют собой элементы, характеризующие передаточные свойства antennы. Блок $[S_{\beta\alpha}]$ МР (6) образован элементами матрицы Джонса (1), так как, как показано в работе [5], матрица Джонса при соответствующей нормировке определяет матрицу передаточных функций устройства.

Элементы s_{33} , s_{34} , s_{43} и s_{44} МР [S] антенной системы определяют искажение поля падающей на антенну волны. Идеальная антenna не должна вносить каких-либо изменений в распределение поля анализируемого излучения, однако за счет наличия некоторого отражения от антennы (ненулевые коэффициенты отражения s_{33} и s_{44}), а также за счет перекрестной связи между каналами 3—4 (рис. 1) (ненулевые элементы s_{34} и s_{43}) происходит искажение поля падающей волны.

В общем случае МР (6) несимметрична относительно главной диагонали. Однако, не теряя общности рассуждений, можно положить, что антenna не имеет невзаимных элементов и не вносит омических (МР (6) симметрична и унитарна), а также допустить, что антenna согласована с питающим фидером и в ней отсутствует связь между питающими каналами ($s_{11} = s_{22} = s_{12} = s_{21} = 0$). На основе этих допущений МР (6) приобретает вид

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_x & f_{yx} \\ 0 & 0 & f_{xy} & f_y \\ \hline f_x & f_{xy} & s_{33} & s_{34} \\ f_{yx} & f_y & s_{34} & s_{44} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Путем несложных преобразований, проводимых на основе свойства унитарности МР (7), можно получить [7] матрицу рассеяния двухканальной (всеполяризованной) антены в виде

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_x & f_{yx} \\ 0 & 0 & f_{xy} & f_y \\ \hline f_x & f_{xy} & K\bar{f}_{yx}^2 & -K\bar{f}_x\bar{f}_{yx} \\ f_{yx} & f_y & -K\bar{f}_x\bar{f}_{yx} & K\bar{f}_x^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $K = \sqrt{1 + f_{xy}\bar{f}_y/f_x\bar{f}_{yx}} e^{j\sigma}$, $\bar{[]}$ — знак комплексного сопряжения.

Произвольный облучатель зеркальной антены осуществляет преобразование энергии волноводно-фидерного тракта в поле излучения рефлектора. Причем поскольку большинство облучателей работает с сигналом одной поляризации, то его можно описать эквивалентным шестиполосником (рис. 2), имеющим один входной и два выходных канала (на ортогональных поляризациях). Его МР будет иметь вид

$$[S_2] = \begin{bmatrix} s_{11} 0 & f_{0x} & f_{0xy} \\ \hline s_{21} 0 & s_{22} 0 & s_{23} 0 \\ s_{31} 0 & s_{32} 0 & s_{33} 0 \end{bmatrix},$$

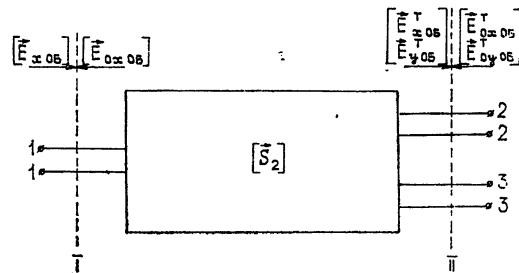
где f_{0x} , f_{0xy} — ДН облучателя на основной и перекрестной поляризациях.

Накладывая условие согласования облучателя с питающим фидером, а также принимая аналогичные допущения симметричности и унитарности его МР, нетрудно получить

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & f_{0x} & f_{0xy} \\ f_{0x} & f_{0xy}\bar{f}_{0xy}e^{i\pi} & -\bar{f}_{0x}f_{0xy}e^{i\pi} \\ f_{0xy} & -\bar{f}_{0x}f_{0xy}e^{i\pi} & \bar{f}_{0x}^2 \frac{f_{0xy}}{\bar{f}_{0xy}} e^{i\pi} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Заметим, что величины σ и τ зависят от конструктивных особенностей конкретной антенны и их правильный выбор позволяет минимизировать мощность рассеяния антенны [8].

Рис. 2. Шестиполюсник облучателя зеркальной антенны: I—фидерный тракт, II—дальняя зона облучения.



Привлекая геометрическую теорию дифракции к анализу антенных систем, можно утверждать, что облучатель зеркальной антенны расположен в дальней зоне облучения по отношению к рефлектору. В этом случае ортогональные составляющие выходного излучения облучателя, формируемые его ДН на основной и перекрестной поляризациях, являются входными для многополюсника $[S_1]$ (рис. 1), с помощью которого исследуются свойства рефлектора зеркальной антенны. Таким образом, эквивалентные многополюсники $[S_1]$ и $[S_2]$ ((8) и (9)) оказываются включенными каскадно. Подобное каскадное соединение формирует новый шестиполюсник, определяющий параметры зеркальной антенны в целом (рис. 3).

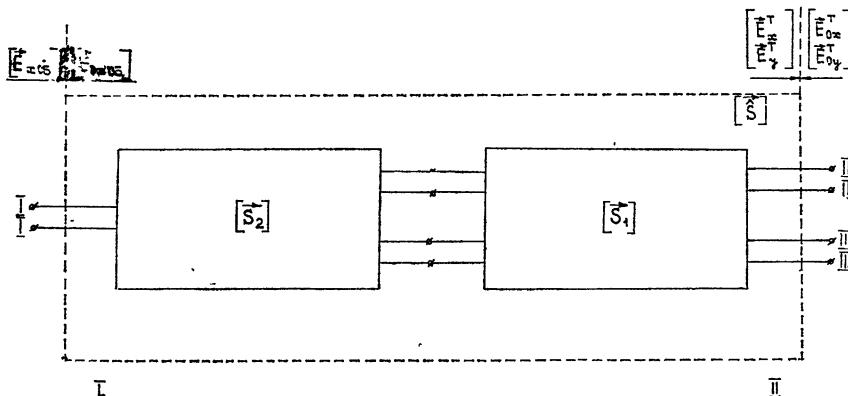


Рис. 3. Эквивалентный шестиполюсник зеркальной антенны: I—фидерный тракт облучателя, II—дальняя зона облучения антенны.

Представление линейной антенной системы эквивалентным многополюсником позволяет учесть ее свойства рассеяния и влияние рассеяния на характеристики излучения, а также минимизировать рассеивающую мощность.

Для определения элементов МР $[S]$ каскадного соединения матриц $[S_1]$ и $[S_2]$ можно воспользоваться любым известным из теории матричного анализа методом. Например, методом ориентированных графов [7].

нетрудно получить выражения для элементов \hat{s}_{12} , \hat{s}_{13} МР [S], определяющих характеристики передачи энергии антенны в каналы основной и перекрестной поляризаций:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{12} &= \frac{E_r}{P} [s_{12\ 0} s_{14} (1 - s_{33} \Gamma_3 - s_{33\ 0} s_{23}^2 \Gamma_3) + s_{12\ 0} s_{13} s_{34} \Gamma_3 + \\ &\quad + s_{13\ 0} s_{24} (1 - s_{33} \Gamma_3 - s_{22\ 0} s_{13}^2 \Gamma_3) + s_{13\ 0} s_{23} s_{34} \Gamma_3], \\ \hat{s}_{13} &= \frac{E_r}{P} [s_{12\ 0} s_{14} (1 - s_{33} \Gamma_3 - s_{33\ 0} s_{23}^2 \Gamma_3) + s_{12\ 0} s_{13} s_{34} \Gamma_3 + \\ &\quad + s_{13\ 0} s_{24} (1 - s_{33} \Gamma_3 - s_{22\ 0} s_{13}^2 \Gamma_3) + s_{13\ 0} s_{23} s_{34} \Gamma_3],\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}P = 1 - s_{44} \Gamma_4 - s_{33} \Gamma_3 - s_{33\ 0} s_{24}^2 \Gamma_4 - s_{22\ 0} s_{13} \Gamma_3 - s_{22\ 0} s_{14}^2 \Gamma_4 - s_{33\ 0} s_{23}^2 \Gamma_3 + \\ + s_{33} s_{44} \Gamma_3 \Gamma_4 + s_{22\ 0} s_{44} s_{13}^2 \Gamma_3 \Gamma_4 + s_{33} s_{24}^2 s_{33\ 0} \Gamma_3 \Gamma_4 + s_{33\ 0} s_{24}^2 s_{22\ 0} s_{13}^2 \Gamma_3 \Gamma_4 + \\ + s_{22\ 0} s_{14}^2 s_{33} \Gamma_3 \Gamma_4 + s_{33\ 0} s_{23}^2 s_{44} \Gamma_3 \Gamma_4,\end{aligned}$$

$E_r = 1$ — ЭДС генератора, Γ_3 , Γ_4 — коэффициенты отражения от окружающего пространства по каждому каналу.

Таким образом, на основе матрицы рассеяния каскадного соединения облучателя и рефлектора зеркальной антенны получено выражение (10) для определения характеристики излучения антенны на перекрестной поляризации. Причем, нулевая величина элемента \hat{s}_{13} (10) дает однородную поляризационную характеристику зеркальной антенны. Приравнивая нулю (10), получим наиболее общее условие синтеза зеркальной антенны с однородной поляризационной диаграммой в виде

$$A |f_{0xy}|^3 e^{i\varphi} + B |f_{0xy}|^2 + C |f_{0xy}| e^{i\varphi} + D = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}A &= f_y f_x^2 e^{i\tau} \Gamma_3, \\ B &= f_{0x} f_y^2 e^{i\tau} \Gamma_3, \\ C &= f_y (\bar{f}_{yx}^2 K \Gamma_3 - 1), \\ D &= f_{0x} f_{yx} (\bar{f}_{yx} K \Gamma_3 + f_x \bar{f}_x K \Gamma_3 - 1), \\ f_{0xy} &= |f_{0xy}| e^{i\varphi}.\end{aligned}$$

Решая (11) относительно f_{0xy} , легко определить такую ДН облучателя на перекрестной поляризации, которая требуется для уничтожения кросс-поляризационного излучения при заданном коэффициенте рассогласования Γ_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Есепкина, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 673 (1971).
2. Н. А. Есепкина, сб. Антенны (под ред. А. А. Пистолькорса), вып. 20, 96 (1974).
3. Д. Н. Мазурин, Радиотехника и электроника, 18, № 11, 2401 (1973).
4. W. K. Kahn, IEEE Trans., AP-13, № 5, 671 (1965).
5. Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин, И. Ф. Шишкин, Морская поляриметрия, изд. Судостроение, Л., 1968.

6. М. Е. Соломник, Ю. Г. Шатраков, А. М. Расин, Корреляционные ошибки УКВ угломерных систем, изд. Сов. радио, М., 1973.
7. М. А. Силаев, С. Ф. Брянцев, Приложение матриц и графов к анализу СВЧ-устройств, изд. Сов. радио, М., 1970.
8. R. B. Green, IEEE Trans., AP-14, № 1, 17 (1966).

Пензенский политехнический институт

Поступила в редакцию
7 марта 1977 г.

ON THE PROBLEM OF DESCRIPTION OF POLARIZATION
PROPERTIES OF MIRROR ANTENNAS

N. K. Yurkov

On the basis of existing matrix methods of analysing the antenna system operation the scattering matrix of a mirror antenna is deduced. The condition of synthesizing the mirror antenna system with the isotropic polarization diagram is determined.

УДК 621.372.822

ВОЛНОВОДНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

B. A. Коробкин, N. A. Хижняк

Рассматриваются волноводно-диэлектрические резонансы диэлектрического параллелепипеда в прямоугольном волноводе, зависящие как от параметров диэлектрика, так и от параметров волновода. Методом интегральных уравнений рассчитываются резонансные частоты в режиме собственных и вынужденных колебаний. Приводятся экспериментальные данные, указывающие на возможность практического использования высокодобротных резонаторов рассматриваемого типа на повышенных уровнях мощности и обладающих более высокой температурной стабильностью по сравнению с диэлектрическими резонаторами

Характер резонанса диэлектрического образца в волноводе определяется величиной диэлектрической проницаемости и соотношением поперечных размеров образца и волновода. При больших ϵ (~ 100) и одновременно малых размерах образца, значительно меньших поперечных размеров волновода, имеет место чисто диэлектрический (собственный) резонанс образца за счет высокого коэффициента отражения на границе диэлектрик—воздух. При малых ϵ или больших ϵ , но при условии близости одного из поперечных размеров волновода и образца, имеет место волноводно-диэлектрический резонанс за счет большого (иногда решающего) влияния стенок волновода на структуру поля и коэффициент отражения вдоль оси волновода.

Если на участке стандартного волновода с диэлектрическим включением (продольный размер которого $l \sim \lambda$) существуют условия распространения как для основного, так и для некоторых высших типов волн, то возможна реализация резонансов двух типов, в общем случае связанных между собой: «половиновые» резонансы для основного типа волны и резонансы высших типов за счет эффективного отражения на концах нерегулярного участка волновода. Резонансы последнего типа являются весьма эффективными даже при малых и средних значениях ϵ благодаря существованию закритических сечений в прилегающих к диэлектрическому образцу участках пустого волновода. Собственная добротность таких резонаторов будет определяться электрическими параметрами образца и волновода, нагруженная — коэффициентом связи резонирующего типа колебаний с основным типом волны в волноводе.

Применение волноводно-диэлектрических резонаторов на основе высококачественных диэлектриков со значением ϵ от нескольких единиц до нескольких десятков дает возможность увеличить рабочий уровень мощности на несколько порядков и уменьшить температурный уход частоты на один-два порядка таких резонаторов по сравнению с диэлектрическими резонаторами. При этом габариты волноводно-диэлектрических резонаторов для большинства практических применений увеличиваются незначительно.

1. РАСЧЕТ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВОЛНОВОДНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Для простоты рассмотрим случай, когда диэлектрический параллелепипед полностью заполняет прямоугольный волновод по высоте и частично по широкой стенке (рис. 1), что позволяет ограничиться последовательностью волн типа квази- H_{s0} .

Под собственными колебаниями рассматриваемой системы будем понимать колебания электромагнитной энергии в ограниченном объеме, не требующие наличия сторонних источников ($E_{ст} = 0$). В системе участок волновода с диэлектриком — пустой волновод такие колебания могут существовать при условии, что первоначальный запас энергии колебаний «заперт» на участке волновода с диэлектриком закрытыми участками пустого волновода. Таким образом, мы предполагаем, что незаполненный диэлектриком регулярный волновод является закрытым для всех типов волн, начиная с низшего H_{10} -типа. При этом условии вся энергия распространяющихся на участке волновода с диэлектриком волн будет отражаться от прилегающих к нему участков пустого волновода.

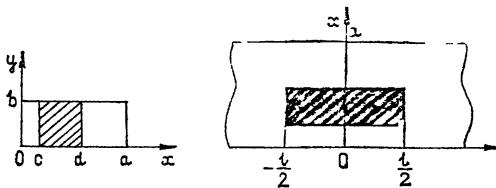


Рис. 1. Прямоугольный волновод с диэлектрическим вкладышем.

При заданных значениях ϵ и размерах диэлектрика и поперечных размерах волновода при определенной длине диэлектрика в системе могут существовать собственные колебания заданной частоты. Получим выражение для частоты таких собственных колебаний. Запишем электрическое поле в диэлектрике в интегральной форме [1, 2]:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{A}} \int_{V'} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{L} dV', \quad (1)$$

где $\hat{\mathbf{A}} = \text{grad div} + k^2$, $\mathbf{L} = (\epsilon - 1) \mathbf{E}$, V' — объем диэлектрика, $\hat{\mathbf{G}}$ — функция Грина уравнения для электрического вектора Герца \mathbf{Z}_e :

$$\nabla^2 \mathbf{Z}_e + k^2 \mathbf{Z}_e = (\epsilon - 1) \mathbf{Z}_e.$$

На стенках волновода компоненты функции Грина должны удовлетворять граничным условиям, накладываемым на соответствующие компоненты вектора Герца (значит и напряженности электрического поля). Поэтому представим ее в виде разложения по собственным функциям пустого волновода:

$$G_y = \sum_m C_m \sin p_m x \exp(-\gamma_m |z - z'|),$$

где z' — координата точечного источника,

$$\gamma_m = \sqrt{p_m^2 - k^2}, \quad p_m = \frac{m\pi}{a}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Легко показать, что [3]

$$C_m = \frac{1}{ab} \frac{1}{\gamma_m} \sin p_m x',$$

Поэтому

$$G_y = \frac{1}{ab} \sum_m \frac{1}{\gamma_m} \exp(-\gamma_m |z - z'|) \sin p_m x \sin p_m x'. \quad (2)$$

Представим поле в диэлектрике в виде суммы прямых и обратных волн квази- H_{s0} -типа:

$$E = \sum_s E_s^+(x) e^{-\Gamma_s z} + \sum_s E_s^-(x) e^{\Gamma_s z}. \quad (3)$$

Отметим, что данный метод расчета позволяет разделить задачу о нахождении постоянной распространения и задачу об амплитудах волн на участке волновода с диэлектриком на две независимые задачи. Учитывая это обстоятельство, мы можем записать электрическое поле в поперечном сечении диэлектрика для прямых и обратных волн в виде

$$E_s^\pm(x) = B_s^\pm (\sin t_s x + b_s \cos t_s x), \quad (4)$$

где

$$b_s = \frac{(t_s/r_s) \operatorname{tg} r_s c - \operatorname{tg} t_s c}{1 + (t_s/r_s) \operatorname{tg} r_s c \operatorname{tg} t_s c}, \quad t_s^2 = k^2 \epsilon + \Gamma_s^2, \quad r_s^2 = t_s^2 - (\epsilon - 1) k^2,$$

Γ_s — постоянная распространения квази- H_{s0} -волн на участке волновода с диэлектриком.

Величины Γ_s и b_s в случае полного заполнения диэлектриком волновода по высоте можно определить из известных дисперсионных соотношений, являющихся следствием сшивания полей на боковых стенах диэлектрического параллелепипеда. Электрическое поле в диэлектрике представим в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям пустого волновода:

$$E_s^\pm(x) = \sum_m F_{sm}^\pm \sin p_m x, \quad (5)$$

где

$$F_{sm}^\pm = B_s^\pm M_{sm},$$

$$M_{sm} = \frac{2}{a} \int_c^a \sin p_m x \sin t_s x dx + b_s \frac{2}{a} \int_c^a \sin p_m x \cos t_s x dx.$$

Тогда с учетом (2)–(5) из исходного интегрального уравнения (1) можно получить систему линейных алгебраических уравнений, связанных амплитуды прямых и обратных волн B_s^\pm в диэлектрике:

$$\sum_s \left[W_{sm}^+ (\gamma_m, \Gamma_s) \exp\left(\Gamma_s \frac{l}{2}\right) + W_{sm}^- (\gamma_m, -\Gamma_s) \exp\left(-\Gamma_s \frac{l}{2}\right) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\sum_s \left[W_{sm}^- (-\gamma_m, \Gamma_s) \exp\left(-\Gamma_s \frac{l}{2}\right) + W_{sm}^+ (-\gamma_m, -\Gamma_s) \exp\left(\Gamma_s \frac{l}{2}\right) \right] = 0,$$

где

$$W_{sm}^+ (\pm \gamma_m, \Gamma_s) = \frac{k^2 (\epsilon - 1)}{2 \gamma_m (\gamma_m \mp \Gamma_s)} B_s^+ M_{sm},$$

$$W_{sm}^- (\pm \gamma_m, -\Gamma_s) = \frac{k^2 (\epsilon - 1)}{2 \gamma_m (\gamma_m \pm \Gamma_s)} B_s^- M_{sm}.$$

Приравнивая нулю определитель системы (6), получим условие для определения собственных частот волноводно-диэлектрических резонансов. Можно показать, что определитель системы (6) может быть равен нулю при условии $B_s^+ = \pm B_s^-$, что соответствует существованию четных и нечетных типов колебаний соответственно. Для четных типов колебаний ($B_s^+ = B_s^-$) условие для определения собственных частот имеет вид (в предположении, что на участке волновода с диэлектриком распространяются только квази- H_{10} - и квази- H_{20} -типы волн)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{M_{11}}{\gamma_1^2 + \Gamma_1^2} \left(\gamma_1 \cos \Gamma_1 \frac{l}{2} - \Gamma_1 \sin \Gamma_1 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{21}}{\gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \left(\gamma_1 \cos \Gamma_2 \frac{l}{2} - \Gamma_2 \sin \Gamma_2 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{31}}{\gamma_1^2 - \Gamma_3^2} \left(\gamma_1 \operatorname{ch} \Gamma_3 \frac{l}{2} + \Gamma_3 \operatorname{sh} \Gamma_3 \frac{l}{2} \right) \dots \\ \\ \frac{M_{12}}{\gamma_2^2 + \Gamma_1^2} \left(\gamma_2 \cos \Gamma_1 \frac{l}{2} - \Gamma_1 \sin \Gamma_1 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{22}}{\gamma_2^2 + \Gamma_2^2} \left(\gamma_2 \cos \Gamma_2 \frac{l}{2} - \Gamma_2 \sin \Gamma_2 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{32}}{\gamma_2^2 - \Gamma_3^2} \left(\gamma_2 \operatorname{ch} \Gamma_3 \frac{l}{2} + \Gamma_3 \operatorname{sh} \Gamma_3 \frac{l}{2} \right) \dots \\ \\ \frac{M_{13}}{\gamma_3^2 + \Gamma_1^2} \left(\gamma_3 \cos \Gamma_1 \frac{l}{2} - \Gamma_1 \sin \Gamma_1 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{23}}{\gamma_3^2 + \Gamma_2^2} \left(\gamma_3 \cos \Gamma_2 \frac{l}{2} - \Gamma_2 \sin \Gamma_2 \frac{l}{2} \right) \times \\ \times \frac{M_{33}}{\gamma_3^2 - \Gamma_3^2} \left(\gamma_3 \operatorname{ch} \Gamma_3 \frac{l}{2} + \Gamma_3 \operatorname{sh} \Gamma_3 \frac{l}{2} \right) \dots \\ \end{array} \right| = 0. \quad (7)$$

Для нечетных типов колебаний ($B_s^+ = -B_s^-$) элементы определителя (7) будут иметь вид

$$a_{sm} = \frac{M_{sm}}{\gamma_m^2 - \Gamma_s^2} \left(\gamma_m \operatorname{sh} \Gamma_s \frac{l}{2} + \Gamma_s \operatorname{ch} \Gamma_s \frac{l}{2} \right), \quad (8)$$

где $\Gamma_s = i\Gamma_s$ для $s = 1, 2$, $\Gamma_s = \Gamma_s$ для $s = 3, 4, 5, \dots$

Отметим, что в системе уравнений (6) амплитуды B_s^\pm всех квази- H_{s0} -волн в общем случае связаны между собой. Легко показать, что для симметричного расположения диэлектрического образца относительно центра поперечного сечения волновода

$$M_{sm} = 0 \text{ для } \begin{cases} m = 1, 3, 5, \dots \\ s = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \text{ и } \begin{cases} m = 2, 4, 6, \dots \\ s = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

и

$$M_{sm} \neq 0 \text{ для } \begin{cases} m = 1, 3, 5, \dots \\ s = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \text{ и } \begin{cases} m = 2, 4, 6, \dots \\ s = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

т. е. имеет место только связь нечетных типов волн с нечетными и четных — с четными.

