

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Кузнецов А. М., Чередник В. И. О механизме одного из типов колебаний в магнетроне, работающем в близкритическом режиме	161
Грошков Л. М., Гудков А. А., Кузнецов М. И. Измерение времени формирования электронного облака в импульсных магнетронах в предгенерационный период	168
Столяров С. Н. Влияние размеров переходных слоев на отражение волн от движущихся границ раздела	174
Вилкова Л. П., Нефёдов Е. И. Открытые радиальные резонаторы. Симметричные колебания	181
Коваленко А. Н. Собственные волны микрополосковой линии	188
Белобров А. В., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные и энергетические характеристики дифракционного излучения при движении заряженной нити вблизи металлической ленты	195
Белов Ю. И., Зуйкова Э. М., Пасманик Л. А., Турчин В. И. Об одном способе записи голограмм неоптических полей	205
Агровский Б. С., Гурвич А. С., Каллистратова М. А. Флуктуации интенсивности света при фокусировке в турбулентной среде	212
Музычук О. В. О статистических средних в динамических системах с негауссовыми флуктуациями параметров определенного типа	217
Муратов Р. З., Ефимов С. П. Низкочастотное рассеяние плоской волны на акустически мягком эллипсоиде	224
Насонов Н. Н. Об устойчивости нелинейной однородной прецессии намагниченности	234
Андрианов В. А., Секистов В. Н. О применении комплексной геометрической оптики в задаче радиопросвечивания атмосферы при сверхрефракции	240
Корчагин В. И., Красовицкий В. Б., Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Взаимодействие релятивистских электронов с альфвеновскими волнами в магнитосфере	253
Гершман Б. Н., Каменецкая Г. Х. О влиянии интенсивных радиоволн на появление неоднородностей, связанных с токовой неустойчивостью в ионосферной плазме	261
Моисеенко Л. Н., Шубова Р. С. Изменение эффективной высоты ионосферы в период солнечного затмения	269
Белов В. В., Глазов Г. Н., Креков Г. М. О расчете лазерного эхо-сигнала от облака с учетом многократного рассеяния	275
Караштин А. Н., Сазонтов А. Г. О параметрическом возбуждении нелинейных ионно-звуковых волн в плазме	281
Ваулин Н. А., Каверин Н. С., Коршунов А. И., Панфилов Ю. Д., Тихомиров В. А., Холодилов Н. Н. Радиоспектрограф для исследования тонкой структуры спектра S-компонента излучения Солнца в диапазоне 4,0—7,0 ГГц	289

Краткие сообщения и письма в редакцию

Хрулев В. В., Самойлов Р. А., Федянец Б. К., Зборовский В. С., Ларионова Л. Ф. Модуляционный радиометр на волну 1,35 см	295
Вальнер О. О., Шарыгин Г. С. Экспериментальное наблюдение относительного смещения спектров сигналов 10-сантиметрового диапазона при угловом разнесенном приеме на трассе ДТР	297
Беленький М. С., Макаров А. А., Миронов В. Л., Покасов В. В. Насыщение усредняющего действия приемной апертуры на флуктуации интенсивности отраженной волны	299
Дерюгин Л. Н., Курдюмов О. А., Теричев В. Ф. К вопросу о механизме действия направленных ответвителей на двух линиях с распределенной электромагнитной связью	301

УДК 621.385.6

О МЕХАНИЗМЕ ОДНОГО ИЗ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ В МАГНЕТРОНЕ, РАБОТАЮЩЕМ В БЛИЗКРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

А. М. Кузнецов, В. И. Чередник

В работе приводится теоретический анализ одного из типов колебаний пространственного заряда в магнетронах поверхностной волны. Рассчитывается пространственный период этих колебаний в плоском магнетроне при условии равенства фазовой скорости волны и скорости ведущих центров электронных траекторий. Приводится распределение нормальной компоненты электрического поля на аноде магнетрона, соответствующее этому типу колебаний.

В магнетронах поверхностной волны, которые применяются в миллиметровом диапазоне длин волн, особенно в коротковолновой его части, в качестве рабочего используется режим с магнитным полем, близким к критическому. В этом режиме, как известно [1], пространственный заряд магнетрона может совершать автоколебания даже при отсутствии замедляющей или резонансной системы на поверхности анода. Эти автоколебания имеют характер бегущих волн. Их механизм еще не известен, однако его изучение необходимо для решения вопроса о подавлении паразитных колебаний рабочими колебаниями.

В настоящей работе проводится теоретический анализ одного из типов нерезонансных колебаний пространственного заряда при величине индукции магнитного поля $B = B_{кр}$. Изучаемый тип колебаний по своей природе близок к колебаниям аксиально-симметричного характера, которые могут происходить в этом режиме при перекосе магнитного поля [2]. Как при автоколебаниях, рассмотренных в [2], переменная составляющая плотности заряда в рассматриваемом режиме обусловлена тем, что электроны, отдающие энергию переменному полю, в вершине траектории попадают на анод. Электроны же, которые отбирают энергию у переменного поля на пути от катода к аноду, не попадают на анод и возвращаются к катоду. Таким образом, в межэлектродном пространстве периодически возникают и исчезают потоки электронов, движущихся от анода к катоду. Эти потоки и создают переменные поля, которые вызывают рассортировку электронов по характеру траекторий вблизи поверхности анода.

В настоящей работе в отличие от колебаний, рассмотренных в [2], исследуются колебания, имеющие характер бегущей волны. Участки межэлектродного пространства, на которых траектории электронов состоят только из прямой ветви, периодически чередуются с участками, на которых траектории электронов состоят как из прямой, идущей от катода к аноду ветви, так и из обратной ветви, идущей от анода к катоду. Границы участков перемещаются с некоторой скоростью, которая и является скоростью бегущей волны.

Определим условия, которым должны удовлетворять границы, разделяющие участки пространства взаимодействия с двумя потоками

электронов и одним потоком. Эти условия позволяют в дальнейшем установить связь между пространственным периодом колебаний и расстоянием анод—катод. Учтем прежде всего, что в системе координат, скорость которой равна скорости бегущей волны, эти границы неподвижны и совпадают с обратными ветвями траекторий тех электронов, радиальная скорость которых на поверхности анода проходит через нуль. Таким образом, искомые условия являются условиями, при выполнении которых радиальная скорость электрона на аноде равна нулю.

Для определения этих условий воспользуемся следующими упрощающими предположениями. Будем считать, что напряженность магнитного поля равна критической, ток эмиссии катода значительно меньше тока, ограниченного пространственным зарядом (рис. 1). Последнее условие соответствует режимам работы катода, обычно используемым в магнетронах поверхностной волны. Будем также пренебрегать вторичной эмиссией с катода, что соответствует низковольтным магнетронам поверхностной волны. Будем пренебрегать всеми эффектами, связанными с цилиндрическим характером пространства взаимодействия, и считать магнетрон плоским.

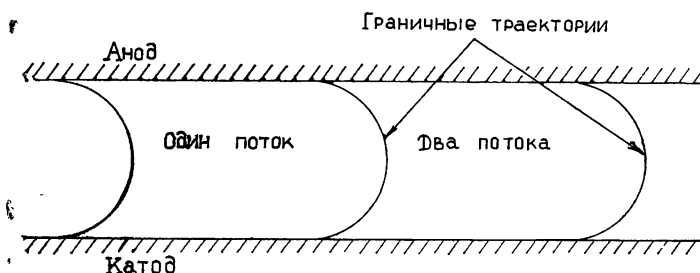


Рис. 1. Межэлектродное пространство магнетрона в критическом режиме.

Уравнения движения электронов имеют в этом случае следующий вид:

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m} \bar{E}_y - \frac{e}{m} \hat{E}_y - \omega_H \dot{x}; \quad (1)$$

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} \hat{E}_x + \omega_H \dot{y}. \quad (2)$$

Здесь \bar{E}_y , \hat{E}_x , \hat{E}_y — соответственно постоянная и переменные компоненты электрического поля, ω_H — циклотронная частота.

Поскольку ток эмиссии меньше тока, ограниченного пространственным зарядом, то $|\hat{E}_x| \ll |\bar{E}_y|$, $|\hat{E}_y| \ll |\bar{E}_y|$, а $\bar{E}_y = -U_a/d$, где U_a — напряжение анода относительно катода, d — расстояние между ними. Это позволяет пренебрегать членами порядка квадрата переменных величин.

Предполагая, что скорость электронов на катоде ($y=0$) равна нулю, проинтегрируем по времени пролета уравнение (2). Тогда уравнение (1) легко получить в виде

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m} E_y - \omega_H \frac{e}{m} \int \hat{E}_x dt - \omega_H^2 y. \quad (3)$$

Здесь $E_y = \bar{E}_y + \hat{E}_y$.

Домножая (3) на \dot{y} и интегрируя по времени, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\dot{y}_a^2}{2} + \omega_H^2 \frac{y_a^2}{2} = -\frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} \dot{y} E_y dt - \frac{\omega_H e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\tau}^t \dot{y}(t) \hat{E}_x(\xi) d\xi dt. \quad (4)$$

Здесь τ — время вылета наблюдаемого электрона с катода, T — время пролета электрона по прямой ветви траектории от катода до анода, y_a , \dot{y}_a — соответственно координата и скорость ее изменения вблизи анода.

Перемена порядка интегрирования в двойном интеграле в (4) и подстановка \dot{y} из уравнения (2) дает уравнение следующего вида:

$$\frac{\dot{y}_a^2}{2} + \omega_H^2 \frac{y_a^2}{2} = -\frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} (\dot{y} E_y + \dot{x} \hat{E}_x) dt - \frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{E}_x dt \dot{x}(\tau + t). \quad (5)$$

Значение скорости переменной x в лабораторной системе координат на аноде $\dot{x}(\tau + T) = 2 \dot{x}_ц$, где $\dot{x}_ц$ — скорость ведущих центров траекторий электронов. Уравнение (5) в системе координат, связанной с волной, имеет вид

$$\frac{\dot{y}_a^2}{2} + \omega_H^2 \frac{y_a^2}{2} = -\frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} (\dot{y} E_y + \dot{x} \hat{E}_x) dt - \frac{e}{m} \dot{x}_ц \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{E}_x dt. \quad (6)$$

Так как анод и катод замкнуты по переменной составляющей, а магнетрон находится в критическом режиме, то

$$-\frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} (\dot{y} E_y + \dot{x} \hat{E}_x) dt = U_a = \omega_H^2 \frac{d^2}{2}$$

и

$$\frac{\dot{y}_a^2}{2} = -\frac{e}{m} \dot{x}_ц \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{E}_x dt. \quad (7)$$

Следовательно, прямые ветви граничных траекторий в движущейся системе координат характеризуются тем, что

$$\int_{\tau}^{\tau+T} \hat{E}_x(\tau, t, x(t, \tau), y(t, \tau)) dt = 0, \quad (8)$$

где $x(t, \tau)$, $y(t, \tau)$ берутся по прямой ветви траектории. Поскольку в движущейся системе координат поле E зависит только от x и y , можно переписать формулу (8) следующим образом:

$$\int_{x_ц}^{x_ц - \frac{d}{2}} \hat{E}_x(x, y) \frac{dx}{\dot{x}} = 0. \quad (9)$$

Учтем, что $y = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2}$. Тогда условие (9) принимает следующий вид:

$$\int_{x_{ц}}^{x_{ц} - \frac{d}{2}} \frac{\hat{E}_x \left(x, \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2} \right) dx}{\sqrt{\frac{d^2}{4} - x^2}} = 0. \quad (10)$$

Граничные траектории характеризуются такими значениями $x_{ц}$, при которых интеграл (10) обращается в нуль. Таким образом, отыскание положения границ областей с двойным и одинарным потоками, т. е. определение пространственного периода колебаний плотности заряда, сводится к решению следующей задачи.

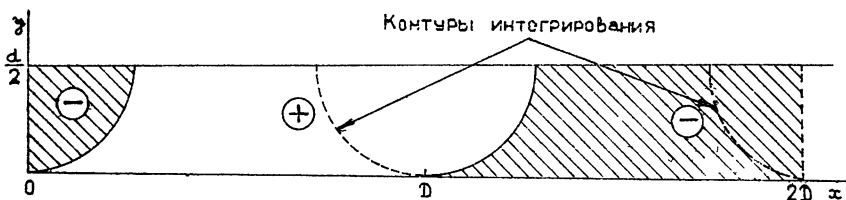


Рис. 2. Рассчитываемая область межэлектродного пространства.

Пусть точки x_i в движущейся системе координат являются координатами центров полуокружностей, разделяющих области с двумя потоками (обозначенные кружком с минусом на рис. 2) и области с одним потоком (обозначенные кружком с плюсом). Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Соответственно в межэлектродном пространстве имеется ряд областей, ограниченных правыми полуокружностями с радиусом $d/2$ и имеющих протяженность $D_i = x_{цi} - x_{цi-1}$, где $i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что при расчете переменных составляющих поля можно считать, что плотность пространственного заряда

$$\rho = \begin{cases} \frac{j}{2y} & \text{в областях с нечетным номером} \\ -\frac{j}{2y} & \text{в областях с четным номером} \end{cases} \quad (11)$$

где $y = \omega_H \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{(d - 2y)^2}{d^2}}$, j — плотность тока эмиссии с катода.

Необходимо найти периодически повторяющуюся последовательность одного, двух или нескольких значений D_i , при которых на левых полуокружностях с центрами в точках x_i и радиусами $d/2$ выполняется условие (10).

Ограничимся случаем, когда все D_i одинаковы и равны D . В этом случае, т. е. при равенстве длин областей с четным и нечетным номером, при выполнении условия (10) для точек x_i с четными номерами оно автоматически выполняется и для точек с нечетными номерами. Следовательно, для отыскания пространственного периода колебаний достаточно найти такую величину D , при которой выполнялось бы равенство (10).

Задача решалась следующим образом. При задании некоторого исходного значения D рассчитывалось распределение потенциала, необходимое для определения поля \hat{E}_x в (10). Оно вычислялось на ЭВМ

методом сеток с применением метода последовательной верхней релаксации для решения разностного аналога уравнения Пуассона при заданном согласно (11) распределении пространственного заряда [3, 4]. Расчетной сеткой покрывалась область $0 \leq x \leq 2D$, $0 \leq y \leq d/2$ (рис. 2). Влияние остальных участков межэлектродного пространства учитывалось с помощью условий симметрии и периодичности. По найденному распределению потенциала вычислялся интеграл (10). Простым перебором устанавливалось значение D , удовлетворяющее условию (10). Соответствующая величина D , найденная таким образом, оказалась равной $1,76d$. Пространственный период системы областей соответственно равен

$$2D = 3,52d.$$

Это значение соответствует экспериментальным результатам [1].

Выше мы не учитывали распределение электронов по начальным скоростям, но, как известно, разброс тангенциальных скоростей на катоде $\Delta \dot{x}$ приводит к разбросу квадрата радиальной скорости в плоскости анода

$$\Delta \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=d} = \Delta \dot{x} \omega_H d.$$

Следовательно, для того, чтобы разброс начальных скоростей электронов не сказывался на результатах решения задачи, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{e}{m} \int_{\tau}^{\tau+T} \hat{E}_x dt \right|_{\max} \gg \sqrt{\Delta \dot{x}^2}. \quad (12)$$

Интеграл из выражения (12), взятый по траектории с центром в середине области с одинарным потоком, рассчитывался на ЭВМ как интеграл вида

$$\int_{\tau}^{\tau+T} E_x dt = \frac{4}{\omega_H d} \int_{d/2}^{D/2-d/2} \frac{\hat{E}_x dx}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{d^2}}} = 2k \int_0^1 \frac{\hat{E}_x^{\text{норм}} dx^{\text{норм}}}{\sqrt{1 - (x^{\text{норм}})^2}}, \quad (13)$$

где

$$x^{\text{норм}} = \frac{2x}{d}, \quad E_x^{\text{норм}} = 20 \frac{\omega_H \epsilon_0}{j} \hat{E}_x, \quad k = \frac{0,05j}{\omega_H^2 \epsilon_0}.$$

При следующих характерных для магнетронов миллиметрового диапазона величинах: $U_a = 10^4$ В, $d = 10^{-3}$ м, $j = 0,1$ А/2, где $j_{3/2} = 2,4 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}}{d^2}$ — плотность тока, ограниченного пространственным зарядом, интеграл в левой части неравенства (12) равен

$$\left| \frac{e}{m} \int \hat{E}_x dt \right|_{\max} = 10,9 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Таким образом, неравенство (12) для траекторий электронов, находящихся в середине области с одинарным потоком, выполняется.

Выше был приведен расчет пространственного периода описываемых колебаний. Зависимость величины поля \hat{E}_y на аноде от координаты x , рассчитанная для случая $D = 3,6d$ в условиях нормировки, аналогичных (13), приведена на рис. 3. Она позволяет при заданных значе-

ниях анодного напряжения и плотности тока эмиссии j рассчитать амплитуду паразитных колебаний и их гармоник, а также величину переменной составляющей x -компоненты тока на поверхности анода.

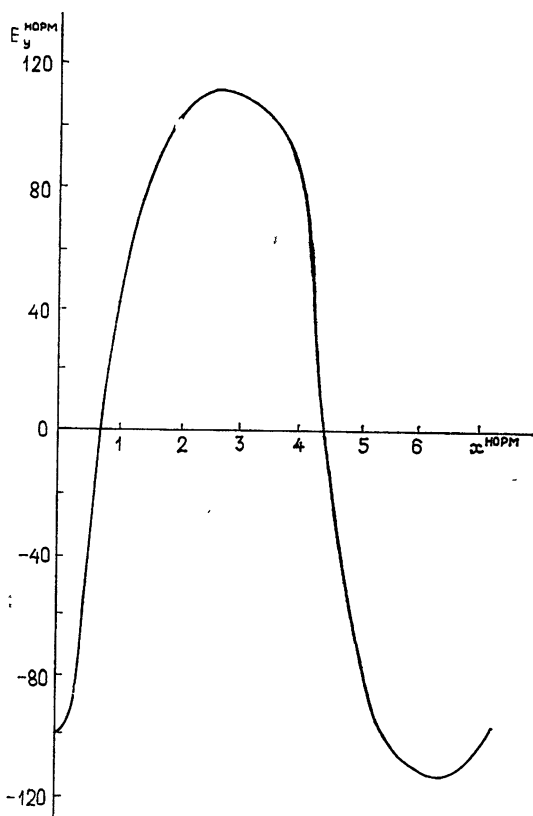


Рис. 3. Зависимость нормированной компоненты переменного поля $\hat{E}_y^{\text{норм}} = \hat{E}_y \frac{\varepsilon_0 \omega H}{0,05 j}$ от нормированной координаты $x^{\text{норм}} = x \frac{2}{d}$.

Расчет постоянной распространения паразитных колебаний негенерирующего магнетрона при фазовой скорости волны, совпадающей со скоростью ведущих центров электронов, приведенный в настоящей работе, дает только одну точку дисперсионной характеристики описываемого типа паразитных колебаний. Пользуясь методом расчета, аналогичным изложенному, можно рассчитать и другие точки дисперсионной характеристики. В отличие от описанного случая, при фазовой скорости отличной от скорости ведущих центров траекторий электронов в системе координат, связанной с волной, траектории, разделяющие области с двойным и одинарным потоком, имеют вид не полуокружностей, а соответствующих отрезков трохойды, подобный же вид имеют и контуры интегрирования, поэтому решение задачи несколько усложняется и выходит за рамки настоящего исследования.

В цилиндрических магнетронах возбуждаются только такие колебания, для которых по длине окружности межэлектродного пространства магнетрона укладывается целое число длин волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, № 4 (1958)
2. М. И. Кузнецов, Радиотехника и электроника, 1, вып. 6 (1956).
3. П. Т. Қирштейн, Г. Г. Кайно, У. Е. Уотерс, Формирование электронных пучков, изд. Мир, М., 1960.
4. В. П. Ильин, Численные методы решения задач электрооптики, изд. Наука, Новосибирск, 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 июля 1976 г.,
после доработки
6 мая 1977 г.

ON THE MECHANISM OF ONE OF THE OSCILLATION TYPES IN
MAGNETRON, OPERATING IN NEAR-CRITICAL REGIME

A. M. Kuznetsov, V. I. Cherednik

In the paper the theoretical analysis of one of the space charge oscillation types in surface wave magnetrons is performed. Space transition of these oscillations in a plane magnetron under the condition when the phase velocity of a wave is equal to that of electron trajectory guide centres is calculated. The distribution of electric field normal component on the magnetron plate corresponding to this type of oscillations is given.

УДК 621.385.6

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В ИМПУЛЬСНЫХ МАГНЕТРОНАХ В ПРЕДГЕНЕРАЦИОННЫЙ ПЕРИОД

Л. М. Грошков, А. А. Гудков, М. И. Кузнецов

Измерено время формирования стационарного электронного облака в импульсном магнетроне в предгенерационном режиме. Результаты измерений сравниваются с расчетом. Получено удовлетворительное соответствие между экспериментальными и расчетными данными. Результаты работы позволяют заключить, что основным механизмом формирования стационарного электронного облака в импульсном магнетроне в предгенерационный период является диффузия электронов к аноду под действием флуктуационных полей пространственного заряда.

Измерение времени формирования стационарного электронного облака магнетрона в предгенерационном режиме представляет интерес для анализа возбуждения импульсных магнетронов. В работе [1] на основании представлений о механизме формирования электронного облака как диффузии электронов от границы регулярной (динамической) части облака к аноду был проведен расчет времени формирования. Предполагалось, что в начальный момент времени $t = t^0$ анодное напряжение U_a равно нулю, при $t > t_0$ $U_a = U_{a, \text{раб}}$. В течение промежутка времени порядка нескольких циклотронных периодов в магнетроне формируется динамическая часть электронного облака. В дальнейшем происходит диффузионное движение электронов от границы динамической части электронного облака к аноду, обусловленное действием флуктуационных полей. При этих предположениях были получены выражения для времени установления стационарного диффузионного процесса в магнетроне. С целью экспериментальной проверки полученных результатов нами было проведено измерение времени формирования стационарного состояния электронного облака в магнетронном диоде в импульсном режиме.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В работе [2] показано, что формирование электронного облака магнетрона после мгновенного включения анодного напряжения сопровождается изменением спектра шумов. Меняется как интенсивность флуктуаций, так и расположение полос наиболее интенсивных флуктуаций в спектре шумов. Таким образом, время установления стационарного состояния может измеряться как время установления интенсивности предгенерационных флуктуационных колебаний. Для таких измерений нами были выбраны колебания типа вращающейся волны. Измерение спектра и интенсивности флуктуаций проводилось при помощи измерительного диска, помещенного в аноде заподлицо с его поверхностью (см., например, [3, 4]). Импульсы флуктуационного тока, наводимого на диске флуктуационными полями, через коаксиальный кабель подавались

на аттенюатор, к выходу которого присоединена детекторная цепочка, согласованная с СВЧ-трактом в полосе частот более 2000 МГц. Низкочастотная нагрузка согласована с детекторной цепочкой в полосе 50—200 МГц. Выходное напряжение этой цепочки подавалось на осциллограф С1-31 с полосой усиления 100 МГц. Развертка осциллографа синхронизована импульсом, поступающим с модулятора магнетрона. Таким образом, можно было измерить смещение начала «полочки» импульса огибающей сигналов, наведенных на измерительном диске флукуационными полями, по отношению к фронту импульса анодного напряжения, т. е. время формирования стационарного состояния.

Измерения были проведены на макете импульсного магнетронного диода, геометрические размеры которого и его электрический режим взяты соответствующими магнетронам 10-сантиметрового диапазона. Схематический чертеж экспериментальной лампы и ее основные размеры показаны на рис. 1. Из расчетов, проведенных в [1], следует, что в магнетронном диоде с пространством взаимодействия и режимом, характерными для магнетронов 10-сантиметрового диапазона, время формирования стационарного электронного облака составляет десятые доли микросекунды. Это позволяет использовать для измерения времени формирования модулятор с обычными временами нарастания импульса анодного напряжения (0,05—0,2 мкс).

На рис. 2 приведены фотографии переднего фронта анодного импульса (а) и фронта импульса огибающей высокочастотных шумов для различных режимов (б, в). Середина горизонтальной шкалы соответствует времени достижения анодным импульсом максимального значения ($U_{a, \text{раб}}$). На фотографиях отчетливо видно запаздывание установления стационарной интенсивности шумов относительно анодного импульса. В соответствии с диффузионной теорией формирования электронного облака [1] это запаздывание возрастает с увеличением отношения $V/V_{\text{кр}}$. Таким образом, имеет место хорошее качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

Измеренные значения времени формирования электронного облака $T_{\text{эксц}}$ при анодных напряжениях U_a , равных 10 и 7 кВ, и различных значениях магнитного поля V приведены в табл. 1. За величину времени формирования $T_{\text{эксц}}$ принято время, прошедшее от момента достижения анодным импульсом максимального значения ($U_{a, \text{раб}}$) до момента, когда импульс огибающей шумов достигает стационарного значения. Такой выбор обусловлен тем, что при $U_a < U_{a, \text{раб}}$ интенсивность флукуаций, как это видно из фотографии рис. 2, остается ничтожно малой, и вследствие этого диффузионное формирование электронного облака, обязанное действию флукуационных полей, во время нарастания импульса практически не происходит.

Как видно из табл. 1, измеренное время формирования лежит в пределах одной-двух десятых долей микросекунды. Эта величина весьма близка к тому минимальному времени нарастания анодного напряжения, при котором возбуждение импульсных магнетронов 10-сантиметрового

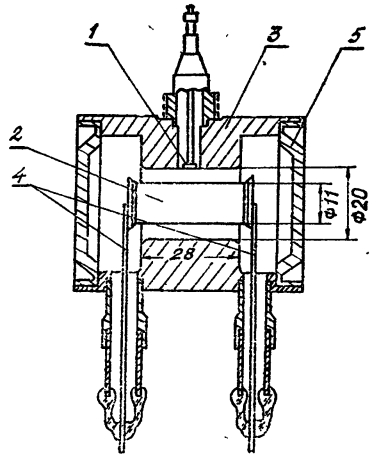


Рис. 1. Конструкция экспериментальной лампы:
1—измерительный диск, 2—катод, 3—анод, 4—катодные выводы, 5—медная крышка.

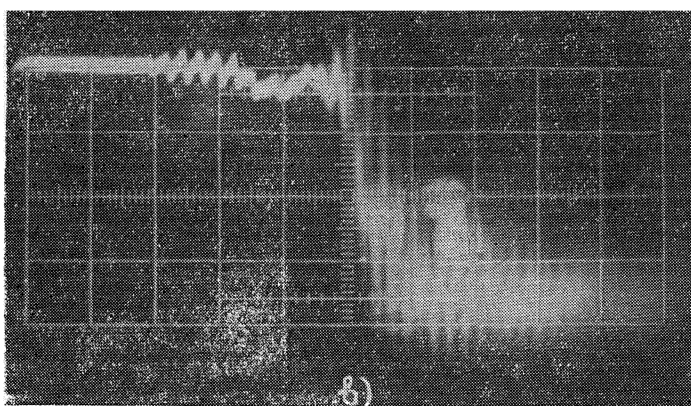
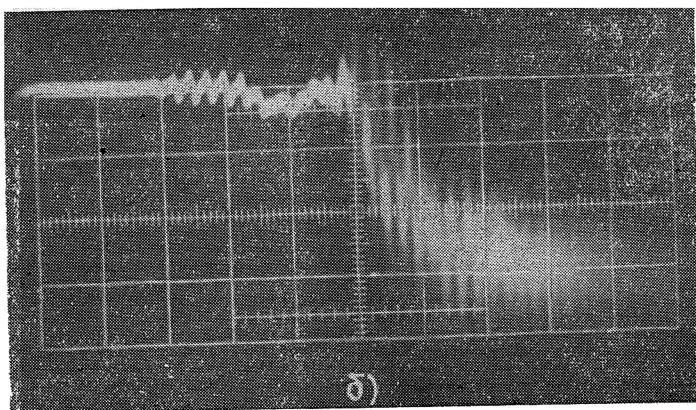
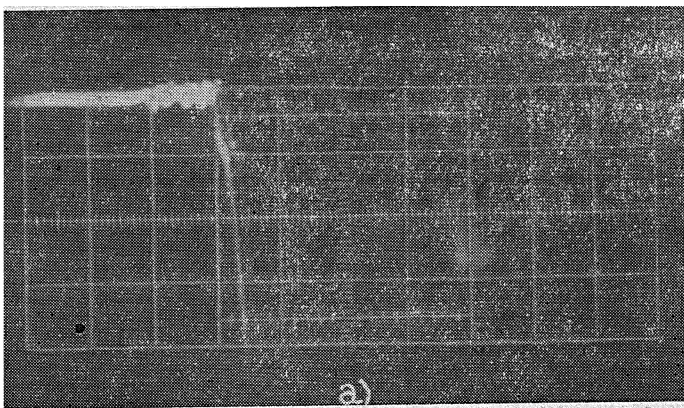


Рис. 2. а) начало переднего фронта анодного импульса; б, в) передний фронт огибающей высокочастотных шумов при $U_a = 7 \text{ кВ}$

$$\text{и } \frac{B}{B_{\text{кр}}} = 1,88, \quad \frac{B}{B_{\text{кр}}} = 1,6.$$

диапазона остается еще стабильным. Этот факт подтверждает предположение, высказанное в работе [1], о том, что минимально допустимое время нарастания импульса анодного напряжения определяется временем, необходимым для формирования стационарного состояния облака пространственного заряда в предгенерационный период. Это состояние, согласно работам [5, 6], близко к статическому синхронному. А оно, как известно, является наиболее благоприятным для возбуждения рабочих колебаний.

Т а б л и ц а 1

	$V/V_{кр}$	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3
$U_a = 10 \text{ кВ}$	$T_{эксп, \text{ мкс}}$		0,18	0,17	0,16	0,14
	$T_{расч, \text{ мкс}}$		0,13	0,12	0,10	0,08
$U_a = 7 \text{ кВ}$	$T_{эксп, \text{ мкс}}$	0,22	0,15	0,13	0,12	0,10
	$T_{расч, \text{ мкс}}$	0,125	0,10	0,12	0,09	0,06

2. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ С РАСЧЕТОМ

Для количественного сопоставления измеренного времени формирования электронного облака с расчетным необходимо измерить в первую очередь интенсивность флуктуационных полей. Строго говоря, следовало бы измерять интенсивность флуктуаций в течение всего времени установления стационарного состояния и проводить расчет времени установления, учитывая, что интенсивность флуктуаций в процессе установления меняется. Однако измерения показывают (рис. 2), что после возникновения флуктуаций их интенсивность очень быстро возрастает до уровня, близкого к стационарному, и в подавляющей части времени установления интенсивности флуктуаций ее изменение сравнительно невелико.

Поэтому без существенной ошибки можно подставить в формулы для вычисления времени формирования электронного облака стационарные значения интенсивности флуктуационных полей. Это приведет к увеличению расчетного времени формирования по сравнению с экспериментальным не более, чем в 1,5—2 раза.

В работе [1] рассматривается упрощенная задача об установлении стационарного состояния пространственного заряда в плоском магнетроне без пространственного заряда и показано, как это решение может быть использовано для расчета времени формирования электронного облака в цилиндрическом диоде с пространственным зарядом. Для расчета времени установления путем решения нестационарного диффузионного уравнения находится концентрация электронов в некоторой точке на расстоянии x от границы регулярной части электронного облака в момент времени t : $n(x, t)$. Время установления стационарного состояния определяется как величина T , при которой

$$\frac{n(x, T)}{n(x, \infty)} = 1 - \frac{1}{e}. \quad (1)$$

В уравнение для n входит коэффициент диффузии электронов, выражение для которого получено в работе [7]:

$$D = \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^2 \bar{E}_0^2}{2\omega_H^2 \tau |\omega_e|^2}, \quad (2)$$

где $\frac{e}{m}$ — удельный заряд электрона, $\omega_H = \frac{e}{m}B$ — циклотронная частота, $\tau = \frac{\omega}{Q}$ — время корреляции флуктуационного поля, ω — средняя частота той полосы частот в спектре шумов магнетрона, в которой сосредоточена подавляющая часть энергии флуктуационного поля, Q — добротность электронного резонатора, каковым является облако пространственного заряда магнетрона, $|\omega_e|^2 = \omega^2 \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]$, $x = 0,9 \div 0,95$, \bar{E}_0^2 — средний квадрат азимутальной составляющей флуктуационного поля на границе регулярной части электронного облака $r_{обл}$. Величина этого поля связана с радиальной составляющей поля на аноде E_{ra} следующим соотношением [4]:

$$E_0 = \frac{E_{ra}}{2} \left[\left(\frac{r_a}{r_{обл}}\right)^{k+1} - \left(\frac{r_a}{r_{обл}}\right)^{-k+1} \right].$$

Здесь k — номер вида колебаний, r_a — радиус анода.

Необходимые для расчета коэффициента диффузии по соотношению (2) величины ω , k , Q и \bar{E}_{ra}^2 были измерены. Для их измерения сигнал, наводимый на измерительном диске магнетронного диода, подается на вход одного из приемников П5-20 и П5-19, которые различаются между собой лишь диапазоном принимаемых частот. С помощью этих приемников перекрываются частотные диапазоны от 250 МГц до 1 ГГц, т. е. практически весь спектр шумов исследуемого магнетрона. С видеовыходов приемников протестированный сигнал подается на импульсный осциллограф С1-20 для визуального наблюдения огибающей шумов. Результаты этих измерений приведены в табл. 2.

Таблица 2

U_a , кВ	B , Гс	$\frac{B}{B_{кр}}$	f , МГц	k	Δf , МГц	Q	$\frac{\sqrt{\bar{E}_{ra}^2}}{E_{ср}}$, %
10	1520	1,6	300	1	15	20	5,2
	1420	1,5	320	1	16	20	5,6
	1320	1,4	665	2	72	9	2,2
	1230	1,3	760	2	42	18	3,6
8	1520	1,8	470	2	41	11,5	3
	1420	1,6	505	2	50	10	2,8
	1320	1,5	270	1	16	17	5,7
	1230	1,4	286	1	21	14	5,3
	1130	1,3	618	2	32	19	3,1
7	1420	1,8	440	2	54	8	3,4
	1320	1,6	475	2	37	13	2,6
	1230	1,5	265	1	12	22	3,4
	1130	1,4	271	1	19	14	2,8
	1030	1,3	672	2	60	11	4,2

Рассчитанные по данным табл. 2, значения времени формирования электронного облака $T_{\text{расч}}$ приведены в нижней строке табл. 1. Как видно из этой таблицы, имеет место удовлетворительное соответствие между рассчитанными и измеренными значениями времени формирования.

Таким образом, результаты эксперимента и расчета позволяют сделать вывод, что основным механизмом формирования стационарного электронного облака в импульсном магнетроне в предгенерационный период является диффузия электронов к аноду под действием флуктуационных полей пространственного заряда. Методика расчета, изложенная в [1], позволяет правильно оценить время формирования предгенерационного электронного облака магнетрона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Грошков, Е. В. Крупин, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 288 (1976).
2. В. А. Бербасов, Электронная техника (серия 1, Электроника СВЧ), вып. 8, 96 (1969).
3. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 290 (1960).
4. Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, С. В. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 763 (1968).
5. М. И. Кузнецов, В. А. Бербасов, И. Н. Железцова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 283 (1972).
6. В. А. Бербасов, Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 944 (1972).
7. М. И. Кузнецов, Электронная техника (серия 1, Электроника СВЧ), вып. 11, 28 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
21 декабря 1976 г.

MEASUREMENTS OF THE TIME OF ELECTRON CLOUD FORMATION IN PULSE MAGNETRONS IN THE PREGENERATION PERIOD

L. M. Groshkov, A. A. Gudkov, M. I. Kuznetsov

The time of the stationary electron cloud formation in a pulse magnetron in pre-generation regime is measured. The results of measurements are compared with the calculation. Satisfactory correspondence between experimental and calculation data has been obtained. The results of the paper enable one to conclude that the principal mechanism of the stationary electron cloud formation in a pulse magnetron in pre-generation period is the electron diffusion towards the plate under the action of space charge fluctuation fields.

УДК 538.574.2

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ НА ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА

С. Н. Столяров

На примере точных формул для переходного слоя Эпштейна и приближенных формул для переходных слоев произвольной формы показано, что эффективная трансформация частот при отражении волн от движущихся границ раздела возможна только до тех пор, пока длина отраженной волны не становится меньше размера переходного слоя.

1. Вопросам преобразования частот при отражении волн от движущихся границ раздела посвящено достаточно большое число работ (см. работы [1-3] и литературу в обзоре [4]). Расчеты в них проводились, как правило, либо для резких границ раздела, когда годятся обобщенные формулы Френеля [5, 6], либо для плавных границ, когда справедливо приближение геометрической оптики (см. [7, 8] и литературу в обзоре [4]). При этом для почти синхронного движения границы раздела и волны, когда их скорости близки друг к другу, оба метода приводят к противоречивым результатам: в приближении геометрической оптики отражение практически отсутствует [7, 9], а формулы Френеля [6] дают очень большое отражение.

В данной работе на некоторых примерах показано, что формулы для коэффициентов отражения на резких границах раздела справедливы только до тех скоростей их движения, при которых длина волны отраженного сигнала остается больше или равной размеру переходного слоя на рассматриваемой границе [10]. При почти синхронном движении границы и отраженной волны, начиная с того момента, когда длина отраженной волны становится меньше размера переходного слоя, отражение становится экспоненциально малым, как это и имеет место в приближении геометрической оптики. Ниже это показано для профиля бегущего параметра в покоящейся среде и для движущейся плазмы переменной концентрации. Первая ситуация может быть реализована, например, в ударных электромагнитных волнах или в усилителях света, а также путем сканирования по нелинейной среде мощного импульса излучения. Второй пример имеет прямое отношение к задаче преобразования частот при встречном взаимодействии излучения и плотных пучков релятивистских электронов.

Проведенный в данной работе расчет основан на методе сопоставления, впервые предложенном в работе [9] и детально разработанном в [11]. Этот метод позволяет свести решение указанных выше задач к решению задач отражения от эквивалентных неподвижных профилей с переменной в пространстве диэлектрической проницаемостью. Применение для полученных общих формул приближенных аналитических выражений для коэффициентов отражения, полученных в работе [12], позволило проследить зависимость этих коэффициентов от скорости перемещения профиля фактически при любой его форме. При этом на модели переходного слоя Эпштейна количественно, а на произвольном профиле качественно показано, что при фиксированной форме профиля

с ростом скорости его перемещения коэффициент отражения плавно переходит от френелевского к геометрооптическому, т. е. от конечного значения к экспоненциально малому.

2. Начнем анализ с профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z + vt)$, бегущего по покоящейся среде с постоянной скоростью $v = c\beta$ в отрицательном направлении оси z навстречу падающей на него волне.

Если в уравнениях Максвелла для векторного потенциала $A(z, t)$ поперечных волн сделать в среде с $\varepsilon = \varepsilon(z + vt)$ замену переменных [11]

$$\zeta = (z + vt), \quad \xi = t + \frac{v}{c^2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varepsilon(x) [1 - \beta^2 \varepsilon(x)]^{-1} dx,$$

то для амплитуды $u(\zeta)$, связанной с $A(\zeta, \xi)$ соотношением

$$A(\zeta, \xi) = u(\zeta) [1 - \beta^2 \varepsilon(\zeta)]^{-1/2} \exp(i\omega'\xi),$$

можно получить обычное одномерное волновое уравнение в эквивалентной стационарной среде с переменной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon'(\zeta)$ вида

$$\varepsilon'(\zeta) = \varepsilon(\zeta) [1 - \beta^2 \varepsilon(\zeta)]^{-2} + \frac{v^2}{2\omega'^2} [1 - \beta^2 \varepsilon(\zeta)]^{-1} \left\{ \frac{d^2 \varepsilon}{d\zeta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta^2 [1 - \beta^2 \varepsilon(\zeta)]^{-1} \left(\frac{d\varepsilon}{d\zeta} \right)^2 \right\}. \quad (1)$$

Пусть величина $\varepsilon(z + vt)$ плавно и монотонно изменяется от одного постоянного значения $\varepsilon_1 = \varepsilon(-\infty)$ при $z \rightarrow -\infty$ до другого $\varepsilon_2 = \varepsilon(+\infty)$ при $z \rightarrow +\infty$. Тогда величина $\varepsilon'(\zeta)$ также постоянна вдали от слоя и $\varepsilon'_{1,2} = \varepsilon_{1,2} [1 - \beta^2 \varepsilon_{1,2}]^{-2}$. Для простоты будем рассматривать случай, когда $(1 - \varepsilon_{1,2} \beta^2) > 0$. При обратном неравенстве рассмотрение аналогично за исключением отсутствия отраженной и появления второй преломленной волны [4, 11]. Промежуточные случаи имеют более сложные решения [13].

Для рассматриваемых переходных слоев можно получить выражения для коэффициентов отражения R' и пропускания $T' = 1 - R'$ в стационарной системе (ζ, ξ) и показать, что они связаны с коэффициентами отражения R и пропускания T в лабораторной системе координат (z, t) соотношениями [11]

$$R = \frac{|\omega_1| |k_1|}{|\omega_0| |k_0|} R', \quad T = \frac{|\omega_2| |k_2|}{|\omega_0| |k_0|} T' = P^2 (1 - R'), \quad (2)$$

где $M = (1 + \beta n_1)/(1 - \beta n_1)$, а $P = (1 + \beta n_1)n_1^{1/2}/(1 + \beta n_2)n_1^{1/2}$. Здесь были использованы следующие соотношения между частотами ω_j и волновыми векторами k_j и k'_j для падающей ($j = 0$), отраженной ($j = 1$) и прошедшей ($j = 2$) волн:

$$\omega' = \omega_0 (1 + \beta n_1) = \omega_1 (1 - \beta n_1) = \omega_2 (1 + \beta n_2), \\ k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega_0 n_1}{c}, \quad k_1 = -\frac{\omega_1 n_1}{c}, \quad |k_1| = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad (3)$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega_2 n_2}{c}, \quad k'_0 = \frac{\omega' n'_1}{c}, \quad k'_1 = -k'_0, \quad k'_2 = \frac{\omega' n'_2}{c},$$

где $n_{1,2}^2 = \varepsilon_{1,2}$, а $(n'_{1,2})^2 = \varepsilon'_{1,2} = \varepsilon_{1,2} (1 - \beta^2 \varepsilon_{1,2})^{-2}$. Они следуют из

инвариантности фаз $\psi_j = (k'_j \zeta - \omega' \xi) = (k_j z - \omega_j t)$ рассматриваемых волн ($j = 0, 1, 2$) в обеих системах координат (ζ, ξ) и (z, t) , для которых переходный слой имеет один и тот же линейный размер L .

Для определения коэффициента отражения R нужно вычислить коэффициент отражения R' в эквивалентной стационарной системе (ζ, ξ) . Мы воспользуемся точной формулой для R' в случае переходного слоя Эпштейна [12, 14], когда $\varepsilon'(\zeta) = \varepsilon'_1 + (\varepsilon'_2 - \varepsilon'_1) \exp(\zeta/L) [1 + \exp(\zeta/L)]^{-1}$,

$$R' = \frac{\text{sh}^2(\pi y_1)}{\text{sh}^2(\pi y_2)}, \quad (4)$$

где $y_1 = \omega' L (n'_1 - n'_2)/c$, $y_2 = \omega' L (n'_1 + n'_2)/c$, $(n'_{1,2})^2 = \varepsilon'_{1,2} = \varepsilon_{1,2} (1 - \beta^2 \varepsilon_{1,2})^{-2}$ а также приближенным аналитическим выражением [12]

$$R' = \text{th}^2 \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{n'(\zeta)} \frac{dn'(\zeta)}{d\zeta} \exp \left\{ 2i \frac{\omega'}{c} \int_{\zeta}^{\zeta} n'(\zeta') d\zeta' \right\} \right| \quad (5)$$

для произвольного профиля $\varepsilon'(\zeta) = [n'(\zeta)]^2$ вида (1). Как показано в работе [12], приближенная формула (5) дает для R' численные значения, отличающиеся не более чем на 20% от точных значений даже в наиболее «неприятном» случае, когда длина волны оказывается порядка толщины переходного слоя L . В остальных случаях совпадение значительно лучше — в интервале (1–5)%, а в предельно противоположных случаях формул Френеля и геометрической оптики совпадение оказывается точным.

3. Обсудим формулы для величины R (2) в этих двух случаях (4) и (5).

Для переходного слоя Эпштейна имеем

$$R(\beta) = M \frac{\text{sh}^2(\pi y_1)}{\text{sh}^2(\pi y_2)}, \quad (6)$$

где

$$M = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1 + \beta n_1}{1 - \beta n_1}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{M} = \lambda_0 \frac{1 - \beta n_1}{1 + \beta n_1},$$

$$y_1 = \frac{\omega_0 L}{c} \frac{n_1 - n_2}{1 - \beta n_1} \frac{1 + \beta^2 n_1 n_2}{1 - \beta^2 n_2^2}, \quad y_2 = \frac{\omega_0 L}{c} \frac{n_1 + n_2}{1 - \beta n_1} \frac{1 - \beta^2 n_1 n_2}{1 - \beta^2 n_2^2}.$$

Если переменный профиль диэлектрической проницаемости покоится, т. е. $\beta = 0$, то $\omega_1 = \omega_0$, а формула для $R(\beta)$ переходит в известное выражение для $R(0) = R(\beta = 0)$ в [14]. Из него видно, что этот коэффициент $R(0)$ максимален для очень длинных по сравнению с толщиной переходного слоя волн и в этом случае равен френелевскому коэффициенту отражения. Действительно, при $\delta_0 = \frac{\pi L}{\lambda_0} (n_1 + n_2) \ll 1$ $R(0) = R_{\max}(0) = R_0 = (n_1 - n_2)^2 / (n_1 + n_2)^2$. С уменьшением длины волны $\lambda_0 = 2\pi \lambda_0$ коэффициент $R(0)$ монотонно убывает. Сначала при $\delta_0 \ll 1$ он убывает квадратично по δ_0 : $R(0) \approx R_0 (1 - \delta_0^2)$. Затем при $\delta_0 \gtrsim 1$, но при

$$\delta_1 = \frac{\pi L |n_1 - n_2|}{\lambda_0} \leq 1 \quad R(0) \approx R_0 \delta_1^2 \exp\left(-\frac{1}{\delta_0}\right).$$

Когда же $\delta_1 \gtrsim 1$, то $R(0) \approx \exp(-1/\delta_0)$. Последнее означает, что для

очень коротких волн λ_0 , много меньших размера переходного слоя L , коэффициент отражения от такого покоящегося переходного слоя становится экспоненциально малым.

Если профиль начинает двигаться ($\beta \neq 0$), то при фиксированном значении $\delta_0 \ll 1$ (при $\delta_0 \gg 1$ отражение экспоненциально мало уже от покоящегося слоя) коэффициент отражения $R(\beta)$ в (6) начинает возрастать от френелевского значения R_0 за счет увеличения частоты ω_1 отраженной волны и соответствующего роста коэффициента M^2 в (6). Это возрастание величины $R(\beta)$ будет происходить до тех пор, пока длина волны $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_0/M$ отраженного сигнала не станет порядка толщины переходного слоя L . Последнее будет иметь место тогда, когда πy_2 в (6) станет порядка единицы и более. При такой скорости, когда $\beta n_1 \approx (1 - \delta_0)$, коэффициент отражения от движущегося профиля достигает максимальной величины R_{\max} . Это максимальное значение равно $R_{\max} = R_0/\delta_0^2$, если $\beta \Delta n \leq \delta_0 \leq 1$, и равно $R_{\max} \approx R_0/(\beta \Delta n)^2$, если $\beta \Delta n \geq \delta_0$. Соответствующее этим двум случаям увеличение частоты $M_{\max} = (\omega_1/\omega_0)_{\max}$ равно δ_0^{-1} или $(\beta \Delta n)^{-1}$. Напомним, что здесь $\Delta n = |n_1 - n_2|$, а $\delta_0 = \pi L(n_1 + n_2)/\bar{\lambda}_0$.

Дальнейшее увеличение скорости перемещения этого переходного слоя, когда $\beta n \geq (1 - \delta_0)$, будет приводить к почти экспоненциальному уменьшению коэффициента отражения $R(\beta)$, ибо в этом случае $R(\beta) \sim \sim \exp\{-\delta_0/(1 - \beta n_1)\}$. Это происходит за счет экспоненциального уменьшения второго сомножителя в (6) при $\pi y_2 \geq 1$. Легко видеть, что в данном случае, т. е. при $(1 - \beta n_1) \leq \delta_0$, длина отраженной волны λ_1 становится заметно меньше толщины переходного слоя L . Это значит, что для нее такой переходный слой становится плавным, хотя для падающей волны слой по-прежнему является резким, ибо $\delta_0 \ll 1$, или $\bar{\lambda}_0 \gg L$.

С помощью формул (5) и (2) покажем теперь, что отмеченные на примере переходного слоя Эпштейна закономерности качественно справедливы при любом законе изменения $\epsilon'(\xi)$ в (1). Действительно, из формул (5), (2) и (1) следует, что с ростом скорости перемещения профиля величина R растет за счет увеличения коэффициента M^2 , т. е. за счет увеличения частоты отраженной волны. При почти синхронном движении слоя и волны, т. е. когда $(1 - \beta n_{1,2}) \ll 1$, первое слагаемое в выражении (1) для $\epsilon'(\xi)$ значительно больше остальных. Тогда интеграл в экспоненте в (5) легко оценивается, а оставшийся интеграл можно приближенно вычислить следующим образом [15]. До тех пор, пока фаза экспоненты под интегралом меньше или порядка единицы, эту экспоненту можно заменять на единицу, и квадрат гиперболического тангенса дает формулы Френеля на резкой границе раздела. Все это имеет место при скоростях $\beta n_1 \leq (1 - \delta_0)$, где $\delta_0 \ll 1$. В обратном случае, когда $\beta n_1 \geq (1 - \delta_0)$, экспонента под интегралом в (5) становится быстроосциллирующей и коэффициент отражения становится экспоненциально малым. Дальнейшее увеличение скорости хотя и ведет к росту коэффициента M^2 в (2), но за счет экспоненциально малого второго сомножителя в формуле (5) для R' коэффициент отражения R экспоненциально уменьшается. Ясно, что максимальное его значение достигается на границе двух этих интервалов, т. е. тогда, когда длина волны отраженного сигнала λ_1 становится порядка размера переходного слоя L , точнее при $\lambda_1 \approx 2\pi^2(n_1 + n_2)L$. Поскольку в эксперименте обычно $\Delta n = |n_1 - n_2| \ll 1$, то при $\Delta n \ll \delta_0 = \pi L(n_1 + n_2)/\bar{\lambda}_0$ максимальное значение коэффициента отражения по порядку величины равно

$$R_{\max} \approx \frac{R_0}{\delta_0^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \left\{ \frac{\lambda_0}{2\pi^2 L(n_1 + n_2)} \right\}^2,$$

т. е. в δ_0^{-2} раз больше френелевского.

Укажем теперь, к каким ограничениям приводит отмеченное выше обстоятельство при возможной технической реализации данного метода преобразования частот. Поскольку должно выполняться условие $\lambda_1 \gtrsim 2\pi^2 L (n_1 + n_2)$, а $L = c\tau_0/n_1$, где τ_0 — время нарастания ε на переднем фронте профиля, то эффективная трансформация будет иметь место в том случае, если фронты нарастания τ_0 удовлетворяют условию

$$\tau_0 \leq \frac{\lambda_1}{2\pi^2 c} \frac{n_1}{n_1 + n_2}. \quad (7)$$

Современные технические возможности позволяют создавать ультракороткие импульсы света в нелинейной активной среде с длительностями порядка 10^{-11} с [16]. Согласно условию (7) это значит, что с их помощью можно осуществлять эффективное преобразование частот только до сантиметрового диапазона длин волн. Перспективы создания устройств с длительностями импульсов порядка 10^{-13} — 10^{-14} с [17] позволяют продвинуться при таком методе преобразования только в субмиллиметровый диапазон.

В заключение этого раздела отметим, что при попутном движении падающей волны и волны параметра в покоящейся среде все указанные выше ограничения на фронты нарастания относятся уже только к падающей волне, ибо, как видно из формул (3), при $\beta = -\beta$ и $n_2 \sim n_1$ длина прошедшей волны λ_2 порядка λ_0 , а длина отраженной волны λ_1 всегда больше λ_0 .

