

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Романова В. И. Рассеяние электромагнитных волн на бегущих волновых структурах в ионосфере	1717
Тинин М. В. Направляющие свойства плавнонеоднородного слоя и дифракционное возбуждение ионосферных волноводов	1728
Ерухимов Л. М., Метелев С. А., Митяков Н. А., Фролов В. Л. Явление гистерезиса при искусственном возбуждении неоднородностей в ионосферной плазме	1738
Дробышевич В. И., Наумов А. П. Примеры оптимальных ортогональных систем функций для коэффициентов поглощения и преломления в СВЧ-диапазоне	1742
Иванов А. В. Разрешающая способность РСА при наблюдении поверхности моря	1750
Жучков М. В., Курин А. Ф., Нестеренко Ю. Н. Возбужденные классические осцилляторы в условиях разновременности пребывания в пространстве взаимодействия	1761
Реутов В. П. О взрывной неустойчивости при взаимодействии запертых и незапертых волн	1766
Кулагин Е. В., Соколов В. П., Пихтельев А. И., Фатеев Б. П. Технические флюктуации в кварцевом генераторе с АРУ	1772
Соколов В. П., Кулагин Е. В., Пихтельев А. И., Фатеев Б. П. Экспериментальное исследование технических флюктуаций в кварцевом генераторе с АРУ	1778
Молодцов С. Н., Саичев А. И. О флюктуациях интенсивности тонкого лазерного пучка в волноводном канале с крупномасштабными случайными неоднородностями	1785
Липатов С. К., Саичев А. И. О статистике волны со случайной частотной модуляцией в диспергирующей среде	1797
Вайнштейн С. И. К теории турбулентного динамо	1803
Белокопытов Г. В. Фокусировка волн в анизотропной плоскослоистой среде	1812
Гринев А. Ю., Ильинский А. С., Котов Ю. В. Характеристики сканирования резонаторно-щелевой периодической антенной структуры с диэлектрическим покрытием	1822
Белявцева Т. В. Распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с периодическими решетками	1834
Булгаков А. А., Ханкина С. И., Яковенко В. М. Возбуждение собственных колебаний в ограниченных средах потоком электронов или энергии электромагнитного поля	1840
Жураховский В. А. К теории релятивистского гироприбора. (Последовательный учет и некоторые возможности корректного исключения уравнений поперечного дрейфа ведущих центров электронных ротораторов.)	1847
Балаклицкий И. М., Воробьев Г. С., Цвык А. И., Шестопалов В. П. Исследование спектральных характеристик импульсов дифракционного излучения	1853
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Дробжев В. И., Краснов В. М., Салихов Н. М. Об ионосферных возмущениях, сопровождающих землетрясения и взрывы	1862
Томас И. Н., Яшкин А. Я. О дисперсионных свойствах сложных V-линий	1864
Шатров А. Д. Лучевой расчет потерь мощности в нерегулярном волокне с флюктуирующей фокусировкой	1865
Апресян Л. А. Об учете неоднородных волн и обратного рассеяния в теории многомодовых волноводов со случайными неоднородностями	1868
Хроника	
Школа-семинар по теоретической электронике СВЧ	1870
Информация	
Содержание т. XXI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1978 г.	1872
Именной указатель — т. XXI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1978 г.	1881

УДК 621.371 25

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА БЕГУЩИХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУРАХ В ИОНОСФЕРЕ

B. I. Романова

Методом плавных возмущений С. М. Рытова исследуется дифракция электромагнитных волн, наклонно падающих на ионосферный слой с неоднородностями типа бегущих волн плотности. Учитываются пространственные зависимости свойств ионосферы и волноподобных неоднородностей. Анализируются дифракционные картины для нескольких вариантов высотных профилей волновых возмущений. Полученные решения дают возможность оценить влияние вида профиля ионосферы и распределения уровня возмущенности волноподобных неоднородностей по высоте на дифракционные эффекты.

Большое количество экспериментальных фактов свидетельствует о волноподобных свойствах многих видов ионосферных неоднородностей (см., например, [1–5]). Поэтому для корректной интерпретации опытных данных, получаемых при радиоисследованиях неоднородной структуры ионосферы, недостаточно использования корреляционной теории ионосферного распространения и отражения сигналов, основанной на модели хаотических неоднородностей с локально-однородным и изотропным законом распределения. Нередко свойства наблюдаемой дифракционной картины явно противоречат этой модели. Поэтому полезно теоретическое исследование распространения электромагнитных волн в средах с объемными бегущими волновыми структурами. Такая волновая модель интересна и для исследований искусственных неоднородностей в ионосфере.

Распространению электромагнитных волн в средах, постоянные которых зависят от времени и координат по типу бегущей волны, посвящено довольно много работ [5–16]. Как правило, в таких работах пре-небрегают пространственными зависимостями параметров среды и возмущений. Однако эти зависимости могут оказывать существенное влияние на дифракцию электромагнитных сигналов на волновых возмущениях среды. В данном сообщении на примере дифракции коротких и ультракоротких радиоволн на волновых неоднородностях в ионосфере показано влияние вида высотных профилей как характеристик невозмущенной среды $\bar{\epsilon}(z)$, так и волнового возмущения $\tilde{\epsilon}(z)$ на распространение поля. Используется метод плавных возмущений С. М. Рытова.

1. СЛОЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ $\bar{\epsilon}(z)$ И $\tilde{\epsilon}(z)$

Рассматривается электромагнитное поле в среде, которая при $z < 0$ однородна. В верхнем полупространстве $z > 0$ диэлектрическая проницаемость $\bar{\epsilon}(z)$ является плавной функцией z , $\left| \lambda \frac{d \bar{\epsilon}}{dz} \right| \ll |\bar{\epsilon}|$, причем $\bar{\epsilon}(+0) = \bar{\epsilon}(-0)$. В области $z > 0$ распространяется вдоль оси x

бегущая волна параметра, возмущающая диэлектрическую проницаемость среды по закону $\tilde{\epsilon}(x, z, t) = \bar{\epsilon}(z) + \Delta\epsilon(x, z, t)$,

$$\Delta\epsilon(x, z, t) = \tilde{\epsilon}(z) \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi x}{\Lambda} + \theta\right). \quad (1)$$

Полупространство $z \leq 0$ свободно от возмущений $\Delta\epsilon(z \leq 0) = 0$. (Ω и Λ — характерные масштабы возмущений, θ — его начальная фаза.) Будут рассматриваться некоторые простые, достаточно плавные зависимости $\tilde{\epsilon}(z)$. Предполагается, что неоднородности диэлектрической проницаемости, обусловленные бегущей волной параметра, малы: $\tilde{\epsilon} \ll \bar{\epsilon}$, а их характерные пространственные и временные масштабы намного больше соответствующих параметров электромагнитной волны:

$$\lambda \ll \Lambda, \quad \frac{1}{\omega} \ll \frac{1}{\Omega}. \quad (2)$$

Падающая электромагнитная волна задается при $z = 0$:

$$E(z = 0) = E_0 \exp\left[ix\frac{\omega}{c}\sqrt{\bar{\epsilon}(0)} \sin\varphi - i\omega t\right],$$

где φ — угол падения. Ищется возмущенная компонента волнового поля в неоднородной среде. Исходными уравнениями дифракционной задачи являются, как обычно, волновые уравнения для поля. В силу условия $\omega \gg \Omega$ можно ограничиться квазистационарным приближением и зависимость от времени восстановить в окончательном результате в виде (1). Найденное решение будет отличаться от точного малыми членами порядка Ω/ω . Условие $\lambda \ll \Lambda$ позволяет пренебречь поляризационными эффектами, если направление первичной волны не слишком наклонно ($|\varphi| \ll 1$), и ограничиться описанием поля скалярным уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\bar{\epsilon}(z) + \Delta\epsilon(x, z, t)] E = 0. \quad (3)$$

При получении приближенного решения этого уравнения используется метод плавных возмущений Рытова [9]. Как известно, метод плавных возмущений заключается в переходе с помощью подстановки $E = e^\Phi$ от параметрического уравнения (3) для поля к нелинейному уравнению для комплексной фазы Φ :

$$\Delta\Phi + \nabla\Phi\nabla\Phi + \frac{\omega^2}{c^2} (\bar{\epsilon} + \Delta\epsilon) = 0, \quad (4)$$

которое затем решается методом возмущений. В силу условия малости возмущения (1) и удаленности от резонанса ($\omega \gg \Omega$) изменения фазы и уровня (логарифма амплитуды) электромагнитной волны, обусловленные волноподобными неоднородностями среды, должны быть пропорциональны $\tilde{\epsilon}/\bar{\epsilon}$. Представив решение уравнения (4) в виде ряда $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$, в котором $\Phi_n \sim (\tilde{\epsilon}/\bar{\epsilon})^n$, ограничимся первым приближением теории возмущений. Линеаризованное уравнение для первого приближения Φ_1 имеет вид

$$\Delta\Phi_1 + 2\nabla\Phi_0\nabla\Phi_1 + \frac{\omega^2}{c^2}\Delta\varepsilon = 0. \quad (5)$$

Здесь отброшен член $(\nabla\Phi_1)^2$, пропорциональный $(\tilde{\varepsilon}/\varepsilon)^2$, т. е. второго порядка малости, который в расчетах не учитывается; Φ_0 — решение невозмущенного уравнения (4) (при $\Delta\varepsilon = 0$). Существенным моментом в методе плавных возмущений является возможность замены полного лапласиана на поперечный, т. е. в данном случае второй производной по поперечной координате в уравнении для комплексной фазы, что эквивалентно устраниению из Φ_1 малых и быстро осциллирующих по z членов. Оценки показывают, что отбрасывание $\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}$ допустимо, если выполняются условия

$$1) |\varphi| \ll 1,$$

$$2) \Delta^2/z \rho_0 \ll 1,$$

где ρ_0 — характерный масштаб изменения $\tilde{\varepsilon}(z)$.

При интегрировании уравнения с переменными коэффициентами для комплексной фазы в нашей задаче удобно произвести следующую замену переменной интегрирования:

$$v(z) = \int_0^z dz' [\tilde{\varepsilon}(z') - \tilde{\varepsilon}(0) \sin^2 \varphi]^{-1/2}, \quad (6)$$

и применить фурье-преобразование по поперечным координатам. Записывая Φ_0 в приближении геометрической оптики (так как пространственная зависимость $\tilde{\varepsilon}(z)$ плавная), Φ_1 получим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, t) = & \frac{i k_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixx} dx \int_0^z dz' \Delta\varepsilon_x(z', t) [\tilde{\varepsilon}(z') - \\ & - \tilde{\varepsilon}(0) \sin^2 \varphi]^{-1/2} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2k_0} + \sqrt{\tilde{\varepsilon}(0)} \sin \varphi_s \right) L(z, z') \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\Delta\varepsilon_x$ — трансформанта Фурье $\Delta\varepsilon$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$,

$$L(z, z') = v(z) - v(z').$$

Величину $L(z, z')$ можно интерпретировать как z -проекцию группового пути луча между точками z' и z . Действительная часть полученного выражения (7) описывает распределение логарифма амплитуды электромагнитного поля (уровня S_1), прошедшего слой с волноподобными возмущениями, мнимая — фазовое распределение Ψ_1 . Подстановка $\Delta\varepsilon$ в виде (1) дает следующие значения для фазы и уровня дифрагированного поля в точке наблюдения:

$$S_1 = \frac{k_0}{2} \int_0^z dz' \frac{\tilde{\varepsilon}(z')}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}(z') - (k_x^2/k_0^2)}} \cos \left(\varphi_s - \frac{k_x q L}{k_0} \right) \sin \frac{q^2 L}{2k_0},$$

$$\Psi_1 = \frac{k_0}{2} \int_0^z dz' \frac{\tilde{\epsilon}(z')}{\sqrt{\tilde{\epsilon}(z') - (k_x^2/k_0^2)}} \cos\left(\varphi_s - \frac{k_x q L}{k_0}\right) \cos \frac{q^2 L}{2 k_0},$$

$$\varphi_s = \frac{2\pi x}{\Lambda} + \Omega t + \theta, \quad q = \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (8)$$

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}(0)} \sin \varphi.$$

При разделении Φ_1 на действительную и мнимую части использовалась вещественность функции $\Delta\epsilon(r, t)$. Следует отметить, что избежать численного интегрирования при вычислении интегралов в (8) можно только при немногих частных видах функций $\tilde{\epsilon}(z)$ и $\tilde{\epsilon}(z)$. В простейшем случае $\tilde{\epsilon} = \text{const}$ и $\tilde{\epsilon} = \text{const}$ выражения для амплитуды и фазы (8) совпадают с решениями задачи о дифракции света на ультразвуке [19]. С целью выявления влияния вида функций $\tilde{\epsilon}(z)$ и $\tilde{\epsilon}(z)$ и эффективной толщины слоя с бегущей волной плотности на дифракцию на нем электромагнитного поля, рассмотрим несколько профилей диэлектрической проницаемости возмущенной среды.

2. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГАУССОВОМ СЛОЕ

Рассмотрим дифракцию электромагнитной волны на волноподобных неоднородностях, сосредоточенных в гауссовом слое, в предположении, что диэлектрическая проницаемость среды не зависит от координат,

$$\tilde{\epsilon}(z) = \text{const}, \quad \tilde{\epsilon}(z) = \tilde{\epsilon}_0 \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{2\rho_0^2}\right]. \quad (9)$$

Здесь $2\rho_0$ — эффективная толщина неоднородного слоя, z_0 — высота уровня максимума возмущения. Подставляя (9) в (8), получаем выражения для амплитудно-фазового распределения дифрагированного в гауссовом слое поля и его интенсивности $I^{(1)}$:

$$I^{(1)}(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n (2v_p \eta_a) \cos n\left(\varphi_s - \xi_a - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Psi_1(x, z, t) = v_p \eta_\Phi \cos(\varphi_s - \xi_\Phi),$$

$$S_1(x, z, t) = v_p \eta_a \sin(\varphi_s - \xi_a), \quad (10)$$

где $v_p = \frac{2\pi}{\cos \varphi} \frac{\rho_0}{\lambda} \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0}$ — видоизмененный параметр Рамана—Ната [6], в котором вместо дистанции z , проходимой радиоволной в неоднородном слое, фигурирует эффективная полутолщина слоя ρ_0 ,

$$\eta_{\Phi, a} = \frac{\sqrt{\pi}}{8} [M_+^2 + M_-^2 \pm 2M_+ M_- \cos(T_+ + T_-)]^{1/2},$$

$$\xi_{\Phi, a} = \arctg \frac{M_+ \sin T_+ \mp M_- \sin T_-}{M_+ \cos T_+ \pm M_- \cos T_-}. \quad (11)$$

В формулах (10), (11) верхние знаки соответствуют индексу «ф» («фа-за»), нижние — индексу «а» («амплитуда»).

$$M_{\pm} = \sqrt{J_{\pm}^2 + R_{\pm}^2} \exp\left(-\frac{1}{4} U_{\pm}^2\right),$$

$$T_{\pm} = \Delta D_{\pm} \mp \arctg \frac{J_{\pm}}{R_{\pm}}, \quad D_{\pm} = D(1 \pm \gamma), \quad U_{\pm} = U(1 \pm \gamma),$$

$$\Delta D_{\pm} = D_{\pm}(z) - D_{\pm}(z_0),$$

$D = \frac{\pi \lambda z}{\Lambda^2 \cos \varphi}$ — волновой параметр [9], $U = \frac{\pi \lambda \rho_0}{\Lambda^2 \cos \varphi}$ — модифицированный волновой параметр, в котором вместо дистанции z берется толщина слоя ρ_0 , $\gamma = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{bp}}$ — приведенный угол падения волны на возмущенный слой, $\varphi_{bp} = \arcsin \frac{\lambda}{2\Lambda}$ — брэгговский угол [6],

$$F_{\pm} = \Phi\left(\frac{z_0}{\rho_0} \pm i \frac{U_{\pm}}{2}\right) + \Phi\left(\frac{z-z_0}{\rho_0} \mp i \frac{U_{\pm}}{2}\right),$$

$$R_{\pm} = \operatorname{Re} F_{\pm}, \quad J_{\pm} = \operatorname{Im} F_{\pm},$$

$\Phi(\alpha)$ — интеграл ошибок Гаусса, $I_n(\alpha)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Нетрудно видеть, что фаза и логарифм амплитуды дифрагированного поля промодулированы во времени и вдоль оси x в соответствии с бегущей волнной параметра. Значения фазы и уровня пропорциональны амплитуде возмущения ϵ_0/ϵ_0 . Зависимости от других характеристик системы более сложные и, как правило, сводятся к функциям от определенных комбинаций из этих характеристик, например, от параметров D, U, γ . Формулы (10), (11) в пределе $\rho_0 \rightarrow \infty$ совпадают с решениями, полученными в [10]. Как видим, по сравнению с результатами [10], в формулах (10) и (11) помимо длины дистанции z фигурирует толщина слоя ρ_0 , а дифракционная картина в большей степени зависит от параметра U , чем от волнового параметра D ; вместо меняющегося с дистанцией параметра Рамана—Ната $\nu = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0} z$ входит не зависящий

от z параметр $\nu_p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho_0}{\cos \varphi} \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0}$. Учет конечной толщины возмущенного бегущей волнной слоя дает существенные изменения в амплитудно-фазовом распределении дифрагированного на этом слое электромагнитного поля. Обсудим вначале случай нормального падения радиоволны на рассеивающий слой. При $\gamma = 0$ формулы (10), (11) упрощаются:

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(2\nu_p \eta_0 \sin \tau_0) \cos n \varphi_s, \\ \Psi_1 &= \nu_p \eta_0 \cos \tau_0 \cos \varphi_s, \\ S_1 &= \nu_p \eta_0 \sin \tau_0 \cos \varphi_s, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{J_0^2 + R_0^2} \exp(-U^2/4),$$

$$\tau_0 = \Delta D + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_0/R_0}{1 + (J_0/R_0)^2},$$

$$J_0 = \operatorname{Im} F_0, \quad R_0 = \operatorname{Re} F_0,$$

$$F_0 = \Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} + i \frac{U}{2} \right) + \Phi \left(\frac{z - z_0}{\rho_0} - i \frac{U}{2} \right).$$

Сравним амплитудно-фазовые распределения полей, дифрагированных в «тонком» ($U \ll 1$) и «толстом» ($U \gg 1$) слоях. Внутри тонкого слоя ($|z - z_0| \ll \rho_0$) в выражениях (12)

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} \right) \left[1 + \frac{2(z - z_0)}{\sqrt{\pi} \rho_0 \Phi(z_0/\rho_0)} \right],$$

$$\tau_0 = \Delta D - \frac{U}{\sqrt{\pi} \Phi(z_0/\rho_0)} \left[1 - \frac{2(z - z_0)}{\sqrt{\pi} \rho_0 \Phi(z_0/\rho_0)} \right]$$

(считалось $z_0 \geq \rho_0$).

За слоем на дистанции $z - z_0 \sim \rho_0$

$$\eta_0 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} \right) + \Phi \left(\frac{z - z_0}{\rho_0} \right) \right],$$

$$\tau_0 \approx \Delta D.$$

Вдали за слоем, т. е. для дистанций $z - z_0 \gg \rho_0$, $\eta_0 \approx 2$ и возмущения фазы и амплитуды становятся очень малыми. В случае толстого слоя, предположив $z_0 \leq \rho_0$, получаем

$$\Psi_1 = \pi \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \frac{z}{\lambda} \cos \Delta D \cos \varphi_s,$$

$$S_1 = \pi \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \frac{z}{\lambda} \sin \Delta D \cos \varphi_s$$

для всех $|z - z_0| \leq \rho_0$. При $\Delta D \ll 1$

$$\Psi_1 \sim \pi \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \frac{z}{\lambda} \cos \varphi_s, \quad S_1 \sim \Psi_1 \Delta D. \quad (13)$$

Отметим, что (13) совпадает с выражениями для возмущенных компонент фазы и уровня в зоне Френеля для случая $\tilde{\epsilon} = \text{const}$. На больших расстояниях за слоем, $z - z_0 \gg \rho_0$,

$$\Psi_1 = \pi \frac{\tilde{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{\lambda} \cos \Delta D \cos \varphi_s \exp(-U^2/4), \quad (14)$$

$$S_1 = \pi \frac{\tilde{\epsilon}_0 \rho_0}{\epsilon_0 \lambda} \sin \Delta D \cos \varphi_s \exp(-U^2/4),$$

т. е. фактически $\Psi_1 \approx S_1 \approx 0$.

Из рассмотренного примера видно, что учет конечной толщины слоя с бегущей волной параметра существенно влияет на точность определения дифракционной картины, в особенности, для сравнительно «тонких» слоев. Кроме того, это расширяет границы применимости теории по дальности*. Дифракционные эффекты усиливаются с увеличением длины пути, проходимого волной внутри возмущенного слоя. На больших расстояниях за слоем Ψ_1 и S_1 стремятся к нулю.

Рассмотрим теперь некоторые случаи наклонного падения электромагнитной волны на гауссов слой с волноподобными неоднородностями. Пусть угол падения равен брэгговскому, $\gamma = 1$. Формулы более наглядны в предельных ситуациях. В случае тонкого слоя, т. е. при $U \ll 1$, дифракционные эффекты можно описать следующими простыми выражениями. Внутри слоя, при $|z - z_0| \ll \rho_0$

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left\{ \pi^2 \frac{\tilde{\epsilon}_0 \rho_0^2}{\epsilon_0 \Lambda^2 \cos^2 \varphi} \left(1 + 3 \frac{z - z_0}{\rho_0} \right) \right\} \cos n \left(\varphi_s - \Delta D - \frac{U}{V^\pi} \right), \\ \Psi_1 &= \frac{4\pi}{\cos \varphi} \frac{\rho_0 \tilde{\epsilon}_0}{\lambda \epsilon_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\rho_0} \right) \cos \left(\varphi_s - \Delta D - \frac{U}{V^\pi} \right), \\ S_1 &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\tilde{\epsilon}_0 \rho_0^2}{\epsilon_0 \Lambda^2 \cos^2 \varphi} \left(1 + 3 \frac{z - z_0}{\rho_0} \right) \cos \left(\varphi_s - \Delta D - \frac{U}{V^\pi} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

а за слоем, при $z - z_0 \gg \rho_0$,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{V^\pi}{2} v_p \cos \Delta D \cos (\varphi_s - \Delta D), \\ S_1 &= \frac{V^\pi}{2} v_p \sin \Delta D \cos (\varphi_s - \Delta D), \\ I^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n (V^\pi v_p \sin \Delta D) \cos n (\varphi_s - \Delta D). \end{aligned} \quad (16)$$

На дистанциях, для которых выполняется условие $\Delta D \ll 1$, оценки возмущения фазы и амплитуды имеют вид

$$\Psi_1 \sim \frac{\rho_0 \tilde{\epsilon}_0}{\lambda \epsilon_0} \cos \varphi_s, \quad S_1 \sim \frac{\rho_0 (z - z_0) \tilde{\epsilon}_0}{\Lambda^2 \epsilon_0} \cos \varphi_s.$$

* Результаты, получаемые в приближении геометрической оптики, верны для расстояний $z \ll \Lambda^2 \lambda^{-1}$. Метод Рытова несколько расширяет область применимости теоретических расчетов [12], но в предположении однородности возмущающей волны параметра на определенных расстояниях z сказывается эффект «накопления» возмущения, и расчеты становятся непригодными. Для модели слоя конечной толщины с плавными границами этот эффект может вообще не иметь места.

Внутри толстого слоя при $U \gg 1$, $|z - z_0| \ll \rho_0$

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= v_p \left[\Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z - z_0)}{\rho_0} \right] \cos \varphi_s, \\ S_1 &= v_p \left[\Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z - z_0)}{\rho_0} \right] \sin \varphi_s, \\ I^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left\{ 2v_p \left[\Phi \left(\frac{z_0}{\rho_0} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z - z_0)}{\rho_0} \right] \right\} \cos n \left(\varphi_s - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}\quad (17)$$

Как видим, и при брэгговских углах падения на распределение поля, дифрагированного в гауссовом слое с волновыми структурами, существенно влияет эффективная толщина слоя ρ_0 .

С увеличением углов падения ($\varphi > \varphi_b$) дифракционные эффекты уменьшаются. Например, в случае $\gamma \gg 1$ возмущенные компоненты фазы и уровня внутри слоя $|z - z_0| \ll \rho_0$ равны

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{\pi}{\cos \varphi} \frac{\tilde{\epsilon}_0 z}{\epsilon_0 \lambda} \cos (\varphi_s - \gamma \Delta D), \\ S_1 &= \frac{\pi^2}{\cos^2 \varphi} \frac{\tilde{\epsilon}_0 z(z - z_0)}{\epsilon_0 \Lambda^2} \cos (\varphi_s - \gamma \Delta D).\end{aligned}\quad (18)$$

Здесь предполагалось, что $\frac{2\pi\rho_0}{\Lambda} \operatorname{tg} \varphi \gg 1$, $z_0 \sim \rho_0$.

3. ПРИМЕРЫ ДРУГИХ МОДЕЛЕЙ $\tilde{\epsilon}(z)$

Пользуясь формулами (8), можно рассмотреть дифракцию электромагнитных волн и для других профилей $\tilde{\epsilon}(z)$. Например, дифракцию в слое с экспоненциальной зависимостью от z ,

$$\tilde{\epsilon}(z) = \eta(z) \tilde{\epsilon}_0 \exp(-z/\rho_0), \quad (19)$$

где $\eta(z)$ — функция Хевисайда, или в гауссовом слое с «заполнением»:

$$\tilde{\epsilon}(z) = \tilde{\epsilon}_0 \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{\rho_0^2} \right] \cos \frac{z - z_0}{\rho_0}. \quad (20)$$

Для гауссова слоя с «заполнением» интенсивность и амплитудно-фазовое распределение поля в зоне дифракции описываются формулами (10) и (11), в которых вместо функций M_{\pm} и T_{\pm} следует соответственно взять функции μ_{\pm} и τ_{\pm} , определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\mu_{\pm} &= \frac{1}{2} [(R_{\Delta_{\pm}} \exp(-\Delta_{\pm}^2) + R_{\sigma_{\pm}} \exp(-\sigma_{\pm}^2))^2 + \\ &+ (J_{\Delta_{\pm}} \exp(-\Delta_{\pm}^2) - J_{\sigma_{\pm}} \exp(-\sigma_{\pm}^2))^2]^{1/2},\end{aligned}\quad (21)$$

$$\tau_{\pm} = U_{\pm} + \operatorname{arctg} \frac{J_{\Delta_{\pm}} \exp(-\Delta_{\pm}^2) - J_{\sigma_{\pm}} \exp(-\sigma_{\pm}^2)}{R_{\Delta_{\pm}} \exp(-\Delta_{\pm}^2) + R_{\sigma_{\pm}} \exp(-\sigma_{\pm}^2)},$$

$$R_{\Delta, \sigma} = \operatorname{Re} F_{\Delta, \sigma}, \quad J_{\Delta, \sigma} = \operatorname{Im} F_{\Delta, \sigma},$$

$$F_{\Delta(\sigma)} = \Phi\left(\frac{z-z_0}{\rho_0} - i\Delta\right) + \Phi\left(\frac{z_0}{\rho_0} + i\Delta\right),$$

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_t} (1 - U_{t\pm}), \quad \sigma_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_t} (1 + U_{t\pm}),$$

$$U_{t\pm} = \frac{\pi \lambda \rho_t}{\Lambda^2 \cos \varphi} (1 \pm \gamma)$$

(считалось $\bar{\varepsilon}(z) = \text{const}$). В предположении экспоненциальной модели и $\bar{\varepsilon}(z) = \varepsilon_0$ получаем для Ψ_1 и S_1 выражения вида (10), в которых

$$\eta_{\Phi, a} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(A_+ \pm A_-)^2 + (B_+ \mp B_-)^2},$$

$$\xi_{\Phi, a} = \operatorname{arctg} \frac{B_+ \mp B_-}{A_+ \pm A_-}, \quad (22)$$

$$A_{\pm} = \frac{1}{1 + U_{\pm}^2} \left[\cos D_{\pm} + U_{\pm} \sin D_{\pm} - \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) \right],$$

$$B_{\pm} = \frac{1}{1 + U_{\pm}^2} \left[\sin D_{\pm} - U_{\pm} \cos D_{\pm} + U_{\pm} \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) \right].$$

Сопоставление результатов, получаемых для моделей (9), (19), (20)

и модели $\bar{\varepsilon}(z) = \text{const}$ ^[10], позволяет утверждать, что учет формы профиля и характерных размеров по z волноподобных возмущений среды вносит существенную корректировку в дифракционные картины. Скажем, в случае экспоненциального слоя для ситуации, когда характерная длина затухания возмущения плотности среды вдоль z намного превосходит длину волны возмущения ($\rho_0 \gg \Lambda$), в зоне Френеля ($D \ll 1$)

изменения фазы такие же, как при $\bar{\varepsilon}(z) = \text{const}$ ^[10], т. е. пропорциональны параметру Рамана—Ната, а вариации амплитуды отличаются от однородного случая и равны

$$S_1 \sim \tilde{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}} \frac{z^2}{\Lambda^2} \frac{\cos \varphi_s}{(1 + U^2)}.$$

В зоне Фраунгофера ($D \gg 1$) отличия более наглядны^[10]:

$$\Psi_1 \sim \nu_p \exp(-z/\rho_0) \frac{\cos \varphi_s}{1 + U^2},$$

$$S_1 \sim \tilde{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0}} \frac{\rho_0^2}{\Lambda^2} \exp(-z/\rho_0) \frac{\cos \varphi_s}{1 + U^2}.$$

Дифракционные эффекты при рассеянии электромагнитной волны в гауссовом слое с «заполнением» зависят от большого количества параметров: ν_p , γ , D , U , $U_t = \frac{\pi \lambda \rho_t}{\Lambda^2 \cos \varphi}$, от соотношений $\frac{\rho_0}{\rho_t}$, $\frac{z-z_0}{\rho_t}$, $\frac{z-z_0}{\rho_0}$,

ν_p , γ , D , U , $U_t = \frac{\pi \lambda \rho_t}{\Lambda^2 \cos \varphi}$, от соотношений $\frac{\rho_0}{\rho_t}$, $\frac{z-z_0}{\rho_t}$, $\frac{z-z_0}{\rho_0}$.

Вариации этих параметров сложным образом отражаются на величине возмущенных составляющих прошедшего поля. Наиболее простой зависимостью является монотонная зависимость от параметра ν_0 . Влияние внутреннего «заполнения» слоя приводит к дополнительной синусоидальной модуляции фазы и уровня электромагнитной волны вдоль z (к появлению множителей $\cos \frac{z-z_0}{\rho_l}$) и к зависимости интенсивности в пунктах фокусировки от отношения ρ_l/ρ_0 .

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что вид функции распределения амплитуды волноподобных неоднородностей по толщине слоя оказывает существенное влияние на вид и степень модуляции дифрагированного в слое электромагнитного поля. Общая дифракционная картина представляет собой чередующиеся вдоль оси z и «бегущие» в направлении оси x максимумы и минимумы (пункты фокусировки) рассеянного поля, причем разных интенсивностей в зависимости от углов падения γ , дистанции z , соотношений между длиной волны неоднородностей в среде Λ , эффективной толщины слоя ρ_0 и дистанцией $z - z_0$, а при наличии внутреннего «заполнения» и от соотношений между характерным периодом этого «заполнения» ρ_l и эффективной толщиной слоя ρ_0 . Увеличение интенсивности бегущих волн параметра приводит к увеличению эффектов рассеяния. К увеличению модуляции волны, прошедшей неоднородный слой, приводит и увеличение характерных размеров слоя по z относительно длины волны возмущения Λ . При этом более отчетливой становится зависимость дифракции от угла падения. Учет высотных профилей диэлектрической проницаемости среды и интенсивности возмущения в полученных решениях дает возможность повысить точность расчета в дифракционных задачах, связанных с локацией, например, ионосферных неоднородностей, за счет выбора более близких к реальным условиям распределения моделей $\bar{\epsilon}(z)$ и $\tilde{\epsilon}(z)$. Учет наклонного падения электромагнитной волны на возмущенный слой позволяет рассматривать такие интересные случаи, как брэгговский режим дифракции, чего нельзя проделать, ограничиваясь результатами задач о нормальном падении. Использованная методика может оказаться полезной при исследовании влияния волноподобных неоднородностей на корреляционные характеристики принимаемых станциями радиосигналов.

Результаты проведенных расчетов могут быть использованы при обработке экспериментальных данных. Например, при распространении электромагнитных волн коротковолнового диапазона в ионосфере могут реализовываться условия, при которых радиоволна, отразившись от более высоких слоев ионосферы, пересекает слой с волноподобными неоднородностями. Аналогичные слои могут проходить и УКВ-сигналами, принимаемыми наземными станциями при зондировании ионосферы сверху. Скажем, величина доплеровского сдвига частоты на бегущей волне параметра ($\Delta\omega_d$) определяется производной по времени от фазы Ψ_1 электромагнитной волны (8). Например, для модели гауссова слоя неоднородностей $\Delta\omega_d = -\Omega\nu_0\eta_\phi \sin(\varphi_s - \xi_\phi)$, где η_ϕ , ξ_ϕ определяются формулами (11).

Автор выражает глубокую признательность В. Н. Красильникову за внимание и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
2. В. И. Дробежев и др., Волновые возмущения в ионосфере, изд. Наука, Алма-Ата, 1975.
3. K. C. Yeh and C. H. Liu, Theory of Ionospheric Waves, Academic Press, 1972.
4. R. Knuth, D. Felske and W. Lippert, J. Atm. Terr. Phys., 37, № 1, 31 (1975).
5. А. С. Бакай, Г. К. Солововников, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 11, 1619 (1975).
6. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
7. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 19, № 1, 38 (1974).
8. А. М. Мартынов, И. С. Мирер, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 12, 1845 (1975).
9. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, серия физическая, № 2, 223 (1937).
10. А. М. Мартынов, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1948 (1973).
11. К. А. Барсуков, Радиотехника и электроника, 9, № 7, 1172 (1964).
12. А. М. Мартынов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1378 (1976).
13. С. J. K. Virgmanu, Plasma Phys., 14, № 11, 1047 (1972).
14. О. Г. Налбандян, Физика атмосферы и океана, 12, № 8, 877 (1976).
15. Б. Т. Кузнецов, Радиотехника и электроника, 21, № 12, 2623 (1976).
16. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 1, 19 (1971).

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 декабря 1977 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY TRAVELING WAVE STRUCTURES IN THE IONOSPHERE

V. I. Romanova

The diffraction of electromagnetic waves obliquely incident on the ionospheric region with the density inhomogeneities traveling wave type is investigated by the Rytov smooth perturbation method. Spatial dependences of the ionosphere properties and wavelike irregularities are taken into account. The diffraction patterns for several height profiles of wave disturbances are analysed. The solutions obtained permit to evaluate the influence of the ionospheric profile and height disturbance level disturbance of wavelike inhomogeneities upon diffraction effects.

УДК 621.371.25

НАПРАВЛЯЮЩИЕ СВОЙСТВА ПЛАВНОНЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ И ДИФРАКЦИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

M. B. Тинин

Исследуется дифракция сферической волны на плавнонеоднородном слое, в котором за барьером конечной высоты имеется волноводный участок. Получено выражение для направляемых слоем волн, формирующихся вне слоя в результате обмена энергией между волноводом и внешним однородным полупространством. Исследуются некоторые свойства этих волн. Показано, что ввиду того, что на большом расстоянии более существенными оказываются потери за счет оттока энергии из волновода сквозь барьер, а не первоначальная амплитуда волны, роль главной (оптимальной) моды переходит с расстоянием от одной моды к другой, находящейся на более низком уровне в потенциальной яме (волноводе). В качестве примера рассматривается задача дифракционного возбуждения ионосферных волноводов при сверхдальнем распространении коротких радиоволн. Результаты обсуждаются и сравниваются с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

Характерным для дифракции сферической волны на неоднородном слое является появление помимо геометрооптических (падающей, преломленной и отраженной) волн таких направляемых слоем волн, как боковая, вытекающие и поверхностьные [1–5]. В цитированных работах исследовалась, главным образом, дифракция на дискретных структурах. Однако для более корректного анализа высокочастотной дифракции на неоднородном слое (например, на ионосферном слое) необходимо в качестве модели среды привлекать плавнонеоднородную структуру. Дифракционные эффекты в слое с монотонно изменяющимися свойствами исследовались в работах [1, 6–10], а результаты исследований дифракции сферической волны на слое, диэлектрическая проницаемость которого изменялась по параболическому закону, приведены в работах [11, 12]. В настоящей работе с помощью квазиоптических методов теории дифракции [1, 4] исследуется задача дифракции сферической волны на слое, у которого в зависимости диэлектрической проницаемости от высоты имеется два экстремума: максимум и минимум.