Полагая, что на участке волновода с диэлектриком распространяются только первые два типа волны квази- H_{10} и квази- H_{20} , для симметричного положения диэлектрика в одноволновом приближении из (6) получим независимые условия, определяющие резонансные частоты квази- $H_{10\delta}$ -и квази- $H_{20\delta}$ -типов колебаний (δ показывает, какая часть полуволны укладывается вдоль длины диэлектрического образца):

квази- $H_{10\delta}$

$$\operatorname{tg} \Gamma_1 \frac{l}{2} = \frac{\gamma_1}{\Gamma_1}, \quad \operatorname{tg} \Gamma_2 \frac{l}{2} = \frac{\gamma_2}{\Gamma_2} \text{ — для четных типов колебаний,}$$

$$\operatorname{ctg} \Gamma_1 \frac{l}{2} = -\frac{\gamma_1}{\Gamma_1}, \quad \operatorname{ctg} \Gamma_2 \frac{l}{2} = -\frac{\gamma_2}{\Gamma_2} \text{ — для нечетных типов колебаний.}$$

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВОЛНОВОДНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Будем полагать, что со стороны $z < 0$ на диэлектрический образец падает волна основного типа H_{10} (начало координат смешено на торец образца):

$$E_{ct} = A_1 \exp(-i\gamma_1 z) \sin p_1 x. \quad (9)$$

Исходное интегральное уравнение в этом случае будет иметь вид

$$E = E_{ct} + \hat{A} \int_{V'} \vec{G} L dV'. \quad (10)$$

Решение интегрального уравнения (8) позволяет получить систему уравнений, связывающую амплитуды B_s^\pm волны в диэлектрике с амплитудой падающей волны A_1 [3]:

$$\sum_s [W_{sm}^+(\gamma_m, \Gamma_s) + W_{sm}^-(\gamma_m, -\Gamma_s)] = A_m \delta_{1m}, \quad (11)$$

$$\sum_s [W_{sm}^+(-\gamma_m, \Gamma_s) \exp(-\Gamma_s l) + W_{sm}^-(-\gamma_m, -\Gamma_s) \exp(\Gamma_s l)] = 0.$$

Переизлученное поле за пределами диэлектрического образца ($z > l$) представим в виде суммы прошедших волн:

$$E_{np} = \sum_m T_m \exp(-\gamma_m z) \sin p_m x. \quad (12)$$

Пользуясь исходным уравнением (10), легко получить выражение для амплитуд [3]

$$T_m = \sum_s \{W_{sm}^+(\gamma_m, \Gamma_s) \exp[(\gamma_m - \Gamma_s)l] + W_{sm}^-(\gamma_m, -\Gamma_s) \exp[(\gamma_m + \Gamma_s)l]\}. \quad (13)$$

Для стандартного волновода на достаточно большом расстоянии от диэлектрика в поле прошедшей волны (12) можно учитывать только T_1 . Полагая амплитуду падающей волны равной единице, получаем модуль коэффициента прохождения волны H_{10} в виде

$$|T_1| = \left| \frac{E_{\text{пп}}}{E_{\text{ст}}} \right| = \left| \sum_s \left[W_{s1}^+ (\gamma_1, \Gamma_s) e^{-r_s l} + W_{s1}^- (\gamma_1, -\Gamma_s) e^{r_s l} \right] \right|, \quad (14)$$

в котором число амплитуд B_s^+ и B_s^- определяется из усеченной системы уравнений (11).

Для реализации в заданном частотном диапазоне только низшего типа волноводно-диэлектрического резонанса квази- $H_{20\delta}$ необходимо выбрать при заданном значении ϵ такую толщину вкладыша, чтобы на участке волновода с диэлектриком распространялся кроме основного квази- H_{10} только один ближайший квази- H_{20} -тип волны. При этом частотная зависимость модуля коэффициента прохождения выявит наличие «полуволнового» резонанса ($l = n \frac{\lambda_{\text{в1}}}{2}$) по основному типу и волноводно-диэлектрического резонанса квази- $H_{20\delta}$ диэлектрического параллелепипеда, обусловленного эффективным отражением волны квази- H_{20} в прилегающих к образцу закритических участках пустого волновода. На рис. 2 показана рассчитанная на ЭВМ по формулам (14) и (11) с учетом семи типов волн ($m = 1, 2, \dots, 7$; $s = 1, 2, \dots, 7$) частотная зависимость модуля коэффициента прохождения при резонансе квази- $H_{20\delta}$ для смешенного от центра диэлектрического параллелепипеда, выраженного в децибелах ($\epsilon = 6,2$; $d - c = 8,2 \text{ мм}$; $l = 8,85 \text{ мм}$; $\Delta = \frac{a}{2} - \frac{d - c}{2} = 1,4 \text{ мм}$; $a = 28,5 \text{ мм}$).

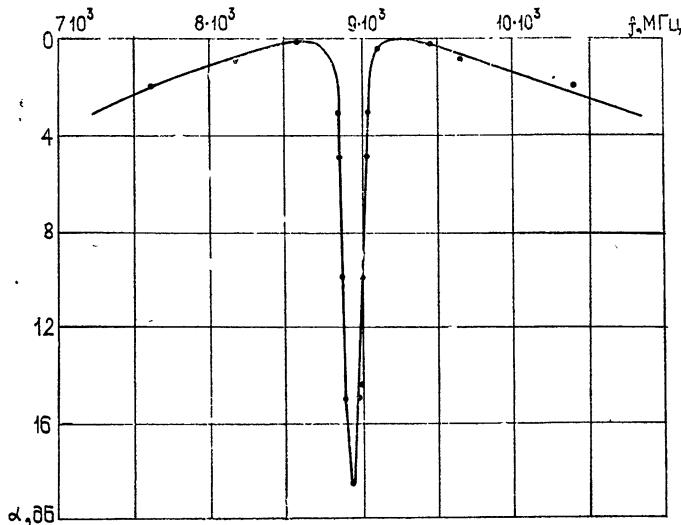


Рис. 2.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментально исследовались волноводно-диэлектрические резонансы на образцах из различных диэлектриков (телефон, лейкосапфир, ПТ и др.). Диэлектрический параллелепипед полностью заполнял волновод по высоте и частично по широкой стенке.

Для получения максимальной амплитуды возбуждения волноводно-диэлектрического резонанса размеры образца выбирались такими, чтобы его частота и частота полуволнового резонанса по основному типу квази- H_{10} совпадали или были близки.

При расположении диэлектрического образца резонансных размеров симметрично в центре волновода резонанс квази- $H_{20\delta}$ не возбуждался, а амплитуда квази- $H_{30\delta}$ максимальна, так как в этом положении связь волны квази- H_{10} с волнами квази- H_{20} и квази- H_{30} соответственно отсутствует или максимальна.

При смещении образца к узкой стенке волновода амплитуда возбуждения низшего типа колебаний квази- $H_{20\delta}$ растет и в зависимости от величины ϵ может достигать 30—40 дБ. На рис. 3 показана расчетная и экспериментальная кривые (1 и 2) зависимости амплитуды возбуждения резонанса квази- $H_{20\delta}$, выраженной в децибелах, для диэлектрического параллелепипеда с размерами $d - c = 8,2 \text{ mm}$, $l = 8,85 \text{ mm}$ ($\epsilon = 6,2$) от величины смещения относительно середины широкой стенки волновода в 3-санитметровом диапазоне (волновод сечением $6 \times 28,5 \text{ mm}$). Значительное расхождение экспериментальных и расчетных значений амплитуды возбуждения, очевидно, объясняется тем, что при расчете не учитывались потери. Кривые рис. 4 показывают изменение частоты этого резонанса при смещении образца от центра волновода. Теоретические кривые (1) рис. 3 и 4 рассчитывались по формуле (14) с учетом семи типов волн. Как видно из рис. 4, расчет частоты резонанса с учетом семи типов волн дает достаточно хорошее совпадение с экспериментальными данными. Собственная добротность волноводно-диэлектрических резонаторов существенным образом зависит от величины $\operatorname{tg} \delta$ диэлектрика и для высококачественных диэлектриков (например лейкосапфира $\epsilon = 9,2$, $\operatorname{tg} \delta = 1 \cdot 10^{-4}$) достигает величины 2000—3000 (для сечения волновода $6 \times 28,5 \text{ mm}$).

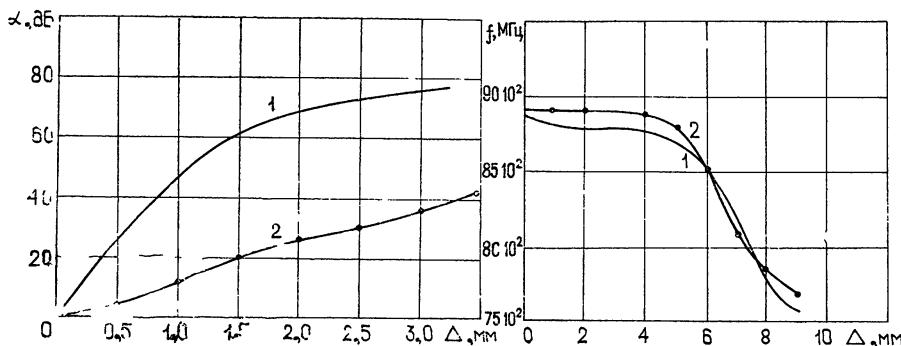


Рис. 3,

Рис. 4.

Температурный уход резонансной частоты для резонатора из лейкосапфира составляет $0,15\text{--}0,20 \text{ МГц}$ в интервале температур $+60 \div -60^\circ\text{C}$, т. е. на порядок меньше, чем у диэлектрических резонаторов из ртутила.

Высокая добротность, большая, легко регулируемая в широких пределах амплитуда возбуждения, температурная стабильность частоты делают такие резонаторы весьма перспективными для создания малогабаритных резонансных устройств, работающих на повышенных уровнях мощности.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, № 7 (1958).
- 2 Н. А. Хижняк, Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, вып 4 (1967).
- 3 М. Ж. Кислюк, Метод вторичных волн в задачах электродинамики, Л., 1970

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17 февраля 1976 г.,
после переработки
23 августа 1977 г.

WAVEGUIDE-DIELECTRIC RESONANCE OF A DIELECTRIC SAMPLE IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

V. A. Korobkin, N. A. Khizhnyak

The waveguide-dielectric resonances of the dielectric parallelepiped in a rectangular waveguide depending both on dielectric and waveguide parameters. The resonance frequencies in self and forced oscillation regimes are calculated by the integral equations method. The experimental data indicate the possibility of practical use of high Q factor resonators of the considered type at high power levels which possess a higher temperature stability as compared with dielectric resonators.

УДК 621.372.8.09

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В УСЛОВИЯХ СВЧ-ПРОБОЯ ГАЗА В ВОЛНОВОДЕ

*В. А. Исаев, В. Н. Круглов, Н. В. Лунин, Г. А. Марков,
Б. К. Полуяхтов*

Исследовано самосогласованное взаимодействие электромагнитного поля TE_{11} -волны десятисантиметрового диапазона с плазмой СВЧ-разряда в круглом волноводе диаметром 7,5 см, откаченного до давления $10 \div 10^{-4}$ тор. Показано, что при достаточной интенсивности излучения ($P_0 \geq 200$ кВт) образовавшаяся в результате разряда закритическая плазма не нарушает прозрачности волновода даже в случае, когда практически отсутствует зазор между стенкой разрядного баллона и волноводом. Распространение СВЧ-энергии в этом случае связано, по-видимому, с эффективным возбуждением дипольных поверхностных волн, бегущих вдоль разряда и поддерживающих в нем необходимую плотность плазмы

Хорошо известно, что под действием достаточно сильных волновых полей в волноводе, заполненном газом, возможно возбуждение СВЧ-разряда [1], препятствующего дальнейшему распространению электромагнитной энергии вдоль системы [2, 3]. В то же время, как было показано в работах [3-5], взаимодействие интенсивного электромагнитного излучения с плотной плазмой, не вызывающее существенной ионизации среды, может привести к просветлению полностью непрозрачных для слабых полей плазменных образований.

Целью настоящей работы является исследование закономерностей распространения интенсивной электромагнитной волны в условиях СВЧ-пробоя газа, заполняющего волновод. В работе приведены результаты наблюдений динамики СВЧ-пробоя и распространения разряда, экранирования и последующего «просветления» волновода в достаточно сильном поле падающей волны.

УСЛОВИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

СВЧ-разряд возбуждался полем волны TE_{11} в стеклянном баллоне длиной 240 см и внутренним диаметром 6 см, который помещался внутри круглого волновода диаметром 7,5 см*. На конце волновода стояла согласованная нагрузка, КСВ холодной системы не превышал 1,2. Баллон заполнялся воздухом или гелием. Рабочий диапазон давлений $p \sim 10^{-4} \div 30$ тор. На разряд вдоль оси волновода (ось z) было наложено постоянное магнитное поле, величину которого (H_0) можно было менять от 0 до 1200 Э. Длительность импульса подводимого СВЧ-сигнала $\tau = 2,5 \cdot 10^{-6}$ с, частота $f_0 = 3,1 \cdot 10^9$ Гц, мощность сигнала P_0 меняли в пределах 50 \div 500 кВт.

Для измерения высокочастотных полей в волновод на расстоянии 70 см друг от друга вдоль оси z были введены пристеночные штыревые антенны длиной 3 мм, ориентированные по полю падающей волны.

* Зазор между стенкой разрядного баллона и волноводом составлял 4 мм.

В этих же сечениях волновода (z_1, z_2, z_3) * помещались ФЭУ, регистрирующие свечение разряда. Со стороны согласованной нагрузки в плазму вдоль оси z вводилась экранированная штыревая антенна, которую можно было перемещать как вдоль, так и поперек волновода**. Сигналы, пропорциональные мощности падающей (P_0) и отраженной от плазмы волны (P_r), снимались с направленных ответвителей. У ближнего к СВЧ-генератору конца разрядного баллона (в сечении z_1) были расположены монохроматоры ИСП-51 с приставкой ФЭП-1 и ДМР-4. С их помощью по отношению интенсивностей триплетной ($\lambda = 4713 \text{ \AA}$) и синглетной ($\lambda = 5047 \text{ \AA}$) линий гелия измерялась электронная температура [6]. Калибровка ФЭУ проводилась по излучению градуированной ленточной лампы СИ-10-300. Концентрация плазмы в разряде определялась по отсечке микроволнового сигнала ($\lambda = 3 \text{ см}$) и интерферометром ($\lambda = 10 \text{ см}$).

Основные результаты экспериментов представлены на рис. 1—6. На рис. 1 показаны осциллограммы СВЧ-сигналов с пристеночной антенны в конце волновода ($z = z_3$), которые были сняты для разных значений мощности падающей волны. Верхняя кривая получена при $P_0 = 70 \text{ кВт}$ и соответствует случаю допробойных полей, когда СВЧ-импульс проходит разрядный промежуток без искажения, нижняя кривая получена при $P_0 = 440 \text{ кВт}$. Переход к соседней, ниже стоящей осциллограмме соответствует увеличению мощности падающей волны на 1 дБ. Как и ожидалось, с увеличением P_0 больше некоторого порога ($P_0 \text{ пор} \sim 80 \text{ кВт}$ при $p \sim 0,1 \text{ тор}$) в разрядном баллоне возбуждался СВЧ-разряд и об разовавшаяся плазма экранировала волноводный канал. Длительность сигнала, снимаемого с антенны в конце волновода, при этом существенно уменьшалась по сравнению с временем облучения τ_0 . Однако при $P_0 \geq 200 \text{ кВт}$ после фазы экранирования волновода плазмой СВЧ-разряда наблюдался новый значительный рост сигнала с пристеночной антенны, что свидетельствовало о «просветлении» волноводного тракта в поле волны большой мощности. Зависимости времени развития разряда τ_1 , которое определялось по запиранию тракта и времени «просветления» тракта τ_2 (см. обозначения на рис. 1), от давления газа при $P_0 = 250 \text{ кВт}$ и $H_0 = 0$ показаны на рис. 2***.

Влияние постоянного магнитного поля на величины τ_1 и τ_2 отражают графики рис. 3, построенные для случая $P_0 = 250 \text{ кВт}$, $p = 5 \cdot 10^{-2} \text{ тор}$.

* z_1 находится в 50 см от начала ($z = 0$) разрядного баллона, обращенного в сторону СВЧ-генератора, z_3 находится в 20 см от согласованной волновой нагрузки в конце разрядного баллона.

** Исследование поперечного распределения волновых полей с дипольной симметрией антенной с противозондом [7] неудобно, так как при перемещениях антенны вдоль поля трудно располагать ее подводящий и балластный кабели перпендикулярно направлению распространения и электрическому полю волны.

*** Длительность τ_1 определяли от начала облучающего импульса до момента, когда величина сигнала с антенны убывала в 2e раз (двойка учитывает квадратичность детектора). Аналогично определяли длительность τ_2 .

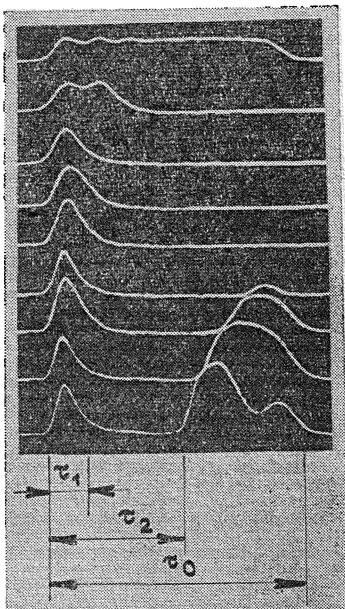


Рис. 1.

Для выяснения динамики распространения СВЧ-разряда по волноводу и механизма его «просветления» в поле интенсивной СВЧ-волны были получены и сопоставлены (см. рис. 4) осциллограммы сигналов с направленных ответвителей, трех ФЭУ и пристеночных антенн, расположенных вдоль образующей волновода в сечениях z_1 , z_2 и z_3 . Кроме того, с помощью подвижной штыревой антенны было определено поперечное распределение электрического поля в сечении z_3^* в момент максимального «просветления» волновода (рис. 5) и измерены изменения электронной температуры T_e за время облучения τ_0 в передней, обращенной к генератору части баллона (рис. 6). Данные, представленные на рис. 4—6, получены при $P_0 = 400 \text{ кВт}$, $p = 8 \cdot 10^{-2} \text{ torr}$, $H_0 = 0$.

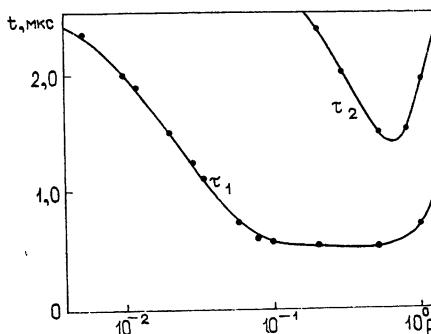


Рис. 2.

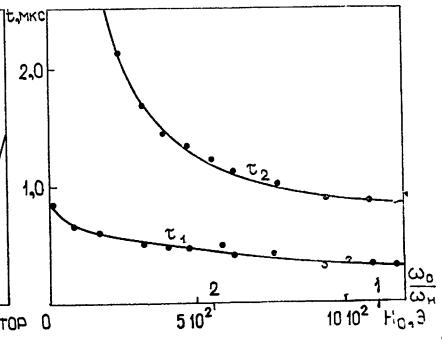


Рис. 3.

В этих условиях, как и в случае, когда сечение разрядного баллона существенно меньше сечения волновода [8], оказалось (см. осциллограммы сигналов с ФЭУ, рис. 4), что разряд возбуждался в передней части баллона и распространялся в сторону нагрузки со скоростью $v_p \sim 1.5 \cdot 10^8 \text{ см/с}$. Из поперечного просвечивания разряда сигналом с $\lambda = 3 \text{ см}$ можно заключить, что в распределении плотности плазмы по длине разряда выделяются движущийся фронт длиной $l \sim 40 \text{ см}$, концентрация плазмы в котором нарастает от 0 до n_{\max} , и слабонеоднородный вдоль оси z участок разряда с плотностью плазмы на оси баллона $n_{\max} \sim 10 n_{\text{крит}}$ ($n_{\text{крит}} = m \omega^2 / 4 \pi e^2$, e и m — заряд и масса электрона). Высокочастотное поле распространяется вместе с разрядом (см. рис. 4), а его структура (см. рис. 5) близка к структуре поверхностной волны дипольного типа [9]. Причем величина поля у стенки разрядного баллона в его передней части возрастает при «просветлении» разряда в 3—5 раз по сравнению с вакуумным значением. Коэффициент отражения падающей волны от разряда по мощности $\Gamma \leq 0.3$, коэффициент прохождения через разрядный промежуток $T \sim 0.1$. Максимальное поглощение СВЧ-сигнала происходит, по-видимому, [8] в неоднородной плазме движущегося фронта разряда. Это подтверждается как осциллограммами рис. 4 (5, 6, 7), где величина сигналов с высокочастотных зондов увеличивается в несколько раз при прохождении фронта разряда мимо антенны, так и графиком рис. 6, где максимум T_e совпадает по времени с участком быстрого роста плотности плазмы в сечении z_1 , в котором измерялась температура.