4. Перейдем теперь ко второму примеру — отражению волн от движущегося навстречу им сгустка релятивистских электронов (или плазмы) переменной концентрации.

Пусть из вакуума под углом θ_0 на движущийся вдоль оси z сгусток с переменной концентрацией $N(z + vt)$ падает плоская монохроматическая волна вида $\exp\{i(k_{0z}z + k_{0xz} - \omega_0 t)\}$ с электрическим вектором, перпендикулярным плоскости падения (x, z). Расчет коэффициентов отражения R и пропускания T производится путем сведения данной задачи с помощью преобразования Лоренца

$$z' = \gamma(z + vt), \quad t' = \gamma\left(t + \frac{vz}{c^2}\right), \quad x' = x,$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, к задаче отражения волны частоты ω' от эквивалентной стационарной неоднородной диспергирующей среды с эффективной диэлектрической проницаемостью вида [4, 11]

$$\varepsilon'(z') = [n'(z')]^2 = 1 - \frac{c^2 k_{0xz}^2}{\omega'^2} - \frac{4\pi e^2}{m\omega'^2} N(z'). \quad (8)$$

Коэффициенты отражения R' и пропускания $T' = (1 - R')$ от этого эквивалентного неоднородного слоя связаны с R и T соотношениями (2). Частоты ω и компоненты k_x и k_z волновых векторов соответственно отраженной (ω_1, k_{1x}, k_{1z}) и преломленной (ω_2, k_{2x}, k_{2z}) волн в лабораторной системе координат связаны с частотой ω_0 и компонентами k_{0x} и k_{0z} падающей волны, а также с частотой ω' соотношениями

$$\omega_1 = \omega_0 \gamma^2 (1 + \beta^2 + 2\beta \cos \theta_0), \quad k_{1z} = -\frac{\omega_0}{c} \gamma^2 [(1 + \beta^2) \cos \theta_0 + 2\beta],$$

$$\omega' = \omega_0 \gamma (1 + \beta \cos \theta_0), \quad k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} = \frac{\omega_0}{c} \sin \theta_0, \quad k_{0z} = \frac{\omega_0}{c} \cos \theta_0,$$

$$\omega_2 = \omega_0 \gamma^2 \{ (1 + \beta \cos \theta_0) - \beta [(\cos \theta_0 + \beta)^2 - a_0 (1 - \beta^2)^{3/2}]^{1/2} \}, \quad (9)$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0}{c} \gamma^2 \{ [(\cos \theta_0 + \beta)^2 - a_0 (1 - \beta^2)^{3/2}]^{1/2} - \beta (1 + \beta \cos \theta_0) \},$$

где

$$\gamma^{-2} = (1 - \beta^2), \quad a_0 = \frac{4 \pi e^2}{m_0 \omega_0^2} N_0 = \frac{1}{\pi} r_0 \lambda_0^2 N_0, \quad r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2}$$

и $N_0 = N(+\infty)$ — концентрация электронов в сгустке в лабораторной системе координат при полной энергии электронов $W = mc^2 = m_0 c^2 \gamma$, а θ_0 — угол, под которым волна частоты ω_0 падает на движущийся навстречу ей сгусток.

Как и в предыдущем случае бегущего параметра, для вычисления R' можно использовать модель переходного слоя Эпштейна или приближенную аналитическую формулу (5). Последняя сильно упрощается в ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \gg 1$. Как видно из формул (8) и (9), в этом случае величина $e'(z')$ в (8) близка к единице. Тогда для пучка релятивистских ($\gamma \gg 1$) электронов с концентрацией N_0 получаем следующие приближенные (по степени γ^{-2}) выражения для R и ω_1 :

$$R \approx \left(\frac{r_0 \lambda_0^2 N_0}{\pi} \right)^2 \frac{F(s_0)}{\gamma^2 \cos \theta_0 \cos^4 \frac{\theta_0}{2}}, \quad \omega_1 \approx \omega_0 4 \gamma^2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}. \quad (10)$$

Форм-фактор $F(s_0)$ равен

$$F(s_0) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{d\mu(\xi)}{d\xi} \exp(is_0 \xi) \right|^2, \quad (11)$$

где $s_0 = 8 \pi \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \gamma L / \lambda_0$, $0 \leq \theta_0 < \pi/2$, а $\xi = x/L$ и $\mu(\xi) = \frac{N(\xi)}{N_0}$ — безраз-

мерные координата и концентрация электронов на переднем фронте движущихся сгустков. При монотонном нарастании $N(\xi)$ от нуля (при $\xi = -\infty$) до N_0 (при $\xi = +\infty$) на длине фронта L величина $\mu(\xi)$ изменяется от нуля до единицы. Параметр s_0 при этом указывает на степень нерезкости переднего фронта по отношению к падающей и отраженной волне. Действительно, согласно оценкам в [15] при монотонном изменении $N(\xi)$ $F(s_0) \approx 1$, если $s_0 \leq 1$, и $F(s_0) \approx \exp(-2s_0)$, если $s_0 \geq 1$. Отсюда при $s_0 \leq 1$ величина R в (10) уменьшается пропорционально γ^{-2} , а при $s_0 \geq 1$ — пропорционально $\exp\left(-16 \pi \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \gamma L / \lambda_0\right)$.

Это экспоненциальное «зарезание» отражения волн от сгустков релятивистских электронов отсутствует тогда, когда характерный линейный размер L переходного слоя в лабораторной системе координат удовлетворяет условию $L \leq (\lambda_0 \lambda_1)^{1/2} / 4 \pi \cos \frac{\theta_0}{2}$ или соответствующее время нарастания концентрации электронов $\tau_0 = L/c$ на переднем фронте сгустка удовлетворяет условию

$$\tau_0 \leq \frac{(\lambda_0 \lambda_1)^{1/2}}{4 \pi c \cos \frac{\theta_0}{2}} \quad \text{при} \quad \lambda_1 \approx \frac{\lambda_0}{4 \gamma^2 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}. \quad (12)$$

При нормальном падении ($\theta_0 = 0$) для $\lambda_0 \approx 1$ см и $\lambda_1 \approx 10^{-2}$ см

($\gamma \approx 5$) $\tau_0 \leq 2,5 \cdot 10^{-13}$ с. Если же $\lambda_0 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ и $\lambda_1 \approx 10 \text{ \AA}$ ($\gamma \approx 10$), то требуемый фронт нарастания $\tau_0 \leq 5 \cdot 10^{-18}$ с, что, по-видимому, находится далеко за пределами современных технических возможностей.

Максимальный коэффициент отражения R_{\max} в (10), соответствующий условиям (12), т. е. $\theta_0 = 0$ и $F \approx 1$, можно оценить по формуле

$$R_{\max} \approx 10^{-11} \left(\frac{\lambda_0}{d} \right)^4 \frac{I^2}{\gamma^2},$$

где I — ток пучка диаметром d в амперах, а λ_0 и d измеряются в сантиметрах. Для $I \approx 10^6$ и $d \approx 1$ см (см. [18]) в приведенных выше двух случаях R соответственно равны 0,4 и $2,5 \cdot 10^{-10}$.

Рост величины R с увеличением угла падения θ_0 связан с тем, что релятивистский сгусток «отбрасывает» вперед даже касательно падающие на него волны [19]. Особенность при $\theta_0 = \pi/2$ является следствием модельной постановки задачи, когда передний фронт пучка считается идеально плоским вдоль оси x .

Отмеченные нами ограничения на резкость границ раздела так же, как и эффекты инерционности отклика [20], проявляются тем сильнее, чем больше скорость перемещения границ раздела.

Автор благодарен Б. М. Болотовскому и В. Л. Гинзбургу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Landecker, Phys. Rev., **86**, 852 (1952) (см. перевод в сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959).
2. M. A. Lampert, Phys. Rev., **102**, 299 (1956) (см. перевод там же).
3. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, **29**, 491 (1959).
4. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, 489 (1971).
5. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, 1171 (1961).
6. С. Н. Столяров, ЖТФ, **39**, 1388 (1969).
7. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, 672 (1960).
8. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, 293 (1961).
9. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, 908 (1962).
10. С. Н. Столяров, Письма в ЖТФ, **2**, 880 (1976).
11. Ю. М. Сорокин, Диссертация, ГГУ, Горький, 1973.
12. Л. П. Пресняков, И. И. Собельман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, 57 (1965).
13. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, 1183 (1967).
14. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
15. А. Б. Мигдал, Качественные методы квантовой теории, изд. Наука, М., 1975.
16. Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, УФН, **106**, вып. 1, 47 (1972).
17. E. Yablouovitch, Phys. Rev. A, Gen. Phys., **10**, 1888 (1974) (см. перевод в сб. Экс.-инф. КР, № 13, стр. 16 (1975)).
18. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН, **107**, 327 (1972); Г. Валлис и др., УФН, **113**, 435 (1974).
19. С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, 671 (1962).
20. Л. А. Островский, УФН, **116**, 315 (1975).

Поступила в редакцию
3 октября 1976 г.

THE INFLUENCE OF TRANSITION LAYER SIZES UPON THE WAVE REFLECTION FROM MOVING INTERFACES

S. N. Stolyarov

By the example of accurate formulas for an Epshtein transient layer and approximate formulas for arbitrary form transient layers it is shown that the-effective frequency transformation at wave reflection from moving interfaces is only possible so far as the reflected wavelength does not become less than the transient layer size.

УДК 621.372.413

**ОТКРЫТЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ.
СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ***

Л. П. Вилкова, Е. И. Нефёдов

На основе импедансных граничных условий резонансного типа изучены характеристики добротных колебаний в открытом радиальном резонаторе и открытом цилиндрическом («клинстронном») резонаторе, а также колебания в системах бесконечно большого числа дифракционно связанных резонаторов такого же типа. Построена аналитическая теория добротных колебаний в этих структурах.

ВВЕДЕНИЕ

Открытые осесимметричные резонансные структуры находят широкое применение в радиофизике сантиметрового, миллиметрового, субмиллиметрового и светового диапазонов волн [1-5]. Обзор возможных конструкций осесимметричных открытых структур и некоторых их применений сделан в работах [6] и [3], стр. 116—142. Предлагаемая статья в методологическом отношении является продолжением работы [6].

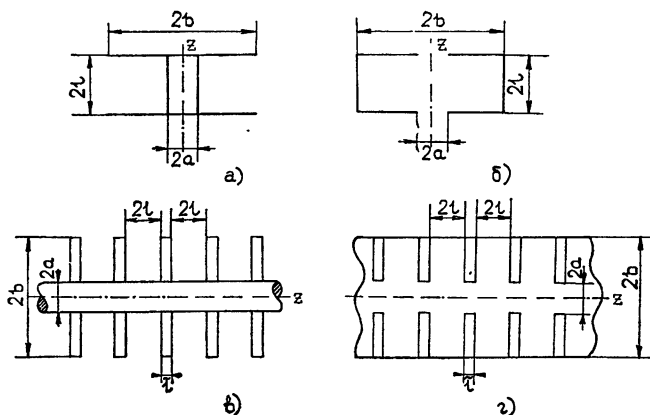


Рис. 1. Открытые радиальные резонансные структуры: а) открытый радиальный резонатор, б) открытый цилиндрический («клинстронный») резонатор, в) бесконечная система дифракционно связанных открытых радиальных резонаторов («стержень с ребрами»), г) бесконечная система дифракционно связанных открытых цилиндрических резонаторов («диафрагмированный волновод»).

Здесь мы рассмотрим открытые резонансные структуры типа открытого радиального (рис. 1 а) и открытого цилиндрического (рис. 1 б) резонаторов, а также колебания в бесконечных дифракционно связанных систе-

* Материалы статьи вошли в доклад Е. И. Нефедова «Открытые коаксиальные резонансные структуры», прочитанный на Всесоюзной научной сессии, посвященной 80-летию изобретения радио (Москва, 4 июня 1975 г.).

мах, продольные сечения которых показаны на рис. 1 в и 1 г. Для открытых радиальных структур (рис. 1 а, в) учтем влияние реактивного импеданса на внутреннем стержне. Исследование всех структур проводится единым методом, и поэтому мы подробно рассмотрим одиночный радиальный резонатор (рис. 1 а), а затем произведем обобщение полученных результатов на остальные структуры.

1. РАДИАЛЬНЫЙ ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

1.1 Пусть диаметр плоских зеркал радиального открытого резонатора (рис. 1 а) равен $2b$, а диаметр внутреннего стержня — $2a$. Зеркала резонатора имеют нулевую толщину* и расположены на расстоянии $2l$ друг от друга. Воспользуемся цилиндрической системой координат, r, φ, z , ось z которой совмещена с осью симметрии структуры. В настоящем сообщении мы ограничимся рассмотрением азимутально симметричных ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$) колебаний и запишем электромагнитное поле в области $r \in (a, b)$, $z \in (-l, l)$ следующим образом, (ср. [3, 6]):

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= \frac{2\omega}{k} Z_C(\omega r) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, & H_\varphi(r, z) &= i \Phi_H(\omega r) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l}, \\ H_z(r, z) &= i \frac{2\omega}{k} Z_D(\omega, r) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, & E_\varphi(r, z) &= \Phi_E(\omega r) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первая строка в формулах (1) относится к значениям $q = 2, 4, \dots$, вторая — к $q = 1, 3, \dots$. Здесь обозначено: $Z_R(\xi) = R J_0(\xi) + R_1 N_0(\xi)$ и R означает либо C , либо D , а R_1 — соответственно C_1 или D_1 ** . При $m = 0$ из формулы (3) в [6] следует, что $\Phi_H(\xi) = -2[C J_1(\xi) + C_1 N_1(\xi)]$, а $\Phi_E(\xi) = -2[D J_1(\xi) + D_1 N_1(\xi)]$. Сравнение функций $\Phi_{E, H}(\xi)$ радиального резонатора (при $m = 0$) с соответствующими радиальными функциями в [6] (формулы (1) и (2)) показывает, что в рассматриваемом случае симметричных колебаний полное поле представимо в виде суммы независимых колебаний электрического E_{0jq} (составляющие E_z и H_φ) и магнитного H_{0jq} (H_z, E_φ) типов (соответственно первая и вторая строчки в формуле (1)).

На свободной границе ($r = b$) поле должно удовлетворять импедансным граничным условиям резонансного типа ([1, 3, 12]):

$$\begin{aligned} \Phi_H &= -\frac{y_H}{\omega} \frac{d \Phi_H}{dr} & (\text{для } E_{0jq}), \\ \Phi_E &= -\frac{y_E}{\omega} \frac{d \Phi_E}{dr} & (\text{для } H_{0jq}), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} y_{E, H} &= y'_{E, H} + i y''_{E, H}, & y'_{E, H} &= \frac{1 - \Delta}{2M} (x' \beta' - x'' \beta''_{E, H}), \\ y''_{E, H} &= \frac{1 - \Delta}{2M} (x'' \beta' + x' \beta''_{E, H}), & x &= \omega b, \quad \Delta = a/b. \end{aligned}$$

* Для структур из дифракционно связанных резонаторов (рис. 1 в, 1 г) от этого ограничения можно избавиться (ср. [7]); см. п. 1.3.

** По возможности здесь сохраняются обозначения, использованные в [6].

Величина $M = (1 - \Delta)kb/\sqrt{\pi q} \gg 1$ является большим параметром задачи. Значения коэффициентов β , являющихся функциями числа q полуволн, укладываемых между зеркалами на расстоянии $2l$, приведены в [2] на стр. 153 и в [3] на стр. 129. На центральном стержне ($r = a$) поле удовлетворяет импедансным граничным условиям Вайнштейна — Сивова (см., например, [3], стр. 31, 168, а также [12]).

$$E_z = i\eta^m H_\varphi \text{ и } E_\varphi = i\eta^e H_z. \quad (3)$$

Импедансы η^m и η^e зависят от соотношения периода гофрированной поверхности и длины волны, профиля поверхности, степени заполнения периода металлом и т. п.

Удовлетворяя для поля (1) граничным условиям (2) и (3), для колебаний H_{0jq}^p и E_{0jq}^p типов* получим соответственно следующие дисперсионные уравнения для радиального открытого резонатора относительно радиального волнового числа $x = x' + ix''$ ($x = \omega b$, $\mu = x\Delta$, $\Delta = a/b$):

$$J_1(\mu)N_1(x) - J_1(x)N_1(\mu) + \frac{y_E}{2} \left[J_1(\mu)\tilde{\Delta}N_1(x) - N_1(\mu)\tilde{\Delta}J_1(x) \right] + \eta^e \frac{x}{kb} [J_1(x)N_0(\mu) - J_0(\mu)N_1(x)] = 0; \quad (4)$$

$$N_0(\mu)J_1(x) - J_0(\mu)N_1(x) + \frac{y_H}{2} [N_0(\mu)\tilde{\Delta}J_1(x) - J_0(\mu)\tilde{\Delta}N_1(x)] + \frac{\eta^m kb}{2x} [J_1(\mu)N_1(x) - J_1(x)N_1(\mu)] = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{\Delta}Z_1(\xi) = Z_0(\xi) - Z_2(\xi), \quad Z_1(\xi) = (J_1(\xi) \text{ или } N_1(\xi)).$$

1.2. Совершенно аналогично получаются дисперсионные уравнения для колебаний симметричного вида в открытом цилиндрическом резонаторе (рис. 1 б). Вновь удовлетворяя для полей (1) граничным условиям резонансного типа (2) при $r = a$ (с очевидным изменением знака) и идеальным граничным условиям при $r = b$, приходим к следующим дисперсионным уравнениям соответственно для H_{0jq}^u - и E_{0jq}^u -колебаний:

$$J_1(\mu)N_1(x) - N_1(\mu)J_1(x) + \frac{y_E}{2} [J_1(x)\tilde{\Delta}N_1(\mu) - N_1(x)\tilde{\Delta}J_1(\mu)] = 0; \quad (6)$$

$$N_0(\mu)J_1(x) - J_0(\mu)N_1(x) + \frac{y_H}{2} [N_0(x)\tilde{\Delta}J_1(\mu) - J_0(x)\tilde{\Delta}N_1(\mu)] = 0. \quad (7)$$

Сравнение уравнений (4) и (6), а также (5) и (7) показывает, что первые члены для колебаний H_{0jq}^p и H_{0jq}^u и, соответственно, E_{0jq}^p и E_{0jq}^u совпадают. При $y_{E,H} \rightarrow 0$ полученные уравнения переходят в обычные дисперсионные уравнения для симметричных H - и E -волн коаксиального волновода [8].

1.3. Дисперсионные уравнения для добротных колебаний в структурах из бесконечно большого числа дифракционно связанных резона-

* Индексы «р» и «ц» у обозначений типов колебаний H и E показывают, к какому резонатору они относятся: к радиальному (рис. 1 а; «р») или к цилиндрическому (рис. 1 б; «ц»).

торов рассмотренных типов по форме совпадают с полученными выше соотношениями (4) — (7). При этом коэффициенты β' , $\beta'_{E,H}$ для бесконечных структур будут отличаться от коэффициентов β для одиночных резонаторов. Необходимые значения коэффициентов β рассчитаны на основе строгой теории

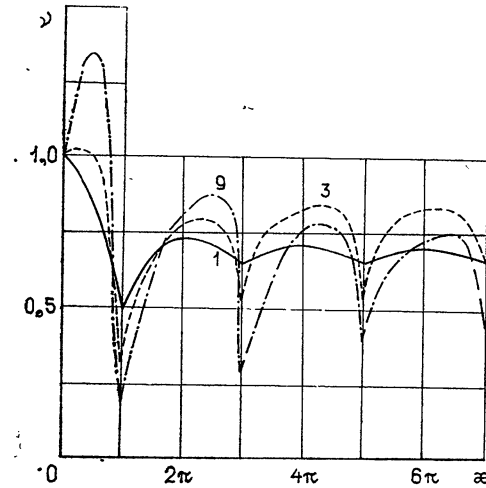


Рис. 2. Зависимость отношения добротностей $\nu = Q(x)/Q(x=0)$ от относительной толщины $x = kL$ в системе дифракционно связанных открытых резонаторов. Цифры у кривых на рисунке обозначают величины параметра q .

о дифракции волноводных волн в бесконечной системе полуплоскостей и приведены в работах [9, 3], стр. 130—132. В случае дифракционно связанной решетки резонаторов коэффициенты β' , $\beta'_{E,H}$ являются функциями не только числа q полуволн, укладывающихся между соседними зеркалами, но и сдвига фаз η между колебаниями в соседних ячейках структуры. При малых q на характеристики добротных колебаний заметное влияние оказывает толщина зеркал. В настоящее время учет конечной толщины зеркал может быть проведен для колебаний H_{0iq} по данным работ [7, 14], в которых методом Галеркина численно рассчитаны зависимости коэффициентов β от толщины зеркал (см. рис. 2) и сдвига фаз η .

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Полученные дисперсионные уравнения (4) — (7) в общем случае нужно решать численно. Особого труда такое исследование не составляет, хотя и приходится оперировать с цилиндрическими функциями комплексной переменной. Вместе с тем практический интерес представляют, в основном, высокодобротные колебания, для которых $x''/x' \ll 1$. Кроме того, следует учесть асимптотический характер задачи, определяемый большим параметром. $M \gg 1$. Отмеченные два обстоятельства позволяют, во-первых, произвести разложение цилиндрических функций в уравнениях (4) — (7) в ряды по малому параметру x'' и, во-вторых, воспользоваться ханкелевой асимптотикой цилиндрических функций уже действительной переменной. Ограничиваясь в разложениях бесселевых функций по x'' линейным членом и удерживая в ханкелевых асимптотиках первый член, а также пренебрегая произведениями малых величин типа $x'' u_{E,H}$ или $x'' \eta^{m,e}$ и т. п., получим, вместо (4) и (5), следующие приближенные системы дисперсионных уравнений (после разделения действительной и мнимой частей):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x'(1 - \Delta) - y'_E + x' \frac{\eta^e}{kb} &= 0 \\ x'' \left(1 - \Delta - \frac{\eta^e}{kb} \right) + y''_E &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (для } H_{0iq}^p \text{)}$$

$$\left. \begin{aligned} x' \operatorname{ctg} x' (1 - \Delta) - x' y'_H + \frac{1}{2} kb \eta^m &= 0 \\ x'' \left(1 - \Delta + \frac{1}{2x'^2} kb \eta^m \right) + y''_H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{для } E_{0jq}^u).$$

Корни уравнений (8) определяются по методу малых возмущений разложением левых частей в первой строке (8) в ряды соответственно в точках πj и $\pi(j-1/2)$, $j=1, 2, 3, \dots$. Результат таков:

для колебаний магнитного типа H_{0jq}^p

$$x' = \frac{\pi j}{1 - \Delta} \left(1 - \frac{\beta' + \rho^e}{2M} \right), \quad x'' = -\frac{\pi j}{1 - \Delta} \frac{\beta''_E}{2M}, \quad \rho^e = \frac{2\eta^e}{\sqrt{\pi q}} \quad (9)$$

и для колебаний электрического типа E_{0jq}^p

$$x' = \frac{\pi(j-1/2)}{1 - \Delta} \left(1 - \frac{\beta' - \rho^m}{2M} \right), \quad x'' = -\frac{\pi(j-1/2)\beta''_H}{2(1 - \Delta)M}, \quad (10)$$

$$\rho^m = \eta^m \left[\frac{M}{\pi(j-1/2)} \right]^2.$$

Точность полученных таким образом значений корней составит величину порядка $1/M^2$ при условии, что $\eta^m \sim 1/M^2$.

В формулах (9) и (10) для приближенных решений уравнений (4) и (5) обобщенные импедансы ρ^e и ρ^m входят асимметрично: уменьшая действительную x' -часть для магнитных колебаний и увеличивая x' для электрических колебаний, что связано с известным «смещением» эффективной отражающей импедансной поверхности в зависимости от характера импеданса.

Полученные в рассматриваемом приближении (априори высокочастотные колебания) формулы для действительной и мнимой частей радиального волнового числа (9) и (10) обладают интересной особенностью: дифракционные потери определяются коэффициентами β''_E, H и колебания H - и E -типов имеют (особенно при малых q) различную радиальную добротность. С ростом q это различие постепенно исчезает и в «оптическом» случае ($q \rightarrow \infty$) наступает поляризационное вырождение (безразличие) электрических и магнитных типов колебаний (ср. [1]). Влияние реактивного импеданса на стержне сказывается на величине действительной части волнового (радиального) числа, определяющего фазовую поправку. При $\eta^e \rightarrow 0$ и $\eta^m \rightarrow 0$ из формул (9), (10) непосредственно следуют значения x' и x'' для H_{0jq}^p - и E_{0jq}^p -колебаний радиального резонатора с идеально проводящим стержнем.

Совершенно аналогично из дисперсионных уравнений (6) и (7) получаются приближенные уравнения для колебаний H_{0jq}^u и E_{0jq}^u цилиндрического открытого резонатора и системы таких резонаторов (рис. 1 б, г):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x'(1 - \Delta) + y'_E &= 0 \\ x''(1 - \Delta) + y''_E &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{для } H_{0jq}^u)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} x'(1 - \Delta) + y'_H &= 0 \\ x''(1 - \Delta) + y''_H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{для } E_{0jq}^u) \quad (11)$$

Отсюда для радиального волнового числа получим

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{j\pi}{1-\Delta} \left(1 - \frac{\beta'}{2M} \right) \\ x'' &= -\frac{j\pi}{1-\Delta} \frac{\beta'_E}{2M} \end{aligned} \right\} \quad (\text{для } H_{0q}^u) \quad (12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\pi(j-1/2)}{1-\Delta} \left(1 + \frac{\beta'}{2M} \right) \\ x'' &= -\frac{\pi(j-1/2)}{1-\Delta} \frac{\beta''_H}{2M} \end{aligned} \right\} \quad (\text{для } E_{0jq}^u).$$

Формулы (11), (12) устроены так же, как и ранее полученные выражения (9) и (10). Приближенные формулы (9) и (10) дают точность порядка 7% для x' и 30% для x'' . Это было установлено с помощью точных решений уравнений (6) и (7), полученных на ЭВМ.

2.2. Резонансные (комплексные) частоты добротных колебаний исследованных осесимметричных структур определяются из следующего условия:

$$2kl = \pi q + 2\pi p, \quad (13)$$

в котором малый параметр p ($|p| \ll 1$) связан с радиальным волновым числом так:

$$p = q \frac{(x')^2 + i2x'x''}{(kb)^2} = p' - ip''. \quad (14)$$

Добротность $Q = q/4 p''$ колебаний определяется по формуле

$$Q_{H,E} \approx \frac{(1-\Delta)^2}{j4\pi \sqrt{\pi q \beta''_{E,H}}} (kb)^3. \quad (15)$$

В рассмотренном приближении легко учесть, кроме того, потери в зеркалах резонаторов (рис. 1 а, б), вызванные либо неидеальностью материала зеркал, либо малой их прозрачностью, например, для целей возбуждения или вывода энергии из резонатора. Если комплексный коэффициент отражения от зеркала есть P ($|P| \approx 1$), то комплексная частота добротных колебаний такого резонатора определяется из уравнения $2kl = \pi(q + 2p + 2\rho)$, в котором комплексная добавка $\rho = p' - ip''$ связана с коэффициентом отражения P соотношением $\rho = (i/2\pi) \ln P$ (ср. [1, 10]).

Проведенное здесь исследование характеристик добротных симметричных колебаний осесимметричных открытых структур на основе импедансных граничных условий резонансного типа позволило построить простые и достаточно точные аналитические выражения для важнейших характеристик резонатора: добротности и фазовой поправки. Соответствующие этим колебаниям поля и токи на зеркалах имеют привычный вид (см., например, [1-3]). Аналогичным образом можно рассмотреть широкий класс электродинамических систем типа открытых резонаторов с диэлектрическими трубками (ср. [1]) или металлическими решетками (ср. [3, 12, 13]), а также целый ряд других открытых структур. Получаемая при таком подходе точность результатов в сочетании с их простотой позволяют надеяться на эффективное применение развитого аппарата в теории различных резонансных структур, в частности, к открытым

резонаторам с неоднородным импедансом на зеркалах, анизотропным импедансом и др.

В заключение нам приятно написать слова благодарности в адрес Б. З. Каченеленбаума, В. И. Таланова и П. Я. Уфимцева, с которыми обсуждались приведенные в работе результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, изд. Наука, М., 1972.
3. Е. П. Курушин, Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах, изд. Наука, М., 1975.
4. В. Г. Андреев, ЖТФ, 34, № 10, 1851 (1966).
5. A. S. Prabhavathi and S. K. Chatterjee, J. Ind. Inst. Sci., 53, № 4, 333 (1971).
6. Е. И. Нефёдов, Квантовая электроника, 1, № 12, 2567 (1974).
7. А. С. Ильинский, О. А. Лебедева, Е. И. Нефёдов, Радиотехника и электроника, 21, № 5, 973 (1976).
8. Л. П. Вилкова, Е. И. Нефёдов, Г. Д. Яковлева, Радиотехника и электроника, 20, № 1, 94 (1975).
9. Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Радиотехника и электроника, 19, № 2, 410 (1974).
10. Е. П. Курушин, Е. И. Нефёдов, ДАН СССР, 217, № 5, 1049 (1974).
11. А. Б. Манёнков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 606 (1971).
12. Е. И. Нефёдов, А. Н. Сивов, Электродинамика периодических структур, изд. Наука, М., 1977.
13. Е. И. Нефёдов, ДАН СССР, 237, № 3, 567 (1977).
14. А. С. Ильинский, Е. И. Нефёдов, Радиотехника и электроника, 22, № 4, 685 (1977).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
26 июля 1976 г.

OPEN RADIAL RESONATORS. SYMMETRICAL OSCILLATIONS

L. P. Vilkova, E. I. Nefyodov

On the basis of impedance resonance type boundary conditions the Q -factor oscillation characteristics in the open radial resonator and open cylindrical („clystron“) resonator, as well as the oscillations in the systems of infinitely large number of the amoe type diffraction coupled resonators are studied. The analytic theory of the Q -factor oscillations in these structures is developed.

УДК 538 56

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

А. Н. Коваленко

Предлагается численный метод расчета собственных волн микрополосковой линии, с учетом реберной особенности поля, основанный на разложении поля на полосковом проводнике по полиномам Чебышева. Получены сравнительно простые дисперсионные уравнения для узких полосков. Установлены границы применимости уравнений первого приближения.

Как известно [1], задача о собственных волнах микрополосковой линии (рис. 1) может быть сведена к решению двух связанных интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно плотностей продольного и поперечного тока на полосковом проводнике. В [1] для

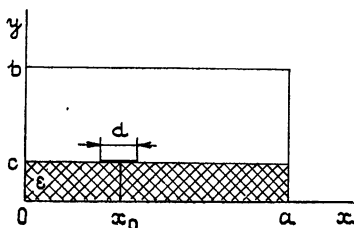


Рис. 1.

решения интегральных уравнений предлагается использовать метод Галеркина. При численной реализации этого метода точность решения и степень сложности алгоритма расчета существенно зависят от выбора системы аппроксимирующих и весовых функций, а также от числа членов, учитываемых в бесконечных рядах для функции Грина. Следует отметить, что эти ряды сходятся медленно, и расчет связан со значительными трудностями вычислительного характера, особенно для узких полосков.

В данной работе предложен численный метод расчета собственных волн (основной и высших) полосковой линии, с учетом реберной особенности поля, основанный на разложении поля на полосковом проводнике по полиномам Чебышева. При этом система уравнений относительно коэффициентов разложения имеет явно выраженный клеточно-диагональный характер. Элементы матрицы коэффициентов системы представлены в виде быстро сходящихся рядов. Получено приближенное решение при небольшой ширине полоскового проводника. Установлены границы применимости этого решения.

1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Обобщая [1] на произвольное расположение полоскового проводника ($0 < x_0 < a$), представим поле собственных волн в виде*

$$E_x = \frac{\partial^2 U^s}{\partial x \partial y} + W_0 \Gamma U^M, \quad E_z = -i \Gamma \frac{\partial U^s}{\partial y} - i W_0 \frac{\partial U^M}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial^2 U^s}{\partial y^2} + \epsilon_{1,2} U^s, \quad (1)$$

$$H_x = \frac{\partial^2 U^M}{\partial x \partial y} - \frac{\epsilon_{1,2}}{W_0} \Gamma U^s, \quad H_z = -i \Gamma \frac{\partial U^M}{\partial y} + i \frac{\epsilon_{1,2}}{W_0} \frac{\partial U^s}{\partial x}, \quad H_y = \frac{\partial^2 U^M}{\partial y^2} + \epsilon_{1,2} U^M,$$

* В (1) опущен множитель $e^{i(\omega t - \Gamma z)}$, и все координаты и элементы длины переведены в безразмерные величины путем умножения на волновое число свободного пространства $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

где

$$\varepsilon_{1,2} = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } 0 \leq y < c \\ 1 & \text{при } c \leq y \leq b \end{cases},$$

ε — относительная диэлектрическая проницаемость подложки; $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ — волновое сопротивление свободного пространства; $U^{3, M}$ — потенциалы Борнгисса:

$$U^3 = -\Gamma W_0 \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dG_m^3}{dy} \left\{ \int_{x'=0}^a \eta_z(x') \sin \alpha_m x' dx' - i \frac{\alpha_m}{\Gamma} \int_{x'=0}^a \eta_x(x') \cos \alpha_m x' dx' \right\} \frac{\sin \alpha_m x}{x_m^2}, \quad (2)$$

$$U^M = -\frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} G_m^M \left\{ i \Gamma \int_{x'=0}^a \eta_x(x') \cos \alpha_m x' dx' + \alpha_m \int_{x'=0}^a \eta_z(x') \sin \alpha_m x' dx' \right\} \frac{\varepsilon_m \cos \alpha_m x}{x_m^2},$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ 2 & \text{при } m \neq 0 \end{cases},$$

$G_m^{3, M}$ — функция Грина обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющая граничным условиям при $y = 0$, $y = b$, $y = c$:

$$G_m^3(y) = \left(\frac{\text{ctg } \beta_{m2}(b-c)}{\beta_{m2}} + \frac{\varepsilon \text{ctg } \beta_{m1}c}{\beta_{m1}} \right)^{-1} \times \\ \times \begin{cases} (\beta_{m1}^2 \sin \beta_{m1}c)^{-1} \sin \beta_{m1}y & (0 \leq y < c) \\ (\beta_{m2}^2 \sin \beta_{m2}(b-c))^{-1} \sin \beta_{m2}(b-y) & (c \leq y \leq b) \end{cases}, \quad (3)$$

$$G_m^M(y) = (\beta_{m2} \text{ctg } \beta_{m2}(b-c) + \beta_{m1} \text{ctg } \beta_{m1}c)^{-1} \begin{cases} (\sin \beta_{m1}c)^{-1} \sin \beta_{m1}y \\ (\sin \beta_{m2}(b-c))^{-1} \sin \beta_{m2}(b-y) \end{cases};$$

Γ — нормированная (к волновому числу k_0) постоянная распространения; $\beta_{m1} = \sqrt{\varepsilon - x_m^2}$, $\beta_{m2} = \sqrt{1 - x_m^2}$, $x_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2$, $\alpha_m = \frac{\pi}{a} m$;

η_z — поверхностная плотность продольного тока; η_x — поверхностная плотность поперечного тока. Представим $\eta_z(x)$ и $\eta_x(x)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \eta_z(x) &= \left(1 - \left(\frac{x-x_0}{d/2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n \left(\frac{x-x_0}{d/2} \right) \\ \eta_x(x) &= -i \frac{d}{2\Gamma} \left(1 - \left(\frac{x-x_0}{d/2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n \left(\frac{x-x_0}{d/2} \right) \end{aligned} \right\} |x-x_0| \leq \frac{d}{2}, \quad (4)$$

$$\text{при } |x-x_0| > \frac{d}{2} \quad \eta_z(x) = \eta_x(x) = 0,$$

$T_n(t)$ — полиномы Чебышева первого рода, $U_n(t)$ — полиномы Чебышева второго рода, $t = \frac{x-x_0}{d/2}$.

Функции $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ и $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ учитывают характер особенности поля на краях полоскового проводника.

Подставив (4) в (2) и потребовав равенства нулю тангенциальных составляющих электрического поля E_z и E_x на полоске, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения a_n и b_n . Опуская подробности промежуточных преобразований, приведем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{kn}^y a_{2n} + B_{kn}^{ny} b_{2n+1} + \tilde{A}_{kn}^{ny} a_{2n+1} + \tilde{B}_{kn}^y b_{2n}) &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (C_{kn}^y a_{2n} + D_{kn}^{ny} b_{2n+1} + \tilde{C}_{kn}^{ny} a_{2n+1} + \tilde{D}_{kn}^y b_{2n}) &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_{kn}^y a_{2n} + \tilde{B}_{kn}^{ny} b_{2n+1} + A_{kn}^{ny} a_{2n+1} + B_{kn}^y b_{2n}) &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{C}_{kn}^y a_{2n} + \tilde{D}_{kn}^{ny} b_{2n+1} + C_{kn}^{ny} a_{2n+1} + D_{kn}^y b_{2n}) &= 0 \end{aligned} \right\} (k=0, 1, 2, \dots); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{kn}^y &= (-1)^{k+n} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 \beta_m^2 G_m^3(c) + \alpha_m^2 G_m^M(c)}{x_m^2} \right) J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ B_{kn}^{ny} &= -(-1)^{k+n} (2n+2) \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{G_m^M(c) - \beta_m^2 G_m^3(c)}{x_m^2} \right) J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+2} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ D_{kn}^{ny} &= (-1)^{k+n} (2k+2)(2n+2) \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_m x_0 \times \\ &\quad \times \left(\frac{\Gamma^2 G_m^M(c) + \alpha_m^2 \beta_m^2 G_m^3(c)}{\Gamma^2 \alpha_m^2 x_m^2} \right) J_{2k+2} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+2} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ A_{kn}^{ny} &= (-1)^{k+n} \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 \beta_m^2 G_m^3(c) + \alpha_m^2 G_m^M(c)}{x_m^2} \right) J_{2k+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ B_{kn}^y &= (-1)^{k+n} (2n+1) \sum_{m=1}^{\infty} \cos^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{G_m^M(c) - \beta_m^2 G_m^3(c)}{x_m^2} \right) J_{2k+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ D_{kn}^y &= (-1)^{k+n} (2k+1)(2n+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \cos^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 G_m^M(c) + \alpha_m^2 \beta_m^2 G_m^3(c)}{\Gamma^2 \alpha_m^2 x_m^2} \right) \times \\ &\quad \times J_{2k+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ \tilde{A}_{kn}^{ny} &= (-1)^{k+n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin 2\alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 \beta_m^2 G_m^3(c) + \alpha_m^2 G_m^M(c)}{x_m^2} \right) \times \\ &\quad \times J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \\ \tilde{B}_{kn}^{ny} &= (-1)^{k+n} (2n+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin 2\alpha_m x_0 \left(\frac{G_m^M(c) - \beta_m^2 G_m^3(c)}{x_m^2} \right) \times \\ &\quad \times J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{kn}^{\text{нч}} = & -(-1)^{k+n}(2k+2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin 2\alpha_m x_0 \left(\frac{G_m^{\text{м}}(c) - \beta_m^2 G_m^{\text{с}}(c)}{x_m^2} \right) \times \\ & \times J_{2k+2} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kn}^{\text{ч}} = & -(-1)^{k+n}(2k+2)(2n+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin 2\alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 G_m^{\text{м}}(c) + \alpha_m^2 \beta_m^2 G_m^{\text{с}}(c)}{\Gamma^2 \alpha_m^2 x_m^2} \right) \times \\ & \times J_{2k+2} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n+1} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right), \end{aligned}$$

$$C_{kn}^{\text{ч}} = B_{nk}^{\text{нч}}, \quad C_{kn}^{\text{нч}} = B_{nk}^{\text{ч}}, \quad \tilde{A}_{kn}^{\text{ч}} = \tilde{A}_{nk}^{\text{нч}}, \quad \tilde{B}_{kn}^{\text{нч}} = \tilde{C}_{nk}^{\text{нч}}, \quad \tilde{C}_{kn}^{\text{ч}} = \tilde{B}_{nk}^{\text{ч}}, \quad \tilde{D}_{kn}^{\text{нч}} = \tilde{D}_{nk}^{\text{ч}},$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя.

Для симметричного случая $\left(x_0 = \frac{a}{2}\right)$ коэффициенты $\tilde{A}_{kn}, \tilde{B}_{kn}, \tilde{C}_{kn}, \tilde{D}_{kn}$ обращаются в нуль, и система (5) распадается на две независимые системы относительно коэффициентов a_{2n}, b_{2n+1} и a_{2n+1}, b_{2n} . Первая соответствует волнам четного вида, вторая — нечетного. Постоянные распространения Γ определяются из условия равенства нулю определителя системы (5).

Точность вычислений зависит от числа учтенных членов в рядах (6). Эти ряды сходятся медленно, что связано с особенностью поля на полосковом проводнике. Сходимость можно существенно улучшить, если к членам, заключенным в круглые скобки, прибавить и вычесть их асимптотические выражения при $m \rightarrow \infty$. Запишем, к примеру, выражение для коэффициента $A_{kn}^{\text{ч}}$:

$$\begin{aligned} A_{kn}^{\text{ч}} = & (-1)^{k+n} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_m x_0 \left(\frac{\Gamma^2 \beta_m^2 G_m^{\text{с}}(c) + \alpha_m^2 G_m^{\text{м}}(c)}{x_m^2} - \frac{-\Gamma^2 + \frac{1}{2}}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \times \\ & \times J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) + (-1)^{k+n} \left(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma^2}{1 + \varepsilon} \right) \frac{a}{\pi} \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \alpha_m x_0 \frac{1}{m} J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Первый ряд в (7) быстро сходится, а второй можно просуммировать (см. Приложение).

При $x_0 = a/2$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} m \frac{1}{m} J_{2k} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) J_{2n} \left(\alpha_m \frac{d}{2} \right) = \quad (8)$$

$$= - \sum_{\nu=1}^{\infty} (2^{2\nu-1} - 1) F_{2k2n}^{\nu} \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{a} \right)^{2\nu} + \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{8a}{\pi d} \text{ при } k = n = 0 \\ \frac{\delta(k-n)}{4(k+n)} \text{ при } k \neq 0 \text{ и } n \neq 0 \end{cases}$$

где

$$F_{2k2n}^{(\nu)} = \begin{cases} -(-1)^{\nu+k+n} \frac{B_{2\nu}}{\nu(2\nu)! 2^{2\nu+1}} \binom{2\nu}{\nu - (k+n)} \binom{2\nu}{\nu - |k-n|} & (\nu \geq k+n) \\ 0 & (\nu < k+n) \end{cases}$$

$B_{2\nu}$ — числа Бернулли $\left(B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots \right)$,

$$\delta(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{при } k=n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}$$

Ряд (8) быстро сходится, и при расчетах достаточно учесть один-два первых членов.

Аналогичные ряды получаются и для остальных коэффициентов системы (5).

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Анализ выражений (6) для элементов матрицы коэффициентов системы (5) показывает, что полученная система уравнений имеет явно выраженный клеточно-диагональный характер. В пределе при $d \rightarrow 0$, $\frac{d}{a} \rightarrow 0$ система (5) распадается на бесконечное число независимых систем второго порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } A_{00}^{\nu} a_0 = 0, \quad \text{б) } \begin{cases} A_{00}^{\nu} a_1 + B_{00}^{\nu} b_0 = 0 \\ C_{00}^{\nu} a_1 + D_{00}^{\nu} b_0 = 0 \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} A_{kk}^{\nu} a_{2k} + B_{k(k-1)}^{\nu} b_{2k-1} = 0 \\ C_{(k-1)k}^{\nu} a_{2k} + D_{(k-1)(k-1)}^{\nu} b_{2k-1} = 0 \end{cases}, \quad \text{г) } \begin{cases} A_{kk}^{\nu} a_{2k+1} + B_{kk}^{\nu} b_{2k} = 0 \\ C_{kk}^{\nu} a_{2k+1} + D_{kk}^{\nu} b_{2k} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Приравнявая нулю детерминанты, получим бесконечную систему несвязанных дисперсионных уравнений относительно Γ^2 :

$$\begin{aligned} \text{а) } A_{00} = 0, \quad \text{б) } \det \begin{pmatrix} A_{00}^{\nu} & B_{00}^{\nu} \\ C_{00}^{\nu} & D_{00}^{\nu} \end{pmatrix} = 0, \\ \text{в) } \det \begin{pmatrix} A_{kk}^{\nu} & B_{k(k-1)}^{\nu} \\ C_{(k-1)k}^{\nu} & D_{(k-1)(k-1)}^{\nu} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{г) } \det \begin{pmatrix} A_{kk}^{\nu} & B_{kk}^{\nu} \\ C_{kk}^{\nu} & D_{kk}^{\nu} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Первый корень уравнения (10 а) $(\Gamma_1^{\nu})^2$ определяет постоянную распространения основной волны. Второй корень $(\Gamma_2^{\nu})^2$ соответствует волне квази- LM_{10} -типа. Первый корень уравнения (10 б) $(\Gamma_1^{\nu})^2$ соответствует волне квази- LM_{01} -типа. Можно показать, что уравнения (10 в), (10 г) не имеют корней в области $\text{Re } \Gamma^2 > \epsilon - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2$. Поэтому анализ и расчет характеристик собственных волн с постоянными распространения, заключенных в пределах $\epsilon - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 < \text{Re } \Gamma^2 < \epsilon$, сводится к решению только двух трансцендентных уравнений (10 а), (10 б), что соответствует учету в разложениях (4) двух гармоник продольного тока и одной гармоники поперечного тока.

Для оценки точности уравнений первого приближения рассматривалось решение системы (5) во втором приближении, которое соответствует учету в разложениях (4) трех гармоник продольного тока и двух гармоник поперечного тока.

Численный анализ позволяет сделать вывод, что уравнения первого приближения для симметричного расположения полоска дают погрешность не более 1% при $d < 0,4$, $\frac{d}{a} < 0,3$ для всех корней, расположенных в области $\varepsilon - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 < \text{Re } \Gamma^2 < \varepsilon$.

Расчет постоянной распространения основной волны для полосковой линии с размерами $a = \frac{7\pi}{15}$, $b = \frac{4\pi}{15}$, $c = \frac{\pi}{15}$, $d = \frac{2\pi}{15}$, $\varepsilon = 9$, $x_0 = \frac{a}{2}$ дает $\Gamma_1^2 = 6,960$ (первое приближение), $\Gamma_1^2 = 6,992$ (второе приближение), $\Gamma_1^2 = 6,999$ (из [2]).

Расчетные соотношения непосредственно обобщаются на открытую полосковую линию. Для этого нужно от бесконечных рядов (6) перейти к интегрированию в бесконечных пределах по переменной α_m и в функции Грина $G_m^{a,m}$ заменить $\text{ctg} \beta_{m2} (b - c)$ на i .

Предложенный метод разложения искомого поля по полиномам Чебышева может быть использован в теории диафрагм и других устройств СВЧ, в которых поле имеет реберную особенность.

Автор признателен В. Никольскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Медленно сходящийся ряд

$$S_{pq}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_p(mx) J_q(mx)$$

суммируется следующим образом.

Используя (6.681 (10)) из [3], представим произведение функций Бесселя в виде

$$J_p(mx) J_q(mx) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{p+q}(2mx \cos \theta) \cos[(p - q)\theta] d\theta. \quad (\text{П.1})$$

Заменим в (П.1) функцию Бесселя интегральным представлением (8.411 (2)) [3]:

$$J_{p+q}(2mx \cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2mx \cos \theta \sin \varphi) \cos[(p + q)\varphi] d\varphi. \quad (\text{П.2})$$

Используя (П.1), (П.2) и учитывая, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos mu = -\ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right),$$

представим выражение для S_{pq} в виде

$$S_{pq} = -\frac{4}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos[(p - q)\theta] \cos[(p + q)\varphi] \ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) d\theta d\varphi, \quad (\text{П.3})$$

где

$$u = 2x \cos \theta \sin \varphi.$$

Воспользовавшись разложением (1.518 (1)) из [3],

$$\ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) = \ln u + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{2^{2\nu-1}}{\nu(2\nu)!} B_{2\nu} \left(\frac{u}{2} \right)^{2\nu},$$

где $B_{2\nu}$ — числа Бернулли, интегрируем (П.3) почленно.

В результате получим

$$S_{pq} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{pq}^{(\nu)} x^{2\nu} + \begin{cases} \ln \frac{2}{x} & \text{при } p = q = 0 \\ \frac{\delta(p-q)}{p+q} & \text{в остальных случаях} \end{cases}, \quad (\text{П.4})$$

где

$$\delta(p-q) = \begin{cases} 1 & \text{при } p = q \\ 0 & \text{при } p \neq q \end{cases},$$

$$F_{pq}^{(\nu)} = \begin{cases} -(-1)^{\nu + \frac{p+q}{2}} \frac{B_{2\nu}}{\nu(2\nu)! 2^{2\nu+1}} \binom{2\nu}{\nu - \frac{p+q}{2}} \binom{2\nu}{\nu - \frac{|p-q|}{2}} & \left(\nu \geq \frac{p+q}{2} \right) \\ 0 & \left(\nu < \frac{p+q}{2} \right) \end{cases},$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}, \quad \binom{m}{0} = 1,$$

$$F_{00}^{(\nu)} = -(-1)^{\nu} \frac{2^{2\nu-1}}{\nu(2\nu)!} B_{2\nu} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{2^{\nu}!} \right]^2.$$

Таким же способом суммируются ряды вида

$$R_{pq}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_p(mx) J_q(mx) \cos my,$$

$$Q_{pq}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_p(mx) J_q(mx) \sin my.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Дерюгин, О. А. Курдюмов, В. Е. Сотин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 118 (1973).
2. J. C. Minor and D. M. Bolle, IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. MTT-19, № 7, 570 (1971).
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Физматгиз, М., 1963.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
30 июля 1976 г.

NATURAL WAVES OF A MICROSTRIP LINE

A. N. Kovalenko

The numerical method is suggested to calculate the microstrip line natural waves with taking into account the edge field peculiarity based on the field expansion on the strip conductor over the Chebyshev polynomials. Comparatively simple dispersion equations have been derived for narrow strips. The applicability limits of the first approximation equations are established.

УДК 538.574.6

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ
ЗАРЯЖЕННОЙ НИТИ ВБЛИЗИ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЛЕНТЫ***А. В. Белобров, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин*

В приближении заданного тока найдены выражения для спектральной плотности мощности излучения заряженной нити при ее движении вблизи идеально проводящей металлической ленты в длинноволновой и коротковолновой областях. Для средней области частот использовано численное решение. Вычислены полные потери энергии заряженной нити. Построены диаграммы направленности отдельных спектральных составляющих поля излучения и найдено распределение силы реакции излучения вдоль траектории движения нити.

Заряженная нить, пролетающая вблизи металлической ленты, вызывает вспышку дифракционного излучения с непрерывным спектром частот. Эффективная ширина спектра, т. е. диапазон частот, в котором излучается основная часть энергии и вне которого интенсивность спектральных составляющих дифракционного излучения мала, определяется скоростью движения заряженной нити и расстоянием от препятствия до ее траектории [1]. Эффективная ширина спектра частот излучения заряженной нити, быстро движущейся в непосредственной близости к металлической ленте, оказывается настолько большой, что в поле излучения наряду со спектральными составляющими с длиной волны, превышающей размер ленты и соизмеримой с ним, входит и коротковолновая часть спектра. В работе [2] исследовано дифракционное излучение модулированного по плотности плоского монохроматического электронного пучка (фактически одной из спектральных составляющих плотности заряженной нити), движущегося вблизи ленты. В [2] определены характеристики дифракционного излучения аналитически в случае, когда частота излучения невелика, и численно для излучения с длиной волны, соизмеримой с шириной ленты.

В данной работе поставлена цель выяснить характер зависимости диаграмм направленности и энергии отдельных спектральных составляющих коротковолновой части дифракционного излучения от скорости нити и ширины ленты, оценить общие потери энергии на излучение и найти распределение реакции излучения вдоль траектории движения нити в приближении заданного тока, т. е. без учета влияния излучения на скорость движения нити.

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы бесконечно тонкая, идеально проводящая металлическая лента шириной $2d$ находилась в плоскости xOy , ее ребра были параллельны оси Ox и начало координат располагалось посередине ленты. Равномерно заряженная с линейной плотностью ρ_0 прямолинейная нить, параллельная оси Ox , движется со скоростью $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_y$ в плоскости $z = a$.