1. Пусть диэлектрическая проницаемость ϵ описывается плавной функцией координаты z (см. рис. 1):

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon(z) & (z \geq 0) \\ \epsilon_0 & (z \leq 0) \end{cases}, \quad (1)$$

причем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \epsilon(z) = \epsilon_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z}(z_m) = \frac{\partial \epsilon}{\partial z}(z_g) = 0; \quad (3)$$

$$\infty > \epsilon(z_m) \equiv \epsilon_m > 0; \quad (4)$$

$$\epsilon_2 \equiv \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2}(z_m) > 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2}(z_g) < 0. \quad (6)$$

Необходимо найти поле элементарного вертикального магнитного диполя с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$, расположенного в нижнем однородном полупространстве в точке с координатами

$$x = y = 0, \quad z = h < 0. \quad (7)$$

В соответствии с терминологией Бреховских [1] в окрестности $z \sim z_g$ осуществляется волноводное, а в окрестности $z \sim z_m$ (барьера) — антиволноводное распространение*. Ввиду того, что высота барьера конечна (см. (4)), можно ожидать появления волноводных мод, обусловленных просачиванием поля сквозь барьер. Возможность такого возбуждения ионосферных волноводов исследовалась в работе [13] с помощью численной реализации модифицированного метода параболического уравнения. В работах [14, 15] просачивание поля сквозь барьер, разделяющий два ионосферных волновода, исследовалось методом нормальных волн**. Используемый в настоящей работе комбинированный квазиоптический метод имеет то преимущество, что позволяет в решении разделить геометрооптическую и дифракционную части поля и оценить относительный вклад их.

Известно (см., например, [16]), что решение задачи дифракции сферической волны связано с решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + k^2 \epsilon(z) \Pi = -\delta(z - h), \quad (8)$$

где функция $\Pi(x, y, z)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом Герца, $\delta(z)$ — дельта-функция, $k = \omega/c$ — волновое число (c — скорость света в свободном пространстве).

Уравнение (8) при условии конечности поля всюду, кроме точки расположения источника, можно решить с помощью преобразования Фурье—Бесселя. В частности, в области $z < 0$ решение имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\exp(ik\sqrt{\epsilon_0} R)}{R} + \frac{ik}{2} I \right], \quad (9)$$

* Примером слоя, в котором осуществляется антиволноводное распространение, служит параболический слой [11, 12]. В настоящей работе мы, используя метод эллиптических уравнений, не будем ограничиваться этим частным случаем, а рассмотрим слой с достаточно общим поведением $\epsilon(z)$ в окрестности барьера $z \sim z_m$.

** См. также работу [25].

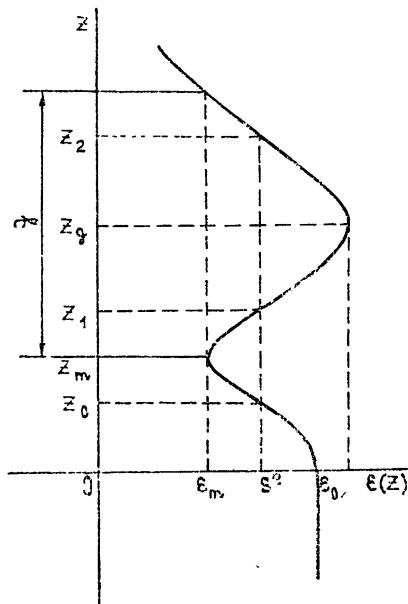


Рис. 1.

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2} = \sqrt{r^2 + (z - h)^2}; \quad (10)$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(ksr)}{\sqrt{\epsilon_0 - s^2}} Q(s) \exp [-ik\sqrt{\epsilon_0 - s^2}(z - h)] s ds. \quad (11)$$

В формуле (11) $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля 1-го рода [17], а интегрирование производится на том листе двулистной римановой поверхности, на котором выполняется условие

$$\operatorname{Im} \sqrt{\epsilon_0 - s^2} \geq 0. \quad (12)$$

Второе слагаемое в (9) описывает реакцию слоя на падающую сферическую волну (первое слагаемое). Входящая в подынтегральное выражение (11) функция $Q(s)$ является коэффициентом отражения плоской волны, приведенным к уровню $z = 0$. Для определения этого коэффициента необходимо найти ограниченное при $z \rightarrow \infty$ решение уравнения

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + k^2 [\epsilon(z) - s^2] U = 0, \quad (13)$$

которое при $z \rightarrow 0$ имеет вид

$$U = C [\exp (ik\sqrt{\epsilon_0 - s^2} z) + Q(s) \exp (-ik\sqrt{\epsilon_0 - s^2} z)]. \quad (14)$$

Из анализа зависимости $\epsilon(z)$ (см. рис. 1) следует, что в уравнении (13) имеется три точки поворота — решений уравнения $\epsilon(z) - s^2 = 0$. Как будет видно из последующего, наиболее интересными являются решения уравнения (13) при $s \approx \epsilon_m$. Если «объем» волновода достаточно большой, то в этом случае построение асимптотических приближений в окрестности верхней точки поворота, расположенной в волноводе, и в окрестности двух нижних точек поворота можно производить независимо.

В волноводной части слоя вдали от точек поворота с помощью метода фазового интеграла [18] получаем

$$U \approx \frac{C_g}{\sqrt{\epsilon(z) - s^2}} \left[\exp \left(ik \int_{z_2}^z \sqrt{\epsilon - s^2} dz \right) - i \exp \left(-ik \int_{z_2}^z \sqrt{\epsilon - s^2} dz \right) \right], \quad (15)$$

где z_2 — верхняя точка поворота.

С помощью метода эталонных уравнений, следуя работам [19, 20], в окрестности барьера (антиволноводной части слоя) получаем асимптотику, учитывающую обе нижние точки поворота:

$$U \approx \frac{C_m \sqrt{\zeta^2 + 4v}}{\sqrt{\epsilon - s^2}} [D_{iv-1/2}(e^{-i\pi/4}\zeta) + P(s) D_{-iv-1/2}(e^{i\pi/4}\zeta)]. \quad (16)$$

В формуле (16) использованы следующие обозначения: $D_{iv-1/2}(x)$ — функция параболического цилиндра [21],

$$v = \frac{k}{i\pi} \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\epsilon(z) - s^2} dz, \quad (17)$$

z_0, z_1 — точки поворота, расположенные ниже и выше точки z_m соответственно (см. рис. 1), функция $\zeta(z)$ удовлетворяет уравнению

$$k \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon - s^2} dz = \frac{1}{2} \int_{-2i\sqrt{\nu}}^{\zeta} \sqrt{\zeta^2 + 4\nu} d\zeta. \quad (18)$$

Ввиду того, что асимптотическое приближение (16) является равномерным, его асимптотики при достаточном удалении от точек поворота должны совпасть в волноводе с (15), а при $z \rightarrow 0$ — с (14). Отсюда получаем

$$P(s) = \exp \left[-i \frac{\pi}{4} - i\nu + i\nu \ln \nu - \pi\nu + 2ik \int_{z_1}^{z_0} \sqrt{\epsilon - s^2} dz \right]; \quad (19)$$

$$Q(s) = -i \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} - i\nu \right)}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\nu\pi/2} + \frac{P(s) e^{\pi\nu + i\pi/4}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/2 - i\nu)} + P(s) e^{-\nu\pi/2 + i\pi/4}} \right] \times \\ \times \exp \left(2ik \int_0^{z_0} \sqrt{\epsilon - s^2} dz - \pi\nu - i\nu + i\nu \ln \nu \right), \quad (20)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция [17].

При $|\nu| \gg 1$ (что отвечает достаточно большому отклонению угла падения от критического) коэффициент отражения (20) переходит в соответствующие выражения, получаемые с помощью геометрической оптики:

$$Q(s) = -i \begin{cases} \exp \left(2ik \int_0^{z_0} \sqrt{\epsilon - s^2} dz \right) & (s^2 < \epsilon_m) \\ \exp \left(2ik \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\epsilon - s^2} dz \right) & (s^2 > \epsilon_m) \end{cases}. \quad (21)$$

2. Займемся теперь асимптотическим вычислением интеграла (11). Проведем контур наибыстрейшего спуска через седловую точку, соответствующую самому нижнему отраженному лучу. Подставляя вместо функции Ханкеля ее асимптотику и вычисляя интеграл (11) методом наибыстрейшего спуска, получаем

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(i k \sqrt{\epsilon_0} R)}{R} - \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{s_c}{(\epsilon_0 - s_c^2)r \frac{\partial r}{\partial s_c}}} \exp[i k \Phi(s_c)] + \sum_{n=n_0}^M \Pi_n, \quad (22)$$

где

$$\Phi(s) = sr - \sqrt{\epsilon_0 - s^2}(z + h) + 2 \int_0^{z_0} \sqrt{\epsilon - s^2} dz, \quad (23)$$

s_c — седловая точка, определяемая из уравнения луча

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = r - \int_0^{z_0} \frac{2s_c dz}{\sqrt{\epsilon - s_c^2}} + \frac{s_c(z + h)}{\sqrt{\epsilon_0 - s_c^2}} = 0. \quad (24)$$

Помимо обусловленной вкладом седловой точки отраженной геометрической волны (второго слагаемого) в решение (22) вошли дифракционные моды Π_n . Эти моды появились в решении в результате вычисления вычетов в полюсах коэффициента отражения $Q(s)$, расположенных

женных в первом квадранте комплексной плоскости s между исходным контуром и контуром наибыстрейшего спуска, выходящим из седловой точки под углом $-\pi/4^*$:

$$\Pi_n = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \sqrt{\frac{2ks_n}{\pi r(s_0 - s_n^2)}} \exp [ik s_n r - ik \sqrt{\varepsilon_0 - s_n^2} (z + h)] \operatorname{Res} Q(s_n). \quad (25)$$

3. Исследуем некоторые особенности направляемых слоем (1)–(6) дифракционных мод Π_n . Из (20) видно, что у коэффициента $Q(s)$ имеется две серии полюсов, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\frac{1}{\Gamma \left[\frac{1}{2} - i\nu(s) \right]} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma \left[\frac{1}{2} - i\nu(s) \right]} + P(s) \exp \left[-\frac{\pi\nu(s)}{2} + i\frac{\pi}{4} \right] = 0. \quad (27)$$

Вычисление вычетов в полюсах (26) дает волны, направляемые нижним антиволноводным слоем. Анализ таких волн проведен в работе [11], где, в частности, показано, что в силу антиволноводного характера распространения эти волны экспоненциально затухают и в присутствии других слабозатухающих волн на большом расстоянии вдоль слоя не вносят существенного вклада. Появление полюсов (27) связано с волноводным слабозатухающим распространением**, поэтому в дальнейшем мы будем учитывать только эти полюсы. Для них

$$\Pi_n = \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \sqrt{\frac{2ks_n}{\pi kr(\varepsilon_0 - s_n^2)}} \frac{\exp \left[ik \Phi(s_n) + 2\pi\nu - 2ik \int_{z_1}^{z_0} \sqrt{\varepsilon - s_n^2} dz \right]}{\left\{ \frac{d\nu}{ds} \left[\psi \left(\frac{1}{2} - i\nu \right) - \ln \nu - i\frac{3}{2}\pi \right] + kT_g(s) \right\} \Big|_{s=s_n}}, \quad (28)$$

где

$$T_g(s) = 2 \int_{z_1}^{z_0} \frac{s dz}{\sqrt{\varepsilon - s^2}}, \quad (29)$$

$\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции [17].

В последующем анализе выражений (27), (28) учтем два обстоятельства. Во-первых, нас интересуют волны, слабозатухающие при большом удалении вдоль слоя. Поэтому потребуем

$$\operatorname{Im} s_n \equiv s_n'' \ll 1. \quad (30)$$

Во-вторых, вследствие большой толщины барьера эффективное возбуж-

* Детальный анализ поведения контура наибыстрейшего спуска мы здесь не прородим. Для дальнейшего нам достаточно того, что, по крайней мере, часть полюсов, лежащих над вещественной осью слева от седловой точки, будет пересечена при деформации исходного контура в контур наибыстрейшего спуска. Более подробно вычисление интегралов вида (11) методом наибыстрейшего спуска с учетом особенностей подынтегрального выражения описано, например, в работах [1, 4].

** В работе [26] резонансные свойства коэффициента отражения, обусловленные присутствием полюсов (27), использовались для экспериментального обнаружения ионосферных волноводов в нижней (ниже D -слоя) ионосфере.

дение волновода можно ожидать только для тех волн, у которых решения дисперсионного уравнения (27) расположены в окрестности $\sqrt{\epsilon_m}$:

$$|\epsilon_m - s_n^2| \ll 1. \quad (31)$$

Условие (31) позволяет приближенно вычислить интегралы, входящие в (17), (19). В результате с учетом (30), (31) получаем

$$\Pi_n \approx -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\pi k r (\epsilon_0 - \epsilon_m) \sqrt{\epsilon_m}}} e^{-i\pi/4} \times \\ \times \frac{\exp \left[ik \Phi(s'_n) - 2ik \int_{z_1}^{z_0} \sqrt{\epsilon - (s'_n)^2} dz - 2\pi\xi_n - ks''_n L \right]}{\psi \left(\frac{1}{2} + i\xi_n \right) - \mu - i\frac{\pi}{2}}; \quad (32)$$

$$s''_n = \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{2\epsilon_m}} \frac{\ln [1 + \exp(-2\pi\xi_n)]}{\mu - \operatorname{Re} \left[\psi \left(\frac{1}{2} + i\xi_n \right) \right]}, \quad (33)$$

где

$$\mu = \ln \frac{k}{\sqrt{2\epsilon_2}} + \lim_{s^2 \rightarrow \epsilon_m} \left[\ln (s^2 - \epsilon_m) + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{2\epsilon_m}} T_g(s) \right]; \quad (34)$$

$$L = L_0 + T_g = r + \frac{s'_n(z+h)}{\sqrt{\epsilon_0 - (s'_n)^2}} - 2 \int_0^{z_0} \frac{s'_n dz}{\sqrt{\epsilon - (s'_n)^2}} + T_g(s'_n). \quad (35)$$

В (32), (33) введена величина ξ_n , связанная с вещественной частью полюса s'_n :

$$\xi_n = \frac{k}{\sqrt{2\epsilon_2}} [(s'_n)^2 - \epsilon_m] = k \sqrt{\frac{2\epsilon_m}{\epsilon_2}} (s'_n - \sqrt{\epsilon_m}) > 0. \quad (36)$$

Для определения ξ_n из (27) получаем следующее уравнение:

$$\xi_n (1 - \mu) = 2\pi(n - N) - \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\xi_n \right), \quad (37)$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{2k}{\pi} \int_{z_m}^{z_0} \sqrt{\epsilon - \epsilon_m} dz - 1 \right), \quad (38)$$

$$n = n_0, n_0 - 1, n_0 - 2, \dots, M \quad (n_0 \leq N).$$

Для «толстого» барьера, у которого $k/\sqrt{2\epsilon_2} \gg 1$, даже при выполнении (31) может выполняться условие

$$\xi_n > 1. \quad (39)$$

В этом случае, используя асимптотики Г- и ψ -функций [17], можно существенно упростить выражения (32), (37):

$$\Pi_n \approx -\sqrt{\frac{2\sqrt{\epsilon_m}}{\pi k r (\epsilon_0 - \epsilon_m)}} \frac{e^{-i\pi/4}}{4T_g(s'_n)} \exp \left[ik\Phi(s'_n) - 2\pi\xi_n - \frac{L}{2T_g(s'_n)} \exp(-2\pi\xi_n) \right]; \quad (40)$$

$$\xi_n (\ln \xi_n - \mu) = 2\pi(n - N). \quad (41)$$

Появление направляемой слоем волны (32) связано с обменом энергии между волноводом и нижним однородным полупространством. Волна падает на слой под близким к критическому углом

$$\alpha_n = \arcsin \frac{s'_n}{\sqrt{\epsilon_0}}. \quad (42)$$

После просачивания сквозь барьер эта волна, прежде чем выйти снова в нижнюю среду, распространяется в волноводе с дополнительными потерями, обусловленными обратным проникновением поля из волновода на участке L_0 . Как видно из (35), L_0 равен расстоянию между точками поворота луча, вышедшего из источника под углом (42), и луча, пришедшего в точку наблюдения. Интересно обратить внимание на то, что фактор просачивания $\exp(-2\pi\xi_n)$ плоской волны в выражение (40) входит с множителем, обратным периоду осцилляций $T_g(s'_n)$ траектории луча в волноводе. Следовательно, этот фактор определяет погонные (за период) потери на просачивание. Множитель $1/2$ перед последним слагаемым в квадратных скобках (40) связан с тем, что в силу кинетичности барьера только с одной стороны волновода просачивание осуществляется только полпериода при движении волны сверху вниз. Так как интервал L_0 уменьшается с ростом $|h|$, $|z|$, то поле волны (32) в отсутствие достаточного поглощения в нижней среде расстает с удалением от слоя, что является характерным для несобственных, вытекающих волн [2-4, 11].

Анализируя относительный вклад моды (32) в полное дифракционное поле, можно увидеть, что возбуждение отдельной моды тем сильнее, чем ближе к нулю величина ξ_n , т. е. чем ближе соответствующий угол падения α_n к критическому. С другой стороны, приближение ξ_n к нулю ведет к росту погонного затухания на участке L_0 при распространении в волноводе. Таким образом, ряд из мод (32) не является монотонно убывающим — имеется «оптимальная» мода с максимальной амплитудой.

4. В качестве примера рассмотрим плазменный слой с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon(z) = 1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{z - z_m}{d} \right)^2 + \frac{(z - z_m)^3}{d^2 g} \right] \quad (\epsilon_0 = 1), \quad (43)$$

где ω_{cr} — критическая частота нижнего слоя, т. е. плазменная частота на уровне $z = z_m$; $d = \sqrt{2/\epsilon_2}(\omega/\omega_{cr})$ — «половиширина» нижнего слоя (барьера); g — ширина волновода (см. рис. 1).

Для слоя (43) интеграл (38) является элементарным, а (29) выражается через полный эллиптический интеграл 1-го рода, асимптотика которого хорошо известна [7]. Выпишем выражение для амплитуды волны (32), отнесенной к амплитуде волны, распространяющейся на расстояние r в свободном пространстве:

$$\tilde{\Pi}_n \equiv 4\pi r |\Pi_n| \approx \sqrt{\frac{\lambda r}{d^2 \sqrt{1 - (\omega_{cr}/\omega)^2}}} e^{-2\pi\xi_n} \times$$

$$\times \begin{cases} \frac{\exp[-(L/2T_g)\exp(-2\pi\xi_n)]}{\mu - \ln \xi_n} & (\xi_n > 1) \\ \frac{\exp\left[-\frac{L}{2d\sqrt{(\omega/\omega_{cr})^2 - 1}} \frac{\ln[1 + \exp(-2\pi\xi_n)]}{\mu + 2}\right]}{\mu + 2} & (\xi_n < 1) \end{cases}, \quad (44)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны в свободном пространстве;

$$\mu = \ln \left[64 \frac{\pi g^2}{d\lambda} \frac{\omega_{cr}}{\omega} \right]; \quad (45)$$

$$\xi_n \approx 2\pi(N-n) \begin{cases} \frac{1}{\mu - \ln [2\pi(N-n)]} & (\xi_n > 1) \\ \frac{1}{\mu + 1} & (\xi_n < 1) \end{cases}; \quad (46)$$

$$T_g = d \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{cr}}\right)^2 - 1} (\mu - \ln \xi_n); \quad (47)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{15} \frac{g^2}{d\lambda} \frac{\omega_{cr}}{\omega} - 1 \right). \quad (48)$$

На рис. 2 (сплошные линии) изображено поведение амплитуды (44) для двух первых мод при $\lambda = 20 \text{ м}$, $g = 50 \text{ км}$, $d = 20 \text{ км}$, $\omega_{cr}/\omega = 0,3$. Как видно из рис. 2, начиная с расстояния порядка 1800—2000 d оптимальной становится не первая, а вторая мода, которая испытывает меньшее ослабление за счет утечки энергии из волновода.

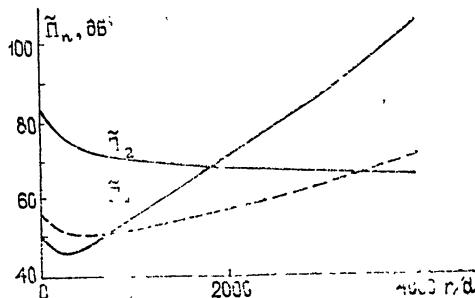


Рис. 2.

Формулы (32), (44) и рис. 2 показывают, что наличие экспоненциальных множителей и коэффициентов порядка $O(k^{-1/2})$ может привести к тому, что вклад дифракционных мод будет мал по сравнению с геометрооптическими волнами. Однако вследствие различия траекторных характеристик дифракционные моды могут стать доминирующими в присутствии значительного поглощения в нижней среде* либо при наличии других факторов (например, при образовании зоны тени), препятствующих распространению геометрооптических лучей. Такая ситуация возможна, например, при дальнем ионосферном распространении коротких радиоволн, когда геометрооптические волны, распространяющиеся скачками между Землей и ионосферой, испытывают сильное поглощение в нижних слоях D и E . Наличием над этими слоями волновода с минимумом поглощения довольно часто объясняются случаи наблюдения дальнего распространения с малым затуханием [14, 22]. Учитывая небольшую толщину ионосферного слоя по сравнению с его радиусом кривизны R_m , для обобщения наших результатов на случай сферически слоистой ионосферы достаточно ввести модифицированную диэлектрическую проницаемость [16]. Это приводит к тому, что в формулах (44)—(48) истинные геометрические параметры слоя (43) необходимо заменить на модифицированные \tilde{g} , \tilde{d} с помощью следующих приближенных соотношений:

$$\tilde{d} = d \left\{ 1 - \frac{3d^2}{2gR_m} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{cr}} \right)^2 - 1 \right] \right\}; \quad (49)$$

* Заметим, что при наличии поглощения во внешней среде часть направляемых слоем волны становятся не вытекающими (несобственными), а поверхностными (собственными) волнами (см. [11]).

$$\tilde{g} = \frac{\tilde{d}^2}{\tilde{d}^2} g \left(1 + \frac{2g}{R_m} \right). \quad (50)$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2, могут быть теперь использованы для оценки дальнего распространения дифракционных мод в сферическом ионосферном слое, у которого $\tilde{g} = 50 \text{ км}$, $\tilde{d} = 20 \text{ км}$. Из этого рисунка видно, что ослабление дифракционного поля относительно распространения в свободном пространстве на кругосветной трассе составляет примерно 68 dB^* . С учетом потерь на поглощение эта величина согласуется с приведенным в работе [23] экспериментальным результатом в 80 dB . Заметим, что учет сферичности ионосферы приводит к тому, что на достаточно высоких частотах поле дифракционной моды не будет достигать Земли. В этом случае наши результаты описывают возбуждение межслойного волновода полем источника, расположенного в подслойном волноводе, образованном под максимумом слоя $z = z_m$. Возбуждение мод (44) с Земли происходит, если рабочая частота меньше МПЧ нижнего слоя.

С помощью полученного решения (44) можно определить распределение потерь по различным факторам. Оказывается, что для первой моды наиболее существенным фактором явились не потери при просачивании волн сквозь барьер (которые составили в данном случае $12,4 \text{ dB}$) и не потери в волноводе за счет обратного оттока энергии (менее 40 dB на кругосветной трассе), а потери за счет «коэффициента возбуждения» данной моды (см. (44)):

$$q = -\sqrt{\frac{\lambda}{d \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^{\mu}}}} + 2. \quad (51)$$

Наличие множителя (51) в (44) привело к потерям в $53,4 \text{ dB}$. Соответствующим выбором антенной системы можно, по-видимому, снизить эти потери**. Здесь нужно, однако, заметить, что имеются данные [24] о затухании в 20 — 30 dB при кругосветном распространении, которые уже плохо согласуются с нашими результатами. Кроме того, для интересующих нас высоких частот ($\lambda \ll g$), как видно из (48), $N \gg 1$, что приводит к большим колебаниям амплитуды (44) при малых (доли процента) изменениях параметров ионосферного слоя. В качестве примера на рис. 2 пунктирной линией показана зависимость от расстояния амплитуды первой моды при изменении ω_{cr}/ω на $0,03\%$. Эта неустойчивость говорит о необходимости для более корректной оценки роли данного механизма при дальнем распространении исследовать влияние различного рода ионосферных неоднородностей на волны (32) и трансформацию этих волн в другие типы волн.

В заключение автор выражает благодарность В. С. Булдыреву за ценные замечания и признательность В. Н. Миролюбову за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреходских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957
2. T. Tamir and A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, 317 (1963).
3. T. Tamir and A. A. Oliner, Proc. IEE, B110, 310 (1963)

* Помимо различного рода потерь (см. далее) здесь учтена волноводная фокусировка (множитель $\sqrt{r/d}$ в (45)).

** В отличие от работ [13, 15] в своих оценках мы не учитываем направленности антенных систем.

- 4 Л Фельсен, в кн. Квазиоптика, изд Мир, М, 1966, стр. 11
- 5 М В Тинин, Изв вузов — Радиофизика, 16, № 10, 1613 (1973)
- 6 С L Рекегис, J. Acoust. Soc. Am., 18, № 2, 295 (1946)
- 7 D S Jones, Phil. Trans., 255 A, № 1058, 341 (1963)
- 8 Н. В Цепелев, Математические вопросы теории распространения волн, 2, Труды научных семинаров Ленинградского Отделения Математического института, 15, 187 (1968)
- 9 Н. В Цепелев, Математические вопросы теории распространения волн, 3, Труды научных семинаров Ленинградского Отделения Математического института, 17, 209 (1970).
- 10 М В Тинин, Изв вузов — Радиофизика, 16, № 4, 505 (1973).
- 11 М В. Тинин, в сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 29, изд. Наука, М, 1973, стр. 157.
- 12 М. В Тинин, в сб Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып 35, изд Наука, М, 1975, стр 73.
- 13 В. А Чернова, в сб Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн, ИЗМИРАН, М., 1977, стр 27
- 14 П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, МГУ, М, 1947.
- 15 Н Д Борисов, А. В Гуревич, в сб Исследование сверхдальнего распространения радиоволн, ИЗМИРАН, М, 1975, стр 3
- 16 Е П. Файнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд АН СССР, М., 1961
- 17 Е Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М, 1968
- 18 Дж Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), изд Мир, М, 1965.
- 19 В. А. Фок, Радиотехника и электроника, 1, № 5, 560 (1956); см также В. А Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М, 1970, стр. 316
- 20 S C Miller and R. H. Good, Phys. Rev., 91, № 1, 174 (1953).
- 21 Э. Т. Уиттекер, Дж Ватсон, Курс современного анализа, часть II, Физматгиз, М, 1963
- 22 В А Данилин, Космические исследования, 5, № 2, 231 (1967)
- 23 G A Isted, Proc. IEE, 105B, № 8, 27 (1958).
- 24 В. А. Бубнов, С Ф. Голян, А Г Шлионский, в сб. Ионосферное распространение коротких радиоволн, ИЗМИРАН, М, 1975, стр. 90.
- 25 А В. Лазута, С Ю Славянов, И. П. Тампель, в сб. Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинградское Отделение Математического института, Л, 1971, стр. 125
- 26 П Е Краснушкин, Е Н Федоров, ДАН СССР, 217, № 4, 792 (1974)

Иркутский государственный
университет

Поступила в редакцию
13 декабря 1977 г

GUIDING PROPERTIES OF A SMOOTHLY-INHOMOGENEOUS LAYER AND DIFFRACTION EXCITATION OF IONOSPHERIC WAVEGUIDES

M. V. Tinin

The diffraction of a spherical wave by a smoothly-inhomogeneous layer in which behind the finite-height barrier there is a waveguide section is investigation. The expression is obtained for waves guided by the layer which are formed outside the layer as a result of the energy exchange between the waveguide and the external uniform half-space. Some properties of these waves are investigated. It is shown that at the large distance more essential are the losses due to the energy output from the waveguide through the barrier but not the initial wave amplitude. Due to this the role of the basic (optimal) mode passes with a distance from one mode to another being at the lower level in the potential pit (waveguide). As an example, the problem of diffraction excitation of ionospheric waveguides for extra-long-range propagation of short radiowaves is considered. The results are discussed and compared with experimental data available.

УДК 551 510 535

ЯВЛЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ ИСКУССТВЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Л. М. Ерухимов, С. А. Метелев, Н. А. Митяков, В. Л. Фролов

Обнаружен эффект гистерезиса в зависимости сечения рассеяния искусственных ионосферных неоднородностей от интенсивности возбуждающих их радиоволны. Определены пороги возбуждения и срыва неустойчивости плазмы и установлена зависимость величины ее флюктуаций от мощности возбуждающего передатчика.

Известно, что уровень мелкомасштабной турбулентности ионосферной плазмы (с размерами $l_{\perp} < 100$ м в плоскости, перпендикулярной геомагнитному полю H_0), возбуждаемой мощным радиоизлучением, зависит от интенсивности волны накачки [1–3, 9]. Однако характер этой зависимости до последнего времени точно установить не удавалось, так как в проводимых экспериментах, как правило, не обращалось внимание на зависимость геометрических размеров возмущенной области (ВО) от интенсивности волны накачки. Вместе с тем, знание зависимости спектральной $\Phi_N(z)$ компоненты плотности флюктуаций (или

интегральной величины $\delta N^2 = \frac{\langle \Delta N_z^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} \propto \int \Phi_N(z) dz$) от эквивалентной мощности излучения передатчика P_g^* важно как для предсказания свойств искусственной турбулентности (ИТ) при больших мощностях действующего на плазму излучения, так и для понимания механизма ее возбуждения. При этом весьма интересным представляется определение пороговых мощностей включения и срыва плазменной неустойчивости, которые, как следует из последних теоретических исследований тепловой параметрической неустойчивости (ТПН) в F -слое ионосферы в поле мощной волны, должны существенно различаться [4, 5]. Экспериментальное исследование зависимости ИТ от мощности волны накачки проводилось нами в октябре–декабре 1977 г. с помощью метода ракурсного рассеяния радиоволн искусственными неоднородностями [1] на частотах УКВ (50–60 МГц)– и КВ (≈ 20 МГц)-диапазонов, что дало возможность изучать искусственные неоднородности с масштабами $2,5$ м $\leq l_{\perp} \leq 15$ м. Для УКВ-сигналов (рис. 1) рассеяние было близко к обратному.

Режим работы мощного передатчика в одном цикле излучения представлен на рис. 2 (нижняя кривая). Уровень мощности P_{g1} менялся от цикла к циклу, значение P_{g2} не менялось и было равно 12 МВт. Между циклами излучения выдерживалась пауза в течение 6 минут, впол-

* $P_g = PG$, где P — мощность радиопередатчика, подводимая к антенне, G — коэффициент усиления антенны.

не достаточная для возвращения ионосферы к невозмущенному состоянию. На верхней части рис. 2 приведен пример записи амплитуды A_s рассеянных УКВ-сигналов, когда эквивалентная мощность возмущающего передатчика составляла соответственно $P_{31} = 3 \text{ Мвт}$, $P_{32} = 12 \text{ Мвт}$. На рисунке достаточно четко прослеживается эффект гистерезиса в зависимости амплитуды рассеянного сигнала от P_s^* . Важно отметить при этом, что после изменения мощности волны накачки происходит быстрое (за время $\tau \leq 10 \text{ с}$) установление нового стационарного состояния ИТ.

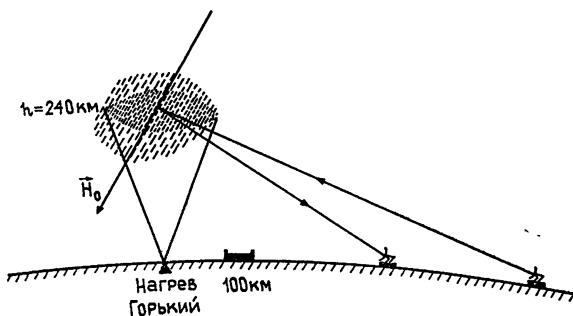


Рис. 1.

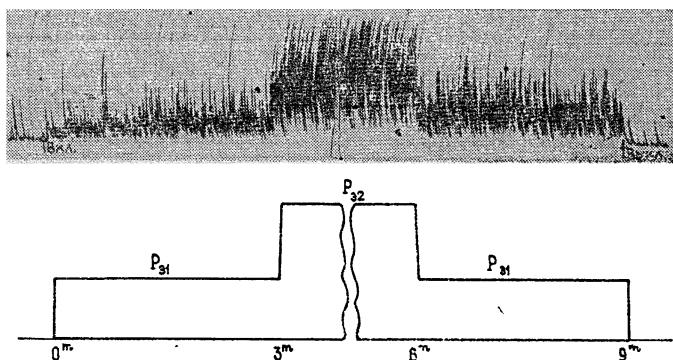


Рис. 2.

Значение интенсивности рассеянного сигнала (A_s^2) определяется величиной поперечника рассеяния радиоволн σ , который в нашем случае (ширина диаграмм направленности передающей и приемной антенн больше угловых размеров ВО) пропорционален произведению спектральной плотности флюктуаций $\Phi_N(x)$ на характерные размеры рассеивающей области.

Для выделения эффектов, связанных с изменением геометрических размеров ВО, была использована известная зависимость характерной частоты флюктуаций рассеянного сигнала ν от угловых размеров θ рассеивающей области [7]: $\nu = \tau^{-1} \sim \frac{\theta v}{\lambda} \infty L$ ($\theta \ll 1$), где L — линейные

* Существование эффекта гистерезиса в аномальном поглощении отраженных от ВО ионосферы пробных волн отмечалось еще в [6], однако в силу ряда особенностей постановки эксперимента надежных количественных результатов в то время получить не удалось.

размеры ВО в направлении дрейфа неоднородностей со скоростью v , λ — длина рассеиваемой волны.

На рис. 3 для УКВ-рассеяния приведены кривые $\sigma(P_s)$ и $\nu(P_s)$ при изменении P_s от 3 МВт до 12 МВт (аналогичные результаты были получены нами и для КВ-рассеяния). Можно видеть наличие эффекта гистерезиса в зависимости как $\sigma(P_s)$, так и $\nu(P_s)$. При этом на ветвях, соответствующих увеличению мощности $\sigma^+ \propto P_s$, $\nu^+ \propto P_s^{0.5}$. При обратном уменьшении мощности передатчика $\sigma^- \propto P_s^{0.5}$, а ν^- зависит от мощности существенно слабее.

Такой гистерезисный характер кривых эффективного размера ВО можно просто объяснить различием порога возбуждения и порога срыва неустойчивости, приводящей к появлению искусственной турбулентности ионосферной плазмы в поле мощной волны накачки. При этом вычисления (с учетом диаграммы направленности мощного передатчика) показали, что пороговое значение $P_{s\text{пп}}$ возникновения неустойчивости, приводящей к мелкомасштабному расслоению плазмы, примерно составляет 1,5—2 МВт, в то время как срыв неустойчивости происходит при значительно меньших значениях — $P_{s\text{пп}} \leq 0,5$ МВт.

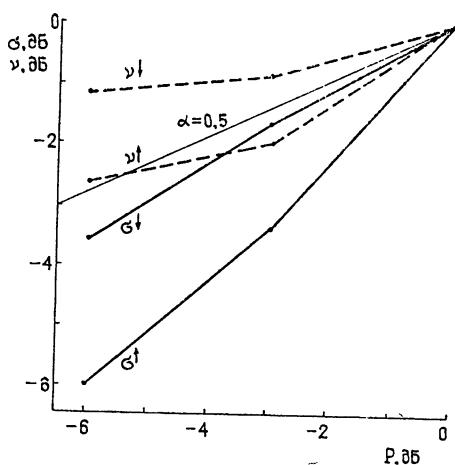


Рис. 3. Зависимости поперечника сечения σ (сплошная кривая) и частоты флюктуаций ν (пунктир) от эквивалентной мощности передатчика (в децибелах относительно максимальных величин).

ТПН близок к значению $\alpha = 2$, а учет влияния этого эффекта должен привести к снижению α . Поэтому ясно, что при объяснении экспериментальных результатов в рамках теории ТПН представляется необходимым учет как многократного рассеяния плазменных волн, так и некоторых других эффектов (например, возможной перекачки энергии по спектру при взаимодействии низкочастотных волн).