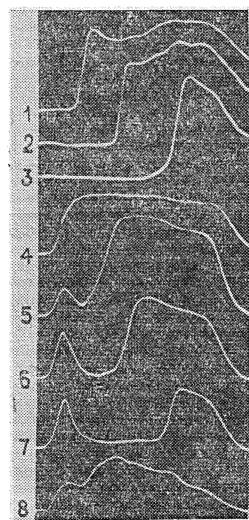
Изменение набега фазы высокочастотного сигнала на разрядном промежутке при возбуждении в нем СВЧ-разряда определялось интерферометром и равно 20π . Этот результат означает, что на участке, где

* В этом случае кабель связи находится в области согласованной нагрузки, и его влияние на волны с продольным полем E_z не так велико.

в пустом волноводе укладывается примерно 15 длин волн ($\lambda_b = 14,7 \text{ см}$), при разряде укладывается либо $5\lambda_b$, если между стенкой волновода и столбом закритичной плазмы ($n_{\max} > n_{\text{крит}}$) распространяется быстрая волна, либо 25 длин волн λ_m , если распространяется медленная поверхностная волна с коэффициентом замедления $\lambda_m/\lambda_b \sim 0,6$. Заметим, что, как показали предварительные эксперименты, отсутствие металлического волновода в области разрядного баллона почти не меняет картину СВЧ-разряда в баллоне и вид осциллограмм с пристеночных антенн, если сохранена система подведения к разряду электромагнитной волны и несколько увеличена СВЧ-мощность.

Рис. 4. Осциллограммы сигналов:

1, 2, 3—сигналы с ФЭУ в сечениях z_1, z_2, z_3 соответственно
4—импульс падающей волны, 5, 6, 7—сигналы с пристеночных антенн в сечениях z_1, z_2, z_3 , 8—импульс отраженной волны.



ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для оценки длины волны в волноводе, заполненном разрядной плазмой (λ_{\parallel}), воспользуемся данными о плотности плазмы ($n_{\max} \sim 10 n_{\text{крит}}$), характерном размере поперечной неоднородности СВЧ- поля ($a \sim 3 \text{ см}$, рис. 5) и выражением полного волнового числа $k = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_p} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_p}$ через продольную ($k_{\parallel} = 2\pi/\lambda_{\parallel}$) и поперечную (k_{\perp}) составляющие:

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} \epsilon_p = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2. \quad (1)$$

Представляя в (1) оценочные значения $k_{\perp} \sim i \frac{2\pi}{a}$ и диэлектрической проницаемости плазмы $\epsilon_p \approx 1 - n_{\max}/n_{\text{крит}} \sim 9$, получим значение коэффициента замедления волны в плазме разряда:

$$\frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_b} = \frac{a}{\lambda_b} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_p} \right)^{-1/2} \sim 0,55, \quad (2)$$

которое практически совпадает с экспериментальным значением $\lambda_m/\lambda_b = 0,6$, полученным фазометрическим методом.

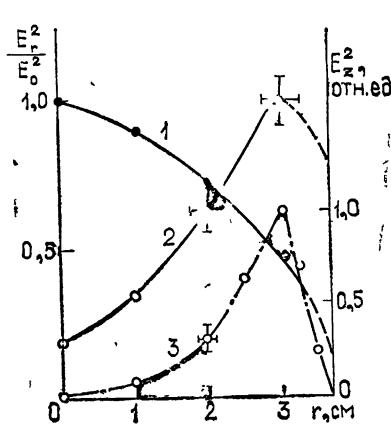


Рис. 5. Поперечное распределение электрического поля в сечении z_3 (конец разрядного баллона) в направлении вектора E падающей волны:
1—в пустом волноводе, 2—радиальной компоненты (E_r) в момент „просветления“ волновода,
3—продольной компоненты (E_z) в момент „просветления“ волновода.

Грубые оценки коэффициента трансформации падающей волны в медленную волну вдоль разряда, сделанные по отношению площадей волнового канала, занятых полем (см. рис. 5), дают величину $\sim (0,6 - 0,7)$. В этой оценке учтено наблюдаемое превышение амплитуды СВЧ-поля в пристеночной прозрачной области разряда над соответствующим вакуумным значением.

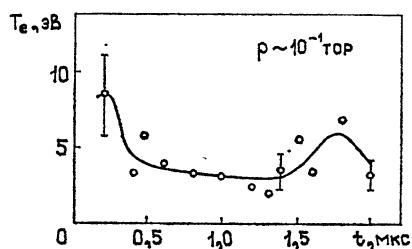


Рис. 6. Кривая изменения электронной температуры в разряде за время облучения.

чению столба плотность плазмы):

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{D}{a^2} N = \nu_i N. \quad (3)$$

Здесь D — коэффициент амбиполярной диффузии частиц из разряда, ν_i — частота ионизации, которую можно определить из уравнения баланса энергии для разряда,

$$P_0(1 - \Gamma - T) = \left(eU_i + \frac{3}{2} \kappa T_e \right) \pi a^2 n (v_p + \nu_i L), \quad (4)$$

где κ — постоянная Больцмана, U_i — потенциал ионизации. Подставляя выражение для ν_i из (4) в (3) и учитывая, что

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \pi a^2 n \frac{dL}{dt} = \pi a^2 n v_p, \quad (5)$$

легко получить выражение для скорости распространения разряда:

$$v_p = \left(\nu_i - \frac{D}{a^2} \right) L \sim 3,5 \cdot 10^8 \text{ см/с.} \quad (6)$$

При наложении постоянного продольного магнитного поля на разрядный промежуток улучшаются условия высокочастотного пробоя в газе [1], и из-за уменьшения поперечного коэффициента диффузии растет скорость распространения разряда вдоль поля. В результате с увеличением H_0 заметно уменьшается время развития разряда (см. графики $\tau_1(H_0)$ и $\tau_2(H_0)$ рис. 3).

Таким образом, приведенные выше данные позволяют сделать вывод о том, что возникновение СВЧ-разряда с $n_{\max} > n_{\text{крит}}$ по всей длине волновода не нарушает его прозрачности для интенсивного волнового поля с амплитудой $E_0 \gg E_{\text{пр}} = \frac{\omega_0}{\nu_{em}} \left(\frac{\kappa T_e U_i}{e a^2} \right)^{1/2}$, где ν_{em} — частота столкновений электрона с нейтральными молекулами. Распространение излучения в этом случае связано, по-видимому, с эффективной (до 70%) трансформацией падающей волны (накачки) в медленную поверхностную волну, бегущую вдоль разряда и поддерживающую в нем необходимую для этого плотность плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Мак Дональд, Сверхвысокочастотный пробой в газах, изд. Мир, М., 1969.
2. А. В. Гуревич, А. Н. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радио-волн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
3. Ю. Я. Бродский, Б. Г. Еремин, А. Г. Литвак, Ю. А. Сахончик, Письма в ЖЭТФ, 13, 136 (1971).
4. Г. М. Батанов, В. А. Силин, Взаимодействие электромагнитных волн с плазмой, Труды ФИАН, 73, 87 (1974).
5. В. А. Исаев, В. Н. Круглов, Б. К. Полухтов, ЖЭТФ, 71, 1017 (1976).
6. R. J. Sovie, JASRT, 8, 333 (1962); В. С. Войценя, А. Ю. Волошко, В. Г. Коновалов, С. И. Солововченко, ЖТФ, 44, 1455 (1974).
7. И. Р. Геккер, Препринт ФИАН № 19, М., 1966.
8. П. С. Булкин, В. Н. Пономарев, Г. С. Солнцев, Вестник МГУ (серия физика, астрономия), № 3, 93 (1967).
9. В. В. O'Brien, J. Plasma Phys., 9, 369 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
5 марта 1977 г.

PROPAGATION OF AN INTENSE ELECTROMAGNETIC WAVE UNDER THE CONDITIONS OF GAS UHF-BREAKDOWN IN A WAVEGUIDE

V. A. Isaev, V. N. Kruglov, N. V. Lunin, G. A. Markov,
B. K. Poluyakhtov

A self-consistent interaction between the electromagnetic field of a TE₁₁ wave in 10 cm range and UHF-discharge plasma in a circular waveguide 7.5 cm in diameter has been investigated. It is shown that for a sufficient intensity of radiation ($P_0 \geq 200$ kw) an opaque plasma resulted from the discharge does not disturb the waveguide transparency even in the case when there is practically no gap between the discharge balloon wall and the waveguide. In this case the propagation of UHF energy is apparently associated with effective excitation of dipole surface waves travelling along the discharge and remaining in it the necessary plasma density.

УДК 621.372.8

ИМПУЛЬСНЫЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ПРОБОЙ ВОЗДУХА У ИНДУКТИВНОЙ ДИАФРАГМЫ В ВОЛНОВОДЕ

Ю. А. Лупан, А. А. Красуцкий

Рассматриваются вопросы импульсного пробоя внутри прямоугольного волновода с индуктивной диафрагмой, герметизированной по раскрыву. Получены формулы и графики, позволяющие рассчитать критическую напряженность и предельный уровень канализируемой мощности для устройств с такой неоднородностью. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

В работах [1, 2] рассмотрено влияние диэлектрической границы и неоднородного распределения поля на величину критической напряженности ВЧ-пробоя воздуха в герметизированных волноводных секциях постоянного и переменного сечения. Характерной особенностью такого типа устройств является отсутствие волн высших типов в месте установки герметизирующей мембранны и достаточно плавное изменение напряженности поля как в сечении секции, так и в направлении распространения электромагнитной энергии.

В волноводных устройствах, содержащих сосредоточенные неоднородности, напряженность поля, напротив, претерпевает значительные изменения на расстояниях, соизмеримых с десятыми долями длины волны, из-за возникновения высших типов волн в месте установки неоднородности. Можно ожидать, что резкие изменения напряженности поля будут существенно сказываться на процессах формирования ВЧ-разряда, в частности, на размерах разрядной области, интенсивности свободной диффузии, а при низких давлениях — на средней энергии и длине свободного пробега электронов.

В настоящей статье формирование ВЧ-разряда в поле, создаваемом сосредоточенной неоднородностью, рассматривается на примере импульсного высокочастотного пробоя воздуха в волноводе с симметричной индуктивной диафрагмой, герметизированной по раскрыву диэлектрической мембраной (рис. 1). Такое исследование, помимо физических аспектов, имеет и чисто практические приложения к расчету электрической прочности частотно-разделительных фильтров, излучателей антенных решеток и выводных «окон» вакуумных ВЧ-генераторов [3, 4].

Если слева от диафрагмы давление воздуха значительно выше наружного, то пробой наступает справа от диафрагмы непосредственно у ее поверхности (рис. 1). Согласно [5], напряженность электрического поля у тонкой симметричной индуктивной диафрагмы ($z > 0$) описывается выражением

$$E_y(x, z) = E_{y0} \left[(1 + \dot{R}) \cos \frac{\pi x}{a} \exp(-j |\Gamma_1| z) + \sum_{q=2}^{\infty} B_{2q-1} \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{(2q-1)\pi x}{a} \exp(-\Gamma_q z) \right]. \quad (1)$$

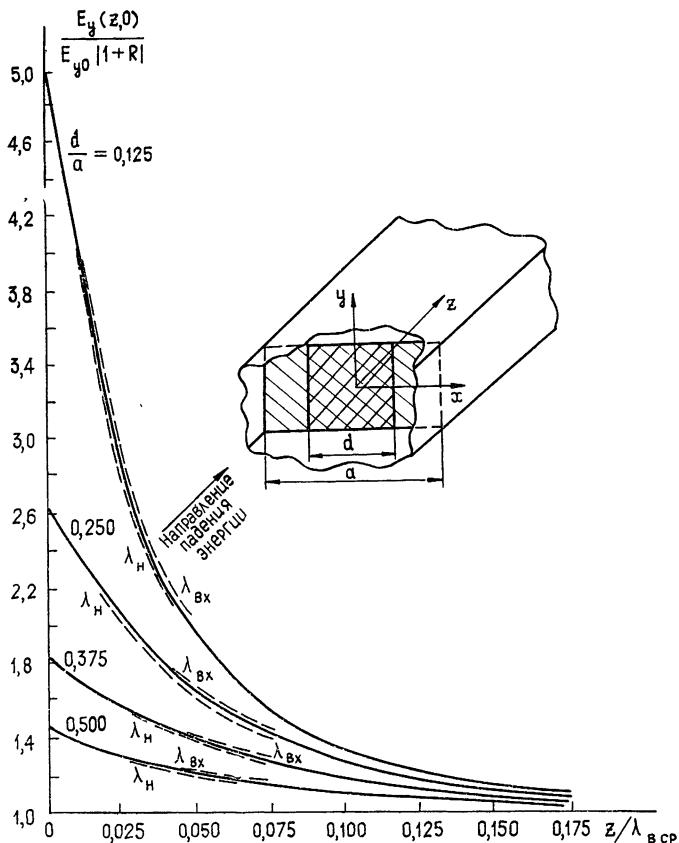


Рис. 1. Изменение напряженности поля за диафрагмой вдоль направления распространения волн.

Здесь E_{y0} — нормировочная константа, равная напряженности падающей на диафрагму волны H_{10} в центре волновода ($x = 0$); \dot{R} — комплексный коэффициент отражения от диафрагмы,

$$B_{2q-1} = \frac{2}{aE_{y0}} \int_{-d/2}^{d/2} E_y(x, 0) \cos \frac{(2q-1)\pi x}{a} dx,$$

$$\Gamma_q = \frac{\pi}{a} \left[(2q-1)^2 - \left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (q = 1, 2, j, \dots),$$

a — ширина волновода, λ — длина волны в свободном пространстве. Поле в раскрытии диафрагмы

$$E_y(x, 0) = E_{y0} \frac{|1 + \dot{R}|}{\sin \frac{\pi d}{2a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sin \frac{\pi d}{2a}} \right)^2}. \quad (2)$$

Подробности вычисления \dot{R} приведены в [5]. На рис. 1 представлена функция распределения электрической напряженности у поверхности диафрагмы вдоль оси z , рассчитанная из соотношения (1) с учетом 40 гармоник. Вычисления произведены в рабочей полосе волновода

$\lambda_{cp} \pm 20\%$ для различных значений d/a , где d — размер отверстия в диафрагме вдоль оси $0x$. Как видно из рисунка, в окрестности диафрагмы эту функцию с точностью до нескольких процентов можно записать в виде

$$E_y(0, z) = \frac{E_{y0} |1 + \dot{R}|}{\sin \frac{\pi d}{2a}} e^{-\eta z}, \quad (3)$$

где

$$\eta = 1,75 \frac{\pi}{a} \left(-\ln \frac{d}{a} \right)^{2/4} \quad (d \ll a). \quad (4)$$

В дальнейших расчетах будем полагать, что электрическая напряженность поля вблизи диафрагмы описывается выражением

$$E_y(x, z) \approx \frac{E_{y0} |1 + \dot{R}|}{\sin \frac{\pi d}{2a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sin \frac{\pi d}{2a}} \right)^2} e^{-\eta z}. \quad (5)$$

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Критическая напряженность поля находится из решения спектральной задачи для уравнения непрерывности концентрации свободных электронов [1, 6]

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\nu_i - \nu_a) n + D_m \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right). \quad (6)$$

Здесь n — концентрация свободных электронов. Частота ионизации (ν_i), частота прилипания (ν_a) и коэффициент диффузии электронов (D_m) описываются выражениями [7]

$$\nu_i \approx 2,5 \cdot 10^7 p \left[1,45 \left(\frac{E_s}{p} \right)^{0.5} + 0,01 \left(\frac{E_s}{p} \right)^{1.5} \right] \exp \left(-\frac{278}{E_s/p} \right), \text{ c}^{-1}; \quad (7)$$

$$D_m \approx \frac{1}{p} \left(0,55 + 1,5 \frac{E_{sm}}{p} \right) 10^4, \text{ см}^2 \cdot \text{c}^{-1} \quad (8)$$

(p — давление воздуха) и [6]

$$\nu_a \approx 2,12 \cdot 10^4 p, \text{ c}^{-1}. \quad (9)$$

Параметр E_{sm}/p , однозначно определяющий все коэффициенты в уравнении (6), характеризует напряженность поля в точке максимума

$$E_m = \frac{E_{sm}}{p} p \sqrt{2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\nu_{\text{эфф}}^2} \right)}, \text{ B}, \quad (10)$$

где ω — круговая частота, а $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений электрона. Индекс m приписан значению соответствующего параметра в точке, где напряженность поля достигает максимума.

Если электромагнитное поле модулировано импульсами прямоугольной формы, то можно полагать, что ν_i , ν_a , D_m в течение импульса не зависят от времени, так как изменение средней энергии электронов

происходит за время, на два-три порядка меньшее длительности стандартного радиолокационного импульса.

Подставив (5) в (7), получим в явном виде зависимость v_i от координат. Метод решения (6) базируется на разложении (7) в степенной ряд по малым параметрам, в качестве которых выбраны размеры разрядной области [1]. Сохраняя в последнем члены второго порядка малости и учитывая симметрию задачи, находим

$$\begin{aligned} v_i &\approx v_{im} (1 + B_2 x^2 + C_1 z + C_2 z^2) = \\ &= \frac{v_{im}}{2} [(1 + B_2 x^2) + (1 + 2 C_1 z + 2 C_2 z^2)], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$B_2 = \frac{1}{2 v_{im}} \left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a \sin \frac{\pi d}{2a}} \right)^2, \text{ см}^{-2}; \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{1}{v_{im}} \left. \frac{\partial v_i}{\partial z} \right|_{x=0} = -\eta \beta, \text{ см}^{-1}; \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{1}{2 v_{im}} \left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \right|_{x=0} \approx \frac{1}{2} \eta^2 \beta_1, \text{ см}^{-2}, \quad (14)$$

$$\beta = \frac{\partial [\ln(v_{im}/p)]}{\partial [\ln(E_{sm}/p)]} = \frac{278}{E_{sm}/p} + \frac{0,725 + 0,015(E_{sm}/p)}{1,45 + 0,01(E_{sm}/p)},$$

$$\beta_1 \approx \left(\frac{278}{E_{sm}/p} \right)^2 + \frac{278}{E_{sm}/p} \frac{0,005(E_{sm}/p)}{1,45 + 0,01(E_{sm}/p)} + \frac{0,3625 + 0,0225(E_{sm}/p)}{1,45 + 0,01(E_{sm}/p)}.$$

Поскольку частота ионизации v_i не может принимать отрицательных значений, то, как следует из (11), размеры разрядной области (область, внутри которой $v_i \geq 0$) определяются уравнениями

$$1 + 2 B_2 x_0 = 0; \quad (15)$$

$$1 + 2 C_1 z_0 + 2 C_2 z_0^2 = 0. \quad (16)$$

Из (13) и (14) можно убедиться, что в интервале значений $E_{sm}/p = (30 \div 200) \text{ B} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$

$$C_2 \approx 0,5 C_1^2, \quad (17)$$

что соответствует равным значениям корней в уравнении (16). Границными условиями в уравнении (6) являются

$$n \left(\pm \frac{a}{2}, y, z, t \right) = n \left(x, \pm \frac{b}{2}, z, t \right) = n(x, y, 0, t) = n(x, y, \infty, t) = 0. \quad (18)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$n = n_m(t) X(x) Y(y) Z(z). \quad (19)$$

Подставив в (6) выражения (11), (17) — (19) и, учитывая, что v_i не может принимать отрицательных значений, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dn_m}{dt} - \gamma^2 n_m &= 0, \\ n_m(0) &\approx 1 \text{ см}^{-3}, \quad n_m(\tau) = n_p = 10^8 \text{ см}^{-3}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{k^2}{2}(1 + 2B_2 x^2)X - \frac{k^2 - k_x^2}{2}X = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2|B_2|}};$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{k^2 - k_x^2}{2}X = 0, \quad |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2|B_2|}}, \quad X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0; \quad (22)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k_y^2 Y = 0, \quad \left. \frac{dY}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad Y(\pm b/2) = 0; \quad (23)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{k^2}{2}(1 + 2C_1 z + C_1^2 z^2)Z - \frac{k^2 - k_z^2}{2}Z = 0, \quad (24)$$

$$Z(0) = 0, \quad z < -1/C_1;$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{k^2 - k_z^2}{2}Z = 0, \quad z \geq -\frac{1}{C_1}, \quad Z(\infty) = 0; \quad (25)$$

$$k^2 - \frac{k_x^2}{2} - k_y^2 - \frac{k_z^2}{2} = \frac{\gamma^2 + v_a}{D_m}. \quad (26)$$

Здесь через k^2 обозначено отношение v_{im}/D_m . Целью решения системы (20) — (26) является определение минимального собственного значения k^2 . Подробности решения изложены в Приложении 1. Результатом решения является уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2 + v_a + D_m(\pi^2/b^2)}{D_m} &= k^2 - k \sqrt{|B_2|} - \\ &- \frac{k^2}{2} \exp \left\{ - \left[0,26 \left(\sqrt{\frac{k}{C_1}} - 2,4 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

из которого после подстановки в него (7) — (9), (12), (13) может быть вычислено $E_{\text{эм}}/p$, если независимым образом определена средняя относительная скорость изменения концентрации электронов в точке с максимальной напряженностью электрического поля — γ^2 . Как показано в [1], при одноимпульсном пробое

$$\gamma^2 \approx 18,4/\tau. \quad (28)$$

Непрерывному режиму соответствует $\tau \rightarrow \infty$ и $\gamma^2 \rightarrow 0$.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

На рис. 2 приведены рассчитанные из уравнения (27) зависимости $E_{\text{эм}}/p = f(p)$ для ряда стандартных волноводов с индуктивными диафрагмами $d = 0,5 a$; $d = 0,75 a$ при различной длительности импульса. Для перехода от параметра $E_{\text{эм}}/p$ к критической напряженности поля ($E_{\text{кр}}$) необходимо знать эффективную частоту соударений электрона $v_{\text{эфф}}$. Принято считать [6, 8], что

$$v_{\text{эфф}} = 5,3 \cdot 10^9 p \quad (29)$$

не зависит от напряженности ВЧ-поля. При относительно высоких дав-

лениях, отвечающих неравенству $v_{\text{эфф}}^2 \gg \omega^2$ и значениям $E_0/p < (80 \div 100) B \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$, это допущение не вносит заметных ограничений, так как

$$E_{\text{кр}} \approx \left(\frac{E_{\text{эм}}}{p} \right) p \sqrt{2}, \text{ B.} \quad (30)$$

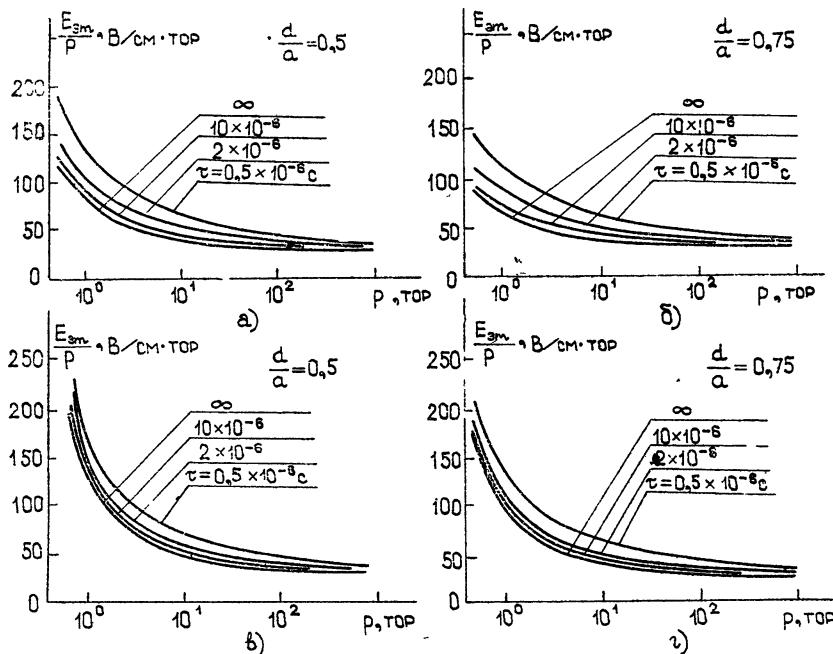


Рис. 2. Зависимость $E_{\text{эм}}/p = f(p)$ для индуктивных диафрагм в прямоугольных волноводах с поперечным сечением $a \times b = 5,8 \times 2,5 \text{ см}^2$ (а, б) и $2,3 \times 1,0 \text{ см}^2$ (в, г).