В результате рассеяния электромагнитного поля нити [1] на металлической ленте возникает дифракционное излучение. В силу однородности препятствия и распределения заряда вдоль оси Ox рассеянное поле

содержит те же составляющие, что и собственное поле нити. Искать его удобно в виде суперпозиции отдельных спектральных составляющих, разложенных в интеграл Фурье по плоским волнам:

$$H^p(y, z, t) = \pm e_x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \eta) e^{ik\sqrt{1-\eta^2}|z| + ik_y\eta - i\omega t} d\omega d\eta \quad (z \geq 0). \quad (1)$$

Остальные компоненты рассеянного поля могут быть найдены из уравнений Максвелла. Задача состоит в определении функции $\varphi(\omega, \eta)$ — трансформанты Фурье спектральной составляющей рассеянного поля.

Используя граничные условия, получим парные интегральные уравнения относительно неизвестной функции $\varphi(\omega, \eta)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \eta) e^{ik_y\eta} d\eta = 0 \quad (|y| > d), \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \eta) \sqrt{1-\eta^2} e^{ik_y\eta} d\eta = i \frac{\rho_0 \gamma}{c} e^{-ka\tau} e^{ik_y\beta} \quad (|y| < d),$$

где $k = \frac{|\omega|}{c}$, $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$. Решение интегральных уравнений (2) пол-

ностью определяет поле дифракционного излучения.

Спектральные составляющие E_ω , H_ω собственного поля движущейся нити с точностью до некоторого множителя, не зависящего от ω , представляют собой собственное поле плоского электронного потока, модулированного по плотности с частотой ω . Поэтому на основании результатов, полученных в [2], легко написать приближенное решение парных интегральных уравнений (2) и получить выражение для средней по времени мощности низкочастотной спектральной составляющей дифракционного излучения с единицы длины ленты, вызванного движущейся заряженной нитью,

$$W_\omega = \frac{\pi \rho_0^2 \gamma^2 x^4}{64\omega} e^{-2ka\tau}, \quad (3)$$

где $x = kd$. Формула (3) получена с точностью до величин, пропорциональных $x^6 \ln x$. Мощность излучения пропорциональна x^4 и экспоненциально убывает с увеличением расстояния a . При скорости нити, стремящейся к скорости света, средняя по времени мощность излучения на частоте ω неограниченно убывает. Это связано с тем, что спектральные составляющие собственного поля E_y , ответственные за возбуждение рассеянного поля, стремятся к нулю при $\beta \rightarrow 1$. Полная энергия излучения будет также убывать при приближении скорости нити к скорости света. Это можно объяснить следующим образом. Составляющая E_y собственного поля нити имеет вид

$$E_y = \rho_0 \frac{2\sqrt{1-\beta^2}(y-vt)}{(y-vt)^2 + (1-\beta^2)|z-a|^2}.$$

В начале координат наблюдаются экстремальные значения величины поля $E_y^{(1)} = \rho_0/a$ и $E_y^{(2)} = -\rho_0/a$ соответственно в моменты вре-

мени $t_{1,2} = \mp \frac{a\sqrt{1-\beta^2}}{v}$. Интервал времени, в течение которого поля имеют заметную величину, $\Delta t \sim 2 \frac{a\sqrt{1-\beta^2}}{v}$.

Таким образом, при возрастании скорости v максимальные значения поля E_y не изменяются, а длительность его взаимодействия с металлической лентой убывает, что приводит к уменьшению энергии излучения.

Из выражения (3) следует, что эффективная ширина спектра излучения существенно зависит от расстояния a . С уменьшением этого расстояния ширина спектра дифракционного излучения увеличивается и выходит за границу применимости длинноволнового приближения.

Перейдем к решению парных интегральных уравнений (2) в коротковолновой области. Представим их в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\eta) e^{i\eta t} d\eta = g(t) \quad (|t| \leq 1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(\eta) S(\eta) e^{i\eta t} d\eta = 0 \quad (|t| > 1),$$
(4)

где $S(\eta) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \eta^2}}$, $y(\eta) = \varphi(\omega, \eta) \sqrt{x^2 - \eta^2}$, $g(t) = \frac{i\rho_0\gamma}{c} e^{-kat}$. Для

решения системы интегральных уравнений (4) при $x \gg 1$ используем метод, предложенный в [3, 4].

Представим решение парных интегральных уравнений (4) в виде

$$y(\eta) = y_+(\eta)e^{i\eta} + y_-(\eta)e^{-i\eta} + \tilde{g}(\eta),$$

где функции $y_{\pm}(\eta)$ — аналитические и убывающие на бесконечности соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексного пере-

менного η , функция $\tilde{g}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g(t)e^{i\eta t} dt$ — аналитическая во всей комплексной плоскости [5]. Учитывая возможность представления $S(\eta) =$

$= S_+(\eta)S_-(\eta)$, где функция $S_+(\eta) = \frac{1}{\sqrt{x + \eta}}$ — аналитическая в комплекс-

ной плотности η , разрезанной вдоль луча, идущего из $\eta = -x$ вертикально вниз, а $S_-(\eta) = \frac{1}{\sqrt{x - \eta}}$ — функция аналитическая в плоскости η ,

разрезанной вдоль луча, идущего из $\eta = x$ вертикально вверх, и, следуя методу, предложенному в [3], получим систему интегральных уравнений

$$\Psi_+(x) = g_+(x) + \int_0^{\infty} R(x, t; x) \Psi_-(t) dt; \tag{5}$$

$$\Psi_-(x) = g_-(x) + \int_0^{\infty} R(x, t; x) \Psi_+(t) dt, \tag{6}$$

где

$$g_{\pm}(x) = -\frac{e^{ix(x+1)}}{\pi\sqrt{x}} \int_{-1}^1 g(\pm t) \frac{e^{ixt} \sqrt{t+2}}{x+t+1} dt,$$

$$R(x, t; x) = - \frac{\sqrt{t+2}}{\pi\sqrt{x}(x+t+2)} e^{ix(x+t+2)},$$

а неизвестные функции $\Psi_{\pm}(x)$ связаны с функциями $y_{\pm}(\eta)$ соотношением

$$y_{\pm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Psi_{\pm}(x) e^{\pm i\eta x} dx.$$

Заменяем систему интегральных уравнений (5) и (6) двумя независимыми интегральными уравнениями. Для этого подставим функцию $\Psi_{-}(x)$ из (6) в уравнение (5), а функцию $\Psi_{+}(x)$ из (5) в уравнение (6), в результате получим

$$\Psi_{\pm}(x) = G_{\pm}(x) + \int_0^{\infty} \tilde{R}(x, t; x) \Psi_{\pm}(t) dt, \quad (7)$$

где

$$G_{\pm}(x) = g_{\pm}(x) - \frac{e^{ix(x+2)}}{\pi\sqrt{x}} \int_0^{\infty} g_{\mp}(t) \frac{\sqrt{t+2} e^{ixt}}{x+t+2} dt,$$

$$\tilde{R}(x, t; x) = \frac{\sqrt{t+2} e^{ix(x+t+2)}}{\pi^2\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\eta+2} e^{2ix\eta}}{\sqrt{\eta}(x+\eta+2)(t+\eta+2)} d\eta.$$

Можно показать, что в пространстве $L_1(0, \infty)$ норма интегрального оператора уравнений (7) ограничена:

$$\|\tilde{R}(x, t; x)\| < \frac{1,75\sqrt{2+1/x}}{\pi\sqrt{2x}}.$$

При $x > 0,64$ уравнения могут быть решены методом последовательных приближений.

Здесь мы приведем лишь окончательные асимптотические формулы для $\eta \in \{-1, 1\}$:

$$\varphi(\omega, \eta) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \gamma}{2\pi c} \frac{e^{-ka\gamma}}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{e^{ix(\eta-1/\beta)}}{\eta-1/\beta} \Phi(e^{-i\pi/4} \sqrt{2x(1-\eta)}) \\ \quad (\eta \in [1-\varepsilon, 1]) \\ i \frac{\rho_0}{2\pi c} e^{-ka\gamma} \left[\frac{\sqrt{1-1/\beta}}{\sqrt{1-\eta}} e^{ix(\eta-1/\beta)} - \frac{\sqrt{1+1/\beta}}{\sqrt{1+\eta}} e^{-ix(\eta-1/\beta)} \right] \\ \quad (\eta \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]) \\ - \frac{\rho_0 \gamma}{2\pi c} \frac{e^{-ka\gamma}}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{e^{-ix(\eta-1/\beta)}}{\eta-1/\beta} \Phi(e^{-i\pi/4} \sqrt{2x(1+\eta)}) \\ \quad (\eta \in [-1, -1+\varepsilon]) \end{cases}, \quad (8)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл Френеля, $\varepsilon \approx 0,15$.

Выражение (8) для $\varphi(\omega, \eta)$ получено в предположении, что $x \gg 1$ и $x(1/\beta - 1) \gg 1$.

Определим диаграмму направленности поля спектральной составляющей коротковолновой части дифракционного излучения. Для того, чтобы провести интегрирование в формуле

$$H_{\omega}^p = e_x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, \eta) e^{ikV\sqrt{1-\eta^2}z + ik\eta y} d\eta \quad (z > 0),$$

воспользуемся методом перевала. В результате поле в дальней зоне определяется выражением

$$H_{\omega}^p = e_x \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sin \Theta \varphi(\omega, \cos \Theta) e^{-i(kr - \pi/4)}.$$

Полярный угол Θ отсчитывается от оси Oy . На рис. 1 пунктирной кривой показана диаграмма направленности поля излучения $|H_{x\omega}^p|$,

нормированная на величину $C = \frac{\rho_0}{c\sqrt{\pi kr}} e^{-ka\tau}$. Нормировка выпол-

нена так, чтобы исключить зависимость от параметров ρ_0, c, kr, ka . Сплошной линией показана диаграмма направленности, полученная путем численного решения интегрального уравнения, приведенного в [2], с соответствующей нормировкой. Сопоставление большого числа диаграмм, найденных при различных ширине ленты и скорости нити, позволило сделать вывод о том, что аналитические формулы (8) хорошо описывают поле излучения. Этот анализ позволил также установить границы областей, в которых следует использовать каждое из представлений (8) для $\varphi(\omega, \eta)$, поскольку определить величину ϵ аналитически оказалось затруднительно.

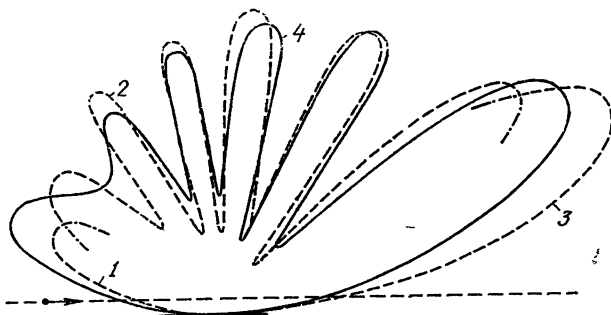


Рис. 1. Диаграмма направленности поля излучения при $\beta = 0,5$, $\kappa = 10$. Кривые 1, 2, 3 построены по формуле (8), кривая 4 — с помощью численного решения.

Количество лепестков в диаграмме направленности зависит от величины параметра κ и с ростом κ увеличивается. Число лепестков и направления, в которых возникают максимумы и минимумы в диаграмме направленности, можно определить с помощью приближения геометрической оптики. В этом приближении излучение сводится к испусканию цилиндрических волн ребрами ленты. Спектральная составляющая собственного электромагнитного поля движущейся заряженной нити с пространственным периодом $\Lambda = \lambda\beta$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$, возбуждает токи на ребре $y = d$ с задержкой по фазе $2\kappa/\beta$ относительно токов, возбуждаемых на ребре $y = -d$. Суммарный фазовый сдвиг лучей, идущих от ребер ленты, с учетом разности хода составляет $2\kappa/\beta - 2\kappa/\cos \Theta$. Поэтому направления, в которых возникают максимумы и минимумы в диаграмме направленности излучения, определяются условиями

$$\cos \Theta_{\max} = 1/\beta - n\pi/x,$$

$$\cos \Theta_{\min} = 1/\beta - m\pi/2x,$$

где m и n — целые числа, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\frac{x}{\pi}(1/\beta - 1) < n < \frac{x}{\pi}(1/\beta + 1),$$

$$\frac{2x}{\pi}(1/\beta - 1) < m < \frac{2x}{\pi}(1/\beta + 1).$$

Количество целых чисел в каждом наборе соответствует числу максимумов и минимумов диаграммы направленности излучения.

Вычислим мощность дифракционного излучения с единицы длины ленты на частоте ω в полупространство $z > 0$. Мощность излучения определим интегрированием вектора Уома—Пойнтинга по поверхности $z = 0$, $-\infty < y < \infty$, $|x| < 0,5$:

$$W_{\omega} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [E_{\omega}^p \cdot H_{\omega}^{p*}] e_z dy.$$

Проводя интегрирование по y , получим формулу

$$W_{\omega} = \frac{c}{2k} \int_{-1}^1 |\varphi(\omega, \eta)|^2 \sqrt{1-\eta^2} d\eta. \quad (9)$$

Применим к интегральным уравнениям (2) равенство Парсеваля. В результате получим соотношение

$$\int_{-1}^1 |\varphi(\omega, \eta)|^2 \sqrt{1-\eta^2} d\eta = \frac{\rho_0 \gamma}{c} e^{-ka\gamma} \operatorname{Im} \varphi(\omega, 1/\beta). \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует

$$W_{\omega} = \frac{\rho_0 \gamma}{2k} e^{-ka\gamma} \operatorname{Im} \varphi(\omega, 1/\beta).$$

Используя приближенное решение интегральных уравнений (7) в виде функции $G_{\pm}(x)$, можно получить формулу для $\varphi(\omega, 1/\beta)$. Мощность дифракционного излучения с единицы длины ленты на частоте ω в полупространство $z > 0$:

$$\begin{aligned} W_{\omega} = & \frac{\rho_0^2}{8\pi\omega\gamma} e^{-2ka\gamma} - \frac{\rho_0^2 \gamma e^{-2ka\gamma}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}\omega\sqrt{x}} \left[\frac{\sin(2x b - \pi/4)}{b^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos(2x g + \pi/4)}{g^{3/2}} \right] - \frac{\rho_0^2 \gamma e^{-2ka\gamma}}{16\sqrt{2}\pi^2\omega x} \left[\frac{\sin 4x}{g\sqrt{b}} + \frac{\cos 4x}{b\sqrt{g}} \right] - \\ & - \frac{\rho_0^2 \gamma e^{-2ka\gamma}}{16\pi^2\omega x^{3/2}} \left[\frac{\cos(2x g - \pi/4)}{g^{5/2}} - \frac{\sin(2x b + \pi/4)}{b^{5/2}} \right] + O(x^{-2}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $b = 1 + 1/\beta$, $g = 1/\beta - 1$. Формула (11) несправедлива при релятивистских скоростях нити. Релятивистский случай требует специального исследования, которое может быть проведено на основе тех же интегральных уравнений (7).

При $\kappa \gg 1$ излучение от ленты представляет, по существу, излучение от двух практически не взаимодействующих ребер, а мощность излучения с единицы длины ленты на частоте ω при $\kappa \gg 1$ равна удвоенной мощности излучения, возникающего при движении заряженной нити вблизи ребра металлической полуплоскости. Поэтому первый член ряда в формуле (11) равен удвоенной мощности излучения, полученной в [1] для случая движения заряженной нити вблизи полуплоскости.

На рис. 2 показана зависимость полной мощности излучения от κ при $\beta = 0,5, a = 0$. Мощность излучения $2W_\omega$ нормирована на усредненную по времени мощность спектральной составляющей собственного электромагнитного поля движущейся заряженной нити, которая переносится в направлении оси Oy на единице длины нити, $W_0 = \frac{\rho_0^2}{8\pi\beta\omega\gamma}$. Кривые 1 и 2 получены по аналитическим формулам (3) и (11), а кривая 3 найдена путем численного решения интегрального уравнения, приведенного в работе [2], с соответствующей нормировкой.

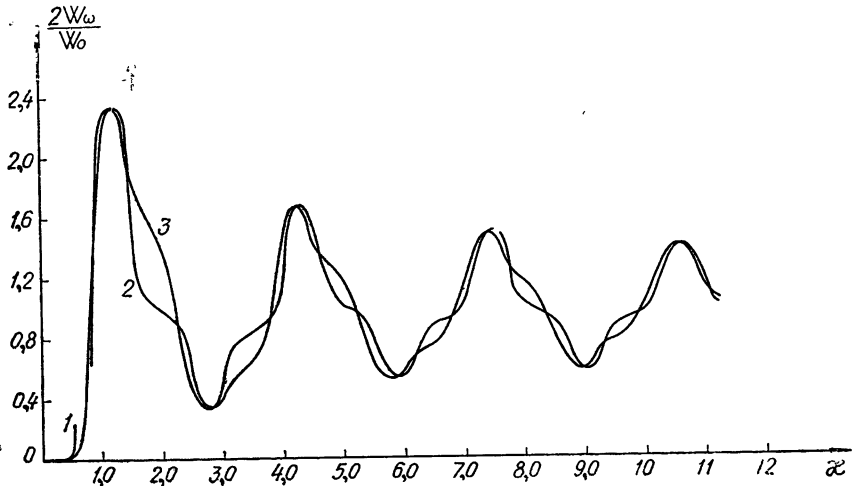


Рис. 2.

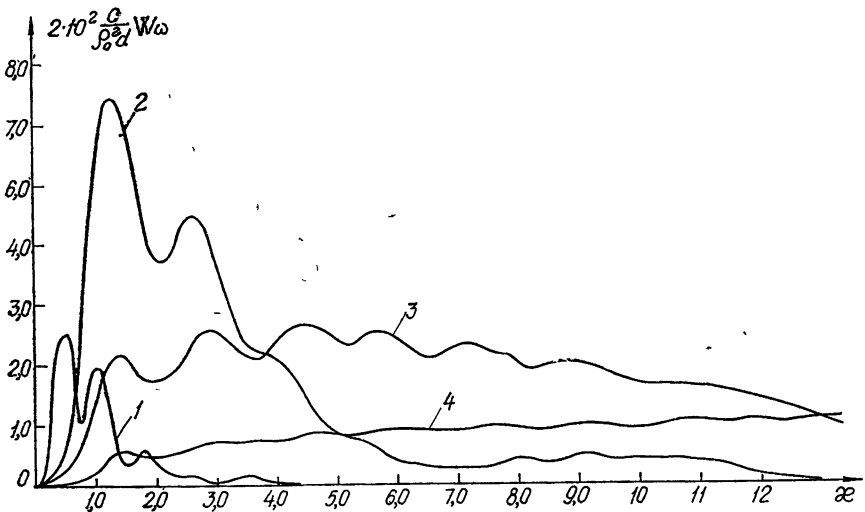


Рис. 3. Кривая 1 соответствует $\beta = 0,2$, 2 — $\beta = 0,7$, 3 — $\beta = 0,9$, 4 — $\beta = 0,975$.

На рис. 3 показана зависимость спектральной плотности мощности излучения от параметра x при $a/d = 0,04$ и различных β . Эффективная ширина спектра увеличивается с ростом β . Это же следует из формул (3), (11). Амплитуда отдельных спектральных составляющих достигает наибольшей величины при средних значениях β . Дифракционное излучение нити, движущейся с большими скоростями ($\beta \rightarrow 1$), имеет широкий, практически равномерный спектр (за исключением области $x < 1$).

Полные потери энергии движущейся заряженной нити на излучение для фиксированного значения β определяются по формуле

$$W = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} W_{\omega} d\omega = \frac{2c}{\pi d} \left[\int_0^{x'} W'_x dx + \int_{x'}^{x''} W''_x dx + \int_{x''}^{\infty} W'''_x dx \right],$$

где W'_x — спектральная плотность мощности излучения в длинноволновой области (3), W''_x — в средней области частот (определяется численно), W'''_x — мощность излучения в коротковолновой области (11), x' , x'' — границы соответствующих областей (эти величины определяются путем численного эксперимента для каждого значения β).

На рис. 4 приведены: кривая 1 — зависимость полных потерь энергии нити W от скорости при $a/d = 0,04$ и плотности заряда, равной заряду 10^3 электронов на единице длины нити, кривая 2 — зависимость кинетической энергии 10^3 электронов от скорости, кривая 3 — зависимость отношения потерь энергии к кинетической энергии от скорости.

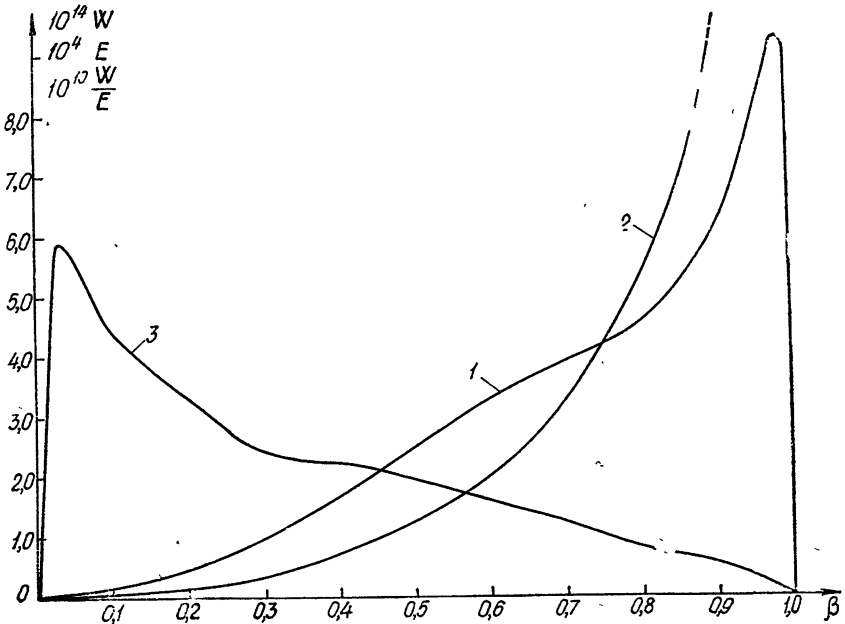


Рис. 4.

Из рис. 4 видно, что потери энергии растут с увеличением β , достигая своего наибольшего значения в ультрарелятивистской области скоростей. При $\beta = 1$, в соответствии со сказанным ранее, потери на излучение равны нулю. Потери энергии при $\beta \rightarrow 1$ посчитаны численно с большей погрешностью, чем для остального диапазона скоростей. Отношение потерь энергии на излучение к кинетической энергии при:

нимает наибольшее значение при малых скоростях нити и с увеличением скорости стремится к нулю.

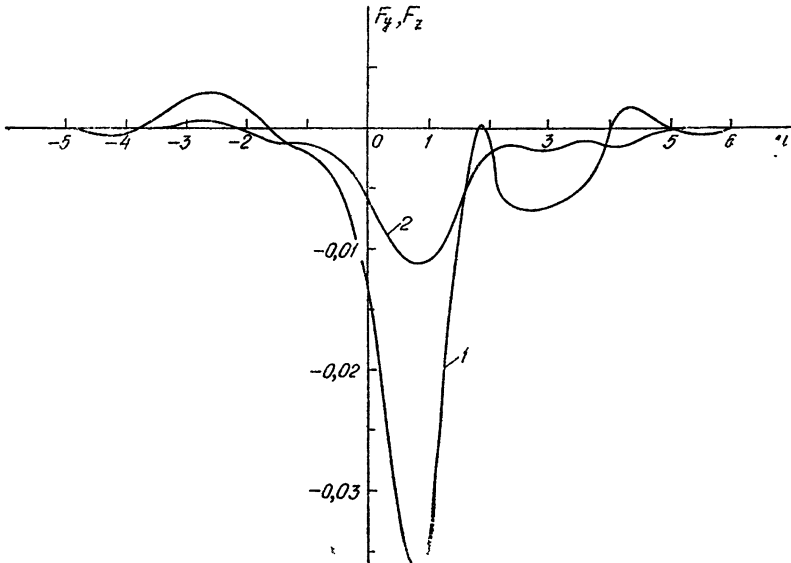


Рис. 5.

Вычислим силу, с которой поле дифракционного излучения действует на единицу длины нити. Поле дифракционного излучения в зависимости от времени и координат можно найти, выполнив интегрирование по η и ω в (1). Заменяя бесконечный интервал интегрирования конечным от $-A$ до A и пользуясь формулой дискретного преобразования Фурье, получим выражение, удобное для вычисления зависимости рассеянного поля от времени:

$$H_x^p(y, z, \tau) = \frac{\rho_0}{\pi d} \frac{A}{N} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} A_n e^{-2\pi i n \tau}, \quad (12)$$

где

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\frac{2An}{N}, \eta \right) e^{i \left(\frac{2An}{N} \sqrt{1-\eta^2} \frac{z}{d} + i \frac{2An}{N} \eta \frac{y}{d} \right)} d\eta,$$

$$A_{-n} = A_n^*, \quad \tau = \frac{Act}{\pi d N},$$

E_y^p -компонента поля дифракционного излучения может быть найдена по формуле (12) с коэффициентами A_n следующего вида:

$$A_n = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\frac{2An}{N}, \eta \right) \sqrt{1-\eta^2} e^{i \left(\frac{2An}{N} \sqrt{1-\eta^2} \frac{z}{d} + i \frac{2An}{N} \eta \frac{y}{d} \right)} d\eta.$$

Параметр A , который определяет интервал интегрирования по частоте, выбирался так, чтобы неучтенными оставались лишь спектральные составляющие поля излучения с амплитудой на 2—3 порядка меньше максимальной.

Для вычисления силы реакции поле излучения определялось на траектории движения нити в точках $y = vt$,

На рис. 5 показано распределение силы реакции вдоль траектории движения нити при $\beta = 0,4$, $a = 2$, $d = 4$, $\rho_0 = 1$. На движущуюся вблизи ленты нить действует «тормозящая» сила $F_y = \rho_0 E_y^p$ (кривая 1) и сила $F_z = -\rho_0 \beta H_x^p$ (кривая 2), которая прижимает нить к ленте. Из рис. 5 видно, что максимальные значения сил F_y и F_z приходятся на одну и ту же точку траектории движения нити. Анализ других случаев ($\beta = 0,6$, $\beta = 0,8$) показал, что с увеличением скорости нити экстремальные значения сил F_y и F_z по модулю увеличиваются, а кривые распределения сил вдоль траектории движения нити становятся более изрезанными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ, 34, вып. 1, 11 (1964).
2. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, А. Ю. Титаренко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 149 (1976).
3. В. Г. Сологуб, Журн. выч. математ. и математ. физ., 11, № 4, 837 (1971).
4. А. В. Луговой, В. Г. Сологуб, Препринт № 28 ИРЭ АН УССР, Харьков, 1973.
5. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 сентября 1976 г

SPECTRAL AND ENERGETIC CHARACTERISTICS OF THE DIFFRACTION RADIATION FOR A CHARGED FILAMENT MOVING NEAR A METAL STRIP

A. V. Belobrov, L. N. Litvinenko, S. L. Prosvirnin

In the given current approximation the expressions are found for the spectral power density of emission from the charged filament moving near a perfectly conducting metal strip in long-wave and short-wave regions. For the mean frequency region, the numerical solution is used. Full energy losses of the charged filament are calculated. The directivity diagrams of some emission field spectral components have been built and the emission reaction force distribution along the motion trajectory of the filament has been found.

621 396.677

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАПИСИ ГОЛОГРАММ НЕОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Ю. И. Белов, Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин

Предлагается штриховой способ записи голограмм неоптических полей. Рассматриваются особенности предложенного способа записи, приводится описание установки для записи СВЧ-голограмм ближнего поля антенн и результаты обработки полученных голограмм.

Как известно, для обработки голограмм неоптических полей (СВЧ или акустических) наряду с цифровыми широко используются оптические методы [1]; при этом, естественно, требуется представление исходной информации в виде оптического транспаранта. В большинстве случаев неоптические голограммы получают путем последовательного сканирования пространственного распределения поля [1]; в этом случае непосредственная запись сигнала со сканера на фотопленку в виде функции плотности почернения связана с рядом трудностей. Основной из них является зависимость плотности почернения от времени экспозиции, что приводит либо к жестким требованиям на равномерность перемещения сканера при непрерывном движении, либо к необходимости сканирования в старт-стопном режиме.

Для устранения указанной трудности может быть предложена штриховая форма записи голограммы на фототранспаранте*. Суть ее заключается в том, что записываемая функция $F(x)$ представляется на транспаранте, например, в виде двух полос переменной ширины, расстояние между которыми пропорционально текущему значению $F(x)$ (см. рис. 1). При последовательном сканировании пространственного распределения поля голограмма записывается в виде последовательности таких строк, расположенных одна под другой; каждая строка представляет собой соответствующее сечение двумерной функции. Достоинство такого способа записи состоит в том, что запись содержит лишь две градации почернения — 0 и 1. В этом случае устройство, производящее запись на фототранспаранте, может быть непосредственно синхронизовано с перемещением сканера, причем к равномерности его перемещения особых требований уже не предъявляется. Ниже будут рассмотрены особенности голограмм, записанных в штриховом виде, приведено описание установки для записи СВЧ-голограммы ближнего поля антенны и даны результаты обработки голограмм, полученных на этой установке.

1. Очевидно, что результаты обработки двумерных голограмм, записанных в штриховом виде и в виде функции плотности почернения фотопленки, будут в общем случае различаться между собой**.

* Такой принцип записи используется, как известно, в оптических спектр-анализаторах в случае обработки одномерных функций [2], а также в киноаппаратуре при записи дорожки звукового сопровождения фильма.

** В одномерном случае представления функции на фотоматериале в штриховом и плотностном виде эквивалентны.

Рассмотрим вначале случай, когда требуется получить фурье-спектр функции $F(x, y)$, записанной в виде штриховой голограммы. Результат обработки такой голограммы на оптическом спектр-анализаторе, $S_{\text{ш}}(\omega_1, \omega_2)$, может быть представлен в следующем виде:

$$S_{\text{ш}}(\omega_1, \omega_2) = \int \sum_n \frac{\sin(\omega_2 \Delta y_F F(x, y_n))}{\omega_2} \exp[i(\omega_1 x + \omega_2 y_n)] dx, \quad (1)$$

где ω_1, ω_2 — частоты, соответствующие координатам x и y на фототранспаранте, ориентированным вдоль и поперек строк; Δy_F — размер на фототранспаранте, соответствующий максимальному значению записанной функции (см. рис. 1) (при этом в выражении (1) полагается $F(x, y) \leq 1$), $y_n = n\Delta y$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), Δy — расстояние между строками записи. В отличие от истинного фурье-спектра $S(\omega_1, \omega_2)$ функции $F(x, y)^*$, получаемого при плотностной записи

$$S(\omega_1, \omega_2) = \int \sum_n F(x, y_n) \exp[i(\omega_1 x + \omega_2 y_n)] dx,$$

функция $S_{\text{ш}}(\omega_1, \omega_2)$ является нелинейным функционалом от F . Степень отличия $S_{\text{ш}}$ от S определяется при этом величиной параметра $\omega_2 \Delta y_F$ (при $\omega_2 = 0$ сечения $S(\omega_1, 0)$ и $S_{\text{ш}}(\omega_1, 0)$ совпадают). Поскольку голограмма $F(x, y)$ представляет собой запись комплексной функции $f(x, y)$ на частоте пространственной модуляции Ω :

$$F = F_0 + \frac{1}{2} f e^{-i\Omega x} + \frac{1}{2} f^* e^{i\Omega x}$$

(F_0 — постоянная составляющая), наибольший интерес представляют значения спектра в области частот $\omega_1 \approx \Omega, \omega_2 \approx 0$. Чтобы рассмотреть поведение $S_{\text{ш}}(\omega_1, \omega_2)$ в этой частотной области, (1) удобно представить в виде разложения по гармоникам частоты пространственной модуляции:

$$S_{\text{ш}}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{\text{ш}}^{(m)}(\omega_1 + m\Omega, \omega_2),$$

где

$$S_{\text{ш}}^{(m)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sin\left(\omega_2 \Delta y_F F_0 + m \frac{\pi}{2}\right)}{\omega_2} \times$$

$$\times \int \sum_n J_m(\omega_2 \Delta y_F |f|) \exp[im\varphi + i(\omega_1 x + \omega_2 y_n)] dx,$$

$\varphi(x, y)$ — фаза $f(x, y)$, $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка. Максимальный вклад в величину $S_{\text{ш}}$ в интересующей нас области частот ($\omega_1 \approx \Omega, \omega_2 \approx 0$) дает слагаемое $S_{\text{ш}}^{(1)}(\omega_1, \omega_2)$, которое, в свою очередь, может быть представлено в виде

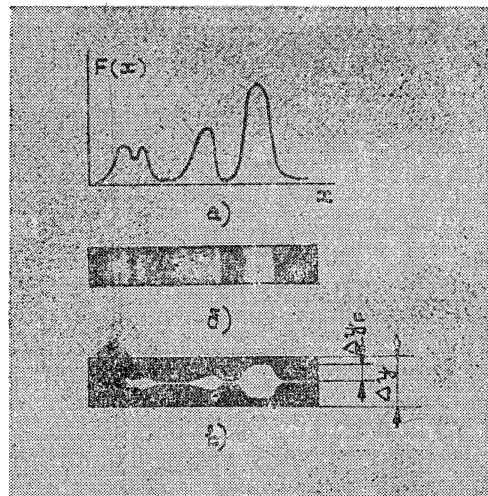


Рис. 1. Запись функции $F(x)$ в плотностном и штриховом виде: а) график $F(x)$, б) запись $F(x)$ в виде функции плотности почернения, в) запись $F(x)$ в штриховом виде.

* Для удобства сравнения $S_{\text{ш}}$ и S мы будем рассматривать фурье-спектр функции, записанной непрерывно по x и дискретно по y .

$$S_m(\omega_1 - \Omega, \omega_2) \approx S_m^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \Delta y_F \cos(\omega_2 \Delta y_F F_0) \left[S_f^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+1)!} \left(\frac{\omega_2 \Delta y_F}{2} \right)^{2l} S_f^{(l)} \right], \quad (2)$$

где

$$S_f^{(l)}(\omega_1, \omega_2) = \int \sum_n |f|^{2l} f \exp[i(\omega_1 x + \omega_2 y_n)] dx,$$

$S_f^{(0)}$ — фурье-спектр анализируемой функции f . Как следует из (2), искажение спектра штриховой голограммы в области частот $\omega_1 \approx \Omega$, $\omega_2 \approx 0$ заключается, во-первых, в появлении огибающей спектра $\cos(\omega_2 \Delta y_F F_0)$ и, во-вторых, в добавлении к спектру функции f слагаемых, представляющих собой спектры функций $|f|^{2l} f$. Считая допустимой 20-процентную ошибку в определении спектра и полагая $f \leq F_0 \approx 1/2$, а также $S_f^{(0)} \approx S_f^{(l)}$ в интересующей нас области частот, получаем следующее ограничение на интервал частот ω_2 :

$$\omega_2 \Delta y_F \leq 1,3. \quad (3)$$

Отсюда, исходя из интересующего нас интервала частот ω_2 , можно выбрать максимально допустимый размер записи голограммы на фототранспаранте.

Отметим далее, что размер интервала частот ω_2 ограничен также из-за дискретности записи по координате y :

$$\omega_2 \leq \frac{c \pi}{\Delta y},$$

где константа c ($c < 1$) зависит от величины допустимой погрешности определения спектра, обусловленной дискретностью записи. Разумно потребовать, чтобы частотные области, в которых слабо сказываются ошибки из-за дискретности и из-за штрихового характера записи, совпали. Это приводит к условию

$$\frac{\Delta y_F}{\Delta y} \leq \frac{0,40}{c}. \quad (4)$$

Поскольку в любом случае $\frac{\Delta y_F}{\Delta y} \leq 0,5$ (см. рис. 1), соотношение (4)

показывает, что практически нет необходимости искусственно ограничивать размер записи голограммы на фототранспаранте; размер записи Δy_F может быть взят примерно равным половине расстояния между строками.

Аналогично может быть рассмотрено преобразование Френеля штриховой голограммы. Результат обработки штриховой голограммы на аналоговом корреляторе, $R_m(x, y)$, может быть представлен в виде

$$R_m(x, y) = \int \sum_n F(x', y_n) \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} - i(a \Delta y_F^2) F^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) + \dots \right] \times \exp\{ia[(x' - x)^2 + (y_n - y)^2]\} dx', \quad (5)$$

где $\alpha = a(y_n - y)\Delta y_F F$. Если размер записи много меньше зоны Френеля,

$$a \Delta y_F^2 \ll 1,$$

то, как следует из (5), характер искажений, вызванных штриховым спо-

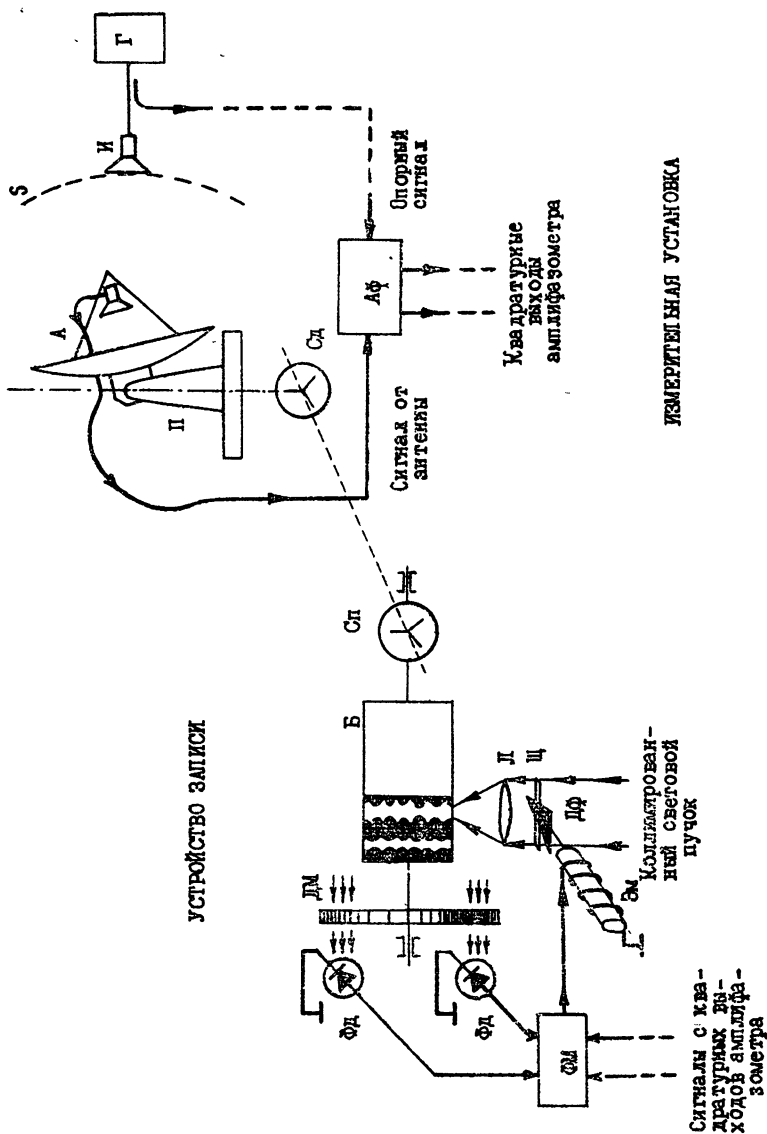


Рис. 2. Блок-схема измерительной установки и устройства записи СВЧ-голограммы углового распределения ближнего поля антенны: А — исследуемая антенна, П — поворотное устройство, И — излучатель, S — поверхность, на которой измеряется голограмма СВЧ-поля антенны, Г — генератор, Аф — амплифазометр, Сд, Сп — селсин-датчик и селсин-приемник, Б — барабан с фотопленкой, Л — линза, Щ — щель, Дф — диафрагма, Эм — электромагнит, ДМ — диск синусоидальной прозрачности, служащий для введения пространственной модуляции в голограмму, Фд — фотодиод, ФМ — устройство фазовой модуляции.

собом записи, будет примерно тем же, что и в рассмотренном выше случае получения преобразования Фурье (см. выражение (1)). Таким образом, соотношение (4) остается в силе и в случае преобразования Френеля.

Поскольку в большинстве случаев обработка голограмм сводится к нахождению преобразования Фурье или Френеля, можно утверждать, что штриховой способ записи двумерных голограмм практически эквивалентен плотностной записи и не вносит существенных дополнительных искажений в результат обработки голограммы.

2. Важным приложением неоптической голографии является ее использование для определения диаграмм направленности антенн СВЧ по измерениям поля в ближней зоне [3-5], где в ряде случаев наряду с цифровыми используются оптические методы обработки результатов измерений [3, 6]. Применительно к данной задаче было разработано устройство записи на фотопленку голограммы углового распределения ближнего поля антенны, использующее принцип штриховой записи.

Блок-схема этого устройства показана на рис. 2. Вращение исследуемой антенны по одной координате* было связано через систему сельсинов с вращением барабана с закрепленной на нем фотопленкой. Для приема СВЧ-сигнала использовался амплифазометр с квадратурными выходами [7]. Сигналы с выходов амплифазометра подавались на аналоговое устройство, обеспечивающее введение пространственной модуляции посредством фазовой модуляции сигналов с амплифазометра; после аналогового устройства сигнал записывался в штриховом виде на фотопленку. Опорный сигнал для фазовой модуляции создавался с помощью диска синусоидальной прозрачности, находящегося на одной оси с барабаном. Такая конструкция обеспечивала жесткую привязку начальной фазы пространственной модуляции от строки к строке фототранспаранта. Запись сигнала на фотопленку производилась с помощью электромагнитного управления треугольной диафрагмой, модулирующей световой поток через щель, определяющую ширину строки. Сканирование СВЧ-голограммы велось построчно, также построчно производилась запись на фототранспарант.

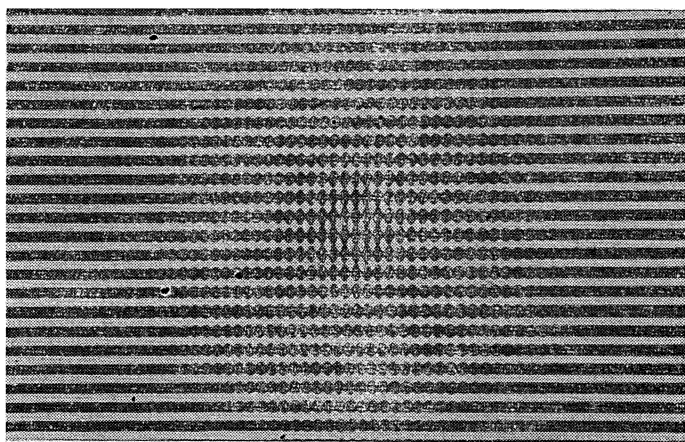


Рис. 3. Фототранспарант голограммы ближнего поля 7-метровой осесимметричной антенны, измеренной на участке сферической поверхности радиусом 52 м (расстояние до излучателя) на длине волны 10 см. Размеры фототранспаранта соответствуют угловым размерам СВЧ-голограммы $12 \times 12^\circ$.

* Исследуемая антенна была установлена на полноповоротном устройстве с электрическим приводом.

Требования к точности изготовления отдельных узлов устройства записи* определялись общими требованиями к точности измерения ближнего поля [8, 9].

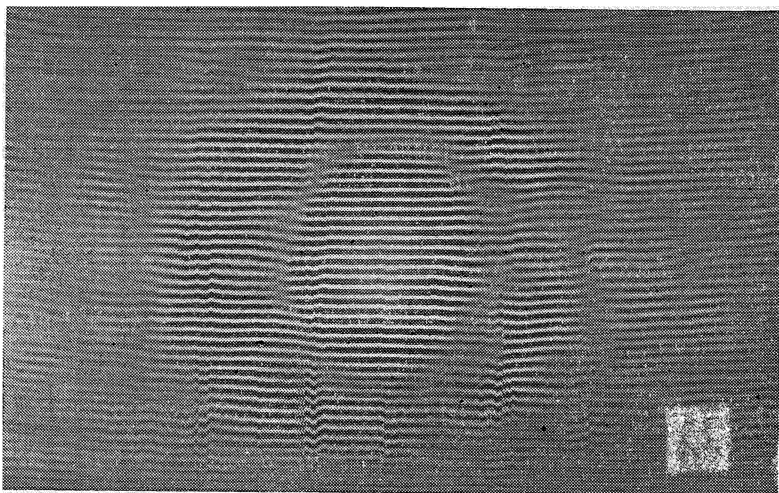


Рис. 4. Фотоизображение диаграммы направленности антенны, полученное в результате обработки голограммы, представленной на рис. 3 (для фиксации изображения использовался фототелеграфный аппарат «Нева»).

На рис. 3 приведена голограмма углового распределения ближнего поля 7-метровой осесимметричной зеркальной антенны, полученная на описанной выше установке. Результаты обработки голограммы (сечения

диаграммы направленности антенны) приведены на рис. 4, 5. Обработка велась на двумерном оптическом коррелометре с механическим перемещением транспарантов [2, 6]; оконечными выходными устройствами анализа служили фототелеграфный аппарат «Нева», самописец Н110 и осциллографическая приставка для фиксации разрезов диаграммы направленности на фотопленку.** На рис. 5 для сравнения показано главное сечение диаграммы, полученное в результате обработки голограммы ближнего поля, и измеренное методом фокусировки на источник в ближней зоне [10].

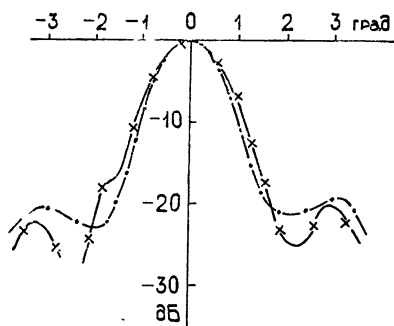


Рис. 5. Главное сечение диаграммы направленности, полученное в результате обработки голограммы (крестики) и измеренное методом фокусировки (штрихпунктир).

* Например, одним из источников погрешностей, вносимых системой записи, является статическая ошибка рассогласования следящей системы, вызывающая неверное соотношение координат записи на фототранспаранте и собственно СВЧ-голограммы. Другим источником погрешностей является искажение периода пространственной модуляции в записи, вызванное эксцентриситетом или перекосом элементов системы записи. Наличие подобных дефектов в системе записи приводит, в основном, к внесению фазовых ошибок в голограмму.

** Отметим, что при определении сечений двумерной диаграммы направленности на коррелометре неверная установка осей френелевской зонной пластинки и транспаранта голограммы приводит к ошибочному истолкованию результатов, т. е. выходное устройство регистрирует, например, не центральное, а смещенное сечение диаграммы направленности.

Таким образом, в штриховой записи просто реализуется возможность фиксации результатов сканирования неоптических голограмм в реальном масштабе времени, причем непрерывно по одной координате. При использовании обработки в некогерентном свете транспаранты штриховой записи могут быть сравнительно больших размеров, а следовательно, к объективам, производящим уменьшение транспаранта, не предъявляются высокие требования при сохранении динамического диапазона записи. Сам способ штриховой записи практически не вносит искажений в результат обработки голограммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голография, методы и аппаратура, под ред. В. М. Гинзбург, Б. М. Степанова, изд. Сов. радио, М., 1974.
2. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Оптические анализаторы, изд. Сов. радио, М., 1971.
3. Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, ДАН СССР, 171, № 6, 1309 (1966).
4. В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, А. К. Чандаев, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 725 (1973).
5. Джонсон, Экер, Холлис, ТИИЭР, 61, № 12, 5 (1973).
6. Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1615 (1973).
7. В. Ф. Засухин и др., Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 7, 949 (1976).
8. И. В. Каплун, А. П. Курочкин, Радиотехника и электроника, 20, № 10, 2038 (1975).
9. В. И. Турчин, В. А. Фарфель, А. Л. Фогель, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 72 (1976).
10. Н. М. Цейтлин, Антенная техника и радиоастрономия, изд. Сов. радио, М., 1976.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 ноября 1976 г.,
после доработки
20 июля 1977 г.

ON ONE METHOD OF RECORDING THE HOLOGRAMS OF NONOPTICAL FIELDS

Yu. I. Belov, E. M. Zuykova, L. A. Pasmanik, V. I. Turchin

The dashed method of recording the holograms of nonoptical fields is suggested. The peculiarities of the suggested method of the record are considered, a set-up for recording UHF-holograms of the near antenna field and the results of hologram processing are described.

УДК 532.2

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА ПРИ ФОКУСИРОВКЕ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Б. С. Агровский, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова

Проведены измерения дисперсии флуктуаций интенсивности света в фокусе. Сфокусированный пучок распространялся в жидкости с конвективной турбулентностью при больших числах Рэлея. Результаты измерений дисперсии при дистанции распространения 30—80 см согласуются с данными, полученными в атмосфере на расстояниях до $1,7 \cdot 10^5$ см. Расчет по асимптотической формуле [5], полученной путем приближенного решения уравнения для функции когерентности 4-го порядка, хорошо описывает наблюдаемые значения дисперсии при больших флуктуациях фазы на излучающей апертуре. Пространственное усреднение флуктуаций начинается при размере приемной диафрагмы, близком к размеру диска Эйри.

Теоретический расчет флуктуаций интенсивности света в сфокусированном пучке встречает большие трудности. Метод плавных возмущений [1] дает результаты, резко расходящиеся с экспериментом [2-4]. В [4] на основе рассмотрения физической модели было показано, что параметром, определяющим величину флуктуаций интенсивности в фокусе, является структурная функция фазы сферической волны $D_s^{\text{сф}}(2a)$ на диаметре излучающей апертуры $2a$. В области больших значений этого параметра для турбулентной среды со степенным спектром флуктуаций показателя преломления в [5] получено асимптотическое выражение для корреляционной функции флуктуаций интенсивности. Измерения [6] показали, что радиус корреляции флуктуаций интенсивности имеет порядок радиуса кружка Эйри фокусирующей системы. К таким же выводам приводит расчет [5].

Эксперименты [4, 6-9] проводились при не слишком малых значениях волнового параметра $P = L^{1/2} k^{-1/2} (2a)^{-1} \epsilon^{-1/2}$ ($k = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число, λ_0 — длина волны в вакууме, L — длина пути распространения, равная фокусному расстоянию системы), $P \geq 0,05$. Достигнутые в этих измерениях значения структурной функции фазы $\sqrt{D_s^{\text{сф}}} \leq 24\pi$ были таковы, что насыщение флуктуаций интенсивности только намечалось.

В настоящей работе были проведены измерения дисперсии флуктуаций интенсивности в фокусе и в модельной турбулентной среде. Модельная турбулентная среда представляла собой слой жидкости (воды, либо этилового спирта), помещенный между нагревателем и холодильником. В таком слое при числах Рэлея 10^6 — 10^{9*} , реализовавшихся в эксперименте, существует режим развитой турбулентной конвекции. Малая протяженность среды (несколько десятков сантиметров) и большие значения структурной характеристики флуктуаций диэлектрической проницаемости ϵ в жидкости C_ϵ^2 (C_ϵ^2 в эксперименте достигало

* При числах Рэлея $Ra = gB_T h^3 \Delta T / \nu \chi \geq 2000$ в слое возникает конвекция [10] ($g = 981 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$, B_T , ν , χ — объемное расширение, вязкость и температуропроводность среды, h — высота слоя, ΔT — разность температур между нагревателем и холодильником. При $Ra \geq 10^5$ конвективная турбулентность является однородной и изотропной во всем объеме жидкости за исключением тонких пристенных слоев [11].

значения $9 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-2/3}$) обеспечили малое значение $P \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ и одновременно большие значения $\sqrt{D_s^{\text{сф}}} = (12 \div 80) \cdot 2\pi$.

Подробное описание модельной установки и метода определения величины C_ε^2 приведены в работе [12]. Методика измерений дисперсии флуктуаций интенсивности в сфокусированном пучке совпадала с методикой измерений в коллимированном пучке, описанной в [12].

Длина модельной кюветы составляла 34 см. Пучок света от лазера ($\lambda_0 = 0,63 \text{ мкм}$, ТЕМ₀₀) фокусировался на внешнюю сторону выходного окна кюветы, на котором укреплялась приемная диафрагма. Измерения велись при одинарном и двойном проходах пучка через среду (при двойном проходе пучки разносились в горизонтальном направлении на расстояние, превышающее высоту слоя модельной жидкости). При этом реализовались следующие параметры пучка:

	Диаметр пучка на входе в среду $2a$, см	Фокусное расстояние (в среде и стекле) L , см	Волновой параметр P	Диаметр дифракционного пятна d_0 , мкм	Диаметр приемной диафрагмы d , мкм
Одинарный проход пучка	3,6	36	$0,5 \cdot 10^{-2}$	6,3	3; 10; 22; 72
Двойной проход пучка	2,2	80	$1,1 \cdot 10^{-2}$	22	3; 10; 40

Форма пучка была близка к гауссовой; величины $2a$ и d_0 определялись по уровню интенсивности e^{-1} от интенсивности на оси пучка. Путь пучка L превышал длину среды: при одном проходе — на толщину выходного окна кюветы; при двойном проходе — на утроенную толщину окна кюветы и на толщину двух поворотных призм (призмы укреплялись на внешней стороне выходного окна).