Полученное значение α существенно меньше, чем в [3], где для $P_s < 10$ МВт $\langle \alpha \rangle \approx 1$. Это связано, по-видимому, с пренебрежением в [3] эффектом изменения размеров ВО от мощности нагрева. Действительно, в области больших мощностей ($P_s > 10$ МВт), как можно показать [8], размеры области рассеяния не зависят от P_s , и полученная в [3] величина $\langle \alpha \rangle \approx 0,65$ близка к значению 0,5, которое следует из нашей работы.

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность В. Ю. Трахтенгерцу, В. О. Рапопорту, С. М. Грачу, А. Н. Карапшину за обсуждение полученных результатов и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Беленов, В. А. Бубнов, Л. М. Ерухимов и др., Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1805 (1977).
2. P. A. Fialer, Radio Sci., 9, № 11, 923 (1974).
3. P. B. Rao and G. D. Thome, Radio Sci., 9, № 11, 987 (1974).
4. С. М. Грач, А. Н. Карапшин, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г. Ростов-на-Дону, 1977 г., Краткие тезисы докладов, т. 1, стр. 127).
5. С. М. Грач, А. Н. Карапшин и др., Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 12, 1827 (1977).
6. Г. Г. Гетманцев, Г. П. Комраков и др., Письма в ЖЭТФ, 18, вып. 10, 621 (1973).
7. В. И. Татарский, Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1273 (1975).
9. В. В. Васильков, А. В. Гуревич, а) Препринт ФИАН им. П. Н. Лебедева, № 95, М., 1975; б) ЖЭТФ, 69, 176 (1975), в) Физика плазмы, 2, 113 (1976); г) ЖЭТФ, 73, 923 (1977).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 апреля 1978 г.

HYSTERESIS PHENOMENON BY ARTIFICIAL EXCITATION
OF IRREGULARITIES IN IONOSPHERIC PLASMA

L. M. Erukhimov, S. A. Metel'ev, N. A. Mityakov, V. L. Frolov

The hysteresis effect has been discovered for the dependence of artificial ionospheric irregularities on the intensity of waves exciting them. The excitation and distortion thresholds of plasma instability are determined and the dependence of its fluctuation on the exciting transmitter power is established.

УДК 621.371.24

ПРИМЕРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ В СВЧ-ДИАПАЗОНЕ

В. И. Дробышевич, А. П. Наумов

Определены системы ортогональных векторов, обеспечивающих оптимальную в статистическом смысле аппроксимацию вертикальных распределений молекулярного коэффициента поглощения на характерных длинах волн микроволнового диапазона, принадлежащих окнам прозрачности атмосферы и резонансам поглощения O_2 и H_2O , а также показателя преломления атмосферы в области $\lambda \geq 1$ м. Выполнен анализ некоторых свойств ортогональных векторов

1. Коэффициенты поглощения и преломления радиоволн в СВЧ-диапазоне определяются основными метеопараметрами атмосферы — температурой, давлением, влажностью. Изменчивость полей метеорологических элементов обычно описывается статистическими методами, при этом соответствующие поля рассматриваются как случайные. Статистический характер полей метеорологических элементов определяет подобный характер и радиопараметров атмосферы в СВЧ-диапазоне. Поэтому можно ожидать, что при анализе полей коэффициентов поглощения и преломления в СВЧ-диапазоне статистические методы будут столь же эффективны, как и при анализе метеорологических полей.

В [1] показано, что для произвольной стохастически непрерывной случайной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ и имеющей конечные моменты первого и второго порядков, можно построить систему ортогональных и нормированных функций, которые будут оптимальным образом аппроксимировать реализации этой случайной функции. Такую систему образуют собственные функции интегрального оператора

$$\mu\varphi(x) = \int_a^b B_{ff}(x, y)\varphi(y)dy, \quad (1)$$

ядром которого является корреляционная функция

$$B_{ff}(x, y) = \overline{[f(x) - \bar{f}(x)][f(y) - \bar{f}(y)]}. \quad (2)$$

Здесь μ — собственное значение этого оператора.

Базисная система функций $\varphi_K(x)$ обеспечивает аппроксимацию любой реализации случайной функции при заданной ошибке минимальным числом членов m суммы (3):

$$f_m(x) = \bar{f}(x) + \sum_{K=1}^m c_K \varphi_K(x), \quad c_K = \int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)] \varphi_K(x) dx. \quad (3)$$

В этом случае среднеквадратичная ошибка аппроксимации

$$c_m^2 = \int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx \quad (4)$$

минимальна и равна остаточной сумме собственных значений μ_K , соответствующих отброшенным в (3) $\varphi_K(x)$:

$$\sigma_m^2 = \sum_{K=m+1}^{\infty} \mu_K. \quad (5)$$

Собственные значения μ_K имеют смысл дисперсий коэффициентов разложения случайных функций $f(x)$ по оптимальному базису $\varphi_K(x)$ (см. (10) в [1]), т. е.

$$\mu_K = \overline{\sigma_K^2} = \left[\int_a^b \{f(x) - \overline{f(x)}\} \varphi_K(x) dx \right]^2. \quad (6)$$

В [1–4] построены примеры собственных векторов и собственных значений для вертикальных профилей ряда метеорологических элементов: геопотенциала, скорости ветра, а также для отклонений температуры и удельной влажности от средних значений. В [28, 29] с помощью собственных векторов матриц проанализирована спектральная структура ослабления в окнах прозрачности ИК-диапазона ($\lambda = 0,37 \div 13 \text{ мкм}$).

В работах [5, 6] теория ортогональных статистических разложений использована при вычислении углов атмосферной рефракции с помощью представления их в виде ряда по функциям $\tilde{f}(h) = 1 - \frac{n^2(h)}{n^2(0)}$ (n — коэффициент преломления на высоте h). Точность вычисления астрономической рефракции в оптическом диапазоне при использовании статистических ортогональных разложений $\tilde{f}(h)$ обсуждается в [7].

В данной статье приведены результаты расчета собственных векторов и собственных значений корреляционных матриц для вертикальных профилей отклонений коэффициентов преломления и поглощения в СВЧ-диапазоне от соответствующих средних значений:

$$B_{NN}(h_K, h_l) = \overline{[N(h_K) - \overline{N(h_K)}] [N(h_l) - \overline{N(h_l)}]}; \quad (7)$$

$$B_{\gamma\gamma}(h_K, h_l) = \overline{[\gamma(h_K) - \overline{\gamma(h_K)}] [\gamma(h_l) - \overline{\gamma(h_l)}]}. \quad (8)$$

Полученные результаты могут быть использованы для аппроксимации высотных зависимостей непосредственно коэффициентов поглощения и преломления радиоволн в тех физических задачах, в которых будут исследоваться интегральные радиохарактеристики атмосферы или соответствующие характеристики на определенных уровнях.

Использованные в данной работе матрицы B_{NN} и $B_{\gamma\gamma}$ получены в [8] при построении статистической радиометеорологической модели атмосферы. Эти матрицы вычислялись по данным аэрологического зондирования атмосферы в Центральной части ЕТ СССР для летних и зимних условий года. В расчетах B_{NN} и $B_{\gamma\gamma}$ использовалось около 100 реализаций соответствующих величин для каждого сезона на 18 высотных уровнях $h_K = 0,16; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 14; 16 \text{ км}$.

Показатель преломления N для нейтральной части атмосферы с высокой степенью точности можно считать независящим от длины волны в СВЧ-диапазоне [9]. Значения N , определяющие величины матричных элементов B_{NN} , вычислялись по формуле [9, 10]

$$N = (n - 1) 10^6 = K_1 \frac{P_d}{T} + K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} + K_4 \frac{P_c}{T}. \quad (9)$$

В (9) P_d , P_c и e — парциальные давления соответственно сухого воздуха (без углекислого газа), углекислого газа и водяного пара (в мБар), T — абсолютная температура (К), $K_1 = 77,607 \text{ К/мБар}$, $K_2 = 71,6 \text{ К/мБар}$, $K_3 = 3,747 \cdot 10^5 \text{ К}^2/\text{мБар}$, $K_4 = 129,34 \text{ К/мБар}$.

Коэффициент поглощения радиоволн γ в СВЧ-диапазоне характеризуется существенной спектральной зависимостью [11, 12]. Для безоблачной атмосферы и вне узких резонансов поглощения сухих примесных газов атмосферы (CO , N_2O , NO , NO_2 , O_3 и т. д.)*

$$\gamma = \gamma_{o_s} + \gamma_{v.p.} \quad (10)$$

В (10) γ_{o_s} и $\gamma_{v.p.}$ — соответственно коэффициенты поглощения молекулярного кислорода и водяного пара. Расчеты γ в (8), (10) выполнялись по формулам работ [14, 15] с поправками на ширины спектральных линий O_2 [16] и на экспериментальное превышение значений $\gamma_{v.p.}$ вне резонансов поглощения H_2O [12, 17] на тех же высотных уровнях h_K , что и расчеты N . Значения B_{NN} в данной работе вычислялись на характеристических длинах волн λ , принадлежащих как окнам прозрачности земной атмосферы ($\lambda = 10 \text{ см}, 3 \text{ см}, 8 \text{ мм}, 3,3 \text{ мм}, 1,5 \text{ мм}$), так и резонансным областям поглощения H_2O ($\lambda = 1,35 \text{ см}, 1,3 \text{ см}, 1,67 \text{ мм}, 1,63 \text{ мм}$) и O_2 ($\lambda = 5,62 \text{ мм}, 5 \text{ мм}, 2,53 \text{ мм}$).

Ниже собственные векторы и собственные числа корреляционной матрицы показателя преломления B_{NN} обозначаются соответственно через Ψ_K и μ_K , а аналогичные характеристики матриц коэффициентов поглощения — через $\varphi_K(\lambda)$ и $\nu_K(\lambda)$.

2. Значения Ψ_K , $\varphi_K(\lambda)$, μ_K , $\nu_K(\lambda)$ вычислялись на ЭВМ БЭСМ-6 циклическим методом Якоби с преградами [18]. Как известно, в целом метод Якоби позволяет выполнить с определенной точностью преобразование исходной матрицы B_{ff} к диагональной матрице $B_{ff}^{(D)}$:

$$B_{ff} \rightarrow B_{ff}^{(D)} = V^T B_{ff} V .. \quad (11)$$

В (11) V — ортогональная матрица, \tilde{T} — знак транспонирования матрицы, $B_{ff}^{(D)}$ — предел, к которому стремится последовательность матриц $B_{ff}^{(i)}$ при количестве преобразований $j \rightarrow \infty$, а V — произведение всех промежуточных матриц плоских вращений, используемых для диагонализации исходной матрицы, т. е. если для отдельного преобразования

$$B_{ff}^{(i)} \rightarrow B_{ff}^{(i+1)} = U_i^T B_{ff}^{(i)} U_i , \quad (12)$$

то

$$V = U_0 U_1 U_2 \dots , \quad (13)$$

$U_j = U_{kl}$ — элементарная матрица вращения, аннулирующая (K, l) внедиагональный элемент матрицы $B_{ff}^{(i)}$.

На рис. 1 приведены примеры пяти первых собственных векторов

Рис. 1. Пять первых собственных векторов Ψ_K матрицы B_{NN} для континентального района (лето): 1— Ψ_1 ; 2— Ψ_2 ; 3— Ψ_3 ; 4— Ψ_4 ; 5— Ψ_5 .

* В нижних слоях ($h \lesssim 10 \text{ км}$) сухие примесные газы атмосферы практически не влияют на значения суммарного молекулярного поглощения [13].

$\Psi_K(h)$ для летнего периода года в ЕТ СССР, а в табл. 1 даны собственные значения μ_K матрицы B_{NN} и величины относительных суммарных дисперсий.

Таблица 1

Собственные значения μ_K , след $(\sum_{K=1}^{18} \mu_K)$ матрицы $B_{NN}(h_K, h_l)$
и величины относительных суммарных дисперсий $\sum_{K=1}^K \mu_K / \sum_{K=1}^{18} \mu_K, \%$

K	ЕТ СССР, июль (день)	
	μ_K	$\sum_{K=1}^K \mu_K / \sum_{K=1}^{18} \mu_K, \%$
1	630,6	71,8
2	116,1	85,0
3	60,1	91,8
4	21,0	94,2
5	14,9	95,9
6	11,0	97,2
7	6,8	98,0
8	5,4	98,6
9	3,9	99,0
10	2,5	99,3
11	1,7	99,5
12	1,5	99,7
13	1,1	99,8
14	0,8	99,9
15	0,6	99,9
16	0,3	99,9
17	0,1	99,9
18	0,44	100,0
$\sum_{K=1}^{18} \mu_K$	878,44	

На рис. 2—4 приведены примеры трех первых собственных векторов $\varphi_K(\lambda, h)$, а в табл. 2 — собственные значения $\nu_K(\lambda)$ матрицы B_{11} на ряде длин волн для тех же метеорологических условий.

3. В работах, посвященных ортогональным функциям метеорологических элементов, обычно отмечаются особенности получаемых систем. Мы также остановимся на некоторых особенностях значений μ_K и $\nu_K(\lambda)$, на поведении векторов $\Psi_K(h)$, $\varphi_K(\lambda, h)$ и сопоставим их с соответствующими величинами для метеоэлементов.

Во-первых, отметим, что матрицы B_{NN} и B_{11} содержат, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные элементы. Поэтому, хотя вектор $\Psi_1(h)$ и первые векторы матрицы B_{11} для большинства из рассмотренных длин волн ($\lambda = 1,35 \text{ см}, 1,3 \text{ см}, 8 \text{ мм}, 5,62 \text{ мм}, 3,3 \text{ мм}, 1,67 \text{ мм}, 1,63 \text{ мм}, 1,5 \text{ мм}$) не имеют нулей, указанное обстоятельство не является обязательным, ибо теорема Перрона о положительности первых собственных векторов справедлива, как известно, только для неотрицательных матриц [19]. Векторы $\varphi_1(\lambda = 10 \text{ см}), \varphi_1(\lambda = 5 \text{ мм}), \varphi_1(\lambda = 2,53 \text{ мм})$ имеют по одному нулю, а вектор $\varphi_1(\lambda = 3 \text{ см})$ обладает двумя нулями.

Векторы $\Psi_1(h), \varphi_1(\lambda, h)$ имеют максимальные значения вблизи поверхности Земли, где значения показателя преломления и коэффи-

циентов поглощения максимальны и реализуются, как правило, также максимумы среднеквадратичных отклонений $\sigma_N(h)$, $\sigma_\gamma(h)$ [8]. Нули и минимальные значения (при отсутствии нулей) первых векторов имеют место, в основном, на тех же высотах, на которых близки к нулю ($|r| \leq 0,05 \div 0,1$) коэффициенты корреляции между отклонениями соответствующих величин на данном уровне и на приземных уровнях.

На основании изложенного и по аналогии с поведением собственных векторов метеоэлементов [3] можно утверждать, что с физической точки зрения отмеченный ход $\Psi_1(h)$ и $\varphi_1(\lambda, h)$ означает описание первыми собственными векторами наиболее часто встречающейся высотной зависимости отклонений показателя преломления и коэффициентов поглощения от средних профилей $N(h)$, $\gamma(\lambda, h)$. Определение первым собственным вектором основного хода температуры $T(h)$ и удельной влажности $q(h)$ [3], а также показателя преломления $N(h)$ и коэффициентов поглощения $\gamma(\lambda, h)$ (см. выше) обеспечивает возможность оптимальной аппроксимации соответствующих зависимостей [1].

Векторы $\Psi_K(h)$, $\varphi_K(\lambda, h)$ при $K > 1$ учитывают детали зависимостей $N(h)$ и $\gamma(\lambda, h)$ более высоких порядков. Они более изменчивы по высоте и обладают большим количеством нулей: Ψ_2 имеет 2 нуля, Ψ_3 и Ψ_4 — по 3 нуля, Ψ_5 — 4 нуля; φ_2 имеет 2 нуля, у φ_3 — 2—4 нуля, у φ_4 — 3—6 нулей и т. д. Следует, однако, считаться с тем обстоятельством, что, подобно всем собственным векторам, полученным по ограниченным выборкам отклонений (см. [4]), векторы $\Psi_K(h)$ и $\varphi_K(\lambda, h)$ также отягощены случайными ошибками, отражающими погрешности выборок, и с увеличением номера K гармоник ошибки в собственных векторах могут стать преобладающими по сравнению с реальной информацией о деталях векторов $N(h)$, $\gamma(\lambda, h)$.

Из табл. 1, 2 видно, что пять первых собственных векторов $\Psi_K(h)$ обеспечивают аппроксимацию $N(h)$ с относительной среднеквадратичной ошибкой около 4%. Такую же относительную среднеквадратичную ошибку дают три первых собственных вектора $\varphi_K(\lambda, h)$ для $\gamma(h)$ на длинах волн, принадлежащих окнам прозрачности атмосферы ($\lambda = 3 \text{ см}, 8 \text{ мм}, 3,3 \text{ мм}, 1,5 \text{ мм}$). Вблизи резонансов молекулярного поглощения аналогичная относительная среднеквадратичная ошибка достигается при учете в аппроксимации несколько большего количества собственных векторов $\varphi_K(\lambda, h)$: четырех — вблизи резонансов H_2O $\lambda 1,35 \text{ см}, \lambda 1,63 \text{ мм}$ и $5 \div 6$ векторов — в резонансах $\text{O}_2 \lambda 5 \text{ м.м.}, \lambda 2,53 \text{ м.м.}$

На рис. 2, 3 видно, что первые два вектора $\varphi_K(\lambda, h)$ ($K = 1, 2$) являются весьма подобными для различных длин волн. Это обстоятельство свидетельствует об определенной статистической устойчивости соответствующих гармоник коэффициентов поглощения по спектру, хотя на рассматриваемых длинах волн роль различных поглощающих факторов ($\text{O}_2, \text{H}_2\text{O}$) и различных механизмов поглощения (резонансное и нерезонансное поглощение O_2) является неодинаковой. Третий собственный вектор $\varphi_3(\lambda, h)$ уже более заметно отличается на ряде длин волн (см. рис. 4), но в качественном отношении их высотная зависимость остается еще похожей. В окнах прозрачности атмосферы мало отличаются между собой векторы и более высоких порядков ($K \leq 5$).

Один из дискуссионных вопросов в описании молекулярного поглощения водяного пара, в настоящее время состоит в наличии или отсутствии нелинейного (по абсолютной влажности) поглощения [20—26], которое в ряде работ [20, 23, 25] отождествляется с поглощением димерными молекулами (H_2O)₂. При наличии нелинейного поглощения оно наи-

Первые 10 собственных значений $v_K(\lambda) \left[\frac{\partial E}{K \cdot m} \right]$, следы $\left(\sum_{K=1}^{18} v_K(\lambda), \frac{\partial E}{K \cdot m} \right)$
длинах волн

K	$\lambda = 3 \text{ см}$		$\lambda = 1,35 \text{ см}$		$\lambda = 8 \text{ мм}$		$\lambda = 5,62 \text{ мм}$	
	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$
1	$0,92 \cdot 10^{-5}$	80,6	$0,23 \cdot 10^{-1}$	80,8	$0,67 \cdot 10^{-3}$	82,0	$0,19 \cdot 10^{-2}$	57,1
2	$0,12 \cdot 10^{-5}$	91,2	$0,25 \cdot 10^{-2}$	89,7	$0,80 \cdot 10^{-4}$	91,8	$0,82 \cdot 10^{-3}$	81,8
3	$0,56 \cdot 10^{-6}$	96,1	$0,15 \cdot 10^{-2}$	95,0	$0,37 \cdot 10^{-4}$	96,4	$0,25 \cdot 10^{-3}$	89,4
4	$0,19 \cdot 10^{-6}$	97,8	$0,51 \cdot 10^{-3}$	96,8	$0,13 \cdot 10^{-4}$	98,0	$0,16 \cdot 10^{-3}$	94,1
5	$0,76 \cdot 10^{-7}$	98,5	$0,37 \cdot 10^{-3}$	98,1	$0,53 \cdot 10^{-5}$	98,6	$0,59 \cdot 10^{-4}$	95,9
6	$0,64 \cdot 10^{-7}$	99,0	$0,17 \cdot 10^{-3}$	98,7	$0,42 \cdot 10^{-5}$	99,1	$0,43 \cdot 10^{-4}$	97,2
7	$0,34 \cdot 10^{-7}$	99,3	$0,13 \cdot 10^{-3}$	99,1	$0,24 \cdot 10^{-5}$	99,4	$0,34 \cdot 10^{-4}$	98,2
8	$0,27 \cdot 10^{-7}$	99,6	$0,80 \cdot 10^{-4}$	99,4	$0,20 \cdot 10^{-5}$	99,7	$0,24 \cdot 10^{-4}$	98,9
9	$0,19 \cdot 10^{-7}$	99,7	$0,58 \cdot 10^{-4}$	99,6	$0,14 \cdot 10^{-5}$	99,8	$0,12 \cdot 10^{-4}$	99,3
10	$0,92 \cdot 10^{-8}$	99,8	$0,46 \cdot 10^{-4}$	99,8	$0,56 \cdot 10^{-6}$	99,9	$0,75 \cdot 10^{-5}$	99,6
$\sum_{K=1}^{18} v_K (\lambda)$		$1,14 \cdot 10^{-6}$		$0,28 \cdot 10^{-1}$		$0,82 \cdot 10^{-3}$		$0,33 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

матриц $B_{\text{rr}}(h_K, h_l)$ и величины относительных суммарных дисперсий $\sum_{K=1}^K v_K(\lambda) / \sum_{K=1}^{18} v_K(\lambda), \%$ на характерных радиодиапазона для летних условий года ЕТ СССР

$\lambda = 5 \text{ мм}$		$\lambda = 3,3 \text{ мм}$		$\lambda = 2,53 \text{ мм}$		$\lambda = 1,67 \text{ мм}$		$\lambda = 1,63 \text{ мм}$		$\lambda = 1,5 \text{ мм}$	
v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$	v_K	$\sum_{K=1}^K v_K / \sum_{K=1}^{18} v_K$
2,49	77,6	$0,19 \cdot 10^{-1}$	83,2	0,24	57,0	61,5	82,2	445,8	78,4	1,54	83,7
0,27	85,9	$0,20 \cdot 10^{-2}$	92,3	$0,74 \cdot 10^{-1}$	74,6	6,9	91,4	55,8	88,2	0,16	92,5
0,15	90,6	$0,94 \cdot 10^{-3}$	96,5	$0,40 \cdot 10^{-1}$	84,0	3,5	96,1	34,4	94,3	$0,75 \cdot 10^{-1}$	96,5
$0,86 \cdot 10^{-1}$	93,3	$0,34 \cdot 10^{-3}$	98,0	$0,24 \cdot 10^{-1}$	89,7	1,2	97,7	12,6	96,5	$0,28 \cdot 10^{-1}$	98,1
$0,60 \cdot 10^{-1}$	95,1	$0,14 \cdot 10^{-3}$	98,7	$0,19 \cdot 10^{-1}$	94,2	0,6	98,5	7,4	97,8	$0,12 \cdot 10^{-1}$	98,7
$0,47 \cdot 10^{-1}$	96,6	$0,11 \cdot 10^{-3}$	99,2	$0,91 \cdot 10^{-2}$	96,3	0,4	99,0	4,0	98,5	$0,88 \cdot 10^{-2}$	99,2
$0,34 \cdot 10^{-1}$	97,7	$0,66 \cdot 10^{-4}$	99,5	$0,71 \cdot 10^{-2}$	98,0	0,3	99,4	2,6	99,0	$0,54 \cdot 10^{-2}$	99,5
$0,22 \cdot 10^{-1}$	98,4	$0,54 \cdot 10^{-4}$	99,7	$0,27 \cdot 10^{-2}$	98,6	0,2	99,6	1,7	99,3	$0,44 \cdot 10^{-2}$	99,7
$0,15 \cdot 10^{-1}$	98,8	$0,38 \cdot 10^{-4}$	99,9	$0,18 \cdot 10^{-2}$	99,1	0,1	99,8	1,5	99,5	$0,31 \cdot 10^{-2}$	99,9
$0,11 \cdot 10^{-1}$	99,2	$0,15 \cdot 10^{-4}$	99,9	$0,99 \cdot 10^{-3}$	99,3	$0,6 \cdot 10^{-1}$	99,9	0,9	99,7	$0,12 \cdot 10^{-2}$	99,9
3,21		$0,22 \cdot 10^{-1}$		0,42		74,8		568,6		1,84	

более существенно вне спектральных линий атмосферных газов, приходящихся на СВЧ-диапазон, т. е. в «окнах прозрачности» атмосферы*.

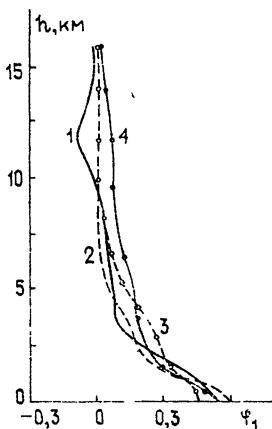


Рис. 2.

Рис. 2. Первые собственные векторы φ_1 матрицы B_{11} для континентального района (лето):

1— $\lambda = 10 \text{ см}$; 2— $\lambda = 3 \text{ см}$; 3— $\lambda = 1,35 \text{ см}$; 4— $\lambda = 5,62 \text{ мм}$.

Рис. 3. Вторые собственные векторы φ_2 матрицы B_{11} для континентального района (лето):

1— $\lambda = 10 \text{ см}$; 2— $\lambda = 3 \text{ см}$; 3— $\lambda = 1,35 \text{ см}$; 4— $\lambda = 5,62 \text{ мм}$.

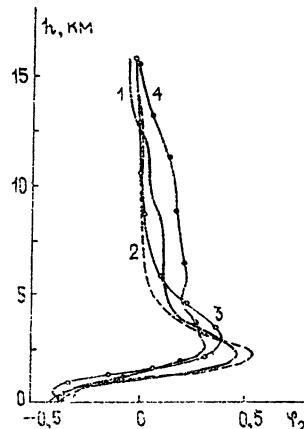


Рис. 3.

Учет нелинейного поглощения $\gamma_{\text{нл}}$ водяного пара мало влияет ($\sim 1\text{--}3\%$) даже в окнах прозрачности атмосферы (например, при $\lambda = 3,3 \text{ мм}, 8 \text{ мм}$) на величины первых двух собственных векторов φ вблизи поверхности Земли, на высотах $h \geq 10 \text{ км}$, где компоненты этих векторов становятся близкими к нулю, соответствующая разность увеличивается до ~ 2 и более раз. Однако собственные векторы $\varphi_K(\lambda, h)$ более высоких порядков (5-го и выше) существенно различаются между собой на указанных длинах волн и в нижних слоях атмосферы при учете $\gamma_{\text{нл}}$. Но более важно, по-видимому, отметить то обстоятельство, что при наличии нелинейной части поглощения водяного пара собственные значения ν_K и следы матриц $\sum_K \nu_K$ увеличиваются от 1,5 до 4 раз для длин волн, принадлежащих окнам прозрачности.

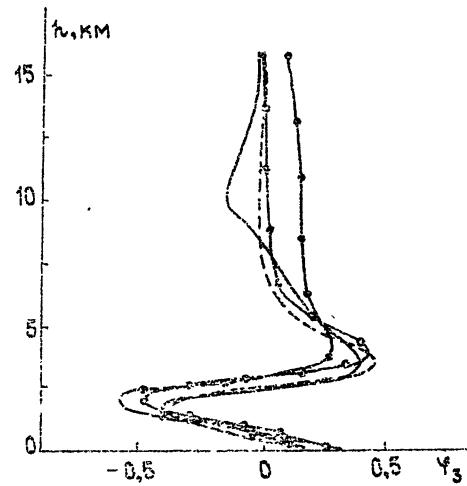


Рис. 4. Третии собственные векторы φ_3 матрицы B_{11} для континентального района (лето). Обозначения кривых те же, что на рис. 2, 3.

* Влияние нелинейного механизма поглощения водяного пара на значения показателя преломления атмосферыпренебрежимо мало [20].

Рост дисперсии коэффициентов разложения (3) свидетельствует о росте вариаций $\gamma(h_K)$ на рассматриваемых длинах волн при $\gamma_{\text{нл}} \neq 0$. В физическом аспекте такое возрастание вариаций $\gamma(h_K)$ объясняется более сильной зависимостью нелинейной части коэффициента поглощения водяного пара от метеопараметров атмосферы (от влажности и температуры). Аналогичное влияние в статистическом плане $\gamma_{\text{нл}}$ на вариации интегральных радиохарактеристик (оптических толщин, яркостных температур) в окнах прозрачности атмосферы рассматривалось в [27]. В табл. 2 приведены собственные векторы $\varphi_K(\lambda, h)$ и следы матриц B_{rr} для случая $\gamma_{\text{нл}} = 0$.

Ситуация, подобная описанной, имеет место также для собственных значений и собственных векторов некоторых матриц B_{rr} в зимних условиях года. Данная ситуация характерна для тех длин волн ($\lambda \sim 5 \text{ мм}$; $2,53 \text{ мм}$), где поглощение определяется вкладом молекулярного кислорода, которое, в свою очередь, существенно зависит от температуры атмосферы. Зимой средние квадратичные отклонения температуры $\sigma_T(h)$ превышают соответствующие значения для летнего периода года, и это приводит к увеличению вариаций γ на упомянутых длинах волн. Отмеченное обстоятельство сопровождается и возрастанием собственных значений $v_K(\lambda)$.

Средние квадратичные отклонения удельной влажности $\sigma_q(h)$ в зимний период года меньше величин σ_q для лета, и вариации γ в резонансных областях поглощения H_2O ($\lambda \sim 1,35 \text{ см}$; $1,64 \text{ мм}$) и в окнах прозрачности атмосферы, в которых поглощение существенно определяется водяным паром, в летний период превышают вариации γ для зимы. Для указанных длин волн значения $v_K(\lambda)$ больше именно в летний период года. Что касается общего хода собственных векторов $\Psi_K(h)$ и $\varphi_K(\lambda, h)$, то он подобен для различных сезонов, и это согласуется с сезонным поведением собственных векторов основных метеоэлементов ($T(h)$, $q(h)$) [4].

В [3, 4] показано, что собственные векторы метеоэлементов являются статистически универсальными и мало отличаются для диаметрально противоположных ситуаций (суша—океан, зима—лето). Поскольку коэффициенты поглощения и преломления в СВЧ-диапазоне существенно определяются метеопараметрами атмосферы, то отмеченная в [3, 4] универсальность собственных векторов B_{tt} и B_{qq} может привести и к статистической универсальности векторов матриц B_{NN} и B_{rr} . Поэтому целесообразно дополнительно исследовать разложение произвольно выбранных профилей $N(h)$ и $\gamma(\lambda, h)$ по своей и «чужой» базисным системам собственных векторов $\Psi_K(h)$, $\varphi_K(\lambda, h)$ (как для различных сезонов, географических широт, так и для различных длин волн — последнее относится к коэффициентам поглощения).

Если гипотеза о статистической универсальности собственных векторов подтвердится, то построение статистической радиометеорологической модели атмосферы можно проводить с помощью собственных векторов корреляционных матриц, осредненных по временам года, широтным зонам и группам длин волн (окна прозрачности, полосы поглощения O_2 , H_2O и т. п.).

Удобство аппроксимации (3) связано с возможностью использования небольшого количества (3—5) членов разложения при достаточной точности расчетов коэффициентов поглощения и преломления радиоволн. Заметим, что процедура суммирования в разложении (3) не усложняет расчетов, поскольку в квантовомеханических формулах (например, для коэффициентов молекулярного поглощения) тоже выполняется суммирование по квантовым переходам, при этом обычно учитывается достаточно большое количество переходов (для молекуляр-

ного кислорода их число составляет ~ 50). Разложения коэффициентов поглощения и преломления по оптимальным ортогональным системам функций могут найти практическое применение при решении задач прогнозирования условий распространения радиоволн в атмосфере.

Авторы признательны М. Б. Зиничевой за выполненные расчеты на ЭВМ корреляционных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А М Обухов, Изв АН СССР, серия геофизическая, № 3, 432 (1960).
- 2 Л В Руховец, Изв АН СССР, серия геофизическая, № 4, 626 (1963).
- 3 Л. И. Копрова, М. С. Малкевич, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 1, № 1, 27 (1965).
- 4 М С Малкевич, Оптические исследования атмосферы со спутников, изд. Наука, М., 1973.
- 5 В И Татарский, Т Н Харитонова, Изв АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 10, № 9, 996 (1974).
- 6 Т. Н. Харитонова, Изв АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 10, № 11, 1208 (1974).
7. Н А Василенко, Т Н Харитонова, Астрометрия и астрофизика, вып 31, 38 (1977).
- 8 А П Наумов, Изв АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 15, № 2 (1979).
- 9 С А Жевакин, А П. Наумов, Радиотехника и электроника, 12, № 6, 955 (1967), 12, № 7, 1147 (1967).
- 10 Б. Р Бин, Е Дж Даттон, Радиометеорология, Гидрометеоиздат, Л., 1971.
11. J. H Van Vleck, Phys. Rev., 71, № 7, 413 (1947), 71, № 7, 425 (1947).
- 12 С. А. Жевакин, А П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
- 13 А П Наумов, Изв вузов — Радиофизика, 15, № 5, 682 (1972).
- 14 С. А. Жевакин, А П. Наумов, Изв. вузов — Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
- 15 С. А. Жевакин, А П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
- 16 Е. Е Rebeg, J. Geophys Res., 77, № 21, 3831 (1972).
- 17 А. В. Соколов, сб. Радиотехника, 5, изд. ВИНИТИ АН СССР, М., 1974, стр. 5.
- 18 Дж. Уилкинсон, С Райпш, Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ, Линейная алгебра, изд. Машиностроение, М., 1976, стр 182
- 19 Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953, стр. 323
20. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, ДАН СССР, 171, № 5, 1061 (1966).
- 21 L Frenkel, J Molec Sprectroscopy, 26, № 2, 227 (1968).
- 22 Л. И. Несмелова, С. Д. Творогов, В. В. Фомин, Спектроскопия крыльев линий, изд. Наука, Новосибирск, 1977.
- 23 В Я Рядов, Н И Фуршов, Изв вузов — Радиофизика, 11, № 8, 1138 (1968).
24. В Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Изв вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1308 (1976).
- 25 Л М Кукин, Ю Н Ноздрин, В. Я. Рядов, Л. И. Федосеев, Н. И. Фуршов, Радиотехника и электроника, 20, № 10, 2017 (1975).
26. H. A. Gebbie, Second international conference and winter school on submillimeter waves and their applications, San Juan, Puerto Rico, December, 6—II, 1976.
- 27 В. П. Борин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 24, № 1 (1979).
28. М С Малкевич, Ю. С. Георгиевский, А И Чавро, А. Х. Шукров, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 13, № 12, 1257 (1977)
29. А И Чавро, Ю. С Георгиевский, М С Малкевич, А. Х. Шукров, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 14, № 2, 157 (1978).

Вычислительный центр СО АН СССР,
Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
29 декабря 1977 г.

THE EXAMPLES OF OPTIMAL ORTHOGONAL SYSTEMS OF THE FUNCTIONS FOR ABSORPTION AND REFRACTIVE INDEXES IN MICROWAVE REGION

V. I. Drobyshevich, A. P. Naumov

The systems of orthogonal vectors are determined. They provide the optimal (from the statistical point of view) approximation of vertical distributions of the molecular absorption coefficient at the characteristic wavelengths of the microwave region belonging to the atmospheric windows and resonance absorption of O₂ and H₂O as well as the refractive index of the atmosphere at $\lambda \geq 1$ mm. Some properties of orthogonal vectors have been analysed.

УДК 621.371.4 : 551.463 7

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РСА ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ

A. B. Иванов

Рассматриваются ограничения на азимутальную разрешающую способность радиолокационной станции бокового обзора с синтезированной апертурой (РСА), связанные с подвижностью морской поверхности. Решение задачи основывается на двухмасштабной модели рассеяния радиоволн УКВ диапазона взволнованной поверхностью моря. Даются количественные оценки азимутального разрешения РСА в зависимости от параметров станции и волнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Длительное время считалось, что получить изображение морской поверхности с помощью радиолокационной станции бокового обзора с синтезированной апертурой (РСА) невозможно. Опубликованные в последние годы экспериментальные результаты [1-4] показывают ошибочность этого мнения. На приведенных в указанных работах изображениях отчетливо видны ветровые волны, корабельные волны, участки ветровой тени на поверхности моря и т. д. Однако, теоретически процесс синтеза изображения морской поверхности до сих пор почти не рассматривался.