Напротив, в области низких давлений воздуха, отвечающих неравенству $v_{\text{эфф}}^2 \ll \omega^2$ и $E_0/p > (80 \div 100) B \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$,

$$E_{\text{кр}} \approx \left(\frac{E_{\text{эм}}}{p} \right) p \sqrt{2} \frac{\omega}{v_{\text{эфф}}} \quad (31)$$

и зависимость $v_{\text{эфф}}$ от E становится существенной. Пренебрежение зависимостью $v_{\text{эфф}} = v_{\text{эфф}}(E)$ может, таким образом, привести к значительным ошибкам в определении критической напряженности поля при низких давлениях и больших E_0/p . Это обстоятельство отмечено, в частности, в работе [9].

Эффективная частота соударений может быть вычислена из интеграла [10]

$$\frac{v_{\text{эфф}}}{p} = 2,07 \bar{u}^{-5/2} \int_0^\infty u^{3/2} \frac{v(u)}{p} \exp \left(-\frac{3u}{2\bar{u}} \right) du, \quad (32)$$

в котором зависимость частоты соударений (v) от энергии электрона (u) взята из [6], средняя энергия электрона (\bar{u}) зависит от $E_{\text{эм}}/p$ как [7]

$$\bar{u} \approx 0,0675 E_{\text{эм}}/p, \quad (33)$$

а функция распределения электронов по энергиям принята маковелловской.

Графики $v_{\text{эфф}}/p = f_1(\bar{E})$ и $v_{\text{эфф}}/p = f_2(E_{\text{в}}/p)$ показаны на рис. 3. С учетом этих зависимостей связь между эффективной напряженностью поля в общепринятом определении

$$\bar{E}_{\text{в}} = \frac{E_{\text{кр}}}{\sqrt{2[1 + (\omega/5,3 \cdot 10^9 p)^2]}} \quad (34)$$

и параметром $E_{\text{в}}/p$, вычисленным из (27), может быть установлена из равенства

$$E_{\text{кр}} = \left(\frac{\bar{E}_{\text{в}}}{p} \right) p \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{5,3 \cdot 10^9 p} \right)^2 \right]} = \left(\frac{E_{\text{в}}}{p} \right) p \sqrt{2 \left(1 + \frac{\omega^2}{v_{\text{эфф}}^2} \right)} \quad (35)$$

и определяется соотношением

$$\frac{\bar{E}_{\text{в}}}{p} = \frac{E_{\text{в}}}{p} - \delta, \quad (36)$$

где

$$\delta = \left\{ 1 - \left[\left(\frac{5,3 \cdot 10^9 p}{v_{\text{эфф}}} \right)^2 \frac{\omega^2 + v_{\text{эфф}}^2}{\omega^2 + (5,3 \cdot 10^9 p)^2} \right]^{1/2} \right\} \frac{E_{\text{в}}}{p}. \quad (37)$$

График поправки $\delta = \delta \left(\frac{E_{\text{в}}}{p} \right)$ в области $\omega^2 \gg v_{\text{эфф}}^2$ показан на рис. 3.

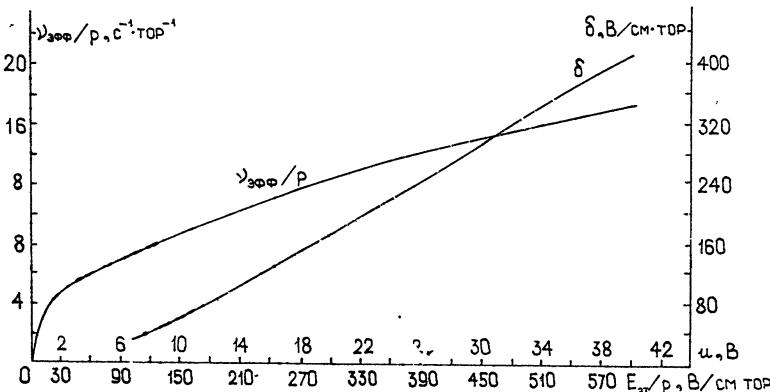


Рис. 3. Зависимость $v_{\text{эфф}} = v_{\text{эфф}}(E_{\text{в}}/p)$ и $\delta = \delta(E_{\text{в}}/p)$.

Поскольку δ вычислена с помощью интеграла (32), а симметричная часть функции распределения близка к максвелловской только при $\omega^2 \gg v_{\text{эфф}}^2$ [1, 10], то область действия поправки δ , очевидно, следует ограничить снизу значениями $E_{\text{в}}/p$, отвечающими условию

$$\frac{\omega}{p} = \frac{v_{\text{эфф}}}{p}. \quad (38)$$

На рис. 4 показаны зависимости пробивной мощности ($P_{\text{пр}}$) от давления, рассчитанные и измеренные в прямоугольном волноводе сечением $a \times b = 2,3 \times 1,0 \text{ см}^2$ с индуктивной диафрагмой $d/a = 0,5$ при длительностях импульса $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ с и $0,5 \cdot 10^{-6}$ с. Методика измерений и экспериментальная установка описаны в [1]. Точность измерения абсолютных значений пробивной мощности равнялась 7–10%. Так как в центре

раскрыва диафрагмы напряженность поля в соответствии с (2) в $\left(\sin \frac{\pi d}{2a}\right)^{-1}$ превышает амплитуду прошедшей диафрагму волны основного типа $E_{y0}|1 + \dot{R}|$, то пробивная мощность равняется [3]

$$P_{\text{пр}} = \frac{a \times b}{1,51} \cdot 10^{-3} \left(\frac{E_{kp} \sin \frac{\pi d}{2a}}{|1 + \dot{R}|} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}, \text{ Bm}, \quad (39)$$

где λ — длина волны в свободном пространстве,

$$E_{kp} = \left(\frac{\bar{E}_{em}}{p} \right) p \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{5,3 \cdot 10^9 p} \right)^2 \right]} = \left(\frac{\bar{E}_{em}}{p} \right) p \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{35,6}{p \lambda} \right)^2 \right]}. \quad (40)$$

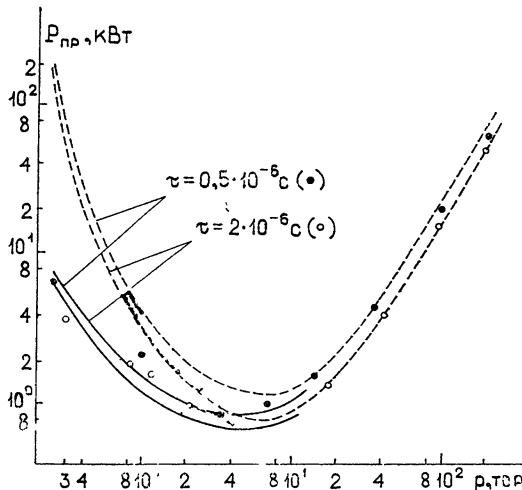


Рис. 4. Расчетные кривые и результаты экспериментальных измерений пробивной мощности для диафрагмы с отверстием $d/a = 0,5$ в волноводе с поперечным сечением $2,3 \times 1 \text{ см}^2$ (сплошная линия — с учетом поправки δ , пунктира — без учета поправки).

Параметр \bar{E}_{em}/p определяется при $\omega^2 \gg v_{\text{эфф}}^2$ формулой (36), а при $v_{\text{эфф}}^2 > 10 \omega^2$ ($p \lambda > 100$) — формулой

$$\frac{\bar{E}_{em}}{p} = \frac{E_{em}}{p} - \Delta, \quad (41)$$

где график $\Delta = \Delta(p\lambda)$, учитывающий модуляцию в ВЧ-поле средней энергии электронов, приведен в работе [8]. Максимальное значение $E_{em}/p = 1140 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$ соответствует $P_{\text{пр}}$, измеренному при давлении $p = 0,25 \text{ тор}$ и длительности импульса $\tau = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Для большинства антенн и волноводных узлов с распределенными неоднородностями, которые условно можно отнести к ВЧ-устройствам со слабо неоднородными полями, значения E_{em}/p не превышают (80—100) $\text{В} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$ вплоть до давлений воздуха, равных десятым долям тор, так что пренебрежение зависимостью $v_{\text{эфф}} = v_{\text{эфф}}(E_{em}/p)$ при расчете электрической прочности таких устройств не вносит существенных погрешностей в значения $P_{\text{пр}}$. Напротив, в волноводных узлах с сосре-

доточенными неоднородностями из-за резких изменений поля значительно возрастает интенсивность свободной диффузии электронов из разрядной области, и, как следствие, соответствующие пробою значения u и $E_{\text{эм}}/p$. Поэтому изменение эффективной частоты соударений электрона при снижении давления заметно сказывается на точности вычислений пробивной мощности. Если пренебречь зависимостью $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}} \left(\frac{E_0}{p} \right)$ при $E_0/p > 100 \text{ B} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$, то возможные ошибки (тем большие, чем больше E_0/p) могут достигнуть, как это видно из графиков на рис. 4, 500 и более процентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения (21), (22) и (23) решены в [1].

Вследствие ограниченности интервалов изменения переменных x и y спектры собственных значений k_x^2 и k_y^2 являются дискретными и определяются соотношениями

$$k_x^2 = 2k(1 + 4g)\sqrt{|B_2|} \quad (g = 0, 1, 2, \dots); \quad (42)$$

$$k_y^2 = \frac{\pi^2}{b^2}(2q + 1)^2 \quad (q = 0, 1, 2, \dots). \quad (43)$$

Спектр собственных значений k_z^2 , соответствующий бесконечному в одну сторону интервалу изменений z , также оказывается дискретным, по крайней мере, для нескольких первых значений.

Для вычисления спектра k_z^2 сведем (24) подстановкой

$$z = \frac{\xi}{(\sqrt{2}k|C_1|)^{1/2}} - \frac{1}{C_1} \quad (44)$$

к канонической форме уравнения Вебера [11]

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left(\frac{\xi^2}{4} - \alpha \right) Z = 0, \quad (45)$$

где

$$\alpha = \frac{k}{2^{1.5}C_1} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right). \quad (46)$$

Решение (24), удовлетворяющее нулевому граничному условию в точке $z = 0$, или $\xi_{\text{рп}} = -\sqrt[4]{2}\sqrt{k/C_1}$, запишется в виде

$$Z(\xi, \alpha) = W(\xi, \alpha) - \frac{W(\xi_{\text{рп}}, \alpha)}{W(-\xi_{\text{рп}}, \alpha)} W(-\xi, \alpha), \quad (47)$$

где линейно независимые функции $W(\xi, \alpha)$ и $W(-\xi, \alpha)$ являются фундаментальными решениями уравнения (45) и табулированы в [11].

Решение (25), удовлетворяющее нулевому граничному условию на бесконечности ($z \rightarrow \infty$) с точностью до постоянного множителя, имеет вид

$$Z(z) = \exp \left(-\sqrt{\frac{k^2 - k_z^2}{2}} z \right).$$

Из условия непрерывности решения уравнений (24), (25) на границе разрядной области, т. е. в точке $z = 1/C_1$ ($\xi = 0$), получаем уравнение для определения зависимости $\alpha = f(\xi_{\text{рп}})$ или $k_z^2/k^2 = f(k)$:

$$\sqrt{2} \frac{G_3}{G_1} \frac{W(\xi_{rp}, \alpha) + W(-\xi_{rp}, \alpha)}{W(\xi_{rp}, \alpha) - W(-\xi_{rp}, \alpha)} = \sqrt{\alpha}. \quad (48)$$

Здесь G_3 и G_1 — гамма-функции, табулированные в [11].

Спектр собственных значений $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ дискретен. Зависимость $\left(\frac{k_z^2}{k^2}\right)_0 = f(k)$, соответствующая α_0 , хорошо аппроксимируется функцией

$$\frac{k_z^2}{k^2} = \exp[-0,215(\xi_{rp} - 2,85)] = \exp\left[-0,26\left(\sqrt{\frac{k}{C_1}} - 2,4\right)\right]. \quad (49)$$

После подстановки минимальных значений k_x^2, k_y^2 и k_z^2 из соотношений (42), (43) и (49) в уравнение (26) приходим к уравнению (27)

$$\frac{\gamma^2 + v_a + D_m(\pi/b)^2}{D_m} = k_0^2 - k_0 \sqrt{|B_2|} - \frac{k_0^2}{2} \exp\left[-0,26\left(\sqrt{\frac{k}{C_1}} - 2,4\right)\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Н. Каплан, А. К. Ка линовский, Ю. А. Лупан, Н. Н. Титов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 10, 1568 (1974).
2. А. К. Ка линовский, Э. Н. Каплан, Ю. А. Лупан, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 2, 298 (1976).
3. Е. С. Кухаркин, Б. В. Сестрорецкий, Электрическая прочность волноводных устройств, изд. Высшая школа, М., 1963.
4. Chao Chin Chen, IEEE Trans., AP-21, № 3, 298 (1973).
5. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
6. А. Макдональд, Сверхвысокочастотный пробой в газах, изд. Мир, М., 1969.
7. Ю. А. Лупан, ЖТФ, 46, № 11, 2321 (1976).
8. L. J. Gould and L. W. Roberts, J. Appl. Phys., 27, 1162 (1956).
9. M. Epstein and J. Lenander, Phys. Fluids, 11, № 12, 2753 (1968).
10. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 20, № 2, 201 (1960).
11. Дж. Мюллер, Таблицы функций Вебера, Выч. центр АН СССР, М., 1968.

Поступила в редакцию
9 января 1976 г.,
после доработки
5 августа 1977 г.

PULSE HIGH-FREQUENCY AIR BREAKDOWN OF INDUCTIVE IRIS IN A WAVEGUIDE

Yu. A. Lupan, A. A. Krasootskil

The problem of pulse breakdown inside a rectangular waveguide with an inductive iris hermetized over the aperture is discussed. Formulas and plots are obtained which permit to calculate the critical intensity and the limit level of channelized power for devices with such an inhomogeneity. The results of calculations are compared with experimental data.

УДК 538.691

К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЫСКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЯХ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

B. P. Милантьев

По методу усреднения многопериодных систем получены усредненные уравнения релятивистского движения заряженной частицы в ВЧ-полях и найдено релятивистское обобщение ВЧ-квазипотенциала

Динамика заряженных частиц в высокочастотных (ВЧ) полях в классическом случае рассматривалась во многих работах (см., например, [1–5]), в которых было показано, что усредненное действие ВЧ-поля на частицу может быть описано с помощью некоторого квазипотенциала, получаемого в результате усреднения по быстрым осцилляциям ВЧ-поля. Усредненные уравнения движения частицы в ВЧ-поле в слаборелятивистском приближении получены и проанализированы в работах [10, 11]. В настоящей работе рассматривается движение частицы в ВЧ-полях в присутствии сильного магнитного поля в релятивистском случае. Усредненные уравнения получены по формальной схеме усреднения многопериодных систем, согласно которой проводится усреднение как по быстрым осцилляциям ВЧ-поля, так и по циклотронному вращению частицы (при отсутствии условий резонанса). Показано, что усредненное движение частицы в ВЧ-поле описывается формулами усреднения второго приближения, поскольку ВЧ-поправки в уравнениях первого приближения обращаются в нуль (ср. с [5]). Рассмотрена релятивистская динамика частицы в поле продольной квазимонохроматической волны, распространяющейся вдоль постоянного и однородного магнитного поля, а также в квазистационарном ВЧ-поле. Получено релятивистское обобщение ВЧ-квазипотенциала. Отмечено расхождение уравнений сохранения энергии и поперечного инварианта с имеющимися в классическом случае в литературе [3].

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается релятивистское движение заряженной частицы в ВЧ-поле типа произвольной квазимонохроматической волны

$$E_{\sim} = \sum_{1 < i < 3} e_i E_i \cos(\theta_2 + \varphi_i), \quad (1.1)$$

$$B_{\sim} = \sum_{1 < i < 3} e_i B_i \cos(\theta_2 + \chi_i)$$

в присутствии сильного магнитного поля $B_0(r, t)$, описываемого с помощью правой тройки единичных векторов $e_1 = B_0/B_0$, e_2 , e_3 . Величины e_i , E_i , B_i , φ_i , χ_i могут быть медленно меняющимися функциями координат и времени. Фаза волны θ_2 , предполагаемая быстро меняющейся, описывается уравнением [7, 9]

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\omega + kv, \quad (1.2)$$

где

$$\omega(r, t) = -\frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \quad k(r, t) = \nabla \theta_2 \quad (1.2a)$$

— соответственно частота и волновой вектор квазимохроматической волны (1.1).

Допускается также присутствие медленно меняющегося электрического поля $E_0(r, t)$, так что полное поле, действующее на частицу

$$E = E_0 + E_\sim, \quad B = B_0 + B_\sim. \quad (1.3)$$

При этом, конечно, поля E_\sim, B_\sim связаны максвелловским уравнением индукции (см., например, [7]).

Для выделения циклотронного вращения частицы ее импульс представляется в виде

$$p = p_{\parallel} e_1 + p_{\perp} (e_2 \cos \theta_1 + e_3 \sin \theta_1), \quad (1.4)$$

где p_{\parallel}, p_{\perp} — продольная и поперечная по отношению к B_0 составляющие импульса, θ_1 — фаза циклотронного вращения частицы. Такое представление возможно в случае «слабого» электрического поля [5], когда $v_E \ll v$, где v_E — скорость электрического дрейфа, v — характеристическая скорость частицы. С помощью проектирования известного релятивистского уравнения движения на направления

$$e_1, \quad e_2 \cos \theta_1 + e_3 \sin \theta_1, \quad -e_2 \sin \theta_1 + e_3 \cos \theta_1$$

получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= f_{\parallel}, \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= f_{\perp}, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_0 + A_1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $f_{\parallel}, f_{\perp}, A_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_{\parallel} &= a_0 + a_1 \cos \theta_1 + a_2 \sin \theta_1 + a_3 \cos 2\theta_1 + a_4 \sin 2\theta_1 + \\ &+ a_5 \cos \theta_2 + a_6 \sin \theta_2 + a_7 \cos \theta_+ + a_8 \sin \theta_+ + a_9 \cos \theta_- + a_{10} \sin \theta_-. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Выражения для f_{\perp}, A_1 аналогичны (1.6) с заменой коэффициентов a_i соответственно на b_i, g_i . Конкретный вид коэффициентов a, b, g зависит от типа рассматриваемого ВЧ-поля.

Здесь и далее вводятся обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{\pm} &= \theta_1 \pm \theta_2, \quad \omega_0 = -\frac{eB_0}{m_0 c \gamma} \equiv \frac{\Omega_0}{\gamma}, \\ \gamma &= \left[1 + \frac{1}{m_0^2 c^2} (p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Остальные обозначения стандартны.

К уравнениям (1.5) следует добавить уравнение

$$\frac{dr}{dt} = v_{\parallel} e_1 + v_{\perp} (e_2 \cos \theta_1 + e_3 \sin \theta_1) \equiv f_r \quad (1.8)$$

и уравнение (1.2), которое с учетом (1.8) принимает вид

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \nu + v_{\perp} (k_2 \cos \theta_1 + k_3 \sin \theta_1) \equiv \nu + A_2. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\nu(r, t) = -\omega(r, t) + v_{\parallel} k_1(r, t), \quad v_{\parallel, \perp} = \frac{p_{\parallel, \perp}}{m_0 \gamma}, \quad k_i = e_i k. \quad (1.9a)$$

Уравнения (1.5)–(1.9) представляют собой так называемую двухпериодную (двуихчастотную) систему уравнений, усреднение которой при отсутствии условий резонанса $s_1 \omega_0 + s_2 \nu \neq 0$, где s_1, s_2 —простые целые числа, проводится по стандартной схеме [5, 6] при упорядочении дрейфовой теории в случае «слабого» электрического поля. Считается, что

$$\frac{1}{|\omega_0| T} \sim \frac{1}{|\nu| T} \sim \frac{a_{\sim}}{L} \sim \frac{a}{L} = \epsilon \ll 1, \quad v_E \sim \epsilon v, \quad (1.10)$$

где a —ларморовский радиус частицы, a_{\sim} —смещение частицы в ВЧ-поле, L —характерная макродлина, T —характерное время медленных изменений. Усреднение уравнений (1.5)–(1.9) с помощью известных формул первого приближения [5] приводит точно к уравнениям дрейфовой теории, в которых влияние ВЧ-поля никак не сказывается — ВЧ-поправки в 1-м приближении обращаются в нуль (ср. с [5]). Для учета ВЧ-поля необходимо проводить усреднение во втором приближении. Нетрудно получить общие формулы усреднения второго приближения, которые приведены в Приложении. Усреднение системы (1.5)–(1.9) в общем виде во втором приближении представляют собой чрезвычайно сложную задачу. Ниже рассматриваются частные случаи движения частицы в ВЧ-полях различных типов в присутствии постоянного и однородного магнитного поля.