Основные измерения были проведены с диафрагмой 3 мкм при одинарном проходе и 10 мкм при двойном проходе пучка через кювету.

В качестве параметра использовалась величина структурной функции фазы сферической волны, рассчитанная по методу плавных возмущений [13]:

$$D_s^{\text{сф}}(2a) = 0,27 k^2 \varepsilon C_\varepsilon^2 L (2a)^{5/3}. \quad (1)$$

Величина C_ε^2 определялась по измерению разности температур между холодильником и нагревателем ΔT , высоте слоя модельной жидкости h и турбулентному потоку тепла q_T по следующим формулам [12]:

$$C_\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^2 \varepsilon^{-2} C_0 N \varepsilon_\kappa^{-1/3}; \quad (2)$$

$$N = 0,85 \chi (\Delta T)^2 h^{-2}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_\kappa = g B_T \frac{q_T}{C_p \rho} \quad (4)$$

(C_0 — константа, $C_0 = 2,8$, N — скорость выравнивания температурных неоднородностей, ε_κ — скорость диссипации кинетической энергии, g — ускорение силы тяжести, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$, B_T , χ , C_p , ρ — соответственно произ-

водная диэлектрической проницаемости по температуре, коэффициент объемного расширения, температуропроводность, теплоемкость и плотность модельной среды). Турбулентный поток тепла q_T принимался равным потоку тепла от нагревателя к холодильнику, что выполнялось с достаточной точностью ввиду плохой теплопроводности стенок кюветы и хорошей теплоизоляции кюветы от окружающей среды.

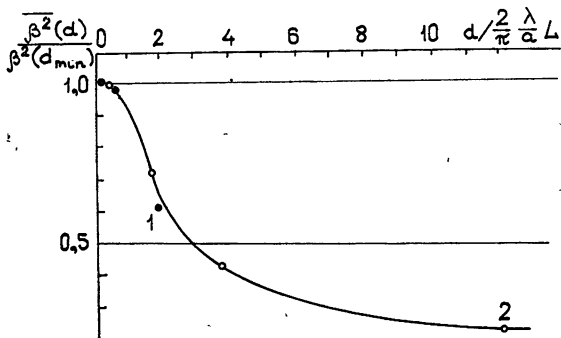


Рис. 1. 1—среднее из четырех серий измерений в этиловом спирте, двойной проход пучка, $\sqrt{D_s^{c\Phi}}(2a) = (20 \div 80) 2\pi$; 2—среднее из трех серий измерений в воде (один проход пучка), $\sqrt{D_s^{c\Phi}}(2a) = (20 \div 40) 2\pi$, $\beta(d_{\min}) = 1,06$ — среднее из всех значений, полученных при наименьших размерах приемных диафрагм.

На рис. 1 представлено осредняющее действие приемной диафрагмы на флуктуации интенсивности. По оси ординат отложено отношение значений $\beta^2(d) = I^2 / (\bar{I})^2 - 1$ (I — интенсивность света), измеренных с разными приемными диафрагмами, к среднему значению $\beta^2(d_{\min})$, полученному при минимальных диаметрах диафрагм. Из физических соображений, изложенных в [4], и расчетов [5] следует, что характерный размер неоднородностей поля интенсивности определяется диаметром дифракционного пятна по уровню e^{-1} (аналог диска Эйри для гауссова пучка [14]), $d_0 = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{L}{a}$. Как видно из графика, осредняющее действие

диафрагмы начинает сказываться при значении $d/d_0 \sim 1$. Таким образом, при измерениях с диафрагмами $d_1 = 3$ мкм ($L = 36$ см) и $d_2 = 10$ мкм ($L = 80$ см) приемник флуктуирующего излучения считался точечным.

На рис. 2 представлена зависимость среднеквадратичной величины флуктуаций интенсивности β в сфокусированном пучке от $\sqrt{D_s^{c\Phi}} / 2\pi$. Каждая точка представляет собой значение β , осредненное за 10 мин при установившемся режиме турбулентности.

Флуктуации насыщаются на уровне, несколько превышающем единицу. Среднее значение β в области $\sqrt{D_s^{c\Phi}} = (20 \div 80) 2\pi$ равно $\beta = 1,06$. На этом же графике нанесены средние экспериментальные зависимости из работ [8] и [9], полученные в атмосфере, а также расчетная кривая из [5],

$$\beta = \left\{ 1 + 3,1 \left[\frac{1}{2} D_s^{c\Phi} (2a) \right]^{-2/5} \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

полученная для степенного спектра флуктуаций показателя преломления с показателем степени 5/3.

Как видно из графика рис. 2, результаты измерений на модели согласуются с данными [9], полученными в атмосферных условиях, несмотря на различие в длинах трасс (1,75 км в атмосфере и 30—80 см в лабораторных условиях). Это обстоятельство свидетельствует в пользу универсальной зависимости относительной дисперсии флуктуаций интенсивности в фокусе от параметра $D_s^{c\phi}$. Расчеты по асимптотическим формулам [6] для $D_s^{c\phi} \gg 1$ согласуются с экспериментальными данными для значений $\sqrt{D_s^{c\phi}}/2\pi$ больших 20.

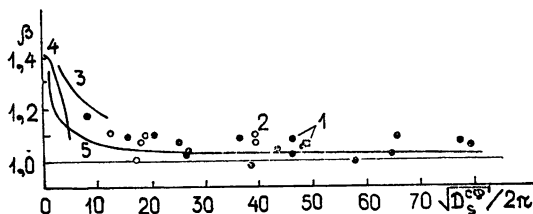


Рис. 2. 1—измерения в этиловом спирте (кружки) и в воде при двойном проходе пучка через модельную кювету; 2—измерения в воде при одном проходе пучка через кювету; 3—измерения в атмосфере [9], $L = 1750$ м, $d = 0,3$ мч, $P \geq 6 \cdot 10^{-7}$; 4—измерения в атмосфере [8], L —до 3,5 км, $d = 0,2 \frac{\lambda L}{a}$, $P \geq 0,3$; 5—асимптотическая зависимость [6].

Распределения вероятностей флуктуаций интенсивности I/\bar{I} в фокусе, рассчитанные по записям сигнала на магнитную ленту (см. рис. 3), лучше описываются логарифмически-нормальным распределением, чем экспоненциальным.

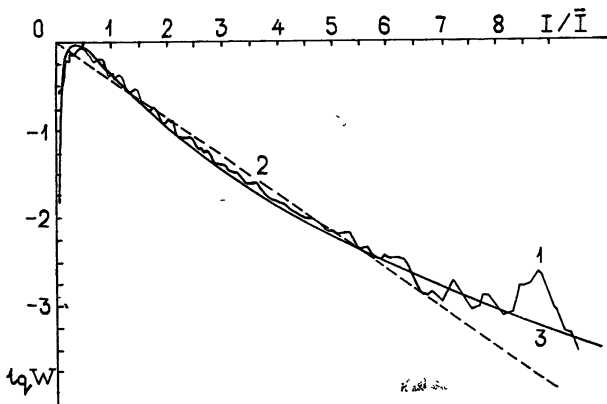


Рис. 3. 1—измеренная плотность вероятности при параметрах $d/d_0 = 1$, $L = 80$ см, $\sqrt{D_s^{c\phi}}/2\pi = 65$, $\beta = 0,96$; 2—экспоненциальное распределение $W(x) = \exp(-x)$; 3—логарифмически-нормальное распределение $W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\ln x + \sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right]$, $\sigma^2 = \ln(1 + \beta^2) = \ln 2$, $x = I/\bar{I}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. L. Fried and J. B. Seidman, J. Opt. Soc. Am., 57, № 2, 18 (1967).
 2. A. L. Виск, Appl. Opt., 6, № 4, 703 (1967).
 3. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 146 (1970).

4. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1290 (1970).
5. К. С. Гочелашвили, Квантовая электроника, 1, № 4, 848 (1974); А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, 114, 415 (1974).
6. А. С. Гурвич, И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1834 (1971).
7. И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 738 (1972).
8. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 798 (1972).
9. И. А. Старобинец, Диссертация, Институт физики атмосферы АН СССР, 1972.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, изд. 2, ГИТТЛ, М., 1953
11. J. W. Deardorff and G. E. Willis, J. Fluid. Mech., 28, № 4, 675 (1967).
12. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Ф. Э. Мартвель, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
13. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
14. Г. С. Ландсберг, Оптика, изд. 5, изд. Наука, М., 1976.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
3 января 1977 г.

LIGHT INTENSITY FLUCTUATIONS AT FOCUSING IN THE TURBULENT MEDIUM

B. S. Agrousky, A. S. Gurvich, M. A. Kallistratova

Measurements of dispersion of the light intensity fluctuations at the focus have been made. The focused beam propagated in fluid with the convective turbulence at large Rayleigh numbers. The results of the dispersion measurements at a distance of $30 \div 80$ cm agree with the data obtained in the atmosphere at the distances of $1.7 \cdot 10^5$ cm. The calculation according to the asymptotic formula (5) derived by the approximate solution of the equation for the 4-th order coherence function support well the observed values of the dispersion at the great phase fluctuations of the radiating aperture. The spatial averaging of fluctuations begins for the receiving aperture dimension near to that of the Airy disk.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С НЕГАУССОВЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ ОПРЕДЕЛЕННОГО ТИПА

О. В. Музычук

Получены замкнутые уравнения для статистических средних в линейных динамических системах, флуктуации параметров которых представляют собой нелинейные функции широкополосных гауссовых процессов. Рассмотрено специфическое влияние флуктуаций диссипативного параметра, являющегося коэффициентом при $(N-1)$ -й производной в стохастическом уравнении N -го порядка.

Установлено соответствие с известными результатами для систем с совершенно случайным параметрическим воздействием. В качестве примера найдены моменты выходного сигнала стохастических фильтров, описываемых уравнениями 1-го и 2-го порядков с квадратичными флуктуациями параметра.

1. Хорошо известно, что статистическое описание динамических систем с негауссовыми флуктуациями параметров связано с существенными математическими трудностями, обусловленными, в первую очередь, необходимостью задания бесконечного набора кумулянтных функций случайного воздействия. Если параметрические воздействия можно аппроксимировать совершенно случайными процессами, кумулянтные функции которых имеют вид

$$x_{n+1}(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = D_{n+1} \delta(t - t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n), \quad (1)$$

то удастся решить значительное количество задач [1, 2]. Поддается анализу также случай марковских случайных воздействий с конечным числом состояний, в частности «телеграфных» флуктуаций параметров [3].

Рассмотрим класс параметрических воздействий $\alpha(t) = \psi\{\xi(t)\}$, являющихся нелинейными функциями гауссова процесса $\xi(t)$ с ковариационной функцией $B(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle$. Данная модель негауссовых флуктуаций представляет определенный интерес, поскольку к анализу систем с подобным параметрическим воздействием приводит ряд задач автоматического регулирования и оптимальной фильтрации. Отметим, что процесс α не является совершенно случайным в общепринятом смысле (1), если даже исходный шум ξ белый. В самом деле, при квадратичной зависимости $\alpha = \xi^2$ его кумулянтные функции n -го порядка представляют собой произведения n , а не $(n-1)$ -й дельта-функции [4];

при $\alpha = \xi^m$ — произведения $\frac{m!}{2}$ дельта-функции и т. д. Отсюда ясно, что для рассматриваемой модели флуктуаций нельзя формально пользоваться дельта-коррелированностью $\xi(t)$, имеет смысл говорить о достаточно широкополосном шуме с конечной мощностью $\langle \xi^2 \rangle$. При этом к анализу системы можно применить функциональный аппарат, основанный на использовании формулы Фуруцу — Новикова [2, 5, 6], поль-

зуюсь гауссовостью $\xi(t)$ и не находя кумулянтные функции процесса $\alpha(t)$.

Остановимся предварительно на размыкании статистических средних вида $\langle \xi^k(t) Z[\xi(\tau); t] \rangle$, где $Z[\xi(\tau); t]$ — некоторый функционал процесса ξ с $\langle \xi \rangle = 0$, явно зависящий от времени t ; $k = 1, 2, \dots$ С помощью формулы Фуруцу—Новикова легко получить

$$\langle \xi^k(t) Z(t) \rangle = (k - 1) \langle \xi^2 \rangle \langle \xi^{k-2} Z \rangle + \langle \xi^{k-1} FZ \rangle, \quad (2)$$

где оператор F имеет вид

$$F = \int_{-\infty}^t d\tau B(t - \tau) \frac{\delta}{\delta \xi(\tau)},$$

а $\frac{\delta}{\delta \xi(\tau)}$ — оператор вариационного дифференцирования. Многократно применяя (2), находим

$$\begin{aligned} \langle \xi Z \rangle &= \langle FZ \rangle, & \langle \xi^2 Z \rangle &= \langle \xi^2 \rangle \langle Z \rangle + \langle F^2 Z \rangle, \\ \langle \xi^3 Z \rangle &= 3 \langle \xi^2 \rangle \langle FZ \rangle + \langle F^3 Z \rangle, \\ \langle \xi^4 Z \rangle &= \langle \xi^4 \rangle \langle Z \rangle + 6 \langle \xi^2 \rangle \langle F^2 Z \rangle + \langle F^4 Z \rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку для гауссова $\xi(t)$ с $\langle \xi \rangle = 0$ имеет место соотношение

$$\langle F^n Z \rangle = \langle \underbrace{\xi, \dots, \xi}_n, Z \rangle, \quad n = 1, 2, \dots,$$

являющееся обобщением формулы Фуруцу—Новикова, где $\langle \xi, \dots, \xi, Z \rangle$ — совместный кумулянт $(n + 1)$ -го порядка совокупности $\{\xi(t), Z(t)\}$, то формулы (3) представляют собой разложения моментов $\langle \xi^n Z \rangle$ по совместным кумулянтам [4].

Ясно, что при решении ряда задач можно ограничиться приближенным разложением, пренебрегая статистическими связями (совместными кумулянтами) высших порядков. В частности, в гауссовом приближении, опуская совместные кумулянты выше 2-го порядка, получим

$$\begin{aligned} \langle \xi^{2n} Z \rangle &\approx \langle \xi^{2n} \rangle \langle Z \rangle, \\ \langle \xi^{2n+1} Z \rangle &\approx (2n + 1) \langle \xi^{2n} \rangle \langle FZ \rangle, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3a)$$

Рассмотрим далее важный частный случай: пусть функционал $Z[\xi(\tau); t]$ зависит только от предыдущих значений $\xi(\tau)$, $\tau < t$, так что $\frac{\delta Z(t)}{\delta \xi(t)} = 0$.

Положим также, что время корреляции $\tau_\xi \ll \tau_Z$, где τ_Z — характерный временной масштаб функции $Z(t)$. Тогда нетрудно видеть, что в разложении (3) можно оставить только разомкнутые члены (не содержащие $\langle F^n Z \rangle$, $n = 1, 2, \dots$). При этом формулы (3) для четных степеней ξ переходят в (3a), а моменты с нечетными степенями ξ обращаются в нуль при $\tau_\xi/\tau_Z \rightarrow 0$. Таким образом, мы приходим к приближенной формуле размыкания:

$$\langle \psi(\xi) Z \rangle \approx \langle \psi(\xi) \rangle \langle Z \rangle, \quad (4)$$

справедливой при условии

$$\left. \frac{\delta Z(t)}{\delta \xi(\tau)} \right|_{\tau=t} = 0, \quad \tau_\xi \ll \tau_Z.$$

Этот результат аналогичен соответствующему размыканию для негаус-

сова совершенно случайного процесса $\alpha(t)$: $\langle \alpha(t) Z(t) \rangle = \langle \alpha \rangle \langle Z(t) \rangle$, которое следует из обобщенной формулы Фуруцу—Новикова [2, 7].

2. Обратимся теперь к отысканию среднего значения выходной координаты $y(t)$ стохастической системы, описываемой линейным уравнением N -го порядка:

$$L \left(\frac{d}{dt}, t \right) y(t) = x(t),$$

$$L \left(\frac{d}{dt}, t \right) = L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) + \alpha_k(t) \frac{d^k}{dt^k}, \quad (5)$$

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^N}{dt^N} + a_k \frac{d^k}{dt^k}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование); здесь L_0 — регулярный оператор, $\alpha_k(t) = \psi_k(\xi_k)$ — функции гауссовых процессов, $x(t)$ — входной сигнал. Пусть для простоты флуктуации параметров некоррелированы: $\langle \xi_k(t) \xi_j(t-\tau) \rangle = \delta_{k,j} B_k(\tau)$ и $\langle \xi_k \rangle = 0$.

Из уравнения (5) выразим вариационную производную, необходимую для размыкания моментов $\langle \alpha_k(t) y^{(k)}(t) \rangle$:

$$-\frac{\delta y^{(k)}(t)}{\delta \xi_k(\tau)} = g_0^{(k)}(t-\tau) \frac{d \psi_k}{d \xi_k} y^{(k)}(\tau) + \int_{\tau}^t g_0^{(k)}(t-u) \psi_s(\xi_s) \frac{\delta y^{(s)}(u)}{\delta \xi_k(\tau)} du, \quad (6)$$

здесь $g_0(t-\tau)$ — функция Грина невозмущенной системы. Поскольку она обладает начальными условиями $g_0^{(k)}(t-\tau)|_{t=\tau} = \delta_{k,N-1}$ ($\delta_{k,s}$ — символ Кронекера, N — порядок дифференциального уравнения), то в близкие моменты времени можно записать:

$$\frac{\delta y^{(k)}(t)}{\delta \xi_k(\tau)} \simeq -\delta_{k,N-1} \frac{d \psi_k}{d \xi_k} y^{(k)}(\tau), \quad t - \tau \leq \tau_{\xi_k},$$

опуская «нелокальные» члены. Отсюда следует, что в отсутствие в системе флуктуаций диссипативного параметра $\alpha_{N-1}(t)$ при усреднении уравнения (5) можно воспользоваться формулой «прямого» размыкания (4) для смешанных моментов:

$$\left[L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) + \langle \psi_k \rangle \frac{d^k}{dt^k} \right] \langle y(t) \rangle = \langle x(t) \rangle. \quad (7)$$

Такое размыкание является корректным, если характерное время усредненного решения τ_{y} , велико по сравнению с временами корреляции τ_{ξ_k} .

Попробуем уточнить формулу (7). Сделаем это на примере динамической системы с квадратичными флуктуациями параметров $\alpha_k = b_k \xi_k^2(t)$. Применяя к (6) операцию вариационного дифференцирования и используя малость времени корреляции τ_{ξ_k} в полученном уравнении, можно записать следующее приближенное выражение для второй вариационной производной:

$$\left\langle \frac{\delta^2 y^{(k)}(t)}{\delta \xi_k(\tau) \delta \xi_k(\theta)} \right\rangle \Big|_{t-\tau, t-\theta \leq \tau_{\xi_k}} = -2b_k g_0^{(k)}(t-\tau) \langle y^{(k)}(\tau) \rangle \delta(\tau-\theta),$$

$$k = 0, N-2, \quad (8)$$

Используя (8) и (3), приходим к уравнению для среднего значения

$$\left\langle L \left(\frac{d}{dt}, t \right) \right\rangle \langle y(t) \rangle - 2b_k^2 \int_{-\infty}^t g_0^{(k)}(t-\tau) B_k^2(t-\tau) \langle y^{(k)}(\tau) \rangle d\tau = \langle x(t) \rangle. \quad (9)$$

Поскольку $2b_k^2 B_k^2(\tau) = B_{\alpha_k}(\tau)$, уравнение (9) представляет собой приближение Бурре для рассматриваемой системы. Заметим, что суммирование в (9) только до $k = N - 2$. Если времена корреляции τ_{ξ_k} малы по сравнению с характерными временами невозмущенной системы, то «нелокальный» член в (9) достаточно мал.

Используя приближенное размыкание в уравнениях для высших вариационных производных, можно строить высшие приближения для $\langle y(t) \rangle$, подобно тому, как это делается для систем с гауссовыми флуктуациями параметров [2, 8].

3. Рассмотрим теперь систему с флуктуациями диссипативного параметра $\alpha_{N-1}(t)$, положив для простоты остальные коэффициенты постоянными. Пусть $\alpha_{N-1}(t) = b \xi^m(t)$. Используя полученные выше результаты, запишем, опуская нелокальный член в вариационной производной (6):

$$\begin{aligned} \langle \xi^m(t) y^{(N-1)}(t) \rangle &\simeq (m-1) \langle \xi^2 \rangle \langle \xi^{m-2}(t) y^{(N-1)}(t) \rangle - \\ &- mb \int_{-\infty}^t B(t-\tau) \langle \xi^{m-1}(t) \xi^{m-1}(\tau) y^{(N-1)}(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Интересно отметить, что (10) приводит к замкнутому уравнению для смешанной моментной функции только для линейных (гауссовых) и квадратичных ($m = 2$) флуктуаций. При $m = 2$ уравнение (10) примет вид

$$\Phi(t, \tau) = B(t-\tau) \langle y^{(N-1)}(\tau) \rangle - 2b \int_{-\infty}^{\tau} B(t-\tau') \Phi(\tau, \tau') d\tau', \quad (11)$$

где $\Phi(t, \tau) = \langle \xi(t) \xi(\tau) y^{(N-1)}(\tau) \rangle$. Уравнение (11) можно решать итерациями; для корреляционной функции флуктуаций

$$B(\tau) = \langle \xi^2 \rangle \exp(-\Pi |\tau|), \quad \Pi = \tau_{\xi}^{-1}, \quad (12)$$

итерационный ряд легко просуммировать (считаем по-прежнему $\tau_{\xi} \ll \tau_y$), что приводит к результату

$$\langle \xi^2(t) y^{(N-1)}(t) \rangle = \Phi(t, t) = \langle \xi^2 \rangle \langle y^{(N-1)}(t) \rangle \left(1 + \frac{b}{2} D_{\xi} \right)^{-1}, \quad (13)$$

где

$$D_{\xi} = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau = 2 \langle \xi^2 \rangle \tau_{\xi}$$

— спектральная плотность флуктуаций $\xi(t)$ на нулевой частоте. Отметим, что к результату (13) можно прийти и на основании обобщенной формулы Фуруцу—Новикова, но этот путь существенно сложнее, поскольку требует знания всех кумулянтных функций негауссова процесса $\xi^2(t)$.

Осуществив размыкание смешанного момента в приближении Бурре, т. е. принимая во внимание только две кумулянтные функции процесса $\xi^2(t)$, мы бы получили менее точный результат;

$$\langle \xi^2(t) y^{(N-1)}(t) \rangle \approx \langle \xi^2 \rangle \langle y^{(N-1)}(t) \rangle \left(1 - \frac{b}{2} D_\xi \right).$$

Заметим, что для достаточно простых стохастических систем полученные результаты могут использоваться для отыскания высших моментов.

4. Рассмотрим в качестве примера осциллятор с флуктуациями собственной частоты

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2h \frac{d}{dt} + \Omega^2 [1 + \alpha(t)] \right) y(t) = 0. \quad (14)$$

Пусть $\alpha = \xi^2(t)$, $\xi(t)$ — широкополосный гауссов шум. Получим уравнение для второго момента $\langle y^2(t) \rangle$. Замена переменной $I = \frac{1}{2} y^2 e^{2ht}$ приводит, как легко показать, к стохастическому уравнению для квадратичной величины, которое после усреднения примет вид

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} + 4\omega^2 \frac{d}{dt} \right) \langle I(t) \rangle + 2\Omega^2 \left(\left\langle \xi^2 \frac{dI}{dt} \right\rangle + \frac{d}{dt} \langle \xi^2 I \rangle \right) = 0, \quad (15)$$

где $\omega^2 = \Omega^2 - h^2$. Вариационные производные, необходимые для размыкания смешанных моментов, представляют собой

$$\frac{\delta I(t)}{\delta \xi(\tau)} \Big|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\delta^2 \dot{I}(t)}{\delta \xi(\tau) \delta \xi(\theta)} \Big|_{\tau \simeq \theta \simeq t} = -4\Omega^2 \delta(\tau - \theta) I(t). \quad (16)$$

Используя (2), (16), получим следующее уравнение для средней интенсивности:

$$\frac{d^3 \langle I \rangle}{dt^3} + 4(\omega^2 + \Omega^2 \langle \alpha \rangle) \frac{d \langle I \rangle}{dt} - 2\Omega^2 \langle I(t) \rangle \int_0^\infty B_\alpha(\tau) d\tau = 0. \quad (17)$$

Здесь $\langle \alpha \rangle = \langle \xi^2 \rangle$, $B_\alpha(\tau) = 2B^2(\tau)$. Можно показать, что уравнение вида (17) справедливо и при произвольной степенной зависимости флуктуаций параметра $\alpha = \xi^m$, m — целое число. Возвращаясь к переменной $\langle y^2(t) \rangle$, запишем следующее из (17) условие среднеквадратичной устойчивости системы

$$\frac{1}{4} \Omega^2 D_\alpha < h, \quad D_\alpha = 4 \int_0^\infty B^2(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где D_α — спектральная плотность флуктуаций $\alpha(t)$. Мы пришли к результату, аналогичному полученному в [2] для случая совершенно случайного параметрического воздействия*. Это свидетельствует о том, что вид вероятностного распределения флуктуаций параметра не имеет здесь большого значения.

Для корреляционной функции (12) условие устойчивости (18) примет вид $\frac{1}{4} \Omega^2 \langle \xi^2 \rangle D_\xi < h$; приведем также соответствующее условие для случая $\alpha = \xi^4(t)$: $10\Omega^2 \langle \xi^2 \rangle^3 D_\xi < h$. Таким образом, с ростом крутизны параметрической «нелинейности» увеличивается ограничение на мощность шума $\langle \xi^2 \rangle$.

* Неравенство (18) совпадает с известным условием среднеквадратичной устойчивости осциллятора с гауссовыми дельта-коррелированными флуктуациями собственной частоты.

5. Рассмотрим теперь стохастическое уравнение

$$\frac{dy}{dt} + ay + b \xi^2(t) y = c \xi^2(t), \quad (19)$$

описывающее при определенных условиях процесс установления «весовых коэффициентов» в системе автокомпенсации помех с корреляционной обратной связью [9–11]. Здесь $\xi(t)$ — гауссова помеха, время корреляции которой мало по сравнению с временем релаксации системы.

Для нахождения моментов домножим (19) на y^{n-1} и усредним:

$$\left(\frac{d}{dt} + na \right) \langle y^n \rangle + nb \langle \xi^2 y^n \rangle = nc \langle \xi^2 y^{n-1} \rangle. \quad (20)$$

Уравнение для моментной функции $\Phi_n(t, \tau) = \langle \xi(t) \xi(\tau) y^n(\tau) \rangle$, аналогичное (11), здесь имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_n(t, \tau) &= B(t - \tau) \langle y^n(\tau) \rangle + \\ &+ 2n \int_{-\infty}^{\tau} B(t - \tau') [c \Phi_{n-1}(\tau, \tau') - b \Phi_n(\tau, \tau')] d\tau'. \end{aligned}$$

Для функции корреляции шума (12) нетрудно найти Φ_1 и Φ_2 , что приводит к следующим уравнениям релаксации первых двух моментов:

$$\left(\frac{d}{dt} + a_1 \right) \langle y(t) \rangle = b_1, \quad (21)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + a_2 \right) \langle y^2(t) \rangle = b_{21} \langle y(t) \rangle + b_2,$$

где

$$a_1 = a + b \langle \xi^2 \rangle \left(1 + \frac{b}{2} D_\xi \right)^{-1}, \quad a_2 = 2a + 2b \langle \xi^2 \rangle (1 + b D_\xi)^{-1},$$

$$b_1 = c \langle \xi^2 \rangle \left(1 + \frac{b}{2} D_\xi \right)^{-1}, \quad (22)$$

$$b_{21} = 2b_1(1 + b D_\xi)^{-1}, \quad b_2 = \frac{1}{2} c D_\xi b_{21}.$$

Установившиеся значения моментов представляют собой

$$\langle y \rangle = \frac{b_1}{a_1}, \quad \langle y^2 \rangle = a_2^{-1} (b_2 + b_{21} \langle y \rangle), \quad (23)$$

а соответствующие времена релаксации равны a_1^{-1} , a_2^{-1} . Для дисперсии σ_y^2 , являющейся важной характеристикой схемы, получим

$$\sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \langle y \rangle^2 \frac{a}{\Pi} \frac{1 + \frac{b}{2} D_\xi}{1 + \frac{b}{a} \langle \xi^2 \rangle}. \quad (24)$$

Из этих результатов видно, что времена релаксации существенно зависят от мощности помех $\langle \xi^2 \rangle$, а дисперсия $\sigma_y^2 \rightarrow 0$ при $\frac{a}{\Pi} \rightarrow 0$.

Достаточные условия применимости использованного приближения можно оценить на основании неравенства $a_i \tau_\xi \ll 1$, $i \ll 1, 2$, которое заведомо выполнено, если

$$\frac{\tau_\xi}{T} \ll 1, \quad bD_\xi = 2b \langle \xi^2 \rangle \tau_\xi \ll 1 \quad (T = a^{-1}, \tau_\xi = \Pi^{-1}). \quad (25)$$

Положив в (22) $\tau_\xi = 0$ (т. е. $D_\xi = 0$), мы приходим к результатам «прямого» размыкания смешанных моментов в уравнении (20). Как следует из (22), (25), они вполне приемлемы при отыскании моментов весовых коэффициентов, если постоянная времени невозмущенной системы T достаточно велика (в реальной схеме $b \sim T^{-1}$), а помеха не слишком сильная. В то же время ясно, что для нахождения дисперсии «прямое» размыкание является слишком грубым.

Автор благодарен А. Н. Малахову за полезные замечания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, вып 4, 499 (1973).
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. R. Bourret, O. Frish and A. Pouquet, Physica, 65, № 2, 303 (1973).
4. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978.
5. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
6. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).
7. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, ДАН СССР, 222, № 4, 793 (1975).
8. О. В. Музычук, Теор. мат. физ., 28, № 3, 371 (1976).
9. B. Widrow, R. E. Manteu, L. J. Griffiths and B. V. Good, ТИИЭР, 55, № 12, 78 (1976).
10. Л. А. Чечик, Радиотехника, 18, № 4, 67 (1975).
11. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника (в печати).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 декабря 1976 г.

ON STATISTICAL MEAN VALUES IN DYNAMIC SYSTEMS WITH NONGAUSSIAN FLUCTUATIONS OF CERTAIN TYPE PARAMETERS

O. V. Muzychuk

Closed equations are obtained for statistical mean values in the linear dynamic systems, the parameter fluctuations of which represent the nonlinear functions of broadband Gaussian processes. The specific influence of fluctuations of the dissipative parameter is considered which is the coefficient of the $(N-1)$ derivative in the N order stochastic equation. The agreement is established with the known results for the systems with absolutely random parametric action. As an example, the moments of the output signal of 1-st and 2-nd order stochastic systems with the parameter quadratic fluctuations are obtained.

УДК 534.26

НИЗКОЧАСТОТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА АКУСТИЧЕСКИ МЯГКОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

Р. З. Муратов, С. П. Ефимов

Методом возмущений, примененным к скалярному интегральному уравнению акустики, получено приближенное решение задачи о низкочастотном рассеянии плоской волны на трехосном эллипсоиде с абсолютно мягкой границей. Для поля в ближней зоне, амплитуды рассеяния и эффективного сечения рассеяния найдено соответственно 3, 4 и 3 члена рэлеевского ряда. Рассмотрен предельный случай этой задачи — рассеяние на мягком эллиптическом диске.

В первом приближении задача о низкочастотном (НЧ) рассеянии звука абсолютно мягким препятствием была рассмотрена Рэлеем [1], который, сведя ее к определению емкости проводника, имеющего форму и размеры препятствия, показал, что в дальней зоне поле вторичной волны пропорционально этой емкости и не зависит ни от направления падающей (плоской монохроматической) волны, ни от направления рассеяния. Анализируя ту же задачу с помощью теоремы взаимности, Ван Бладэл [2] обнаружил, что и второй член НЧ-ряда для рассеянного поля в волновой зоне, пропорциональный квадрату емкости препятствия, «безразличен» к направлениям падения и рассеяния. Эти результаты получены для рассеивателя произвольной формы.

Рассеяние на малом трехосном эллипсоиде с мягкой границей в случае, когда направление падающей волны параллельно одной из осей эллипсоида, исследовалось Слиманом [3]. Им были найдены первые три члена НЧ-разложения рассеянного поля в дальней зоне и — на их основе — два члена разложения полного сечения рассеяния. В работе [4] Уильямс предложил прямую процедуру построения НЧ-разложения поперечника рассеяния произвольного мягкого тела, не связанную с предварительным определением поля в дальней зоне, и получил в случае эллипсоида выражения для первых двух членов такого разложения при произвольном направлении падающей волны. При этом обнаружилось, что последние члены слимановских разложений содержат ошибки.

Следует отметить, что в [3] и [4] вывод и окончательное представление результатов для эллипсоида даны с помощью полиномов Ламэ и эллиптических функций. Это приводит к неоправданной громоздкости расчета, маскирует симметрию результатов и усложняет сопоставление с частными случаями. Между тем, обсуждаемую задачу проще решать в декартовых координатах, используя имеющиеся вид полиномов ньютоновские потенциалы эллипсоидальной оболочки (так называемые «феррерсовы потенциалы гомеоида» [5]). Это и сделано в данной работе.

Здесь исследовано рассеяние произвольно направленной плоской монохроматической волны на мягком эллипсоиде и получены НЧ-разложения для рассеянного поля в ближней (3 члена) и дальней (4 члена) зонах и для сечения рассеяния (3 члена). Как частный случай этой задачи рассмотрена НЧ-дифракция на эллиптическом диске. Задача

решается методом возмущений, примененным к интегральному уравнению для поверхностных источников вторичной волны, причем расчет сечения рассеяния ведется по схеме Уильямса.

1. ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ НИЗКОЧАСТОТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть на некоторое препятствие конечного объема, находящееся в неограниченной однородной среде, падает плоская гармоническая волна единичной амплитуды:

$$P_0 = e^{ik\mathbf{x}r}, \quad (1)$$

где P_0 — давление, $k = \omega/\omega$, ω — скорость звука, \mathbf{x} — единичный вектор направления распространения волны. Фактор $e^{-i\omega t}$, характеризующий зависимость от времени, всюду опускается. Если на границе S препятствия выполняется условие обращения в нуль полного давления $P = P_0 + P_{\text{расс}}$, то в произвольной внешней точке \mathbf{r} поле рассеянной волны дается формулой [6]

$$P_{\text{расс}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\mathbf{r}') dS', \quad (2)$$

где $\psi = \partial P / \partial N$, N — единичный вектор внешней нормали к S , $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Для точек \mathbf{r} , лежащих на поверхности S , вместо (2) получаем интегральное уравнение*

$$\oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\mathbf{r}') dS' = 4\pi e^{ik\mathbf{x}r}. \quad (3)$$

Если размеры препятствия меньше длины волны, то приближенное решение уравнения (3) сводится к решению цепочки интегральных уравнений, соответствующих задачам теории потенциала. Уравнения цепочки получаются при разложении по степеням k обеих частей (3), причем $\psi(\mathbf{r})$ ищется в виде

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (ik)^l \psi_l. \quad (4)$$

В дальнейшем используются следующие уравнения:

$$\oint_S \frac{\psi_0(\mathbf{r}')}{R} dS' = 4\pi; \quad (5)$$

$$\oint_S \frac{\psi_1(\mathbf{r}')}{R} dS' = 4\pi \mathbf{x}r - \oint_S \psi_0(\mathbf{r}) dS; \quad (6)$$

$$\oint_S \frac{\psi_2(\mathbf{r}')}{R} dS' = 2\pi (\mathbf{x}r)^2 - \oint_S \left[\frac{1}{2} \psi_0(\mathbf{r}')R + \psi_1(\mathbf{r}') \right] dS'; \quad (7)$$

$$\oint_S \frac{\psi_3(\mathbf{r}')}{R} dS' = \frac{2}{3} \pi (\mathbf{x}r)^3 - \oint_S \left[\frac{1}{6} \psi_0(\mathbf{r}')R^2 + \frac{1}{2} \psi_1(\mathbf{r}')R + \psi_2(\mathbf{r}') \right] dS'; \quad (8)$$

* Нетрудно показать, что уравнения (2) и (3) являются частным случаем скалярного интегрального уравнения акустики (см. формулу (11) работы [7]), соответствующим граничному условию $P(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \in S$.

$$\oint_S \frac{\psi_4(\mathbf{r}')}{R} dS' = \frac{\pi}{6} (\mathbf{x}\mathbf{r})^4 - \oint_S \sum_{l=0}^3 \frac{\psi_l(\mathbf{r}')}{(4-l)!} R^{3-l} dS'; \quad (9)$$

$$\oint_S \frac{\psi_5(\mathbf{r}')}{R} dS' = \frac{\pi}{30} (\mathbf{x}\mathbf{r})^5 - \oint_S \sum_{l=0}^4 \frac{\psi_l(\mathbf{r}')}{(5-l)!} R^{4-l} dS'. \quad (10)$$

Интегралы в левых частях уравнений (5)–(10) имеют структуру потенциалов, создаваемых в точке \mathbf{r} поверхности S источниками плотности $\psi_l(\mathbf{r}')$, распределенными на S .

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\psi_l(\mathbf{r})$ ДЛЯ ЭЛЛИпсоИДА

Пусть теперь S — поверхность эллипсоида

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, \quad (11)$$

где a, b, c — его полуоси. Как известно [5], если $f_m(\mathbf{r})$ — полином степени m , то для точек \mathbf{r} поверхности эллипсоида интеграл $\oint_S \frac{f_m(\mathbf{r}')}{R} p' dS'$ есть полином той же степени. Здесь $p' = (x'^2/a^4 + y'^2/b^4 + z'^2/c^4)^{-1/2}$. Поэтому в (5)–(10) естественно искать $\psi_l(\mathbf{r})$ в виде

$$\psi_l(\mathbf{r}) = f_l(\mathbf{r})p, \quad (12)$$

что в конечном счете сводит решение интегрального уравнения для $\psi_l(\mathbf{r})$ к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов соответствующего полинома $f_l(\mathbf{r})$.

Рассматриваемая скалярная задача рассеяния на эллипсоиде при произвольном направлении $\mathbf{x} = \{x_x, x_y, x_z\}$ симметрична по отношению к циклической перестановке или взаимной замене координат. В связи с этим для сокращения записи будем использовать в дальнейшем трехиндексные обозначения (например, T_{lmn}) для некоторых величин, где первый индекс соответствует x (или a), второй — y (или b), третий — z (или c). Кроме того, будем обозначать символом $\langle \dots \rangle$ сумму трех слагаемых, связанных циклической перестановкой (например, $\langle xc^2T_{102} \rangle \equiv \equiv xc^2T_{102} + ya^2T_{210} + zb^2T_{021}$).

Учитывая вышесказанное, полиномы $f_l(\mathbf{r})$ представим в виде*

$$f_0(\mathbf{r}) = \alpha_{000}; \quad (13)$$

$$f_1(\mathbf{r}) = \langle \beta_{100} x \rangle + \beta_{000}; \quad (14)$$

$$f_2(\mathbf{r}) = \langle \gamma_{200} x^2/a^2 \rangle + \langle \gamma_{110} xy \rangle + \gamma_{000}. \quad (15)$$

Для дальнейшего нам понадобится также часть полинома $f_3(\mathbf{r})$, являющаяся четной функцией координат. Обозначив ее $\bar{f}_3(\mathbf{r})$, положим

$$\bar{f}_3(\mathbf{r}) = \langle \delta_{200} x^2/a^2 \rangle + \delta_{000}. \quad (16)$$

Коэффициенты $\alpha_{000}, \beta_{lmn}, \gamma_{lmn}, \delta_{lmn}$ подлежат определению.

Поскольку область определения полиномов $f_l(\mathbf{r})$ является поверхностью эллипсоида, между четными степенями координат в (15) и (16) существует связь (11). Это означает, что в угоду симметрии в формулы

* В (15) опущены слагаемые вида $\langle \gamma_{100} x \rangle$, так как в результате решения соответствующие коэффициенты оказываются равными нулю.

(15) и (16) введены дополнительные коэффициенты. Нетрудно найти соотношения, которым они удовлетворяют. Например, исключение z^2 в (15) приводит к несимметричной записи:

$$f_2(\mathbf{r}) \rightarrow f_2^z(\mathbf{r}) = A_{200}^z x^2/a^2 + A_{020}^z y^2/b^2 + \langle \gamma_{110} xy \rangle + A^z, \quad \text{где}$$

$$A^z = \gamma_{000} + \gamma_{002}. \quad (17)$$

Очевидно, что $\langle f_2^z(\mathbf{r}) \rangle = 3f_2(\mathbf{r})$. В частности, $\langle A^z \rangle = 3\gamma_{000}$. Отсюда, учитывая (17), получаем

$$\langle \gamma_{200} \rangle = 0. \quad (18)$$

Аналогично доказывается, что

$$\langle \delta_{200} \rangle = 0. \quad (19)$$

Подставляя полиномы (13)–(16) в цепочку уравнений (5)–(8), используем полиномиальные представления интегралов вида

$$\oint_S \frac{x'^l y'^m z'^n}{R} p' dS', \quad \text{найденные в [5]}. \quad \text{Затем, исключая с помощью (11)}$$

четные степени одной из координат, получаем, с учетом (18) и (19), замкнутую систему алгебраических уравнений для коэффициентов α_{000} , β_{lmn} , γ_{lmn} , δ_{lmn} . Её окончательное решение имеет вид

$$\alpha_{000} = C/abc; \quad (20)$$

$$\beta_{000} = -C^2/abc, \quad \beta_{100} = x_x/a^2 M_{100}; \quad (21)$$

$$\gamma_{000} = \frac{C}{abc} \left(C^2 + \frac{C}{3abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \frac{1}{3} \langle a^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle x_x^2 a^2 \rangle \right); \quad (22)$$

$$\gamma_{110} = x_x x_y / a^2 b^2 M_{110}; \quad (23)$$

$$\gamma_{200} = \frac{1}{H} \left[\left(l_{110} - \frac{2}{3} \langle a^2 b^2 M_{110} \rangle \right) (m_{010} - m_{100}) + \left(l_{101} - \frac{2}{3} \langle a^2 b^2 M_{110} \rangle \right) (m_{001} - m_{100}) \right], \quad (24)$$

$$H = 3 \langle l_{110} l_{101} \rangle - 4 \langle a^2 M_{100} \rangle \langle a^2 b^2 M_{110} \rangle;$$

$$\delta_{000} = -\frac{C^2}{abc} \left(C^2 + \frac{2}{3} \frac{C}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \frac{5}{9} \langle a^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle x_x^2 a^2 \rangle \right). \quad (25)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$C = abc / \langle a^2 M_{100} \rangle \quad (26)$$

(заметим, что это выражение дает емкость эллипсоида в системе СГСЕ),

$$l_{110} = c^2 M_{001} + a^2 b^2 M_{110}, \quad m_{100} = a^2 \left(x_x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{a^2 M_{100}}{\langle a^2 M_{100} \rangle} \right). \quad (27)$$

Остальные коэффициенты получаются из формул для β_{100} , γ_{110} , γ_{200} , l_{110} и m_{100} с помощью циклической перестановки координат.

Таким образом, полиномы $f_l(\mathbf{r})$ выражены через внутренние потенциальные факторы эллипсоида [5]:

$$M_{lmn} = (2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!! \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)^{l+1/2}(b^2+u)^{m+1/2}(c^2+u)^{n+1/2}}. \quad (28)$$

Эти интегралы (в общем случае — эллиптические) с помощью рекуррентных соотношений, в свою очередь, выражаются через факторы размагничивания эллипсоида M_{100} , M_{010} и M_{001} , которые табулированы (см., например, [5]).

3. ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

В ближней зоне поле, рассеянное малым препятствием, дается НЧ-рядом $P_{\text{расс}} = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m P_{\text{расс}}^{(m)}$, где

$$P_{\text{расс}}^{(m)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \oint_S \psi_{m-n}(r') R^{n-1} dS'. \quad (29)$$

Этот ряд получается из формулы (2), если в нее подставить (4) и разложение e^{ikR} по степеням k .

В случае эллипсоида, когда имеет место равенство (12), интегралы (29) сводятся к феррерсовым потенциалам снаружи гомеоида. Используя (13) — (15) и выражения для феррерсовых потенциалов, найденные в [5], находим первые три члена НЧ-разложения:

$$\begin{aligned} P_{\text{расс}}^{(0)} &= -\tilde{M}_{000}/M_{000}, \\ P_{\text{расс}}^{(1)} &= -C + \frac{C^2}{abc} \tilde{M}_{000} - \langle x_x x \tilde{M}_{100}/M_{000} \rangle, \\ P_{\text{расс}}^{(2)} &= C^2 - \gamma_{000} \tilde{M}_{000} - \langle x_x x_y xy \tilde{M}_{110}/M_{110} \rangle - \\ &- (C/4abc) [\langle x^2 + a^2 \rangle + \xi] \tilde{M}_{000} - \langle (x^2 + a^2 + \xi) a^2 \tilde{M}_{100} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle \gamma_{200} a^2 (\tilde{M}_{100} - \tilde{M}_{200} x^2 - \tilde{M}_{110} y^2 - \tilde{M}_{101} z^2) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, в ближней зоне рассеянное поле описывается с помощью внешних потенциальных факторов эллипсоида $\tilde{M}_{lmn}(\xi)$, где ξ — неотрицательный корень уравнения

$$\xi^3 - \langle x^2 - a^2 \rangle \xi^2 - \langle (b^2 + c^2) x^2 - a^2 b^2 \rangle \xi - \langle b^2 c^2 x^2 \rangle + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

Рекуррентные соотношения для \tilde{M}_{lmn} (см. [5]) позволяют выразить последние через табулированные факторы размагничивания эллипсоида.

В заключение отметим, что все формулы этого раздела не связаны с выводом последующих результатов.

4. ПОЛЕ РАССЕЯННОЙ ВОЛНЫ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

При $r \rightarrow \infty$, когда

$$\frac{e^{ikR}}{R} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-iknr'},$$

формула (2) принимает вид

$$P_{\text{расc}} = \frac{e^{ikr}}{r} F(\mathbf{n}), \quad (30)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а амплитуда рассеяния

$$F(\mathbf{n}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \psi(\mathbf{r}') e^{-ikn\mathbf{r}'} dS'. \quad (31)$$

НЧ-разложение амплитуды рассеяния

$$F(\mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} (ik)^l F_l(\mathbf{n}), \quad (32)$$

где

$$F_l(\mathbf{n}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^l \frac{(-1)^m}{m!} \oint_S (n\mathbf{r}')^m \psi_{l-m}(\mathbf{r}') dS', \quad (33)$$

получается в результате подстановки в (31) формулы (4) и разложения $\exp(-ikn\mathbf{r}')$.

В случае эллипсоида вычисление интегралов (33) сводится к применению формулы

$$\oint_S x^{2l} y^{2m} z^{2n} p dS = 3 \frac{(2l-1)!! (2m-1)!! (2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!} a^{2l} b^{2m} c^{2n} V, \quad (34)$$

где V — объем эллипсоида. В частности, для первых четырех значений $F_l(\mathbf{n})$ с помощью (12)–(16), (20), (21) получаем

$$F_0(\mathbf{n}) = -C; \quad (35)$$

$$F_1(\mathbf{n}) = C^2,$$

$$F_2(\mathbf{n}) = -\frac{abc}{3} \left(3\gamma_{000} + \langle \gamma_{200} \rangle + \frac{C}{2abc} \langle n_x^2 a^2 \rangle - \left\langle \frac{x_x n_x}{M_{100}} \right\rangle \right), \quad (36)$$

$$F_3(\mathbf{n}) = \frac{1}{6} C^2 \langle n_x^2 a^2 \rangle - abc \left(\delta_{000} + \frac{1}{3} \langle \delta_{200} \rangle \right).$$

Соотношения (18) и (19) позволяют найти $F_2(\mathbf{n})$ и $F_3(\mathbf{n})$, не используя явных выражений для γ_{200} и δ_{200} . Таким образом, окончательно

$$F_2(\mathbf{n}) = -\frac{C}{3} \left[3C^2 + \frac{C}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \langle a^2 \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \langle (x_x^2 + n_x^2) a^2 \rangle - \frac{abc}{C} \left\langle \frac{x_x n_x}{M_{100}} \right\rangle \right]; \quad (37)$$

$$F_3(\mathbf{n}) = C^2 \left[C^2 + \frac{2}{3} \frac{C}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \frac{5}{9} \langle a^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle (x_x^2 + n_x^2) a^2 \rangle \right], \quad (38)$$

где учтены (22) и (25).

Имея в виду, что емкость эллипсоида дается формулой (26), заключаем, что в дальней зоне рассеянное поле до членов порядка k^3 включительно выражается непосредственно через факторы размагничивания эллипсоида.

5. ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

При вычислении полного сечения рассеяния σ используем оптическую теорему [6]:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} F(\mathbf{x}). \quad (39)$$

Учитывая, что $F_l(\mathbf{n})$ вещественны, из (39) и (32) получаем НЧ-разложение поперечника рассеяния

$$\sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l k^{2l} F_{2l+1}(\mathbf{x}). \quad (40)$$

В случае эллипсоида первые два члена НЧ-ряда фактически определены, ибо, согласно (36) и (38),

$$F_1(\mathbf{x}) = C^2; \quad (41)$$

$$F_3(\mathbf{x}) = \frac{C^2}{3} \left(3C^2 + 2 \frac{C}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \frac{5}{3} \langle a^2 \rangle^2 + \langle x_x^2 a^2 \rangle \right). \quad (42)$$

Как указывалось выше, эквивалентный результат был получен в работе [4] с помощью полиномов Ламэ и эллиптических функций.

Рассмотрим теперь третий член НЧ-ряда, причем сначала — для произвольного (мягкого) рассеивателя. Согласно (33), имеем

$$4\pi F_5(\mathbf{x}) = \Pi_0 - \Pi_1 + \Pi_2, \quad (43)$$

где

$$\Pi_l = \oint_S \left[\frac{\psi_l(\mathbf{r})}{(5-l)!} (\mathbf{x}\mathbf{r})^{5-l} - \frac{\psi_{5-l}(\mathbf{r})}{l!} (\mathbf{x}\mathbf{r})^l \right] dS. \quad (44)$$

Вычисление $F_5(\mathbf{x})$ непосредственно по формулам (43), (44) предполагает, что функции $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_5$ известны. Процедура Уильямса [4] позволяет найти $F_5(\mathbf{x})$, зная меньшее число членов НЧ-ряда (4). При этом используется цепочка уравнений (5)–(10).

Умножим обе части уравнения (10) на $\psi_0(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по S . Преобразуя левую часть полученного уравнения с помощью (5), получаем

$$4\pi\Pi_0 = \Gamma_0\Gamma_4 + \oint_S \psi_0(\mathbf{r}) \oint_S \sum_{l=0}^3 \frac{\psi_l(\mathbf{r}')}{(5-l)!} R^{4-l} dS' dS. \quad (45)$$

Аналогичные манипуляции с парами уравнений (9), (6) и (8), (7) дают соответственно

$$4\pi\Pi_1 = \Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_4 + \oint_S \psi_1(\mathbf{r}) \oint_S \sum_{l=0}^2 \frac{\psi_l(\mathbf{r}')}{(4-l)!} R^{3-l} dS' dS; \quad (46)$$

$$4\pi\Pi_2 = \Gamma_2^2 - \Gamma_1\Gamma_3 + \frac{1}{2} \oint_S \oint_S \left\{ [\psi_2(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}') - \psi_3(\mathbf{r})\psi_0(\mathbf{r}')] R + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \psi_0(\mathbf{r})\psi_2(\mathbf{r}') R^2 \right\} dS' dS, \quad (47)$$

где

$$\Gamma_n \equiv \oint_S \psi_n(\mathbf{r}) dS. \quad (48)$$

Рассматривая пары (9); (5) и (6), (5), таким же образом находим

$$\Gamma_4 = \oint_S \frac{\psi_0(r)}{4!} (\mathbf{x}r)^4 dS - \frac{1}{4\pi} \left[\Gamma_0 \Gamma_3 + \oint_S \psi_0(r) \oint_S \sum_{l=0}^2 \frac{\psi_l(r')}{(4-l)!} R^{3-l} dS' dS \right]; \quad (49)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4\pi} \Gamma_0^2 + \mathbf{x} \oint_S r \psi_0(r) dS. \quad (50)$$

Будем предполагать начало координат выбранным так, чтобы второе слагаемое в (50) обратилось в нуль.