В данной работе делается попытка найти ограничения, связанные с подвижностью поверхности, на азимутальную разрешающую способность РСА сантиметрового и короткого дециметрового диапазонов. При этом используется следующая методика: рассматривается процесс формирования изображения для случая малых (много меньших длины радиоволны λ) возмущений поверхности с использованием известных результатов, полученных для рассеянного такой слабо возмущенной поверхностью поля [5, 6]; затем окончательные выводы о разрешающей способности РСА делаются, исходя из двухмасштабной модели рассеяния радиоволн УКВ-диапазона взволнованной поверхностью моря [6, 7].

2. ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ

Особенности синтеза изображения подвижной поверхности в случае малых ее отклонений от среднего положения можно представить себе с помощью следующих простых рассуждений.

Любую реализацию неподвижной случайной поверхности можно представить в виде набора бесконечных синусоид, соответствующих некоторой спектральной плотности $\tilde{R}(K_x, K_y)$. Ось y здесь и далее предполагается направленной по курсу носителя РСА. Если каждая из этих синусоид движется со своей фазовой скоростью, соответствующей дисперсионному соотношению $\omega = \Omega(K_x, K_y)$, оставаясь при этом абсолютно регулярной, то такой поверхности будет соответствовать спектральная плотность

$$\tilde{R}(K_x, K_y) \delta [\omega - \Omega(K_x, K_y)]. \quad (1)$$

Реальным колебаниям поверхности жидкости будет отвечать некоторая трехмерная спектральная плотность, которую приближенно всегда можно записать в виде

$$\tilde{R}(K_x, K_y) f [\omega - \Omega(K_x, K_y), \gamma(K_x, K_y)], \quad (2)$$

где f — некоторая функция с максимумом в точке $\omega = \Omega$ и шириной γ . При $\gamma \rightarrow 0$ $f \rightarrow \delta(\omega - \Omega)$. Очевидно, что колебаниям поверхности со спектральной плотностью вида (2) можно сопоставить набор синусоид конечной длины — цугов волн со случайной независимой фазой, движущихся с фазовой скоростью $v_\phi(K_x, K_y)$ и существующих в среднем в течение времени $\tau_0 = \gamma^{-1}(K_x, K_y)$.

Рассмотрим рассеяние на поверхности в первом приближении метода малых возмущений. Тогда, если каждый цуг содержит хотя бы несколько периодов и ширина реальной диаграммы направленности антенны в азимутальной плоскости невелика, то можно учитывать только цуги с волновыми числами, лежащими в малой окрестности значений $K_x = 2k \cos \vartheta$, $K_y = 0$ ($k = 2\pi/\lambda$, ϑ — угол скольжения; $\vartheta < 60^\circ$); остальные практически не будут давать вклад в обратное рассеяние [5, 6]. Амплитуда поля, рассеянного каждым цугом, прямо пропорциональна амплитуде последнего и сложным образом зависит от ϑ . Частота отраженного к станции сигнала сдвигается на величину $\pm \Omega(2k \cos \vartheta, 0)$ (знак зависит от направления фазовой скорости цуга — к станции или от нее).

При равномерном движении носителя РСА зависимость частотного сдвига сигнала, отраженного от неподвижной сосредоточенной цели, от координаты y линейна, а систему обработки сигнала в РСА, как известно, можно рассматривать как пространственный фильтр, согласованный с ЛЧМ-сигналом [8]. Дополнительный постоянный сдвиг частоты ЛЧМ-сигнала приводит к сдвигу, в данном случае пространственному, сжатого сигнала [9], т. е. к смещению по y изображения цуга. Величина смещения составит $\frac{r}{V} v_\phi(2k \cos \vartheta, 0) \cos \vartheta$, где r — наклонная дальность до цели, V — скорость носителя.

Очевидно, когерентное накопление отраженных от данного цуга сигналов может происходить лишь до тех пор, пока существует этот цуг со своей постоянной или линейно-изменяющейся фазой. Соответственно, азимутальный размер изображения цуга будет определяться временем синтеза t_c при $t_c < \tau_0$ и временем τ_0 в обратном случае:

$$\Delta y \approx \frac{r}{V} \frac{\lambda}{\min\{t_c; \tau_0\}}$$

(относительно зависимости разрешения от времени синтеза см., например, [8]).

По всей видимости, величина τ_0 не меньше времени затухания колебаний с модулем волнового вектора, равным $2k \cos \vartheta$. Если предположить, что затухание волн определяется молекулярной вязкостью жидкости, то [10]

$$\gamma = \frac{2\mu K^2}{\rho},$$

где μ — динамическая молекулярная вязкость жидкости, ρ — ее плотность, и условие $t_c < \tau_0$ выполняется с большим запасом для реальных

систем сантиметрового и короткого дециметрового диапазонов с параметром $r/V \sim 100$ с (этим значением характеризуются РЛС, предназначенные для работы на ИСЗ со средней орбитой). В случае реального ветрового волнения верхний слой моря турбулизован, и величина τ_0 может меняться, однако по-прежнему будем предполагать, что ухудшения разрешения за счет конечного времени «когерентности» резонансной составляющей ряби не происходит.

Итак, мы получаем изображение каждого цуга с разрешением

$$\Delta y_0 = \frac{r}{V} \frac{\lambda}{t_c}$$

и сдвинутым по y на $\frac{r}{V} v_\phi (2k \cos \vartheta, 0) \cos \vartheta$. Эксперимент показывает [1], что поверхностные колебания с длиной волны порядка 10 см уже при скорости ветра около 1 м/с и более, т. е. практически всегда, изотропны. Следовательно, интенсивность цугов, движущихся к станции и от нее, в среднем одинакова, и вместо каждого из участков поверхности с различной амплитудой ряби (масляные пятна, ветровые тени) мы получим два изображения, сдвинутых по y на $\frac{r}{V} |v_\phi| \cos \vartheta$ в различные стороны от истинного положения.

Таким образом, возможно раздвоение изображения поверхности. Проявление эффекта раздвоения можно наблюдать при выполнении следующих условий:

$\Delta y' < \frac{r}{V} |v_\phi| \cos \vartheta$, где $\Delta y'$ — разрешение станции, обусловленное

эффектами крупных волн (см. ниже) и собственными нестабильностями станции (Δy_0);

размер наблюдаемого объекта меньше величины $\frac{r}{V} |v_\phi| \cos \vartheta$.

Если добавить к этому, что величина $\frac{r}{V} |v_\phi| \cos \vartheta$ в самых лучших (и достаточно редких) ситуациях может превосходить $\Delta y'$ лишь в несколько раз, то становится понятным, что практически главным эффектом следует считать ухудшение разрешения, которое составит

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= 2 \frac{r}{V} |v_\phi (2k \cos \vartheta, 0)| \cos \vartheta = \\ &= \frac{r \cos \vartheta}{V} \sqrt{\frac{2g}{k \cos \vartheta} \left(1 + \frac{4\alpha k^2 \cos^2 \vartheta}{\rho g} \right)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Зависимость $\Delta y_1 \frac{V}{r \cos \vartheta}$ от $\lambda / \cos \vartheta$ приведена на рис. 1 (кривая 1). Ухудшение разрешения будет минимальным при $\lambda / \cos \vartheta = 3,4$ см и составит 45 м при $\frac{r \cos \vartheta}{V} = 100$ с.

Анизотропия пространственной спектральной плотности волнения быстро усиливается с увеличением длины волны [11, 12]. Благодаря этому при λ порядка нескольких метров раздвоение будет фактически отсутствовать, если только направление ветра не очень близко к линии полета.

Более строгий вывод результатов данного раздела приведен в Приложении.

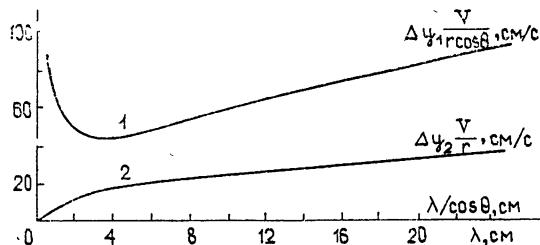


Рис. 1.

3. ВЛИЯНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОГО ВОЛНЕНИЯ

Как показано в работе [7], спектр реального волнения можно разбить на две части так, что будут выполняться условия: среднеквадратичное значение высоты точек поверхности много меньше λ и среднеквадратичное значение углов наклона поверхности много меньше единицы в высокочастотной части; среднеквадратичное значение радиуса кривизны поверхности много больше λ в низкочастотной части. Частота разбиения, естественно, зависит от λ . Это значит, что рассеяние на поверхности можно рассчитать в первом приближении методом малых возмущений, взяв в качестве нулевого приближения поле, рассеянное на поверхности, соответствующей низкочастотной части спектра волнения, которое, в свою очередь, можно найти методом касательных плоскостей. Иначе говоря, можно считать, что крупное низкочастотное волнение влияет на обратное рассеяние через медленную модуляцию параметров, определяющих рассеяние на мелкой шероховатости (θ , амплитуда ряби и др.).

В соответствии с этим можно предположить, что результаты, полученные в предыдущем разделе, останутся справедливыми для изображений участков морской поверхности с размерами порядка длины наиболее короткой волны в низкочастотной части спектра волнения. Более крупные волны будут менять от участка к участку интенсивность резонансной составляющей ряби и локальный угол скольжения, под которым данный участок виден со станции, благодаря чему крупные волны становятся видимыми для любой РЛС бокового обзора. Здесь будет рассматриваться другой вид их воздействия на рябь: изменение фазовой скорости рассеивающих цугов относительно станции орбитальным движением в крупных волнах.

В РСА изображение равномерно движущейся точки сдвигается по y на величину $\frac{r}{V} u$, где u — проекция скорости точки на направление к станции. Величина u зависит от координат $u = u(x, y)$. Зависимость u от y приводит к искажению изображения (см. [3]): размеры объекта или ширина границы могут стать в изображении как больше, так и меньше истинных. Зависимость u от x приводит к иным результатам. Азимутальное смещение изображения, например, прямолинейной границы какого-либо объекта, направленной перпендикулярно курсу носителя, будет различным для различных x , и вследствие усреднения по x в пределах элемента разрешения по дальности произойдет размытие изображения границы по азимуту (помимо искажения ее формы благодаря изменению смещения от элемента к элементу). Величина раз-

мытия в среднем будет равна $\Delta y_2 = \frac{r}{V} \Delta u_c$, где Δu_c — среднеквадратичное значение скоростей точек в элементе разрешения по дальности относительно точки, лежащей в центре этого элемента, причем усреднение должно производиться по реализациям поверхности и по дальности.

Предположим, что значения u распределены по нормальному закону с дисперсией σ_u и нормированной функцией корреляции $R_u(x)$. Тогда дисперсия разности скоростей точек, расположенных на расстоянии x друг от друга, в среднем по реализациям равна

$$\sigma_{\Delta u}^2 = 2\sigma_u^2 [1 - R_u(x)] \quad (4)$$

и в среднем по x в пределах элемента разрешения по дальности Δx_0

$$\Delta u_c^2 = \frac{1}{\Delta x_0} \int_{-\Delta x_0/2}^{\Delta x_0/2} \sigma_{\Delta u}^2(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_u(K) \left[1 - \operatorname{sinc} \frac{K \Delta x_0}{2} \right] dK, \quad (5)$$

где $\tilde{R}_u(K)$ — спектральная плотность процесса; $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$.

Предположим, что волнение цилиндрично: высоты точек поверхности не зависят от y . Мгновенные вертикальные скорости точек равны производной высоты по времени, и им соответствует временная спектральная плотность $\omega^2 S(\omega)$, где $S(\omega)$ — спектральная плотность значений высоты точки поверхности при фиксированном x . Будем считать, что проекциям скорости «плавающих» на поверхности точек на любое направление, лежащее в плоскости орбитального движения, соответствует та же спектральная плотность $\omega^2 S(\omega)$. Тогда, опять же в силу предполагаемой цилиндричности крупномасштабного волнения,

$$\tilde{R}_u(K) = \omega^2 S(\omega) \left. \frac{d\omega}{dK} \right|_{\omega=\omega(K)}.$$

Здесь и далее мы будем использовать для $S(\omega)$ выражение вида спектра Филлипса:

$$S(\omega) = \begin{cases} b g^2 \omega^{-5} & (\omega > \omega_0) \\ 0 & (0 < \omega < \omega_0) \end{cases}, \quad (6)$$

а ω_0 будем считать равной частоте максимума спектра Пирсона—Московитца, для которой принята зависимость от силы ветра W вида [12]

$$\omega_0 = CgW^{-1}, \quad C \approx 0.88, \quad b \approx 4.1 \cdot 10^{-3}.$$

Спектр в (6) считается четным и определенным для ω от $-\infty$ до $+\infty$. В итоге $\tilde{R}_u(K) = \frac{1}{2} b g K^{-2}$ при $|K| > K_0$, $K_0 = C^2 g W^{-2}$,

$$\Delta u_c = b g \Delta x_0 \int_{K_0 \Delta x_0 / 2}^{\infty} (1 - \operatorname{sinc} x) \frac{dx}{x^2}. \quad (7)$$

Приблизительный вид зависимости $\Delta y_2 = \frac{V}{r} \Delta u_c$ от W для нескольких значений Δx_0 приведен на рис. 2. В предельных случаях

$$\Delta u_c \approx \left(\frac{2b}{C^2} \right)^{1/2} W \quad \text{при } W \rightarrow 0 \text{ или } \Delta x_0 \rightarrow \infty,$$

$$\Delta u_c \approx \frac{1}{2} (\pi b g \Delta x_0)^{1/2} \quad \text{при } W \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad \Delta x_0 \rightarrow 0.$$

4. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПОВЕРХНОСТИ

Каждый отдельный отражающий элемент рассматриваемой модели — резонансный волновой цуг — перемещается в пространстве сложным образом благодаря орбитальному движению в крупных волнах, и, следовательно, отраженный от него сигнал как функция координаты станции y_0 будет содержать не только линейную частотную модуляцию. Чтобы оценить связанные с этим ограничения на разрешающую способность, мы заменим реальный спектр крупных волн единственной синусоидальной цилиндрической волной с тем же значением среднего квадрата высоты точек поверхности, что и у реального волнения:

$$A = \sqrt{2}\sigma, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

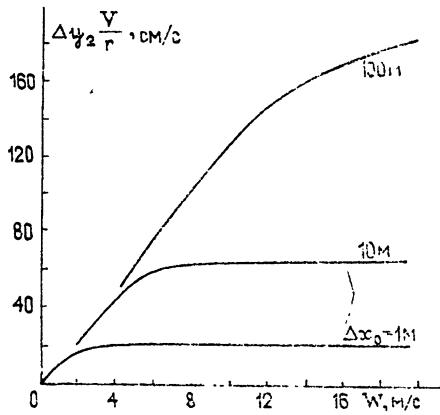


Рис. 2.

где A — амплитуда синусоиды. Предположим также, что волновое число ее $K = K_0$ ($\omega^2 = \omega_0^2 = K_0 g$). Тогда $A = ag\omega_0^{-2}$, где $a = \sqrt{b} \approx 6.3 \cdot 10^{-2}$. Если на поверхности описанной волны «лежит» точка, то эта точка движется по окружности (радиус A , период $2\pi/\omega_0$). При $v_\Phi \ll v$, где v_Φ — собственная скорость точки или фазовая скорость цуга, v — фазовая скорость крупной волны, собственное движение точки учитывается дополнительным линейным смещением в горизонтальной плоскости, которое в данном случае можно не учитывать. Если окружность лежит в плоскости (x, z) , то движение цуга в проекции на направление к станции будет описываться как

$$r_1 = A \cos \omega_0 t$$

независимо от угла ϑ .

Нелинейный набег фазы будет максимальным для цугов, лежащих в окрестности максимума или минимума косинуса. В этих точках в предположении $t_c < 2\pi/\omega_0$

$$r_1 \approx \pm A \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2} \right).$$

Нелинейный набег фазы практически не влияет на эффективность синтеза, если величина набега фазы на краях реальной диаграммы направленности антенны не превосходит $\pi/4$ относительно центра [8]:

$$2\pi \frac{\Delta r_1}{\lambda} < \frac{\pi}{4}, \quad (8)$$

где

$$\Delta r_1 \approx \frac{A \omega_0^2}{2} \left(\frac{t_c}{2} \right)^2.$$

Отсюда

$$t_c < \sqrt{\frac{\lambda}{ag}} \quad \text{или} \quad \Delta y_3 = \frac{r}{V} \frac{\lambda}{t_c} > \frac{r}{V} \sqrt{ag\lambda}. \quad (9)$$

Зависимость $\Delta y_3 \frac{V}{r}$ от λ приведена на рис. 1 (кривая 2). Очевидно, приведенные выше рассуждения будут справедливы, если амплитуда волнения достаточно велика:

$$2\pi \frac{A}{\lambda} > \frac{\pi}{4},$$

— в противном случае задача полностью решается в рамках метода малых возмущений. Воспользовавшись зависимостями $A(\omega_0)$ и $\omega_0(W)$, это условие можно записать для скорости ветра:

$$W > \sqrt{\frac{\lambda g}{8a}}, \quad (10)$$

что соответствует значениям $0,5 - 2 \text{ м/с}$ для $\lambda = 1 \div 20 \text{ см}$.

Легко также показать, что при выполнении условия (10) практически всегда автоматически выполняется условие $t_c < \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Оценки, представленные в этом разделе, являются весьма приближенными. Отметим, что хотя предположение о синусоидальности крупных волн очень грубо, существенным для нас были лишь круговое движение точки на поверхности и линейное соотношение между A и Λ — и то и другое справедливо и в рамках теории трохоидальных ветровых волн [13].

В разд. 3 и 4 предполагалось, что направление к станции лежит в плоскости орбитального движения в крупных волнах, т. е. полученные результаты соответствуют предельным значениям ухудшения разрешения, которые на практике будут реализоваться или в случае волнения с ярко выраженной цилиндричностью при полете вдоль фронта волн или при наблюдении под углами скольжения, приближающимися к $\pi/2$, независимо от угловой структуры волнения. Во всех остальных случаях необходим расчет, исходящий из конкретного вида двумерной (по x и y) спектральной плотности волнения и конкретного значения угла скольжения ϑ .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для оценки ухудшения разрешающей способности РСА мы разбили поверхность моря на элементарные отражатели — цуги резонансных брэгговских волн. Наличие у цугов постоянной фазовой скорости приводит к сдвигу изображения, а поскольку скорости различных цугов неодинаковы, происходит размытие результирующего изображения, носящее характер наложения множества смешенных друг относительно друга изображений. Причиной разброса цугов по скоростям являются изотропность колебаний поверхности (связанное с этим ухудшение разрешения обозначено Δy_1 , формула (3), рис. 1, кривая 1) и орбитальное движение в крупных волнах (Δy_2 , формула (7), рис. 2). Кроме того, орбитальное движение изменяет во времени скорость каждого отдельного отражателя и, тем самым, ограничивает допустимое время когерентного накопления отраженных от него сигналов. Это, в свою очередь, означает, что ограничен минимальный размер изображения отдельного отражателя (Δy_3 , формула (9), рис. 1, кривая 2). Результирующее разрешение будет равно

$$\Delta y \approx \max \{ \Delta y_0; \Delta y_3 \} + \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

где Δy_0 определяется ограничениями на время синтеза, присущими самой станции.

Все три фактора носят статистический характер. Ухудшение разрешения, связанное с каждым из них, может составлять от нескольких десятков до нескольких сотен метров в зависимости от длины радиоволны λ , скорости ветра W , разрешения по дальности Δx_0 и угла скольжения ϑ (при отношении наклонной дальности до цели к скорости носителя порядка 100 с).

Опубликованные к настоящему моменту экспериментальные данные, к сожалению, очень малочисленные, не противоречат полученным результатам.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. Е. Башаринову и А. А. Калинкевичу за обсуждения работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Входной сигнал станции при рассеянии от участка с координатами центра x_0, y_0 запишется как [6]

$$E(x_0, y_0) \sim \int_S e^{2ikr'} z(x, y, t) dx dy,$$

где r' — расстояние от станции с координатами $0, y_0$ до произвольной точки поверхности, $z(x, y, t)$ — форма поверхности.

Если диаграмма направленности антенны достаточно узка, то

$$r' \approx r + (x - x_0) \cos \vartheta + \frac{(y - y_0)^2}{2r},$$

где r — расстояние от станции до центра участка.

Для каждой строки первичного изображения по дальности $x_0 = \text{const}, y_0 = Vt$, где V — скорость носителя,

$$E(x_0, y_0) \sim \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0 - x) dx \int_{y_0 - Y_1/2}^{y_0 + Y_1/2} \exp \left\{ 2ikx \cos \vartheta + \frac{ik}{r} (y - y_0)^2 \right\} z(x, y, \frac{y_0}{V}) dy,$$

где $u(x)$ — аппаратная функция станции по дальности, Y_1 — размер освещенного участка по y .

Импульсная характеристика входного фильтра имеет вид

$$E_\phi(y_0) \sim \begin{cases} \exp \left\{ \frac{ik}{r} y_0^2 \right\} & (|y_0| < Y/2), \\ 0 & (|y_0| > Y/2) \end{cases}$$

причем обычно размеры когерентно обрабатываемого участка первичного изображения Y существенно меньше, чем Y_1 , и поэтому можно положить $Y_1 = \infty$ — это скажется лишь на далеких боковых лепестках аппаратной функции по y .

Отсюда легко получить [8], что разрешение или ширина аппаратной функции по нулям для неподвижной цели или поверхности

$$\Delta y_0 = \frac{\lambda r}{Y} = \frac{r}{V} \frac{\lambda}{t_c},$$

где t_c — время синтеза, $Y = Vt_c$.

Для подвижной отражающей поверхности выходной сигнал фильтра

$$E_{\text{вых}}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x_0, y_0 + \xi) E_{\Phi}^*(\xi) d\xi \sim \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-Y/2}^{Y/2} d\xi u(x_0 - x) \times \\ \times \exp\{2ikx \cos \vartheta\} \exp\left\{\frac{ik}{r}(y - y_0)^2\right\} \exp\left\{\frac{2ik}{r}[\xi(y_0 - y)]\right\} z\left(x, y, \frac{y_0 + \xi}{V}\right).$$

Предположим, что

$$\langle z(x_1, y_1, t_1) z(x_2, y_2, t_2) \rangle = \sigma(x_1, y_1) \sigma(x_2, y_2) \times \\ \times R(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2).$$

Не зависящая от времени средняя «мощность» ряби $\sigma(x, y)$ выполняет роль объекта, по изображению которого будет определяться разрешение; $R(x, y, t)$ — нормированная функция корреляции.

Тогда для средней по ансамблю реализаций выходной мощности или для средней по многим изображениям данного объекта $\sigma(x, y)$ плотности очернения изображения получим

$$\langle P(x_0, y_0) \rangle \sim \int u(x_0 - x_1) u(x_0 - x_2) \exp\{2ik(x_1 - x_2) \cos \vartheta\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{r}[(y_0 - y_1)^2 - (y_0 - y_2)^2]\right\} \exp\left\{\frac{2ik}{r}[\xi_1(y_0 - y_1) - \xi_2(y_0 - y_2)]\right\} \times \\ \times \sigma(x_1, y_1) \sigma(x_2, y_2) R\left(x_1 - x_2, y_1 - y_2, \frac{\xi_1 - \xi_2}{V}\right) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Аргумент экспоненты с квадратичными членами можно записать в виде

$$\frac{ik}{r}[(y_0 - y_1)^2 - (y_0 - y_2)^2] = -\frac{ik}{r}[(y_1 - y_2)^2 + 2(y_0 - y_1)(y_1 - y_2)].$$

Функцию $R\left(x_1 - x_2, y_1 - y_2, \frac{\xi_1 - \xi_2}{V}\right)$ при $|y_1 - y_2| > l_y$, где l_y — длина корреляции, можно считать равной нулю. Далее, интегрирование по ξ_1 и ξ_2 даст некоторую функцию от $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$, $(y_0 - y_2)$ и $(y_0 - y_1)$, которая должна пренебрежимо отличаться от нуля при $|y_0 - y_1| > L$, где L — некоторая величина, лежащая в пределах от Δy_0 до Y_1 в зависимости от свойств функции R . Следовательно, если выполняются условия

$$\frac{kl_y^2}{r} \ll 1, \quad \frac{2kl_y L}{r} \ll 1$$

(а они выполняются практически всегда), указанную экспоненту можно заменить единицей.

Обозначим $t_i = \xi_i/V$ и $\alpha = V/r$ и заменим переменные

$$t_1 - t_2 = \tau, \quad y_1 - y_2 = \eta, \quad x_1 - x_2 = \chi,$$

$$t_1 = t, \quad y_1 = y, \quad x_1 = x.$$

Тогда

$$\langle P(x_0, y_0) \rangle \sim \int \exp\{2ik\chi \cos \vartheta\} u(x_0 - x) u(x_0 - x + \chi) \times$$

$$\times \exp\{2ik\alpha(\tau y_0 - \tau y - t\eta + \tau\eta)\} \sigma(x, y) \sigma(x - \chi, y - \eta) \times \\ \times R(\chi, \eta, \tau) dx dy dt d\chi d\eta d\tau.$$

Пределы интегрирования по τ : от $-t_c/2 + t$ до $t_c/2 + t$; по t : от $-t_c/2$ до $t_c/2$. По остальным переменным пределы интегрирования бесконечны.

Полагаем, что $R(\chi, \eta, \tau)$ спадает к нулю быстрее по χ и η , чем изменяются u и σ по тем же переменным. Тогда, интегрируя по χ и η , можно считать $u(\chi) \approx u(0)$, $\sigma(\chi, \eta) \approx \sigma(0, 0)$,

$$\langle P(x_0, y_0) \rangle \sim \int u^2(x_0 - x) \exp\{2ik\alpha(\tau y_0 - y)\} \times \\ \times \tilde{R}_{12}[2k \cos \vartheta, 2k\alpha(t - \tau), \tau] \sigma^2(x, y) dx dy d\tau dt. \quad (11)$$

Индексы 1 и 2 у \tilde{R} означают, что фурье-преобразование произведено по первой и второй переменным.

Характерный интервал изменения \tilde{R}_{12} по второму аргументу имеет порядок $1/l_y$. Следовательно, если выполняется условие $k\alpha t_c \ll 1/l_y$ или $kl_y Y/r \ll 1$, то второй аргумент можно заменить нулем во всей области интегрирования. Указанное неравенство выполняется благодаря тому, что $kl_y \sim 1$ и $Y/r \ll 1$.

Ширина функции $\tilde{R}_{12}(2k \cos \vartheta, 0, \tau)$ по τ равна $\tau_0 = \gamma^{-1}(2k \cos \vartheta, 0)$. Если $\tau_0 \gg t_c$, то, так как максимальное значение τ в области интегрирования $|\tau| = t_c$, можно считать $\tau_0 = \infty$ и

$$\tilde{R}(K_x, K_y, \omega) = \tilde{R}(K_x, K_y) \delta[\omega - \Omega(K_x, K_y)], \\ \langle P(x_0, y_0) \rangle \sim \tilde{R}(2k \cos \vartheta, 0) \int u^2(x_0 - x) \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{kY}{r} (y_0 - y + \right. \\ \left. + \Omega/2k\alpha) \right] \sigma^2(x, y) dx dy,$$

где $\Omega = \Omega(2k \cos \vartheta, 0)$.

Таким образом, аппаратная функция по y имеет ширину Δy_0 , но все изображение сдвинуто на величину

$$\delta y = \frac{\Omega}{2k\alpha} = \frac{r}{V} |v_\phi(2k \cos \vartheta, 0)| \cos \vartheta. \quad (12)$$

Пусть теперь $\tilde{R}(2k \cos \vartheta, 0, \omega) = \tilde{R}(2k \cos \vartheta, 0) f(\omega - \Omega, \gamma)$ и $\tau_0 = \gamma^{-1} \ll t_c$. Теперь в (11) функция \tilde{R}_{12} по τ много уже, чем область интегрирования, и пределы интегрирования по τ можно считать бесконечными. Подставив в (11)

$$\tilde{R}_{12}(2k \cos \vartheta, 0, \tau) = \int \tilde{R}(2k \cos \vartheta, 0) f(\omega - \Omega, \gamma) \exp\{i\omega\tau\} d\omega,$$

получим

$$\langle P(x_0, y_0) \rangle \sim \tilde{R}(2k \cos \vartheta, 0) \int u^2(x_0 - x) f[2k\alpha(y_0 - y) + \Omega, \gamma] \sigma^2(x, y) dx dy,$$

откуда видно, что аппаратная функция по y

$$v^2(y) \sim f(2k\alpha y - \Omega, \gamma),$$

Сдвиг изображения по-прежнему соответствует формуле (12), а ширина $v^2(y)$ равна

$$\Delta y = \frac{\gamma(2k \cos \vartheta, 0)}{2k \alpha} \sim \frac{r}{V} \frac{\lambda}{\tau_0},$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. R. Larson, L. I. Moscowitz and J. W. Wright, IEEE Trans., AP-24, № 3, 393 (1976).
2. W. E. Brown, C. Elachi and T. W. Thompson, J. Geophys. Res., 81, № 15, 2657 (1976).
3. C. Elachi and W. E. Brown, IEEE Trans., AP-25, № 1, 84 (1977).
4. D. Atlas, C. Elachi and W. E. Brown, J. Geophys. Res., 82, № 24, 3445 (1977).
5. И. М. Фукс, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 5, 876 (1966).
6. F. G. Bass et al., IEEE Trans., AP-16, № 5, 554 (1968).
7. А. И. Калмыков и др., Препринт № 71, Институт радиофизики и электроники АН УССР, Харьков, 1976.
8. А. П. Рейтова и др., Радиолокационные станции бокового обзора, изд. Сов. радио, М., 1970.
9. Ч. Кук, М. Бернфельд, Радиолокационные сигналы, изд. Сов. радио, М., 1971.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Либшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
11. И. А. Лейкин, А. Д. Розенберг, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 1, 102 (1971).
12. С. А. Китайгородский, Физика взаимодействия атмосферы и океана, Гидрометеоиздат, Л., 1970.
13. Л. А. Жуков, Общая океанология, Гидрометеоиздат, Л., 1976.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
12 декабря 1977 г

RESOLUTION OF RADAR WITH SYNTHETIC APERTURE (SAR) IN OBSERVING THE SEA SURFACE

A. V. Ivanov

The limitations on the azimuthal resolution of the radar station of side scanning with a synthetic aperture (SAR) associated with mobility of the sea surface are considered. The solution of the problem is based on the two-scale model of ultrashort wave scattering by a disturbed sea surface. Quantitative estimations of azimuthal SAR resolution are given depending on the station and disturbance parameters.

УДК 538.56 : 530.145

ВОЗБУЖДЕННЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ В УСЛОВИЯХ РАЗНОВРЕМЕННОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

M. B. Жучков, A. F. Курин, Ю. Н. Нестеренко

Рассмотрен механизм взаимодействия осцилляторов с высокочастотным полем, связанный с разновременностью жизни частиц в пространстве взаимодействия вследствие зависимости скорости дрейфа осцилляторов от их энергии. Приведены примеры взаимодействия, когда усиление обусловлено механизмом разновременности

Одним из факторов, способных обеспечить эффективное взаимодействие потока дрейфующих электронных осцилляторов с высокочастотными полями, является изменение дрейфовой скорости электронов в процессе взаимодействия. Изменение дрейфовой скорости приводит к пространственной рассортировке электронов в зависимости от их начальных фаз. Если при этом высокочастотное поле неоднородно в направлении дрейфа, то образовавшиеся электронные сгустки могут отдавать свою энергию полю. Такой механизм взаимодействия известен как квадратичная пространственная группировка, аналогичная взаимодействию типа «*O*» [1]. Кроме того, пространственная рассортировка осцилляторов приводит к различию во времени нахождения частиц в пространстве взаимодействия в зависимости от их начальных фаз, что существенно влияет на энергообмен системы осцилляторов с высокочастотным полем. Взаимодействие, связанное с механизмом разновременности пребывания осцилляторов в пространстве взаимодействия, сходно с тем, которое имеет место в обычном монотроне, высокочастотный зазор которого пронизывается потоком прямолинейно движущихся электронов, где, как известно, генерация связана исключительно с механизмом разновременности.

Механизм разновременности применительно к осцилляторам с общих позиций впервые был рассмотрен Шнайдером [2], который показал, что система изохронных осцилляторов в случае зависимости времени жизни частиц от их энергии может отдавать энергию пространственно-однородному высокочастотному полю. Ниже рассмотрен механизм разновременности, действующий в электронных мазерах, в которых поступательная скорость осцилляторов зависит от их энергии.

1. Возьмем систему осцилляторов, невозмущенное движение которых складывается из колебаний по координате x :

$$x = \sum_k x_k \cos k(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

и поступательного перемещения вдоль оси z со скоростью v_z , причем ω_0 и v_z являются функциями энергии осциллятора \mathcal{E} . Система несфазированных осцилляторов вступает в пространство взаимодействия с однородным высокочастотным полем

$$\mathbf{E} = \{E_0 \cos \omega t, 0, 0\}. \quad (2)$$

Пройдя путь z , осцилляторы покидают пространство взаимодействия.

При условии синхронизма $\omega \approx n\omega_0$ ($n = 1, 2, \dots$) укороченные уравнения движения осциллятора (1) в поле (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dz} &= -\frac{eE_0}{2} \frac{x_n n \omega_0}{v_z} \sin \Phi, \\ \frac{d\Phi}{dz} &= \frac{\omega - n \omega_0}{v_z} - \frac{eE_0}{2} \frac{dx_n}{d\mathcal{E}} \frac{n \omega_0}{v_z} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi = \omega t - n(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Средний по ансамблю электронный КПД

$$\eta = 1 - (2\pi \mathcal{E}_0)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{E} d\varphi_0$$

в линейном режиме равен

$$\eta(z) = -\frac{e^2 E_0^2}{16 \mathcal{E}_0} \frac{n^2 \omega_0}{v_z} z^2 \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\frac{x_n^2 \omega_0}{v_z} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right), \quad (4)$$

где \mathcal{E}_0 — начальная энергия, одинаковая для всех электронов, $\alpha = (\omega - n\omega_0)z/2v_z$ — половина невозмущенного угла пролета. В выражении (4) все функции и производные вычислены при значении энергии \mathcal{E}_0 . В случае, когда v_z не зависит от \mathcal{E} , выражение (4) совпадает с формулой, полученной в обзоре [1].

Используя условие $x_n^{-2} |dx_n/d\mathcal{E}| \gg \omega_0^{-1} |d\omega_0/d\mathcal{E}|$, справедливое для слабо неизохронных осцилляторов, представим $\eta(z)$ (4) в виде

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(eE_0 n \omega_0 x_n T)^2}{16 \mathcal{E}_0} \left[\frac{1}{x_n^2} \frac{dx_n^2}{d\mathcal{E}} \left(-\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) + \frac{nT}{2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{d\omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{v_z} \frac{dv_z}{d\mathcal{E}} \frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $T = z/v_z$ — невозмущенное время пролета.

Как видно из выражения (5), КПД осцилляторов слагается из трех составляющих, каждая из которых имеет свой спектр:

$$\eta_1 \sim f_1 = -\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2},$$

$$\eta_2 \sim f_2 = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right),$$

$$\eta_3 \sim f_3 = \frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right).$$

Функции $f_i(\alpha)$ изображены на рис. 1. Составляющая η_1 описывает энергообмен, аналогичный тому, который имеет место для системы изохронных осцилляторов в условиях одинакового времени жизни частиц, η_2 обусловлена квадратичной фазовой группировкой неизохронных осцилляторов (взаимодействие типа «O»), η_3 — механизмом разно-

временности. Из выражения (5) следует, что эффект разновременности одного порядка по времени с поглощением η_1 ($\sim T^2$). За счет этого эффекта возможно усиление высокочастотного поля ($\eta > 0$) системой изохронных осцилляторов, у которых $dv_z/d\mathcal{E} \neq 0$.

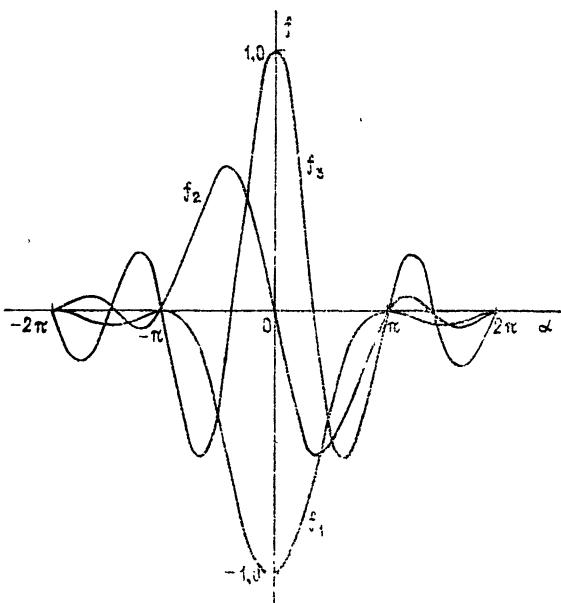


Рис. 1.