Необходимо подчеркнуть при этом, что в соответствии с упорядочением (1.10) полученные уравнения справедливы в случае малых возмущений релятивистского движения частицы.

2. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ПРОДОЛЬНОЙ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В этом случае $k_2 = k_3 = 0$, $E_2 = E_3 = 0$. Будем считать, что $E_{02} = E_{03} = 0$ и что все величины изменяются только вдоль направления распространения волны — оси z :

$$k_1 = k_1(z, t), \quad \nu = -\omega(z, t) + v_{\parallel} k_1(z, t), \quad E_1 = E_1(z, t). \quad (2.1)$$

Тогда $B_{\sim} = 0$. Такая задача в нерелятивистском случае при отсутствии магнитного поля решена в работе [7]. Будем обозначать далее усредненные (сглаженные) величины теми же буквами, что и неусредненные, например $p_{\parallel} \rightarrow \bar{p}_{\parallel}$, $p_{\perp} \rightarrow \bar{p}_{\perp}, \dots$. При этом под усредненными понимаются величины вида

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(t, r, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (2.2)$$

Тогда с помощью общих формул усреднения (П.4)–(П.8) нетрудно найти, что усредненное продольное движение описывается уравнением

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = eE_{01} + \varphi_{2\parallel}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{2\parallel} = & -\frac{\partial}{\partial z} \frac{I(1-v_{\parallel}^2/c^2)}{2m_0\gamma v^2} - \frac{1-v_{\parallel}^2/c^2}{m_0\gamma} \frac{d}{dt} \frac{k_1 I}{v^3} + \\ & + \frac{3Ik_1^2 e E_{01}(1-v_{\parallel}^2/c^2)}{m_0\gamma^2 v^4} \left(1 - \frac{v_{\parallel}\omega}{k_1 c^2} \right); \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I \equiv \frac{e^2 E_1^2}{2}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.4a)$$

Поперечный импульс при этом сохраняется и может быть принят равным нулю. Тогда

$$1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2}.$$

В нерелятивистском приближении формула (2.4) в точности совпадает с результатами работы [7]. Из (2.3) видно, что усредненное действие ВЧ-поля на частицу описывается с помощью квазипотенциала лишь в квазистационарном приближении $k_1 \approx 0$ при $\frac{dI}{dt} \approx 0$, $\frac{d\omega}{dt} \approx 0$.

В этом случае «продольный» ВЧ-потенциал имеет вид [1–5]

$$U = \frac{I}{2m_0\gamma\omega^2} \left(1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right) \rightarrow \frac{I}{2m_0\omega^2\gamma^3}. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что релятивизм ослабляет действие ВЧ-поля. В произвольном случае продольной квазимохроматической волны (2.1) ее действие на частицу не сводится только к квазипотенциальному [3], а описывается сложным выражением (2.4).

3. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ

В этом случае $k=0$, $v=-\omega=\text{const}$ и исходные уравнения существенно упрощаются. Считая, что $E_0=0$, после очень громоздких вычислений из (П.4)–(П.8) можно получить усредненные уравнения во втором приближении (члены первого приближения, как и в предыдущем случае, обращаются в нуль):

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \varphi_{2\parallel} = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} U = & \frac{e^2}{4m_0\gamma} \left\{ \frac{E_1^2(1-v_{\parallel}^2/c^2)}{\omega^2} + \frac{1-(v_{\perp}^2/2c^2)}{\omega^2-\omega_0^2} \left[E_2^2 + E_3^2 - 2\frac{\omega_0}{\omega} E_2 E_3 \times \right. \right. \\ & \left. \times \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \right] + \frac{2\omega_0 v_{\perp}^2}{\omega c^2} (\beta_+ - \beta_-) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величина U представляет собой релятивистское обобщение ВЧ-квазипотенциала при наличии внешнего постоянного и однородного магнитного поля [1-5]:

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{2p_{\perp}} \frac{d}{dt} \left\{ \left[1 + \frac{2\omega_0 v_{\perp}^2}{c^2(\omega_0 + \omega)} \right] \beta_+ + \left[1 + \frac{2\omega_0 v_{\perp}^2}{c^2(\omega_0 - \omega)} \right] \beta_- \right\}, \quad (3.3)$$

где

$$\beta_{\pm} = \frac{e^2}{8(\omega_0 \pm \omega)^2} [E_2^2 + E_3^2 \pm 2E_2 E_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)]. \quad (3.4)$$

Рассмотрим смысл величин β_{\pm} . Согласно (П.2) и формулам 1-го приближения [5] переменная часть поперечной составляющей импульса имеет вид

$$g_{1\perp} = \frac{1}{\omega_0 - \omega} (b_7^0 \sin \theta_+ - b_8^0 \cos \theta_+) + \frac{1}{\omega_0 + \omega} (b_9^0 \sin \theta_- - b_{10}^0 \cos \theta_-), \quad (3.5)$$

где величины b_i^0 представляют собой нулевые члены разложения коэффициентов b_i в (1.5) по степеням ε :

$$b_{7,9}^0 = \frac{e}{2} (E_2 \cos \varphi_2 \pm E_3 \sin \varphi_3), \quad b_{8,10}^0 = \frac{e}{2} (E_3 \cos \varphi_3 \mp E_2 \sin \varphi_2). \quad (3.6)$$

Отсюда нетрудно найти, что

$$\overline{g_{1\perp}^2} = \beta_+ + \beta_-. \quad (3.7)$$

Используя (3.7), уравнение (3.3) можно записать в другом виде:

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{dI_{\sim}}{dt}, \quad (3.8)$$

где

$$I_{\sim} = \overline{g_{1\perp}^2} + \frac{2\omega_0 v_{\perp}^2}{c^2} \left(\frac{\beta_+}{\omega_0 + \omega} + \frac{\beta_-}{\omega_0 - \omega} \right). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) имеет смысл уравнения сохранения «поперечного инварианта» [5], который в рассматриваемом случае постоянного и однородного магнитного поля пропорционален p_{\perp}^2 . Величина I_{\sim} пропорциональна дополнительному магнитному моменту, приобретаемому частицей в ВЧ-поле. В работе [3] указано, что в классическом случае магнитный момент является сохраняющейся величиной с точностью до членов 1-го порядка (см. также [5]). Это справедливо, поскольку, как было показано выше, ВЧ-поправки в усредненных уравнениях первого приближения отсутствуют. Во втором же приближении «поперечный инвариант» (в классическом случае — магнитный момент) изменяется в соответствии с уравнением (3.8). При этом, как видно из (3.7) и (3.9), величина I_{\sim} существенно возрастает в области циклотронного резонанса.

Из (3.1) и (3.3) следует также уравнение сохранения энергий, если амплитуды поля E_i очень медленно изменяются со временем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{dm_0 c^2 \gamma}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt}. \quad (3.10)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{2m_0 \gamma} I_{\sim} \equiv \mu_{\sim} \omega_0. \quad (3.11)$$

Величину W можно интерпретировать как дополнительную энергию, связанную с магнитным моментом μ , приобретаемым частицей в ВЧ-поле. Величина U есть релятивистское обобщение ВЧ-квазипотенциала (3.2). В случае чисто продольного ВЧ- поля (3.2) совпадает с продольным квазипотенциалом (2.5).

Из уравнения (3.10) следует, что сохраняется величина

$$\mathcal{E} + U - W = \text{const}, \quad (3.12)$$

которую можно рассматривать как полную энергию системы во вращающейся системе координат [8]. Величина $\mathcal{E} + U$ есть энергия частицы в неподвижной системе координат, которая согласно (3.12) не сохраняется. Уравнение (3.12) отличается от соответствующего уравнения сохранения энергии [3] наличием дополнительной энергии W . При этом дополнительные члены как в (3.8), так и в (3.12) в классическом пределе не исчезают. Отметим, что уравнения (3.8), (3.12) имеют смысл только при наличии внешнего магнитного поля. Если оно отсутствует, то вместо уравнений (3.1), (3.3) для слаженного вектора импульса получается уравнение вида (3.1) с квазипотенциалом $U = \frac{e^2}{4m_0\gamma^3\omega^2} (|E_{||}|^2 + \gamma^2 |E_{\perp}|^2)$, где $E_{||}$, E_{\perp} — проекции поля соответственно на направление импульса частицы и перпендикулярное к нему. При очень медленном изменении амплитуды ВЧ- поля от времени в этом случае имеет место закон сохранения энергии в обычной форме.

Автор искренне благодарен Л. М. Горбунову за ценные дискуссии и критические замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Усреднение многопериодной системы с точностью до членов второго порядка

Уравнения (1.5) — (1.9) представляют собой частный случай многопериодной системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= f_{k0}(t, x_i, \theta_j) + \varepsilon f_{k1}(t, x_i, \theta_j) + \dots, \\ \frac{d\theta_l}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} \omega_l(t, x_i) + A_{l0}(t, x_i, \theta_j) + \varepsilon A_{l1}(t, x_i, \theta_j) + \dots \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Параметр

$$\varepsilon \sim (\omega_l T)^{-1} \ll 1.$$

По стандартной схеме усреднения [5, 6] ищется такая замена переменных

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k + \varepsilon g_{1k}(t, \xi_i, \alpha_j) + \varepsilon^2 g_{2k} + \varepsilon^3 g_{3k} + \dots, \\ \theta_l &= \alpha_l + \varepsilon q_{1l}(t, \xi_i, \alpha_j) + \varepsilon^2 q_{2l} + \varepsilon^3 q_{3l} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

чтобы переменные ξ_k , α_l удовлетворяли уравнениям, не содержащим быстрых фаз α_l :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= \varphi_{0k}(t, \xi_i) + \varepsilon \varphi_{1k}(t, \xi_i) + \varepsilon^2 \varphi_{2k}(t, \xi_i) + \dots, \\ \frac{d\alpha_l}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} \omega_l(t, \xi_i) + \Omega_{0l}(t, \xi_i) + \varepsilon \Omega_{1l}(t, \xi_i) + \dots \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

В [5] приведены общие формулы первого приближения — для величин φ_{0k} , φ_{1k} , Ω_{0l} , g_{1k} , q_{1l} . Нетрудно получить общие формулы второго приближения:

$$\begin{aligned} \varphi_{2k} = & \bar{f}_{k2} + \left(g_{1l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + q_{1l} \frac{\partial}{\partial \alpha_l} \right) f_{k1} + \left(g_{2l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + q_{2l} \frac{\partial}{\partial \alpha_l} \right) f_{k0} + \\ & + \frac{1}{2} \overline{g_{1l} g_{1j}} \frac{\partial^2 \bar{f}_{k0}}{\partial \xi_l \partial \xi_j} + \frac{1}{2} \overline{q_{1l} q_{1m}} \frac{\partial^2 \bar{f}_{k0}}{\partial \alpha_l \partial \alpha_m} + \overline{q_{1l} g_{1l}} \frac{\partial^2 \bar{f}_{k0}}{\partial \alpha_l \partial \xi_l}; \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$\Omega_{1l} = \bar{A}_{ll} + \frac{1}{2} \overline{g_{1l} g_{1j}} \frac{\partial^2 \omega_l}{\partial \xi_l \partial \xi_j} + \overline{g_{1l} \frac{\partial A_{l0}}{\partial \xi_l}} + \overline{q_{1m} \frac{\partial A_{l0}}{\partial \alpha_m}}; \quad (\text{П.5})$$

$$g_{2k} = \overset{\vee}{F}_k, \quad q_{2l} = \overset{\vee}{\Phi}_l; \quad (\text{П.6})$$

$$F_k = \tilde{f}_{k1} + \overline{g_{1l} \frac{\partial \tilde{f}_{k0}}{\partial \xi_l}} + \overline{q_{1l} \frac{\partial \tilde{f}_{k0}}{\partial \alpha_l}} - Dg_{1k}; \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned} \Phi_l = & \bar{A}_{ll} + \frac{1}{2} \overline{g_{1l} g_{1k}} \frac{\partial^2 \omega_l}{\partial \xi_l \partial \xi_k} + \overline{g_{1l} \frac{\partial \bar{A}_{l0}}{\partial \xi_l}} + \\ & + \overline{q_{1m} \frac{\partial \bar{A}_{l0}}{\partial \alpha_m}} + \overline{g_{2k} \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi_k}} - Dq_{1l}; \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_{0l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \Omega_{0m} \frac{\partial}{\partial \alpha_m}. \quad (\text{П.9})$$

Здесь прямая черта сверху означает постоянную часть функции, волнистая — ее переменную часть, имеющую вид

$$\tilde{f} = \sum_{s_1, s_2, \dots} f^{(s_1, \dots, s_n)} \exp [i(s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n)]. \quad (\text{П.10})$$

Символом $\overset{\vee}{f}$ обозначена величина, определяемая формулой

$$\overset{\vee}{f} = \sum_{s_1, s_2, \dots} \frac{f^{(s_1, \dots, s_n)}}{i(s_1 \omega_1 + \dots + s_n \omega_n)} \exp [i(s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n)]. \quad (\text{П.11})$$

В применении к тригонометрическим функциям операция $\overset{\vee}{}$ означает [5]:

$$\begin{aligned} \sin (s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n) &= - \frac{\cos (s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n)}{s_1 \omega_1 + \dots + s_n \omega_n}, \\ \cos (s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n) &= \frac{\sin (s_1 \alpha_1 + \dots + s_n \alpha_n)}{s_1 \omega_1 + \dots + s_n \omega_n}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Условие резонанса $s_1 \omega_1 + \dots + s_n \omega_n = 0$ исключается.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958); М. А. Миллер, Изв. вузов — Радиофизика, 1, № 3, 110 (1958).
2. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 42; Р. З. Сагдэев, там же, т. 3, стр. 346; Т. Ф. Волков, там же, стр. 336; В. И. Векслер, Л. М. Коррижныx, ЖЭТФ, 35, 1116 (1958).
3. H. Motz and C. J. Watson, Adv. Electronics and Electr. Phys., 23, 153 (1967).

4. R. Klíma, Czechoslovak J. Phys., 18B, № 10, 1280 (1968).
5. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, сб. Вопросы теории плазмы (под ред. М. А. Леонтьевича), т. 2, Госатомиздат, М., 1963, стр. 177.
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.
7. R. Klíma, J. Plasma Phys., 7, 329 (1972).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, изд. Наука, М., 1973, стр. 119.
9. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
10. M. A. Miller, Proc. Int. Conf. High-Energy Accelerators and Instrumentation—CERN, 1959, p. 662.
11. А. Г. Литвак, М. А. Миллер, Н. В. Шолохов, Изв. вузов — Радиофизика, 5, № 6, 1160 (1962).

Университет дружбы народов
им Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию
6 апреля 1976 г.,
после доработки
10 октября 1977 г.

TO THE THEORY OF CHARGED PARTICLES MOTION IN HF-FIELDS IN THE PRESENCE OF A STRONG MAGNETIC FIELD

V. P. Milant'ev

Averaged equations of relativistic motion of a charged particle in hf-fields are obtained by the multi-period system averaging method. A relativistic generalization of hf-quasipotential is made.

УДК 621.385.6

РОЛЬ НЕСИНХРОННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГАРМОНИКИ В ЛБВ С ПОПЕРЕЧНЫМ ПОЛЕМ

B. A. Vanke, A. A. Zaytsev, A. V. Mozhkov

Численно проанализировано взаимодействие нитевидного электронного потока с поперечным полем скрученной замедляющей системы. Показано, что при малом значении параметра скрутки в электронном потоке возбуждается значительный разброс по скоростям, обусловленный влиянием несинхронной пространственной гармоники. Найдены значения параметра скрутки, при которых осуществляется селективное взаимодействие электронного пучка с рабочей циркулярно поляризованной волной замедляющей структуры.

Для работы ЛБВ с поперечной синхронной волной электронного потока необходимо обеспечить селективное взаимодействие электронов пучка с бегущей циркулярно поляризованной электромагнитной волной. Реально такие волны существуют в качестве одной из пространственных гармоник в скрученных замедляющих системах (ЗС) с интенсивными поперечными полями [1]. Если β_0 — постоянная распространения линейно-поляризованной волны в ЗС без пространственной скрутки, то в слабо скрученной с шагом r системе эта волна расщепляется на две циркулярно поляризованные пространственные гармоники с постоянными распространениями [2]

$$\beta_{\pm} = \beta_0 \pm \beta_s, \quad (1)$$

где $\beta_s = 2\pi/r$ — постоянная скрутки.

Для практики важно знать значения параметра β_s , при которых процесс взаимодействия с основной волной (β_-) идет независимо от присутствия другой волны (β_+).

Цель данного сообщения — выяснить условия, при которых нерабочая пространственная гармоника (β_+) в скрученной ЗС слабо влияет на физические процессы в ЛБВ с синхронной волной.

Анализ проводился численно путем моделирования на ЭВМ при следующих упрощающих предположениях.

1) Электронный пучок, движущийся вдоль оси z в постоянном продольном однородном магнитном поле $\mathbf{B} = \{0, 0, B_0\}$, представляется в виде равномерно заряженной нити шаровского сечения. Кулоновские поля отсутствуют.

2) Поперечные поля ЗС однородны по сечению. Замедление предполагается большим, так что релятивистскими эффектами можно пренебречь, а продольные электрические поля каждой волны представим, согласно [3], в виде

$$E_{z\pm} = \operatorname{Re} \left\{ r^* \frac{dE_{\pm}}{dz} \right\}, \quad (2)$$

где $r = x + iy$ — поперечный радиус-вектор, z — продольная координата, $E_{\pm} = E_{x\pm} \mp jE_{y\pm}$ — поперечное поле, соответствующее волнам β_{\pm} .

3) Движение электронного пучка описывается в переменных Лагранжа $\{z, t_0\}$, где t_0 — время влета электрона в пространство взаимодействия. Пучок разбивается на конечное число N дискретных частиц с удельным зарядом электрона, равномерно распределенных по фазе влета.

Таким образом, для частицы с номером i можно записать следующие нормализованные уравнения движения:

$$V_{\zeta i} \frac{dV_{xi}}{d\zeta} = F\bar{E}_x - CV_y, \quad V_{xi}(0, \Phi_{0i}) = 0; \quad (3a)$$

$$V_{\zeta i} \frac{dV_{yi}}{d\zeta} = F\bar{E}_y + CV_{xi}, \quad V_{yi}(0, \Phi_{0i}) = 0; \quad (3b)$$

$$V_{\zeta i} \frac{dV_{\zeta i}}{d\zeta} = \frac{F}{B} \bar{E}_{\zeta i}, \quad V_{\zeta i}(0, \Phi_{0i}) = 1; \quad (3c)$$

$$V_{\zeta i} \frac{d\Phi_i}{d\zeta} = 1, \quad \Phi_i(0, \Phi_{0i}) = \Phi_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3d)$$

где $\zeta = \frac{\omega}{v_{z0}} z = \beta_e z$, $V_{xi, yi} = \frac{\beta_e}{\omega} v_{xi, yi}$ — нормированные поперечные скорости, $V_{\zeta i} = \beta_e v_{zi}/\omega$ — нормированная продольная скорость, $\Phi_i = \omega t_i$ — нормированное время (фаза), $B = \beta_e v_{z0}/\omega$, $C = \omega_c/\omega$, $\omega_c = \eta B_0$ — циклотронная частота, ω — частота сигнала, $F = -B^2 \sqrt{P_{0n} K_{th}/2}$, $P_{0n} = P_0/I_0 U_0$, $K_{th} = K_t I_0/U_0$, $P_0 = E_0^2/2\beta_e^2 K_t$ — входная мощность сигнала, K_t — сопротивление связи волны β_- , I_0 — постоянный ток пучка на входе ЗС, U_0 — потенциал пучка, $\Phi_{0i} = \omega t_{0i} = \frac{2\pi i}{N}$ — фаза влета частицы, \bar{E}_x, y, ζ — нормированные на E_0 поля ЗС, E_0 — амплитуда поля рабочей гармоники на входе ЗС.

Уравнения возбуждения полей скрученной ЗС выводятся на основе общего решения задачи о возбуждении волноводов [4] в отсутствие кулоновских сил:

$$E = \sum_{s=0}^{\infty} (C_s E_s + C_{-s} E_{-s}), \quad (4)$$

где E — амплитуда возбуждаемого поля на частоте ω , $E_{\pm s}$ — амплитуды прямой и обратной собственных волн волновода,

$$C_{\pm s} = \frac{1}{N_s} \int_{z_1}^z \left[\int_{S_p} E_{\mp s} i ds_p \right] d\zeta, \quad (5)$$

где N_s — норма собственной волны, i — плотность тока пучка, S_p — поперечное сечение пучка, $[]_\omega$ — первая гармоника на частоте ω от выражения в скобках.