Подставляя теперь (45)—(47), (49), (50) в формулу (43), окончательно получаем

$$16\pi^2 F_5(\mathbf{x}) = \Gamma_2^2 + \frac{1}{12} \Gamma_0 \oint_S (\mathbf{x}r)^4 \psi_0(r) dS + \frac{1}{5!} \oint_S \psi_0(r) \oint_S \psi_0(r') R^4 dS' dS - \frac{1}{6} \oint_S \psi_1(r) \oint_S \psi_1(r') R^2 dS' dS - \frac{1}{2\pi} \Gamma_0 \oint_S \psi_0(r) \oint_S \sum_{l=0}^2 \frac{\psi_l(r')}{(4-l)!} R^{3-l} dS' dS. \quad (51)$$

Таким образом, третий член НЧ-разложения сечения рассеяния на произвольном препятствии можно вычислить, если известны лишь три члена ряда (4).

Это позволяет нам найти $F_5(\mathbf{x})$ для эллипсоида, используя результаты разд. 2. Опуская промежуточные (довольно громоздкие) выкладки, связанные с вычислением интегралов в (51), приведем окончательную формулу:

$$F_5(\mathbf{x}) = \frac{C^2}{3} \left[3C^4 + 4 \frac{C^3}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle + \frac{C^2}{a^2 b^2 c^2} \langle a^4 M_{100} \rangle^2 - 3C^2 \langle a^2 \rangle + \frac{76}{45} abc C - \frac{14}{9} \frac{C}{abc} \langle a^6 M_{100} \rangle - \frac{11}{75} \langle a^2 \rangle^2 + \frac{164}{225} \langle a^4 \rangle + \left(C^2 + \frac{2}{3} \frac{C}{abc} \langle a^4 M_{100} \rangle - \frac{26}{45} \langle a^2 \rangle \right) \langle x_x^2 a^2 \rangle + \frac{2}{15} \langle x_x^2 a^2 \rangle^2 + \frac{1}{15} \langle x_x^2 a^4 \rangle + \frac{a^2 b^2 c^2}{9C^2} \langle x_x^2 / M_{100}^2 \rangle \right]. \quad (52)$$

Существенно, что и $F_5(\mathbf{x})$ выражается непосредственно через факторы размагничивания эллипсоида.

6. РАССЕЯНИЕ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДИСКЕ

Решение дифракционной задачи об абсолютно мягком диске $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ получается из формул для эллипсоида путем перехода к пределу при $c \rightarrow 0$.

При $a > b \gg c$ факторы размагничивания эллипсоида

$$M_{100} \approx \frac{bc}{a^2 e^2} (K - E), \quad M_{010} \approx \frac{c}{be^2} \left(E - \frac{b^2}{a^2} K \right), \quad M_{001} \approx 1 - \frac{c}{b} E, \quad (53)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, модуль которых $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Используя (53), при-

ходим к следующим формулам для амплитуды и сечения рассеяния на диске:

$$F(\mathbf{n}) \approx -C + ikC^2 + \frac{1}{3} k^2 C \left\{ 3C^2 - aCE - (a^2 - b^2) [(1 - CE/a)^{-1} x_x n_x + \right. \\ \left. + (aCE/b^2 - 1)^{-1} x_y n_y] + \frac{1}{2} (x_x^2 + n_x^2) a^2 + \frac{1}{2} (x_y^2 + n_y^2) b^2 \right\} - \quad (54)$$

$$- ik^3 C^2 \left[C^2 - \frac{2}{3} aCE + \frac{1}{9} (a^2 + b^2) + \frac{1}{6} (x_x^2 + n_x^2) a^2 + \frac{1}{6} (x_y^2 + n_y^2) b^2 \right];$$

$$\frac{\sigma}{4\pi C^2} \approx 1 - \frac{k^2}{3} \left[3C^2 - 2aCE + \frac{1}{3} (a^2 + b^2) + x_x^2 a^2 + x_y^2 b^2 \right] +$$

$$+ \frac{k^4}{3} \left\{ 3C^4 - 4aC^3E + a^2 C^2 E^2 + C^2 (a^2 + b^2) - \frac{4}{9} (a^2 + b^2) aCE + \right. \\ \left. + \frac{22}{225} a^2 b^2 + \frac{2}{75} (a^2 + b^2)^2 + \left[C^2 - \frac{2}{3} aCE + \frac{4}{45} (a^2 + b^2) \right] \times \quad (55)$$

$$\times (x_x^2 a^2 + x_y^2 b^2) + \frac{2}{15} (x_x^2 a^2 + x_y^2 b^2)^2 + \frac{1}{15} (x_x^2 a^4 + x_y^2 b^4) +$$

$$\left. + \frac{1}{9} (a^2 - b^2)^2 [(1 - CE/a)^{-2} x_x^2 + (1 - aCE/b^2)^{-2} x_y^2] \right\},$$

где $C = a/K$ — емкость эллиптического диска в единицах СГСЕ. Первые два члена разложения (55) были найдены Уильямсом [4].

7. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

а) *Сфероид*. Если в формулах (30), (32), (35)–(38) положить $a = b \neq c$, $x_x = x_y = 0$, $x_z = -1$, то после упрощений получим

$$P_{\text{расс}} \approx \frac{e^{ikr}}{r} C \left\{ -1 + ikC + k^2 \left[C^2 - \frac{1}{3} cC + \frac{1}{6} (c^2 - a^2) (1 + n_z^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + a^2 c n_z / 3MC \right] - ik^3 C \left[C^2 - \frac{2}{3} cC + \frac{1}{18} (c^2 - a^2) (5 + 3n_z^2) \right] \right\},$$

где $C = a^2 c / [a^2 + (c^2 - a^2)M]$, $M \equiv M_{001}$ — продольный фактор размагничивания сфероида. К такому же виду можно преобразовать результаты работы [3], относящиеся к рассеянию на мягком вытянутом ($c > b = a$) сфероиде.

б) *Шар*. В случае шара ($c = b = a$), когда [5]

$$\tilde{M}_{lmn} = \frac{(2l-1)!! (2m-1)!! (2n-1)!!}{2(l+m+n)+1} \frac{a^3}{r^{2(l+m+n)+1}},$$

результаты разд. 3 при $x_x = x_y = 0$, $x_z = 1$ дают

$$P_{\text{расс}} \approx -a/r - i\varepsilon (1 - a/r + a^2 z/r^3) - \varepsilon^2 [1 - 2a/3r - r/2a + (1 - 3z^2/r^2) a^3/6r^3],$$

а формулы (40)–(42), (52) для произвольного направления \mathbf{x} переходят в

$$\sigma \approx 4\pi a^3 \left(1 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 + \frac{17}{45} \varepsilon^4 \right),$$

где $\varepsilon = ka$.

Такие же выражения получаются из строгого решения задачи дифракции на абсолютно мягком шаре.

в) *Круглый диск*. Для круглого диска ($a = b$) при $\kappa_x = \kappa_y = 0$ (нормальное падение) формула (55) принимает вид

$$\sigma \approx \frac{16}{\pi} a^3 \left[1 + \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{\pi^2} \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{71}{675} - \frac{8}{3\pi^2} + \frac{16}{\pi^4} \right) \varepsilon^4 \right],$$

где $\varepsilon = ka$. Это согласуется с результатом Баукампа [9] для коэффициента прохождения в дополнительной (в смысле теоремы Бабине) задаче дифракции на круглом отверстии в жестком экране.

В заключение авторы выражают признательность М. Л. Левину за интерес к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rayleigh, *Phyl. Mag.*, **44**, № 1, 28 (1897).
2. J. Van Bladel, *J. Acoust. Soc. Am.*, **44**, № 4, 1069 (1968).
3. B. D. Sleeman, *J. Inst. Math. Appl.*, **3**, № 3, 291 (1967).
4. W. E. Williams, *J. Inst. Math. Appl.*, **7**, № 2, 111 (1971).
5. Р. З. Муратов, Потенциалы эллипсоида, Атомиздат, М., 1976.
6. Х. Хенд, А. Мауэ, К. Вестпаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
7. А. Г. Виноградов, Р. З. Муратов, *ДАН СССР*, **226**, № 2, 301 (1976).
8. T. B. A. Senior, *Can. J. Phys.*, **38**, № 12, 1632 (1960).
9. C. J. Bouwkamp, *Progr. Phys.*, **17**, 35 (1954).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
9 августа 1976 г.

LOW-FREQUENCY SCATTERING OF A PLANE WAVE BY AN ACOUSTICALLY SOFT ELLIPSOID

R. Z. Muratov, S. P. Efimov

The approximate solution of the problem of the plane wave low-frequency scattering by the triaxial ellipsoid with the absolutely soft boundary has been obtained by the perturbation method applied to the scalar integral acoustic equation. For the near field, the scattering amplitude and the effective scattering section, 3,4 and 3 Rayleigh series- terms respectively have been found. The limiting case of this problem—scattering by the soft elliptic disk is investigated.

УДК 538.245

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Н. Н. Насонов

Теоретически исследована устойчивость нелинейной однородной прецессии намагниченности в ограниченных ферритовых образцах относительно возбуждения спиновых волн.

ВВЕДЕНИЕ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Изучение характера нелинейных движений намагниченности в ферромагнетиках при быстром изменении направления внешнего магнитного поля представляет значительный интерес для приложений: применение ферромагнетиков в качестве элементов памяти [1], самоускорение сильноточных электронных пучков в гиротропных ферритовых волноводах [2-4]. Особый интерес представляет вопрос об устойчивости однородной прецессии магнитного момента относительно возбуждения неоднородных колебаний намагниченности [5-7]. Рассмотрим подробнее процесс генерации спиновых волн.

Исходим из уравнения движения намагниченности

$$\dot{M} = -\gamma_e [M, H_{\text{эфф}}], \quad (1)$$

где $H_{\text{эфф}} = H_{\text{вн}} + H_p + q \nabla^2 M$, $H_{\text{вн}}$ — внешнее поле, H_p — размагничивающее поле, q — константа обменного взаимодействия.

Следуя [5], представим M и $H_{\text{эфф}}$ в виде суммы однородного и неоднородного в пространстве слагаемых:

$$M = M_0 + \sum_k M_k e^{ikr}, \quad H_{\text{эфф}} = H_0 + \sum_k H_k e^{ikr}. \quad (2)$$

Предполагая $M_k \ll M_0$, получаем из (1) и (2) уравнение движения однородной намагниченности:

$$\dot{M}_0 = \gamma_e [H_{\text{вн}} - 4\pi \vec{N} \cdot M_0, M_0], \quad (3)$$

где \vec{N} — тензор размагничивающих коэффициентов, и уравнение для спиновой волны:

$$\dot{M}_k = [\omega_H - 4\pi \vec{N} \omega_M + qk^2 \omega_M, M_k] + 4\pi \frac{(k, M_k)}{k^2} [\omega_M, k], \quad (4)$$

где $\omega_H = \gamma_e H_{\text{вн}}$, $\omega_M = \gamma_e M_0$.

В [6] изучалось перемагничивание ферритовых сфер и пластинок, при этом рассматривались углы между $H_{\text{вн}}$ и M_0 , близкие к 0 или π . Уравнение (3), в котором учитывались слагаемые, ответственные за диссипацию, линеаризовывалось, и в (4) подставлялись только постоянные составляющие H_0 и M_0 , что давало для M_k систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Анализ системы, проведен-

ный в [6] (и ранее в [5], где исследовалась незатухающая прецессия), показал, что в определенных условиях однородное состояние намагниченности неустойчиво относительно нарастающих спиновых волн (неустойчивость относительно образования доменной структуры).

Кроме отмеченной неустойчивости в ферритах может иметь место хорошо изученное параметрическое возбуждение спиновых волн [8-10]. В [5, 7] спиновая нестабильность рассматривалась, в отличие от [8-10], при немалых углах между $H_{\text{вн}}$ и M_0 , когда постоянная и переменная составляющие решений уравнения (3) сравнимы по величине.

В [5] исследовался случай ферритовой сферы, когда $N_{ik} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$ и переменная составляющая $M_0(t)$ совершает гармонические колебания во времени; при этом использованное в [5] разложение позволило рассматривать углы между $H_{\text{вн}}$ и M_0 , не близкие к $\pi/2$. В [7] рассматривалась неустойчивость однородной прецессии в безграничном ($\vec{N} \equiv 0$) анизотропном феррите; при этом в выражении для H_k не было учтено слагаемое $-4\pi \frac{k(k, M_k)}{k^2}$, обусловленное диполь-дипольным взаимодействием.

В настоящей работе исследуется устойчивость однородной прецессии намагниченности, возбуждаемой в ферритовой пластинке импульсным полем $H_{\text{вн}}$, направленным под углом $\pi/2$ к начальному положению M_0^* . В этих условиях прецессия происходит с максимальной амплитудой и движение $M_0(t)$ существенно отличается от гармонического.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПРЕЦЕССИИ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ОБЛАСТИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим ферритовую пластинку, расположенную в плоскости YZ . Пусть в начальный момент времени $H_{\text{вн}} = 1_y H$ и $M = 1_z M_n$ (M_n — момент насыщения, $H \ll 4\pi M_n$). Для пластинки $N \cdot M_0 = \vec{M}_{0x}$, с учетом этого из (3) нетрудно получить для $m_{0y} = M_{0y} M_n^{-1}$ следующее уравнение:

$$\dot{m}_{0y} = \gamma_e \sqrt{8\pi M_n H} \sqrt{m_{0y}} \sqrt{1 - m_{0y}^2 - \frac{H}{4\pi M_n} m_{0y}} \quad (5)$$

Зависимость компонентов M_0 от времени легко определяется из (5) и (3) с учетом интеграла $M_0^2(t) = \text{const} = M_n^2$ и соотношения $H \ll 2\pi M_n$. Имеем

$$M_{0y}(t) = M_n \operatorname{cn}^2 \left(F(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$F(t) = K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \gamma_e \sqrt{4\pi M_n H} t,$$

$$M_{0x}(t) = \sqrt{\frac{M_n H}{2\pi}} \operatorname{cn} \left(F(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \ll M_{0y}, \quad (6)$$

$$M_{0z}(t) = \sqrt{M_n^2 - M_{0x}^2 - M_{0y}^2} \approx M_n \operatorname{sn} \left(F(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{1 + \operatorname{cn}^2 \left(F(t), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)},$$

* Этот случай наиболее интересен для приложения [2-4].

где sn и cn — эллиптические функции Якоби, $K(\sqrt{2}/2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Из (6) следует, что $\mathbf{M}_0(t)$ движется в основном в плоскости пластинки [6].

Перейдем к исследованию устойчивости однородных колебаний $\mathbf{M}(t)$. Подставляя (6) в (14) и учитывая, что $\omega_H \ll \omega_{Mx} \ll \omega_{My}, \omega_{Mz}$, получаем для компонентов \mathbf{M}_k в случае длинноволновых $\left(k^2 \ll \ll \frac{4\pi}{g} \sim 10^{10} \text{ см}^{-2} \right)$ возмущений следующую систему уравнений:

$$\dot{M}_{ky} = 4\pi n_x \omega_{Mz} (n_x M_{kx} + n_y M_{ky} + n_z M_{kz}), \quad (7)$$

$$\omega_{My} \dot{M}_{ky} = -\omega_{Mz} \dot{M}_{kz},$$

$$(n_z \omega_{My} - n_y \omega_{Mz}) \dot{M}_{ky} = n_x \omega_{Mz} \dot{M}_{kx},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Из (7) легко получить замкнутое уравнение для M_{ky} :

$$\ddot{M}_{ky} = \frac{\dot{\omega}_{Mz}}{\omega_{Mz}} \dot{M}_{ky}. \quad (8)$$

Окончательные выражения для \mathbf{M}_k , которые просто получаются из (7) и (8), имеют вид

$$M_{ky} = M_{ky}(0) = \frac{\dot{M}_{ky}(0)}{\omega_{Mz}(0)} \int_0^t \omega_{Mz}(t') dt',$$

$$M_{kz} = M_{kz}(0) - \frac{\dot{M}_{ky}(0)}{\omega_{Mz}(0)} \int_0^t \omega_{My}(t') dt', \quad (9)$$

$$M_{kx} = M_{kx}(0) + \frac{\dot{M}_{ky}(0)}{\omega_{Mz}(0)} \int_0^t (n_z \omega_{My}(t') - n_y \omega_{Mz}(t')) dt',$$

где $\dot{M}_{ky}(0)$ определяется из первого уравнения (7), $\omega_{Mz}(0) = \gamma_e M_{11}$.

Поскольку, согласно (6), среднее за период значение функции $\omega_{Mz}(t)$ равно нулю, то, как следует из (9), возмущения, параллельные магнитному полю H_y , возбуждающему нелинейную прецессию, не нарастают со временем. Однако ввиду наличия постоянной составляющей у функции $\omega_{My}(t)$ будут, согласно (9), линейно нарастать с течением времени возмущения, перпендикулярные H_y .

Результат (9) (линейный рост возмущений) существенно отличается от полученного в [5] в случае ферритовой сферы. Резкая анизотропия размагничивающего поля $\mathbf{H}_{p0} = -4\pi \overleftrightarrow{N} \cdot \mathbf{M}_0$, обусловленная геометрией пластинки, допускает при $H_{вн} \ll 4\pi M_n$ лишь незначительные отклонения \mathbf{M}_0 от плоскости пластинки так, что больших \mathbf{H}_{p0} не возникает и движение \mathbf{M}_k определяется в основном последним слагаемым в (4), обусловленным неоднородным диполь-дипольным взаимодействием. В случае сферы размагничивающее поле велико ($\mathbf{H}_{p0} = - (4\pi/3)\mathbf{M}_0$), при этом характер движения \mathbf{M}_k существенно меняется (см. (4)), что может привести к экспоненциальному росту возмущений. Спиновая нестабильность в сфере в случае однородной прецессии максимальной амплитуды будет рассмотрена в следующем разделе настоящей работы.

2. ОБЛАСТЬ КОРОТКОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследуем устойчивость нелинейной прецессии намагниченности в ферритовой пластинке в области коротковолновых возмущений, когда $qk^2 \gg 4\pi$ и в уравнении (4) необходимо сохранить слагаемое, соответствующее обменному взаимодействию. Имеем

$$\frac{d}{d\tau} M_k = [\omega, M_k + \varepsilon n(n, M_k)], \tag{10}$$

где $\tau = qk^2 \gamma_e M_H t$, $\omega_M = \gamma_e M_H \omega$, $\varepsilon = 4\pi/qk^2$. Поскольку $\omega \approx 1_y \omega_y + 1_z \omega_z$, $\omega_y^2 + \omega_z^2 = 1$ (см. (6)), то для дальнейшего анализа удобно перейти во вращающуюся систему координат:

$$\begin{aligned} M_{k1} &= \cos \varphi M_{kz} - \sin \varphi M_{ky}, & M_{k2} &= \sin \varphi M_{kz} + \cos \varphi M_{ky}, \\ n_1 &= \cos \varphi n_z - \sin \varphi n_y, & n_2 &= \sin \varphi n_z + \cos \varphi n_y, \end{aligned} \tag{11}$$

$\cos \varphi \equiv \omega_y, \quad \sin \varphi \equiv \omega_z.$

Из (10) и (11) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} M_{kx} &= M_{k1} + \varepsilon n_1(n, M_k), \\ \frac{d}{d\tau} M_{k1} &= -M_{kx} - \varepsilon n_x(n, M_k) - \frac{d\varphi}{d\tau} M_{k2}, \\ \frac{d}{d\tau} M_{k2} &= \frac{d\varphi}{d\tau} M_{k1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Непосредственным вычислением легко показать, что $\frac{d\varphi}{d\tau} \sim \varepsilon \sqrt{\frac{H}{4\pi M_H}} \varphi \ll 1$, так что $M_{k2} \approx 0$ и $(n, M_k) \approx n_x M_{kx} + n_1 M_{k1}$

При этом из (12) имеем, учитывая медленность изменения функции. M_k , следующее уравнение для M_{k1} :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} M_{k1} + [1 + \varepsilon(n_x^2 + n_1^2)] M_{k1} = 0. \tag{13}$$

Из (13) следует устойчивость однородной прецессии в области коротковолновых возмущений, когда начинает сказываться стабилизирующее действие обменных сил, препятствующих возникновению неоднородной намагниченности. Действительно, хотя (13) и допускает параметрический резонанс (n_1 — периодическая функция времени), однако возможные резонансы имеют гошь высокие порядки, что практически не будут возбуждаться с учетом затухания спиновых волн. При этом, поскольку коэффициент при M в (13) строго положителен, решением (13) является тригонометрическая функция с медленно колеблющейся частотой.

Таким образом, при углах между M_0 и $H_{вн}$, близких к $\pi/2$, параметрическое возбуждение спиновых волн невозможно, что легко понять. При малых углах спектр спиновых волн определяется в основном постоянными составляющими M_0 и H_0 , при этом частоты спиновых волн могут быть близки к частоте однородной прецессии (или к половине частоте), что является необходимым условием параметрического воз-

буждения спиновых волн. При углах, близких к $\pi/2$, M_k осциллирует с характерной частотой $4\pi\gamma_e M_H$, что при $H_{вн} \ll 4\pi M_H$ намного превышает частоту однородной прецессии намагниченности.

Для сравнения исследуем устойчивость однородной прецессии максимальной амплитуды в ферритовой сфере. При этом решения (3) имеют вид

$$M_{0z} = M_H \cos(\alpha\xi), \quad M_{0x} = M_H \sin(\alpha\xi), \quad (14)$$

где $\alpha = \frac{H}{4\pi M_H} \ll 1$, $\xi = 4\pi\gamma_e M_H t$, $M_{0y} = 0$. Из уравнения для M_k

$$\frac{d}{d\xi} M_k = \left[\omega, n(n, M_k) - \left(\frac{1}{3} - \alpha \right) M_k \right], \quad (15)$$

где $\alpha = qk^2/4\pi$, получаем во вращающейся системе координат (аналогично (11)) следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} M_{ky} = n_1 n_y M_{ky} + \left(n_1^2 + \alpha - \frac{1}{3} \right) M_{k1}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\xi} M_{k1} = -n_1 n_y M_{k1} - \left(n_y^2 + \alpha - \frac{1}{3} \right) M_{ky}.$$

Замкнутое уравнение для M_{k1} имеет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} M_{k1} + \left(\alpha - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} + \alpha - n_2^2 \right) M_{k1} = 0. \quad (17)$$

Существенным отличием (17) от уравнения (13) является наличие нарастающих во времени решений. Легко видеть, что в области длинноволновых возмущений, определяемой неравенством

$$(n_x \sin(\alpha\xi) + n_z \cos(\alpha\xi))^2 - \frac{2}{3} < \alpha < \frac{1}{3}, \quad (18)$$

решением (17) является гиперболическая функция, что указывает на экспоненциальный рост возмущений в указанной области значений параметров уравнения (17). В области больших k ($k > \sqrt{\frac{4\pi}{3q}}$) обменные силы стабилизируют неустойчивость.

Таким образом, как и в случае ферритовой пластинки (см. (9)), однородное состояние намагниченности в сфере может быть неустойчиво относительно образования доменной структуры, причем наличие больших размагничивающих полей в случае нелинейной однородной прецессии в сфере приводит к экспоненциальному росту возмущений, в то время как в случае пластинки имеет место лишь линейное нарастание возмущений.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что характер неустойчивости однородной прецессии намагниченности в ограниченных ферритовых образцах существенно зависит от геометрии образца и угла между возбуждающим прецессию магнитным полем H и начальным направлением намагниченности M .

Нелинейная однородная прецессия, происходящая при больших углах (близких к $\pi/2$) между M и H , устойчива относительно парамет-

рического возбуждения спиновых волн, поскольку в этом случае не выполняются условия параметрического резонанса.

Геометрия образца, определяющая характер размагничивающих полей, оказывает существенное влияние на развитие неустойчивости относительно образования доменной структуры; так в случае сферы имеет место экспоненциальный рост возмущений, в то время как в случае пластинки возмущения линейно растут со временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Колотов, В. А. Погожев, Р. В. Телеснин, УФН, 113, № 4, 569 (1974).
2. Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 909 (1974).
3. Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович, ЖТФ, 45, № 7, 1476 (1975).
4. В. В. Закутин, Н. Н. Насонов, А. А. Ракитянский, А. М. Шендерович, Атомная энергия, 40, № 1, 59 (1976).
5. Л. Н. Булаевский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 639 (1961).
6. А. М. Родичев, Изв. АН СССР, серия Физическая, 30, № 1, 83 (1966); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 81 (1966).
7. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Г. Квирикадзе, ФТТ, 14, № 9, 2758 (1972).
8. H. Suhl, J. Phys. Chem. Sol., 1, 209 (1957).
9. Я. А. Моносов, Нелинейный ферромагнитный резонанс, изд. Наука, М., 1971.
10. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, УФН, 114, № 4, 609 (1974).

Поступила в редакцию
23 августа 1976 г.

THE STABILITY OF THE NONLINEAR HOMOGENEOUS MAGNETIZATION PRECESSION

N. N. Nasonov

The stability of the nonlinear homogeneous magnetization precession in limited ferrit samples relative to the spin wave excitation is investigated theoretically.

УДК 621.371.242.7

О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЗАДАЧЕ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ АТМОСФЕРЫ ПРИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ

В. А. Андрианов, В. Н. Секистов

Исследована лучевая структура поля УКВ при радиопросвечивании атмосферы планеты с профилем эквивалентной диэлектрической проницаемости, имеющим минимум. Показано, что наряду с действительными лучами — прямыми и отраженными от поверхности планеты — имеются лучи, описываемые комплексной геометрической оптикой и физически соответствующие просачиванию радиоволн от внешнего источника в атмосферный волновод.

Применение метода радиопросвечивания для изучения атмосфер планет основано на геометрооптическом описании поля радиоволн в слабонеоднородных средах [1, 2]. Обычно для этих целей используют простые лучевые построения, а вычисление поля и его изменений из-за влияния неоднородной атмосферы основывают на законе сохранения потока энергии в лучевой трубке. Такой подход оправдан своей простотой и наглядностью и может быть обоснован в рамках нулевого приближения метода геометрической оптики. В данной работе задача о распространении радиоволн в атмосфере, характеризуемой условиями сверхрефракции, решается методом геометрической оптики с применением комплексных лучей, что позволяет уточнить нулевое приближение метода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу о радиопросвечивании атмосфер планет удобно формулировать в цилиндрической системе координат. Последнее возможно, когда радиус планеты a много больше характерного размера существенной для дифракции области, оцениваемой радиусом I зоны Френеля:

$$\rho = \sqrt{\lambda l_1 l_2 / (l_1 + l_2)} \ll a, \quad (1)$$

где λ — длина волны, $l_{1,2}$ — расстояние между лимбом планеты и соответственно точками излучения и наблюдения (часто одна из них находится на бесконечности $l_1 \rightarrow \infty$ и $\rho = \sqrt{\lambda l_2}$). В этом случае кривизна планеты практически не сказывается в направлении, перпендикулярном к направлению распространения радиоволн, и сферу можно заменить бесконечным цилиндром с образующей, перпендикулярной направлению распространения. Оценка показывает, что разница σ между площадями, закрываемыми соответственно цилиндром радиуса a и сферой на I зоне Френеля, много меньше площади самой зоны $S = \pi r^2$ (рис. 1). Действительно, из рис. 1 видно, что

$$\sigma \leq 2 \int_0^{\rho} (a - \sqrt{a^2 - x^2}) dx.$$

Нетрудно видеть, что при малых высотах над поверхностью $h = (r - a) \ll a$ введение эквивалентной среды $\kappa(z)$ соответствует переходу к модели плоской планеты с модифицированным показателем преломления: $\kappa(z) \approx \left[\varepsilon(a+h) + \frac{2h}{a} \right] [3]$.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В дальнейшем нас будет интересовать тропосфера Венеры или Земли. При наличии сверхрефракции функция $\kappa(z)$ для тропосферы имеет минимум при $z = z_m$ на интервале $[0, \infty)$, в окрестности которого она может быть аппроксимирована кривой второго порядка:

$$\begin{aligned} \kappa(z) &\approx \kappa_0 + \kappa_2(z - z_m)^2, \\ \kappa_0 &\equiv \kappa(z_m), \quad \kappa_2 \equiv \kappa''(z_m)/2!, \quad |z - z_m| \ll 1, \\ \kappa_0 &> 0, \quad \kappa_2 > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Выше $z = z_m$ решение (4) можно строить в обычном приближении геометрической оптики, вблизи z_m оказывается необходимым учитывать наряду с действительными решениями системы уравнений характеристик для уравнения эйконала (обычные лучи) и комплексные решения этой системы — комплексные лучи. Обзор теории комплексной геометрической оптики содержится в [5].

Асимптотику решения (4) в нулевом приближении геометрической оптики ищем в виде локально-плоской волны с комплексными амплитудой $A(z, \theta)$ и фазой $\Psi(z, \theta)$:

$$U(z, \theta) \simeq A(z, \theta) \exp[ik\Psi(z)], \quad (6)$$

где $z = z' + iz''$, $\theta = \theta' + i\theta''$ — комплексные координаты. При подстановке (6) в (4) получим уравнение эйконала для $\Psi(z, \theta)$ и уравнение переноса для $A(z, \theta)$ [4-6]:

$$\begin{aligned} (\partial\Psi/\partial z)^2 + (\partial\Psi/\partial\theta)^2 &= \kappa(z), \\ 2(\partial A/\partial z)(\partial\Psi/\partial z) + 2(\partial A/\partial\theta)(\partial\Psi/\partial\theta) + A(\partial^2\Psi/\partial z^2 + \partial^2\Psi/\partial\theta^2) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Формально комплексные лучи определяются как комплексные решения этих уравнений.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик для решения уравнения эйконала в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} dz/d\tau &= p, \quad dp/d\tau = (1/2)d\kappa/dz, \\ d\theta/d\tau &= q, \quad dq/d\tau = 0, \\ d\Psi/d\tau &= \kappa(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где $p = \partial\Psi/\partial z$, $q = \partial\Psi/\partial\theta$, τ — комплексный параметр вдоль траектории луча.

Систему (8) можно проинтегрировать, получив уравнение траектории луча

$$\theta(z, \mu) = \theta_0 + \mu \int \frac{dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} \quad (9a)$$

и выражение для фазы

$$\Psi(z, \theta, \mu) = \Psi_0 + \mu(\theta - \theta_0) + \int_c \sqrt{x(z) - \mu^2} dz = \Psi_0 + \int_c \frac{x(z) dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}}. \quad (96)$$

Здесь μ — постоянная интегрирования: $q(\tau) = \mu$. Она определяется из дифференциальной формы уравнения траектории луча (закона Снеллиуса) — вводя обычным образом угол α вдоль траектории луча в точке наблюдения $\operatorname{tg} \alpha = rd\theta/dr = d\theta/dz$, получим из (9 а) $\sqrt{x(z)} \sin \alpha = \mu$. Безразмерная величина μ представляет собой отношение к радиусу пла-

неты a прицельного параметра $\tilde{\mu} \equiv a\mu$ (терминология теории рассеяния частиц), в дальнейшем прицельным называем параметр μ . Физический смысл $\tilde{\mu}$ ясен при переходе к исходным координатам (r, θ) :

$r \sqrt{\varepsilon(r)} \sin \alpha = \tilde{\mu}$; при $r \rightarrow \infty$ $\varepsilon(r) \rightarrow 1$, $\tilde{\mu} \rightarrow r \sin \alpha$. Существенно, что параметр μ является вещественным, в то время как (8) допускает комплексные решения для действительных точек наблюдения, которые и приводят к комплексным лучам. Рассмотрение комплексных лучей ведется в многомерном комплексном пространстве, где каждой действительной координате сопоставляется ось ее мнимых значений. При этом комплексные лучи, приходящие в действительные точки наблюдения, выходят из комплексных точек [5, 6]. Поэтому точечный (линейный в цилиндрических координатах) источник необходимо рассматривать как прямую в этом пространстве, пересекающую ось действительных значений координат в одной точке, которая определяет фактическое расположение источника. В результате, во-первых, начальная фаза комплексного луча задается не в точке действительного расположения источника, а по всей прямой в комплексном пространстве подобно тому, как это делается для действительных лучей при задании плоской волны начальными фронтами. Считая при фактическом расположении источника (z'_0, θ'_0) в физическом пространстве начальной фазой $\Psi = 0$, по первой из формул (9 б) можно найти Ψ_0 :

$$\Psi(z'_0, \theta'_0, \mu) = \Psi_0 - i\mu \operatorname{Im} \theta_0 = \Psi_0 - i\mu \theta'_0 = 0,$$

откуда $\Psi_0 = i\mu \theta'_0$. Во-вторых, траектории комплексных лучей определяются в результате выбора контура интегрирования C в интегралах (9) на плоскости комплексной переменной z — они выходят из комплексной точки (z_0, θ_0) , расположенной на линии-источнике, и оканчиваются в действительной точке наблюдения (z', θ') . Выбором контура интегрирования определяется тип луча. Одновременно следует считать, что функции $\varepsilon(r(z))$ и $x(z)$ могут быть аналитически продолжены в область комплексных значений z . Отмеченные две особенности характеризуют основные правила оперирования с комплексными лучами при решении уравнения эйконала в рассматриваемой задаче.

Решение уравнения переноса в (7) дается обычными формулами нулевого приближения геометрической оптики [5]. Именно, для амплитуды $A(z, \theta)$ имеем

$$A(z, \theta) = A_0 / \sqrt{J},$$

где $J = \frac{\partial(z, \theta)}{\partial(\mu, \tau)}$ — якобиан перехода к лучевой системе координат, которая в нашем случае характеризуется параметром вдоль луча τ и прицельным параметром μ , определяющим данный луч. Используя решения системы (8), можно получить

$$J = -\sqrt{x(z) - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\mu \int_c \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} \right)$$

или в силу уравнения траектории (9 а)

$$J = - \sqrt{\kappa(z) - \mu^2} \frac{\partial[\theta(z, \mu) - \theta_0]}{\partial \mu}.$$

Тогда для амплитуды $A(z, \mu)$ получим выражение

$$A(z, \mu) = A_0 \left(- \sqrt{\kappa(z) - \mu^2} \frac{\partial[\theta(z, \mu) - \theta_0]}{\partial \mu} \right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Величину постоянной A_0 в (10) при наличии источника в точке (z_0, θ_0) определим, пользуясь принципом локальности [4, 5], который заключается в том, что в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r_0)$ амплитуда A имеет цилиндрическую расходимость вблизи источника в соответствии с характером поведения асимптотики функции Грина двумерной задачи $\Gamma = i H_0^{(1)}(kR)/4$, где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля I рода, R — расстояние между источником и точкой наблюдения. Выполним переход к однородной среде $\epsilon(r) \rightarrow \epsilon(r_0)$ в (9) и сравним (10) с главным членом асимптотики функции Грина при $R \rightarrow 0$, получим

$$A(z, \mu) = (8\pi k)^{-1/2} e^{i\pi/4} \left[- \sqrt{\kappa(z) - \mu^2} \sqrt{\kappa(z_0) - \mu^2} \frac{\partial[\theta(z, \mu) - \theta_0]}{\partial \mu} \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

Полученное выражение может быть использовано для вычисления поля в конкретных условиях. Убедимся в том, что амплитуда поля остается конечной в точке поворота луча: $J(\mu, z_{1,2}, \theta) \neq 0$. Вычисляя производную $\partial[\theta(z, \mu) - \theta_0]/\partial \mu$ на основании (9 а), получим в точке поворота

$$\frac{\partial[\theta(z, \mu) - \theta_0]}{\partial \mu} \Big|_{z=z_{1,2}} = - \frac{2\mu^2}{\kappa(z) \sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} \Big|_{z=z_{1,2}} + D(\mu).$$

При подстановке ее в (11) корни $\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}$ сокращаются, а второй член $D(\mu)$, не зависящий от z , дает нуль при умножении на $\sqrt{\kappa(z_{1,2}) - \mu^2} = 0$, и амплитуда поля остается конечной в точке поворота.

3. СИСТЕМА ЛУЧЕЙ

Итак, в силу формул (6), (9) и (11) построение геометрооптического выражения поля данного луча (действительного или комплексного) сводится к выбору контура интегрирования C и собственно интегрированию выражений для траектории (9 а) и фазы (9 б) луча, т. е. к исследованию интегралов в (9) на плоскости комплексной переменной z . В уравнение траектории (9 а) и выражение для фазы луча (9 б) входит функция $f(z) = \sqrt{\kappa(z) - \mu^2}$ которая в силу (5) имеет две точки ветвления $z_{1,2}$ — решения уравнения $\kappa(z_{1,2}) = \mu^2$ — в интервале $0 < \mu^2 < \kappa(0)$ и является регулярной функцией на двулистной римановой поверхности. Для фиксации ветвей однозначности функции $f(z)$ разрезы на плоскости z можно провести из точек $z_{1,2}$ на бесконечность.

В зависимости от прицельного параметра луча необходимо рассмотреть два случая: $\mu > \sqrt{\kappa_0}$ и $\mu < \sqrt{\kappa_0}$; при $\mu = \sqrt{\kappa_0}$ увеличивается погрешность метода геометрической оптики. При их анализе удобно использовать оптико-механическую аналогию с задачей рассеяния частицы на потенциальном барьере, непроницаемом с точки зрения классической механики.

В первом случае ($\mu > \sqrt{\kappa_0}$) точки ветвления $z_{1,2}$ действительны (рис. 2 а), они являются точками поворота луча—он приближается к поверхности планеты $z = 0$ и, достигнув точки z'_2 , удаляется от поверхности, порождая несколько типов лучей (схематически они показаны на рис. 3 и обсуждаются ниже). Последнее связано с тем, что геометрическому месту точек поворота луча формально соответствуют две кривые при $\kappa_0 < \mu^2 \leq \kappa(0)$ для двух решений $z_{1,2}$ (кривые 1 и 1' на рис. 3), асимптотически приближающиеся к линии $z = z_M$ при $\theta \rightarrow \infty$.

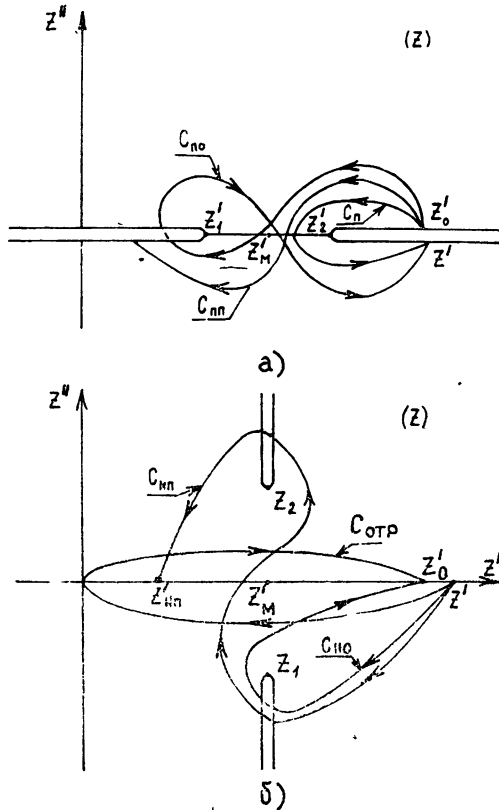


Рис. 2. Выбор контуров интегрирования на двулистной плоскости z :
 а) для действительных точек ветвления z'_1 и z'_2 ; б) для комплексных точек ветвления z_1 и z_2 .

Обычным является действительный (прямой) луч, соответствующий выбору в качестве контура интегрирования в (9) $C_{п}$ (рис. 2 а), который обходит вокруг точки z_2 . Разрезы в данном случае проведены из точек $z'_{1,2}$ на бесконечность вдоль вещественной оси, и ветви $f(z)$ фиксированы следующим образом при $z \rightarrow +\infty$:

$$\arg(z - z_2) = \begin{cases} 2\pi & \text{на верхнем берегу,} \\ 0 & \text{на нижнем берегу,} \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} -\sqrt{\kappa(z) - \mu^2} & \text{на верхнем берегу,} \\ +\sqrt{\kappa(z) - \mu^2} & \text{на нижнем берегу,} \end{cases}$$

В результате при обходе вокруг z'_2 функция $f(z)$ получает приращение аргумента, равное π , и луч $TT'R$ становится удаляющимся от поверхности $z = 0$ (рис. 3). Уравнения траектории и фазы луча имеют, соответственно, вид

$$\theta'_{\text{пр}} = \theta_0 + \mu \int_{z_2}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z_2}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}},$$

$$\Psi_{\text{пр}} = \int_{z_2}^{z'_0} \frac{x(z) dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_{z_2}^{z'} \frac{x(z) dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}}.$$
(12)

Здесь учтено, что в силу регулярности $f(z)$ на двулистной римановой поверхности контур интегрирования можно деформировать без изменения значения интеграла так, чтобы он проходил фактически вдоль участков вещественной оси; нетрудно показать, что интегралы по дугам окружности бесконечно малого радиуса вокруг точек ветвления равны нулю. Изучая поведение прямого луча при значении прицельного параметра μ , равном $\sqrt{x_0}$, можно убедиться в том, что прямой луч асимптотически приближается к так называемому уровню критической рефракции $z = z_M$ при $\theta \rightarrow \infty$, не проникая ниже этого уровня (кривая 2 на рис. 3). Отметим, что при расположении точки наблюдения $R(z, \theta)$ левее точки T' (рис. 3) луч не достигает точки поворота и его траектория определяется интегрированием вдоль контура, целиком расположенного на верхнем берегу разреза при $z' > z'_2$. Этот луч идет либо вверх ($z' > z'_0$), либо вниз ($z' < z'_0$).

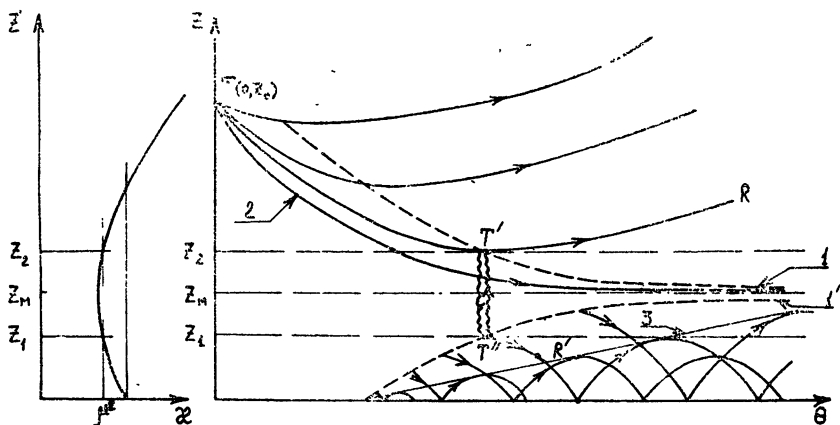


Рис. 3. Картина лучей в эквивалентной плоскостроистой среде для внешнего источника T при $\mu^2 > x_0$.

Комплексные лучи возникают математически в силу того, что контуром C_{II} не исчерпывается многообразие возможных путей интегрирования на комплексной плоскости z при наличии второй точки ветвления z'_1 . Выбирая при интегрировании в (9) контур C_{III} (рис. 2 а), получим комплексный луч, отвечающий в рамках оптико-механической аналогии подбарьерному прохождению квантовомеханической частицы с

малой энергией — будем называть его подбарьерно-прошедшим лучом. Выбранное направление обхода точек $z'_{1,2}$ связано, во-первых, с необходимостью ослабления амплитуды за барьером и, во-вторых, с необходимостью того, чтобы приращение аргумента $f(z)$ при просачивании в приповерхностный волновод [3] было равно нулю, что отвечает дальнейшему приближению луча к поверхности планеты. В результате можно записать уравнение траектории и фазы подбарьерно-прошедшего луча:

$$\theta'_{nn} = \theta_0 + \mu \int_{z_2}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z_{nn}}^{z'_1} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + i\mu \int_{z_1}^{z'_2} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2 - x(z)}}, \quad (13)$$

$$\Psi'_{nn} = \int_{z_2}^{z'_0} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_{z_{nn}}^{z'_1} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + i \int_{z_1}^{z'_2} \sqrt{\mu^2 - x(z)} dz.$$

В выражении фазы последний член отвечает экспоненциальному ослаблению подбарьерно-прошедшего луча, что представляется естественным. Заметим, что функция $f(z)$ следующим образом аналитически продолжена на всю вещественную ось:

$$f(z) = \begin{cases} \mp \sqrt{x(z) - \mu^2} & (z \geq z_{1,2}) \\ i \sqrt{\mu^2 - x(z)} & (z \in [z_1, z_2]) \end{cases}$$

«Траектория» луча $TT'T'R'$ схематически показана на рис. 3 сплошной и волнистой линиями. Именно этот подбарьерно-прошедший луч обеспечивает слабое возбуждение приповерхностного волновода при расположении источника выше его верхней границы и проясняет механизм возбуждения. Его можно назвать возбуждением через просачивание подбарьерно-прошедших лучей. Отражаясь от поверхности планеты, эти лучи образуют систему каустик — кривая 3 показывает каустик после однократного отражения лучей от поверхности планеты, аналогичные каустики образуются при последующих отражениях.

Еще один тип комплексного луча возникает при отражении от точки поворота z'_1 . Это подбарьерно-отраженный луч, он соответствует рассмотрению в качестве контура интегрирования C_{no} (рис. 2 а). Выражения для уравнения траектории и фазы записываются аналогично предыдущим:

$$\theta'_{no} = \theta_0 + \mu \int_{z_2}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z'_2}^{z'_1} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + 2i\mu \int_{z_1}^{z'_2} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2 - x(z)}}, \quad (14)$$

$$\Psi'_{no} = \int_{z_2}^{z'_0} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_{z'_2}^{z'_1} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + 2i \int_{z_1}^{z'_2} \sqrt{\mu^2 - x(z)} dz.$$

Схематически ему соответствует траектория $TT'T'R'$ (рис. 3).

В заключение отметим, что каждому из эффектов подбарьерного прохождения и подбарьерного отражения соответствует не один луч, а счетнозначная система комплексных лучей. Действительно, взяв

вместо контуров $C_{\text{пп}}$ и $C_{\text{по}}$ контуры, выходящие из z'_0 , m раз обходящие вокруг обеих точек ветвления z'_1 , z'_2 в положительном направлении и после m -го обхода идущие так же, как и $C_{\text{пп}}$ и $C_{\text{по}}$, можно получить обобщенные выражения траектории и фазы комплексных лучей в виде:

$$\begin{aligned} \theta'_{\text{пп}} &= \theta_0 + \mu \int_{z'_2}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z'_{\text{пп}}}^{z'_1} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + i(m + 1/2)\mu \oint_{c_1} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2 - x(z)}}, \\ \Psi_{\text{пп}} &= \int_{z'_2}^{z'_0} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_{z'_{\text{пп}}}^{z'_1} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + i(m + 1/2) \oint_{c_1} \sqrt{\mu^2 - x(z)} dz, \\ \theta'_{\text{по}} &= \theta_0 + \mu \int_{z'_2}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z'_2}^{z'} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + im\mu \oint_{c_1} \frac{dz}{\sqrt{\mu^2 - x(z)}}, \\ \Psi_{\text{по}} &= \int_{z'_2}^{z'_0} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_{z'_2}^{z'} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + im \oint_{c_1} \sqrt{\mu^2 - x(z)} dz \end{aligned} \quad (15)$$

$(m = 0, 1, 2 \dots)$,

где C_1 охватывает точки ветвления в положительном направлении.

Комплексные лучи высоких номеров m для широкого барьера пренебрежимо малы по амплитуде, однако при приближении точек поворота к границе свэрхрефракции z_M (при $\mu \rightarrow \sqrt{x_0}$), когда барьер становится сравнительно тонким, их учет (в рамках применимости метода геометрической оптики) может оказаться необходимым.

Рассмотрим второй случай: $\mu < \sqrt{x_0}$. В этом случае точки ветвления (z_1, z_2) комплексно сопряжены (рис. 2 б). Луч с прицельным параметром $\mu < \sqrt{x_0}$ доходит до уровня критической рефракции z_M , где порождает несколько типов лучей. Прежде всего отметим действительный луч, который возникает при выборе в качестве контура интегрирования C в (9) контура $C_{\text{отр}}$, проходящего просто вдоль действительной оси. Этот луч отражается, достигнув поверхности планеты (при $z = 0$). Уравнение траектории и выражение для фазы отраженного луча можно записать в виде (при отражении приходящая волна становится уходящей)

$$\begin{aligned} \theta'_{\text{отр}} &= \theta_0 + \mu \int_0^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \int_0^{z'} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}}, \\ \Psi_{\text{отр}} &= \int_0^{z'_0} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \int_0^{z'} \frac{x(z)dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим следующее. В однородной среде $\epsilon(r) = 1$ при наличии граничной поверхности $z = 0$ предельное положение отраженного луча соответствует касанию им поверхности и определяет границу между освещенной областью и областью тени. Граница «свет—тень» обусловлена выпуклостью исходной цилиндрической поверхности (ростом с высотой z эквивалентной диэлектрической проницаемости $\kappa(z)$ в плоской задаче). Неоднородная среда $\epsilon(r) \neq 1$ оказывает влияние на положение в пространстве границы «свет—тень». Это влияние удобно оценивать, рассматривая поведение радиуса кривизны траектории луча. Для эквивалентной среды $\kappa(z)$ он определяется формулой [7].

$$\rho_{\text{ЭКВ}} = \frac{|1 + (d\theta/dz)^2|^{3/2}}{d^2\theta/dz^2}$$

и равен

$$\rho_{\text{ЭКВ}} = - \frac{2\kappa^{3/2}(z)}{\mu\kappa'(z)}, \quad (17)$$

где штрих означает дифференцирование по z .

Из (17) видно, что при монотонном росте $\kappa(z)$ с изменением z ($\kappa'(z) > 0$ и не меняет знак на интервале $[0, \infty)$) имеем $\rho_{\text{ЭКВ}} < 0$ — траектория обращена вогнутостью вверх. Такое поведение знака $\rho_{\text{ЭКВ}}$ характерно и для касательного луча, определяющего границу «свет—тень» [3]. Для атмосферы Венеры имеем $\kappa'(z) > 0$ при $z_M < z < \infty$, $\kappa'(z_M) = 0$, $\kappa'(z) < 0$ при $0 < z < z_M$, т. е. с высотой изменяется знак $\rho_{\text{ЭКВ}}$, и вблизи $z = 0$ траектория луча обращена вогнутостью вниз и луч не касается поверхности. Можно указать предельное значение угла α при $z = 0$, при котором еще наблюдается отражение от планеты действительного луча: $\alpha_{\text{пр}} = \arcsin \sqrt{\kappa_0/\kappa(0)}$. Следовательно, при радиопросвечивании атмосферы Венеры ($z, z_0 > z_M$) отсутствует область тени, и в любую точку пространства за планетой можно попасть либо прямым, либо отраженным от ее поверхности лучом. Это характеризует аномальную рефракцию в атмосфере Венеры [2] и определяет аномальный характер дифракционных эффектов. Линию $z = z_M$ обычно называют уровнем критической рефракции.