2. В качестве примеров рассмотрим МЦР-генераторы, в работе которых механизм разновременности играет существенную роль.

В МЦР с поперечно неоднородным магнитостатическим полем вида $H = \{0, H_y(x), 0\}$ электроны, совершая колебания (1), дрейфуют (градиентный дрейф) в направлении z , причем скорость дрейфа зависит от энергии частиц. В системе таких осцилляторов в общем случае могут иметь место несколько механизмов квадратичной группировки [3], однако в высокочастотном поле вида (2) действует только механизм, связанный с зависимостью ω_0 от \mathcal{E} . При этом электронный КПД определяется формулами (4), (5). Выражения для x_n , ω_0 , v_z содержатся, например, в [3]. В частном случае статического поля вида $H_y \sim x^{-1/2}$ электронные осцилляторы в нерелятивистском приближении являются изохронными ($d\omega_0/d\mathcal{E} = 0$), и усиление обусловлено только механизмом разновременности. Так как на основном циклотронном резонансе выполняется равенство [3]

$$x_1^{-2} dx_1^2/d\mathcal{E} = v_z^{-1} dv_z/d\mathcal{E},$$

вместо (5) приходим к выражению

$$\eta = \eta_1 + \eta_3 \sim f_4 = \alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right).$$

Функция взаимодействия f_4 здесь совпадает с функцией монотрона [4], прибора, в котором прямолинейный электронный поток пронизывает высокочастотный зазор резонатора. Заметим, что в случае МЦР $\alpha = (\omega - n\omega_0)z/2v_z$ — относительный угол (половинный) пролета, в слу-

чае монотрона с прямолинейным потоком $\alpha = \omega z / 2v_z$ — абсолютный половинный угол пролета.

Рассмотрим МЦР с однородным магнитостатическим полем и резонатором Фабри—Перо, ось которого параллельна этому полю. Здесь электроны, движущиеся по винтовым траекториям, взаимодействуют с незамедленными электромагнитными волнами, и вследствие авторезонанса [5] исчезают эффекты квадратичной группировки. Однако в условиях разновременности пребывания электронов в пространстве взаимодействия, а также существования несинхронной волны указанный генератор самовозбуждается при синхронизме колебаний электронов как с попутной волной (при этом несинхронной является встречная волна), так и встречной волной (при этом несинхронной является попутная волна). Остановимся на слаборелятивистском случае. Действительно, линеаризация уравнений (9) работы [9] приводит к выражению для КПД, усредненному по начальным фазам и фазам быстрых колебаний, вызванных существованием несинхронной волны,

$$\eta^\pm = \frac{(eE_0 z/m_0 c^2)^2}{16\beta_\parallel^2(\beta_\perp^2 + \beta_\parallel^2)} \left[f_1 + \frac{\beta_\perp^2}{2} f_4 \pm \frac{\beta_\perp^2}{2\beta_\parallel} f_3 \pm \frac{\beta_\perp^2}{2\beta_\parallel} f_3 \right], \quad (6)$$

где m_0 — масса покоя электрона, $\beta_\perp = v_\perp/c$, $\beta_\parallel = v_\parallel/c$ — относительные вращательная и поступательная скорости невозмущенного движения электрона. Аргументом функций f_i в (6) является $\alpha = ((\omega - \omega_0)/\omega\beta_\parallel \mp \mp 1)\omega z / 2c$, где $\omega_0 = eH\sqrt{1 - \beta_\perp^2 - \beta_\parallel^2}/m_0 c$ — релятивистская циклотронная частота. Верхний знак в выражении (6) и в α относится к синхронизму с попутной волной, нижний знак — к синхронизму с встречной волной.

В выражении (6) первое слагаемое описывает циклотронное поглощение. Второе, пренебрежимо малое слагаемое представляет собой результат суммарного действия двух противофазных квадратичных группировок: фазовой вследствие зависимости циклотронной частоты от энергии и продольной вследствие зависимости v_z от энергии. Как видно, взаимодействие типа «O» исчезает. Третье слагаемое в (6) описывает энергообмен вследствие разновременности, четвертое — влияние несинхронной волны. Разновременность в пренебрежении влиянием несинхронных сил в данной модели МЦР была учтена в работах [6, 7], эффект, связанный с несинхронными силами, рассмотрен в работах [8, 9]. Механизмы разновременности и влияния в данном случае одинаково эффективны и синфазны. Они обеспечивают возможность генерации ($\eta > 0$ в главном максимуме циклотронного резонанса) при синхронизме как с попутной, так и встречной волной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. J. Schneider, Z. Naturforschung, 15 a, 484 (1960).
3. М. В. Жучков, Ф. М. Клементьев, А. Ф. Курин, Ю. Н. Нестеренко, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 5, 759 (1978).
4. И. В. Лебедев, Техника и приборы СВЧ, т. 2, изд. Высшая школа, М., 1972.
5. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, № 6, 1259 (1962).
6. Ф. А. Королев, А. Ф. Курин, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2143 (1970).
7. А. Ф. Курин, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1908 (1969).
8. В. Л. Братман, А. Е. Токарев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 8, 1224 (1974).

9. А. Ф. Курин, Г. А. Курина, В. В. Новиков, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 7, 1047 (1976).

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 июля 1977 г

EXCITED CLASSICAL OSCILLATORS UNDER THE CONDITIONS OF
DIFFERENT LIFETIME IN THE INTERACTION SPACE

M. V. Zhuchkov, A. F. Kurin, Yu. N. Nesterenko

The mechanism of interaction between oscillators and a HF field which is connected with different lifetime of particles in the interaction space due to the dependence of the drift velocity of oscillators on their energy has been considered. The examples of the interaction when the amplification is due to the different lifetime mechanism are given

УДК 621.372.413

О ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАПЕРТЫХ И НЕЗАПЕРТЫХ ВОЛН

B. P. Рeутов

Исследуется взрывная неустойчивость при резонансном взаимодействии волн, локализованных в резонаторе, с волнами, отражением которых от стенок можно пренебречь. Найдены условия, при которых развивается «взрыв», и обсуждаются механизмы его ограничения

Взрывная (нелинейная) неустойчивость является одним из наиболее своеобразных эффектов, возникающих при взаимодействии волн в неравновесных средах (см., например, [1–8]). Большинство результатов при исследовании взрывного взаимодействия волн с детерминированными фазами получено в предположении, что изменением пространственной структуры поля можно пренебречь (взаимодействие мод), либо волновой процесс стационарен. Значительно меньше рассматривались важные для постановки экспериментов эффекты, связанные с пространственно-временной эволюцией огибающих.

В работах [9–11] изучалось одномерное взаимодействие узких волновых пакетов на основе точных и численных решений уравнений вида

$$\frac{da_{1,2}}{dt} + v_{1,2} \frac{da_{1,2}}{dx} = \sigma_{1,2} a_{2,1}^* a_3, \quad \frac{da_3}{dt} + v_3 \frac{da_3}{dx} = \sigma_3 a_1 a_2, \quad (1)$$

где a_j — комплексные амплитуды волн, v_j — групповые скорости, $\sigma_j > 0$. С практической точки зрения при анализе (1) важно определить условия, при которых возникает «взрыв». Когда вначале преобладает одна из волн, они совпадают с хорошо известными в нелинейной оптике условиями пленения слабых волн импульсом накачки — слабые волны должны переноситься в разные стороны относительно импульса накачки, амплитуда которого превышает пороговое значение [12]. Например, для волны накачки $a_3 = A_{30} \operatorname{ch}^{-1}[(x - v_3 t)/l]$ критерий пленения имеет вид

$$\frac{2\Gamma_0 l}{\sqrt{(v_2 - v_3)(v_3 - v_1)}} > 1, \quad (2)$$

где $\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} A_{30}$ — инкремент параметрической неустойчивости при $a_3 = A_{30} = \text{const}^*$. Развитие взрывной неустойчивости в данном случае связано с формированием стабильной зоны перекрытия полей всех волн за счет обратной связи, возникающей при «зажелании» встречных волн a_1 и a_2 через накачку $a_3(x - v_3 t)^{**}$.

* Критерий (2) следует из условия нарастания главной моды линейной краевой задачи для амплитуд a_1 и a_2 [10, 12].

** При «обычной» параметрической неустойчивости усиление слабых волн приводит к распаду накачки, тогда как при нелинейной неустойчивости все волны начинают одновременно нарастать и развивается «взрыв» [10].

Когда групповая скорость импульса, являющегося центром пленения, отлична от нуля, неустойчивость конвективна. Абсолютная неустойчивость возможна, в частности, при локализации полей всех связанных волн за счет отражения от границ системы. Однако в реальных условиях волны зачастую сильно поглощаются на границах (добротность резонатора $Q \ll \omega_0 t_\infty$, где t_∞ — время «взрыва» при $Q \rightarrow \infty$, ω_0 — частота моды) либо их отражение невозможно (примером могут служить волны пространственного заряда в электронных потоках). В настоящей работе исследуется взрывная неустойчивость при взаимодействии таких волн с волнами, запертymi в резонаторе, или волной наакчи, которая возбуждается в системе с помощью внешнего источника.

1. Рассмотрим взаимодействие волн a_1 и a_2 , запертых в системе за счет отражения от границ $x = 0$ и $x = l$, с волной a_3 , отражением которой можно пренебречь. Локализация области взаимодействия в резонаторе возникает в данном случае за счет непрерывной генерации поля a_3 на интервале $0 < x < l$ при $a_{1,2} \neq 0$.

Запишем уравнения для амплитуд отраженных волн $a_{1,2}^-$ и граничные условия на стенах в виде

$$\frac{\partial a_{1,2}^-}{\partial t} - v_{1,2}^- \frac{\partial a_{1,2}^-}{\partial x} = 0 \quad (0 < x < l); \quad (3)$$

$$a_{1,2}^- = r_0 a_{1,2}^+, \quad a_3 = 0, \quad ||_{x=0}, \quad (4)$$

$$a_{1,2}^- = r_l a_{1,2}^+ \exp [i(k_{1,2}^- - k_{1,2})l], \quad ||_{x=l}.$$

Здесь $k_{1,2} = k(\omega_{1,2})$, $k_{1,2}^- = k^-(\omega_{1,2})$ — волновые числа основных и отраженных волн соответственно, $v_{1,2,3} > 0$, $v_{1,2}^- > 0$ и предполагается, что отражение близко к идеальному (для определенности считаем $r_{0,l} \approx -1$). Порождаемые системой (1) и (3) однородные уравнения совместно с краевыми условиями (4) при $r_{0,l} = -1$ определяют моды резонансной системы. Выберем ω_1 и ω_2 равными собственным частотам такого резонатора ($k_{1,2}^- - k_{1,2} = 2m_{1,2}\pi/l$, где $m_{1,2}$ — целые) и рассмотрим взаимодействие двух соответствующих мод с незапертой волной a_3 . В этом случае решение уравнений для $a_{1,2}$ и $a_{1,2}^-$ представляется в виде

$$a_{1,2} = b_{1,2}(t) + w_{1,2}(x, t), \quad a_{1,2}^- = -b_{1,2}(t) + w_{1,2}^-(x, t), \quad (5)$$

где $b_{1,2} = B_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$ — комплексные амплитуды мод ω_1 и ω_2 ; добавки w и w^- учитывают отклонение решения от одномодового. Подстановка (5) в (1), (3) и (4) приводит к неоднородной краевой задаче в обыкновенных производных; при этом условие ограниченности w и w^- дает следующие укороченные уравнения:

$$b_{1,2} = \bar{\sigma}_{1,2} \frac{1}{l} \int_0^l a_3 b_{2,1}^* \exp(i\Delta k x) dx - v_{1,2} b_{1,2}, \quad (6)$$

$$\text{где } \bar{\sigma}_s = \frac{v_s^- \sigma_s}{v_s + v_s^-}, \quad v_s = \frac{v_s v_s^-}{v_s + v_s^-} \left(\frac{1+r_0}{l} + \frac{1+r_l}{l} + \frac{\gamma_s}{v_s} + \frac{\gamma_s^-}{v_s^-} \right)$$

(здесь учтено линейное затухание волн a_s и a_s^- с декрементами γ_s и γ_s^- соответственно); $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ — расстройка от резонанса между

взаимодействующими волнами*. Условие малости добавок ω и ω' принимает вид $|bb^{-1}| \ll v_1, 2/l, v_{1, 2}^{-1}/l$ и соответствует тому, что инкременты взаимодействия должны быть малы по сравнению с обратным временем пробега волн между стенками.

Ограничимся далее анализом квазистационарного взаимодействия мод $\omega_{1, 2}$ с волной a_3 , когда выполнено условие

$$|\dot{b}_{1, 2} b_{1, 2}^{-1}| \ll v_3/l, \quad (7)$$

позволяющее пренебречь при отыскании a_3 изменением b_1 и b_2 . Определяя a_3 из уравнения**

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} = \bar{\sigma}_3 b_1 b_2 \exp(-i \Delta kx) \quad (8)$$

($\bar{\sigma}_3 = \sigma_3/v_3$), преобразуем (6) к виду

$$\dot{b}_{1, 2} = s_{1, 2} [p(\Delta kl) + iq(\Delta kl)] |b_{2, 1}|^2 b_{1, 2} - v_{1, 2} b_{1, 2}, \quad (9)$$

где

$$p(\zeta) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \zeta \right) / \left(\frac{1}{2} \zeta \right)^2, \quad q(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\zeta} \sin \zeta - 1 \right),$$

$$s_{1, 2} = \frac{1}{2} l \bar{\sigma}_{1, 2} \bar{\sigma}_3;$$

функции $p(\Delta kl)$ и $q(\Delta kl)$ характеризуют зависимость нелинейного инкремента BB^{-1} и нелинейного сдвига частоты $\varphi_{1, 2}$ от безразмерной расстройки Δkl . Как следует из (9), взаимодействие приводит к наибольшему инкременту при точном резонансе волн, и ширина главного максимума инкремента — величина порядка расстояния между соседними модами по волновому числу. При достаточно больших начальных амплитудах $B_1(0)$ и $B_2(0)$ взаимодействие носит взрывной характер; в частности, когда $v_1 = v_2 = v$, $B_1^2(0)s_2 = B_2^2(0)s_1 = J_0$, выражения для интенсивностей имеют вид

$$B_{1, 2}^2 = \frac{v}{s_{2, 1} p} (1 - \exp[2v(t - t_\infty)])^{-1} \left[t_\infty = -\frac{1}{2v} \ln \left(1 - \frac{v}{p J_0} \right) \right]. \quad (10)$$

Согласно (9), порог возникновения «взрыва» обусловлен линейным поглощением v .

Поскольку при увеличении расстройки Δk нелинейный инкремент уменьшается, стабилизация «взрыва» может быть связана с наличием нелинейной расстройки волновых чисел. Рассмотрим ограничение взрывной неустойчивости за счет такого механизма, предполагая, что основную роль играет нелинейный сдвиг волнового числа волны a_3 ($\delta k_{NL} = -\gamma |a_3|^2$, $\gamma = \text{const}$). При этом система уравнений для действительных амплитуд и фаз принимает вид ($\Delta k = 0$)

$$\dot{B}_{1, 2} = \bar{\sigma}_{1, 2} \frac{1}{l} B_{2, 1} \int_0^l A \cos \Phi dx - v_{1, 2} B_{1, 2}; \quad (10a)$$

* При $a_3(0, t) = 0$ удобно считать выполненными точно условия резонанса для частот ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$).

** Предполагается, что линейный декремент γ_3 волны a_3 удовлетворяет условию $\gamma_3 \ll v_3/l$. При этом линейным затуханием (усилением) a_3 можно пренебречь.

$$A' = \bar{\sigma}_3 B_1 B_2 \cos \Phi, \quad \Phi' = -\bar{\sigma}_3 \frac{B_1 B_2}{A} \sin \Phi + \gamma A^2, \quad (106)$$

где $\Phi = \varphi_3(x, t) - \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, $a_3 = A \exp(i \varphi_3)$, $A(0, t) = 0$.

Преобразуем (10), домножая первое уравнение (106) на A и интегрируя по длине резонатора. Тогда после перехода к безразмерным переменным

$$C_{1,2} = \left(\frac{\bar{\sigma}_{2,1}}{\bar{\sigma}_{1,2}} \right)^{1/4} |\gamma|^{1/4} \bar{\sigma}_3^{-1/2} l^{3/4} B_{1,2}, \quad \tau = \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} l^{-1/2} |\gamma|^{-1/2} t, \quad (11)$$

$$R = A \bar{\sigma}_3^{1/3} |\gamma|^{1/3} l^{-1/3}, \quad y = |\gamma|^{1/3} \bar{\sigma}_3^{-2/3} (B_1 B_2)^{2/3} x$$

получается следующая система уравнений для амплитуд $C_{1,2}$:

$$\frac{dC_{1,2}}{d\tau} = C_{2,1}^{2/3} C_{1,2}^{-1/3} R_0^2 (C_1^{2/3} C_2^{2/3}) - \eta_{1,2} C_{1,2}, \quad (12)$$

где $\eta_j = \nu_j t \tau^{-1}$ — безразмерные декременты; периодическая функция $R_0^2(y)$ определяется через обращение интеграла (см. рис. 1)

$$y = \pm \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{1}{16} \xi^6 \right)^{-1/2} d\xi. \quad (13)$$

Состояния равновесия в системе (12) при одинаковых декрементах ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) находятся из условия

$$R_0^2(y)/\sqrt{y} = \eta \quad (y = C_1^{4/3} = C_2^{4/3}). \quad (14)$$

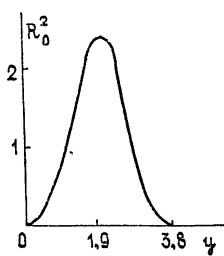


Рис. 1.

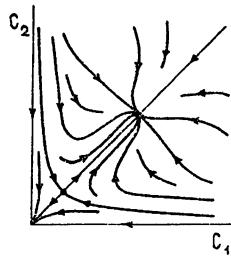


Рис. 2.

Можно выделить последовательность критических значений η ($\eta_0 = \infty > \eta_1 \approx 1.85 > \eta_2 \approx 1.05 > \dots$), таких, что при $\eta_{n+1} < \eta < \eta_n$ система (12) имеет $2n$ состояний равновесия с отличными от нуля амплитудами. Фазовая плоскость (12) при $\eta_1 > \eta > \eta_2$ показана на рис. 2. Видно, что в этом случае существует устойчивый режим генерации в виде автоколебаний с постоянной амплитудой. Таким образом, нелинейный рассинхронизм стабилизирует «взрывы» при любых начальных условиях.

2. Область взаимодействия, очевидно, локализуется в пространстве при отражении от границ системы только одной из связанных волн, если две другие переносятся в разные стороны относительно неподвижных границ.

В простейшем случае задача сводится к решению уравнения типа (6) для амплитуды запертой волны и двух уравнений вида (1) для

«свободных» волн. Например, когда заперта волна a_2 , которая вначале значительно интенсивнее волн a_1 и a_3 , условие возбуждения «взрыва» совпадает с критерием пленения слабых волн a_1 и a_3 неподвижным прямоугольным импульсом накачки. Учитывая линейное поглощение слабых волн с одинаковыми декрементами $\gamma_0 = \text{Im } \omega_j$ и используя результаты работы [12], нетрудно записать характеристическое уравнение для инкремента нарастания Γ собственных решений линейной краевой задачи*:

$$\Gamma = -\frac{2|v_1 v_3|}{l(|v_1| + |v_3|)} \left(\frac{\delta \cos \delta}{\sin \delta} + p \right), \quad \sin \delta = \pm \frac{\delta}{m}, \quad (15)$$

где $m = \Gamma_0 l / \sqrt{-v_1 v_3}$, $p = \gamma_0 l (|v_1| + |v_3|) / 2|v_1 v_3|$ — параметр поглощения, $v_1 v_3 < 0$ ($\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} A_{20}$). Условие нарастания основной моды принимает вид

$$\frac{\Gamma_0 l}{\sqrt{-v_1 v_3}} > m_*(p), \quad (16)$$

где функция $m_*(p)$ показана на рис. 3 [$m_* \approx p$ ($p \gg 1$) и $m_* \approx -2p \exp p$ ($\exp p \ll 1$)]. Видно, что порог возбуждения неустойчивости существует даже в отсутствие поглощения $-m_*(0) = \pi/2$. Линейная конвективная неустойчивость незапертых волн ($\gamma_0 < 0$) может значительно снизить этот порог.

Отметим, наконец, возможность локализации области взаимодействия, связанную с использованием источника, непрерывно генерирующего накачку. Соответствующее распределение поля схематически показано на рис. 4 (волна накачки генерируется в заштрихованной области, и все волны сильно поглощаются на границах системы, обозначенных пунктиром). На начальном этапе процесса, если $a_2 = \text{const}$, $|a_{1,3}| \rightarrow 0$ и выполнено условие (16), возникает параметрическая неустойчивость незапертых волн ω_1 и ω_3 , переходящая по мере нарастания их амплитуд во взрывную.

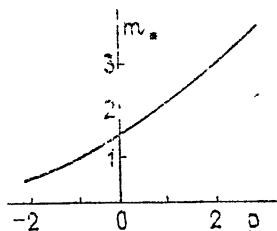


Рис. 3.

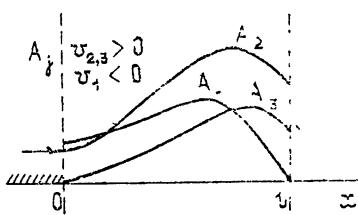


Рис. 4.

Процесс такого типа, по-видимому, наблюдался при экспериментальном исследовании взрывного взаимодействия волн в плазме с ионным пучком [13, 14]. В этих экспериментах были созданы условия для резонансного взаимодействия ионной ленгмюровской волны накачки с медленной пучковой и ионно-звуковой волнами. Соотношение знаков групповых скоростей волн было таким, как показано на рис. 4; пучковая волна (A_3) выносилась из системы, а добротность резонатора для ионно-звуковой волны (A_1) и на частоте накачки была, по-видимому, низкой. Существование условия типа (16) на амплитуду накачки

* Уравнения решаются с граничными условиями $a_{1,3} = 0$ при $x = -\frac{1}{2}l \operatorname{sign} v_{1,3}$.

объясняет при этом тот факт, что при превышении интенсивности накачки над пороговым значением в системе наблюдалось скачкообразное увеличение амплитуд связанных волн. Влиянием одного лишь линейного поглощения, без привлечения механизмов пространственной локализации области взаимодействия, нельзя объяснить необходимость непрерывной подачи накачки для наблюдения стационарной генерации.

В настоящей работе показано, что развитие взрывной неустойчивости и установление стационарной генерации волн возможно даже в тех случаях, когда некоторые из связанных волн выносятся из резонатора или сильно поглощаются на его стенах. Предложенные реализации взрывного взаимодействия представляют интерес, в частности, для постановки и интерпретации экспериментов по исследованию резонансных волновых процессов в плазменно-пучковых системах, которые характеризуются отсутствием обратной связи по пучковым волнам. Отметим также, что при использовании незапертых волн возможен эффективный отвод мощности из системы.

Автор благодарен М. И. Рабиновичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Дикасов, Л. И. Рудаков, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ, 48, 913 (1965).
2. B. Cappi, M. N. Rosenbluth and R. N. Sudan, Ann. Phys., 55, 207 (1969).
3. H. Wilhelmsson and L. Stenflo, J. Math. Phys., 11, 1738 (1970).
4. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ, 16, № 7, 384 (1972); ЖТФ, 42, № 12, 2458 (1972).
5. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, № 6, 815 (1973).
6. V. N. Ogaevskii, V. P. Pavlenko, H. Wilhelmsson and E. Y. Kogan, Phys. Rev. Lett., 30, № 2, 49 (1973).
7. A. D. D. Craik, J. Fluid Mech., 50, 393 (1971).
8. Н. Н. Филоненко, Л. П. Мельник, ЖЭТФ, 69, 1183 (1975).
9. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, Письма в ЖЭТФ, 18, 413 (1973).
10. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, А. А. Цветков, ЖЭТФ, 67, 2(8), 525 (1974).
11. J. Kaup, Stud. Appl. Math., 55, 9 (1976).
12. А. П. Сухоруков, А. К. Шеднова, ЖЭТФ, 60, 1251 (1971).
13. S. Nakamura and K. Mitani, J. Phys. Soc. Japan, 40, № 4, 1219 (1976).
14. S. Nakamura, J. Phys. Soc. Japan, 42, № 1, 280 (1977).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
19 января 1978 г.

EXPLOSIVE INSTABILITY AT THE INTERACTION BETWEEN LOCALIZED AND NONLOCALIZED WAVES

V. P. Reutov

The explosive instability at the resonant interaction between waves localized in the cavity and those which reflection from the walls may be neglected is investigated. The conditions are found under which the explosion developed and the mechanisms of its saturation are discussed.

УДК 621.373.187.4

ТЕХНИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В КВАРЦЕВОМ ГЕНЕРАТОРЕ С АРУ

E. V. Кулагин, B. P. Соколов, A. И. Пихтелев, B. P. Фатеев

Исследованы технические флуктуации в генераторах с АРУ. На примере емкостной трехточечной схемы кварцевого генератора на транзисторе рассмотрен вклад технических флуктуаций отдельных элементов в спектральные характеристики выходного сигнала. Показано, что система АРУ может существенно улучшать технические характеристики генератора.

В высокостабильных генераторах с кварцевой стабилизацией частоты широкое практическое применение нашла система автоматической регулировки уровня (АРУ), которая существенно улучшает его технические характеристики [1-5]. Однако в литературе практически отсутствуют работы, посвященные исследованию технических флуктуаций в генераторах с системой АРУ.

В настоящей работе изучается влияние системы АРУ на флуктуации амплитуды и частоты колебаний в кварцевом генераторе на транзисторе.

1. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ГЕНЕРАТОРА

Рассмотрим генератор с системой АРУ на примере емкостной трехточки (рис. 1 [6]). При этом источники тепловых и дробовых шумов опускаем, а для описания выбранной схемы используем уравнения Кирхгофа. В качестве независимой переменной выберем входное напряжение транзистора база—эмиттер (x), а характеристики транзистора возьмем в виде (4) из [6].

Учтем нелинейность кварцевого резонатора [7] и относительные флуктуации элементов L_k , R_k , C , C_3 , s_δ и s_1 , которые обозначим $\rho_L(t)$, $\rho_R(t)$, $\rho_c(t)$, $\rho_{c3}(t)$, $\rho_{\delta}(t)$ и $\rho_{s1}(t)$, причем $\langle \rho_\lambda^2 \rangle \ll 1$ и $\langle \dot{\rho}_\lambda^2 \rangle \ll \omega_0^2 \langle \rho_\lambda^2 \rangle$ для любых λ , где λ — соответствующие индексы. После разрешения уравнений Кирхгофа относительно x получим следующее уравнение движения:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 \dot{x} = F(x, \dot{x}, \dots) + G(u_{\text{упр}}, x, \dot{x}, \dots) + \Phi(t, x, \dots). \quad (1)$$

Здесь все выражения раскрыты в [6], а $\Phi(t, x, \dots) = \sum_\lambda \Phi_\lambda(t, x, \dots)$;

$$\Phi_L(t, x, \dots) = -\ddot{\dot{x}}\rho_L - \frac{s_\delta}{C}\ddot{x}\rho_L - \frac{s_\delta}{C}\dot{x}\dot{\rho}_L,$$

$$\Phi_R(t, x, \dots) = -\frac{\omega_0}{Q_k}\ddot{\dot{x}}\rho_R - \frac{\omega_0 s_{\delta 0}}{Q_k C}\dot{x}\rho_R - \frac{\omega_0}{Q_k}\dot{x}\dot{\rho}_R - \frac{\omega_0 s_\delta}{Q_k C}x\dot{\rho}_R,$$

$$\Phi_c(t, x, \dots) = -\ddot{\dot{x}}\rho_c - 3\ddot{x}\dot{\rho}_c - 3\dot{x}\ddot{\rho}_c - x\ddot{\dot{\rho}}_c - \dot{x}\frac{1}{L_k}\left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{C_3}\right)\dot{\rho}_c,$$

$$\begin{aligned}\Phi_{c\delta}(t, x, \dot{x}, \dots) &= -\ddot{x} \frac{C_\Sigma}{C_\delta} p_{c\delta} - \frac{C_\Sigma s_\delta}{C_\delta C} \ddot{x} p_{c\delta} - \dot{x} \frac{C_\Sigma}{C_\delta} \dot{p}_{c\delta} - \frac{C_\Sigma s_\delta}{C_\delta C} \dot{x} \dot{p}_{c\delta}, \\ \Phi_{s\delta}(t, x, \dot{x}, \dots) &= -\frac{s_{\delta 0}}{C} \ddot{x} p_{s\delta} - \frac{2 s_{\delta 0}}{C} \dot{x} \dot{p}_{s\delta} - \frac{s_{\delta 0}}{C} \ddot{x} p_{s\delta} - \frac{\omega_0 s_{\delta 0}}{Q_k C} \dot{x} \dot{p}_{s\delta} - \\ &\quad - \frac{\omega_0 s_{\delta 0}}{Q_k C} \dot{x} \dot{p}_{s\delta} - \frac{s_{\delta 0}}{L_k C} \left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{C_\delta} \right) x p_{s\delta}, \\ \Phi_{s1}(t, x, \dot{x}, \dots) &= -\frac{s_1 x}{L_k C C_\delta} p_{s1}, \quad Q_k = \frac{\omega_0 L_k}{R_k}, \\ C_\Sigma &= \left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_\delta} \right)^{-1},\end{aligned}\tag{1a}$$

C_Σ — эквивалентная емкость кварцевого контура.

Решение полученного уравнения (1) при $\Phi(t, x, \dot{x}, \dots) = 0$ известно [6, 8], а при $\Phi(t, x, \dot{x}, \dots)$, не равном нулю, будем искать в виде (9) из [6].

Прежде чем приступить к решению (1), используя результаты работ [6, 8], обобщим полученное уравнение на случай произвольной автоколебательной системы со звеном АРУ, которая имеет более чем одну степень свободы. При этом будем считать, как обычно [8], что технические флуктуации параметров достаточно малы по сравнению с их стационарным значением и достаточно медленны по сравнению с частотой основного колебания. В этом случае, как легко показать, уравнение движения для генератора с идеальной системой АРУ [6] можно представить в виде

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, \dots) + G(u_{\text{упр}}, x, \dot{x}, \dots) + \Phi(t, x, \dot{x}, \dots),\tag{2}$$

где $\Phi(t, x, \dot{x}, \dots)$ — случайное воздействие, обусловленное техническими флуктуациями элементов генератора.

Используя методы, развитые в [6, 8], из (2) можно найти флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= p_\Sigma \alpha + \frac{a_\perp q_c(t) + a_\parallel q_s(t)}{\delta}, \\ \dot{\phi} &= -q_\Sigma \alpha + \frac{a_\perp q_s(t) - a_\parallel q_c(t)}{\delta},\end{aligned}\tag{3}$$

где $q_c(t)$ и $q_s(t)$ — раскрыты в работе [8].

Из полученной системы (3) определяются спектры амплитудных и частотных флуктуаций, которые отличаются от аналогичных соотношений из [8, 9] тем, что вместо обычных значений неизохронности (q) и прочности предельного цикла (p) везде входят соответственно неизохронность (p_Σ) и прочность предельного цикла (p_Σ) генератора с АРУ [6]. Сравнивая полученные спектры со спектрами технических флуктуаций амплитуды и частоты обычного генератора со многими степенями свободы [8], обнаружим, что наличие системы АРУ может приводить к существенному уменьшению спектра амплитудных и частотных флуктуаций и изменению их формы за счет p_Σ и q_Σ .

Остановимся подробнее на спектре амплитудных флуктуаций. Их спектр, как и для естественных шумов [6], зависит только от парамет-

ра M и при отрицательной связи ($Mk < 0$) убывает с возрастанием k . Интересно заметить, что скорость уменьшения величины спектра на разных частотах различна: на низких частотах ($\omega < p_\Sigma$) $S_a(\omega) \sim \frac{1}{p_\Sigma^2}$,

а на высоких ($\omega > p_\Sigma$) спектр $S_a(\omega)$ практически не уменьшается, так как на больших частотах АРУ неэффективна из-за инерционности генератора.

В отличие от спектра амплитудных флуктуаций спектр флуктуаций частоты имеет совершенно иной вид. Его можно условно разбить на две части. Первая $S_{v,1}(\omega)$ определяется непосредственно влияющими на частоту параметрами и не зависит от действия системы АРУ. Вторая же $S_{v,2}(\omega)$ обусловлена амплитудно-частотным преобразованием флуктуаций в генераторе и зависит от параметров звена обратной связи M, H, k . Поэтому понижение частотного спектра возможно только за счет $S_{v,2}(\omega)$, которое можно осуществить двумя путями: если $H = 0$, то поведение $S_{v,2}(\omega)$ при увеличении k подобно $S_a(\omega)$, а если $H \neq 0$, то, как следует из (3), выбором k ($k = -q/H$) можно полностью исключить $S_{v,2}(\omega)$ из спектра частотных флуктуаций.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНКРЕТНОГО ГЕНЕРАТОРА

Перейдем к анализу выбранной нами схемы кварцевого генератора (рис. 1 [6]). Для этого, используя методику, описанную выше, и учитывая статистическую зависимость флуктуаций эквивалентных параметров кварцевого генератора $S_{L,R}^0(\omega)$ и $S_{L,R}^1(\omega)$ и параметров транзистора $S_{s\delta,s1}^0(\omega)$ и $S_{s\delta,s1}^1(\omega)$, решим уравнение (1) и найдем выражения для спектров амплитудных и частотных флуктуаций:

$$\begin{aligned}
 S_a(\omega) &= \frac{S_c(\omega)}{a_\perp^2(\omega^2 + p_\Sigma^2)}, \quad S_v(\omega) = \frac{S_r(\omega)}{a_\perp^2} + \frac{q_\Sigma^2 S_c(\omega) - 2q_\Sigma [p_\Sigma S_{cs}^0(\omega) + \omega S_{cs}^1(\omega)]}{a_\perp^2(\omega^2 + p_\Sigma^2)}, \\
 S_{a,v}^0(\omega) &= \frac{-q_\Sigma S_c(\omega) + p_\Sigma S_{cs}^0(\omega) + \omega S_{cs}^1(\omega)}{a_\perp^2(\omega^2 + p_\Sigma^2)}, \quad S_{a,v}^1(\omega) = \frac{-\omega S_{cs}^0(\omega) + p_\Sigma S_{cs}^1(\omega)}{a_\perp^2(\omega^2 + p_\Sigma^2)}, \\
 S_c(\omega) &= \sum_\lambda M_{\lambda,1}(\omega) S_\lambda(\omega) + \frac{2S_\delta \omega_0^5}{CQ_k} S_{L,R}^0(\omega) - \frac{2\omega\omega_0^5}{Q_k} S_{L,R}^1(\omega) - \frac{2S_1 S_\delta}{L_k^2 C^3 C_s} S_{s\delta,s1}(\omega), \\
 S_s(\omega) &= \sum_\lambda M_{\lambda,2}(\omega) S_\lambda(\omega) - \frac{2S_\delta \omega_0^5}{CQ_k} S_{L,R}^0(\omega) - \frac{2\omega\omega_0^5}{Q_k} S_{L,R}^1(\omega), \\
 S_{c,s}^0(\omega) &= \sum_\lambda M_{\lambda,3}(\omega) S_\lambda(\omega) + \frac{\omega_0^6}{Q_k} S_{L,R}^0(\omega) + \frac{S_\delta S_1 \omega_0^2}{Q_k L_k C^2 C_s} S_{s\delta,s1}(\omega) + \\
 &\quad + \frac{2S_\delta S_1 \omega\omega_0}{L_k C^2 C_s} S_{s\delta,s1}^1(\omega), \\
 S_{c,s}^1(\omega) &= \sum_\lambda M_{\lambda,4}(\omega) S_\lambda(\omega) - \frac{\omega_0^6}{Q_k} S_{L,R}^1(\omega) - \frac{S_\delta S_1 \omega_0^2}{L_k C^2 C_s} S_{s\delta,s1}^1(\omega) - \frac{2S_\delta S_1 \omega\omega_0}{L_k C^2 C_s} S_{s\delta,s1}^0(\omega),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $M_{\lambda,i}$ — элементы матрицы \hat{M} , которая с учетом только определяющих членов имеет следующий вид:

$$\hat{M} = \begin{vmatrix} \frac{S_\delta^2}{C^2} \omega_0^4, & \omega_0^6, & \frac{S_\delta}{C} \omega_0^5, & \omega \omega_0^5 \\ \frac{\omega_0^6}{Q_k^2}, & \frac{S_\delta^2 \omega_0^4}{Q_k^2 C^2}, & -\frac{S_\delta}{Q_k^2 C} \omega_0^5, & \omega \frac{\omega_0^5}{Q_k} \\ (2\omega_0^2 + \omega^2)\omega^2, & \left(\frac{\omega_0^2}{L_k C} + 3\omega_0 \omega^2\right)^2, & 0, & \frac{2\omega_0^3}{L_k C_k} \omega + \left(6\omega_0^3 + \frac{\omega_0}{L_k C}\right) \omega^3 + 3\omega_0 \omega^5 \\ \omega^2 \left(\frac{C_\Sigma}{C_3} \omega_0^2\right)^2 + \left(\omega_0 \frac{S_\delta}{C}\right)^2, & \left(\frac{C_\Sigma}{C_3} \omega_0^3\right)^2, & 0, & \omega \left(\frac{C_\Sigma}{C_3}\right)^2 \omega_0^5 \\ \left(\frac{S_\delta}{L_k C}\right)^2, & \frac{S_{\delta 0} \omega_0^2}{Q_k C}, & \omega^2 \left(\frac{2S_\delta \omega_0}{C}\right)^2, & \frac{S_{\delta 0}^2 \omega_0^2}{Q_k L_k C^3}, -\frac{2S_{\delta 0}^2 \omega_0}{L_k C^3} \omega \\ S_1^2 (L_k C C_3)^{-2}, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

На основании полученных результатов рассмотрим подробнее вклад технических флуктуаций параметра транзистора S_δ в высокочастотную (ВЧ) компоненту частотного спектра, который был обнаружен в [10, 11]. Присутствие ВЧ-компоненты связано с тем, что транзистор, шунтируя кварцевый контур, воздействует непосредственно на фазу колебания, а частотный спектр фазового фликкер-шума как раз и носит ВЧ-характер.