В приборах с длительным взаимодействием можно учитывать только часть поля основной волны ЗС на частоте ω с фазовой скоростью, мало отличающейся от скорости электронного пучка v_{z0} . Таким образом, суммарное возбуждаемое поле скрученной ЗС представим в виде

$$E^\omega = E_c^\omega + E_h^\omega = C_0(E_{c0} + E_{h0}), \quad (6)$$

где $E_{c,h}^\omega$ — амплитуды полей синхронной и несинхронной с потоком циркулярно поляризованных пространственных гармоник поля ЗС, $E_{c0, h0}$ — те же амплитуды в отсутствие пучка,

$$C_0 = \frac{1}{N_0} \int_{z_1}^z \left[\int_{S_p} \mathbf{i} (E_{c0}^* + E_{h0}^*) ds_p \right]_\omega d\zeta. \quad (7)$$

Заметим, что волны E_c^ω и E_h^ω в любом сечении z имеют равную амплитуду, а их постоянные распространения связаны соотношением (1), т. е.

$$\beta_- = \beta_+ - 2\beta_t. \quad (8)$$

Поэтому уравнения возбуждения можно записать только для волны

$$E_c^\omega = C_0 E_{c0} = C_0 \hat{E}_{c0} e^{-i\beta_- z}. \quad (9)$$

Из соотношений (7) — (9) для пучка нулевого поперечного сечения получим

$$\frac{d\bar{E}_{cx}}{d\zeta} = B\bar{E}_{cy} + W[C_R + N_R \cos(2\Gamma\zeta) + N_I \sin(2\Gamma\zeta)]; \quad (10a)$$

$$\frac{d\bar{E}_{cy}}{d\zeta} = -B\bar{E}_{cx} + W[C_I + N_R \sin(2\Gamma\zeta) - N_I \cos(2\Gamma\zeta)], \quad (10b)$$

где $\bar{E}_{cx}, \bar{E}_{cy}$ — компоненты поля синхронной пространственной гармоники, $\Gamma = \frac{\beta_t}{\beta_e} = \frac{\beta_t v_{z0}}{\omega}$ — нормированный параметр скрутки,

$$W = \frac{B}{N} \sqrt{K_{th}/2P_{0h}}, \quad C_R = \operatorname{Re}\{[\hat{E}_{c0}^* \mathbf{i}]_\omega\},$$

$$C_I = \operatorname{Im}\{[\hat{E}_{c0}^* \mathbf{i}]_\omega\}, \quad N_R = \operatorname{Re}\{[\hat{E}_{h0}^* \mathbf{i}]_\omega\},$$

$$N_I = -\operatorname{Im}\{[\hat{E}_{h0}^* \mathbf{i}]_\omega\}, \quad \mathbf{i} = \left\{ I \frac{v_x}{v}, I \frac{v_y}{v}, I \frac{v_z}{v} \right\}$$

— полный ток электронного пучка, $I = |\mathbf{i}|$, v — модуль скорости электронов нитевидного пучка. С учетом закона сохранения заряда $Id\Phi = I_0 d\Phi_0$ получаем

$$C_R = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{V_i} [(V_{xi} - BV_{zi}Y_i) \cos \Phi_i + (V_{yi} + BV_{zi}X_i) \sin \Phi_i] \right\}; \quad (11a)$$

$$C_I = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{V_i} [(V_{yi} + BV_{zi}X_i) \cos \Phi_i - (V_{xi} - BV_{zi}Y_i) \sin \Phi_i] \right\}; \quad (11b)$$

$$N_R = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{V_i} [(V_{xi} + DV_{zi}Y_i) \cos \Phi_i - (V_{yi} - DV_{zi}X_i) \sin \Phi_i] \right\}; \quad (11c)$$

$$N_I = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{V_i} [(V_{yi} - DV_{zi}X_i) \cos \Phi_i + (V_{xi} + DV_{zi}Y_i) \sin \Phi_i] \right\}, \quad (11d)$$

где $V_i = \sqrt{V_{xi}^2 + V_{yi}^2 + B^2 V_{zi}^2}$ — полная нормированная скорость i -й частицы, $D = \beta_+/\beta_e$. Для продольных полей из соотношения (2) получаем

$$\bar{E}_{czl} = X_l \bar{E}_{cy} - Y_l \bar{E}_{cx}, \quad \bar{E}_{hzl} = \frac{D}{B} (-X_l \bar{E}_{hy} + Y_l \bar{E}_{hx}). \quad (12)$$

Таким образом, уравнения (3 а)–(3 г), (10 а), (10 б) и (11 а)–(11 г) составляют замкнутую систему уравнений для анализа взаимодействия электронного потока с полем скрученной ЗС в зависимости от нормированного параметра скрутки Γ .

Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров: $I_0 = 1 \text{ A}$, $U_0 = 10 \text{ kB}$, $P_0 = 100 \text{ Bt}$, $C = 1,29$, $K_t = 50 \text{ Ohm}$, $B = 1$. Зависимость коэффициента усиления G и относительного разброса продольных скоростей электронов $\Delta V_z/V_c$ от величины параметра скрутки Γ представлена на рис. 1, 2. Эти зависимости выведены в фиксированной точке z , соответствующей максимуму усиления в случае взаимодействия электронного потока только с одной волной ЗС.

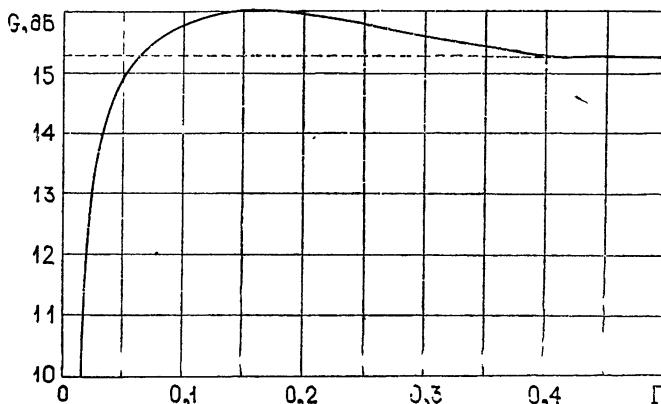


Рис. 1. Зависимость коэффициента усиления от величины нормированного параметра скрутки.

При $\Gamma = 0$ (нескрученная ЗС) в потоке равносильно возбуждаются быстрая и медленная синхронные волны, все электроны располагаются вблизи плоскости нулевого продольного электрического поля и взаимодействие отсутствует. С увеличением Γ усиление довольно быстро достигает максимума (рис. 1), однако при этом в потоке возбуждается относительно большой разброс по скоростям, обусловленный взаимодействием электронного пучка с нерабочей волной ЗС (рис. 2). Появление максимума при $\Gamma = 0,15$ на кривой $G(\Gamma)$, превышающее значение коэффициента усиления в одноволновом нелинейном режиме, связано с переходом самых медленных электронов пучка в синхронизм с тормозящим полем нерабочей волны ЗС. При $\Gamma \approx 0,5$ усиление соответствует одноволновому режиму, а разброс по скоростям мал ($\sim 5\%$).

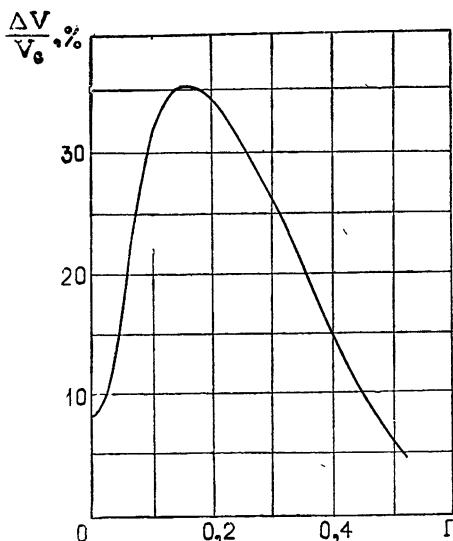


Рис. 2. Относительный разброс продольных скоростей электронов пучка в зависимости от Γ ; $\Delta V_z = V_{z \max} - V_{z \min}$; V_c — средняя продольная скорость.

Таким образом, при значении $\Gamma \approx 0,5$ осуществляется селективное взаимодействие электронного пучка с рабочей волной ЗС, т. е. влиянием несинхронной волны можно пренебречь. Дальнейшее увеличение скрутки ($\Gamma > 0,5$) приводит к синхронизму нерабочей волны ЗС с медленной циклотронной волной, и механизм работы ЛБВ с поперечной синхронной волной электронного потока существенно нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Crumly and R. Larsen, Scient. and Techn. Aerospace Rep., 6, № 1672, 11 (1968).
2. R. E. Hayes, IEEE Trans., ED-11, № 9, 434 (1964).
3. R. J. Briggs, J. Appl. Phys., 42, № 7, 2662 (1971).
4. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
9 марта 1977 г.

THE ROLE OF NONSYNCHRONOUS SPATIAL HARMONIC IN BWO WITH A TRANSVERSE FIELD

V. A. Vanke, A. A. Zaitsev, A. V. Moshkov

The interaction between a filament electron beam and transverse field of a twist slowing-down system has been numerically analysed. It is shown that for a small twist parameter a considerable velocity scatter due to the influence of the nonsynchronous spatial harmonic is excited in the electron beam. The twist parameter values are found at which a selective interaction between the electron beam and a working circularly polarized wave of the slowing-down system is realized.

УДК 533.9.01

О ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАЗРЯДЕ НА ОСТРИЕ СИММЕТРИЧНО ВОЗБУЖДАЕМОГО КОНУСА

Н. Н. Лузин

Рассматривается задача о возбуждении бесконечного идеально проводящего конуса со сферическим плазменным образованием на острие. Исследуется влияние такого плазменного образования на характеристики антенн в случае, когда источники сторонних токов находятся вблизи этого образования. Исследуется возможность возникновения разряда при нормальных атмосферных условиях на острие бесконечного идеально проводящего конуса при непрерывном режиме возбуждения. В первом приближении получено решение задачи о нелинейном взаимодействии электромагнитного поля с плазмой при высокочастотном (ВЧ) разряде с учетом зависимости комплексной диэлектрической проницаемости и теплопроводности плазмы от температуры.

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме ВЧ-разряда посвящен целый ряд работ отечественных и зарубежных авторов [1–10]. Методы решения задачи о ВЧ-разряде на антенных устройствах, развиваемых в работах [1–3], основаны на уравнении непрерывности для электронов и не позволяют учсть эффекта «самовоздействия» поля. Их применимость ограничивается случаями одномерных моделей поля в ближней зоне.

Более продуктивным, на наш взгляд, является развиваемый в работах по исследованию разряда в плазмотроне [4–10] метод, основанный на энергетике процесса. Однако рассмотрение в этих работах ограничивается случаем, когда электромагнитное поле либо однородно, либо присутствует в виде основной моды в волноводе или представлено в виде плоской волны. Кроме того, рассмотренные задачи предполагают бесконечную протяженность разряда по какой-либо координате.

В настоящей работе построено приближенное решение задачи о поддержании ВЧ-разряда в воздухе вблизи острия (разд. 2) с учетом нелинейной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости и теплопроводности плазмы от температуры при атмосферном давлении. Для этого вначале рассматривается задача о взаимодействии поля с заданным плазменным образованием вблизи острия конуса. При выводе выражений для характеристик ближнего поля, возбуждаемого заданным током на конусе, вначале рассматривается конус со сферическим закруглением на острие.

Для простоты рассуждений мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда сторонний ток задан в виде

$$j^m = I_0 \delta(r - r_{\text{ист}}) \delta(\theta - \theta_0) \frac{1}{r}, \quad (1)$$

где I_0 — амплитуда тока.

1. Переидем к построению решения о возбуждении бесконечного идеально проводящего конуса с углом раствора θ_0 и сферическим идеально проводящим закруглением радиуса $r_{\text{закр}}$ на острие с помощью

стороннего тока (1), находящегося на расстоянии $r_{\text{ист}}$ от вершины конуса (рис. 1). Вблизи острия конуса находится сферическое однородное и изотропное плазменное облако размером r_0 ($r_0 < r_{\text{ист}}$) с диэлектрической проницаемостью ϵ . Вне плазмы — свободное пространство. Магнитная проницаемость μ всюду равна единице.

Будем использовать уравнения Максвелла в форме (везде ниже временная зависимость поля принимается $e^{-i\omega t}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= iH - j^m, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}^s, \end{aligned} \quad (2)$$

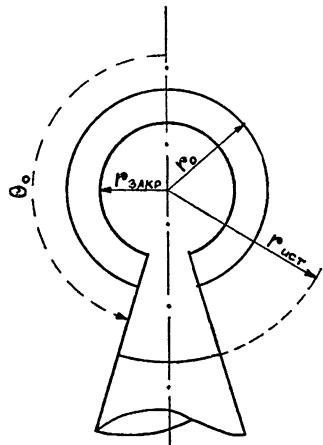


Рис. 1.

где приняты следующие обозначения:
 $H \rightarrow W_0 H$, $j^m \rightarrow \frac{1}{k} j^m$, $r \rightarrow kr$, $W_0 = 120\pi (O\mu)$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Решение уравнений (2) может быть построено методом разделения переменных [11].

При возбуждающем токе (1) присутствуют только электрические (ТМ-типа) волны. Отличными от нуля компонентами поля являются:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\rho^2} \sum_v v(v+1) \left\{ \begin{array}{l} A_v \zeta_v^{(1)}(\rho) \\ C_v \psi_v(\rho) \end{array} \right\} P_v(\cos \theta), \\ E_\theta &= \frac{1}{\rho} \sum_v \left\{ \begin{array}{l} A_v \zeta_v^{(1)\prime}(\rho) \\ C_v \psi_v'(\rho) \end{array} \right\} \frac{d}{d\theta} P_v(\cos \theta), \\ H_\varphi &= \frac{i \sqrt{\epsilon}}{\rho} \sum_v \left\{ \begin{array}{l} A_v \zeta_v^{(1)}(\rho) \\ C_v \psi_v(\rho) \end{array} \right\} \frac{d}{d\theta} P_v(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\rho = r \sqrt{\epsilon}$.

Разделим условно пространство вне конуса на три области:

$$\text{I} — r_{\text{закр}} \leq r \leq r_0, \quad \text{II} — r_0 \leq r \leq r_{\text{ист}}, \quad \text{III} — r \geq r_{\text{ист}}.$$

Комплексные амплитуды A_v и C_v в областях I, II, III соответственно равны:

$$\text{I. } A_v^{\text{I}} = 0,$$

$$C_v^{\text{I}} = C_v^0 i / (\psi_v(r_0 \sqrt{\epsilon}) \zeta_v^{(1)\prime}(r_0) - \psi_v'(r_0 \sqrt{\epsilon}) \frac{\zeta_v^{(1)}(r_0)}{\sqrt{\epsilon}}); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } A_v^{\text{II}} &= C_v^0 [\psi_v(r_0) \psi_v'(r_0 \sqrt{\epsilon}) - \psi_v'(r_0) \psi_v(r_0 \sqrt{\epsilon})] \sqrt{\epsilon} \times \\ &\times [\psi_v(r_0 \sqrt{\epsilon}) \zeta_v^{(1)\prime}(r_0) \sqrt{\epsilon} - \psi_v'(r_0 \sqrt{\epsilon}) \zeta_v^{(1)}(r_0)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_v^{\text{II}} = C_v^0 = i I_0 \frac{d}{d\theta} P_v(\cos \theta)|_{\theta=0} \sin \theta_0 \zeta_v^{(1)}(r_{\text{ист}}) \frac{1}{\sqrt{g_v}};$$

$$\text{III. } A_v^{\text{III}} = A_v^{\text{II}} + A_v^0, \quad C_v^{\text{III}} = 0,$$

$$A_v^0 = iI_0 \frac{d}{d\theta} P_v(\cos \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \sin \theta_0 \psi_v(r_{\text{ист}}) \frac{1}{Vg_v}, \quad (6)$$

где

$$\psi_v^0(\rho) = \psi_v(\rho) - \left[\frac{\psi_v'(\rho)}{\zeta_v^{(1)'}(\rho)} \right]_{\rho=r_{\text{закр}}} \zeta_v^{(1)}(\rho). \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения: i — мнимая единица, $\zeta_v^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{v+1/2}^{(1)}(\rho)$, $\psi_v(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{v+1/2}(\rho)$, $H_v^{(1)}(\rho)$, $J_v(\rho)$ — соответственно функции Ханкеля первого рода и Бесселя, $P_v(\cos \theta)$ — функции Лежандра с верхним индексом, равным нулю; суммирование везде ведется по всем числам $v=v_1, v_2, v_3, \dots$, являющимся корнями уравнения $P_v(\cos \theta_0) = 0$, а g_v есть норма функций Лежандра.

На рис. 2 представлено распределение среднего квадрата электрического поля,

$$|E|_{cp}^2 = \frac{1}{2} (|E_\theta|^2 + |E_r|^2), \quad (8)$$

вблизи конуса с закруглением, находящегося в свободном пространстве. Расчет проведен при параметрах системы: $r_{\text{ист}} = 1,5$, $r_{\text{закр}} = 0,3$, $\theta_0 = 150^\circ$. На рисунке изображен ряд линий уровня поля, построенных по рассчитанной сетке значений поля. Интересно отметить, что главный максимум поля находится не на щели, а на поверхности закругления вблизи оси конуса. При удалении от поверхности конуса вдоль этой оси поле убывает значительно сильнее, чем в других направлениях. Отметим также, что при $r < r_{\text{ист}}$ поле мало зависит от угла θ . Эти результаты будут использованы во второй части работы. Дальнейшие исследования проводятся при $r_{\text{закр}} = 0$.

Перейдем к определению характеристик излучения. Используя известное выражение для среднего потока энергии через замкнутую поверхность [11, 12]

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_s ([EH^*], n) ds \right\}, \quad (9)$$

где n — нормаль к поверхности s , запишем выражения для потоков энергии, поглощаемой в плазме $P_{\text{пот}}$ и излучаемой источником в свободное пространство $P_{\text{пол}}$, в окончательном виде:

$$P_{\text{пот}} = \pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{V\varepsilon} \sum_v [(C_v \psi_v'(r_0 V \varepsilon))(C_v \psi_v(r_0 V \varepsilon) i)^* g_v] \right\}; \quad (10)$$

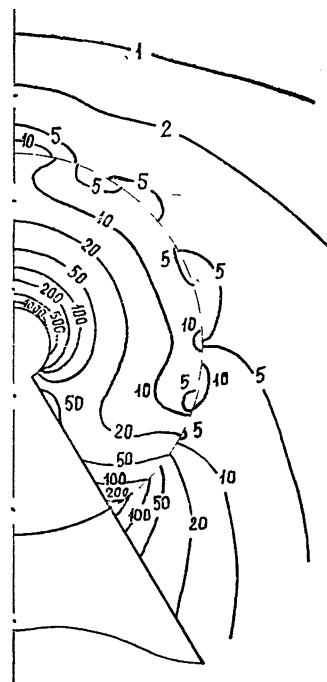


Рис. 2.

$$P_{\text{пол}} = \pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_v [(A_v \zeta_v^{(1)'}(r_{\text{ист}}))(A_v \zeta_v^{(1)}(r_{\text{ист}}) i)^* g_v] \right\}, \quad (11)$$

где $C_v = C_v^I$, $A_v = A_v^{III}$ согласно соотношениям (4) — (6).

Коэффициент полезного действия в такой системе равен:

$$\eta = P_{\text{пол}} / (P_{\text{пол}} + P_{\text{пот}}). \quad (12)$$

Величина излученной мощности в отсутствие плазмы определяется выражением

$$P_0 = \pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_v [(A_v^0 \zeta_v^{(1)'}(r_{\text{ист}}))(A_v^0 \zeta_v^{(1)}(r_{\text{ист}}) i)^* g_v] \right\}. \quad (13)$$

Относительная величина входного сопротивления антенны определяется [13] выражением

$$R = (P_{\text{пол}} + P_{\text{пот}}) / P_0. \quad (14)$$

Перейдем теперь к анализу численного расчета η и R . Вычисления производились при фиксированных значениях $\theta_0 = 150^\circ$, $r_0 = 1$ и переменных $r_{\text{ист}}$ и ϵ . На рис. 3, 4 приведены зависимости η и R от относительного размера $\rho = r_{\text{ист}}/r_0$ при параметрах плазмы $\operatorname{Im}(\epsilon) = 0,1$, $\operatorname{Re}(\epsilon) = -0,1; -0,5; -1; -2$ (кривые в соответствующем порядке расположены сверху вниз по правой стороне рисунка).

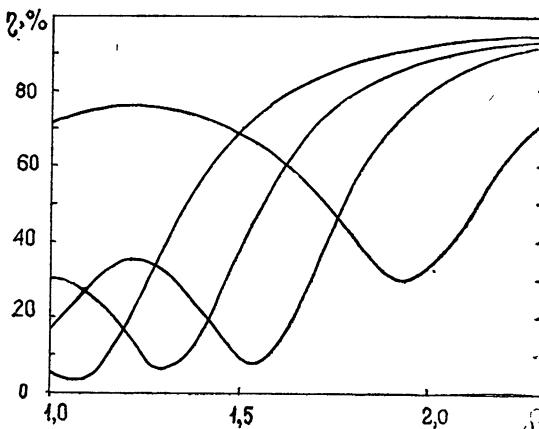


Рис. 3.

Численный анализ приводимых результатов показывает, что существенный вклад в потоки энергии создавался высшими гармониками. Это явление легко объяснимо физически: в ближнем поле плазма оказывается подверженной воздействию со стороны всех волн, в том числе и тех, которые не влияют на дальнее поле. Математически это выражается в увеличении числа учитываемых членов рядов (10) — (11). Обычно число членов ряда, необходимое для достижения достаточной в электродинамических расчетах точности, оценивается для ρ порядка единицы, как $n \sim 2\rho$, где $\rho = |r V \epsilon|$. В нашем случае (здесь под ρ следует понимать $r_{\text{ист}}$) оценка будет такой: при $r_{\text{отн}} = \frac{r_{\text{ист}}}{r_0} \geq 3$ плазма не дает существенного изменения n ; при $1,5 \leq r_{\text{отн}} \leq 3$ число учитываемых волн возрастает до $(1,5 \div 2)n$; при $r_{\text{отн}} \leq 1,5$ число учитываемых волн достигает $(3 \div 5)n$ в зависимости от плазмы.

Таким образом, несмотря на то, что источник находится вне плазмы, происходит эффективное увеличение размеров источника, или, что то же самое, эффективное сокращение длины волны в пространстве между источником и плазмой, когда источник находится достаточно близко от поверхности плазмы. Этот эффект учитывается во второй части работы.