При $\mu < \sqrt{\kappa_0}$ комплексный луч соответствует выбору контура $C_{\text{НО}}$ при интегрировании в (9), его можно назвать надбарьерно-отраженным лучом. Выбранный контур обходит точку z_1 , а не z_2 , чтобы амплитуда луча экспоненциально ослабевала. Контур можно деформировать в участки отрезков между точками z, z_0 и z_M вдоль вещественной оси и затем между точками z_M и z_1 вдоль кривой $\text{Im} f(z) = 0$ (для параболической аппроксимации (5) она проходит параллельно мнимой оси). На выбранном таким образом контуре функция $f(z)$ действительна, однако интегрирование ее на участке $[z_M, z_1]$ дает чисто мнимую величину в связи с мнимым характером $dz = idz''$. Выражения для траектории и фазы надбарьерно-отраженного луча имеют вид

$$\theta'_{\text{НО}} = \theta_0 + \mu \int_{z_M}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} + \mu \int_{z_M}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} + \mu \oint_{c_2} \frac{dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}}, \quad (18)$$

$$\Psi_{\text{НО}} = \int_{z_M}^{z_0} \frac{\kappa(z) dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} + \int_{z_M}^{z_1} \frac{\kappa(z) dz}{\sqrt{\kappa(z) - \mu^2}} + \oint_{c_3} \sqrt{\kappa(z) - \mu^2} dz,$$

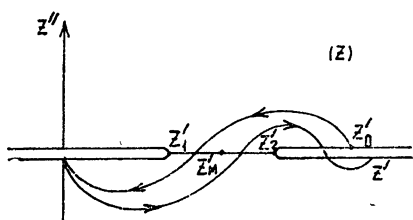
где C_2 — замкнутый контур, охватывающий точки z_m и z_1 , интеграл по этому контуру представляет собой в связи со сказанным выше чисто мнимую величину.

Отметим также надбарьерно-прошедший луч, соответствующий контуру $C_{\text{нп}}$ на рис. 2б. Его амплитуда экспоненциально мала по сравнению с надбарьерно-отраженным лучом, для его траектории и фазы, имеем выражения:

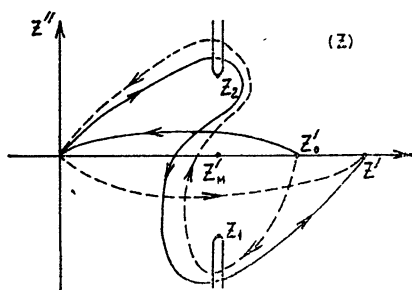
$$\theta'_{\text{нп}} = \theta_0 + \mu \int_{z_{\text{нп}}}^{z'_0} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \mu \oint_{C_2} \frac{dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}}, \quad (19)$$

$$\Psi_{\text{нп}} = \int_{z_{\text{нп}}}^{z'_0} \frac{x(z) dz}{\sqrt{x(z) - \mu^2}} + \oint_{C_2} \sqrt{x(z) - \mu^2} dz.$$

Как и выше, необходимо отметить, что надбарьерно-отраженному и надбарьерно-прошедшему лучам соответствуют счетнозначные системы комплексных лучей при интегрировании по контурам, которые m раз обходят точки z_1 и z и после m -го обхода идут так же, как $C_{\text{но}}$ и $C_{\text{нп}}$. Уравнения их траекторий и фазы можно записать аналогично (15).



а)



б)

Рис. 4. Контур интегрирования для комплексных лучей, однократно отраженных от поверхности планеты.

этих лучей также образует счетно-значную систему. При необходимости несложно выписать уравнения их траекторий и выражения фаз.

Нетрудно видеть, что контуры на рис. 2 и 4 с учетом кратности по числу обходов m вокруг точек поворота исчерпывают все возможные контуры, не противоречащие физическому смыслу (например, не соответствует физическому смыслу подбарьерно-прошедший луч, экспо-

Теперь необходимо отметить роль лучей, действительных и комплексных, отраженных от поверхности планеты, в образовании новых систем комплексных лучей при прохождении уровня критической рефракции $z = z_m$ снизу. Не останавливаясь подробно на всех многократных переотражениях, отметим три типа лучей, однократно отраженных от поверхности планеты, экспоненциальное ослабление которых в точке приема не превышает экспоненциального ослабления уже рассмотренного подбарьерно-отраженного луча.

Это, во-первых, дважды подбарьерно-прошедший луч при $\mu > \sqrt{x_0}$ (контур интегрирования на рис. 4 а), а также два надбарьерно-прошедших луча при $\mu < \sqrt{x_0}$, контур интегрирования одного из которых обходит точки ветвления до своего отражения от поверхности планеты, другого — после (соответственно пунктирная и сплошная кривые на рис. 4 б).

Каждый из

ненциально-возрастающий за барьером). При этом не рассматриваются аналогичные системы лучей, даваемые комплексными лучами, дважды и более отраженными от поверхности планеты. Напомним, что задача решается в приближении геометрической оптики и обычно получаемые формулы считаются справедливыми, если рассматриваемый в окрестности $z = z_m$ параболический слой (5) является достаточно толстым в масштабе длины волны:

$$\delta = k \operatorname{Im} \Psi = k \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\mu^2 - \kappa(z)} dz = k \pi |\mu^2 - \kappa_0| / 2 \sqrt{\kappa_2} \gg 1 \quad (20)$$

для $\kappa(z) = \kappa_0 + \kappa_2(z - z_m)^2$ ($m = 0$). Полученное условие накладывает ограничение на значения прицельного параметра μ . При $\mu = 0$ имеет нормальное падение волны на слой и соответствующие формулы совпадают с [5]. С ростом μ (при $\mu \rightarrow \sqrt{\kappa_0}$) толщина барьера уменьшается и требуется уточнение нулевого приближения геометрической оптики — в этом случае оказывается необходимым учет комплексных лучей. По физическому смыслу рассмотренные комплексные лучи описывают дифракционные эффекты рассеяния радиоволн в неоднородной среде. Для применения комплексных лучей в конкретной задаче радиопросвечивания атмосферы необходимо выполнить суммирование соответствующих им интенсивностей поля в точке приема. Решение этой задачи представляет самостоятельный интерес.

В результате применения метода комплексной геометрической оптики в теоретическом исследовании задачи о радиопросвечивании атмосферы в условиях сверхрефракции дан анализ лучевой структуры поля, обусловленной влиянием аномальных условий рефракции в тропосфере планеты.

Получены выражения для амплитуды и фазы радиоволн, описываемых действительными и комплексными лучами. Последние поясняют механизм возбуждения приповерхностного волновода внешним источником:

Учет комплексных лучей может быть полезен для анализа результатов экспериментальных измерений радиопросвечивания атмосфер планет при наличии сверхрефракции.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Кравцову за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Fjeldbo, V. R. Eshleman, J. Geophys. Res., **70**, № 13, 3217 (1955).
2. М. А. Колосов, Н. А. Арманд, О. И. Яковлев, Распространение радиоволн при космической связи, изд. Сов. радио, М., 1969.
3. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн изд. Сов. радио, М., 1970.
4. В. М. Бабиц, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
5. Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1280 (1967).
6. Ю. А. Кравцов, в сб. Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн, М., 1970, стр. 257.
7. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, М., 1962.

APPLICATION OF COMPLEX GEOMETRICAL OPTICS TO PROBLEM
OF RADIOWAVE PROPAGATION UNDER SUPERREFRACTION*V. A. Andrianov, V. N. Sekistov*

The ray structure of ultra short radio waves propagating through the atmosphere of a planet is investigated. There is assumption that the profile of the refractive index of the atmosphere has a minimum as a function of height. Real and complex rays of geometrical optics are taken into account for solution of this problem. Real rays are direct ray and ray reflected from the planet surface, complex rays describe the penetration of radio waves of external source into the atmospheric duct.

УДК 550 383

ВЗАМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С АЛЬФВЕНОВСКИМИ ВОЛНАМИ В МАГНИТОСФЕРЕ

*В. И. Корчагин, В. Б. Красовицкий, А. Б. Михайловский,
О. А. Похотелов*

Рассмотрено возбуждение альфвеновских волн релятивистскими электронами в магнитосфере. Исследовано влияние релятивизма на две основные разновидности альфвеновских неустойчивостей: неустойчивость из-за сжимаемости электронов и неустойчивость, связанную с конечным продольным полем волны. Показано, что релятивистские эффекты могут приводить к увеличению инкремента неустойчивости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работах [1-4] было показано, что быстрые частицы (ионы и электроны) могут приводить к раскачке низкочастотных альфвеновских волн в магнитосферной плазме, отождествляемых с геомагнитными пульсациями. При этом как ионы, так и электроны считались нерелятивистскими. Тем самым ролью релятивистских эффектов пренебрегалось. Такое пренебрежение оправдано, если давление релятивистской компоненты мало по сравнению с давлением нерелятивистской. Согласно спутниковым измерениям [5], доля релятивистских ионов в магнитосфере мала, так что при рассмотрении раскачки альфвеновских волн магнитосферными ионами пренебрежение релятивистскими эффектами вполне оправдано. Что касается релятивистских электронов, то согласно [5] их давление в ряде случаев может быть сравнимо с давлением нерелятивистских. Поэтому представляет интерес исследование раскачки альфвеновских волн релятивистскими электронами, что и является целью настоящей работы.

Общие соотношения, характеризующие взаимодействие быстрых частиц с альфвеновскими волнами, были получены в работе [2, 4], они воспроизводятся в разд. 3. Для использования этих соотношений необходимо вычислить возмущенное давление и возмущенную плотность быстрых частиц как функции возмущений электрического и магнитного полей. Ранее такие вычисления проводились только для случая нерелятивистских частиц (см. работы [2-4]). Обобщение соответствующих результатов для случая релятивистских электронов производится в разд. 3. С этой целью в разд. 3 решается релятивистское дрейфовое кинетическое уравнение для частиц, движущихся в аксиально-симметричном стационарном и возмущенном магнитном поле альфвеновской волны, и вычисляются релятивистские выражения для давления и плотности. В разд. 4 и 5 исследуется влияние релятивизма на две основные разновидности альфвеновских неустойчивостей: неустойчивость из-за сжимаемости электронов, первоначально обсуждавшуюся в работах [2, 3], и неустойчивость, связанную с конечным продольным электрическим полем, ранее рассмотренную в работе [4] (первая из них важна внутри плазмосферы, вторая — вне ее). Результаты обсуждаются в разд. 6.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно работе [4] дисперсионное уравнение для альфвеновских волн в геомагнитном поле имеет вид

$$A \omega^2 - B + C + D = 0, \quad (2.1)$$

где

$$A = \int \frac{dr}{c_A^2} \left(1 - \frac{\bar{\omega}_{*i}}{\omega} \right) \left(g^{11} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} \right|^2 + m^2 g^{22} |\zeta|^2 \right),$$

$$B = \int \frac{dr}{g_{33}} \left(g^{11} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^1 \partial x^3} \right|^2 + m^2 g^{22} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x^3} \right|^2 \right), \quad (2.2)$$

$$C = 8\pi m^2 \int dr \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \frac{\zeta^* \tilde{p} \sqrt{g_{11}}}{R},$$

$$D = \int \frac{dr}{c_A^2} \frac{2\pi em}{\Phi'} (\omega - \bar{\omega}_{*i}) \left(g^{11} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + m^2 g^{22} \zeta^* \psi \right).$$

Здесь x^1, x^2, x^3 — криволинейные координаты, связанные с интегральными характеристиками плазмы и магнитного поля. Как и в работе [2], x^1 и x^2 — соответственно радиальная и угловая координаты, а x^3 направлена вдоль магнитного поля B_0 , g^{ik} — компоненты метрического тензора координатной системы, c_A — альфвеновская скорость, R — радиус кривизны, Φ — поток магнитного поля через силовую трубку, $\Phi' \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}$,

$\bar{\omega}_{*i}$ — дрейфовая частота ионов [4], \tilde{p} — возмущенное давление плазмы, возмущения продольного электрического и магнитного полей представлены в виде

$$E_{\parallel} = -\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^3}, \quad \tilde{B}^1 = (B_0 \nabla) \zeta, \quad \tilde{B}^2 = -\frac{i}{m} (B_0 \nabla) \zeta, \quad \text{зави-}$$

симость их от времени и координаты x^2 выбраны в виде $\sim \exp(-i\omega t + imx^2)$, интегрирование проведено по объему силовой трубки.

В отсутствие быстрых электронов ($C = D = 0$) уравнение (2.1) описывает альфвеновские волны в магнитосферной плазме, а их нарастание (затухание) определяется слагаемыми C и D , характеризующими мнимую часть частоты:

$$\text{Im } \omega = -\text{Im}(C + D) / \frac{\partial Q}{\partial \omega}, \quad (2.3)$$

где $Q = A \omega^2 - B = 0$.

Слагаемое C учитывает эффект сжимаемости плазмы, обусловленный кривизной магнитного поля, который является определяющим ($C \gg D$) при наличии холодной плазмы.

Такие условия, как известно, характерны для областей магнитосферы внутри плазмосферы, а также в отдельные периоды и вне ее (см., например, [6]). В случае, когда плотность холодной плазмы достаточно мала (см. соответствующий критерий работы [4]), основным является слагаемое D , учитывающее отличное от нуля продольное электрическое поле $E_{\parallel} \neq 0$. Поэтому естественно вычислять вклад в мнимую часть частоты от C и D отдельно.

Отметим, что в выражение для C , согласно (2.2), входит возмущенное давление, обязанное наличию быстрых электронов и зависящее от величин ζ и ψ , связь между которыми может быть найдена из уравнения квазинейтральности

$$\tilde{n}_e = \tilde{n}_i, \quad (2.4)$$

где \tilde{n}_i, \tilde{n}_e — возмущения плотностей ионов и электронов.

Чтобы сделать систему уравнений (2.1) — (2.4) замкнутой, необходимо вычислить \tilde{p}_e, \tilde{n}_e и \tilde{n}_i , что будет сделано в следующем разделе.

3. ВОЗМУЩЕННАЯ ПЛОТНОСТЬ И ДАВЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Используя дрейфовые траектории релятивистских электронов, приведенные в работе [7], запишем кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{dt} + \left(\mathbf{v}_E + \frac{p_{\parallel} c^2}{W} \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B_0} \right) \nabla F - \frac{ec^2 p_{\parallel} E_{\parallel}}{W} \frac{\partial F}{\partial W} - \\ - \frac{(W^2/c^2 - M_0^2 c^2 - J_{\perp} M_0^2 B_0)}{2W} c^2 \frac{\partial F}{\partial W} \operatorname{div} \mathbf{v}_E = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{p_{\parallel} c^2}{W} \mathbf{e}_0 + \mathbf{u}_0 \right) \nabla, \quad \mathbf{u}_0 = (0, u_D^2, 0),$$

$$u_D^2 = \frac{(W^2/c^2 - M_0^2 c^2 - J_{\perp} M_0^2 B_0) c^3 \sqrt{g_{11}}}{eWR} \frac{2\pi}{\Phi'},$$

$$W = c\sqrt{M_0^2 c^2 + p^2}, \quad J_{\perp} = p_{\perp}^2 / 2M_0^2 B_0$$

— энергия и магнитный момент электрона, M_0 — его масса покоя, $p^2 = p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2$, p_{\parallel}, p_{\perp} — продольная и поперечная составляющие импульса электрона, $\mathbf{v}_E = c[\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0]/B_0^2$ — скорость электрического дрейфа, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ — единичный вектор вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 .

Аналогично работе [4] представим \tilde{f} в виде

$$\tilde{f} = -\zeta F' - e\psi \frac{\partial F}{\partial W} + \tilde{f}^{(2)}, \quad (3.2)$$

где $\tilde{f}^{(2)}$ является решением уравнения

$$\frac{d\tilde{f}^{(2)}}{dt} = -i\omega e \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W} \left\{ \psi + \frac{\Phi'}{2\pi mc} \omega_D \zeta \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь $\omega_D = tu_D^2$ — частота магнитного дрейфа электронов, $\hat{\omega}_{*e} = \frac{mc}{e} \frac{F'}{\partial F/\partial W} \frac{2\pi}{\Phi'}$ — частота ларморовского дрейфа.

Решим уравнение (3.3) разложением по параметру $\omega L W/p_{\parallel} c^2$ (L — характерная длина силовой линии). Для этого аналогично работе [4] запишем уравнение (3.3) в виде

$$\frac{d\tilde{f}^{(2)}}{d\mathcal{S}} = \frac{W}{p_{\parallel} c^2} \left\{ i(\omega - \omega_D) \tilde{f}^{(2)} - i\omega e \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W} \left(\psi + \frac{\Phi'}{2\pi mc} \omega_D \zeta \right) \right\}. \quad (3.4)$$

Полагая в (3.4) $\tilde{f}^{(2)} = \tilde{f}_0^{(2)} + \tilde{f}_1^{(2)}$, где $\tilde{f}_0^{(2)}$ удовлетворяет уравнению (3.4) без правой части, из условия ортогональности правой части уравнения (3.4) решению нулевого приближения получаем

$$\tilde{f}_0^{(2)} = \frac{\omega - \hat{\omega}_{*e}}{\omega - \omega_D} \frac{\partial F}{\partial W} \left[\langle e\psi \rangle + \frac{e\Phi'}{2\pi mc} \langle \omega_D \zeta \rangle \right]. \quad (3.5)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по траектории движения электронов между пробками магнитного поля

$$\langle \dots \rangle = v_b \frac{W}{c^2} \oint \frac{ds}{|p_{\parallel}|} (\dots), \quad (3.6)$$

$$\text{где } v_b^{-1} = \frac{W}{c^2} \oint \frac{ds}{|p_{\parallel}|}.$$

Учтем, что возмущенное давление и плотность электронов равны

$$\tilde{p}_e = \sum \int \frac{d\tau c^2}{2W} (W^2/c^2 - M_0^2 c^2 - J_{\perp} M_0^2 B_0) \tilde{f}; \quad (3.7)$$

$$\tilde{n}_e = \sum \int d\tau \tilde{f}, \quad (3.8)$$

где $d\tau = \frac{WB_0 M_0^2}{c^2 |p_{\parallel}|} dJ_{\perp} dW$ — элемент объема в пространстве $(J_{\perp}, W)^*$,

суммирование в (3.7) и (3.8) проводится по направлениям движения электронов. Подставляя (3.5), (3.2) в (3.7), (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{n}_e = & -\zeta n'_0 - e\psi \int d\tau \frac{\partial F}{\partial W} + \int d\tau \frac{\omega - \hat{\omega}_{*e}}{\omega - \omega_D} \frac{\partial F}{\partial W} \times \\ & \times \left[\langle e\psi \rangle + \frac{e\Phi'}{2\pi mc} \langle \omega_D \zeta \rangle \right]; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_e = & -\zeta p'_0 - e\psi \int d\tau \frac{c^2}{2W} (W^2/c^2 - M_0^2 c^2 - J_{\perp} M_0^2 B_0) \frac{\partial F}{\partial W} + \\ & + \int d\tau \frac{\omega - \hat{\omega}_{*e}}{\omega - \omega_D} \frac{\partial F}{\partial W} (W^2/c^2 - M_0^2 c^2 - J_{\perp} M_0^2 B_0) \left[\langle e\psi \rangle + \frac{e\Phi'}{2\pi mc} \langle \omega_D \zeta \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Как отмечалось выше, наличие холодной плазмы позволяет пренебречь вкладом электрического поля в выражение для инкремента

* Здесь интегрирование по области (J_{\perp}, W) проводится следующим образом:

$$\int W dJ_{\perp} = \int_{\rho c}^{\infty} dW \int_0^{J_{\perp 0}} dJ_{\perp}, \quad \text{где } J_{\perp 0} = (W^2/c^2 - M_0^2 c^2)/2M_0^2 B_0.$$

альфвеновских волн (2.3). Учитывая это и подставляя (3.10) в (2.3), получаем*

$$\text{Im } \omega = \frac{2\pi^2 e^2 M_0^2}{Ac^3} \int d\Phi \int dW dJ_{\perp} \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega}\right) \frac{\partial F}{\partial W} \times \times v_b^{-1} |\langle \omega_D \zeta \rangle|^2 \delta(\omega - \bar{\omega}_D). \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что при $\partial F/\partial W < 0$ (предполагается отсутствие направленных вдоль магнитного поля пучков электронов) нарастание альфвеновских волн происходит при частотах, меньших частоты ларморовского дрейфа электронов.

По порядку величины

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx \frac{8\pi n_0 M_0 c^2}{B_0^2} \frac{L^2}{Ra} (\gamma - 1), \quad (4.2)$$

где n_0 — плотность электронов, a — характерный размер неоднородности плазмы, $\gamma = (1 - \bar{v}^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, \bar{v} — характерная скорость электронов. В нерелятивистском пределе $\bar{v} \ll c$ из (4.2) получаем результат работы [2]:

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx \beta L^2/Ra, \quad (4.3)$$

где $\beta = 4\pi n_0 M_0 \bar{v}^2/B_0^2$.

С помощью соотношения $\omega \leq \bar{\omega}_D$ находим, что поперечное волновое число $k_{\perp} \approx m\sqrt{g^{22}}$ ограничено сверху условием

$$k_{\perp} \rho_e \leq \frac{c_A}{c(\gamma - 1)} \frac{R}{L}, \quad (4.4)$$

где $\rho_e = c/\omega_{B_0}$, $\omega_{B_0} = eB_0/M_0c$.

Из (4.2) следует, что инкремент растет с ростом γ . При этом согласно (4.4) спектр возбуждаемых колебаний смещается в сторону уменьшения азимутальных волновых чисел m .

5. ВОЗБУЖДЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН ВНЕ ПЛАЗМОСФЕРЫ

Характер взаимодействия релятивистских электронов с альфвеновскими волнами меняется при переходе в область магнитосферы, где холодная плазма практически отсутствует (область вне плазмосферы). В этом случае наличие продольного электрического поля волны, связанного с конечной проводимостью плазмы вдоль магнитного поля, приводит к развитию новой неустойчивости, обусловленной слагаемым D в уравнении (2.3). Для определения инкремента неустойчивости находим связь между ζ и ψ , используя условие квазинейтральности (2.4), где \tilde{n}_e определяется выражением (3.9), а возмущенная плотность ионов согласно работе [4] имеет вид

* Интегрирование по области (W, J_{\perp}) определено соотношением $\int dW dJ_{\perp} \equiv \int_{M_0 c^2}^{\infty} dW \int_{J_{\perp \min}}^{J_{\perp \max}} dJ_{\perp}$, где $J_{\perp \max} = (W^2/c^2 - M_0^2 c^2)/2M_0^2 B_{\max}$, B_{\max} и B_{\min} — значения поля на экваторе и на границе плазмы.

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i = & -\zeta n'_0 - e\psi \int d\tau \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \frac{\partial F_e}{\partial W} + \\ & + \frac{\omega - \bar{\omega}_{*i}}{\omega_{B_i}} \frac{\Phi'}{2\pi m B_0} \Delta_{\perp} \left(\zeta + \frac{cm}{\omega} \frac{2\pi}{\Phi'} \psi \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\Delta_{\perp} = g^{11} \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - g^{22}$ — поперечный лапласиан, ω_{B_i} — циклотронная частота ионов.

С учетом (3.9) и (5.1) уравнение квазинейтральности (2.4) записываем в виде

$$\begin{aligned} \psi \int d\tau \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W} - \int d\tau \frac{(\omega - \hat{\omega}_{*e})}{\omega'_i - \bar{\omega}_D} \frac{\partial F}{\partial W} \langle \psi \rangle + \\ + \frac{n_0 c M_i (\omega - \bar{\omega}_{*i})}{B_0^2} \frac{\Phi'}{2\pi m} \Delta_{\perp} \left(\zeta + \frac{mc}{\omega} \frac{2\pi}{\Phi'} \psi \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Считая продольную неоднородность магнитного поля слабой, $\langle \psi \rangle / \psi \ll 1$, в первом приближении получаем

$$\psi_0 = - \frac{n_0 c M_i (\omega - \bar{\omega}_{*i}) \Delta_{\perp} \zeta}{e^2 B_0^2 \int d\tau \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W}} \frac{\Phi'}{2\pi m}. \quad (5.3)$$

Полагая $\psi = \psi_0 + \psi_1$ в следующем приближении, находим

$$\psi_1 = \frac{\int d\tau \frac{(\omega - \hat{\omega}_{*e})}{\omega - \hat{\omega}_D} \frac{\partial F}{\partial W} \langle \psi_0 \rangle}{\int d\tau \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W}}. \quad (5.4)$$

Используя (5.4) и (2.3), инкремент возбуждения альфвеновских волн записываем в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = & \frac{M_0^2 c^2 \omega^2}{4e^2} \frac{\partial(\omega Q)}{\partial \omega} \int d\Phi \int dW dJ_{\perp} \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \times \\ & \times \frac{\partial F}{\partial W} v_b^{-1} \left| \left\langle \frac{(\omega - \bar{\omega}_{*i}) \Delta_{\perp} \zeta}{c_A^2 \int d\tau \left(1 - \frac{\hat{\omega}_{*e}}{\omega} \right) \frac{\partial F}{\partial W}} \right\rangle \right|^2 \delta(\omega - \bar{\omega}_D). \end{aligned} \quad (5.5)$$

По порядку величины

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx \frac{B_0^2}{8\pi n_0 M_0 c^2} \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{Ra}{L^2}. \quad (5.6)$$

Как следует из (5.6), с увеличением γ инкремент неустойчивости убывает от значения

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M_0 \bar{v}^2} \frac{Ra}{L^2} \quad (5.7)$$

в нерелятивистском случае до величины

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx \frac{B_0^2}{8\pi n_0 M_0 c^2 \gamma} \frac{Ra}{L^2} \quad (5.8)$$

в ультрарелятивистском пределе, т. е. релятивистские эффекты приводят к уменьшению связанного с наличием продольного электрического поля инкремента возбуждения альфвеновских волн.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставляя формулы (4.2) и (4.3), получаем, что инкремент рассмотренной в разд. 4 неустойчивости будет определяться релятивистскими электронами в случае

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{n_1 \gamma c^2}{n_2 v_T^2} > 1, \quad (6.1)$$

где $W_{1,2}$ и $n_{1,2}$ — плотности энергии и плотности соответственно релятивистских и нерелятивистских электронов, v_T — характерная скорость нерелятивистских электронов.

Для сравнения с экспериментальными данными удобно ввести вместо W_1, W_2 потоки частиц j_1, j_2 ($j_1 = n_1 c, j_2 = n_2 v_T$). При этом условие (6.1) переписывается в виде

$$\frac{j_1}{j_2} > \frac{v_T}{c \gamma}. \quad (6.2)$$

Согласно данным, приведенным в работе [5], потоки нерелятивистских электронов ($E \approx 40$ кэВ) в максимуме внешнего электронного пояса ($L \approx 5$, L — параметр Маклвайна) порядка $j_2 = 10^7 \div 10^8$ см⁻² с⁻¹. Что касается релятивистских электронов ($E > 1,6$ МэВ), то во время магнитных бурь их интенсивность довольно низка: $j_1 \approx 10^4$ см⁻² с⁻¹. Спустя 2—3 дня после бури потоки их при $L \approx 5$ возрастают до величины $\sim 10^6$ см⁻² с⁻¹.

При таких значениях потоков j_1 и j_2 неравенство (6.2), как правило, не выполняется. Однако в отдельные времена, когда потоки нерелятивистских электронов не очень велики, вклад релятивистских электронов в максимуме их интенсивности в возбуждение альфвеновских волн в магнитосфере может преобладать по сравнению со вкладом нерелятивистских. Для более детального сравнения теории с экспериментальными данными необходимо проведение тщательного изучения корреляционных связей релятивистских электронов с геомагнитными пульсациями в магнитосфере.

В заключение отметим, что релятивистское увеличение массы электрона приводит к уменьшению инкремента рассмотренной в разд. 5 неустойчивости, так что вклад релятивистских электронов при этом невелик.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Southwood, *Planet. Space Sci.*, **21**, 53 (1973).
2. А. Б. Михайловский, О. А. Похотелов, *Физика плазмы*, **1**, № 5, 786 (1975).
3. А. Б. Михайловский, О. А. Похотелов, *Физика плазмы*, **1**, № 6, 1004 (1975).
4. А. Б. Михайловский, О. А. Похотелов, *Физика плазмы*, **2**, № 6, 928 (1976).
5. Б. А. Тверской, *Динамика радиационных поясов Земли*, изд. Наука, М., 1968
6. С. И. Акасофу, С. Чепмен, *Солнечно-земная физика*, **2**, изд. Мир, М., 1975.
7. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, *Вопросы теории плазмы*, вып. 2, Атомиздат, М., 1963.

Институт физики Земли
АН СССР

Поступила в редакцию
28 июля 1976 г.

THE INTERACTION OF THE RELATIVISTIC ELECTRONS WITH
THE ALFVEN WAVES IN THE MAGNETOSPHERE

*V. I. Korchagin, V. B. Krasovitsky, A. B. Mikhailovsky,
O. A. Pokhotelov*

The excitation of Alfvén waves by the relativistic electrons in the magnetosphere is considered. The relativism effect is investigated upon two basic varieties of Alfvén instabilities: instability due to electron compressibility and that associated with the finite longitudinal wave field. It is shown that the relativistic effects may cause the increase in the instability increment.

УДК 621.371.25

О ВЛИЯНИИ ИНТЕНСИВНЫХ РАДИОВОЛН НА ПОЯВЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Б. Н. Гершман, Г. Х. Каменецакая

В условиях ионосферной плазмы рассмотрено параметрическое возбуждение низкочастотной токовой неустойчивости радиоволнами, длина которых соизмерима с масштабами возникающих неоднородностей электронной концентрации. В основу анализа положен учет нелинейного взаимодействия волны накачки с электромагнитной волной, образовавшейся при комбинационном рассеянии на низкочастотных продольных волнах. При наличии накачки получено и проанализировано дисперсионное уравнение для низкочастотных продольных волн. Показано, что рассматриваемый параметрический эффект может наблюдаться в области F -ионосферы при значениях напряженности электрических полей 10^{-5} — $3 \cdot 10^{-5}$ абс. ед.

В настоящее время постоянно совершенствуются методы высокочастотного зондирования ионосферы и увеличивается мощность применяемых передатчиков. Поэтому стал актуальным вопрос о параметрическом возбуждении в ионосфере низкочастотных плазменных волн, ответственных за появление в области F неоднородностей электронной концентрации. Имеются сведения об экспериментах по искусственному воздействию на ионосферу и, в частности, по возбуждению с помощью мощных радиоволн с частотами $f = 3 \div 30$ МГц диффузной структуры в области F (F spread). Этим вопросам посвящено немало работ (см., например, статьи тематического выпуска *Radio Science* [1-3], а также [4, 5]). Для искусственно возбужденных в области F неоднородностей характерны наличие движений со скоростями 10—30 м/с и сильная вытянутость вдоль геомагнитного поля H_0 [2, 3].

Параметрическое воздействие мощного излучения на плазму в теоретическом плане рассмотрено в монографии [6]. Токковый (двухпоточковый) механизм параметрической неустойчивости изучался ранее в условиях области E [7]. В отсутствие накачки основы теории неустойчивости в области экваториальной токовой струи были заложены Фали [8].

Появление токовой неустойчивости является вполне допустимым при определенных условиях не только в области E , но и на высотах области F ионосферы [9]. То обстоятельство, что токи в области F заметно слабее, чем в полярной или даже экваториальной электроструях, существенно, но все-таки не является аргументом, который исключает токовую нестабильность. В поле сильной волны, как будет показано далее, возникновение этой неустойчивости может существенно облегчаться. Она, вероятно, может конкурировать с другими неустойчивостями, предлагаемыми для объяснения индуцируемых в области F неоднородностей, вытянутых вдоль поля H_0 .

В отличие от [7] здесь не накладывается требование об однородности поля накачки (исследуется случай, когда поперечные к H_0 размеры неоднородностей соизмеримы с длиной волны возмущений). В основу рассматриваемого механизма положен учет нелинейного взаимодействия волны накачки с комбинационно-рассеянной на возбуж-

даемых из-за неустойчивости низкочастотных неоднородностях электромагнитной волной. Далее в разд. 1 будет получено дисперсионное уравнение для низкочастотных продольных волн в присутствии сильной волны накачки и рассмотрены условия возникновения неустойчивости. Конкретные оценки применительно к высотам области F ионосферы будут даны в разд. 2.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН И ДВУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Пусть в ионосферной плазме с однородной равновесной концентрацией электронов N_0 в присутствии тока имеются слабые низкочастотные флуктуации концентрации N . Рассматривая одну компоненту Фурье, для возмущения N имеем

$$\Delta N_1 = n_1 \exp [i \omega_1(\mathbf{k}_1) t - i \mathbf{k}_1 \mathbf{r}] + \text{к. с.} \quad (1)$$

Пусть в плазме распространяется высокочастотная электромагнитная волна накачки, в которой электрическое поле можно представить в виде

$$E_2(\mathbf{r}, t) = E_2 \exp [i \omega_2(\mathbf{k}_2) t - i \mathbf{k}_2 \mathbf{r}] + \text{к. с.} \quad (2)$$

(в (1) и (2) $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ являются собственными частотами продольной и электромагнитной волн).

При распространении волны (2) в плазме будет возникать добавочный ток \mathbf{j}_3 (см. [10], § 12.1), так что

$$\mathbf{j}_3 \sim n_1 E_2 \exp (i \omega_3 t - i \mathbf{k}_3 \mathbf{r}) + \text{к. с.}, \quad (3)$$

где $\omega_3 = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Этот ток приводит к возникновению рассеянной электромагнитной волны E_3 с измененной частотой и направлением распространения. Далее для краткости будем писать ω_1 и ω_2 вместо $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2(\mathbf{k}_2)$.

Для получения дисперсионного уравнения исходим из системы квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов и уравнений электродинамики, а именно:

$$m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha \right) = e_\alpha \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{H}] \right) - m_\alpha \nu_\alpha \mathbf{v}_\alpha - T_\alpha \frac{\nabla N_\alpha}{N_\alpha}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \text{div} (N_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0; \quad (5)$$

$$\text{rot } E = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=e, i} e_\alpha N_\alpha \mathbf{v}_\alpha,$$

$$\text{div } E = 4\pi \sum_{\alpha=e, i} e_\alpha N_\alpha.$$

Здесь E и H — электрическое и магнитное поля, e_α , m_α , \mathbf{v}_α , N_α и ν_α — соответственно заряд, масса, скорость, концентрация и частота столкновений с нейтральными частицами частиц сорта α (для электронов принимаем $\alpha = e$, а для ионов — $\alpha = i$), T_α — температура в энергетических единицах и c — скорость света в вакууме.

Подставляем величины

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= E_0 + \sum_{s=1,2,3} E_s \exp(i\omega_s t - i\mathbf{k}_s \mathbf{r}) + \text{к. с.}, \\ H(\mathbf{r}, t) &= H_0 + \sum_{s=1,2,3} h_s \exp(i\omega_s t - i\mathbf{k}_s \mathbf{r}) + \text{к. с.}, \\ N_\alpha(\mathbf{r}, t) &= N_0 + \sum_{s=1,2,3} n_{s\alpha} \exp(i\omega_s t - i\mathbf{k}_s \mathbf{r}) + \text{к. с.}, \\ \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_{0\alpha} + \sum_{s=1,2,3} \mathbf{v}_{s\alpha} \exp(i\omega_s t - i\mathbf{k}_s \mathbf{r}) + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (7)$$

где E_0 — внешнее постоянное электрическое поле*, $\mathbf{v}_{0\alpha}$ — упорядоченная дрейфовая скорость электронов или ионов.

Для низкочастотных возмущений с частотой ω_1 и волновым числом k_1 из уравнений (4)–(6) при учете (3) имеем

$$\omega'_{1\alpha} n_{1\alpha} - N_0 \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1\alpha} - \mathbf{k}_1 (n_{2\alpha}^* \mathbf{v}_{3\alpha} + n_{3\alpha} \mathbf{v}_{2\alpha}^*) = 0; \quad (8)$$

$$i\omega''_{1\alpha} \mathbf{v}_{1\alpha} - \omega_{H\alpha} [\mathbf{v}_{1\alpha} \mathbf{h}_0] - i \frac{k_1 T_\alpha}{m_\alpha} \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{1\alpha})}{\omega'_{1\alpha}} =$$

$$= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left[E_1 - E_1 \frac{(\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{0\alpha})}{\omega_1} + \mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{v}_{0\alpha} E_1)}{\omega_1} \right] +$$

$$+ \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} ([\mathbf{v}_{2\alpha}^* \mathbf{h}_3] + [\mathbf{v}_{3\alpha} \mathbf{h}_2^*]) + i \mathbf{v}_{3\alpha} (\mathbf{v}_{2\alpha}^* \mathbf{k}_3) - i \mathbf{v}_{2\alpha}^* (\mathbf{v}_{3\alpha} \mathbf{k}_2) + \quad (9)$$

$$+ \frac{i T_\alpha}{m_\alpha N_0} \left\{ \frac{1}{\omega'_{1\alpha}} [n_{2\alpha}^* \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{3\alpha}) + n_{3\alpha} \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{2\alpha}^*)] + \frac{1}{N_0} (n_{2\alpha}^* n_{3\alpha} \mathbf{k}_3 - n_{3\alpha} n_{2\alpha}^* \mathbf{k}_2) \right\},$$

где \mathbf{h}_0 — единичный вектор в направлении H_0 , $\omega'_1 = \omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{0\alpha}$, $\omega''_{1\alpha} = \omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}_{0\alpha} - i\nu_\alpha$ и $\omega_{H\alpha} = e_\alpha H_0 / (m_\alpha c)^{-1}$.

Частоты радиоволн накачки ω_α обычно достаточно велики и превышают гирочастоту электронов ($\omega_\alpha \gg |\omega_{H_e}|$). Тогда можно считать, что

$$\mathbf{v}_{2\alpha} = \frac{eE_2}{im_\alpha(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}_{0\alpha} - i\nu_\alpha)}, \quad n_{2\alpha} = 0. \quad (10)$$

Для рассеянной высокочастотной волны ($\omega = \omega_3$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_3$) поперечная и продольная по отношению к H_0 компоненты поля определяются через ток рассеяния \mathbf{j}' следующим образом [10]:

$$E_{3t} = \frac{4\pi i \mathbf{j}'_t \omega_3}{\omega_3^2 \varepsilon(\omega_3, \mathbf{k}_3) - c^2 k_3^2}, \quad E_{3l} = \frac{4\pi i \mathbf{j}'_l}{\omega_3 \varepsilon(\omega_3, \mathbf{k}_3)}. \quad (11)$$

Плотность тока \mathbf{j}' можно определить как разность [10]:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}_3 - \mathbf{j}_3 (n_1 = 0). \quad (12)$$

При пренебрежении движением ионов в высокочастотной волне

$$\mathbf{j}_3 = -e(N_0 \mathbf{v}_{3e} + n_{3e} \mathbf{v}_{0e} + n_{2e} \mathbf{v}_{1e} + n_{1e} \mathbf{v}_{2e}), \quad (13)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона. Заметим, что в (12) $\mathbf{j}_3 (n_1 = 0)$ — плотность тока в волне 3 при отсутствии возмущения n_1 .

* Предполагается, что это поле является причиной появления ионосферного тока.

Величины n_{3e} и v_{3e} в волне 3 при $\omega_3 \gg |\omega_{He}|$ и $\omega_3 \gg k_3 \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$ легко найти из уравнений (4), (5). Здесь мы не будем приводить выражения для этих величин, так как оценки показывают, что при условиях $\omega_{2,3} \gg \omega_1$ и $\frac{\omega_2}{k_2} \sim \frac{\omega_3}{k_3} \gg v_{0e}$ и учете (10) из (12), (13) можно получить приближенно простое соотношение:

$$\mathbf{j}' = -en_{1e} \mathbf{v}_{2e}. \quad (14)$$

Далее считаем малоэффективной трансформацию волны накачки в продольную. Это оправдано, например, при $\omega_3 \approx \omega_2 \gg \omega_{0e}$ ($\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m_e}$). Тогда в (8) можно опустить последнее слагаемое, а в правой части (9) — последний член, пропорциональный T_a . После указанных упрощений уравнения (8), (9) в проекциях на координатные оси принимают вид*

$$n_{1\alpha} = N_0 \frac{k_1 v_{1\alpha}}{\omega'_{1\alpha}}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} i \omega'_{1\alpha} v_{1x\alpha} - \omega_{H\alpha} \cos \theta v_{1y\alpha} + \omega_{H\alpha} \sin \theta v_{1z\alpha} = \\ = \frac{e_a}{m_a} E_{1x} \frac{\omega'_{1\alpha}}{\omega_1} + \frac{e_a}{m_a} \left[\frac{k_{3x}}{\omega_3} (E_3 v_{2\alpha}^*) + \frac{k_{2x}}{\omega_2} (E_2^* v_{3\alpha}) \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\omega_{H\alpha} \cos \theta v_{1x\alpha} + i \omega'_{1\alpha} v_{1y\alpha} = \frac{e_a \omega'_{1\alpha}}{m_a \omega_1} E_{1y} + \frac{e_a}{m_a} \left[\frac{k_{3y}}{\omega_3} (E_3 v_{2\alpha}^*) + \frac{k_{2y}}{\omega_2} (E_2^* v_{3\alpha}) \right]; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} - \omega_{H\alpha} \sin \theta v_{1x\alpha} + i \left(\omega'_{1\alpha} - \frac{k_1^2 T_a}{m_a \omega'_{1\alpha}} \right) v_{1z\alpha} = \\ = \frac{e_a}{m_a} \left(E_{1z} + \frac{k_1 v_{0x\alpha}}{\omega_1} E_{1x} + \frac{k_1 v_{0y\alpha}}{\omega_1} E_{1y} \right) + \\ + \frac{e_a}{m_a} \left[\frac{k_{3z}}{\omega_3} (E_3 v_{2\alpha}^*) + \frac{k_{2z}}{\omega_2} (E_2^* v_{3\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

в которых $v_{2\alpha}$, E_3 определяются выражениями (10), (11), а для $v_{3\alpha}$ с учетом сделанных замечаний также можно написать соотношение вида (10).

Пусть для простоты вектор \mathbf{k}_2 лежит в плоскости zy . Это означает копланарность векторов \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_1 и \mathbf{H}_0 . В силу (3) в той же плоскости должен быть и вектор \mathbf{k}_3 ($k_{3x} = 0$). Далее из (3) при $\omega_2 \gg \omega_1$ следует, что

$$\omega_2 \approx \omega_3. \quad (19)$$

Согласно (11) величина рассеянного поля E_3 определяется только модулем вектора \mathbf{k}_3 . Тогда из (19), учитывая высокочастотный характер волн 2 и 3, получаем условие, обеспечивающее эффективное рассеяние волн накачки в виде

$$k_3 = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| = k_2. \quad (20)$$

* Ось z направим по волновому вектору \mathbf{k}_1 , поле \mathbf{H}_0 лежит в плоскости zy и составляет с вектором \mathbf{k}_1 угол θ .

В этом случае векторы k_1 , k_2 и k_3 образуют равнобедренный треугольник. При этом

$$k_1 = 2 k_2 \sin \gamma/2, \quad (21)$$

где γ — угол рассеяния. Оптимальные с точки зрения возможного эксперимента ориентации волновых векторов и плотности тока j_0 при копланарности k_1 , k_2 и H_0 показаны на рис. 1.

При выбранной геометрии рассеяния, когда справедливо условие (21), последние слагаемые в скобках (16), (17) исчезают. Аналогичное слагаемое в правой части (18), если поле E_2 имеет только x -компоненту, оказывается равным $\beta_e v_{1z\alpha}/\omega'_{1\alpha}$, где

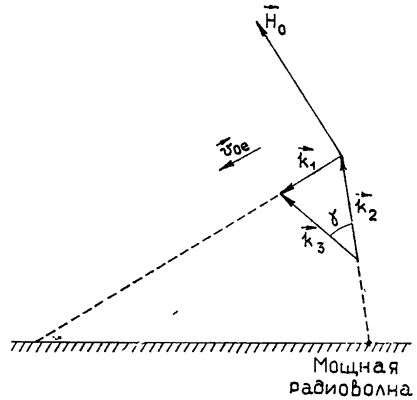


Рис. 1.

$$\beta_e = - \frac{e^2 \omega_{0e}^2 k_1^2 (E_2 E_2^*)}{i m_e^2 \omega_2^2 [\omega_3^2 \epsilon(\omega_3, k_3) - c^2 k_3^2]}, \quad \beta_i = \beta_e \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2. \quad (22)$$

Если поле E_2 поляризовано в плоскости zy , то выражения для β_e и β (22) нужно умножить на $\cos^2 \gamma$. Далее обычным способом (см., например, [1]) из уравнений электродинамики (6) и уравнений (15)–(18) с учетом (22) находим дисперсионное уравнение для низкочастотных продольных волн

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{0\alpha}^2 (\omega'_{1\alpha}{}^2 - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta)}{\omega'_{1\alpha} \omega''_{1\alpha} (\omega'_{1\alpha}{}^2 - \omega_{H\alpha}^2) - (k_1^2 v_{T\alpha}^2 - i \beta_\alpha) (\omega'_{1\alpha}{}^2 - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta)} = 0, \quad (23)$$

где $v_{T\alpha}^2 = T_\alpha/m_\alpha$.

В условиях области E ионосферы, когда

$$k v_{0e} \ll v_e \ll |\omega_{He}|, \quad \omega_i \ll v_e; \quad (24)$$

$$v_i \gg \omega_{Hi}, \quad (25)$$

уравнение (23) сводится к следующему:

$$\frac{d_e}{\omega'_{1e} \omega''_{1e} - (k_1^2 v_{Te}^2 - i \beta_e) d_e} + \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{[\omega_i (\omega_i - i v_i) - k_1^2 v_{Ti}^2]} = 0, \quad (26)$$

где $d_e = v_e^2/\omega_{He}^2 + \cos^2 \theta$.

Если же выполнены условия (24) и типичное для области E неравенство

$$v_i \ll \omega_{Hi}, \quad (27)$$

то из (23) получаем

$$\frac{d_e}{\omega'_{1e} \omega''_{1e} - (k_1^2 v_{Te}^2 - i \beta_e) d_e} + \frac{m_e d_i}{m_i [\omega'_i (\omega'_i - i v_i) - k_1^2 v_{Ti}^2]} = 0, \quad (28)$$

где $d_i = \frac{v_i^2}{\omega_{Hi}^2} + \cos^2 \theta$,

В отсутствие поля накачки дисперсионное уравнение (26) переходит в полученное ранее в рамках теории двухпоточковой неустойчивости экваториальной токовой струи (см., например, [11, 12]). Уравнение (28) при $\beta_e = 0$ уже фигурировало ранее в работе [9]*.

Полагая $\beta_e = \beta_{e1} + i\beta_{e2}$, $\omega_1 = \omega_g + i\Gamma$ ($|\Gamma| \ll \omega_g$) и разделяя действительную и мнимую части, из (28) приходим к формуле

$$\omega_g = k_1 v_{0i} + \frac{k_1 (v_{0e} - v_{0i}) + \beta_{e1} d_e / v_e}{1 + \frac{v_i m_i d_e}{v_e m_e d_i}} \quad (29)$$

и критерию неустойчивости

$$\begin{aligned} (\omega_g - k_1 v_{0i})^2 - k_1^2 d_i \left(v_{Ti}^2 + \frac{m_e}{m_i} v_{Te}^2 \right) - \beta_{e2} \frac{m_e}{m_i} d_i + \\ + \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{d_e} (\omega_g - k_1 v_{0e})^2 > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Из него видно, что волна накачки существенно облегчает выполнение этого критерия, если

$$\beta_{e2} < 0, \quad |\beta_{e2}| \gtrsim k_1^2 v_{Te}^2 \quad \text{или} \quad \left(\beta_{e1} \frac{d_e}{v_e} \right)^2 \gtrsim k_1^2 v_{Ti}^2 d_i. \quad (31)$$

2. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для оценки реальности рассматриваемого механизма возбуждения неоднородностей нужно найти значения действительной и мнимой частей величины β_e (22). Эти значения определяются стоящей в знаменателе (22) величиной $A(\omega_3, k_3) = \omega_3^2 \varepsilon(\omega_3) - c^2 k^2$, где $\varepsilon(\omega_3) = 1 -$

$\frac{\omega_{0e}^2}{\omega_3(\omega_3 - i v_e)}$. Используя (19) и (20), мы можем приближенно записать

$$A(\omega_3, k_3) = A(\omega_2, k_2) + \omega_1 \frac{\partial A}{\partial \omega_2} + (k_3 - k_2) \frac{\partial A}{\partial k_2}. \quad (32)$$

Так как свойства волны накачки таковы, что удовлетворяется изотропное дисперсионное уравнение того же вида, как и для волны β , то $A(\omega_2, k_2) = 0$. Тогда из (32) имеем

$$A(\omega_3, k_3) = \omega_1 \left(2\omega_2 + \frac{i\omega_{0e}^2 v_e}{\omega_2^2} \right) - 2c^2 k_2 (k_3 - k_2). \quad (33)$$

Из (33) видно, что мнимая часть A не зависит от угла между k_1 и k_2 . В то же время даже слабые изменения этого угла могут, в принципе, сильно влиять на разность $k_3 - k_2$ и, как следствие, на величину $\text{Re } A$.

Максимальное значение $|\beta_{e2}|$ достигается при $\text{Re } A \approx \text{Im } A$. Тогда имеем $\beta_{em} \approx \beta_{e1m} \approx |\beta_{e2m}|$, где

$$\beta_{em} = \frac{e^2 k_1^2 |E_2|^2}{m_e^2 \omega_1 v_e}. \quad (34)$$

* В работе авторов [9] в конечных формулах была учтена возможная непотенциальность низкочастотных волн. Поэтому эти формулы полностью с выводами из (28) не совпадают. Совпадение может быть получено, если, опираясь на общие соотношения в работе [9], перейти там к безвихревому приближению.

Отношение $|\beta_{e2m}|/k_1^2 v_{Te}^2$ в указанном случае равно $\frac{e^2 E_2^2}{2m_e^2 \omega_1 v_e v_{Te}^2}$. Оно приближается к единице, если $|E_2|^2 \sim 10^{-18}$ при $\omega_1 \approx 1$ и $v_e \approx 10^3$ (в ед. CGSE). Когда вектор k_2 отклоняется от наиболее выгодной ориентации на угол α , то величину k_3^2 можно найти из соотношений

$$\begin{aligned} k_3^2 &= k_2^2 (1 - 2 \sin \gamma \sin \alpha) \quad \text{при } \gamma \neq \pi, \\ k_3^2 &= k_2^2 (1 - 8 \sin^2 \alpha / 2) \quad \text{при } \gamma = \pi. \end{aligned} \quad (35)$$

При отклонениях k_2 от оптимальной ориентации на угол $\alpha \sim 1^\circ$ существенную роль играет последний член в правой части (33). Учитывая это обстоятельство, а также соотношения (22) и (35), получаем при $\gamma \neq \pi$, что

$$\frac{\beta_{e2}}{k_1^2 v_{Te}^2} = \frac{e^2 \omega_{0e}^2 |E_2|^2}{2m_e^2 c^2 k_2^2 \sin \gamma \sin \alpha v_{Te}^2}. \quad (36)$$

При наличии в области F токов, вызванных внешними электрическими полями с умеренными напряженностями, и при несоблюдении оптимальных условий параметрический эффект должен возникать при значительно больших полях, чем в случае (34). Из грубой оценки с использованием (36) получаем, что $\beta_{e2} \sim k^2 v_{Te}^2$, если $|E_2|^2 \sim 10^{-9} - 10^{-10}$ (в ед. CGSE). Из сравнения с указанным выше значением $|E_2|^2 \sim 10^{-18}$ следует, что эффект обладает высокой ракурсной чувствительностью. На примере случая $E_2 = 0$, рассмотренного в работе [9], можно полагать, что ракурсная чувствительность может быть снижена при учете непотенциальности возмущений с $k = k_1$. Сходное обобщение напрашивается и для только что рассмотренной задачи. Поэтому желателен дальнейший анализ проблемы неустойчивости. В то же время небольшие значения $|E_2|^2$ в оптимальном случае говорят о принципиальной возможности проявления токовой неустойчивости на высотах области F ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. M. Allen, G. D. Thome and P. B. Rao, Radio Sci., 9, № 11, 905 (1974).
2. G. D. Thome and D. W. Blood, Radio Sci., 9, № 11, 917 (1974).
3. P. A. Fialer, Radio Sci., 9, № 11, 923 (1974).
4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., УФН, 113, № 4, 732 (1974).
5. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 33 (1975).
6. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
7. K. Lee, P. K. Kaw and C. F. Kennel, J. Geophys. Res., 77, 4197 (1972).
8. D. T. Farley, J. Geophys. Res., 68, № 22, 6085 (1963).
9. Б. Н. Гершман, Г. Х. Каменецкая, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 988 (1973).
10. Электродинамика плазмы (ред. А. И. Ахиезер), изд. Наука, М., 1974.
11. Г. Х. Каменецкая, Геомагнетизм и аэрономия, 7, № 5, 833 (1967).
12. Б. Н. Гершман, Ю. А. Игнатъев, Г. Х. Каменецкая, Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E на различных широтах, изд. Наука, М., 1976.