Перейдем далее к анализу действия системы АРУ на уровень флуктуаций амплитуды и частоты выходного сигнала кварцевого генератора. Для этого рассмотрим дисперсии амплитудных σ_a^2 и частотных $\sigma_{v,2}^2$ флуктуаций для ВЧ ($S_c(\omega) = A\omega^\gamma$) и НЧ ($S_c(\omega) = A/\omega^\gamma$)-компонент спектра.

Представим исходный спектр в виде

$$S_c(\omega) = A\omega^\gamma, \quad (6)$$

где $-1 < \gamma < 1$. Тогда для σ_a^2 , используя (4), получим

$$\sigma_a^2 = \frac{\pi A}{(p + Mk)^{1-\gamma} a_1^2 \cos \frac{r\pi}{2}}. \quad (7)$$

Таким образом, σ_a^2 монотонно убывает с ростом k в обоих случаях, как и для естественных шумов [6]. Однако скорости уменьшения резко отличаются. Если для НЧ-компоненты $\sigma_a^2 \sim 1/k^{1+\gamma}$ при $Mk \gg p$, то для ВЧ — $\sigma_a^2 \sim 1/k^{1-\gamma}$. Следовательно, эффективность использования системы АРУ будет значительно выше при стабилизации амплитуды, когда ее флуктуации носят НЧ-характер.

Рассмотрим теперь дисперсию частотных флуктуаций, связанных с $S_{v,2}(\omega)$, так как только она зависит от действия системы АРУ. Положим для простоты, что $S_{c,s}^0(\omega) = S_{c,s}^1(\omega) = 0$, тогда, учитывая (4) и (6), получим

$$\sigma_{v,2}^2 = \frac{(q + Hk)^2}{(p + Mk)^{1-\gamma}} \frac{\pi A}{a_1^2 \cos \frac{r\pi}{2}}. \quad (8)$$

Сравнивая (8) и (7), обнаружим, что если связь задающего каскада генератора с системой АРУ имеет активный характер ($M \neq 0, H = 0$), то поведение функций $\sigma_{v,2}^2(k)$ и $\sigma_a^2(k)$ полностью совпадает. Когда связь имеет реактивный характер ($H \neq 0$), то для ВЧ- и НЧ-компонент, как и для естественных шумов [6], в зависимости от соотношения параметров M, H, p и q (рис. 1) можно выделить два случая. В первом зависимости $\sigma_{v,2}^2(k)$ имеет один минимум, а во втором — появляется максимум (рис. 1, кривые 2 и 3). Однако значения k , при котором $\sigma_{v,2}^2(k)$ имеет максимальное значение, для каждого вида шума различны. Кроме того, и ход кривых имеет свои особенности. Например, при $k \gg |p/M|, |q/H|$ для НЧ-компоненты шума $\sigma_{v,2}^2(k) \sim k^{1-\gamma}$, для естественных шумов — $\sigma_{v,2}^2(k) \sim k$ [6] и, наконец, для ВЧ-компоненты $\sigma_{v,2}^2(k) \sim k^{1+\gamma}$. Интересно заметить, что во всех случаях как для естественных, так и для технических шумов $\sigma_{v,2}^2(k) = 0$ при $k = -q/H$.

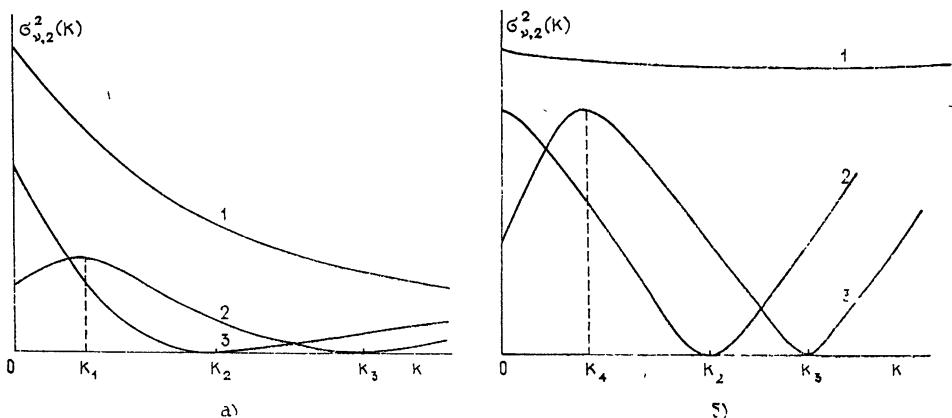


Рис. 1. Зависимости дисперсии частотных флюктуаций $\sigma_{v,2}^2(k)$ от коэффициента усиления системы АРУ;

$$k_1 = \frac{2H_3 p_3 - (1 + \gamma) M_3 q_3}{(\gamma - 1) M_3 H_3}, \quad k_2 = -\frac{q_2}{H_2},$$

$$k_3 = -\frac{q_3}{H_3}, \quad k_4 = \frac{2H_3 p_3 - (1 - \gamma) M_3 q_3}{(-\gamma - 1) M_3 H_3};$$

a) $S_c(\omega) = A/\omega^\gamma, \quad 1 - H = 0, \quad 2 - 2H_2 p_2 - (1 + \gamma) q_2 M_2 < 0,$
 $3 - 2H_3 p_3 - (1 + \gamma) q_3 M_3 > 0;$

b) $S_c(\omega) = A \omega^\gamma, \quad 1 - H = 0, \quad 2 - 2H_2 p_2 - (1 - \gamma) M_2 q_2 < 0,$
 $3 - 2H_3 p_3 - (1 - \gamma) M_3 q_3 > 0.$

Следовательно, понижение уровня частотных флюктуаций в генераторе с АРУ возможно только за счет уменьшения вклада амплитудных флюктуаций в частотные, причем если между звеном АРУ и задающим каскадом генератора имеет место реактивный характер связи, то можно полностью исключить $\sigma_{v,2}^2$ из дисперсии частотных флюктуаций.

В заключение резюмируем полученные результаты.

1) Разработана методика расчета технических флюктуаций в генераторах со звеном АРУ, обладающих $N/2$ степенями свободы.

2) Определен вклад элементов схемы в спектральные характеристики выходного сигнала кварцевого генератора.

3) Показано, что система АРУ может стабилизировать не только амплитуду, но и частоту выходного сигнала в результате уменьшения вклада амплитудных флуктуаций в частотные.

Авторы выражают благодарность А. В. Якимову и А. Н. Малахову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Соколов, Обмен опытом в радиопромышленности, № 11, 69 (1968).
2. Г. Б. Альтшуллер, Кварцевая стабилизация частоты, изд. Связь, М., 1974.
3. В. П. Соколов, Техника средств связи, серия РТ, № 4, 118 (1976).
4. E. P. Flechard and I. O. Israel, Proc. IEE, 43, № 5, 586 (1955).
5. R. A. Sykes, W. L. Smith and W. J. Spengler, IRE Trans. on Instrumentation, IM-11, № 3—4, 243 (1962).
6. Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, В. П. Соколов, Б. П. Фатеев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 11, 1618 (1978).
7. Е. В. Кулагин, В. П. Соколов, А. И. Пихтелев, Б. П. Фатеев, Техника средств связи, серия РТ, № 1, 19 (1977).
8. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
9. Н. И. Солин, Диссертация, КПИ, Киров, 1971.
10. А. В. Якимов, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 5, 727 (1969).
11. А. В. Якимов, Диссертация, МГУ, Москва, 1972.

Поступила в редакцию
22 декабря 1977 г.

TECHNICAL FLUCTUATIONS IN AGC QUARTZ-CRYSTAL OSCILLATOR

E. V. Kulagin, V. P. Sokolov, A. I. Pikhtelev, B. P. Fateev

Technical fluctuations in AGC oscillators have been investigated. The contribution of technical fluctuations of some elements to the spectral characteristics of the output signal is considered by the example of the capacitance three-point scheme of the transistor quartz-crystal oscillator. It is shown that the AGC system may improve essentially the technical characteristics of the oscillator.

УДК 621.373 187.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ В КВАРЦЕВОМ ГЕНЕРАТОРЕ С АРУ

В. П. Соколов, Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, Б. П. Фатеев

Определен вклад технических флуктуаций отдельных элементов схемы кварцевого генератора с АРУ в технические характеристики его выходного сигнала. С этой целью использовано моделирование шумов исследуемых элементов. Показано, что система АРУ существенно улучшает амплитудные и частотные характеристики выходного сигнала генератора. Определены требования к шумовым характеристикам отдельных элементов схемы задающего каскада генератора со звеном АРУ с целью получения высокой кратковременной стабильности частоты.

Теоретический анализ, проведенный в работах [1, 2], показал, что использование звена АРУ позволяет существенно уменьшить вклад шумов отдельных элементов в нестабильность частоты и амплитуды выходного сигнала кварцевого генератора. Однако экспериментальные исследования, посвященные изучению данного вопроса, практически отсутствуют, а в известных публикациях [3–7] авторы ограничиваются лишь описанием действия системы АРУ и общими рассуждениями, хотя генераторы с АРУ являются весьма перспективными устройствами, поскольку обладают существенными преимуществами перед обычными [6, 7]. В связи с этим экспериментальное изучение действия системы АРУ на задающий каскад генератора является актуальной задачей.

В настоящей работе экспериментально исследуются технические флуктуации в кварцевом генераторе с АРУ и проводится сравнение их с расчетами.

1. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПИСАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ

Действие флуктуаций элементов генератора на его спектральные и частотные характеристики изучалось методом моделирования. Например, для емкостей это производилось следующим образом [8]: параллельно емкости включался варикап, на который подавалось шумовое напряжение фликкерного характера в частотном диапазоне от 0,01 Гц до 12 кГц с параметром $\gamma = 0,96$. Причем условия модуляции подбирались с тем расчетом, чтобы выделить вклад исследуемого элемента в характеристики сигнала на фоне собственных шумов других элементов схемы. А для имитации флуктуаций параметров транзистора шумовой сигнал подавался через делитель на его базу (рис. 1). При работе генератора без АРУ переключатель *B* находился в положении 1, а при работе с АРУ — в положении 2. При этом режим работы транзистора подбирался так, чтобы уровень колебаний в генераторе при переключении оставался постоянным.

Подобное моделирование позволило подробно изучить механизмы влияния флуктуаций элементов на характеристики сигнала, определить дифференциальный вклад каждого элемента, рассмотреть действие на

него системы АРУ и осуществить переход к реально действующим шумам в схеме генератора.

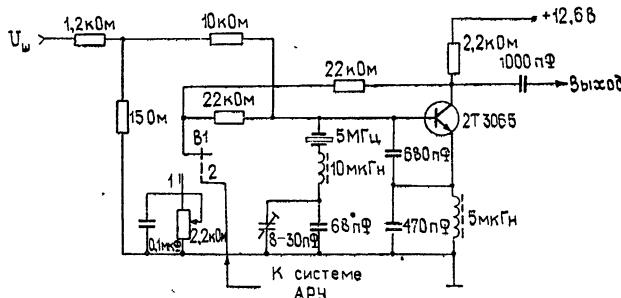


Рис. 1. Принципиальная схема кварцевого генератора со звеном модуляции.¹

Экспериментальные исследования амплитудных, фазовых и частотных флуктуаций кварцевых генераторов с АРУ и без него проводились на установке, описанной в [8], с добавлением устройства для измерения флуктуаций амплитуды выходного сигнала (рис. 2), содержащего усилитель высокой частоты (УВЧ), усилитель низкой частоты (УНЧ) и амплитудный детектор.

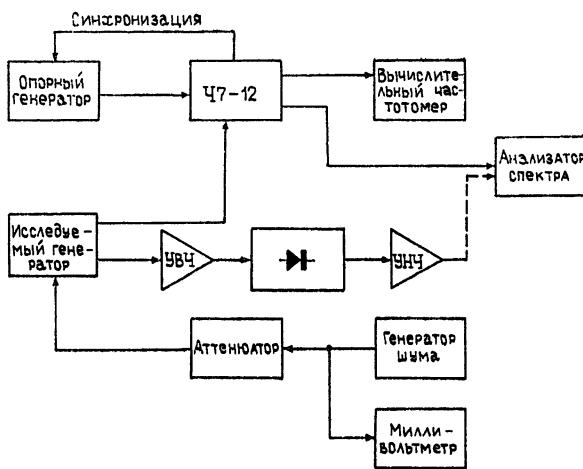


Рис. 2. Блок-схема измерительной установки технических характеристик выходного сигнала кварцевого генератора.

В режиме измерения спектра амплитудных флуктуаций сигнал с кварцевого генератора проходил через УВЧ с коэффициентом усиления $k_y = 23 \text{ dB}$ и поступал на амплитудный детектор. Сигнал с детектора подавался на УНЧ с $k_y = 57 \text{ dB}$ и измерялся анализатором спектра СЧ-29 на частотах $f = 3 \div 50 \text{ Гц}$, а в диапазоне от 20 Гц до 10 кГц прибором С5-3.

При измерении спектра фазовых флуктуаций и кратковременной нестабильности частоты сигнал с кварцевого генератора подавался на частотный компаратор Ч7-12. В режиме измерения спектра исследуемый сигнал снимался с выхода компаратора ФД1, а опорный генератор синхронизировался с выхода ФД2 для устранения биений между ге-

нераторами и обеспечения работы фазового детектора на линейном участке.

Для измерения кратковременной нестабильности частоты цепь синхронизации разрывалась, а исследуемый сигнал с выхода компаратора подавался на вычислительный частотомер, который обрабатывал по заданной программе результаты измерений и вычислял дисперсию Аллена [9, 10].

Для определения разрешающей способности аппаратуры при измерении спектра амплитудных флуктуаций на вход УВЧ подавался сигнал, равный исследуемому, с малошумящего генератора. Затем по выходному сигналу с УНЧ и была сделана оценка разрешающей способности аппаратуры. При измерении спектра фазовых флуктуаций и кратковременной нестабильности частоты на оба входа установки подавался сигнал с опорного генератора, и таким образом определялась разрешающая способность аппаратуры. Добавим, что предварительно опорный генератор сравнивался по стабильности частоты с квантовым генератором на парах рубидия [11].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, ИХ АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ С РАСЧЕТОМ

Результаты измерений и расчетов спектральных ($S_a(f)$, $S_\varphi(f)$) и частотных ($\sigma(\langle \dot{\varphi} \rangle_t)/\omega_0$) характеристик генератора для разных уровней шумовой модуляции (u_N) элементов и без нее представлены на рис. 3, 4 и 5. Для проведения расчетов использовались результаты работы [2]. При этом переход от фазового спектра к кратковременной нестабильности частоты осуществлялся известным образом [10].

Начнем анализ с вклада технических флуктуаций емкостей C_k , C_φ и C в характеристики выходного сигнала (рис. 3).

Прежде всего отметим три характерные особенности для фазового спектра: в НЧ-области ($f < 30 \text{ Гц}$) он не зависит от действия АРУ [8], экспериментальные данные полностью совпадают с расчетными, и с увеличением частоты анализа наблюдается крутое падение спектра:

$$S_\varphi(f) = \frac{A^1}{f^{2+\tau}}.$$

Если его пересчитать в частотный спектр ($S_\varphi(f) = (2\pi f)^2 S_\varphi(f)$), то легко видеть, что последний по своему характеру повторяет источник действующего шума. А это значит, что флуктуации реактивных параметров непосредственно приводят к частотным флуктуациям сигнала.

Заметим, что в области средних частот ($30 \text{ Гц} < f < 1 \text{ кГц}$) шумы реактивных элементов практически не вносят вклада в фазовый спектр сигнала.

Наоборот, в высокочастотной (ВЧ) области ($f > 1 \text{ кГц}$) фазовый спектр линейно возрастает с частотой за счет воздействия непосредственно на базу сигнала флуктуаций емкости C . Это явление нами было обнаружено ранее также теоретически [2, 8]. Следует отметить, что генератор с АРУ имеет более интенсивную ВЧ-компоненту по сравнению с обычным генератором [8]. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что технические шумы емкости C приводят к ВЧ-флуктуациям амплитуды [2], которые, проходя через звено АРУ, преобразуются в фазовые благодаря реактивному характеру связи.

Обозначим через Δ_1 дисперсионную компоненту, которая не зависит от времени усреднения τ , а через Δ_2 — дисперсионную компоненту,

которая обратно пропорциональна τ . Тогда, сравнивая результаты измерений кратковременной нестабильности частоты, обусловленной флуктуациями емкостей C_k , C_9 и C , обнаружим следующее: во-первых, во всех случаях нестабильность возрастает за счет компоненты Δ_1 , которая превалирует при $\tau > 0,1$ с, во-вторых, шумы емкости C приводят к увеличению нестабильности за счет компоненты Δ_2 , которая доминирует при $\tau < 0,1$ с.

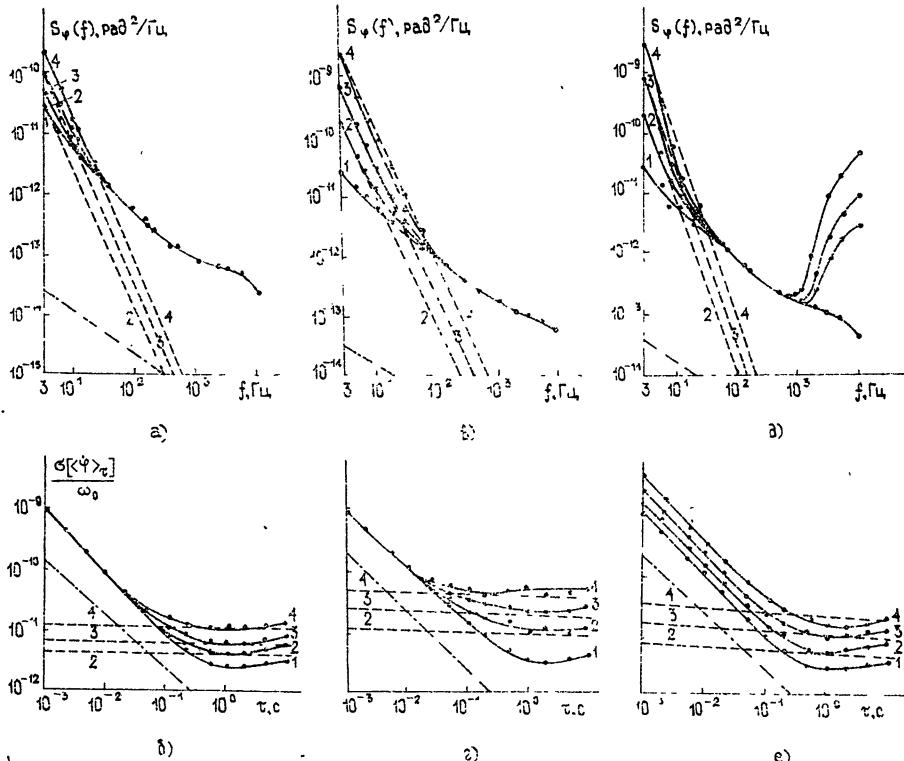


Рис. 3. Спектр фазовых флуктуаций и кратковременная нестабильность частоты генератора с искусственной модуляцией C_k (а, б), C_9 (в, г) и C (д, е).

Штрихпунктирная кривая — разрешающая способность аппаратуры; точки — экспериментальные результаты; штриховая кривая — расчетные зависимости, учитывающие шумы элементов с искусственной модуляцией;

$$1 - u_N = 0, \quad 2 - u_N = 12.5 \text{ мВ}, \quad 3 - u_N = 25 \text{ мВ}, \quad 4 - u_N = 50 \text{ мВ}.$$

Перейдем к анализу технических характеристик кварцевого генератора при шумовой модуляции параметров транзистора задающего каскада (рис. 4 и 5).

Для амплитудного спектра генератора без АРУ (рис. 4а) можно отметить две особенности: спектр резко возрастает с ростом уровня модуляции и соответствует спектру модулирующего сигнала за исключением ВЧ-области, где наблюдается его резкое уменьшение с увеличением частоты. Такое поведение связано с наличием «инерционности» генератора к изменениям амплитуды, причем время корреляции амплитудных флуктуаций равно p^{-1} .

В отличие от $S_a(f)$ спектр $S_\phi(f)$ полностью соответствует спектру шумового напряжения (рис. 4б), что подтверждается и теоретически.

Что же касается кратковременной стабильности частоты (рис. 4в), обусловленной флуктуациями параметров транзистора, то она ухудшается за счет обеих компонент Δ_1 и Δ_2 , как и при флуктуациях емкости

сти С. Однако в данном случае 2-я компонента определяется фазовым фликкер-шумом.

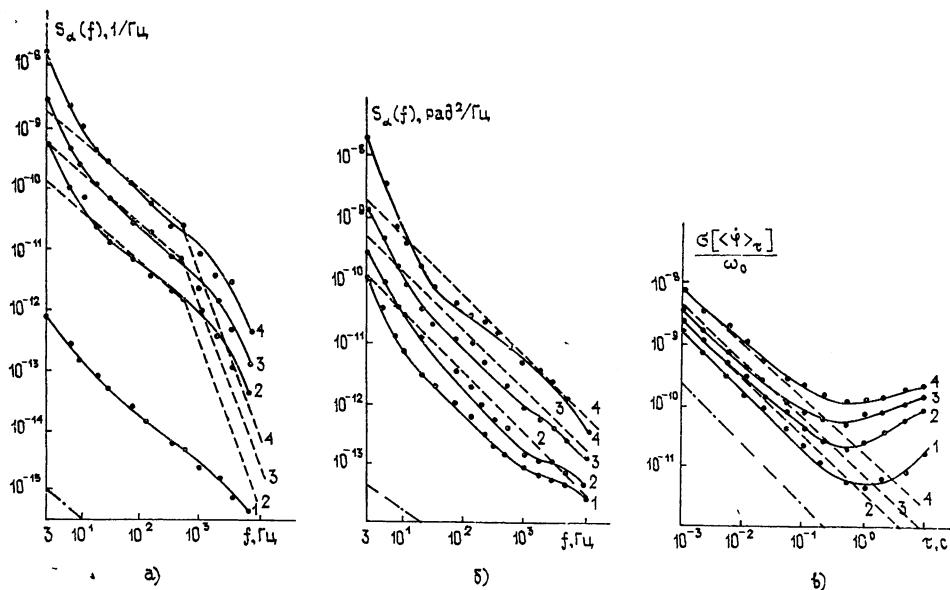


Рис. 4. Технические характеристики выходного сигнала (а) $S_\alpha(f)$; б) $S_\varphi(f)$; в) $\frac{\sigma(\langle \dot{\varphi} \rangle_\tau)}{\omega_0}$) кварцевого генератора без системы АРУ.

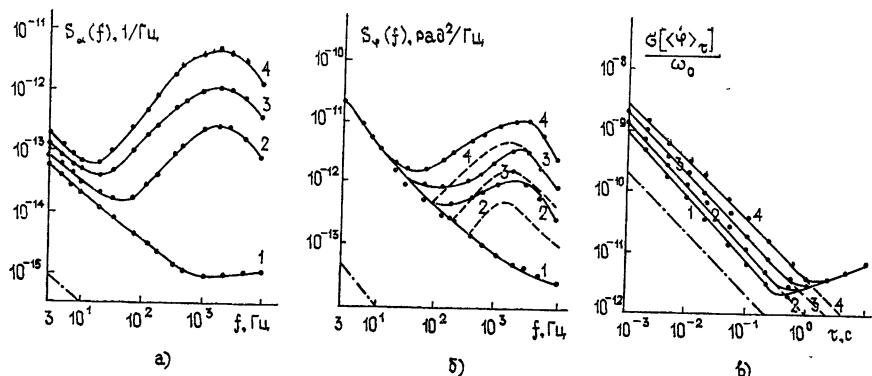


Рис. 5. Технические характеристики выходного сигнала (а) $S_\alpha(f)$; б) $S_\varphi(f)$; в) $\frac{\sigma(\langle \dot{\varphi} \rangle_\tau)}{\omega_0}$) кварцевого генератора с системой АРУ. Расчетная зависимость учитывала инерционность системы АРУ (~ 0.003 с).

Совершенно иной вид принимают характеристики выходного сигнала при модуляции параметров транзистора в генераторе с АРУ (рис. 5); в НЧ-области значения $S_\alpha(f)$ и $S_\varphi(f)$ резко уменьшаются с включением звена АРУ и практически достигают минимального уровня, определяемого реальными шумами. На частотах, начиная с $\sim 10^2$ Гц, на-

блудается примерно линейное возрастание $S_a(f)$ и $S_\phi(f)$ с ростом частоты, и после прохождения максимума при $f \sim 10^3$ Гц следует спад. Такое поведение объясняется инерционностью звена АРУ, имеющей постоянную времени $\sim 0,003$ с. Некоторое превышение экспериментальных данных над расчетными для $S_\phi(f)$ в ВЧ-области может быть обусловлено амплитудными флуктуациями генератора, которые, проходя через звено АРУ, поступают в задающий каскад и дестабилизируют фазу выходного сигнала. И, наконец, кратковременная стабильность частоты кварцевого генератора с АРУ (рис. 5в), в отличие от обычного генератора (рис. 4в), возрастает только за счет компоненты Δ_2 , которая связана с ВЧ-областью фазового спектра.

Перейдем далее к анализу влияния системы АРУ на характеристики генератора с реально действующими шумами. $S_a(f)$ и $S_\phi(f)$ обычного генератора практически совпадают со спектральными характеристиками генератора с АРУ в ВЧ-области. Однако в НЧ-области действие системы АРУ становится уже заметным и спектральные характеристики генератора с АРУ существенно улучшаются. В соответствии с фазовым спектром сигнала улучшается и его частотная стабильность с включением звена АРУ при $\tau \geq 1$ с примерно в 2—4 раза. Таким образом, в результате действия системы АРУ величина амплитудно-частотного преобразования флуктуаций в генераторе существенно уменьшается и, как следствие этого, возрастает стабильность частоты выходного сигнала.

На основании проведенных исследований можно определить взаимосвязь между шумовыми характеристиками элементов и стабильностью частоты. Учитывая, что система АРУ не изменяет уровень НЧ-флуктуаций частоты, получим, что требования к шумовым характеристикам элементов L_k , C_k , C_1 , C_2 , C_4 и L_2 [1, 2] остаются теми же, что и для обычного кварцевого генератора [8]. Фликкерные флуктуации параметра транзистора s_δ и емкости C приводят к ухудшению кратковременной стабильности частоты в результате возрастания дисперсионной компоненты Δ_2 , поэтому ее взаимосвязь с шумовыми характеристиками элементов (A_λ) достаточно представить для одного времени усреднения $\tau = 1$ с (см. таблицу).

Таблица

Элемент	C	s_δ
$\sigma(\langle\dot{\phi}\rangle_\tau)$	$2 \cdot 10^{-12}$	10^{-7}
ω_0	$2 \cdot 10^{-14}$	10^{-9}

Необходимо заметить, что с уменьшением s_δ и увеличением номинального значения C требования к шумовому параметру A_{ss} уменьшаются.

Подводя итоги проведенной работы, сформулируем основные результаты.

1. Определен вклад технических флуктуаций отдельных элементов кварцевого генератора с АРУ в амплитудные и частотные характеристики его выходного сигнала. С этой целью использовано моделирование шумов исследуемых элементов.

2. Показано, что система АРУ существенно улучшает технические характеристики кварцевого генератора.

3. С целью получения высокой кратковременной стабильности частоты определены требования к шумовым характеристикам отдельных элементов схемы задающего каскада генератора со звеном АРУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, В. П. Соколов, Б. П. Фатеев, Изв вузов — Радиофизика, 21, № 11, 1618 (1978).
2. Е. В. Кулагин, В. П. Соколов, А. И. Пихтелев, Б. П. Фатеев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 12, 1772 (1978).
3. R. A. Sykes, IRE Trans. on Instrumentation, IM-11, № 3—4, 243 (1962).
4. Г. Б. Альттуллер, Кварцевая стабилизация частоты, изд. Связь, М., 1974.
5. И. И. Соловьев, Измерительная техника, № 4, 60 (1972).
6. В. Н. Титов, А. В. Вишина, Тр. ВНИИФТРИ, № 3(33), 21 (1970).
7. В. П. Соколов, Техника средств связи, серия РТ, № 4, 118 (1976).
8. Е. В. Кулагин, В. П. Соколов, А. И. Пихтелев, Б. П. Фатеев, Техника средств связи, серия РТ, № 1, 19 (1977).
9. А. М. Алексин, В. В. Гладконогих, О. А. Дмитриев, Вопросы радиоэлектроники, серия РТ, № 1, 73 (1975).
10. J. Vagpés, IEEE Trans. on Instrumentation, IM-20, № 2, 105 (1971).
11. Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, Ю. В. Тимофеев, Вопросы радиоэлектроники, серия РТ, № 2, 97 (1974).

Поступила в редакцию
22 декабря 1977 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF TECHNICAL FLUCTUATIONS IN THE AGC QUARTZ-CRYSTAL OSCILLATOR

V. P. Sokolov, E. V. Kulagin, A. I. Pikhtelev, B. P. Fateev

The contribution of technical fluctuations of some elements of the AGC quartz-crystal oscillator scheme to the technical characteristics of its output signal has been estimated. For this purpose, the noise modelling of the elements investigated has been used. The AGC system is shown to improve essentially the amplitude and frequency characteristics of the output signal of the oscillator. The requirements have been defined for the noise characteristics of some elements of the master stage scheme of the AGC oscillator in order to obtain the high short-duration stability of the frequency.

УДК 538.56 : 519.25

**О ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ ТОНКОГО
ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ
С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

C. H. Молодцов, A. I. Саичев

В работе анализируется распространение тонкого лазерного пучка в волноводном канале с параболическим профилем показателя преломления при наличии крупномасштабных случайных неоднородностей. Найдены вероятностные распределения случайной ширины пучка, флюктуаций интенсивности в центре пучка и на оси волноводного канала. Показано, что вероятностные распределения случайной ширины пучка и флюктуаций интенсивности в его центре в критическом волноводном канале логарифмически нормальные, а дисперсия флюктуаций интенсивности в центре пучка насыщается в области сильных мерцаний.

1. Для передачи информации лазерным излучением на большие расстояния могут использоваться искусственные волноводные каналы, градиент показателя преломления которых создается, например, мощным лазерным пучком, распространяющимся в среде одновременно с тонким, менее интенсивным лазерным пучком, несущим информацию. Вопрос об использовании подобных каналов для связи на больших расстояниях обсуждался в ряде работ (см., например, [1, 2]). Однако рассмотрение в этих работах флюктуаций интенсивности лазерного излучения ограничено областью слабых флюктуаций интенсивности.

В данной работе находятся вероятностные распределения ширины тонкого лазерного пучка, флюктуаций интенсивности в его центре и на оси волноводного канала при наличии крупномасштабных случайных неоднородностей. Приведенный в статье анализ справедлив и в области сильных флюктуаций интенсивности пучка.