Как видно из рассмотрения зависимостей, представленных на рис. 3, при приближении щели к плазме наблюдается сильное «засасывание» энергии в плазму ($\eta < 5\%$). Наиболее явно это проявляется при $Re(\varepsilon)$, близких к резонансным. При смещении $Re(\varepsilon)$ в отрицательную область эффект смягчается. Относительное входное сопротивление имеет ярко выраженный локальный экстремум на границе плазмы. Можно качественно объяснить увеличение R почти до четырех, проводя аналогию с электростатикой. Действительно, при этом должно происходить почти зеркальное отражение источника на поверхности плазмы, что приводит к удвоению напряженности поля.

2. Переходим теперь к исследованию разряда, возникающего при излучении большой мощности, при возбуждении идеально проводящего бесконечного конуса сторонним током типа (1).

Согласно результатам первой части, в такой конфигурации поле максимально вблизи острия. Физически это вполне правдоподобно для не слишком толстых щыревых антенн. Поэтому разряд, вероятней всего, будет происходить вблизи острия конуса.

Пусть ток запитки достаточно велик для того, чтобы разряд имел место. Тогда вблизи острия образуется плазменное облако. Плазму при атмосферном давлении можно считать находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия, как это сделано в работах [4-10]. Лучистыми потерями энергии пренебрегаем по сравнению с теплопроводным потоком тепла. Предположим также, что теплоотвод по конусу отсутствует.

При отсутствии конвекции уравнениями, описывающими электромагнитное поле и равновесную температуру разряда, будут уравнения (2), где ε считается функцией равновесной температуры газа ($\varepsilon = \varepsilon(T)$), и, так называемое, уравнение Эленбааса — Хеллера (см. [4])

$$\operatorname{div}(\mathbf{x} \operatorname{grad} T) + p = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(T)$ — теплопроводность воздуха, а p есть ВЧ-мощность, поглощаемая единицей объема плазмы.

Решить совместно уравнения (2) и (4) в общем случае не представляется возможным. Поэтому сделаем некоторые предположения о характере разряда. Будем предполагать, что плазма разряда независимо от температуры и размеров сохраняет сферическую форму. Радиус этой сферы обозначим r_0 (рис. 1). Далее, поскольку с уменьшением температуры проводимость воздуха $\sigma(T)$ резко падает [14] одновременно с электронной плотностью $n(T)$, то толщина переходного слоя, по-видимому, невелика по сравнению с размером плазменного образования, и ее мы учитывать не будем. Будем считать, далее, как это сделано в работе [9] и экспериментально подтверждено для цилиндрического случая в [15], что температура плазмы постоянна по радиусу вплоть до ее границы. Обозначим ее T_0 . Кроме того, как показано в первой части статьи, поле

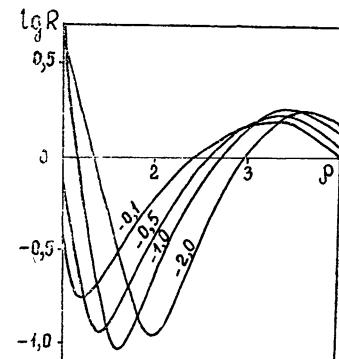


Рис. 4.

вблизи остряя конуса слабо зависит от угла θ . Поэтому на предыдущее предположение накладывается еще следующее: температура плазмы не изменяется по углу θ . Следовательно, при сделанных предположениях, пространственные изменения температуры будут только в области, внешней по отношению к плазме. Температура будет изменяться только по радиусу и может быть определена из решения уравнения Лапласа в области ($r \geq r_0$)

$$\operatorname{div}(\mathbf{x} \operatorname{grad} T) = 0 \quad (16)$$

с граничными условиями

$$T(r_0) = T_0, \quad T(\infty) = 0. \quad (17)$$

Вводя обычным способом тепловой потенциал

$$S = \int_0^r \mathbf{x}(T) dT \quad (18)$$

и граничные условия для него

$$S(r_0) = S(T_0) = S_0, \quad S(\infty) = 0, \quad (19)$$

получаем, что решение уравнения (16) имеет вид

$$S = \left(\frac{r_0}{r} \right) \int_0^{T_0} \mathbf{x}(T) dT = \left(\frac{r_0}{r} \right) S_0. \quad (20)$$

До сих пор мы, не оговаривая это специально, предполагали, что описываем стационарное состояние разряда, т. е. такое состояние, когда все нелинейные процессы установления в системе поле — плазма уже прошли. В результате самовоздействия установилось какое-то стационарное равновесное состояние, при котором плазма характеризуется некоторыми неопределенными пока что значениями равновесной температуры и размера разрядного облака. Для определения этих параметров используем метод «самосогласованного» варьирования. Следуя [9], введем функционал

$$U = \int \left[\frac{1}{2} (\nabla S)^2 - \int_0^S p dS \right] dv, \quad (21)$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

Как показано в работе [9], уравнение Лагранжа—Эйлера для вариационной задачи на экстремум функционала (21) при фиксированном распределении p совпадает с уравнением баланса энергии (15). Таким образом, будем искать экстремаль функционала (21) и одновременно решать уравнения (2), считая, что в качестве потенциала S в зависимости ϵ от S есть экстремаль функционала (21), а в функционал (21) входит решение уравнений (2).

Пусть Q есть поток мощности ВЧ-поля, нормальный к сферической поверхности плазмы. Тогда мощность p , поглощаемая в точке r , относенная к единице объема, есть

$$p = \frac{1}{\alpha r^2} \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad (22)$$

где $\alpha = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$.

Условия «самосогласованного» экстремума для (21) запишутся так:

$$\frac{\partial U}{\partial S_0} \Big|_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} = 0; \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_0} \Big|_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} = 0, \quad (23.2)$$

где (\sim) означает истинные стационарные значения параметров разряда.

Как показано в [9], условие (23.1) представляет собой условие интегрального баланса мощности в разряде

$$(Q = N_T)_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0}, \quad (24)$$

где

$$Q = Q(S_0, r_0),$$

$$N_T = \int \nabla S dA = \alpha r_0 S_0. \quad (25)$$

Условие (23.2) есть условие баланса мощности непосредственно в зоне энерговыделения. Используя (20), представим (23.2) в виде

$$\left[\int_0^{S_0} \left(\frac{\partial N_T}{\partial r_0} - \frac{\partial Q}{\partial r_0} \right) dS \right]_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} = 0. \quad (26)$$

Произведем интегрирование, раскладывая $\frac{\partial Q}{\partial r_0}$ в ряд Тейлора, удерживая член с первой производной и учитывая, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial r_0}\right)_{S=0} = 0$, поскольку $Q|_{S=0}=0$, при любых r_0 . Получим условие

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial r_0} = \frac{\partial N_T}{\partial r_0} \right)_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} = \alpha \tilde{S}_0. \quad (27)$$

Таким образом, в первом приближении задача сводится к совместному решению следующих уравнений:

$$\begin{aligned} Q \Big|_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} &= \alpha \tilde{r}_0 \tilde{S}_0, \\ \frac{\partial Q}{\partial r_0} \Big|_{S_0=\tilde{S}_0, r_0=\tilde{r}_0} &= \alpha \tilde{S}_0, \end{aligned} \quad (28)$$

где величина Q определяется так же, как величина $P_{\text{пот}}$ по формуле (10), а производная задается выражением

$$\frac{\partial Q}{\partial r_0} = -\pi \operatorname{Re} \left\{ i \sum_v |C_v|^2 \left[\left(\frac{(v+1)}{\rho^2} - 1 \right) |\psi_v|^2 + |\psi'_v|^2 \frac{\sqrt{\epsilon^*}}{\sqrt{\epsilon}} \right]_{\rho=r_0} g_v \right\}. \quad (29)$$

Для вычисления диэлектрической проницаемости и проводимости плазмы воспользуемся известными соотношениями [6]:

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m \omega (\omega + i\nu)}, \quad \sigma = \frac{e^2 n \nu}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (30)$$

Полагаем, что частота излучения такова, что $\nu/\omega \gg 1$, где ν — эффективная частота соударений электронов. При этом условии

$$\epsilon = 1 - 4,02 \cdot 10^{16} \left(\frac{\sigma^2}{n} \right) + 1,8 \cdot 10^{12} \left(\frac{\sigma}{f} \right) i, \quad (31)$$

где σ — проводимость в $\text{Ом} \cdot \text{см}$, n — электронная концентрация в $1/\text{см}^3$, f — частота поля в герцах. Кроме того, будем полагать, что справедливо следующее неравенство:

$$\omega \gg v\delta. \quad (32)$$

Здесь δ — доля энергии, теряемой электроном при одном соударении. Значения для величины δ приведены в [17]. При этом условии, согласно работе [18], температурное поле — стационарно.

Как указано в [15], при атмосферном давлении у плазмы разряда в воздушной среде существует характерная минимальная температура T_{\min} , ниже которой разряд потухает. Она составляет примерно 3200 К. Там же показано, что возможный диапазон изменения температур с изменением вкладываемой мощности невелик и не превышает 50% от минимальной температуры. Поэтому мы ограничиваемся исследованием рассматриваемого явления в интервале температур $(2 \div 4)$ тысячи градусов. В этом интервале температур при атмосферном давлении электронная концентрация, проводимость плазмы и тепловой потенциал приближенно описываются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \lg n &= -1,15x^2 + 10,03x - 8,88, \\ \lg \sigma &= -1,16x^2 + 10,16x - 23,68, \\ \lg S &= -0,017x^2 + 0,545x + 1,138, \end{aligned} \quad (33)$$

где x — температура в тысячах градусов. При этом погрешность аппроксимации, во всяком случае, не превосходит разброса исходных данных [4, 14, 19—23].

Очевидно, решению можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Каждому из уравнений (28) соответствует некоторая поверхность в трехмерном пространстве, где независимыми переменными являются S_0 и r_0 . Пересечение этих поверхностей в общем случае есть некоторая кривая, множество точек которой является множеством стационарных решений задачи. Каждой точке соответствуют три величины: поглощаемая плазмой мощность ВЧ-поля, тепловой потенциал (или же температура) и радиус плазменного облака. Множество точек этих значений дает множество возможных решений задачи.

Кроме того, существует непосредственная связь между поглощаемой плазмой и общей излученной источником мощности (10) — (12). Таким образом, можно построить зависимость температуры и размера плазменного облака от общей излученной источником мощности и, кроме того, зависимость КПД и входного сопротивления антенны.

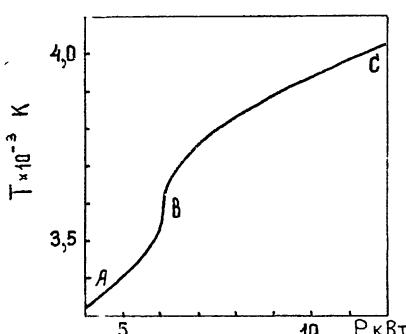


Рис. 5.

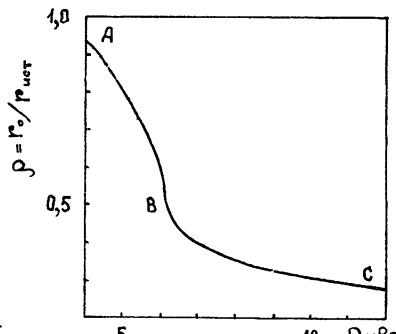


Рис. 6.

Для частоты поля $f = 300 \text{ МГц}$, которая в данном интервале температур удовлетворяет условиям (31), (32), были проведены расчеты при параметрах системы $\theta_0 = 150^\circ$, $r_{\text{ист}} \approx 24 \text{ см}$. Зависимости равновесной температуры разряда T , размера разряда $r = r_0/r_{\text{ист}}$, а также КПД η и входного сопротивления щели R от подводимой к источнику мощности P представлены соответственно на рис. 5—8. Кривые можно разделить условно на три отрезка: AB , окрестность точки B и BC (см. рис. 5). Рассмотрим их.

1) На участке AB температура разряда растет при увеличении P . При этом наблюдается резкое сжатие разряда и повышение η (режим сжатия). Поведение разряда здесь можно объяснить следующим образом. В рассматриваемом интервале температур теплопроводность воздуха значительно возрастает с ростом температуры. И одновременно при возрастании температуры от ее равновесного значения относительная и абсолютная доли энергии ВЧ-поля, поглощаемой в плазме, падают. Например, при $\theta_0 = 150^\circ$, $r_{\text{ист}} = 1$, $r_0 = 0,3$ зависимость поглощаемой плазмой мощности и КПД источника от температуры представлена в табл. 1.

Таблица 1

| $T, \text{ К}$ | 3300 | 3400 | 3500 | 3600 | 3700 | 3800 |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{Q(T)}{Q(3300)}, \%$ | 100 | 83,5 | 63,5 | 47,7 | 37,1 | 30,4 |
| $\eta, \%$ | 73 | 80 | 86 | 90 | 92 | 94 |

Это объясняется тем, что с уменьшением поглощения ВЧ-энергии тепло из наружных слоев разряда быстро уходит в окружающий холодный воздух, и размер облака уменьшается до тех пор, пока тепловой поток, пропорциональный радиусу облака (25), не уменьшится настолько, что будет равен поглощаемому потоку ВЧ-энергии.

2) На участке BC разряд находится в развитом состоянии, когда размер облака, а также η и R меняются медленно (режим развитого разряда).

3) В окрестности точки B происходит, вероятно, неустойчивый переход из одного режима горения в другой. Действительно, здесь при неизменной подводимой к источнику мощности температура газа резко возрастает. Это сопровождается быстрым сжатием плазмы (см. рис. 6), происходящим вследствие нарушения баланса мощности в разряде.

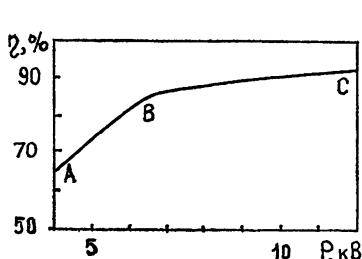


Рис. 7.

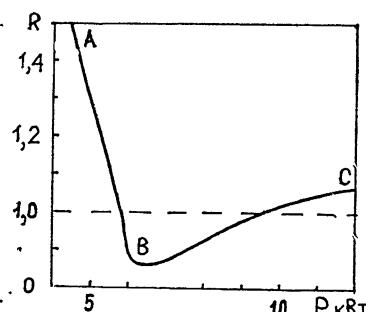


Рис. 8.

Отметим еще, что развитый разряд требует для поддержания горения относительно меньше энергии, чем разряд в режиме сжатия (рис. 7, 8). Поэтому энергетически выгодно подводить сравнительно большие мощности к источнику для повышения КПД и улучшения согласования антенны при наличии разряда.

Настоящая работа выполнена под руководством Н. А. Яблочкина, которому автор приносит глубокую благодарность. Кроме того, автор искренне благодарит В. А. Блинова за ряд ценных замечаний, сделанных им по прочтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Epstein, *The Phys. Fluids*, 11, № 4, 896 (1968).
2. J. T. Mayhan and R. L. Fante, *J. Appl. Phys.*, 40, № 2, 449 (1969).
3. K. M. Soo Hoo, G. C. Light and J. E. Trousdale, *IEEE Trans. on Ant. and Propag.*, AP-20, № 3, 334 (1972).
4. В. Н. Сошников, Е. С. Трехов, *ТВТ*, 4, № 2, 166 (1966).
5. Б. Э. Мейерович, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ*, 61, № 1, 235 (1971).
6. Б. Э. Мейерович, *ЖЭТФ*, 61, № 5, 1891 (1971).
7. А. П. Соболев, Диссертация, МФТИ, М., 1972.
8. Ю. П. Райзэр, *ЖЭТФ*, 61, № 1, 222 (1971).
9. М. О. Розовский, Диссертация, МФТИ, М., 1973.
10. Л. М. Балтин, В. М. Батенин, И. И. Девяткин, В. Р. Лебедева, Н. И. Цемко, *ТВТ*, 9, № 6, 1105 (1971).
11. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
12. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, изд. Наука, М., 1971.
13. Г. Т. Марков, Антенны, Энергоиздат, М—Л, 1960
14. Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы (под ред. Л. С. Полака), изд. Наука, М., 1971.
15. С. В. Грушецкий, Диссертация, Институт тепло-массо-обмена им. А. Лыкова, АН БССР, Минск, 1975.
16. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
17. Физика и техника низкотемпературной плазмы (под ред С. В. Дресвина), Атомиздат, М., 1972.
18. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда, изд. Наука, М., 1975.
19. П. П. Куллик, И. В. Ермохин, сб. Теплофизические свойства жидкостей и газов при высоких температурах и плазмы (под ред. Н. И. Новикова и А. Н. Гордова), т. II, изд. Стандартов, М., 1969.
20. Н. Б. Варгафтик, Л. П. Филиппов, А. А. Тарзиманов, Р. П. Юрнак, Теплопроводность газов и жидкостей, изд. Стандартов, М., 1970.
21. Н. Б. Варгафтик, Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей, изд. Наука, М., 1972.
22. А. С. Предводитель и др., Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 200 до 6000 К, изд. АН СССР, М., 1962.
23. Л. В. Гурвич и др., Термодинамические свойства индивидуальных веществ, т. II, изд. АН СССР, М., 1962.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию

15 июня 1976 г.,
после объединения
6 октября 1977 г.

ON A HIGH-FREQUENCY DISCHARGE AT THE APEX OF A SYMMETRICALLY EXCITED CONE

N. N. Luzin

The problem of excitation of an infinite perfectly-conducting cone with a spherical plasma formation at the apex is considered. The influence of such a plasma formation upon antenna characteristics is investigated in the case when the external current sources are near this formation. The possibility of occurrence of the discharge at the apex of an infinite perfectly-conducting continuously-excited cone is investigated. The solution of the problem of nonlinear interaction between the electromagnetic field and plasma at high-frequency discharge is obtained in the first approximation with taking into account of the dependence of the complex dielectric permittivity and heat conductivity of plasma on the temperature.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.396.628 : 523.164

РЕГИСТРИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО, ПРИМЕНЯЕМОЕ В РАДИОАСТРОНОМИИ И ТЕХНИКЕ АНТЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. В. Сысоев

В настоящее время в радиоастрономии и технике антенных измерений, особенно в фазометрических, широко используются автоматизированные информационно-измерительные системы, осуществляющие получение, регистрацию и обработку на ЭВМ результатов измерений. Для ряда практически важных случаев не всегда представляется возможным размещение ЭВМ в непосредственной близости от района измерений. Поэтому весьма актуальна разработка регистрирующих устройств, способных обеспечить нужды таких измерений.

Структурная схема разработанного варианта регистрирующего устройства (РУ), использующего носителем информации перфоленту, изображена на рис. 1. Взаимодействие элементов схемы происходит следующим образом. При вращении антенны по азимуту, начиная с начального θ_0 , по командам датчика дискретных перемещений антенны по β (5) (они определяют шаг регистрации поля) блок управления (3) запускает оба преобразователя аналог — код (1). После окончания преобразования на выходных кодовых шинах преобразователей фиксируется текущий код преобразования, кроме того, выдаются команды «Конец преобразования». Они используются как разрешающие для блока управления, который совместно с транскриптором (2) обеспечивает запись перфоратором (4) полученной кодовой информации по заданному формату. Окончание цикла записи производится автоматически при достижении установленного числа измерений.

После возвращения антенной системы на азимут θ_0 и изменения ее угломестного положения с шагом $\Delta\epsilon$ процесс записи продолжается.

Одной из важных характеристик РУ является разработанный формат записи. Он обеспечивает запись текущей кодовой информации и служебных признаков («Начало строки», «Начало числа», «Нули», признак паритета) при максимальном использовании числа позиций носителя (максимальная плотность записи).

В начале записи набиваются коды, соответствующие управляющему символу системы управления вводом—выводом (СУВВ). При записи файл разбит на равные части, условно именуемые «Строчками». Каждая «Строка» — последовательность комплексных чисел. Число состоит из двух частей, записанных в двоичном коде (до 12 разрядов). Каждое число отделено одно от другого специальным признаком — «Начало числа», представленным в виде «1» на первой дорожке перфоленты. Число записывается на четырех строках, причем на первых двух — реальная часть, на вторых двух — мнимая часть. Последовательность записи обоих частей числа одинакова: на второй — седьмой дорожках записываются сначала разряды с первого по шестой, затем с седьмого по двенадцатый (12-й разряд — младший). На восьмой дорожке ленты бьется признак паритета — дополнение до нечетности. Перед первым числом каждой «Строчки» набит признак «Начало строки». Файл оканчивается нулевым числом, перед которым набит признак «Нули». Для ввода информации в ЭВМ используется специально разработанная программа. Она выполняет следующие операции: считывание в оперативную память; контроль длины каждого числа; контроль равенства чисел во всех «Строчках» файла; записи на магнитную ленту (МЛ) пользователя (реальная часть файла — в четные зоны, мнимая — в нечетные зоны ленты); перевод чисел в десятичный код; распечатка на АЦПУ файла в десятичном коде (отдельно части Re и Im) с диагностикой результатов контроля и указанием номера и зон МЛ.

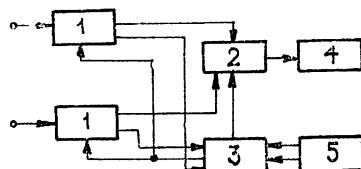


Рис. 1.

Применение специального формата позволило получить выигрыш в быстродействии РУ. В качестве преобразователей в разработанном РУ использованы серийно выпускаемые преобразователи типа Ф-733/1, имеющие время преобразования $\tau_{\text{пр}} = 100 \text{ мкс}$.

Блок управления обеспечивает выполнение следующих функций: формирование импульсов запуска преобразователей по командам азимутального датчика; разбивает текущую цифровую информацию согласно формата записи (с помощью транскриптора); формирует команды, обеспечивающие печать служебных признаков «Начало строки», «Начало числа», «Нули» (признак «Нули» выделяет число, соответствующее начальным выходным напряжениям измерительной схемы); автоматическое формирование команды «Конец строки» при достижении предварительно установленного оператором значения максимального числа записей в строке (по этой команде регистрация информации прекращается, независимо от поступления импульсов «Запись», т. е. независимо от дальнейшего движения антенны); индикацию числа выполненных записей; проверку работы РУ без аналоговых преобразователей.

Для обеспечения максимального возможного быстродействия РУ в разработанном варианте его использован наиболее скоростной ленточный перфоратор типа ПЛ-150.