ON THE INTENSE RADIOWAVE INFLUENCE ON NONHOMOGENEITY
APPEARANCE CONNECTED WITH THE CURRENT INSTABILITY IN
THE IONOSPHERIC PLASMA

B. N. Gershman, G. H. Kamenetskaya

Under the ionospheric plasma conditions the parametric excitation of low-frequency current instability by radiowaves which lengths are comparable with appearing nonhomogeneity scales of the electron density is considered. The basis of the analysis is the consideration of nonlinear pump wave interaction with an electromagnetic wave formed at the combination scattering on low-frequency longitudinal waves. In the given pump field the dispersion equation is obtained and analysed for low-frequency longitudinal waves. It is shown that the investigated parametric effect may be observed in the ionospheric *F*-region at the electric field voltage values of 10^{-5} — $3 \cdot 10^{-5}$ absolute units.

УДК 551 510.535

**ИЗМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЫСОТЫ ИОНОСФЕРЫ
В ПЕРИОД СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ**

Л. Н. Моисеенко, Р. С. Шубова

Вариации параметров СДВ-сигналов в период солнечного затмения, используются для интерпретации эффектов затмения в нижней ионосфере. Получена зависимость, связывающая эффективную высоту волновода с фазой затмения.

Амплитудно-фазовые измерения в диапазоне СДВ на трассах большой протяженности в-период солнечного затмения могут послужить, источником дополнительной информации о влиянии Солнца на параметры волновода Земля—ионосфера.

По результатам наблюдений трех солнечных затмений, одного полного и двух частных, предпринята попытка количественной интерпретации затмения путем связи фазы затмения с параметрами волновода.

Условия наблюдения затмений сведены в табл. 1.

Таблица 1*

Станция	"Омега" $f=10,2;$ $13,6 \text{ кГц}$				GBR $f=16 \text{ кГц}$				NAA $f=17,8 \text{ кГц}$			
	Φ_{\max}	Φ_{\min}	r	r_3	Φ_{\max}	Φ_{\min}	r	r_3	Φ_{\max}	Φ_{\min}	r	r_3
10 июля 1972 г.	—	—	—	—	—	—	—	—	1,00	0,40	7000	3000
11 мая 1975 г.	0,65	0,25	2200	2200	0,35	0,25	2600	2600	0,70	0,25	7000	500 0
29 апреля 1976 г.	0,66	0,10	2200	2200	0,66	0,10	2600	2600	0,66	0,10	7000	2500— 4000

* Φ_{\max} , Φ_{\min} — фазы затмения на трассе, r , r_3 (км) — соответственно длина всей трассы и затененного участка.

Во всех случаях при прохождении полосы затмения вдоль трассы распространения наблюдаются регулярно вариации фазы сигнала и практически не обнаруживаются изменения амплитуды. Этот факт дает основание попытаться свести влияние затмения к изменению геометрических размеров волновода, а не импеданса его стенок [1]. Введем в качестве параметра, характеризующего фазу СДВ-сигнала, эффективную высоту волновода — h , определив ее как уровень постоянной концентрации вдоль трассы распространения. В работе получен закон изменения эффективной высоты в зависимости от фазы затмения и проверена его пригодность путем сравнения расчетных вариаций фазы с экспериментальными.

ИЗМЕНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЫСОТЫ ВОЛНОВОДА

Для связи эффективной высоты волновода с фазой затмения использовалось представление профиля электронной концентрации ионосферы слоем Чепмена. Электронная концентрация в максимуме слоя изменяется в зависимости от линейной фазы затмения: $N_m = N_m(\Phi)$ (Φ — отношение закрытой части диаметра Солнца к полному), в результате чего любому фиксированному значению $N(h) = N_0$ соответствуют различные высоты h . Аппроксимируя профиль электронной концентрации в его нижней части экспонентой, выбираем в качестве N_0 значение электронной концентрации на высоте дневного волновода $h_0 = 64$ км и определяем изменение эффективной высоты волновода $h_{эфф}$ как функцию Φ . Предполагая, что излучение по диску Солнца и его короне распределено равномерно и за время затмения сохраняется неизменным, зенитное расстояние Солнца, изменение высоты слоя $\Delta h = h_{эфф} - h_0$ можно представить в виде

$$\Delta h = H \ln \frac{I(\Phi)}{I(0)}, \quad (1)$$

где $I(\Phi)$ — поток излучения, зависящий от фазы затмения, $I(0)$ — полный поток в дневное время.

Поток излучения во время затмения зависит от площади открытой части Солнца. Учитывая, что в нижней ионосфере в ночное время сохраняется высокое значение N_e , которое объясняется наличием дополнительных источников, представляем полный поток ионизирующего излучения в виде

$$I = I_n + I_0 + \alpha S(\Phi), \quad (2)$$

где I_n — ионизирующее излучение, действующее в ночное время, I_0 — поток от солнечной короны, $\alpha S(\Phi)$ — поток от Солнечного диска (α — коэффициент пропорциональности, $S(\Phi)$ — площадь открытой части Солнца). Определив коэффициент α через значение потока в дневное время и подставив соответствующие потоки в формулу (1), получим

$$\Delta h = H \ln \left[\frac{I_n}{I_{дн}} \left(1 - \frac{S(\Phi)}{S_{\odot}} \right) + \frac{I_0}{I_{дн}} \left(1 - \frac{S(\Phi)}{S_{\odot}} \right) + \frac{S(\Phi)}{S_{\odot}} \right], \quad (3)$$

S_{\odot} — полная площадь солнечного диска. При расчете изменения высоты по формуле (3) воспользуемся значениями величин H , $I_n/I_{дн}$, $I_0/I_{дн}$, принятыми в литературе: $H = 6,5$ км [2], $I_n/I_{дн} = 0,01$ [3], $I_0/I_{дн} = 0,1$ [4]. Отношение открытой площади Солнца к полной необходимо выразить через линейную фазу затмения:

$$\frac{S(\Phi)}{S_{\odot}} = 1 - \frac{2}{\pi} [\arcsin \sqrt{\Phi(2-\Phi)} - \Phi(1-\Phi)\sqrt{2-\Phi}]. \quad (4)$$

В табл. 2 приведены значения $S(\Phi)/S_{\odot}$ в зависимости от Φ .

Таблица 2

Φ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$S(\Phi)/S_{\odot}$	0,964	0,898	0,812	0,72	0,61	0,5	0,375	0,255	0,118	0

Подставив соответствующие величины в формулу (3), находим изменение высоты в функции линейной фазы затмения, рис. 1. С помощью формулы (3) можно также оценить изменение высоты волновода при переходе к ночным условиям. В этом случае $S(\Phi)/S_{\odot} = 0$, $I_0/I_{\text{дн}} = 0$ и

$$\Delta h = H \ln \frac{I_n}{I_{\text{дн}}} \quad (5)$$

Полученная таким образом величина $\Delta h = 30$ км, что не противоречит значениям, обычно принятым для нижней ионосферы [1].

Дальнейшую проверку соответствия найденного закона изменения эффективной высоты в период солнечного затмения произведем путем сравнения ожидаемых вариаций фазы сигнала на трассе переменной высоты с результатами эксперимента. Для этого, предварительно, с помощью карт и беселевых элементов затмения рассчитывается распределение фаз затмения вдоль трассы распространения в интересные моменты времени [5-7]. С помощью кривой рис. 1 определяется соответствующий высотный профиль трассы. На рис. 2, для примера, показаны профили трасс в момент времени, соответствующий максимальному изменению фазы сигнала в эксперименте. Эти профили используются при расчете ожидаемых вариаций фазы во время солнечного затмения.

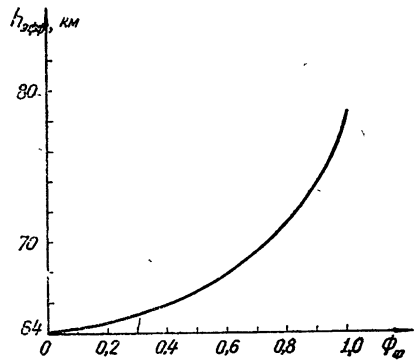


Рис. 1. Зависимость эффективной высоты волновода от фазы затмения.

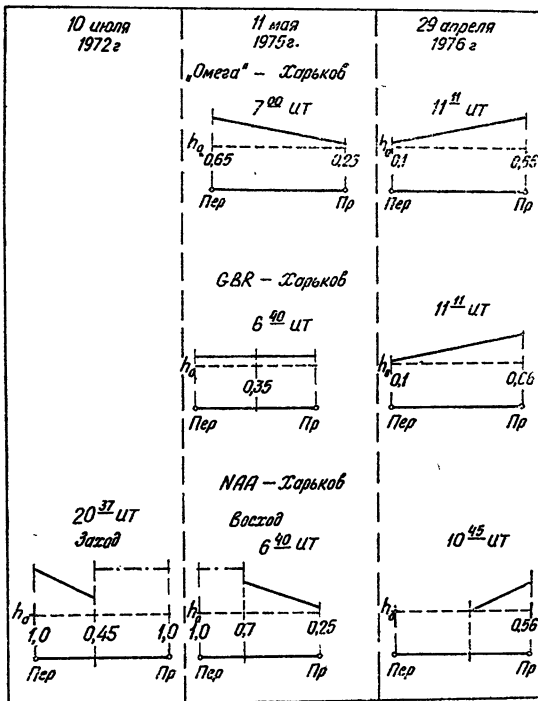


Рис. 2. Схематические профили трасс в один из моментов затмения. Пунктирная—уровень невозмущенного волновода, цифры на краях затменных участков указывают фазу затмения.

РАСЧЕТ ВАРИАЦИЙ ФАЗЫ НА ТРАССАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТОЙ ВОЛНОВОДА

Изменения фазы $\Delta\varphi$ определяются относительно невозмущенного значения фазы φ_0 ($\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_0$). При расчете ожидаемых вариаций фазы воспользуемся одномодовым приближением. В дневных условиях на всех исследуемых нами частотах и трассах одномодовые условия практически выполняются (амплитуда второй моды меньше 0,1 от амплитуды первой моды). Сохранение одномодовой модели распространения в период затмения оправдывается тем, что в большинстве случаев мы имеем дело с небольшими фазами затмения. Что же касается полного затмения, то при небольшой его продолжительности (не более 10 минут) считается, что ночные условия на трассе не успевают сформироваться и следовательно по-прежнему роль второй моды мала.

При одномодовом распространении на регулярной трассе фаза поля линейно изменяется с расстоянием

$$\varphi = \beta r.$$

Согласно [1] для β справедлива следующая приближенная формула:

$$\beta \left(\frac{\text{рад}}{1000 \text{ км}} \right) \approx 2,095 \cdot 10^{-2} f \left(1 - \frac{V_1}{c} \right), \quad (6)$$

где r — длина трассы, f — частота сигнала, V_1 — фазовая скорость первой моды.

На трассе переменной высоты волновода фазовая скорость вдоль дистанции не остается постоянной. При достаточно плавных изменениях высоты волновода можно определить значение φ_3 по формуле

$$\varphi_3 = \int_0^r \beta(r) dr.$$

Для расчетов φ_3 воспользуемся значениями фазовой скорости, полученными в работах [1, 8, 9]. Приведенные там значения V_1 соответствуют дневным условиям при $h = 60 \div 64 \text{ км}$ и ночным при $h = 85 \div 90 \text{ км}$. Нам необходимы также значения фазовой скорости на промежуточных высотах. Известна приближенная формула для нахождения фазовой скорости [1]:

$$\frac{V_1}{c} - 1 = \frac{\pi^2}{8k^2 h^2} - \frac{h}{2a} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right), \quad (7)$$

где a — радиус Земли. Согласно этой формуле в том диапазоне частот, в котором проводились измерения, можно пользоваться линейной интерполяцией фазовой скорости по высоте. Значения фазовой скорости первого мода, полученные по формуле (7), отличаются от линейного хода не более чем на 10%. Таким образом, в соответствии с профилем трасс путем линейной интерполяции находим фазовые скорости и вычисляем фазу сигнала для различных моментов затмения.

СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ ФАЗЫ

Ожидаемые вариации фазы рассчитаны на всех исследуемых частотах для двух частных затмений (11 мая 1975 г. и 29 апреля 1976 г.) и на частоте 17,8 кГц во время полного затмения (10 июля 1972 г.).

Для затмения 11 мая 1975 г. характерно перемещение полосы тени практически поперек направлений распространения, поэтому отличия времени наступления максимальной фазы затмения вдоль трассы не

превышали 10 минут. Для этого затмения расчеты выполнены в момент времени, соответствующий максимальному экспериментальному изменению фазы.

Полоса тени 29 апреля 1976 г. перемещалась вдоль трасс распространения, поэтому изменялась протяженность затененного участка, в процессе затмения. Моменты наступления максимальной фазы затмения на противоположных концах трассы отличались, и расчеты выполнены для нескольких моментов в процессе затмения.

При определении ожидаемых вариаций фазы использованы значения фазовой скорости, полученные для различных моделей ионосферы. Так, на частоте 16 $\kappa\Gamma\text{ц}$ использованы данные работ [1, 8], на частоте 10,2 и 17,8 $\kappa\Gamma\text{ц}$ — [1, 9]. На рис. 3 приведены экспериментальные кривые изменения фазы (сплошные линии). Там же нанесены ожидаемые значения фазы. Расчетные значения, полученные работы [1, 8], на частоте 17,8 $\kappa\Gamma\text{ц}$ — крестиками, по данным работы [9] — квадратиками. Как следует из рисунка, на всех частотах наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений.

Лучшие результаты получены для затмений, происходящих на дневных трассах. Расхождение расчетных и экспериментальных значений вариаций фазы для затмений, совпадающих с переходными периодами на трассе, несколько больше. Но и в этих условиях относительная погрешность не превышает 20%. Расчетные значения вариаций фазы, независимо от модели ионосферы, сохраняются одинаковыми.

Особо следует обратить внимание на сравнение экспериментальных и расчетных данных на частоте 17,8 $\kappa\Gamma\text{ц}$ 10 июля 1972 г. В 20.37 UT полная фаза затмения захватила район передающего пункта. В это время можно было ожидать, что дополнительный вклад в изменение фазы результирующего сигнала внесет вторая мода. Тем не менее, расчеты, выполненные только для одной моды, дают хорошее совпадение с экспериментом.

Оценки, относящиеся к полному затмению 10 июля 1972 г., согласуются с ранее полученными качественными результатами [10].

Из графика рис. 1 видно, что фазам затмения от 0,5 до 1 соответствует изменение высоты волновода в 4 раза больше, чем фазам от 0 до 0,5. Следовательно, основное изменение фазы СДВ-сигнала, как и предполагалось [10], получается при фазах затмения, больших 0,5.

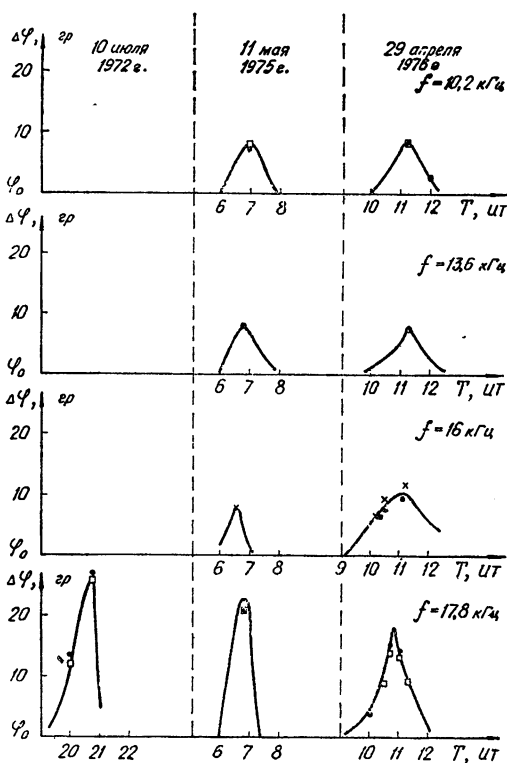


Рис. 3 Сравнение расчетных и экспериментальных значений фазы сигнала.

Таким образом, результат сравнения расчетных и экспериментальных данных оправдывает предложенную схему учета влияния солнечного затмения на фазу СДВ-сигналов путем введения эффективной высоты волновода.

Близкий вопрос о зависимости эффективной высоты от зенитного угла Солнца рассматривался в работе [1]. По данным фазовых измерений на более высоких частотах (150—165 $\kappa\Gamma\text{ц}$) авторами установлена зависимость $h \sim \ln \sec \chi$. Как следует из приведенного в работе графика, коэффициент пропорциональности равен 6 км. В интервале высот 75—85 км это значение также соответствует высоте однородной атмосферы, принятой в модели Международной атмосферы КОСПАР [2].

Следовательно, с помощью эффективной высоты волновода, по фазовым измерениям можно оценить влияние Солнца на нижнюю ионосферу как во время солнечного затмения, так и суточного хода.

В заключение авторы благодарят П. В. Блиоха за постановку задачи и ее обсуждение, С. Н. Синявского и Ю. М. Ямпольского за подготовку аппаратуры и участие в измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Орлов, Г. В. Азарнин, Проблемы дифракции и распространения волн, Харьков, 1970.
2. Р. Уиттен, И. Поппов, Физика нижней ионосферы, изд. Мир, М., 1968.
3. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
4. Я. Л. Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972.
5. Астрономический календарь, переменная часть, изд. Наука, М., 1972.
6. Астрономический календарь, переменная часть, изд. Наука, М., 1975.
7. Астрономический календарь, переменная часть, изд. Наука, М., 1976.
8. П. Е. Краснушкин, М. Д. Сопельников, Е. Н. Федоров, Геомагнетизм и аэрономия, № 6, 997 (1971).
9. Г. Ф. Ременец, Геомагнетизм и аэрономия, № 5, 857 (1973).
10. Р. С. Шубова, Геомагнетизм и аэрономия, № 1, 166 (1974).
11. В. Зингер, И. Бремер, Геомагнетизм и аэрономия, № 1, 54 (1972).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 декабря 1976 г.

THE CHANGE OF IONOSPHERE EFFECTIVE HEIGHT DURING THE SOLAR ECLIPSE PERIOD

L. N. Moiseenko, R. S. Shubova

The variations of the VLW signal parameters during the solar eclipse period are used for interpreting the eclipse effects in the lower ionosphere. The relation is obtained between the effective height of a waveguide and the eclipse phase.

УДК 551.521.3

О РАСЧЕТЕ ЛАЗЕРНОГО ЭХО-СИГНАЛА ОТ ОБЛАКА С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В. В. Белов, Г. Н. Глазов, Г. М. Креков

Предлагается использовать линейно-системный подход к расчету формы и ширины отраженного облаком импульса. Найдена удобная аппроксимация импульсной переходной функции, рассчитываемой методом Монте-Карло. Приведены выражения для принимаемого сигнала при типичных формах зондирующего импульса и проведено сравнение с приближением однократного рассеяния.

При лазерном зондировании облаков принимаемый сигнал существенно отличается от зондирующего импульса по форме и другим параметрам. Знание характеристик принимаемого сигнала необходимо для построения зондирующих систем и решения обратных задач об оптических параметрах облака. Деформации сигналов при распространении в облаках изучались экспериментально [1] и теоретически [2]. В последнем случае задача состоит в решении нестационарного уравнения переноса. Продемонстрированное в [2] решение методом Монте-Карло требует новых трудоемких расчетов для каждой совокупности параметров зондирующего импульса и облака.

В данной работе сделан следующий шаг: используя линейность системы излучатель — среда — приемник (S) относительно мощности, решение задачи разбивается на два этапа. На первом определяется импульсная переходная характеристика $h(t)$ системы S — ее отклик на δ -образный зондирующий импульс. На втором — принимаемый сигнал находится как свертка $h(t)$ и зондирующего сигнала.

Хотя сам по себе этот принцип не является новым [3], в обсуждаемой задаче он особенно полезен, если найти аппроксимацию $h(t)$ в широком классе параметров облака и геометрий эксперимента. Поскольку тогда второй этап решения выполняется аналитически, это одновременно охватывает и широкий класс зондирующих импульсов.

Рассмотрим вертикальное моностатическое зондирование плоского однородного облака с коэффициентом рассеяния β_{sc} и ослабления β_{ext} и толщиной L . Нами выполнен расчет на ЭВМ функций $h(t)$ в широком диапазоне значений оптической толщины $\tau_0 = \beta_{ext} L$, угловой апертуры приемника 2γ для длины волны излучения $\lambda = 0,69$ мкм, жидкокапельного облака S_1 . Индикатриса рассеяния рассчитывалась по формулам Ми [4]. Результаты расчета показывают, что нормированная характеристика $\hat{h}(t) = h(t)/h(0)$ может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{t}{m}\right), & 0 \leq t \leq b = 2L/c \\ \exp\left(-\frac{t-b}{n} - \frac{b}{m}\right), & b \leq t < \infty \end{cases}, \quad (1)$$

где время отсчитывается от момента достижения отраженным импульсом приемника, коэффициенты m и n не зависят от t . Некоторые сведения о коэффициентах m и n следуют из табл. 1 и 2, в которых приведены значения обобщенных параметров $m_\tau = mc\beta_{\text{ext}}$, $n_\tau = nc\beta_{\text{ext}}$ (c — скорость света) при угловой расходимости зондирующего пучка $2\nu_0$ и расстоянии до облака R .

Таблица 1

Зависимость коэффициента m_τ от τ , $\tau_n = R\beta_{\text{ext}}\text{tg } \nu$; $\lambda = 0,69$ мкм;

$$\tau_0 = R\beta_{\text{ext}}\text{tg } \nu_0 = 0,0264; \kappa = 0,999 (\kappa = \beta_{\text{sc}}/\beta_{\text{ext}})$$

$\tau_0 \backslash \tau_n$	0,0264	0,0878	0,264	0,527	1,58
0,1	1,000	1,000	1,268	1,540	1,72
0,5	1,000	1,069	1,300	1,590	1,75
1,0	1,000	1,160	1,390	1,730	1,76
2,0	1,069	1,260	1,430	1,780	2,04
4,0	1,177	1,370	1,650	2,165	3,82
6,0	1,522	1,630	1,850	2,500	6,08

Таблица 2

Зависимость коэффициента n_τ от τ , τ_n ; $\lambda = 0,69$ мкм; $\tau_0 = 0,0264$; $\kappa = 0,999$

$\tau_0 \backslash \tau_n$	0,0264	0,0878	0,264	0,527	1,58
0,1	0	0,01130	0,0163	0,0254	0,0317
0,5	0	0,01440	0,0231	0,0405	0,0405
1,0	0	0,03347	0,0464	0,0696	0,1040
2,0	0	0,04330	0,0869	0,1290	0,3200
4,0	0	0,08690	0,2060	0,3470	0,5040
6,0	0	0,21700	0,4330	0,8690	1,7390

Принимаемая мощность может быть рассчитана по формуле

$$P_{\text{вх}}(t) = \mathcal{E}_{\text{вх}} h(0) \int_0^t \hat{P}_{\text{вх}}(\tau) \hat{h}(t-\tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\mathcal{E}_{\text{вх}}$ — энергия зондирующего импульса, $\hat{P}_{\text{вх}}$ — нормированная условием $\hat{P}_{\text{вх}}(t) = P_{\text{вх}}(t)/\mathcal{E}_{\text{вх}}$ мощность зондирующего импульса, $h(0)$ может быть определена в приближении однократного рассеяния как

$$h(0) = \frac{\beta_\pi s_a c}{2R^2},$$

β_π — объемный коэффициент рассеяния назад, s_a — площадь приемной антенны, R — расстояние до ближайшей кромки облака.

Используя (1), (2), найдем $P_{\text{вх}}(t)$ при прямоугольной форме зондирующего импульса длительности T :

$$\hat{P}_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 1/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, \quad t > T \end{cases};$$

а) при $T \leq b$

$$P_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{h(0) \Delta_{\text{ВХ}}}{T} \begin{cases} m(1 - e^{-\frac{t}{m}}), & 0 \leq t \leq T \\ m(e^{\frac{T}{m}} - 1)e^{-\frac{t}{m}}, & T < t \leq b \\ n(1 - e^{-\frac{s}{n}})e^{-\frac{b}{n}} + m(e^{\frac{T-t}{m}} - e^{-\frac{b}{m}}), & b < t \leq T + b \\ n(e^{\frac{T}{n}} - 1)e^{-\frac{s}{n} - \frac{b}{m}}, & T + b < t < \infty \end{cases};$$

б) при $T \geq b$

$$P_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{h(0) \Delta_{\text{ВХ}}}{T} \begin{cases} m(1 - e^{-\frac{t}{m}}), & 0 \leq t \leq b, \\ n(1 - e^{-\frac{s}{n}})e^{-\frac{b}{n}} + m(1 - e^{-\frac{b}{m}}), & b < t \leq T \\ n(1 - e^{-\frac{s}{n}})e^{-\frac{b}{n}} + m(e^{\frac{T-t}{m}} - e^{-\frac{b}{m}}), & T < t \leq b + T \\ n(e^{\frac{T}{n}} - 1)e^{-\frac{s}{n} - \frac{b}{m}}, & b + T < t < \infty \end{cases}$$

где $s = t - b$, и при более реальной [5] гамма-форме

$$P_{\text{ВХ}}(t) = a^2 t e^{-at},$$

$$P_{\text{ВЫХ}}(t) = h(0) \Delta_{\text{ВХ}} a^2 e^{-at} \left\{ \frac{1}{r^2} [(tr - br + 1)e^{br} - tr - 1] + \right. \\ \left. + \frac{1}{d^2} e^{b\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)} [(d_+ + 1 - td)e^{td} + (bd - d - 1)e^{bd}] \right\}, \quad (3)$$

где $r = a - \frac{1}{m}$, $d = a - \frac{1}{n}$. Эффективная ширина $T_{\text{ВЫХ}}$ принимаемого сигнала, понимаемая как

$$T_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{P_{\text{ВЫХ}} \text{ макс}} \int_0^{\infty} P_{\text{ВЫХ}}(t) dt,$$

в первом случае равна

$$T_{\text{ВЫХ}} = T \begin{cases} \frac{1 - e^{-\frac{b}{m}}}{1 - e^{-\frac{T}{m}}} + \frac{ne^{-\frac{b}{m}}}{m(1 - e^{-\frac{b}{m}})}, & T \leq b \\ \frac{ne^{-\frac{b}{m}} + m(1 - e^{-\frac{b}{m}})}{ne^{-\frac{b}{m}}(1 - e^{-\frac{T-b}{n}}) + m(1 - e^{-\frac{b}{m}})}, & T \geq b \end{cases} \quad (4)$$

Энергия принимаемого импульса в обоих случаях равна

$$F_{\text{ВЫХ}} = h(0) \mathcal{E}_{\text{ВХ}} \left[m + e^{-\frac{b}{m}} (n - m) \right]$$

и, как и следовало ожидать, не зависит от формы зондирующего импульса.

На рис. 1, 2 приведена форма (3) сигнала $P_{\text{ВЫХ}}(t')$, его ширина $T'_{\text{ВЫХ}} = T_{\text{ВЫХ}} c \beta_{\text{ext}}$ и $T'_m = T_m \beta_{\text{ext}}$ — положение максимума $P_{\text{ВЫХ}}(t')$ при зондирующем импульсе гамма-формы. Расчеты проведены для $\tau_0 = 1$ (рис. 1) и $\tau_0 = 2$ (рис. 2) при $\nu = 3'$, $30'$ и 3° (кривые 1, 2 и 3 на рис. 1) и $\nu = 3'$ и $30'$ (кривые 1 и 2 на рис. 2); $t' = t c \beta_{\text{ext}}$; пунктирными линиями показаны ширина зондирующего импульса $T'_{\text{ВХ}}$ и длительность $2\tau_0$ импульсной переходной характеристики в приближении однократного рассеяния.

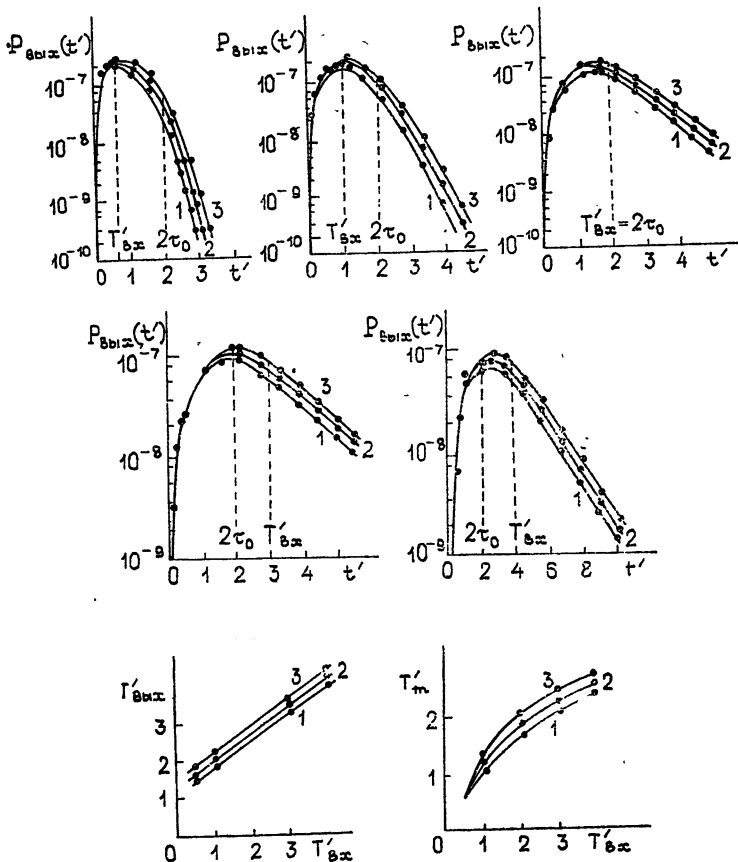


Рис. 1.

Сравним $P_{\text{ВЫХ}}(t)$, $T_{\text{ВЫХ}}$ и $F_{\text{ВЫХ}}$, найденные нами, с соответствующими характеристиками сигнала, полученными в приближении однократного рассеяния. Если пренебречь угловой расходимостью зондирующего пучка и считать $R \gg L$, когда справедлива аппроксимация (1) $\hat{h}(t)$, то нормированная на $h(0)$ импульсная переходная характеристика в приближении однократного рассеяния имеет вид

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} \exp(-t\rho), & 0 \leq t \leq b \\ 0, & t < 0, t > b \end{cases}$$

где $\rho = c\beta_{\text{ext}}$. Тогда для входного импульса прямоугольной формы получим:

а) при $T \leq b$

$$P_{\text{вых}}(t) = \frac{h(0) \Delta_{\text{вх}}}{T \rho} \begin{cases} 1 - e^{-t\rho}, & 0 \leq t \leq T \\ e^{-t\rho} (e^{T\rho} - 1), & T < t \leq b \\ e^{-\rho(t-T)} - e^{-2\tau_0}, & b < t \leq b + T \end{cases};$$

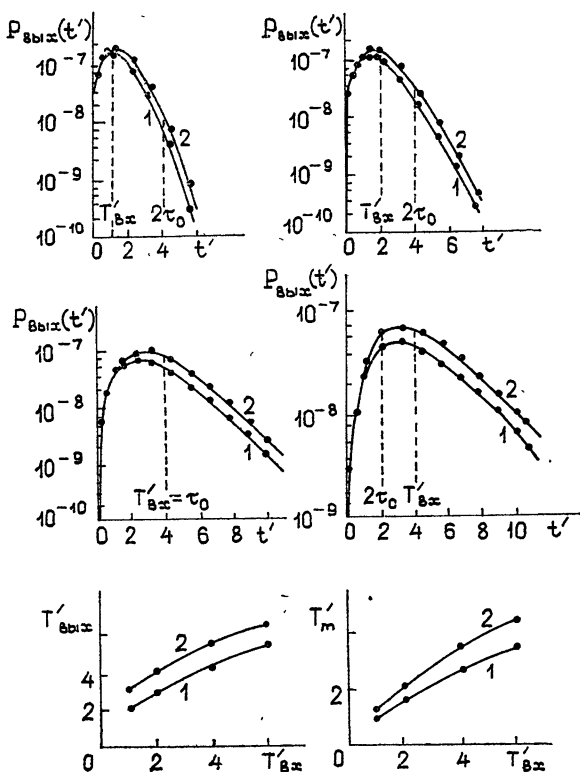


Рис. 2.

б) при $T \geq b$

$$P_{\text{вых}}(t) = \frac{h(0) \Delta_{\text{вх}}}{T \rho} \begin{cases} 1 - e^{-t\rho}, & 0 \leq t \leq b \\ 1 - e^{-2\tau_0}, & b < t \leq T \\ e^{-\rho(t-T)} - e^{-2\tau_0}, & T < t \leq b + T \end{cases}.$$

Ширина выходного сигнала определится как

$$T_{\text{вых}} = T \begin{cases} \frac{1 - e^{-2\tau_0}}{1 - e^{-\rho T}}, & T \leq b \\ 1, & T > b \end{cases} \quad (5)$$

Энергия отраженного сигнала в приближении однократного рассеяния

$$F_{\text{вых}} = \frac{h(0) \Delta_{\text{вх}}}{\rho} (1 - e^{-2\tau_0}).$$

Учет многократного рассеяния (через параметры аппроксимации m и n) приводит к уширению сигнала, возрастанию энергии, усложнению его формы.

В табл. 3 для сравнения приводятся результаты расчетов $T'_{\text{вх}}$, выполненных в приближении однократного рассеяния (5), по формуле (4) и методом Монте-Карло ($\lambda = 0,69$ мкм, облако типа C_1 оптической толщины τ_0 , $T'_{\text{вх}} = T_{\text{вх}} c \beta_{\text{ext}}$ — безразмерная ширина прямоугольного зондирующего импульса).

Таблица 3

τ_0	$T'_{\text{вх}}$	Приближение однократного рассеяния	Расчеты по формуле		Метод Монте-Карло	
			$2\nu = 6'$ ($\tau_n = 0,026$)	$2\nu = 6^\circ$ ($\tau_n = 1,58$)	$2\nu = 6'$ ($\tau_n = 0,026$)	$2\nu = 6^\circ$ ($\tau_n = 1,58$)
0,5	0,25	0,7036	0,7036	0,8418	0,7292	0,8554
	0,50	0,7933	0,7955	0,9019	0,8092	0,8956
	1,00	1,0000	1,0000	1,0300	1,0036	1,0095
	1,50	1,5000	1,5000	1,5000	1,5080	1,5089
	2,00	2,0000	2,0000	2,0000	2,0098	2,0098
4	2	2,3122	2,4447	4,9834	2,4478	5,0213
	4	4,0732	4,1337	5,5047	4,0934	5,5822
	8	8,0000	8,0000	8,1483	8,0038	8,1113
	12	12,0000	12,0000	12,0000	12,0040	12,0080
	16	16,0000	16,0000	16,0000	16,0360	16,0621

Таким образом, рассмотренная методика построения решения в численных экспериментах по лазерному зондированию облаков позволяет проводить детальное исследование зависимости решений от вариантных параметров задачи с учетом многократного рассеяния.

Полученные аналитические представления для формы отраженного сигнала позволяют значительно упростить эти исследования и создают предпосылки постановки некоторых обратных задач, в частности, восстановления макрофизических параметров рассеивающего слоя по характеристикам отраженного сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. Bucher and R. M. Lerner, Appl. Opt., 12, № 10 (1973).
2. В. Е. Зуев, Г. М. Креков, А. И. Попков, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 2, 50 (1973).
3. А. Папулис, Теория систем и преобразований в оптике, изд. Мир, М., 1971.
4. Д. Дейрменджан, Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами, изд. Мир, М., 1971.
5. Г. М. Креков, М. М. Крекова, И. В. Самохвалов, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 7 (1969).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
16 января 1977 г.

ON THE CALCULATION OF A LASER ECHO-SIGNAL FROM CLOUD
WITH ALLOWANCE FOR MULTIPLE SCATTERING

V. V. Belov, G. N. Glazov, G. M. Krekov

It is suggested to use the linear-system approach to calculation of the form and width of a pulse reflected by the cloud. The convenient approximation of the pulse transient function calculated by the Monte-Carlo method has been found. Expressions are given for the received signal for typical forms of sounding pulse and comparison with the single scattering approximation has been made.

УДК 538.56 : 519.25

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

А. Н. Караштин, А. Г. Сазонтов

Рассматривается процесс стабилизации стоячей ионно-звуковой волны, возбуждаемой за счет распада электромагнитной волны на ленгмюровскую и ионно-звуковую в резонаторе — слое неравновесной плазмы со столкновениями. Показано, что стабилизация нарастающей высшей моды резонатора возможна за счет передачи энергии ее затухающим субгармоникам. Анализ проводится в простейшем—двух- и трехмодовом—приближении. В частности, при трехмодовом взаимодействии найдены статические, квазипериодические и стохастические режимы стабилизации.

Нагрев плазмы ВЧ-электрическим полем и мощными импульсами лазерного излучения в последнее время интенсивно исследуется как теоретически, так и экспериментально [1–3]. При изучении параметрического воздействия на плазму обычно используют два основных подхода. Наиболее последовательным является метод, основанный на вычислении поправок к диэлектрической проницаемости, обусловленных действием электрического поля, который позволяет определять пороги и инкременты параметрических неустойчивостей [2]. Однако исследование нелинейной стадии неустойчивости в такой постановке задачи приводит, как правило, к существенным математическим трудностям. В связи с этим представляется полезным другой подход, опирающийся на использование моделей с ограниченным числом взаимодействующих волн рассматривающий некоторые элементарные процессы нелинейного взаимодействия. Такое приближение, хотя и не всегда соответствует конкретным реальным условиям, помогает понять природу характерных явлений.

В последнее время обсуждаются различные механизмы стабилизации параметрических неустойчивостей, например, связанные с вынужденным рассеянием на частицах [4, 5], с нелинейным сдвигом частоты [6], с фазовой корреляцией возбуждаемых колебаний [7] и т. д. Для некоторых видов параметрических неустойчивостей проведен анализ сравнительной эффективности различных нелинейных механизмов [8].

Определенный интерес представляет класс процессов, в которых параметрически возбуждаемые волны за счет нелинейности среды оказываются связанными с затухающими волнами. В подобных ситуациях становится возможной стабилизация параметрической неустойчивости на таких уровнях интенсивности возбуждаемых волн, когда их обратным воздействием на волну накачки можно пренебречь. Известно, что если перекачка энергии от параметрически возбуждаемых волн к затухающим происходит с повышением частоты, то при небольшом числе мод стабилизация идет обычным образом: амплитуда устанавливается на некотором фиксированном уровне. Однако в обратном случае, когда перекачка энергии происходит с понижением частоты, даже в простых динамических системах возможно установление сложного режима стабилизации неустойчивости: амплитуды и фазы волн не

выходят на фиксированные уровни, а изменяются во времени по периодическому или квазипериодическому закону.

Настоящая работа посвящена изучению некоторых моделей подобной стабилизации неустойчивости, связанной с распадом электромагнитной волны накачки на ленгмюровскую и ионно-звуковую в слое неизотермической плазмы с учетом взаимодействия ионно-звуковой волны с ее субгармониками. Для сравнения выбраны две модели: 1) параметрически неустойчивая ионно-звуковая волна является второй гармоникой основной частоты ионного звука, 2) параметрически неустойчивая ионно-звуковая волна является третьей гармоникой основной частоты. Кроме того, для выяснения зависимости поведения системы ионно-звуковых волн от характера поступления энергии в высшую гармонику, была исследована задача, в которой ленгмюровская волна исключалась из рассмотрения, а инкремент на третьей гармонике считался заданным. Этот случай может реализоваться при возбуждении сильно затухающей ленгмюровской волны, либо при возбуждении ионного звука ионным пучком.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать слой однородной неизотермической плазмы, в котором возможен дискретный набор мод, помещенный в однородное поперечное электрическое поле $E(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ с частотой ω_0 , близкой к плазменной. Возникающее однородное периодическое движение электронов в поле $E(t)$ оказывается неустойчивым относительно длинноволновых ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний [9]. Для ленгмюровских колебаний воспользуемся линеаризованной системой гидродинамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_e &= -\operatorname{div} n_e \mathbf{v}_{0e}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \frac{e}{m} \nabla \varphi + \frac{3}{2} \frac{T_e}{mn_0} \nabla n_e &= 0, \\ \Delta \varphi &= -4\pi e (n_e - n_i). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v}_e — скорость электронов в ленгмюровской волне, \mathbf{v}_{0e} — осцилляторная скорость электронов в однородном электрическом поле, $\mathbf{v}_{0e} = \frac{eE_0}{m\omega_0}$, n_e — отклонение концентрации электронов от равновесной n_0 .

Движение ионов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= -\frac{T_i}{MN_i} \nabla n_i - \frac{e}{M} \nabla \varphi, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} N_i \mathbf{v}_i &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{v}_i — скорость ионов, $N_i = n_0 + n_i$ — их концентрация.

Уравнения (1) не учитывают электронных нелинейностей, которые начинают играть роль, если характерное время нелинейного процесса $\frac{1}{\tau} \leq \omega_p (kr_d)^2 \frac{W}{n_0 T_e}$ (см. [10]). В дальнейшем предполагается, что рассматриваются только более быстрые процессы.

Будем считать, что волна накачки распадается на ленгмюровскую и ионно-звуковую, которая является гармоникой основной частоты резонатора

$$\omega_0 = \omega_k + \Omega_k, \quad (3)$$

где Ω_k и ω_k — соответственно законы дисперсии ионно-звуковых и ленгмюровских волн. При этом в пренебрежении расстройкой между частотами накачки и электронной ленгмюровской волны волновые числа будут

$$k^2 = \left(\frac{r_d^{-4}}{4} + \frac{16}{9} \frac{c_s^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega_p^2}{r_d^2} \right)^{1/2} - \frac{r_d^{-2}}{2}.$$

Линейная стадия процесса (3) подробно описана в работе [9]. Здесь в качестве нелинейного механизма стабилизации рассмотрим перекачку энергии из неустойчивой моды в более низкие, затухающие моды резонатора. Заметим, что трансформация энергии в более высокие моды также стабилизирует неустойчивость [11], однако в том случае, когда неустойчивая мода лежит в области $kr_d \leq 1$ (гармоники оказываются нерезонансными), их возбуждение оказывается мало эффективным из-за сильной дисперсии ионно-звуковых мод. Именно в этом случае может реализоваться предполагаемый механизм. Простейшей его реализацией является случай, когда неустойчивая мода представляет собой вторую гармонику основной частоты резонатора. Этот случай описывается системой уравнений, следующей из (1) и (2):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= i \Omega_1 a_1^* a_2 - \nu_s a_1, \\ \dot{a}_2 &= -\frac{eE_0}{2m \omega_0} k_2 \frac{\omega_n}{\Omega_2} \frac{m}{M} a_n^* + i \Omega_1 a_1^2 - \nu_s a_2, \\ \dot{a}_n &= -\frac{eE_0}{2m \omega_0} k_2 a_2^* - \nu_e a_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a_n — комплексная амплитуда ленгмюровской волны с частотой ω_n , $a_{1,2}$ — ионно-звуковые моды с частотами Ω_1 и $\Omega_2 = 2\Omega_1$, ν_e и ν_s — феноменологически введенные затухания ленгмюровских и ионно-звуковых волн, которые будем предполагать столкновительными.

В качестве оценки примем для них следующие выражения:

$$\nu_e = \frac{\omega_p^4 \Lambda}{3 (2\pi)^{3/2} n_0 v_{Te}^3} \text{ — затухание, обусловленное столкновениями элект-}$$

ронов (Λ — кулоновский логарифм), $\nu_s = \frac{2\sqrt{2} \omega_p^4 \Lambda}{15 (2\pi)^{3/2} n_0 v_{Te}^3} \left(\frac{m}{M} \frac{T_e}{T_i} \right)$ — затухание, связанное с ионно-ионными соударениями.

В безразмерных переменных $a_n \rightarrow \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{m}{M} \frac{eE_0}{2m \omega_0} \frac{1}{v_s^2} a_n$, $a_{1,2} \rightarrow \Omega_1 a_{1,2}$

$t \rightarrow \nu_s t$. Переходя к действительным амплитудам и фазам $a_j = A_j e^{i\varphi_j}$ и обозначая $\Psi = \varphi_n + \varphi_2$, $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$, перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_1 A_2 \sin \Phi - A_1, \\ \dot{A}_2 &= A_n \sin \Psi - A_1^2 \sin \Phi - A_2, \end{aligned}$$

$$\dot{A}_n = \alpha A_2 - \delta A_n, \quad (5)$$

$$\dot{\Psi} = - \left(\alpha \frac{A_2}{A_n} + \frac{A_n}{A_2} \right) \sin \Psi + \frac{A_1^2}{A_2} \cos \Phi,$$

$$\dot{\Phi} = \left(2A_2 + \frac{A_1^2}{A_2} \right) \cos \Phi - \frac{A_n^2}{A_2} \sin \Psi,$$

где

$$\alpha = (eE_0/2m\omega_0)^2 \frac{\omega_n}{\Omega_2} \frac{m}{M} \frac{1}{v_s^2}, \quad \delta = \frac{v_e}{v_s}.$$

При $\alpha < \delta$ в системе существует единственное тривиальное устойчивое состояние равновесия $A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 0$. При $\alpha > \delta$ оно теряет устойчивость и возникает новое стационарное состояние с $A_1^0 = \frac{\alpha}{\delta}$,

$$A_2^0 = 1, \quad A_3^0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta} - 1}, \quad \Phi^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \Psi^0 = 0, \text{ которое устойчиво, если}$$

$\delta < 1$. В случае $\delta > 1$ ($v_e > v_s$) статистический режим стабилизации невозможен. На границе $\delta = 1$ возмущения осциллируют с частотой $\omega = \sqrt{\alpha(\alpha - 1)}$. Заметим, что в приближении заданного инкремента на второй моде (который может реализоваться в случае $\delta \gg 1$ или при возбуждении второй моды ионного звука, например ионным пучком) имеется строгий результат: в отсутствие расстройки невозможен ни статистический, ни динамический режимы стабилизации [12].

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда возбуждается также и третья гармоника звука основной моды резонатора.

В этом случае появляется качественно новый эффект — возникает дополнительная резонансная связь между спектральными амплитудами, приводящая, вообще говоря, к равновесию мод. При этом в зависимости от параметров среды и инкремента неустойчивости возможен как статистический режим стабилизации, так и установление квазипериодических или стохастических пульсаций интенсивностей мод.

Соответствующие уравнения для безразмерных амплитуд имеют вид*

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= ia_1^* a_2 + ia_2^* a_3 - a_1, \\ \dot{a}_2 &= ia_1^2 + 2ia_1^* a_3 - a_2, \\ \dot{a}_3 &= 3ia_1 a_2 + a_1^* - a_3, \\ \dot{a}_n &= \alpha a_3^* - \delta a_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь a_n — комплексная амплитуда ленгмюровской волны с частотой ω_n , $a_{1,2,3}$ — комплексные амплитуды ионно-звуковых мод с частотами $\Omega_1, \Omega_2 = 2\Omega_1, \Omega_3 = 3\Omega_1$. В случае $\alpha < \delta$, когда отсутствует тривиальное состояние равновесия, было проведено численное исследование системы. При $\alpha < 2$ ($\delta = 1$) эволюция амплитуд носит периодический или квазипериодический характер (рис. 1), чему соответствуют периодические или квазипериодические пульсации интенсивности, структуры поля

* Генерация более высоких мод не эффективна в виду сильной высокочастотной дисперсии ионного звука и связанной с этим большой расстройкой от синхронизма,

в резонаторе и модуляции потока энергии, который пропорционален $|a_3| |a_x| \sin \Psi$ (Ψ — сумма фаз возбуждаемых ленгмюровской и ионно-звуковых волн).

В области $2 < \alpha < 2,5$ имеет место статическая стабилизация, и при $\alpha > 2,5$ система становится неустойчивой.

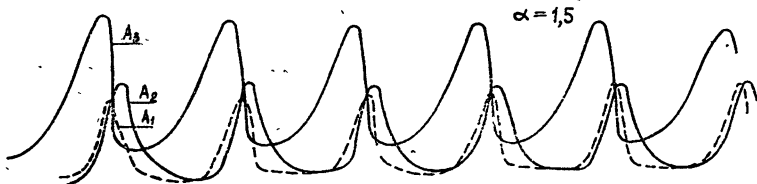


Рис. 1.

Заметим, что периодическая эволюция спектра параметрически возбужденных волн при наличии магнитного поля рассматривалась в работе [13].

Для оценки приближения заданного инкремента в этой модели был проведен численный счет для следующей системы уравнений, записанной в действительных амплитудах и фазах,

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_1 A_2 \sin \Phi_1 + A_2 A_3 \sin \Phi_2 - A_1, \\ \dot{A}_2 &= -A_1^2 \sin \Phi_1 + 2A_1 A_3 \sin \Phi_2 - A_2, \\ \dot{A}_3 &= -3A_1 A_2 \sin \Phi_2 + \tilde{\alpha} A_3, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\dot{\Phi}_1 = \left(2A_2 - \frac{A_1^2}{A_2} \right) \cos \Phi_1 + 2 \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} - \frac{A_1 A_3}{A_2} \right) \cos \Phi_2,$$

$$\dot{\Phi}_2 = \left(A_2 + \frac{A_1^2}{A_2} \right) \cos \Phi_1 + \left(\frac{A_2 A_3}{A_1} + 2 \frac{A_1 A_3}{A_2} - 3 \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi_2,$$

где $\Phi_1 = 2\varphi_1 - \varphi_2$, $\Phi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$, $\tilde{\alpha}$ — заданный инкремент на высшей моде. Эти уравнения отличаются от уравнений работы [14] слагаемыми, содержащими фазу Φ_2 , ответственными за резонансную связь гармоник.

В системе (7), помимо тривиального состояния равновесия, возможны следующие состояния равновесия:

$$a) A_2^0 = \frac{\tilde{\alpha}}{6} \left(\sqrt{1 + 12/\tilde{\alpha}} - 1 \right), \quad A_1^{0^2} = \frac{A_2^0}{6A_2^0/\tilde{\alpha} - 1}, \quad A_3^0 = \frac{3A_1^0 A_2^0}{\tilde{\alpha}},$$

$$\Phi_{1,2}^0 = \frac{\pi}{2},$$

$$b) A_3^0 = \frac{2(3 - \tilde{\alpha}) \left[1 - \frac{\tilde{\alpha}}{3} (2\tilde{\alpha} - 1) \right]}{[(2\tilde{\alpha} - 1)/3]^2 - 2(\tilde{\alpha} - 1)}, \quad A_1^{0^2} = \frac{1}{3} (2\tilde{\alpha} - 1) A_3^{0^2},$$

$$A_2^0 = \sqrt{\frac{A_1^{0^2} + A_3^{0^2}}{2}}, \quad \sin \Phi_1^0 = (3A_1^{0^2} - \tilde{\alpha} A_3^{0^2}) / 3A_1^0 A_2^0,$$

$$\sin \Phi_2^0 = \tilde{\alpha} A_3^0 / 3A_1^0 A_2^0,$$

причем анализ на устойчивость показывает, что ни одно из них не является устойчивым (состояния равновесия типа седло—узел или седло—фокус). Таким образом, в отличие от (6) здесь отсутствует статический режим стабилизации. В то же время из физических соображений ясно, что стабилизация неустойчивости за счет переноса энергии из нарастающих в затухающие гармоники должны быть и при малых $\tilde{\alpha}$. Поскольку ее нет в статическом режиме, следует ожидать, что режим стабилизации так же, как для системы (6), должно быть нестационарным.

Действительно, как показывает машинный эксперимент, здесь возможен нестационарный режим: интенсивности взаимодействующих мод ограничены, но квазипериодически или стохастически изменяются со временем. В зависимости от величины $\tilde{\alpha}$ в системе происходит следующее: при $0 < \tilde{\alpha} < 0,1$ устанавливается релаксационный квазипериодический режим (рис. 2), в интервале $0,1 < \tilde{\alpha} < 0,5$ его сменяет стохастический, при дальнейшем увеличении $\tilde{\alpha}$ от 0,5 до 0,8 снова имеет место квазипериодическая эволюция амплитуд мод и при $\tilde{\alpha} > 0,8$ система становится неустойчивой.

Характерная эволюция процесса и его корреляционная функция приведена на рис. 3 для $\tilde{\alpha} = 0,2$.

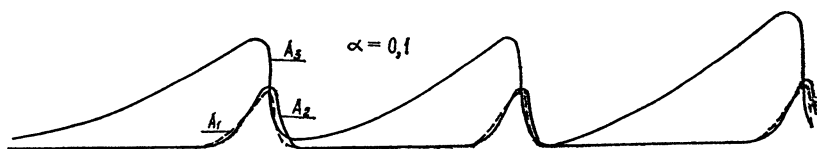


Рис. 2.