2. Распространение лазерного излучения в волноводном канале с параболическим профилем среднего показателя преломления при наличии крупномасштабных случайных неоднородностей описывается параболическим уравнением квазиоптики

$$2ik \frac{\partial E}{\partial x} + \Delta_{\perp} E + k^2 \left[\epsilon(x, \rho) - \frac{\rho^2}{F^2} \right] E = 0, \quad (1)$$

где $\epsilon(x, \rho)$ — флюктуации диэлектрической проницаемости среды, F — фокусное расстояние волноводного канала, x — продольная, $\rho = \{y, z\}$ — поперечная координаты, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Пусть на полупространство $x > 0$ нормально падает узкий лазерный пучок, начальная ширина l которого много меньше характерных масштабов неоднородностей среды l_0 . ($\lambda \ll l \ll l_0$). Перейдем от (1) к уравнению для случайной функции $B(x, R, S) \equiv E \left(x, R + \frac{S}{2} \right) \times \times E^* \left(x, R - \frac{S}{2} \right)$:

$$2ik \frac{\partial B}{\partial x} + 2(\nabla_S \nabla_R) B + k^2 \left[\epsilon \left(x, R + \frac{S}{2} \right) - \epsilon \left(x, R - \frac{S}{2} \right) \right] \times \\ \times B - 2k^2 \frac{RS}{F^2} B = 0. \quad (2)$$

Для узкого ($l \ll l_0$) пучка уравнение (2) можно приближенно записать ([3]):

$$i \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{k} (\nabla_S \nabla_R) B + \frac{k}{2} (S \nabla_R \epsilon) B - k \frac{RS}{F^2} B = 0. \quad (3)$$

Перейдем от (3) к уравнению для функции $f(x, R, v) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} B(x, R, S) e^{-ik(vS)} dS$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (v \nabla_R) f + \left[\frac{1}{2} \nabla_R \epsilon(x, R) - \frac{R}{F^2} \right] \nabla_v f = 0. \quad (4)$$

Его граничное условие

$$f(0, R, v) = f_0(R, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(0, R, S) e^{-ik(vS)} dS. \quad (5)$$

Уравнение (4) — в частных производных первого порядка и решается методом характеристик. Соответствующие (4) характеристические уравнения имеют вид

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{dR}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \nabla_R \epsilon(x, R) - \frac{R}{F^2}; \quad (6)$$

$$f|_{x=0} = f_0(R_0, v_0), \quad R|_{x=0} = R_0, \quad v|_{x=0} = v_0. \quad (7)$$

Решение уравнения (4) следующим образом выражается через решения уравнений (6) с учетом граничных условий (7):

$$f(x, R, v) = f_0[R_0(x, R, v), v_0(x, R, v)]. \quad (8)$$

Входящие сюда функции $R_0(x, R, v)$, $v_0(x, R, v)$ находятся обращением решений уравнений (6): $R = R(x, R_0, v_0)$, $v = v(x, R_0, v_0)$. Чтобы найти искомые функции $R_0(x, R, v)$ и $v_0(x, R, v)$, перейдем от (6) к уравнениям для $r = R - R^*$, $u = v - v^*$, характеризующих отклонения координат и углов прихода лучей [3] от соответствующих параметров некоторого центрального луча R^* , v^* :

$$\frac{dr}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} [\nabla_{R^*} \epsilon(x, r + R^*) - \nabla_{R^*} \epsilon(x, R^*)] - \frac{r}{F^2}, \\ r|_{x=0} = r_0 \equiv R_0 - R_0^*, \quad u|_{x=0} = u_0 \equiv v_0 - v_0^*; \quad (9)$$

$$\frac{dR^*}{dx} = v^*, \quad \frac{dv^*}{dx} = \frac{1}{2} \nabla_{R^*} \epsilon(x, R^*) - \frac{R^*}{F^2}, \\ R^*|_{x=0} = R_0^*, \quad v^*|_{x=0} = v_0^*. \quad (10)$$

Еще раз воспользовавшись узостью пучка, заменим уравнение (9) приближенными:

$$\frac{dr}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \nabla_{R^*} (r \nabla_{R^*}) \epsilon(x, R^*) - \frac{r}{F^2}. \quad (11)$$

Будем, не ограничивая общности, считать, что $R_0^* = v_0^* = 0$. При этом (8) принимает вид

$$f(x, R, v) = f_0[r_0(x, r, u), u_0(x, r, u)]. \quad (12)$$

Для нахождения $r_0(x, r, u)$ и $u_0(x, r, u)$ рассмотрим вместо (11) систему обращенных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{ds} &= -u_0, & \frac{du_0}{ds} &= -\frac{1}{2} \nabla_{R_0^*}(r_0, \nabla_{R_0^*}) \varepsilon(x - s, R_0^*) + \frac{r_0}{F^2}, \\ r_0|_{s=0} &= r, & u_0|_{s=0} &= u. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что $r_0|_{s=x} = r_0(x, r, u)$, $u_0|_{s=x} = u_0(x, r, u)$. Решение линейной системы (13) представим в виде суперпозиции фундаментальных решений:

$$\begin{aligned} r_0 &= \xi_1 r_y + \xi_2 r_z + \xi_3 u_y + \xi_4 u_z, \\ u_0 &= \eta_1 r_y + \eta_2 r_z + \eta_3 u_y + \eta_4 u_z, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\xi_i = \xi_{iy} y^0 + \xi_{iz} z^0$, $\eta_i = \eta_{iy} y^0 + \eta_{iz} z^0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\eta_i, \quad \frac{d\eta_i}{ds} = -\frac{1}{2} \nabla_{R_0^*}(\xi_i \nabla_{R_0^*}) \varepsilon(x - s, R_0^*(x, s)) + \frac{\xi_i}{F^2}. \quad (15)$$

Границные условия к уравнениям (15) при $s = 0$ таковы:

$$\begin{aligned} \xi_{py}(x, 0) &= \xi_{qz}(x, 0) = \eta_{ny}(x, 0) = \eta_{mz}(x, 0) = 0 \\ (p &\neq 1, q \neq 2, n \neq 3, m \neq 4; \quad p, q, n, m = 1 \div 4), \\ \xi_{1y}(x, 0) &= \xi_{2z}(x, 0) = \eta_{3y}(x, 0) = \eta_{4z}(x, 0) = 1. \end{aligned}$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$\begin{aligned} f(x, R, v) &= f_0[(R_y - R_y^*) \xi_1 + (R_z - R_z^*) \xi_2 + (v_y - v_y^*) \xi_3 + \\ &+ (v_z - v_z^*) \xi_4, \quad (R_y - R_y^*) \eta_1 + (R_z - R_z^*) \eta_2 + (v_y - v_y^*) \eta_3 + \\ &+ (v_z - v_z^*) \eta_4]. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим для простоты гауссов коллимированный при $x = 0$ пучок:

$$E_0(\varrho) = \exp\left(-\frac{\varrho^2}{2l^2}\right), \quad f_0(R, v) = 4\pi l^2 \exp\left(-\frac{R^2}{l^2} - k^2 l^2 v^2\right).$$

При этом (16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, R, v) &= 4\pi l^2 \exp\left\{-\frac{1}{l^2} [(R_y - R_y^*) \xi_1 + (R_z - R_z^*) \xi_2 + \right. \\ &+ (v_y - v_y^*) \xi_3 + (v_z - v_z^*) \xi_4]^2 - k^2 l^2 [(R_y - R_y^*) \eta_1 + \\ &+ (R_z - R_z^*) \eta_2 + (v_y - v_y^*) \eta_3 + (v_z - v_z^*) \eta_4]^2\right\}. \end{aligned}$$

3. Проанализируем флюктуации интенсивности тонкого лазерного пучка:

$$I(R, x) = \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, R, v) dv =$$

$$= \frac{1}{\theta} \exp \left\{ - \frac{k^2 l^2}{\theta^2} [a(x)(R_y - R_y^*)^2 + b(x)(R_z - R_z^*)^2 + 2C(x)(R_y - R_y^*)(R_z - R_z^*)] \right\}. \quad (17)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} a &\equiv h_{11}\theta^2 - h_{14}^2 h_{33} - h_{13}^2 h_{44} + 2h_{13}h_{14}h_{34}, \\ b &\equiv h_{22}\theta^2 - h_{24}^2 h_{33} - h_{23}^2 h_{44} + 2h_{23}h_{24}h_{34}, \\ C &\equiv h_{12}\theta^2 - h_{14}h_{24}h_{33} - h_{13}h_{23}h_{44} + h_{13}h_{24}h_{34} + h_{23}h_{14}h_{34}, \\ h_{ij} &\equiv \frac{1}{k^2 l^4} (\xi_{iy}\xi_{jy} + \xi_{iz}\xi_{jz}) + (\eta_{iy}\eta_{jy} + \eta_{iz}\eta_{jz}) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \\ \theta^2 &\equiv h_{33}h_{44} - h_{34}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что θ имеет смысл безразмерной эффективной ширины пучка. Будем считать флуктуации $\varepsilon(x, \rho)$ гауссовыми с корреляционной функцией: $\langle \varepsilon(x_1, R) \varepsilon(x_2, R + \rho) \rangle = A[\rho]\delta(x_1 - x_2)$. В диффузационном приближении вместо (10), (15) удобно рассматривать статистически эквивалентные им уравнения [4]

$$\begin{aligned} \frac{dR^*_{\{y\}}}{dx} &= v^*_{\{y\}}, \quad \frac{dv^*_{\{y\}}}{dx} = \alpha_{\{y\}}(x) - \frac{R^*_{\{y\}}}{F^2}, \\ \frac{d\xi_i{}_{\{z\}}}{dx} &= -\eta_i{}_{\{z\}}, \quad \frac{d\eta_i{}_{\{z\}}}{dx} = -\xi_i{}_{\{z\}}\beta_1{}_{\{z\}}(x) - \\ &- \xi_i{}_{\{z\}}\beta_2(x) + \frac{\xi_i{}_{\{y\}}}{F^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где R^* , v^* , ξ_i , η_i зависят только от продольной координаты x , а $\alpha_y(x)$, $\alpha_z(x)$, $\beta_{1y}(x)$, $\beta_{1z}(x)$, $\beta_2(x)$ — гауссовые случайные функции с корреляционными функциями

$$\begin{aligned} \langle \alpha_y(x_1)\alpha_y(x_2) \rangle &= \langle \alpha_z(x_1)\alpha_z(x_2) \rangle = D\delta(x_1 - x_2), \\ \langle \alpha_y(x_1)\alpha_z(x_2) \rangle &= \langle \alpha(x_1)\beta(x_2) \rangle = \langle \beta_2(x_1)\beta_1{}_{\{y\}}(x_2) \rangle = 0, \\ \langle \beta_{1y}(x_1)\beta_{1y}(x_2) \rangle &= \langle \beta_{1z}(x_1)\beta_{1z}(x_2) \rangle = 2B\delta(x_1 - x_2), \\ \langle \beta_{1y}(x_1)\beta_{1z}(x_2) \rangle &= \langle \beta_2(x_1)\beta_2(x_2) \rangle = \frac{2}{3}B\delta(x_1 - x_2), \\ D &\equiv -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 A[\rho]}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=0}, \quad B \equiv \frac{1}{8} \frac{\partial^4 A[\rho]}{\partial \rho^4} \Big|_{\rho=0}. \end{aligned}$$

Мы ограничимся рассмотрением двумерного случая, когда неоднородности среды и все параметры лазерного пучка зависят только от продольной x и одной поперечной координаты y . В этом случае формула (17) упрощается:

$$I(x, R) = \frac{1}{\theta} \exp \left[- \frac{(R - R^*)^2}{\theta^2 l^2} \right]; \quad (19)$$

$$\theta^2 \equiv \frac{1}{k^2 l^4} \xi^2 + \eta^2, \quad (20)$$

ξ и η удовлетворяют аналогичным (18) уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= -\eta, & \frac{d\eta}{dx} &= -\xi \left[\gamma(x) - \frac{1}{F^2} \right], \\ \xi(0) &= 0, & \eta(0) &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Координата центра пучка R^* подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R^*}{dx^2} + \frac{1}{F^2} R^* &= \alpha(x), \\ R^*(0) = \frac{dR^*}{dx} \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Случайные функции $\gamma(x)$ и $\alpha(x)$ гауссовые. Их корреляционные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \gamma(x_1) \gamma(x_2) \rangle &= 2B\delta(x_1 - x_2), \\ \langle \alpha(x_1) \alpha(x_2) \rangle &= D\delta(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

4. Исследуем сначала флуктуации ширины пучка, распространяющегося в случайно-неоднородном волноводном канале. Перейдем от стохастических уравнений (21) для параметров ξ и η , характеризующих случайную ширину пучка (см. (20)), к уравнению для среднего квадрата ширины пучка $\langle \theta^2 \rangle$:

$$\frac{d^3 \langle \theta^2 \rangle}{dx^3} + \frac{4}{F^2} \frac{d \langle \theta^2 \rangle}{dx} = 4B \langle \theta^2 \rangle; \quad (23)$$

$$\langle \theta^2 \rangle \Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{d}{dx} \langle \theta^2 \rangle \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} \langle \theta^2 \rangle \Big|_{x=0} = 2 \left(\frac{1}{k^2 l^4} - \frac{1}{F^2} \right). \quad (24)$$

Решая (23) вместе с (24), получаем

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle(x) &= a_1 \exp \left(\sqrt[3]{2B} x_1 x \right) + a_2 \exp \left(-\sqrt[3]{\frac{2B}{2}} x_1 x \right) \times \\ &\times \cos \sqrt[3]{\frac{2B}{2}} x_2 x + a_3 \exp \left(-\sqrt[3]{\frac{2B}{2}} x_1 x \right) \sin \sqrt[3]{\frac{2B}{2}} x_2 x, \\ x_{\{2\}}^{\{1\}} &\equiv \sqrt[3]{\sqrt[3]{1 + \frac{16}{27} B^{-2} F^{-6}} + 1 \mp \sqrt[3]{\sqrt[3]{1 + \frac{16}{27} B^{-2} F^{-6}} - 1}}, \\ a_1 &\equiv \frac{(4/3)\alpha + (1/3)x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}, \quad a_2 \equiv \frac{4}{3} \frac{(2x_1^2 - \alpha)}{(3x_1^2 + x_2^2)}, \\ a_3 &\equiv \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \frac{x_1}{x_2} \frac{(x_1^2 - x_2^2 - 2\alpha)}{(3x_1^2 + x_2^2)}, \quad \alpha \equiv \frac{2}{\sqrt[3]{4B^2}} \left(\frac{1}{k^2 l^4} - \frac{1}{F^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Если флуктуации ширины пучка малы на расстояниях порядка F ($BF^3 \ll 1$), то из (25) получаем следующее выражение для $\langle \theta^2 \rangle$:

$$\langle \theta^2 \rangle(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{F^2}{k^2 l^4} \right) e^{BF^2 x} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{F^2}{k^2 l^4} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} BF^2 x \right) \cos \frac{2x}{F}. \quad (26)$$

Для критического волноводного канала ($F = kl^2$) (26) переходит в $\langle \theta^2 \rangle_{kp}(x) = \exp(BF^2 x)$. В пределе $F \rightarrow \infty$ находим из (25) средний квадрат ширины пучка в среде без регулярной фокусировки:

$$\begin{aligned} \langle \theta^2 \rangle(x) &= \frac{1}{3} (1 + C^2) \exp(\sqrt[3]{4B} x) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{C^2}{2} \right) \exp \left(-\sqrt[3]{\frac{B}{2}} x \right) \times \\ &\times \cos \sqrt[3]{\frac{B}{2}} x - \frac{C^2}{\sqrt[3]{3}} \exp \left(-\sqrt[3]{\frac{B}{2}} x \right) \sin \sqrt[3]{\frac{B}{2}} x, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$C^2 \equiv (k^2 l^4 \sqrt[3]{2B^2})^{-1}.$$

Чтобы количественно сравнить выражения (26) и (27) для $\langle \theta^2 \rangle$ при наличии и в отсутствие волноводного канала, возьмем следующие допустимые значения параметров лазерного пучка, волноводного канала и неоднородностей среды [5]: $\lambda = 0,6328 \text{ мк}$, $l = 1 \text{ мм}$, $l_0 = 1 \text{ см}$, $F_{kp} = 10 \text{ м}$, $B = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-3}$. При этом несложный расчет показывает, что волноводный канал существенно уменьшает дисперсию ширины пучка по сравнению с нефокусирующей средой. Так, например, уже на дистанции $x = 100 \text{ м}$ относительное значение среднего квадрата ширины пучка в волноводном канале составляет приблизительно $\frac{\langle \theta^2 \rangle_F}{\langle \theta^2 \rangle_{F \rightarrow \infty}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$. Причем это отношение сильно уменьшается с ростом x .

5. Обсудим флуктуации интенсивности в центре тонкого лазерного пучка, которые, как следует из (19), описываются выражением

$$I(x, R^*) = \frac{1}{\theta}. \quad (28)$$

Таким образом, нахождение вероятностного распределения интенсивности в центре пучка тесно связано с определением статистики ширины пучка θ . Поскольку уравнения (21), определяющие статистику θ , линейны, можно, в принципе, определить моменты ширины пучка любого порядка аналогично тому, как это сделано выше для $\langle \theta^2 \rangle$. Однако вопрос о вероятностном распределении $\theta(x)$, тем не менее, остается открытым, так как не удается решить уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП) для двумерной плотности вероятности $W(\xi, \eta; x)$ (см., например, [6]). Наличие волноводного канала существенно упрощает задачу отыскания вероятностного распределения ширины пучка и, следовательно, распределения интенсивности в его центре. Действительно, поскольку (21) представляют собой уравнения осциллятора с флуктуациями частоты $\gamma(x)$, то для нахождения статистики $\theta(x)$ можно воспользоваться методом усреднения по периоду осцилляций (см., например, [6, 7]). Представим решения уравнений (21) в виде

$$\begin{aligned} \xi(x) &= A(x) \sin \left[\frac{x}{F} + \varphi(x) \right], \\ \eta(x) &= -\frac{1}{F} A(x) \cos \left[\frac{x}{F} + \varphi(x) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где $A(x)$, $\varphi(x)$ — медленные функции по сравнению с $\cos \frac{x}{F}$. Переайдем от (29) к уравнениям для медленных огибающих $V(x) \equiv \ln \frac{|A(x)|}{F}$ и $\varphi(x)$:

$$\dot{V} = \frac{F}{2} \gamma(x) \sin 2\Psi,$$

$$\dot{\varphi} = -F \gamma(x) \sin^2 \Psi, \quad \Psi \equiv \frac{x}{F} + \varphi(x).$$

Переходя, в свою очередь, от них к уравнению ЭФП для плотности вероятности $W(V, \varphi; x)$ и затем усредняя его по периоду осцилляций, используя медленность функций $V(x)$ и $\varphi(x)$ на периоде фокусировки, получаем следующее уравнение для усредненного вероятностного распределения $\tilde{W}(V, \varphi; x)$ [6]:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} + \frac{BF^2}{4} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial V} = \frac{BF^2}{8} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial V^2} + \frac{3}{8} BF^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \varphi^2}. \quad (30)$$

Отметим, что использованный здесь метод усреднения справедлив при условии $BF^3 \ll 1$, означающем малость флуктуаций интенсивности пучка на трассах порядка фокусного расстояния волноводного канала. Решение уравнения (30) с граничным условием $W(V, \varphi; 0) = \delta(V) \delta(\varphi)$ таково:

$$W(V, \varphi; x) = \frac{1}{2\pi \sigma_V(x) \sigma_\varphi(x)} \exp \left[-\frac{(V - \langle V \rangle(x))^2}{2\sigma_V^2(x)} - \frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2(x)} \right], \quad (31)$$

где $\langle V \rangle(x) = \sigma_V^2(x) = \frac{1}{4} BF^2 x$, $\sigma_\varphi^2(x) = \frac{3}{4} BF^2 x$. Как легко видеть из (20), (29), связь флуктуаций ширины пучка с медленными огибающими $V(x)$ и $\varphi(x)$ имеет следующий вид:

$$\theta^2(x) = e^{2V} \left[\cos^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) + d^2 \sin^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) \right], \quad d \equiv \frac{F}{kl^2}. \quad (32)$$

Используя (31), (32), (28), имеем следующие выражения для вероятностных распределений случайной ширины пучка и интенсивности в его центре:

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta; x) &= \frac{1}{2\pi \sigma_V \sigma_\varphi} \frac{1}{\theta} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2} - \frac{1}{2\sigma_V^2} (\ln \theta - \langle V \rangle - \ln \sqrt{\cos^2 \Psi + d^2 \sin^2 \Psi})^2 \right] d\varphi, \\ W_I(I; x) &= \frac{1}{2\pi \sigma_V \sigma_\varphi} \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2} - \frac{1}{2\sigma_V^2} \times \right. \\ &\times \left. (\ln I + \langle V \rangle + \ln \sqrt{\cos^2 \Psi + d^2 \sin^2 \Psi})^2 \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Этим вероятностным распределениям отвечает следующий набор моментов ширины пучка и его интенсивности в центре:

$$\langle \theta^n \rangle (x) = g_n(x) \exp \left[n \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{BF^2}{4} x \right],$$

$$g_n(x) \equiv \frac{1}{V 2 \pi \sigma_\varphi^2(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) + d^2 \sin^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) \right]^{-n/2} \times \quad (34)$$

$$\times \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2 \sigma_\varphi^2(x)} \right) d\varphi;$$

$$\langle I^n \rangle (x) = f_n(x) \exp \left[n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{BF^2}{4} x \right],$$

$$f_n(x) \equiv \frac{1}{V 2 \pi \sigma_\varphi^2(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) + d^2 \sin^2 \left(\frac{x}{F} + \varphi \right) \right]^{-n/2} \times \quad (35)$$

$$\times \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2 \sigma_\varphi^2(x)} \right) d\varphi.$$

Заметим, что выражение для $\langle \theta^2 \rangle$, следующее из (34) и полученное методом усреднения, совпадает с найденным ранее выражением (25) для среднего квадрата ширины пучка, полученным из точного результата (25) при условии $BF^3 \ll 1$, которое является условием применимости описанного выше метода усреднения.

Как следует из (33), вероятностное распределение $I(x, R^*)$ в области слабых флуктуаций интенсивности ($BF^2 x \ll 1$) можно считать гауссовым с характеристиками

$$\langle I \rangle = \theta_0^{-1}, \quad \sigma_I^2 = \theta_0^{-2} \frac{BF^2}{4} x,$$

где $\theta_0 = \sqrt{\cos^2 \frac{x}{F} + d^2 \sin^2 \frac{x}{F}}$ — ширина пучка в отсутствие флуктуаций среды.

Рассмотрим асимптотику выражения (33) в области очень сильных флуктуаций интенсивности ($BF^2 x \gg 1$). В этой области вероятностное распределение интенсивности в центре пучка описывается следующим асимптотическим выражением:

$$W_I(I; x) \approx \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{\pi}{2} BF^2 x}} \frac{1}{I} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{2}{BF^2 x} \left(\ln I + \frac{BF^2}{4} x + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \sqrt{\cos^2 \Psi + d^2 \sin^2 \Psi} \right)^2 \right] d\Psi. \quad (36)$$

Соответствующие (36) выражения для моментов интенсивности таковы:

$$\langle I^n \rangle (x) = f_n \exp \left[n \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{BF^2}{4} x \right], \quad (37)$$

$$f_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \Psi + d^2 \sin^2 \Psi)^{-n/2} d\Psi,$$

Для моментов высоких порядков числа f_n имеют следующую асимптотику:

$$f_n \sim \left[\frac{1}{2} (1 + d^2) \right]^{-n/2} \frac{\exp\left(\gamma \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\gamma \frac{n}{2}}} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $\gamma \equiv |1 - d^2|/(1 + d^2)$.

Дисперсия флюктуаций интенсивности в центре пучка описывается, согласно (35), выражением

$$\sigma_I^2(x) = f_2(x) - f_1^2(x) \exp\left(-\frac{BF^2}{4}x\right).$$

Как следует отсюда и из (37), имеет место эффект насыщения дисперсии флюктуаций интенсивности в центре пучка в области сильных флюктуаций интенсивности.

Приведенные выше выражения особенно упрощаются в случае критического волноводного канала ($d \equiv F/kl^2 = 1$). Как следует из (33), флюктуации интенсивности в центре пучка в критическом волноводном канале логарифмически нормальны:

$$W_{kp}(I; x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} BF^2 x}} \frac{1}{I} \exp\left[-\frac{\left(\ln I + \frac{1}{4} BF^2 x\right)^2}{\frac{1}{2} BF^2 x}\right]. \quad (38)$$

Моменты интенсивности в центре пучка в случае критического волноводного канала изменяются с ростом длины трассы по экспоненциальному закону:

$$\langle I^n \rangle_{kp}(x) = \exp\left[n\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{BF^2}{4}x\right]. \quad (39)$$

Заметим, что согласно (34) все моменты ширины пучка экспоненциально нарастают с увеличением x , что связано с уширением пучка в случайно-неоднородной среде. Однако редкие, но большие выбросы интенсивности в центре пучка, обусловленные его случайной фокусировкой, приводят, согласно (39), к экспоненциальному росту всех высших моментов $I(x, R^*)$, начиная с третьего.

5. Перейдем к анализу флюктуаций интенсивности на оси волноводного канала. Согласно (19) они описываются выражением

$$I(x, 0) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{R^{*2}}{\theta^2 l^2}\right).$$

Если статистика интенсивности в центре пучка обусловлена только его случайными уширениями и сжатиями, то на статистику интенсивности на оси волноводного канала кроме этого влияют еще случайные блуждания пучка как целого. Как следует из (21), (22), случайные блуждания R^* и уширения θ пучка статистически независимы. Причем случайные отклонения $R^*(x)$ центрального луча от оси x распределены по гауссову закону с характеристиками

$$\langle R^* \rangle = 0, \quad \langle R^{*2} \rangle = \frac{1}{2} DF^2 \left(x - \frac{F}{2} \sin \frac{2x}{F} \right). \quad (40)$$

Используя найденное выше вероятностное распределение ширины пучка (33) и гауссово распределение R^* , получаем следующее выражение для вероятностного распределения интенсивности на оси волноводного канала:

$$W_s(I; x) = \frac{l}{V^{2\pi} \langle R^{*2} \rangle} \frac{1}{I} \int_0^{1/I} \frac{\theta(\theta I)^{\theta^2 l^2/2} e^{-R^{*2}}}{V |\ln \theta I|} W_\theta[\theta; x] d\theta, \quad (41)$$

где $W_\theta[\theta; x]$ определено выражением (33). Распределению (41) соответствует следующий набор моментов интенсивности на оси канала:

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = \left\langle \left[\theta^{n-1} \sqrt{\theta^2 + 2n \frac{\langle R^{*2} \rangle}{l^2}} \right]^{-1} \right\rangle.$$

Если флюктуации интенсивности в центре пучка малы ($BF^2x \ll 1$), то статистика интенсивности на оси канала определяется эффектом случайных дрожаний пучка. Вероятностное распределение $I(x, 0)$ в этой области получается из (41), если положить $W_\theta(\theta; x) = \delta(\theta - \theta_0)$:

$$W_s(I; x) \approx \begin{cases} \frac{\theta_0^{1/x}}{V^{1/x}} \frac{I^{1/x-1}}{V |\ln I \theta_0|}, & \theta_0 I < 1 \\ 0, & \theta_0 I > 1 \end{cases}, \quad (42)$$

где

$$x(x) \equiv \frac{2 \langle R^{*2} \rangle(x)}{l^2 \theta_0^2(x)}, \quad \theta_0^2(x) = \cos^2 \frac{x}{F} + \frac{F^2}{k^2 l^4} \sin^2 \frac{x}{F}$$

— квадрат «невозмущенной» ширины пучка. Заметим, что распределение (42), обусловленное только эффектом случайных блужданий пучка, согласуется с соответствующим результатом работы [8], в которой анализируется вероятностное распределение интенсивности пучка в среде без регулярной фокусировки ($F \rightarrow \infty$) с моделью неоднородностей среды в виде случайных клиньев.

Рассмотрим флюктуации интенсивности на оси канала в случае сильных флюктуаций интенсивности в центре пучка ($BF^2x \geq 1$). Как легко видеть из (25) и (40), в начале области сильных мерцаний в случае узкого по сравнению с масштабом неоднородностей пучка выполняется неравенство

$$\langle R^{*2} \rangle \gg \langle \theta^2 \rangle l^2. \quad (43)$$

При анализе сильных флюктуаций интенсивности пучка мы ограничимся теми дистанциями, на которых выполнено (43). При этом из (41) получаем следующее выражение для плотности вероятности $I(x, 0)$ в области сильных мерцаний:

$$W_s(I; x) = \frac{2l}{V^{2\pi} \langle R^{*2} \rangle} \frac{1}{I^3} \int_0^\infty e^{-2z^2} W_\theta \left[\frac{1}{I} e^{-z^2}; x \right] dz. \quad (44)$$

Соответствующие распределению (44) моменты интенсивности $I(x, 0)$ в области сильных мерцаний оказываются связанными с моментами интенсивности $I(x, R^*)$ в центре пучка следующим соотношением:

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = \frac{l}{V^{2n} \langle R^{*2} \rangle(x)} \langle I^{n-1}(x, R^*) \rangle. \quad (45)$$

* Буквой «э» условимся обозначать статистику интенсивности на оси волноводного канала (эйлерова статистика).

Исследуем флуктуации интенсивности на оси критического волноводного канала в области сильных мерцаний. В этом случае (44) принимает следующий вид:

$$W_s^{kp}(I; x) = \frac{l}{2\pi \sqrt{\langle R^{*2} \rangle}} \exp\left(\frac{BF^2}{8}x\right) \frac{\sqrt{\left|\frac{2}{BF^2 x} \ln I + 1\right|}}{I^2} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{BF^2 x} (\ln I)^2\right] K_{1/4}\left[\frac{BF^2}{4}x \left(\frac{2}{BF^2 x} \ln I + 1\right)^2\right]. \quad (46)$$

Асимптотика выражения (46) при больших интенсивностях такова:

$$W_s^{kp}(I; x) \sim \frac{l}{2\sqrt{\pi \langle R^{*2} \rangle}} \frac{\exp\left[-\frac{2}{BF^2 x} \left(\ln I + \frac{BF^2}{4}x\right)^2\right]}{I^2 \sqrt{\ln I}}. \quad (47)$$

Как следует из (47), эффект случайных блужданий пучка как целого приводит к более быстрому спаданию «хвостов» вероятностного распределения интенсивности на оси критического канала по сравнению с логарифмически нормальным законом распределения интенсивности в центре пучка (38). Согласно (45), (39), моменты интенсивности на оси критического волноводного канала в области сильных мерцаний ведут себя следующим образом:

$$\langle I^n(x, 0) \rangle_{kp} = \frac{l}{\sqrt{2n \langle R^{*2} \rangle(x)}} \exp\left[(n-1)(n-3)\frac{BF^2}{8}x\right], \quad (48)$$

где $\langle R^{*2} \rangle(x)$ в области сильных мерцаний имеет следующий вид (см. (40)): $\langle R^{*2} \rangle(x) \approx \frac{1}{2} DF^2 x$. Согласно (48), первые моменты ($n = 1 \div 3$) распределения интенсивности на оси критического канала уменьшаются с ростом дистанции x , что обусловлено ростом дисперсии случайных отклонений пучка от направления первоначального распространения. Причем наиболее быстро спадает с ростом x второй момент $\langle I^2(x, 0) \rangle$, что связано с уменьшением по мере распространения пучка средней интенсивности в его центре. Редкие большие выбросы интенсивности в центре пучка, обусловленные его случайной фокусированной и приводящие к экспоненциальному росту моментов интенсивности в центре пучка (начиная с третьего момента), приводят и к росту высших моментов ($n \geq 4$) интенсивности на оси волноводного канала.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Воробьев, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 12, 1867 (1972).
2. В. П. Вардья, М. М. Дедловский, И. П. Коршунов, Р. Ф. Матвеев, В сб. тезисов докладов IV Всесоюзной конференции по физическим основам передачи информации лазерным излучением, Киев, 1976, стр. 193.
3. А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 4, 543 (1978).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, 500 (1973).
5. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, Лазерное излучение в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1976.
6. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.

7. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, изд. Наукова думка, Киев, 1971.
8. K. Furutsu, J. Opt. Soc. Am., 62, 240 (1972).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
18 января 1978 г.

INTENSITY FLUCTUATIONS OF A THIN LASER BEAM IN A WAVEGUIDE CHANNEL WITH LARGE SCALE RANDOM INHOMOGENEITIES

S. N. Molodtsov, A. I. Saichev

The paper analyzes the propagation of a thin laser beam in a waveguide channel with a parabolic profile of the refractive index in the presence of large scale random inhomogeneities. The probability distributions of a random beamwidth, the intensity fluctuations in the center of the beam as well as on the axis of the waveguide channel have been found. The probability distributions of the random beamwidth and intensity fluctuations in its center are shown to be normal in the critical waveguide channel and the dispersion of intensity fluctuations in the beam center is saturated in the region of strong scintillations.

УДК 538.56 : 519 25

О СТАТИСТИКЕ ВОЛНЫ СО СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

C. K. Липатов, A. I. Саичев

Находятся и исследуются вероятностные распределения частоты, интенсивности и других параметров волны со случайной частотной модуляцией, распространяющейся в диспергирующей среде. В частности, найдены вероятностные распределения плотности числа фотонов в предельных случаях линейной и квадратичной дисперсионных характеристик среды. Показано, что в последнем случае вероятностное распределение плотности числа фотонов имеет особенность, обусловленную отсутствием временной фокусировки волны в окрестностях точек перегиба дисперсионной кривой. Подробно обсуждается статистика частоты волны в многочастотном режиме.

1. При распространении электромагнитной волны в однородной диспергирующей среде случайная частотная модуляция приводит к тому, что отдельные участки волны движутся с разной групповой скоростью. В результате, как и при распространении в случайно-неоднородной среде, возникают области сжатия и разрежения (см., например, [1, 2]) и сопровождающие их флуктуации интенсивности волны.

В данной работе, в приближении геометрической оптики и одномерной частотной модуляции плоской волны, находятся вероятностные распределения плотности числа фотонов, интенсивности, частоты и другие статистические характеристики случайно частотно модулированной волны, распространяющейся в однородной диспергирующей среде. Полученные ниже результаты могут быть также использованы при анализе статистики частотно модулированных волн в волноводах, длинных линиях с дисперсией и т. д.

2. Как известно, [1, 2], частота $\omega(z, t)$ и интенсивность $\Gamma(z, t)$ одномерной волны, распространяющейся в диспергирующей среде, удовлетворяют в приближении геометрической оптики следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (v(\omega) N) = 0. \quad (2)$$

Входящая в (2) плотность числа фотонов $N(z, t)$ следующим образом связана с интенсивностью волны: $\Gamma(z, t) = \omega(z, t)N(z, t)$.

Уравнения (1), (2) можно решать как с граничными, так и с начальными условиями, что соответствует физически различным ситуациям. Однако математически обе задачи эквивалентны, так как замена $\omega \rightarrow \omega$, $z \rightarrow t$, $v \rightarrow 1/v$, $N \rightarrow N/v$ переводит уравнения (1), (2) сами в себя. Поэтому здесь, для определенности, мы дополним уравнения (1), (2) начальными условиями

$$\omega(z, 0) = \omega_0(z), \quad N(z, 0) = N_0(z), \quad (3)$$

имея в виду, что несложная переформулировка конечных результатов дает также и решение граничной задачи.

3. При анализе статистики $\omega(z, t)$, $N(z, t)$ и полностью определяющейся ими интенсивности $\Gamma(z, t)$ воспользуемся лагранжевым подходом, предложенным в работах [3, 4]. Для этого вначале найдем вероятностные характеристики волны вдоль фиксированных пространственно-временных лучей, а затем, по известным формулам [3, 4], связывающим лагранжеву и эйлерову статистику волны, определим искомые статистические характеристики эйлеровых полей $\omega(z, t)$, $N(z, t)$, $\Gamma(z, t)$.

Эволюция волны вдоль фиксированного пространственно-временного луча, имевшего в начальный момент $t = 0$ координату a , задается уравнениями

$$\frac{dz}{dt} = v(\omega), \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \frac{dJ}{dt} = v'(\omega) u, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad J = \frac{\partial z}{\partial a}, \quad u = \frac{\partial \omega}{\partial a}, \quad (4)$$

с начальными условиями, вытекающими из (3):

$$z(a, 0) = a, \quad \omega(a, 0) = \omega_0(a), \quad u(a, 0) = \frac{d\omega_0(a)}{da}, \quad (5)$$

$$J(a, 0) = 1.$$

Входящий сюда якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым координатам следующим образом связан с $N(a, t)$ — плотностью числа фотонов вдоль данного луча:

$$J(a, t) = \frac{N_0(a)}{N(a, t)} (-1)^n,$$

где n — число касаний к моменту t данным лучом пространственно-временных каустик. Таким образом, зная статистику $J(a, t)$, мы можем восстановить по ней интересующие нас свойства $N(a, t)$ и $\Gamma(a, t)$.

Введём лагранжеву плотность вероятности параметров волны вдоль фиксированного луча: $f[\omega, J, u, z; a, t]$. Согласно (4), она удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\omega) \frac{\partial f}{\partial z} + v'_\omega(\omega) u \frac{\partial f}{\partial J} = 0. \quad (6)$$

Его начальное условие, следующее из (5), таково:

$$f[\omega, J, u, z; a, 0] = \omega_0[\omega, u; a] \delta(z - a) \delta(J - 1), \quad (7)$$

где $\omega_0[\omega, u; a]$ — одноточечное вероятностное распределение частотной модуляции волны $\omega_0(a)$ и ее пространственной производной в начальный момент. Решение уравнения (6) вместе с (7) имеет вид

$$f[\omega, J, u, z; a, t] = \omega_0[\omega, u; a] \delta[z - v(\omega)t - a] \times \quad (8)$$

$$\times \delta[J - v'_\omega ut - 1].$$

Воспользовавшись формулами связи лагранжева и эйлерова вероятностных распределений [3, 4], запишем совместное вероятностное распределение эйлеровых полей $\omega(z, t)$, $J(z, t)$, $u(z, t)$:

$$W[\omega, J, u; z, t] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\omega, J, u, z; a, t] da = \quad (9)$$

$$= J \omega_0[\omega, u; z - vt] \delta[J - v'_\omega ut - 1].$$

Здесь для простоты предполагается, что в данный момент t пространственно-временные каустики отсутствуют и как следствие этого $J > 0$. Влияние каустик на статистические свойства волны и некоторые их количественные характеристики будут рассмотрены в конце статьи.

4. Равенство (9) позволяет определить статистические свойства $N(z, t)$ и $\Gamma(z, t)$ по известной статистике случайной частотной модуляции. Приведем явные выражения для вероятностных распределений N и Γ , считая для определенности плотность числа фотонов в начальный момент всюду одинаковой $N_0(z) \equiv 1$, а случайную частотную модуляцию $\omega_0(z)$ — статистически однородной (ω_0 — не зависит от a). При этом $N = 1/J$, $\Gamma = \omega/J$ и их вероятностные распределения, как видно из (9), равны

$$W_N [N; t] = \frac{1}{N^3 t} \int_0^\infty \frac{1}{|v'_\omega|} \omega_0 \left[\omega, \frac{1 - N}{v'_\omega t N} \right] d\omega; \quad (10)$$

$$W_\Gamma [\Gamma; t] = \frac{1}{\Gamma^3 t} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{|v'_\omega|} \omega_0 \left[\omega, \frac{\omega - \Gamma}{v'_\omega t \Gamma} \right] d\omega. \quad (11)$$

Хотя вероятностные распределения N и Γ в общем случае по-разному меняются со временем; нетрудно из (10), (11) показать, что, как и следовало ожидать, средняя плотность числа фотонов и средняя энергия сохраняются. В среде же с пространственно-временными неоднородностями средняя энергия, за счет параметрического взаимодействия со средой, может изменяться со временем [7].

Из (9) кроме того следует, что вероятностное распределение статистически однородной в пространстве случайной модуляции частоты $\omega(z, t)$ в среде с любыми дисперсионными свойствами остается неизменным:

$$W_\omega [\omega; t] = W_0 [\omega]. \quad (12)$$

Последний результат в применении к нелинейным волнам Римана был получен также в работах [5, 6].