Конструктивно РУ состоит из следующих элементов: два преобразователя типа Ф-733/1, блок управления, объединенный с транскриптором и системой питания; перфоратор ПЛ-150.

Логика блока управления выполнена на микросхемах серии 155

Поступила в редакцию
14 марта 1977 г.

УДК 621.372.8 09

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛНЫ ОТ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЗАКОРАЧИВАЮЩЕЙ СТЕНКИ В ВОЛНОВОДЕ

Э. Д. Газазян, Э. М. Лазизев, А. Д. Тер-Погосян

Отражение электромагнитной волны от движущегося зеркала может быть использовано в ряде практических приложений: так в [1] исследована трансформация спектра переходного излучения, в [2] предлагается способ прямого преобразования электромагнитной энергии в механическую и т. д. Возможность экспериментального использования плотных сгустков плазмы или электронов определяет интерес к задаче о преобразовании частоты и усилении волны, падающей на движущуюся закорачивающую стенку в волноводе.

Пусть волновод без заполнения произвольной односвязной формы поперечного сечения с образующими, параллельными оси z , закорочен металлической стенкой, движущейся по закону $z = vt$. Проводимость металлических стенок бесконечно большая. На закорачивающуюся стенку падает E -волну (модуля для простоты опустим):

$$E_{z0} = E_0 \psi(x, y) \exp(i \omega_0 t - i \gamma_0 z), \quad (1)$$

где $\psi(x, y)$ — собственная функция первой краевой задачи в волноводе, $\gamma_0 = (\omega_0^2/c^2 - k^2)^{1/2}$, k — поперечное волновое число. Отраженную волну ищем в виде

$$E_{z1} = E_1 \psi(x, y) \exp(i \omega_1 t + i \gamma_1 z), \quad (2)$$

$$\gamma_1 = (\omega_1^2/c^2 - k^2)^{1/2}.$$

Граничное условие при $z = vt$ запишем в системе покоя стенки:

$$E_x - \beta H_y = 0, \quad \beta = v/c. \quad (3)$$

Выразив поперечные компоненты полей через продольные (1), (2), подставим в граничное условие (3). Получим

$$\omega_0 - \gamma_0 v = \omega_1 + \gamma_1 v; \quad (4a)$$

$$E_1 = E_0. \quad (4b)$$

Из (4a) для частоты и постоянной распространения имеем

$$\omega_1 = \frac{\omega_0(1 + \beta^2) - 2\gamma_0 v}{1 - \beta^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma_0(1 + \beta^2) - 2\beta\omega_0/c}{1 - \beta^2}. \quad (5)$$

Связь между групповой и фазовой скоростями отраженной волны та же, что и для падающей: $v_{\text{grp},0,1} v_{\text{фаз},0,1} = c^2$.

Усредненный по времени поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение волновода для падающей и отраженной волн

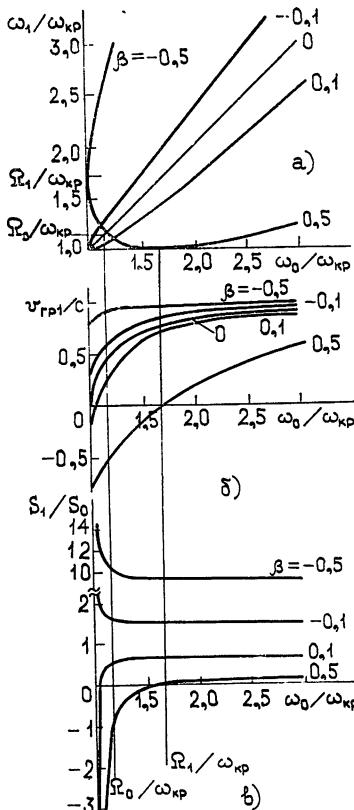
$$S_{0,1} = (8\pi x^2)^{-1} \omega_{0,1} \gamma_{0,1} |E_0|^2. \quad (6)$$

Полученные результаты проиллюстрированы на рис. 1 для различных значений скорости движения стенки. По оси абсцисс отложен безразмерный параметр $\omega_0/\omega_{\text{кр}}$ — отношение частоты падающей волны к критической частоте пустого волновода. По оси ординат отложены: а) отношение частоты отраженной волны к критической — $\omega_1/\omega_{\text{кр}}$; б) отношение групповой скорости отраженной волны к скорости света — v_{grp}/c ; в) отношение потока энергии отраженной волны к потоку энергии падающей — S_1/S_0 .

1. Рассмотрим практически интересный случай $\beta < 0$, стенка движется навстречу волне. С увеличением скорости движения стенки увеличиваются частота и поток энергии отраженной волны, причем групповая скорость последней всегда больше скорости движения стенки. При частоте падающей волны $\omega_0 = \omega_{\text{кр}}$ (поперечный эффект Допплера в волноводе) имеем отраженную волну с частотой $\omega_1 = \omega_{\text{кр}}(1+\beta^2)/(1-\beta^2) \equiv \Omega_1$, групповой скоростью $v_{\text{grp}} = 2|\beta|c/(1+\beta^2)$ и потоком энергии $S_1 = \frac{|\beta|c}{4\pi}(1+\beta^2)/(1-\beta^2)^2$. С увеличением

частоты падающей волны (при фиксированной ее моде) растут частота и поток энергии отраженной волны, однако отношение S_1/S_0 в полосе прозрачности волновода слабо зависит от $\omega_0/\omega_{\text{кр}}$. Таким образом, усилитель, выполненный на описанном принципе, будет обладать хорошей широкополосностью.

Рис. 1. Характеристики отраженной волны в зависимости от скорости движения стенки и дисперсии волновода (значения частот Ω_0 и Ω_1 отмечены только для случая $\beta = 0,5$).



2. В случае $\beta > 0$ (волна падает на убегающую стенку) с ростом β уменьшаются частота и поток энергии отраженной волны. Здесь нужно исключить из рассмотрения падающие волны с групповой скоростью, меньшей скорости движения стенки и, следовательно, не взаимодействующие с ней. Падающая волна должна удовлетворять условию $v_{\text{grp}} > v$ или $\omega_0 > \omega_{\text{кр}}(1-\beta^2)^{-1/2} \equiv \Omega_0$. В области частот $\Omega_0 < \omega_0 < \Omega_1$ групповая скорость отраженной волны отрицательна, волна, как и поток, распространяется в сторону движения стенки, при этом групповая скорость остается меньше скорости движения стенки, что обеспечивает отвод энергии от границы. При $\omega_0 = \Omega_1$, $v_{\text{grp}} = 0$ и $S_1 = 0$, так как $\omega_1 = \omega_{\text{кр}}$. При $\omega_0 > \Omega_1$ групповая скорость отраженной волны положительна и по величине меньше групповой скорости падающей волны, величина отраженного потока меньше падающего.

Устремив поперечные размеры волновода к бесконечности, получим формулы, соответствующие случаю нормального падения волны в свободном пространстве (продольный эффект Допплера) на движущийся бесконечный металлический экран:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2. \quad (7)$$

ЛИТЕРАТУРА

- Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян, Изв. вузов. — Радиофизика, 19, 473 (1976).
- G. J. Dick, IEEE Trans. on Magn., MAG-11, 441 (1975).

Поступила в редакцию
21 февраля 1977 г.

ОБ ОДНОГРУППОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. И. Калинин

Существуют задачи, которые приводят к необходимости рассмотрения динамических систем со многими флуктуирующими параметрами. В качестве примера укажем на распространение волн в волноводе со случайными неоднородностями [1], когда исходное уравнение Гельмгольца берется в параболическом приближении. После разложения решения этого уравнения по собственным функциям сечения волновода получается система уравнений вида (1) с начальными данными, в которой элементами матрицы $B(t)$ являются различные случайные функции, представляющие собой матричные элементы показателя преломления, при разложении его по собственным функциям сечения волновода. В качестве второго примера можно привести задачу о ядерном магнитном резонансе [2], когда все три компоненты магнитного поля флуктуируют различными способами.

В данной заметке производится обобщение метода мажорантного процесса [3] исследования линейной динамической системы

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A + B(t)] z(t), \quad z(0) = z_0 \quad (1)$$

на тот случай, когда ее параметры A_{ij} , удовлетворяющие условиям работы [3], возмущены, вообще говоря, различными случайными функциями $B_{ij}(t)$. Все величины в (1) предполагаются действительными. Для вектора состояния $z(t)$ рассматриваемой динамической системы можно записать ряд теории возмущений. В случае одного флукутирующего параметра [3] каждый член этого ряда представляется в виде интеграла от произведения неслучайного оператора (матрицы) на случайную числовую функцию. Такой вид членов необходим при оценках сходимости этого ряда после его усреднения по ансамблю и оценках используемого приближения. Когда у системы флукутируют несколько параметров, ряд теории возмущений непосредственно в таком виде не записывается. Эту трудность можно обойти, следуя Фоксу [4], использованием операторных кумулянтов. Однако они имеют сложное устройство и носят пока чисто формальный характер.

Использование числовых кумулянтов [5], имеющих смысл корреляций, нарушает операторный вид членов ряда теории возмущений для $z(t)$. Однако его можно восстановить с помощью матрицы $E(j, k)$, зависящей от индексов j и k как от параметров, и имеющей компоненты

$$E_{j' k'}(j, k) = \delta_{j' j} \delta_{k' k}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}. \quad (2)$$

Усредненный ряд для $z(t)$ можно записать, воспользовавшись обозначениями работы [5]: $B_{j_s k_s}(t_s) \equiv s$, в виде

$$\langle z(t) \rangle = e^{At} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{A(t-t_1)} E(j_1, k_1) \times \\ \times e^{A(t_1-t_2)} E(j_2, k_2) \dots e^{A(t_{n-1}-t_n)} E(j_n, k_n) e^{At_n} z_0 \langle 1 \cdot 2 \dots n \rangle, \quad (3)$$

N — число степеней свободы динамической системы.

Используя кумулянтное разложение

$$\langle 1 \cdot 2 \dots n \rangle = \sum_{v=1}^n \sum_{s_1+s_2+\dots+s_v=n} \langle \alpha_1 \dots \alpha_{s_1} \rangle_c \dots \langle \beta_1 \dots \beta_{s_v} \rangle_c, \quad (4)$$

где $\langle \dots \rangle_c$ — кумулянтная скобка (см [5]), получим ряд для первого статистического момента $\langle z(t) \rangle$, выраженный через кумулянтные скобки случайного матричного процесса $B(t)$.

Оценка сходимости ряда (3) проводится, как и в [3], методом мажорантного процесса. В качестве мажорантных функций выбираются симметричные по всем аргументам функции $G_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$, удовлетворяющие условиям

$$|\langle 1 \cdot 2 \dots n \rangle_c| \leq G_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Оценки имеют вид (8) и (9 а) из [3], где вместо функций $m(t, t')$ следует взять функцию, равную сумме ряда

$$\begin{aligned} m(t, t') = & N^2 G_1(t) \delta(t - t' - 0) + N^4 G_2(t, t') + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n N^{2(n+2)} G_{n+2}(t, t_1, \dots, t_n, t'). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь использовались свойства, что нормы $\|e^{At}\| \leq 1$ ($t > 0$), $\|E(j, k)\| = 1$.

В произведениях кумулянтных скобок в (4) моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n перепутаны всевозможными способами. Если оставить только члены с упорядоченными по t_1, t_2, \dots, t_n произведениями кумулянтных скобок и использовать получившееся выражение в (3), то для $\langle z(t) \rangle$ получится приближенное выражение, удовлетворяющее так называемому уравнению Дайсона в одногрупповом приближении (см. (10) из [3]). При упорядочивании моментов времени в произведениях кумулянтных скобок автоматически происходит и упорядочивание индексов. Поэтому массовый оператор уравнения Дайсона в одногрупповом приближении можно записать без помощи матрицы $E(j, k)$, пользуясь свойствами (3) из [5], что кумулянтная скобка является линейным оператором, в виде

$$\begin{aligned} M(t, t') = & \langle B(t) \rangle_c \delta(t - t' - 0) + \langle B(t) e^{A(t-t')} B(t') \rangle_c + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \langle B(t) e^{A(t-t_1)} B(t_1) \dots B(t_n) e^{A(t_n-t')} B(t') \rangle_c. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценка одногруппового приближения имеет вид (12), (13) из [3] с функцией $\hat{m}(t, t')$, равной (6).

Все результаты, полученные здесь для первого статистического момента, переносятся на второй статистический момент, $\langle z(t) \times z(t') \rangle$, заменой матриц A и $B(t)$ на \hat{A} и $\hat{B}(t)$, определяемые формулами вида (5) из [3], величины N^2 на $2N^3$ в формуле (6) и использованием свойств (3) из [5]. Значок \times обозначает тензорное произведение.

Из оценок для второго статистического момента следует, что одним из необходимых условий применимости одногруппового приближения для динамической системы со многими флюктуирующими параметрами является ограниченность числа степеней свободы N , что отличается от случая одного флюктуирующего параметра. Таким образом, при исследовании, например, распространения волн в волноводе необходимо, чтобы было ограничиться конечномодовым приближением (см. (4) из [1]). При этом, чем большее число мод необходимо включить в рассмотрение, тем «меньше» должны быть флюктуации параметров в смысле малости функций $G_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$, мажорирующих кумулянтные скобки этих флюктуаций.

Автор благодарит Ю. Н. Барабаненкова за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys., 13, № 12, 1912 (1972).
2. R. Kubo, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems, Editor D. Ter Haar, Edinburg and London, 1961.
3. Ю. Н. Барабаненков, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 7, 981 (1974).
4. R. F. Fox, J. Math. Phys., 16, № 2, 289 (1975).
5. А. Н. Малахов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
6 октября 1976 г.

ХРОНИКА

IV ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ

С 27 по 29 июня 1977 года в Томске проходил IV Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, организованный Институтом оптики атмосферы СО АН СССР, Комиссией по радиации МГКА при Президиуме АН СССР, Научным советом АН СССР по комплексной проблеме «Распространение радиоволн» и Научным Советом АН СССР по проблеме «Нелинейная и когерентная оптика».

В симпозиуме приняли участие 250 специалистов из 77 научно-исследовательских учреждений Академии Наук СССР, высших учебных заведений, Гидрометеослужбы СССР и других ведомств. Всего на заседаниях было заслушано 202 доклада. К началу симпозиума были изданы развернутые тезисы докладов [1]. Проблемы, обсуждавшиеся на симпозиуме, вызвали большой интерес специалистов отраслевых институтов и промышленных предприятий, приславших более сорока своих представителей для участия в работе симпозиума.

На пленарном заседании, состоявшемся в день открытия симпозиума, были заслушаны обзорные доклады В. Е. Зуева, М. В. Кабанова, Ю. А. Пхалагова, В. Я. Фадеева «Аэрозольное рассеяние в надводной атмосфере», В. Е. Зуева, В. П. Лопасова, Ю. С. Макушкина «Спектры поглощения атмосферных газов» и В. И. Букатого, В. Е. Зуева, Ю. Д. Копытина, А. В. Кузиковского «Нелинейная оптика рассеивающих сред», в которых был дан анализ современного состояния теоретических и экспериментальных исследований по указанным проблемам.

Секционные заседания были посвящены следующим темам:

1. Поглощение и рассеяние лазерного излучения газами и аэрозолями в атмосфере.
2. Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере.
3. Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере.
4. Методы и аппаратура в экспериментальных исследованиях процессов распространения лазерного излучения в атмосфере.

На заседаниях секции «Поглощение и рассеяние лазерного излучения газами и аэрозолями в атмосфере» обсуждались вопросы молекуллярного поглощения лазерного излучения для отдельных участков спектра и рассеяния оптического излучения в реальной атмосфере и в моделируемых условиях.

В докладах секции «Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере» рассматривались приближенные методы решения стохастического волнового уравнения, излагались результаты теоретического и экспериментального исследования когерентности, флуктуаций интенсивности и фазы поля лазерных пучков в турбулентной атмосфере и модельных случайно-неоднородных средах. Значительное число докладов этой секции было посвящено изложению теоретических и экспериментальных результатов исследования флуктуаций поля отраженного

лазерного излучения в условиях турбулентной атмосферы. В ряде докладов рассматривались вопросы рефракции лазерных пучков в неоднородной атмосфере.

На заседаниях секции «Нелинейные эффекты при распространении лазерного излучения в атмосфере» рассматривались процессы регулярного испарения и взрыва аэрозольных частиц под действием интенсивного лазерного излучения, процессы распространения импульсного и непрерывного излучения в аэрозолях различной природы, а также процессы искажений лазерных пучков в каналах просветления. В ряде докладов были рассмотрены эффекты теплового самовоздействия и спектроскопические нелинейные эффекты в газах атмосферы.

Доклады, заслушанные на секции «Методы и аппаратура в экспериментальных исследованиях процессов распространения лазерного излучения в атмосфере», были посвящены, в основном, разработке методов и алгоритмов обработки оптических сигналов и разработке устройств измерения характеристик атмосферы. Ряд обсуждавшихся на секции разработок аппаратуры вызвал интерес представителей отраслевых предприятий.

На заключительном заседании было принято решение, в котором подведен итог выполненных исследований и поставлены задачи на будущее: создание статистически обоснованной схемы расчета характеристик молекулярного поглощения в окнах и микроокнах прозрачности атмосферы для когерентных лазерных источников излучения; исследование закономерностей энергетической, пространственной и временной фильтрации атмосферой в оптическом диапазоне длин волн как в реальных, так и в моделируемых условиях; исследование флуктуаций поля отраженного лазерного излучения в условиях турбулентной атмосферы; исследование совместного влияния на флуктуации поля лазерного излучения атмосферной турбулентности, рассеивателей в виде осадков и аэрозоля, нелинейных эффектов; изучение взрыва и пробоя аэрозолей под действием интенсивного лазерного излучения, а также процессов искажения интенсивных лазерных пучков в аэрозольных средах; разработка узкоспециализированных анализаторов параметров атмосферы. В решении симпозиума отмечается необходимость проведения комплексных исследований влияния атмосферы на параметры лазерного излучения, учитывающих полную совокупность факторов взаимодействия оптических волн с атмосферой.

ЛИТЕРАТУРА

1. IV Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1977.

В. Е. Зуев, В. А. Банах.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ*

УДК 621.371

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ В ОДНОРОДНОЙ СЛАБОИОНИЗИРОВАННОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПЛАЗМЕ

В. Н. Боравенков, О. Б. Голиков, Л. И. Смирнов, Б. А. Устинов

Рассматривается вопрос о влиянии дисперсии и поглощения на характер распространения простых типов сигналов в плазме, характеризующейся малым значением плазменной частоты по сравнению с частотой столкновений электронов с атомами. Показано, что искажение формы сигнала существенно лишь для начальных предвестников сигнала.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 3328-77. Деп. от 19 августа 1977 г.

УДК 621.371

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОДНОРОДНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ ПЛАЗМЫ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

В. Н. Боравенков, Б. А. Устинов

Приводится точное выражение для импульсной и переходной характеристик поглощающей диспергирующей плазмы в виде рядов по функциям Бесселя и функциям Ломмеля. На примере импульсной характеристики показывается возможность асимптотического суммирования полученных рядов, приводящего к достаточно простому, пригодному для инженерных расчетов аналитическому выражению: 1) $E^*(t, h) \approx \delta(\Delta t) - \theta(\Delta t) \frac{a^2 t_{\pi}}{x} [1 - v_a \Delta t] J_1(x)$ при $0 < \Delta t < \Delta t_r$, 2) $E^*(t, h) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-B} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \varphi\right)$

при $\Delta t_r < \Delta t$. Приводимые формулы рекомендуется использовать при расчетах структуры искаженных поглощающей плазменной трассой импульсных сигналов с помощью интегралов типа свертки, когда $v_a/a \lesssim 1$ и обычные методы стационарной фазы и пространственно-временной геометрической теории дифракции оказываются неприменимыми.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 3329-77. Деп. от 19 августа 1977 г.

УДК 621.371

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СКАЧКА С ЗАПОЛНЕНИЕМ В ОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ДИСПЕРСНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Н. Боравенков, Б. А. Устинов

Показывается возможность построения единого аналитического аппарата задачи распространения электромагнитных сигналов в поглощающей плазме на базе так называемых точных методов, позволяющих представить точное решение в виде функций

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: Люберцы, 10, Московская область, Октябрьский пр., 403. Производственно-издательский комбинат, ВИНИТИ, ИСЦ.

Ломмеля и рядов Неймана. Приводятся достаточно простые асимптотические формулы, позволяющие производить инженерные расчеты структуры искаженных импульсов, не пользуясь интегрированием быстроосциллирующих функций. Обсуждаются результаты аналитико-численного анализа влияния дисперсий и поглощения на искажение структуры сигналов.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.

*Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 3330-77. Деп. от 19 августа 1977 г.*

УДК 621 372 82

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНЫ E_{01} В КРУГЛОМ ДВУХСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ С РЕЗИСТИВНОЙ ПЛЕНКОЙ

В. А. Калмык, Г. В. Павловская, С. Б. Раевский

На основе решения дисперсионной задачи, составленной методом поверхностного тока, рассматриваются особенности распространения симметричной E -волны в двухслойном круглом экранированном волноводе с резистивной пленкой между слоями. Приводятся дисперсионные характеристики и характеристики затухания этой волны, полученные в результате решения комплексного дисперсионного уравнения. Для различных значений проводимости резистивной пленки рассчитано распределение электромагнитного поля по поперечному сечению волновода.

Установлена связь дисперсионных характеристик и характеристик затухания с распределением поля, дано энергетическое толкование поведения указанных характеристик.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
17 декабря 1976 г.

*Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 3669-77. Деп. 19 сентября 1977 г.*

УДК 538 574.4

СТРОГОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ ИЗ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ ПЕРИОДА

Ю. К. Сиренко

Получено строгое, в виде бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода, а в длинноволновой области явное аналитическое решение задачи дифракции на решетке из идеально проводящих полуплоскостей, которая является ключевой при исследовании электродинамических свойств решеток с кусочно-постоянной структурой периода. На базе этого строгого решения проведен анализ систем линейных алгебраических уравнений первого рода. Доказано, что метод редукции применим к этим системам только при определенном способе усечения.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 ноября 1976 г.

*Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 3670-77. Деп. от 19 сентября 1977 г.*