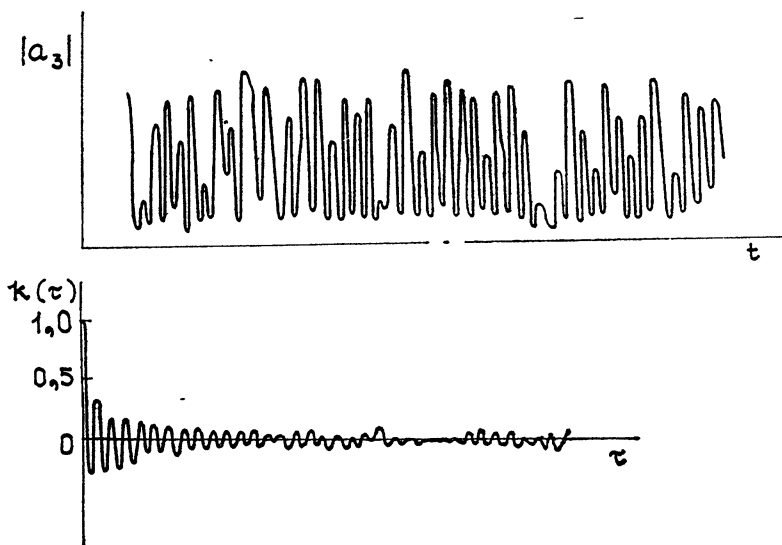


Рис. 3.

Простейшая стохастичность такого типа была обнаружена в [14] для системы двух резонансно связанных мод. Однако в отличие от [14] в рассматриваемой системе сложные неупорядоченные движения возникают при отсутствии расстройки.

Оценим, какова должна быть амплитуда накачки, чтобы реализовался стохастический режим стабилизации в лабораторной плазме с параметрами

$$n_0 = 10^8 \text{ см}^{-3}, \quad T_e = 10^5 \text{ К}, \quad T_e/T_i = 10^2, \\ r_d \approx 0,2 \text{ см}.$$

Для частоты поля накачки $\omega_0 \approx 100 \text{ МГц}$ и размере резонатора $r \approx 3 \text{ см}$, исходя из условия $\tilde{\alpha} \sim 0,5$, можно оценить

$$E_0 \sim 10 \text{ В/см}.$$

При таких параметрах плазмы взаимодействующие моды — это первые моды резонатора, и их структуру поля можно считать заданной, т. е. применимость уравнений (7) оправдана. Кроме того, как показывают результаты численного эксперимента, уровень энергии, на котором параметрически усиливаемые волны ограничиваются за счет распадов, такой, что $A_3^2/E_0^2 \ll 1$, так что обратной реакцией на накачку действительно можно пренебречь.

Заметим, что системы типа (7) в настоящее время интенсивно исследуются в связи с возникновением новых представлений о природе турбулентности, как о стохастических движениях в чисто динамической системе с небольшим числом степеней свободы [15–18]. Утверждение относительно стохастичности подобных систем базируются, в основном, на численных экспериментах, поскольку до настоящего времени отсутствуют строгие критерии возникновения стохастичности.

Подчеркнем, что в предложенной модели основную роль играют распадные процессы, при которых происходит передача энергии от интенсивно растущей моды двум другим, меньшей частоты. По-видимому, такой механизм является довольно общим [12, 14–19].

Более детально численное исследование предложенной модели, значительно более сложной, чем двухмодовая модель [14] или модель Лоренца [18], как нам кажется, следует отложить от полного понимания этих более простых моделей.

В заключение авторы выражают признательность М. И. Рабиновичу за внимание и постоянный интерес к работе, Е. Н. Пелиновскому за полезные замечания и И. Г. Зарницыной за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Galeev and R. Z. Sagdeev, Nucl. Fusion, **13**, 606 (1973).
2. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
3. M. Rogkolab, V. A. Arunasalam and R. A. Ellis, Phys. Rev. Lett., **29**, 1438 (1972).
4. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, **59**, 2215 (1969).
5. E. Valeo, F. Perkins and C. Oberman, Phys. Rev. Lett., **28**, 340 (1972).
6. В. Ю. Быченков, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Письма в ЖТФ, **1**, 998 (1975).
7. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ, **64**, 515 (1973).
8. В. Ю. Быченков, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Письма в ЖТФ, **2**, 847 (1976).
9. И. Е. Андреев, А. Н. Кирий, В. П. Силин, ЖЭТФ, **57**, 1024 (1969).
10. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **51**, 688 (1966).
11. E. Ott, W. Manheimer, D. Book and J. Boris, Phys. Fluids, **16**, 855 (1973).
12. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **20**, № 2, 318 (1977).
13. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Письма в ЖЭТФ, **20**, 356 (1974).
14. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, **71**, 557 (1976).
15. D. Ruell and F. Takens, Comm. Math. Phys., **20**, 167 (1971).

16. P. Martin and J. B. McLaughlin, Phys. Rev., 12, 186 (1975).
17. S. Smale, Bull. Am. Math. Soc., 73, 747 (1967).
18. E. N. Lorenz, J. Atm. Sci., 20, 130 (1963).
19. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 5—6 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 июля 1976 г.,
после доработки
16 июня 1977 г.

PARAMETRIC EXCITATION OF NONLINEAR ION-SOUND WAVES IN PLASMA

A. N. Karashtin, A. G. Sazontov

The stabilization process of a standing ion-sound wave excited due to the electromagnetic wave decomposition into Langmuir and ion-sound waves in the resonator—an equilibrium plasma layer with collisions—is investigated. It is shown that the stabilization of increasing highest mode of resonator is possible due to the energy transmission to its attenuating subharmonics. The analysis is made in the simplest—two- and three-mode approximation. At the three-mode interaction, in particular, the static, quasiperiodic and stochastic stabilization regimes have been found.

УДК 621.396.628 : 523.164

**РАДИОСПЕТРОГРАФ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОНКОЙ
СТРУКТУРЫ СПЕКТРА S-КОМПОНЕНТА ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА
В ДИАПАЗОНЕ 4,0 — 7,0 ГГц**

*Н. А. Ваулин, Н. С. Каверин, А. И. Коршунов, Ю. Д. Панфилов,
В. А. Тихомиров, Н. Н. Холодилов*

Разработан спектрограф для последовательного анализа тонкой структуры спектра медленно меняющегося компонента радиоизлучения Солнца в диапазоне 4—7 ГГц. Спектрограф представляет собой автоматически перестраиваемый супергетеродинный радиометр чувствительностью порядка 1,7 К с полосой анализа 60 МГц при времени перестройки по всему диапазону 8 мин. Спектрограф установлен на радиотелескоп с антенной \varnothing 4,5 м. Описываются методики калибровки аппаратуры и обработки наблюдательных данных.

Для определения физических параметров атмосферы Солнца в активных областях и установления механизмов радиоизлучения локальных источников важную роль играет частотный спектр S-компонента радиоизлучения Солнца. До последнего времени спектр S-компонента определялся по измерениям на дискретных частотах. Такие исследования позволили получить информацию о крупномасштабной ($\Delta\nu/\nu \gtrsim 1$) структуре спектров S-компонента [1, 2]. Измерения «наклона спектра» [3] и предварительные исследования на спектрографе диапазона 6,0—7,0 ГГц с частотным разрешением порядка 100 МГц [4] показали наличие «тонкой» ($\Delta\nu/\nu \ll 1$) структуры в спектрах S-компонента солнечного радиоизлучения. Исследования «тонкой» структуры и ее динамики в широком диапазоне частот могут дать принципиально новые данные о физических условиях в активных областях на Солнце. Для решения этой задачи необходимо создание радиотелескопов, которые могут обеспечить высокочувствительную спектрографию с достаточным частотным разрешением. Для осуществления такой спектрографии применение широкодиапазонных спектрографов последовательного анализа с непрерывной перестройкой по частоте предпочтительнее, чем измерения на дискретных частотах с высоким частотным разрешением. В последнем случае возникает необходимость создания очень большого количества радиометров на близкие частоты, при этом высокую точность их калибровки весьма сложно осуществить.

Существующие в настоящее время солнечные радиоспектрографы применяются преимущественно для изучения всплесков в метровом и дециметровом диапазонах длин волн. Имеющиеся высокочувствительные спектрографы, предназначенные для исследования дискретных линий возбужденного водорода в сантиметровом диапазоне, не могут быть использованы для изучения спектра S-компонента солнечного радиоизлучения из-за узкой полосы анализа (несколько мегагерц) [5]. Спецификой радиоспектрографов для исследования спектров S-компонента радиоизлучения Солнца и одновременно основной трудностью при их создании является необходимость реализации широкой полосы

перестройки спектрографа при достаточно высокой чувствительности и с хорошим частотным разрешением. Объединить эти противоречивые требования в какой-то степени позволяет то, что характерные времена физических процессов, протекающих в активных областях на Солнце, и времена жизни отдельных образований в них лежат в основном в пределах от десятков минут до нескольких часов [6], что позволяет выбрать достаточно большое время перестройки по частоте, чтобы использовать накопление сигнала для реализации необходимой чувствительности.

ОПИСАНИЕ АППАРАТУРЫ

Созданный радиоспектрограф представляет собой супергетеродинный радиометр модуляционного типа, автоматически перестраиваемый по частоте в диапазоне 0,4—7,0 ГГц, и имеет следующие характеристики.

Флуктуационный порог чувствительности модуляционного радиометра с модуляцией и демодуляцией меандром [7]

$$\delta T = 2\sqrt{2} T_{\text{ш}} \sqrt{\frac{\Delta F_{\text{УНЧ}}}{\Delta f_{\text{УПЧ}}}} \approx 1,7 \text{ К},$$

где $T_{\text{ш}}$ — шумовая температура приемника, $T_{\text{ш}} = 3500 \text{ К}$, $\Delta F_{\text{УНЧ}}$ — полоса RC-фильтра УНЧ, $\Delta F_{\text{УНЧ}} = 2,0 \text{ Гц}$, $\Delta f_{\text{УПЧ}}$ — полоса УПЧ, $f_{\text{УПЧ}} = 60 \text{ МГц}$. Частотное разрешение $\Delta f = 60 \text{ МГц}$. Время перестройки по диапазону $t \approx 8 \text{ мин}$. Стабильность за 100 мин работы не хуже 1,5% в середине диапазона и 2,5% по краям его.

Диапазон частот спектрографа (4,0—7,0 ГГц) выбран исходя из результатов ранее выполнявшихся исследований частотного спектра S-компонента, показавших, что наиболее характерные изменения спектра происходят в области 3,0—10 ГГц [2, 8]. Частотное разрешение обеспечивает выделение в спектре исследуемого сигнала составляющих с шириной 50—100 МГц, что, по-видимому, достаточно, поскольку теоретические исследования показывают, что ожидать более мелких особенностей в спектре S-компонента маловероятно. Время анализа спектра t выбрано в зависимости от времени протекания исследуемых процессов и удовлетворяет соотношению $t \gg \frac{\Delta F}{\Delta f} \tau$, где ΔF — полоса перестройки спектрографа, Δf — частотное разрешение, τ — постоянная времени.

Блок-схема спектрографа представлена на рис. 1. Конструктивно спектрограф выполнен из трех блоков: питания, управления и высокочастотного (ВЧ) блока. Блок питания и ВЧ-блок устанавливаются непосредственно на антенне и соединяются кабелем с блоком управления. Включение спектрографа, управление ВЧ-переключателем, изменение скорости перестройки и контроль частоты осуществляются с блока управления.

Перестраиваемым элементом в ВЧ-блоке является гетеродин, в котором применен клистрон К-352. Клистрон помещен в коаксиальный резонатор, перестраиваемый механически с помощью бесконтактного поршня в диапазоне рабочих частот приемника. Модулятор в спектрографе — ферритовый, резонансного типа. Электромагнит модулятора запитывается током, имеющим форму меандра. Величина тока изменяется автоматически с перестройкой спектрографа. Потери модулятора не более 1,2 дБ, развязка не менее 20 дБ. Смеситель — балансного типа на диодах Д 405 БПР. Для улучшения согласования модулятора и смесителя в широкой полосе частот, а также для уменьшения паразитного модуляционного сигнала применен широкополосный вентиль типа

Э 11-10Б. Для получения более равномерной частотной характеристики спектрографа, применена система автоматической регулировки мощности гетеродина при его перестройке по диапазону. В спектрографе предусмотрены две скорости перестройки: $v_1=17$ МГц/с и $v_2=7$ МГц/с*. Спектрограф работает в режиме постоянного сканирования по частоте от 4,0 ГГц до 7,0 ГГц и обратно.

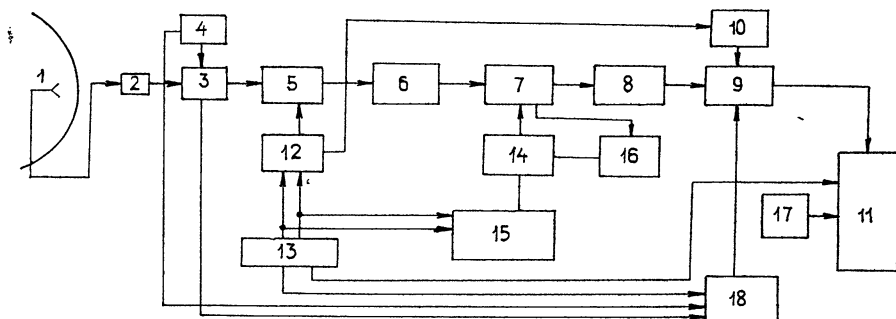


Рис. 1. 1 — антенная система; 2 — волноводно-коаксиальный переход; 3 — высокочастотный переключатель; 4 — генератор шума; 5 — модулятор; 6 — широкополосный затенитель; 7 — смеситель; 8 — УПЧ, квадратичный детектор; 9 — УНЧ, синхронный детектор; 10 — генератор прямоугольных импульсов; 11 — трехканальный самописец; 12 — схема формирования импульсов тока и диапазонной подстройки модулятора; 13 — механизм перестройки гетеродина по частоте; 14 — pin-аттенуатор; 15 — гетеродин; 16 — схема управления pin-аттенуатором; 17 — часы, 18 — блок управления.

Для детального контроля за спектром с механизма перестройки гетеродина на самописец поступают импульсы частотных меток, которые следуют через 500 ± 20 МГц. В спектрографе применен УПЧ с $K_{\text{ус}} \geq 45$ дБ и полосой пропускания от 5 до 28 МГц. Блок низкой частоты полностью собран на микросхемах. Для повышения стабильности работы спектрографа применена двойная стабилизация напряжений питания всего комплекса и термостабилизация ВЧ-блока.

При наблюдениях, выполнявшихся на данном спектрографе, в качестве антенной системы использовалась экваториальная установка с параболическим зеркалом $\varnothing = 4,5$ м. Система облучения была выбрана однозеркальной, так как расчеты, связанные с реакцией зеркала на облучатель, показали, что для спектрографических измерений она имеет преимущества перед двухзеркальной. Облучатель представлял собой секториальный рупор с расширением в H -плоскости. Неполное облучение зеркала в азимутальной плоскости обеспечило малое изменение диаграммы направленности при перестройке по диапазону и, кроме того, позволило уменьшить ошибки измерений спектра, обусловленные различием положений локальных источников на диске Солнца, а также неточностью системы сопровождения. Температура антенны при наведении ее на Солнце составляла примерно 1500 К. Соединение антенной системы со входом приемника осуществлялось с помощью ВЧ-тракта, который представлял собой прямоугольный волновод 24×48 мм, с потерями не более 0,3 дБ.

* В дальнейшем предполагается улучшить характеристики. Замена механически перестраиваемого клистронного гетеродина гетеродином на диоде Ганна с электрической перестройкой повысит надежность аппаратуры и позволит выбирать скорость перестройки частоты в широких пределах.

МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Основными частями спектрографического устройства являются: антенная система, перестраиваемый радиометр и ВЧ-тракт, соединяющий их. Каждая из этих частей не является частотно-независимой, поэтому для получения достоверных данных необходимо определение и учет их амплитудно-частотных характеристик.

Причем точность, с которой мы знаем частотные характеристики элементов спектрографического устройства, определяет точность и достоверность получаемых с помощью спектрографа результатов.

В наших измерениях частотная характеристика радиометра и ВЧ-тракта (рис. 2) определялась путем подачи сигнала от эталонного генератора шума (ГШ) на вход ВЧ-тракта. Температура излучения ГШ была примерно равна антенной температуре при наведении ее на Солнце. Такая калибровка учитывает возможную интерференцию шумов в ВЧ-тракте приемника.

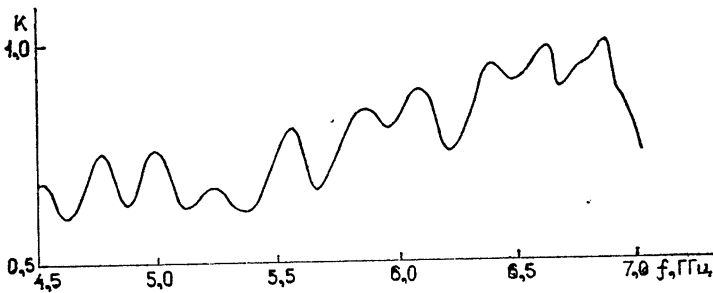


Рис. 2.

Поскольку в наших первых наблюдениях на этом спектрографе мы ставили задачу получения спектров S -компонента радиоизлучения Солнца в относительных, а не абсолютных единицах (причем наблюдения велись в период минимума солнечной активности), калибровка антенной системы производилась по радиоизлучению «спокойного» Солнца. Для изучения «тонкой» структуры спектра S -компонента радиоизлучения Солнца и ее динамики ежедневно регистрировались следующие записи:

$$n_1(\lambda) = \beta(\lambda) \alpha(\lambda) P_{\odot}(\lambda) - \gamma(\lambda) T_0; \quad (1)$$

$$n_2(\lambda) = \alpha(\lambda) T_{\text{ГШ}} - \gamma(\lambda) T_0; \quad (2)$$

$$n_3(\lambda) = \alpha(\lambda) T_{\text{атм}} - \gamma(\lambda) T_0, \quad (3)$$

где $P_{\odot}(\lambda) = P_{\odot \text{сп}}(\lambda) + \sum_i P_{i \text{ л. н}}(\lambda)$, $P_{\odot \text{сп}}(\lambda)$ — плотность потока радиоизлучения «спокойного» Солнца, $\sum_i P_{i \text{ л. н}}(\lambda)$ — суммарная плотность по-

тока радиоизлучения локальных источников, $n_1(\lambda)$, $n_2(\lambda)$, $n_3(\lambda)$ — приращения температуры при записях радиоизлучения Солнца, ГШ и атмосферы, $\alpha(\lambda)$ — частотная характеристика радиометра вместе с ВЧ-трактом, $\beta(\lambda)$ — частотная характеристика антенны, $T_{\text{ГШ}}$ — температура излучения ГШ, T_0 — температура согласованной нагрузки, $\gamma(\lambda)$ — характеризует тракт распространения сигнала от согласованной нагрузки, $T_{\text{атм}}$ — температура собственного излучения атмосферы, которая на больших высотах над горизонтом в исследуемом диапазоне мала, и в (3) членом $\alpha(\lambda) T_{\text{атм}}$ можно пренебречь.

После дискретизации полученных записей с шагом $\Delta f = 25 \text{ МГц}$ и снятия отсчетов с ленты самописца от нулевой линии, в качестве которой выбирался уровень записи «черное тело—черное тело», информация в численном виде обрабатывалась по формуле

$$\frac{\beta(\lambda) P_{\odot}(\lambda)}{T_{\text{ГШ}}} = \frac{n_1(\lambda) + n_3(\lambda)}{n_2(\lambda) + n_3(\lambda)} \quad (4)$$

В период наблюдений (сентябрь—октябрь 1975 г.) попали дни, когда Солнце (по оптическим данным) было «спокойным», т. е. на видимом диске Солнца пятна и поры отсутствовали. Возможное присутствие флоккул не учитывалось, так как принималось, что флоккулярная компонента радиоизлучения (в основном тормозного) не имеет особенностей в своем спектре. Этот факт и позволил произвести калибровку антенны по радиоизлучению спокойного Солнца.

Производя усреднение полученных по формуле (4) спектров солнечного радиоизлучения за спокойные дни, была вычислена величина

$$\frac{1}{N} \beta(\lambda) \frac{1}{T_{\text{ГШ}}} \sum_{j=1}^N P_{j \text{ сп } \odot}(\lambda), \quad (5)$$

где N — число спокойных дней, по которым велось усреднение.

Формула (5) учитывает частотный спектр «спокойного» Солнца $P_{\odot \text{ сп}}(\lambda)$ и частотные свойства антенной системы $\beta(\lambda)$. Принимая их неизменными, путем деления на эту величину спектров, рассчитанных по формуле (4), получаем выражение

$$\frac{\sum_i P_{i \text{ л. и}}(\lambda)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_{j \text{ сп } \odot}(\lambda)} 100(\%), \quad (6)$$

которое представляет собой спектр S -компонента радиоизлучения Солнца в процентах по отношению к спектру «спокойного» Солнца.

Для повышения точности измерений и уменьшения ошибок, связанных с изменениями коэффициента усиления приемника, ежедневно регистрировалось четыре спектра солнечного радиоизлучения и два спектра излучения ГШ в начале и конце наблюдений. При обработке мы использовали средние значения спектров ГШ по двум записям. Расчеты проводились для каждого из четырех ежедневно регистрируемых спектров радиоизлучения Солнца, а также вычислялся средний спектр S -компонента для данного дня. Описанная методика наблюдений и обработки данных позволили учесть частотные характеристики элементов спектрографического устройства, выделить спектры S -компонента радиоизлучения Солнца и проследить динамику спектров как ото дня ко дню, так и в течение дня за более короткие (порядка десятков минут) промежутки времени.

Первые результаты, полученные на данном спектрографе, позволили обнаружить в спектрах излучения S -компонента структуры с различными частотными масштабами, которые связаны с процессами развития активных областей на Солнце [9].

В заключение авторы выражают благодарность М. М. Кобрину за постоянное внимание и ценные советы при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. Г. Б. Гельфрейх, Ш. Б. Ахмедов, В. Н. Боровик, В. Я. Гольнев, А. Н. Коржавин, В. Г. Нагнибеда, Н. Г. Петерова, Изв. ГАО, № 185 (1968).
3. М. М. Кобрин, А. И. Коршунов, С. И. Арбузов, В. В. Пахомов, В. М. Фридман, *Астрономический журнал*, 53, № 4, 789 (1976).
4. И. Ф. Белов, Л. А. Ваулина, Е. К. Дивакова, М. М. Кобрин, А. И. Коршунов, Е. И. Лебедев, Ю. С. Недешев, Б. В. Тимофеев, Изв. высш. уч. зав. — *Радиофизика*, 16, № 5, 723 (1973).
5. Р. Л. Сороченко, Диссертация, ФИАН, М., 1970.
6. Р. Брей, Р. Лоухед, *Солнечные пятна*, изд. Мир, М., 1967.
7. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Ю. И. Парийский, *Радиотелескопы и радиометры*, изд. Наука, М., 1973.
8. Н. Такака and Т. Какиита, *Rep. Ion. Res. Japan*, 18, 32 (1964).
9. Н. С. Каверин, М. М. Кобрин, А. И. Коршунов, В. А. Тихомиров, Ю. В. Тихомиров, *Письма в Астрономический журнал*, 2, № 12, 577 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 декабря 1976 г.

A RADIOSPECTROGRAPH FOR INVESTIGATING THE FINE STRUCTURE
OF THE S-COMPONENT SPECTRUM OF SOLAR RADIO EMISSION
IN THE RANGE 4,0—7,0 GHz

*N. A. Vaulin, N. S. Kaverin, A. I. Korshunov, Yu. D. Panfilov,
V. A. Tikhomirov, N. N. Kholodilov*

A spectrograph for successive analysis of the fine structure spectrum of a slowly varying component of solar radio emission in the range of 4—7 GHz has been developed. The spectrograph represents itself an automatically retuned superheterodyne radiometer the sensitivity of which is 1.7 K with the transmission band of 60 MHz and the retuning time over the whole of the range of 8 min. The spectrograph is mounted on the radiotelescope with the antenna diameter of 4.5 m. The methods of equipment calibration and observational data processing are described.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 535.8 → 522

МОДУЛЯЦИОННЫЙ РАДИОМЕТР НА ВОЛНУ 1,35 см

*В. В. Хрулев, Р. А. Самойлов, Б. К. Федянцева, В. С. Зборовский,
Л. Ф. Ларионова*

Для дистанционного зондирования атмосферы в линии поглощения водяного пара в НИРФИ разработан радиометр модуляционного типа на волну 1,35 см. В настоящей работе приводится его краткое описание. На рис. 1 приведена блок-схема радиометра. Она выполнена по супергетеродинной схеме без УВЧ на входе. 1 — направленный ответвитель, 2 — модулятор, 3, 16 — циркулятор, 4 — смеситель, 5 — усилитель промежуточной частоты, 6 — квадратичный детектор, 7 — гетеродинный фильтр, 8 — опорный генератор, 9 — усилитель мощности, 10, 13 — аттенюатор, 11, 12, 15 — опорная нагрузка, 14 — генератор шума, 17 — умножитель, 18 — генератор, 19 — стабилизатор температуры, 20 — блок контроля, 21 — дистанционное управление, 22 — блок питания.

Контроль и управление работой радиометра осуществляется с помощью выносного пульта, что в сочетании с термостабилизацией позволяет устанавливать радиометр непосредственно в фокусе антенны. С помощью ГШ, выполненного на диоде 1А405А, через направленный ответвитель можно производить подшумливание и калибровку без отключения антенны. Модулятор ферритовый на эффекте фарадеевского вращения плоскости поляризации. Модуляция осуществляется синусоидной, а демодуляция — меандром, частота 1 кГц. В качестве опорных нагрузок в радиометре использованы объемные поглотители из ферроэпоксида двухэкспоненциального профиля [1]. Циркуляторы типа ФЦВ1-14. Общие потери до смесителя порядка 1 дБ. Балансный смеситель с однотактным выходом и независимым включением диодов по постоянному току состоит из щелевого моста и двух смесительных камер на волноводах Н-образного сечения и диодах с барьером Шоттки, которые работают при положительном смещении + 0,5 вольта. Потери преобразования смесителя не более 5,5 дБ. В качестве УПЧ применены три изделия УТР. Квадратичный детектор собран на диоде 2А201А. В гетеродине используется генератор на диоде Ганна (диод ЗА703Б) и умножитель (диод 1А404А). Выходная мощность гетеродина 5 ÷ 7 мВт. В НЧ-части применен разработанный в НИРФИ малогабаритный гетеродинный фильтр с выносным пультом управления [2], в котором использован предложенный Фрейтером [3] и получивший широкое распространение синхронный интегратор. С помощью схемы термостабилизации в блоке поддерживается постоянная температура (35 ± 0,2)°С при изменении окружающей температуры от -20°С до +30°С.

Общий вид радиометра приведен на рис. 2.

Параметры радиометра:

- флуктуационный порог чувствительности
- полоса пропускания УПЧ
- постоянная времени
- динамический диапазон, не менее
- нестабильность коэффициента усиления за 8 часов работы, не более

- 0,3 К,
- 300 мГц,
- 1; 4 с,
- 30 дБ,
- 3%,

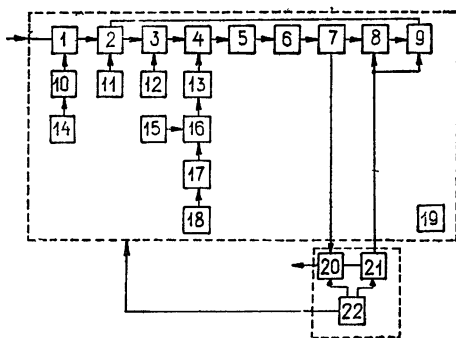


Рис. 1.

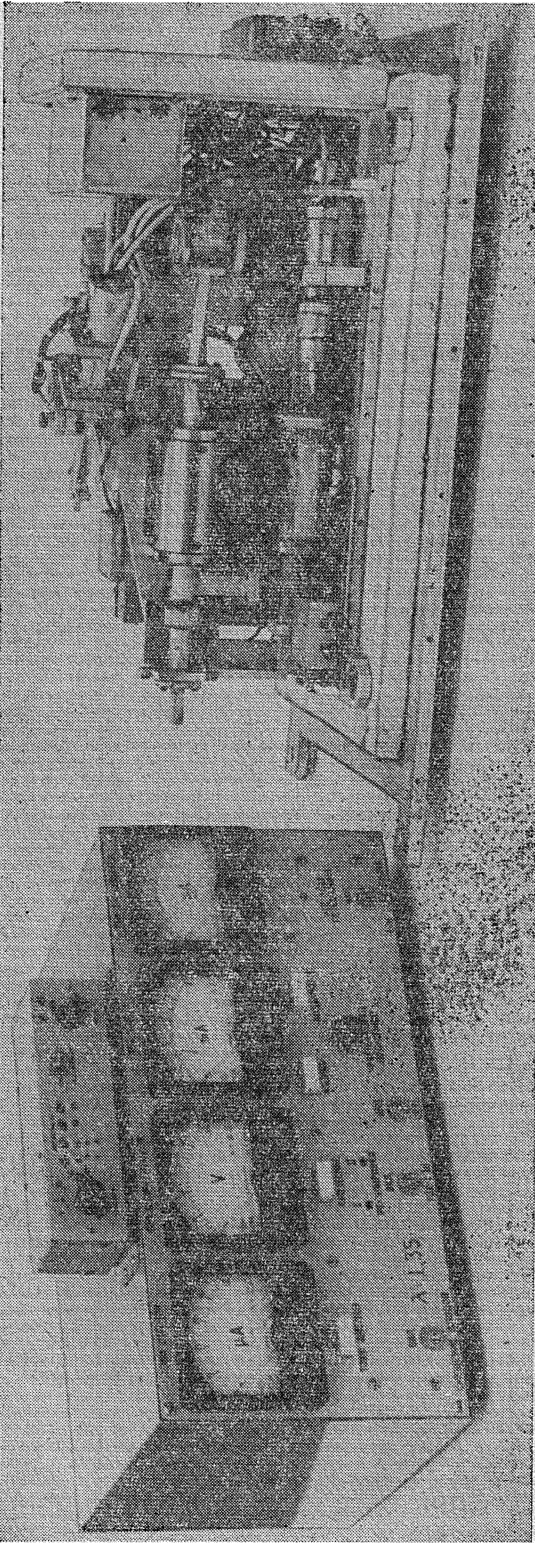


Рис. 2.

- потребляемая мощность от сети не более — 45 Вт,
 — потребляемая мощность от аккумулятора не более — 13 Вт,
 — вес радиометра (без кабелей) не более — 20 кг.
 Радиометр прошел наземные и самолетные испытания и показал высокие эксплуатационные характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Клич; Проектирование СВЧ устройств радиолокационных приемников, изд. Сов. радио, М., 1973.
2. В. В. Хрулев, В. С. Зборовский, Р. А. Самойлов, Б. К. Федянец, О. П. Морозова, ПТЭ (в печати).
3. Р. Фрейтер, Приборы для научных исследований, 5, 53 (1965).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию
14 февраля 1977 г.

УДК 621.371.22

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ 10-САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ПРИ УГЛОВОМ РАЗНЕСЕННОМ ПРИЕМЕ НА ТРАССЕ ДТР

О. О. Вальнер, Г. С. Шарыгин

Известно [1, 2], что при рассеянии электромагнитных волн движущейся статистически неровной поверхностью или объемом должно происходить смещение спектра поля, обусловленное эффектом Допплера:

$$\Omega = -k(m - n)V, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина электромагнитной волны, m — вектор-направление падающей волны, n — вектор-направление рассеянной волны, V — скорость движения рассеивающих неоднородностей.

При реальных скоростях переноса неоднородностей и типичных для ДТР углах рассеяния величина указанного смещения для волн УКВ-диапазона обычно не превышает единиц и десятков герц.

Нами проведены наблюдения указанного эффекта посредством разностно-фазовых измерений при угловом разнесенном приеме в диапазоне 10 см на морской трассе протяженностью 226 км в ноябре—декабре 1973 г. и апреле 1974 г. Специально разработанные фазометры позволяли непрерывно регистрировать изменения разности фаз в практически неограниченном интервале. Были использованы три приёмные антенны с диаграммами направленности 3,5 градуса, снабженные поворотными устройствами по азимуту, разнесенные в пространстве поперек трассы на 2,2 и 2,4 м.

Из (1) следует, что средняя разность частот сигналов, принятых парой таких антенн, при расположении рассеивающего объема в середине трассы оказывается равной

$$\overline{\Delta\Omega} \approx \frac{4\pi}{\lambda} \Delta\alpha \bar{V}_\tau, \quad (2)$$

где λ — длина волны, $\Delta\alpha$ — угловой разнос приёмных антенн, \bar{V}_τ — поперечная составляющая средней скорости ветра.

На рис. 1 и 2 показаны изменения во времени разности фаз сигналов, принятых разными парами антенн при постоянных угловых разносах 2°. Характер и очевидная корреляция этих изменений для двух пар антенн свидетельствует о том, что период пульсаций средней скорости переноса неоднородностей на участках размером 4—10 км лежал в пределах десятков минут. Разные знаки изменения разности фаз в опытах 1 и 2 (рис. 2) свидетельствуют о противоположных знаках поперечной составляющей ветра на трассе.

На рис. 3 и 4 показана зависимость $\overline{\Delta\Omega}$ от величины углового резонанса диаграмм направленности приёмных антенн. Средняя разность частот при каждом значении разности определялась как отношение приращения разности фаз к времени измерения (10 с). Несмотря на искажения кривых (рис. 4), связанные со значительным временем измерения, рисунки подтверждают наличие смещения частоты и справедливость формулы (2). При этом поперечная составляющая средней скорости переноса неоднород-

ностей в объеме рассеяния должна быть порядка 4—6 м/с для рис. 3 и 0,1—0,15 м/с для рис. 4.

С учетом наблюдаемого смещения спектра можно, по-видимому, уточнить характер (периодичность) флуктуаций уровня принимаемого поля при ДТР, их зависимость от ширины диаграмм направленности антенн и поперечной составляющей скорости ветра на трассе. Наблюдавшееся явление может быть использовано для оценки параметров движения воздушных масс в объеме рассеяния. Оно также должно учитываться при проектировании и эксплуатации фазовых радиотехнических систем.

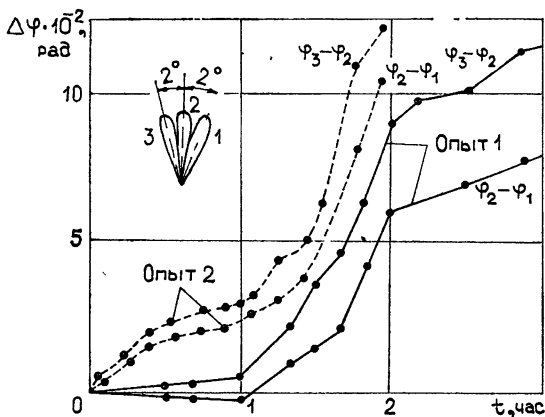


Рис. 1.

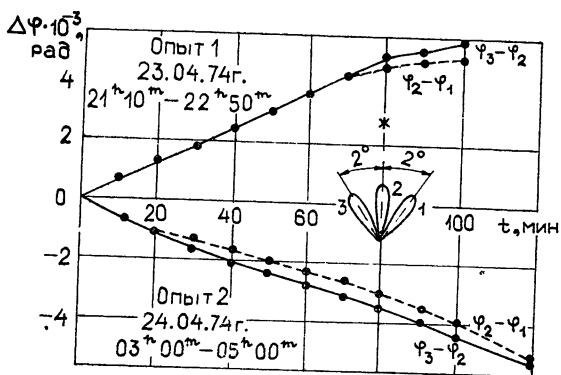


Рис. 2.

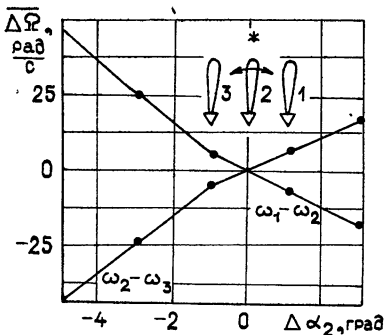


Рис. 3.

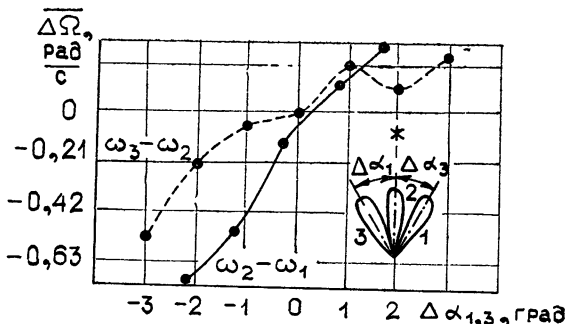


Рис. 4.

Определение зависимости смещения спектров от метеорологических условий и связанной с ними величины когерентной составляющей принимаемого сигнала, изучение влияния морской поверхности и ее движения (на морских трассах), а также анализ статистических характеристик явления должны явиться предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.

Томский институт автоматизированных систем
управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
6 декабря 1976 г.

УДК 621.371

НАСЫЩЕНИЕ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ПРИЕМНОЙ АПЕРТУРЫ НА ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ

М. С. Беленький, А. А. Макаров, В. Л. Миронов, В. В. Покасов

В работе [1] было теоретически показано, что при отражении света от зеркальной сферы в турбулентной среде возникает эффект остаточной корреляции, заключающийся в том, что пространственные коэффициенты корреляции флуктуаций амплитуды и фазы отраженной волны не убывают до нуля при бесконечном разnose точек наблюдения —

$$b_x(\rho_1, \rho_2) = b_s(\rho_1, \rho_2) = 0,5 \text{ для } \rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty.$$

Одним из проявлений этого эффекта является насыщение усредняющего действия приемной апертуры на флуктуации интенсивности отраженной волны. Предельные значения функции $G(R) = \sigma_R^2/\sigma^2$, где σ_R^2 и σ^2 — относительные дисперсии флуктуаций полного светового потока соответственно через апертуру радиуса R и точечную, характеризующей усредняющее действие приемника, при $R \rightarrow \infty$, как показано в [1], равны

$$G_1(\infty) = 0,25, \quad G_2(\infty) = 0,5. \quad (1)$$

Первый результат здесь соответствует отражению в направлении строго назад, второй — рассеянию под углом $\alpha \gg \sqrt{\lambda/L}$ по отношению к этому направлению (λ — длина волны, L — длина трассы).

Если учесть, что дисперсия отраженной волны равна [1] сумме взаимной корреляционной функции $b_{ir} \sigma_i \sigma_r$ и дисперсии прямой — σ_i^2 и обратной — σ_r^2 волн

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma_i^2 + \sigma_r^2 + 2b_{ir}(\alpha) \sigma_i \sigma_r, \quad (2)$$

то нетрудно увидеть, что при приеме на апертуру сколь угодно больших размеров ($R \gg \sqrt{\lambda L}$), в силу (1), (2), величина $\sigma_R^2(\alpha)$, при $\sigma_i^2 = \sigma_r^2$, совпадает с дисперсией прямой волны, измеренной точечным приемником

$$\sigma_R^2(\alpha) = G(R) \sigma^2(\alpha) = \sigma_i^2.$$

Таким образом, насыщение функции усреднения $G(R)$ позволяет сохранить величину флуктуаций потока, принимаемого через апертуру больших размеров ($R \gg \sqrt{\lambda L}$). Это дает возможность существенно улучшить отношение сигнал/шум в системах дистанционного измерения структурного параметра атмосферной турбулентности методами локационного лазерного просвечивания [1, 2]. Заметим, что при прямом просвечи-

вании атмосферы для устранения усреднения флуктуаций приемной апертурой (необходимость в этом возникает в связи с тем обстоятельством, что источником информации о параметрах турбулентности являются флуктуации интенсивности прошедшего среду излучения) размер апертуры должен удовлетворять неравенству

$$R \ll \sqrt{\lambda L}.$$

В настоящей работе явление насыщения усредняющего действия приемной апертуры исследовалось экспериментально. Измерения проводились на трассе $L = 110$ м. В качестве отражателей использовались зеркальные сферы с радиусами $r_1 = 1$ м и $r_2 = 10$ м. Источник излучения — He-Ne лазер с длиной волны $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$ м без фокусирующей оптики. Все измерения были проведены в условиях $\alpha \gg \sqrt{\lambda/L}$, когда отсутствует корреляция между флуктуациями амплитуды прямой и обратной волн ($b_{ir} = 0$). Для измерения дисперсий использовался двухканальный дисперсиометр.

Применение в схеме дисперсиометра высокочастотного АЦП, цифрового квадратора и цифрового вычислителя среднего значения позволило обеспечить аппаратную ошибку определения относительной дисперсии 0,2% по входу системы при выходном динамическом диапазоне 96 дБ.

Максимальные относительные значения дисперсии, измеренные точечным приемником, не превосходили 0,3, что соответствует условиям слабых флуктуаций интенсивности.

Результаты измерений приведены на рис. 1. Здесь же изображены расчетные кривые для сферической волны, отраженной зеркальной сферой при размере «блика» $-\sqrt{\lambda r} \ll \sqrt{\lambda L}$ и $\alpha \gg \sqrt{\lambda/L}$ (кривая 1), и сферической волны на трассе без отражения (кривая 3).

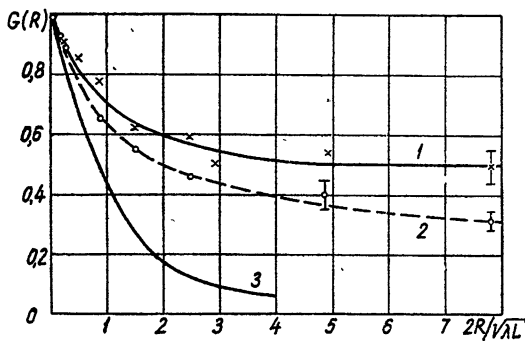


Рис. 1. Усреднение флуктуаций интенсивности отраженной волны апертурой конечных размеров.

Как видно из рисунка, экспериментальные данные (крестики) для $r_1 = 1$ м хорошо согласуются с расчетной кривой. При увеличении размеров приемника в области $R > \sqrt{\lambda L}$ функция $G(R)$ не убывает и близка к $G(R) = 0,5$, что существенно превышает значения этой величины для сферической волны на трассе без отражения (кривая 3).

В случае сферы с радиусом $r_2 = 10$ м функция $G(R)$ (кривая 2, кружки) также значительно превышает уровень, соответствующий кривой 3, но располагается ниже, чем при $r_1 = 1$ м. Заметим, что в этом случае неравенство $\sqrt{r} \ll \sqrt{L}$, при котором получена расчетная кривая 1 и которое выполняется при $r_1 = 1$ м, существенно ослаблено и принимает вид $\sqrt{r} \lesssim \sqrt{L}$.

Таким образом, экспериментальные данные подтверждают предсказанное в [1] насыщение усредняющего действия приемной апертуры на флуктуации интенсивности отраженной волны.

Наблюдаемое насыщение обусловлено тем [1], что приемник больших размеров, полностью усредняющий флуктуации, возникающие при обратном распространении (на пути от отражателя к приемнику), практически не усредняет флуктуаций прямого

распространения (от источника до отражателя). Это происходит в силу того, что после переизлучения «точечным» рассеивателем пространственный масштаб корреляции этих флуктуаций существенно превышает $\sqrt{\lambda L}$. При нарушении неравенства $\sqrt{r} \ll \sqrt{L}$, вследствие конечности размеров отражателя, может иметь место усреднение флуктуаций прямого распространения на отражателе, чем, очевидно, и вызвано уменьшение значений экспериментальной функции $G(R)$ в случае сферы большого радиуса (кривая 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Беленький, В. Л. Миронов, Квантовая электроника, 1, № 10, 2253 (1974).
2. M. Subramanian, J. Opt. Soc. Am., 62, № 5, 667 (1972).
3. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 149 (1969).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
1 февраля 1977 г.

УДК 538.56

К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ДЕЙСТВИЯ НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ НА ДВУХ ЛИНИЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СВЯЗЬЮ

Л. Н. Дерюгин, О. А. Курдюмов, В. Ф. Теричев

В интегральных схемах часто используются направленные ответвители на линиях передачи с электромагнитной связью: в диапазоне СВЧ — на полосковых и микрополосковых, в субмиллиметровом и оптическом диапазонах — на диэлектрических волноводах. Несмотря на одинаковое название механизм действия и характеристики этих устройств различны. В частности полосковые ответвители являются противонаправленными [1], на диэлектрических волноводах — сонаправленными [2, 3], а микрополосковые — обладают малой направленностью [4]. Объяснение такого многообразия свойств ответвителей может быть сделано на основе анализа телеграфных уравнений, которые для одинаковых и идеальных связанных линий имеют вид [1]

$$\frac{dU_m}{dx} - j\omega L(1 \pm \xi)I_m = 0, \quad \frac{dI_m}{dx} - j\omega C(1 \mp \eta)U_m = 0, \quad (1)$$

где x — пространственная координата (см. рис. 1); $U_2 = \pm U_1$, $I_2 = \pm I_1$ — комплексные амплитуды напряжения и тока четных и нечетных волн в линиях 1 и 2 (здесь и далее верхний знак относится к волне четного типа, а нижний — к волне нечетного типа);

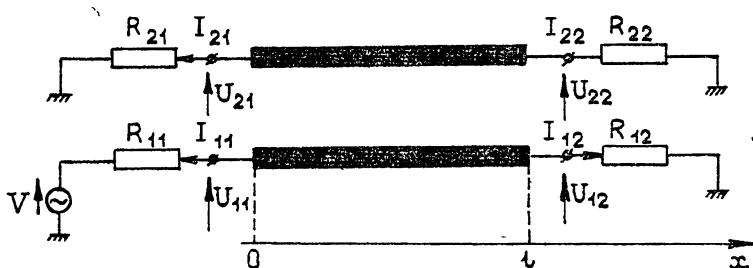


Рис. 1. Принципиальная схема направленного ответвителя на связанных линиях: R_{mn} — сопротивление нагрузки, U_{mn} — амплитуда напряжения, I_{mn} — амплитуда тока на конце n -ом m -линии, V — ЭДС генератора.

$\xi = \frac{L_B}{L}$, $\eta = \frac{C_B}{C}$ — эквивалентные погонные коэффициенты магнитной и электрической связи (для рассматриваемой моды волновода); L, C — собственные эквивалентные погонные индуктивность и емкость одной линии в присутствии другой; L_B, C_B — взаимные погонные индуктивность и емкость. Общее решение системы уравнений (1) может быть записано в виде суперпозиции прямых и обратных волн четного и нечетного типа:

$$U_m = A_{m+} e^{-j\gamma_+ x} + A_{m-} e^{-j\gamma_- x} + B_{m+} e^{j\gamma_+ x} + B_{m-} e^{j\gamma_- x},$$

$$I_m = -\frac{A_{m+}}{z_+} e^{-j\gamma_+ x} - \frac{A_{m-}}{z_-} e^{-j\gamma_- x} + \frac{B_{m+}}{z_+} e^{j\gamma_+ x} + \frac{B_{m-}}{z_-} e^{j\gamma_- x}, \quad (2)$$

$$m = 1, 2, \quad A_{2\pm} = \pm A_{1\pm}, \quad B_{2\pm} = \pm B_{1\pm},$$

где $A_{m\pm}, B_{m\pm}$ — постоянные амплитуды, определяемые из граничных условий;

$$z_{\pm} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1 \pm \xi}{1 \mp \eta}}, \quad \gamma_{\pm} = \omega \sqrt{LC} \sqrt{(1 \pm \xi)(1 \mp \eta)}$$

сопротивления и постоянные распространения волн четного и нечетного типа.

В линиях передачи с неоднородным диэлектрическим заполнением поперечного сечения и волнами ТЕ, ТМ или гибридного типа постоянные распространения волн четного и нечетного типа различны. Например, для диэлектрических волноводов со слабой связью, $\eta \ll 1$, $\eta \ll \xi$, $\gamma_+ = \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 + \xi}$, $\gamma_- = \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - \xi}$ [2]. Волны четного и нечетного типа создают в связанной системе пространственные биения суммарного поля; последние могут быть использованы для создания эффекта направленности. Сонаправленность системы связанных диэлектрических волноводов проявляется как свойство однородных связанных линий передачи и не связана с граничными условиями.

В линиях передачи с однородным диэлектрическим заполнением поперечного сечения и ТЕМ-волнами электрическая и магнитная связи уравновешены [1]: $\xi = \eta$, а фазовые скорости волн четного и нечетного типов одинаковы: $\gamma = \gamma_+ = \gamma_- = \omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - \xi^2}$. Пространственные биения в такой системе отсутствуют, а эффект направленности получают за счет суперпозиции волн, отраженных на границах связанной системы от специально подобранных нагрузочных сопротивлений $R_{11} = R_{12} =$

$$= R_{21} = R_{22} = z_0 \sqrt{z_+ z_-} \quad (\text{рис. 1}).$$

При этом из (2) следует

$$U_1 = \frac{V}{2} \frac{e^{-j\gamma_+ x} - \Gamma^2 e^{-j\gamma_- (2l-x)}}{1 - \Gamma^2 e^{-2j\gamma_+ l}}, \quad U_2 = \frac{V}{2} \frac{-e^{-j\gamma_+ x} + e^{-j\gamma_- (2l-x)}}{1 - \Gamma^2 e^{-2j\gamma_+ l}}, \quad (3)$$

$$I_m = \frac{U_m}{z_0}, \quad m = 1, 2,$$

$$\text{где } \Gamma = \frac{\sqrt{z_-} - \sqrt{z_+}}{\sqrt{z_-} + \sqrt{z_+}} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2} - 1}{\xi} \quad \text{— модуль коэффициента отражения на гра-}$$

ницах связанной системы, V — амплитуда напряжения генератора, подключенного ко входу одной из линий (рис. 1).

Из (3) видно, что независимо от длины области связи на конце $x = l$ второй линии $U_{22} = 0$, $I_{22} = 0$, что соответствует свойству противонаправленности.

В микрополосковых линиях с естественной электромагнитной связью и квази-ТЕМ-волнами неоднородность диэлектрического заполнения поперечного сечения и различие фазовых скоростей волн четного и нечетного типа приводят к ухудшению направленных и диапазонных свойств ответвителей по сравнению с идеальной противонаправленной системой [4]. Принцип пространственных биений для создания сонаправленного восьмиполосника на микрополосковых линиях передачи в диапазоне СВЧ неприменим, так как требует протяженной области связи (тысячи—десятки тысяч длин волн). Улучшения характеристик противонаправленных микрополосковых ответвителей добиваются, уменьшая отличие электрической и магнитной связи путем, например, помещения на поверхность диэлектрической подложки в области связи дополнительной пластины диэлектрика [5] или добавления к естественной электромагнитной связи сосредоточенных емкостных элементов [6].

Различие между описанными механизмами действия направленных ответвителей (на основе пространственных биений в однородной системе и на основе отражений

волн на границах участка связи) не всегда правильно понимается и учитывается. Так в [7, 8] постоянные распространения ТЕМ-волн четного и нечетного типа считаются разными, а свойство противоположности [7] — присущим однородной связанной системе линий передачи, не зависящими от граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Сосунов, А. А. Шибяев, Направленные ответвители сверхвысоких частот, Приволжское книжное издательство, Саратов, 1964.
2. S. E. Miller, Bell. Syst. Techn. J., 3, 661 (1954).
3. П. Е. Краснушкин, Р. В. Хохлов, ЖТФ, 19, № 8 (1949).
4. Mark Krage and George Haddad, IEEE Trans. on MTT, 18, 4 (1970).
5. В. Шелеч, В. Шпильман, IEEE. Trans. on MTT, № 12 (1974).
6. В. М. Темнов, В. И. Суворов, Вопросы радиоэлектроники (серия радионизмерительная техника), № 5 (1973).
7. Дж. А. Альтман, Устройства СВЧ, Перевод с английского под ред. В. П. Лебедева, изд. Мир, М., 1968, стр. 193.
8. В. И. Калинин, Г. М. Герштейн, Введение в радиофизику, Гостехиздат, М., 1957, стр. 135.

Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию
12 декабря 1976 г.