5. Обсудим полученные вероятностные распределения в некоторых конкретных случаях. Рассмотрим вначале распространение волны в среде с линейной дисперсией, когда $v'_\omega = c = \text{const}$ — не зависит от частоты. Такая аппроксимация дисперсионной характеристики справедлива, например, при распространении волны в холодной изотропной плазме, когда средняя частота волны много больше резонансной частоты плазмы. Будем также считать, что $\omega_0(z)$ — гауссова статистически однородная функция с известным средним $\langle \omega \rangle = \omega_0$ и корреляционной функцией:

$$\langle \omega_0(z) \omega_0(z + s) \rangle = k(s) + \omega_0^2.$$

При этом вероятностное распределение плотности числа фотонов волны примет вид

$$W_N [N; t] = \frac{1}{ct N^3 \sqrt{2\pi b}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - N}{cbt N} \right)^2 \right], \quad (13)$$

$$b = -\frac{d^2 k(s)}{ds^2} \Big|_{s=0}.$$

При $t = 0$ $W_N [N; 0] = \delta(N - 1)$, что соответствует принятому выше условию о постоянстве плотности числа фотонов в начальный момент времени. С увеличением t $W_N [N; t]$ расплывается и имеет негауссову

форму, характерной особенностью которой является степенное, как $1/N^3$, спадание $W_N[N; t]$ при $N \rightarrow \infty$. Такое медленное спадание плотности вероятности N (как, впрочем, и Γ) при больших N обусловлено «взрывным» возрастанием $N(z, t)$; в области формирования пространственно-временных каустик.

В другом предельном случае квадратичной дисперсионной характеристики среды $v(\omega) = d(\omega - \omega_0)^2 + q(\omega_0)$

$$W_N[N; t] = \frac{1}{N^3 \pi dt \sqrt{k b}} K_0\left(\frac{1-N}{N dt \sqrt{k b}}\right), \quad k = k(0), \quad (14)$$

где K_0 — функция Макдональда. Бесконечная особенность этого распределения при $N \rightarrow 1$ объясняется тем, что участки волны с частотой $\omega \approx \omega_0$ — близкой к частоте перегиба дисперсионной кривой, практически не фокусируются и плотность числа фотонов в их малой окрестности меняется мало.

6. На достаточно больших временах образованием пространственно-временных каустик уже нельзя пренебречь и статистические свойства волны описываются более сложными чем (9) — (14) выражениями. Обсудим некоторые особенности поведения волны на временах развитых каустик. На таких временах участки волны с одной частотой обгоняют участки волны с другими частотами и в данной точке (z, t) волна может иметь не одну, а сразу несколько экспериментально различимых частот. При этом вопрос о частоте волны в данной точке уже не имеет смысла и надо рассматривать волну как совокупность волн с разными частотами. Точно также на временах развитых каустик уже нельзя говорить о вероятностном распределении частоты волны в обычном смысле. На таких временах лагранжева плотность вероятности $f[\omega, J, u; t]$ связана с эйлеровыми статистическими характеристиками волны более сложными чем (9) равенствами:

$$Jf[\omega, J, u; t] = - \sum_{M=1}^{\infty} P(M; t) \sum_{m=1}^M (-1)^m W_m[\omega, J, u; t | M]; \quad (15)$$

$$|J| f[\omega, J, u; t] = \sum_{M=1}^{\infty} P(M; t) \sum_{m=1}^M W_m[\omega, J, u; t | M]. \quad (16)$$

Здесь $P(M; t)$ — вероятность того, что в данной точке (z, t) волна имеет M частот, а $W_m[\omega, J, u; t | M]$ — вероятностное распределение волны m -й частоты при условии, что волна имеет M частот. Кроме того здесь принято как и раньше, что волна статистически однородна, а частоты нумеруются в порядке убывания. Равенство (16) вместе с (8) позволяет вычислить среднее число частот волны в данной точке:

$$\langle M(z, t) \rangle = \int_{M=1}^{\infty} M P(M; t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v'_\omega u t + 1| w_0[\omega, u] d\omega du.$$

В указанном выше случае гауссовых вначале флуктуаций частоты

$$\begin{aligned} \langle M(z, t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k}\right) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} tb |v'_\omega| \times \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2(v'_\omega tb)^2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2} tb |v'_\omega|}\right) \left. \right] d\omega, \\ \Phi(y) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что процесс образования многочастотного режима существенно зависит от вида дисперсии среды. С течением времени среднее число частот монотонно нарастает. На достаточно больших временах, независимо от типа дисперсии, $\langle M \rangle$ увеличивается пропорционально t . Поскольку частота каждого фиксированного пространственно-временного луча при этом не изменяется, то разница между двумя соседними частотами уменьшается как $\Delta\omega \sim \sqrt{k}/\langle M \rangle \sim 1/t$ до тех пор, пока все частоты не сольются в непрерывную спектральную линию и понятие многочастотного режима теряет смысл.

7. Равенства (15), (16) в многочастотном режиме не позволяют восстановить по известной лагранжевой статистике вероятностные распределения отдельных частот волны в данной точке. Все же, когда пространственно-временные каустики еще редки и среднее число волн, приходящих в данную точку, близко к единице ($\langle M \rangle \leq 2$), то можно пренебречь вероятностью образования пяти и более частот и перейти от (15), (16) к приближенным равенствам:

$$\begin{aligned} Jf[\omega, J, u; t] &= P(1; t) W[\omega, J, u; t | 1] - \\ &\quad - P(3; t) \sum_{m=1}^3 (-1)^m W_m[\omega, J, u; t | 3]. \\ |J| f[\omega, J, u; t] &= P(1; t) W[\omega, J, u; t | 1] + \\ &\quad + P(3; t) \sum_{m=1}^3 W_m[\omega, J, u; t | 3]. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь учтено, что количество частот в любой точке, за исключением точек меры нуль (точек каустик), нечетное. Вычитая второе из первого равенства (17), получим вероятностное распределение средней (второй) частоты при условии, что в данной точке волна имеет три частоты. В случае первоначально гауссовых флуктуаций частоты будем иметь:

$$\begin{aligned} W_2[\omega; t | 3] &= \frac{1}{(\langle M \rangle - 1) \sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k}\right) \times \\ &\times \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} tb \exp\left(-\frac{1}{2(v'_\omega tb)^2}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2} tb |v'_\omega|}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в общем случае это вероятностное распределение негауссово, хотя знакопеременная сумма вероятностных распределений разных частот

$$\begin{aligned} &- \sum_{M=1}^{\infty} P(M; t) \sum_{m=1}^M (-1)^m W_m[\omega; t | M] = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} Jf[\omega, J, u; t] dJ du = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k}\right) \end{aligned}$$

всегда гауссова.

В заключение отметим, что обобщение приведенных результатов на случай неодномерных волн и случайно-неоднородных сред не вызывает принципиальных затруднений, хотя и связано с гораздо более громоздкими выкладками.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 2, 283 (1969).
2. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
3. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).
4. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 10, 1559 (1976).
5. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).
6. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, т. 67, вып. 6, 2080 (1974).
7. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 9, 1359 (1976).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
3 января 1978 г.

THE STATISTICS OF A WAVE WITH RANDOM FREQUENCY MODULATION
IN DISPERSIVE MEDIUM

S. K. Lipatov, A. I. Saichev

The probability distribution of frequency, intensity and other parameters of a wave with random frequency modulation propagating in the dispersive medium are found and investigated. In particular, the probability density distributions of the photon number are found in the limiting cases of linear and quadratic dispersion characteristics of the medium. It is shown that in the latter case the probability density distribution of the photon number has a peculiarity due to the absence of time focusing of a wave in the vicinity of the inflection points of the dispersion curve. The statistics of the frequency of a wave in the multifrequency regime is discussed in detail.

УДК 538.6

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДИНАМО

С. И. Вайнштейн

В статье используется метод Кляцкина—Татарского для получения уравнения динамики магнитного поля в турбулентной среде. Получены коэффициенты диффузии и гиротропности в марковском и первом надмарковском приближении.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема турбулентного динамо близка по своей сути к задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. Поэтому естественно воспользоваться методами, развитыми в теории распространения радиоволн. В частности, в теории турбулентного динамо использовался функциональный подход [1], развитый в теории гидродинамической турбулентности [2] и в теории рассеяния волн на случайных неоднородностях [3]. Несмотря на то, что функциональный подход является более компактным, чем метод диаграмм, использование его в [1] привело к довольно громоздким выкладкам. В настоящей статье мы воспользовались методом Кляцкина—Татарского [4], где марковское приближение играет роль первого шага в методе последовательных приближений. Марковское приближение в теории турбулентного динамо хорошо установлено (см., например, [5]). Следующее после марковского приближение было впервые построено применительно к этой теории в работе [1]. Однако ввиду громоздкости выкладок пришлось прибегнуть ко многим упрощающим предположениям. В частности, удалось рассмотреть лишь однородную изотропную турбулентность, обладающую также отражательной инвариантностью. Как известно, такая турбулентность не вызывает генерации магнитного поля, а приводит лишь к турбулентной диффузии. Использование метода работы [4] настолько упрощает выкладки, что появляется возможность рассмотреть более общую турбулентность, не обладающую отражательной инвариантностью.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

В отличие от теории распространения электромагнитных волн, где обычно имеют дело со скалярным параболическим уравнением, в теории динамика поля \mathbf{H} описывается векторным уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + D \Delta \mathbf{H}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} — случайная векторная функция координат и времени, D — константа. Прежде всего, формула Фуруцу—Новикова естественно записывается для гауссовых векторных случайных полей:

$$\overline{v_i(t, \mathbf{x}) R(\mathbf{v})} = \int dt' d^3 x' \overline{v_i(t, \mathbf{x}) v_m(t', \mathbf{x}') \frac{\delta R}{\delta v_m(t', \mathbf{x}')}} \quad (2)$$

(по повторяющимся индексам суммируется).

Наиболее простой способ получить обобщение (2) для векторных полей — это считать, что индекс вектора есть переменная. Тогда кроме четырехмерного интегрирования по t' и d^3x будем иметь дополнительное интегрирование по индексу вектора. Поскольку индекс принимает дискретные значения, последнее интегрирование заменяется суммированием (в формуле (2) по индексу m).

Уравнение (1) содержит также дополнительный дифференциальный оператор rot (в отличие от параболического уравнения для волн). Поэтому метод последовательных приближений удобно развивать не для уравнения (1) непосредственно, а для тензора $\bar{v}_i H_j$. Если $\bar{v}_i H_j$ известен, то усреднением уравнения (1) получается замкнутое уравнение для усредненного поля $\bar{H} = \mathbf{B}$. По формуле Фуруцу—Новикова

$$\begin{aligned} \overline{v_i(t, x) H_j(t, x)} &= \\ &= \int_0^t dt' \int d^3x' B_{im}(t, t', x, x') \frac{\delta H_j(t, x)}{\delta v_m(t', x')}, \\ B_{im} &= \overline{v_i(t, x) v_m(t', x')}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ниже случайное поле v будет считаться стационарным и однородным в статистическом смысле: $B_{im} = B_{im}(t - t', x - x')$. Пределы интегрирования (3) по t' возникают из-за начального условия при $t = 0$ и из-за соотношения причинности:

$$\frac{\delta H_i(t, x)}{\delta v_m(t', x')} = 0 \quad \text{при } t' > t,$$

т. е. магнитное поле не должно зависеть от будущего значения поля скорости. В соотношение (3) входит неизвестный функционал $\delta H_i / \delta v_m$, который удовлетворяет уравнению при $t' < t$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D \Delta \right) \frac{\delta H_i(t, x)}{\delta v_m(t', x')} = \epsilon_{ijf} \epsilon_{flp} \partial_j v_l(t, x) \frac{\delta H_p(t, x)}{\delta v_m(t', x')}, \quad (4)$$

$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, ϵ_{ijf} — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга, $\epsilon_{123} = 1$. Усредняя (4) и используя формулу (2), получаем при $t' < t$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D \Delta \right) \overline{\delta H_i(t, x) / \delta v_m(t', x')} &= \epsilon_{ijf} \epsilon_{flp} \partial_j \int_0^t dt' d^3x' \times \\ &\times B_{la}(t - t'', x - x') \overline{\delta^2 H_p(t, x) / \delta v_m(t', x') \delta v_a(t'', x'')}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (3), (5) должна быть дополнена начальными условиями на первую и вторую вариационные производные. Для получения их проинтегрируем (1) в пределах $(0, t)$ и действуем на получившееся уравнение оператором $\delta / \delta v_m(t', x')$ и оператором $\delta^2 / \delta v_m(t', x') \delta v_k(t'', x'')$. Полагая затем $t' = t$ и усредня, получим

$$\frac{\overline{\delta H_i(t', x)}}{\delta v_m(t', x')} = \epsilon_{ijf} \epsilon_{fmp} \partial_j \delta(x - x') B_p(t', x); \quad (6)$$

$$\frac{\overline{\delta^2 H_i(t', x)}}{\delta v_m(t', x') \delta v_k(t'', x'')} = \epsilon_{ijf} \epsilon_{fmp} \partial_j \delta(x - x') \frac{\overline{\delta H_p(t', x)}}{\delta v_k(t'', x'')}. \quad (7)$$

$$t'' < t.$$

Система (3), (5) с начальными условиями (6), (7) достаточна для дальнейших вычислений.

2. ОТРАЖАТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ (ОИТ)

Последовательные приближения по методу Кляцкина—Татарского строятся следующим образом. В первом (марковском) приближении реальный корреляционный тензор B_{im} в выражении (3) заменяется на эффективный $B_{im}(t - t') \sim \delta(t - t')$. Тогда с учетом (6) тензор $\overline{v_i H_j}$ выражается через B , и усредненное уравнение (1) оказывается замкнутым. В следующем (первом надмарковском) приближении эффективный тензор подставляется в уравнение (5). Тогда при учете (7) получается замкнутое уравнение на $\delta H_i / \delta v_m$, решение которого с начальными условиями (6) подставляется в (3).

Перейдем теперь непосредственно к ОИТ. Как известно, задача состоит в выяснении динамики усредненного поля B . Как правило, магнитное число Рейнольдса Rm (по порядку величины это есть отношение первого члена правой части (1) ко второму) весьма велико. Это и создает трудности при работе с рядом теорий возмущений. Метод последовательных приближений, используемый в данной статье, работает при $Rm \gg 1$.

Согласно сложившимся представлениям при наличии ОИТ имеется лишь турбулентная диффузия поля B , генерация отсутствует. Вопрос состоит только в нахождении D_T — турбулентного коэффициента диффузии. Результаты работы [1] подтверждают эти представления, причем найден коэффициент D_T . Однако только в марковском приближении этот коэффициент найден в общем случае. Для вывода его в следующем приближении оказывается необходимым привлечь некоторые дополнительные ограничения.

Одним из преимуществ используемого ниже подхода является то, что коэффициент D_T находится здесь в общем случае. Корреляционный тензор для ОИТ имеет вид

$$B_{im}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = A(|\tau|, r) \delta_{im} + B(|\tau|, r) r_i r_m, \quad (8)$$

$$r_i = x_i - x'_i, \quad \tau = t - t'.$$

Тензор (8) соответствует изотропному случайному полю. Займемся сначала марковским приближением, т. е. подставим эффективный тензор B_{im} в (3):

$$A = A_1 \delta(\tau), \quad B = B_1 \delta(\tau). \quad (9)$$

При интегрировании правой части (3) удобно перейти к переменным τ , r . Выражение $\delta H_j / \delta v_m$ берется при совпадающих t и t' . Следовательно, можно воспользоваться (6). Интегрирование по $\delta(\tau)$ в интервале $(0, t)$ дает множитель $1/2$.

Оператор ∂_j в (6) действует на произведение $\delta(r) B_p(t, \mathbf{x})$. Одно из слагаемых при этом $(\partial_j \delta(r)) B_p(t, \mathbf{x})$ при интегрировании по $d^3 r$ не дает вклада. В самом деле,

$$(\partial_j \delta(r)) B_{im}(r) \rightarrow -\delta(r) \partial_j B_{im}(r) = 0. \quad (10)$$

Последнее равенство (10) непосредственно следует из (8). Остается второе слагаемое $\delta(r) \partial_j B_p(t, \mathbf{x})$. Раскрывая свертку $\epsilon_{ijf} \epsilon_{fmp}$ и учитывая соленоидальность магнитного поля, т. е. $\operatorname{div} B = 0$, имеем окончательно

$$\frac{\delta H_i(t', \mathbf{x})}{\delta v_m(t', \mathbf{x}')} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_m B_i(t', \mathbf{x}). \quad (11)$$

Теперь нетрудно получить тензор $\overline{v_i H_j}$:

$$\overline{v_i(t, \mathbf{x}) H_j(t, \mathbf{x})} = -\frac{1}{2} \chi \partial_i B_j(t, \mathbf{x}), \quad (12)$$

$\chi = A_1(0)$. Подстановка этого тензора в усредненное уравнение (1) дает, как это легко видеть,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (D_T + D) \Delta \mathbf{B}, \quad (13)$$

где $D_T = \chi/2$.

Обратимся к следующему приближению. Подставим теперь эффективный тензор (8), (9) в (5). При использовании (7) обратим внимание на то, что оператор ∂_j , как и выше, действует на произведение. И опять же слагаемое $(\partial_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \overline{\delta H_p / \delta v_k}$ не дает вклада при интегрировании по пространственным координатам. Учитывая, что $\partial_j \delta H_j / \delta v_k = 0$ (это равенство следует из действия оператора $\delta / \delta v_k$ на уравнение $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), получим вместо (7)

$$\frac{\overline{\delta^2 H_i(t', \mathbf{x})}}{\delta v_m(t', \mathbf{x}') \delta v_k(t'', \mathbf{x}'')} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_m \frac{\overline{\delta H_i(t', \mathbf{x})}}{\delta v_k(t'', \mathbf{x}'')} . \quad (14)$$

Подставляя теперь (14) в (5), легко получить

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - (D_T + D) \Delta \right] \frac{\overline{\delta H_i(t, \mathbf{x})}}{\delta v_m(t', \mathbf{x}')} = 0. \quad (15)$$

Здесь оператор Лапласа действует на переменную \mathbf{x} . Дальнейшая наша задача — подставить решение уравнения (15) с начальными условиями (6) в выражение (3).

Очевидно, что решение (15) с условиями (6) есть комбинация функции Грина уравнения теплопроводности и ее производных:

$$\frac{\overline{\delta H_i(t, \mathbf{x})}}{\delta v_m(t', \mathbf{x}')} = \epsilon_{ijf} \epsilon_{fmp} \partial_j G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') B_p(t', \mathbf{x}'), \quad (16)$$

где $G(\tau, \mathbf{r})$ — решение уравнения.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - (D_T + D) \Delta \right] G = \delta(\tau) \delta(\mathbf{r}).$$

Фактически это и есть решение задачи во втором приближении: (16) подставляется в (3), а (3) — в усредненное уравнение (1). Видно, что тензор $\overline{v_i H_j}$ в момент t зависит от $\mathbf{B}(t')$ в предыдущие моменты. То есть в отличие от (12) — марковского процесса, этот тензор зависит от предыстории процесса. Впрочем, эта зависимость весьма слабая, поскольку функция Грина быстро затухает на корреляционной длине.

Перейдем в выражении (3) к интегрированию по переменным τ, \mathbf{r} ; тогда B_p в (16) будет функцией от $t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{r}$. Корреляционный тензор в (3) существенно меняется на корреляционной длине, в то время как B_p есть крупномасштабное поле и на этой длине меняется очень слабо. Здесь необходимо подчеркнуть, что практически во всех прикладных задачах усредненное магнитное поле является медленно меняющимся (за корреляционное время) и крупномасштабным. Поэтому B_p в (16) можно разложить:

$$B_p(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{r}) = B_p^{(0)} - \frac{\partial B_p^{(0)}}{\partial x_m} r_m + \dots, \quad (17)$$

где $B_p^{(0)}$, $\partial B_p^{(0)} / \partial x_m$ берутся в точке $t - \tau$, x . Приступим теперь к вычислению тензора $\overline{v_i H_j}$, пользуясь разложением (17). Прежде всего, отметим, что оператор ∂_j в (16) действует теперь уже только на G , поскольку $\partial_j = \partial / \partial x_j$. Разумеется, при замене переменных эта ситуация сохранится, только теперь $\partial_j = \partial / \partial r_j$. При подстановке ряда (17) в (16) и в (3) убеждаемся в том, что первый член ряда не дает вклада, поскольку

$$\int d^3 r B_{ij}(\mathbf{r}) \partial_a G(\mathbf{r}) = 0.$$

В этом легко убедиться, если воспользоваться (8): B_{ij} — функция четная по \mathbf{r} , т. е. $B_{ij}(\mathbf{r}) = B_{ij}(-\mathbf{r})$, в то время как $\partial_a G(\mathbf{r})$ — нечетная. Второй член ряда (17) дает исчезающий вклад, поскольку он содержит переменную r_m . После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \overline{v_i(t, x) H_j(t, x)} &= - \int_0^t d\tau \int d^3 r B_{im}(\tau, r) G(\tau, r) \times \\ &\quad \times \partial B_j(t - \tau, x) / \partial x_m. \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе (18) мы опять воспользовались свойством $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Как уже отмечалось, \mathbf{B} меняется слабо за корреляционное время, поэтому положим в первом приближении $\partial B_j(t - \tau) / \partial x_m = \partial B_j(t) / \partial x_m$. Теперь интегрирование в (18) не распространяется на $\partial B_j / \partial x_m$. Момент времени t необходимо выбрать настолько большим, чтобы система успела «забыть» о начальных данных (в момент $t = 0$), т. е. $t \gg \tau_0$, где τ_0 — корреляционное время. Пользуясь четностью B_{ij} и G по \mathbf{r} , обозначим

$$\int_0^\infty d\tau \int d^3 r B_{im}(\tau, r) G(\tau, r) = \delta_{im} D_1. \quad (19)$$

Теперь уравнение для \mathbf{B} имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (D_1 + D) \Delta \mathbf{B}. \quad (20)$$

Итак, в рамках данного метода коэффициент турбулентной диффузии D_1 получен во втором приближении в общем случае. Может ли коэффициент D_1 быть отрицательным? Для выяснения этого вопроса перейдем в формуле (19) в фурье-пространство. Вместо интеграла (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3 k B_{ij}(\tau, \mathbf{k}) \exp [-(D_T + D) k^2 |\tau|] &= \\ = \int d\omega d^3 k B_{im}(\omega, \mathbf{k}) / [(D_T + D) k^2 - i\omega] &= \\ = \int d\omega d^3 k \frac{B_{im}(\omega, \mathbf{k}) (D_T + D) k^2}{[(D_T + D) k^2]^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь использовано свойство четности B_{im} по отношению к ω , $B_{im}(\omega, \mathbf{k})$ — спектральный тензор,

$$B_{im}(\omega, \mathbf{k}) = A(\omega, \mathbf{k}) \delta_{ij} + B(\omega, \mathbf{k}) k_i k_j. \quad (22)$$

Из вида тензора (22) ясно, что интеграл (21) пропорционален δ_{im} (сравни с (19)). Для выяснения знака D_1 достаточно выяснить знак следа тензора (21). Поскольку для всякого случайного процесса

$B_{ii}(\omega, \mathbf{k}) > 0$ и, очевидно, $B_{ii}(D_T + D)k^2/\{(D_T + D)k^2\omega^2 + \omega^2\} > 0$, то $D_1 > 0$. Итак, коэффициент диффузии магнитного поля существенно положителен. В предельном случае $\tau_0 \ll l/v$ (l — корреляционная длина, v^2 — среднеквадратичное значение скорости) $D_T \leq v^2 \tau$, $\omega \gg (D_T + D)k^2$, $k \approx 1/l$. Следовательно, $1/[(D_T + D)k^2 - i\omega] \approx \pi\delta(\omega)$ и $D_1 \approx D_T$, т. е. имеется сходимость последовательных приближений при слабом отклонении процесса от марковского.

Выражение (16) сравнительно простое, это дает возможность детально исследовать общий случай. В частности, если учесть более высокие члены разложения $B_p(\mathbf{x} - \mathbf{r})$ по степеням \mathbf{r} , то, как нетрудно убедиться, к уравнению (20) добавляются члены вида $\text{rot}^4 \mathbf{B}$ (четырехкратное действие оператора rot), $\text{rot}^6 \mathbf{B}$, ..., $\text{rot}^{2n} \mathbf{B}$, n — целое. Причем, каждый новый член меньше предыдущего в l^2/L^2 раз, где L — масштаб поля \mathbf{B} . Можно также учесть более высокие члены разложения по τ для функции $B_p(t - \tau)$. Например, учет следующего (после учтенного) члена ряда в разложении $B_j(t - \tau) = B_j(t) - \tau \partial B_j / \partial t$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} + D' \Delta \mathbf{B}) &= (D_1 + D) \Delta \mathbf{B}, \\ D' \delta_{lm} &= \int_0^\infty d\tau \int d^3 r \tau B_{lm}(\tau, \mathbf{r}) G(\tau, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (23)$$

Простая оценка показывает: $|D' \Delta \mathbf{B}|/B \approx v^2 l^2 / L^2$. Поскольку $v\tau \ll L$, поправка к уравнению (20), обусловленная $D' \Delta \mathbf{B}$, невелика.

Отметим, наконец, что даже предположения о несжимаемости $\text{div } \mathbf{v} = 0$, к которому прибегают практически во всех теориях по турбулентному динамо, нам не потребовалось.

3. ОТРАЖАТЕЛЬНО НЕИНВАРИАНТНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ (ОНИТ)

В теории турбулентного динамо ОНИТ имеет большое значение как эффективный генератор поля. Корреляционный тензор имеет вид

$$B_{lm} = A(\tau, \mathbf{r}) \delta_{lm} + B(\tau, \mathbf{r}) r_l r_m + C(\tau, \mathbf{r}) \epsilon_{lmj} r_j. \quad (24)$$

Обратимся сначала к марковскому процессу. Из-за наличия псевдоскаляра $C(\tau, \mathbf{r})$ в тензоре (24) соотношение (10) уже не справедливо и

$$\delta(\mathbf{r}) \partial_j B_{lm}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) C(\tau, 0) \epsilon_{lmj}. \quad (25)$$

С учетом (25) имеем

$$\begin{aligned} \overline{v_i H_j} &= -D_T \partial_t B_j(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \alpha \epsilon_{ijp} B_p(t, \mathbf{x}), \\ \alpha &= C_1(0), \quad C(\tau, r) = C_1 \delta(\tau), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot } \alpha \mathbf{B} + (D_T + D) \Delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (26)$$

Хорошо известно, что уравнение для \mathbf{B} (26) описывает при выполнении некоторых условий растущее решение.

Займемся теперь следующим приближением после марковского. Для этого подставим эффективный корреляционный тензор в (5). С учетом (7) имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - (D_T + D) \Delta - \alpha \text{rot} \right] \frac{\overline{\delta \mathbf{H}_i(t, \mathbf{x})}}{\delta v_m(t', \mathbf{x}')} = 0. \quad (27)$$

Здесь, наподобие (15), дифференциальные операторы действуют только на t, \mathbf{x} .

На этом этапе представляется целесообразным перейти в k -пространство ввиду того, что функция Грина уравнения (27) имеет сложный вид. Тогда (27) и (6) заменяются следующими уравнениями:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (D_T + D) k^2 - i\alpha k \right] \overline{\delta H(t, \mathbf{k}) / \delta v_m(t', \mathbf{k}')} = 0; \quad (28)$$

$$\overline{\delta H_i(t', \mathbf{k}) / \delta v_m(t', \mathbf{k}')} = \epsilon_{ijf} \epsilon_{fmp} i k_j B_p(t', \mathbf{k} + \mathbf{k}') / (2\pi)^3. \quad (29)$$

Для решения уравнения (28) с начальными условиями (29) выпишем общее решение (28), полученное в (6):

$$\begin{aligned} \hat{T}(t, t') &= \exp [-(D_T + D) k^2(\tau)] \left\{ \hat{T}_0 \operatorname{ch}(k\alpha\tau) + i \frac{[\mathbf{k} \hat{T}_0]}{k} \operatorname{sh}(k\alpha\tau) \right\}, \\ \hat{T}(t, t') &= \overline{\delta H(t, \mathbf{k}) / \delta v_m(t', \mathbf{k}')}, \\ \hat{T}_0 &= \hat{T}(t', t'). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь мы воспользовались тем, что \hat{T} в (28) ведет себя как вектор $H(t, \mathbf{k})$, нижние переменные t' , \mathbf{k}' и индекс m в уравнении (28) «не работают». Именно для такого вектора общее решение известно (см. [6]), начальное условие удобно брать в момент $t = t'$. При $\alpha \rightarrow 0$ (30) переходит в функцию Грина в k -пространстве.

Осталось только выписать (3) в k -пространстве:

$$(\overline{v_i H_j})_k = (2\pi)^3 \int_0^\infty d\tau \int d^3 k' B_{im}(\tau, \mathbf{k}' + \mathbf{k}) T_{jm}(\tau, -\mathbf{k}', \mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (31)$$

Индекс \mathbf{k} в выражении (31) слева означает фурье-компоненту, соответствующую вектору \mathbf{k} , величины $\overline{v_i H_j}$. В тензор T_{jm} входит поле B в момент времени $t' = t - \tau$. Ввиду медленности изменения B полагаем, что $B = B(t)$, пренебрегая малой величиной τ . Кроме того, B берется в точке \mathbf{k} . Принимая во внимание крупномасштабный характер этого поля, величину \mathbf{k} в B_{im} можно считать малой по сравнению с \mathbf{k}' . Разложение B_{im} по степеням \mathbf{k} эквивалентно разложению (17). В первом приближении $B_{im}(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) = B_{im}(\mathbf{k}') = A \delta_{ij} + B k_i k'_m + C \epsilon_{ilm} i k'_j$; A, B, C — функции от τ и \mathbf{k}' . В этом приближении

$$\begin{aligned} \overline{v_i H_j} &= -\frac{1}{2} \alpha_1 \epsilon_{ijp} B_p(t, \mathbf{x}), \\ \alpha_1/2 &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty d\tau \int d^3 k C(\tau, \mathbf{k}) k^2 \exp [-(D_T + D) k^2 \tau] \times \\ &\times \operatorname{ch}(k\alpha\tau) - \frac{1}{3} \int_0^\infty d\tau \int d^3 k k [2A(\tau, \mathbf{k}) + k^2 B(\tau, \mathbf{k})] \times \\ &\times \exp [-(D_T + D) k^2 \tau] \operatorname{sh}(k\alpha\tau). \end{aligned} \quad (32)$$

Известно, что α, α_1 — псевдоскаляры, формула (32) этому не противоречит. Действительно, в первый интеграл входит псевдоскаляр $C(k)$, во второй — $\operatorname{sh}(k\alpha\tau)$: видно, что если разложить $\operatorname{sh}(k\alpha\tau)$ в ряд, то α будет

входить в нечетной степени. При $C \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ выражение (32) зануляется, т. е. в этом приближении при отсутствии гиротропности интеграл в (31) не дает вклада. Эта ситуация соответствует отсутствию вклада от первого члена ряда (17) предыдущего раздела, где гиротропность не учитывалась. В пределе $\tau_0 \ll l/v$ будет:

$$k\alpha\tau \approx \alpha\tau_0/l \ll 1, \quad (D_T + D)k^2\tau \approx (D_T + D)\tau_0/l^2 \ll 1.$$

Тогда в (32) остается только первый интеграл и α_1 переходит в α , определенное в (26).

Учтем теперь следующий член ряда в разложении корреляционного тензора: $B_{lm}(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) = B_{lm}(\mathbf{k}') + k_f \frac{\partial}{\partial k'_f} B_{lm}(\mathbf{k}')$. Тогда имеем

$$\overline{v_i H_j} = -D_2 \partial_i B_j(t, x) - \frac{1}{2} \alpha_1 \epsilon_{ijp} B_p(t, x),$$

$$D_2 = \frac{1}{3} \int_0^\infty d\tau \int d^3 k B_{ii}(\tau, \mathbf{k}) \exp [-(D_T + D)k^2\tau] \times \quad (33)$$

$$\times \operatorname{ch}(k\alpha\tau) + \frac{2}{3} \int_0^\infty d\tau \int d^3 k C(\tau, \mathbf{k}) k \exp [-(D_T + D)k^2\tau] \operatorname{sh}(k\alpha\tau).$$

Отметим, что в (33) выписана антисимметричная часть тензора. В действительности при вычислении появляется член $\sim \partial_j B_i$, но поскольку в окончательное выражение входит свертка $\epsilon_{alj} \overline{v_i H_j}$, то $\partial_j B_i$ можно заменить на $-\partial_i B_j$ и включить его в D_2 . При $\alpha \rightarrow 0$ D_2 переходит в D_1 , определяемый равенствами (19), (21).

Сходимость интегралов (32), (33) по τ уже не является очевидной: в них содержится растущая экспонента ($\operatorname{ch}(k\alpha\tau)$, $\operatorname{sh}(k\alpha\tau)$). Необходимо выяснить знак

$$(D_T + D)k^2 \pm k\alpha = k[D_T + D \pm \alpha] \quad (34)$$

для $k \geqslant 1/l$: именно такие k дают вклад в спектральные тензоры. Для этого заметим, что для положительной определенности спектрального тензора должно выполняться

$$A + Bk^2 \geqslant 0, \quad A \pm Ck \geqslant 0, \quad (35)$$

A, B, C — функции от ω, k : $A = A(\omega, k)$ и т. п. Поскольку

$$D_T = \frac{\pi}{3} \int [3A(0, k) + B(0, k)k^2] d^3 k,$$

$$\alpha = 2 \frac{\pi}{3} \int C(0, k)k^2 d^3 k,$$

то выражение $kD_T \pm \alpha = \frac{\pi}{3} \int d^3 k' [(A + Bk'^2)k + 2(Ak \pm Ck'^2)]$ для $k \geqslant 1/l$, согласно (35), положительно, а значит и выражение (34) тоже положительно. Итак, растущая экспонента обладает меньшим показателем, чем затухающая, и интегралы в (32), (33) сходятся вне зависимости от вида $B_{ij}(\tau, \mathbf{k})$.

До сих пор считалось, что гиротропность дает вклад только в генерацию поля, или, иначе говоря, она входит только через α в члене $\text{rot } \alpha B$ (см. (26)). Из формулы (33) видно, что она дает вклад также и в тур-

булентный коэффициент диффузии — через коэффициент *C*. Произведя еще одно фурье-преобразование в (33) в ω -пространство (наподобие (21)), нетрудно убедиться, что коэффициент турбулентной диффузии существенно положителен.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ, 62, 1376 (1972).
2. E. Hopf, Proc. Symp. Appl. Math., 7, 41 (1957).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
5. С. И. Вайнштейн, Я. Б. Зельдович, УФН, 106, 431 (1972).
6. С. И. Вайнштейн, ЖЭТФ, 58, 153 (1970).

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

Поступила в редакцию
5 декабря 1977 г.

TO THE THEORY OF TURBULENT DYNAMO

S. I. Vajnshtejn

The Klyatskin—Tatarsky method is used to obtain the equation of the magnetic field dynamics in the turbulent medium. The diffusion and gyrotropicity coefficients are obtained in Markovian and in the first above-Markovian approximations.

УДК 538.574

ФОКУСИРОВКА ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Г. В. Белокопытов

Рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн в неоднородной одноосной анизотропной среде. Найдены аналитические решения уравнений Максвелла для двух частных случаев плоскослоистого диэлектрика. Проанализировано влияние различных параметров неоднородного распределения показателей преломления на характеристики распространения волновых пучков. Для плоскослоистой фокусирующей среды общего вида получены поправки первого приближения теории возмущений к постоянным распространения собственных волн. Это позволило решить вопрос о распределении показателя преломления, обеспечивающем оптимальную фокусировку.

1. Волновые пучки в анизотропном неоднородном диэлектрике рассматривались ранее в связи с исследованием интегральных оптических волноводов и $p-p$ -переходов в инжекционных лазерах [1, 2]. Аналогичная задача встает, если исследовать прохождение света в твердом теле, где имеется неоднородное распределение температуры. Вследствие термооптического эффекта в такой системе возможна фокусировка световых пучков. При этом показатель преломления будет анизотропным даже в том случае, если среда первоначально не имела анизотропии. Действительно, в неоднородно нагретом теле возникают температурные напряжения, что вследствие фотоупругого эффекта дает дополнительный вклад в фокусировку и приводит к анизотропии показателя преломления [3–5]. Термическая фокусировка (или дефокусировка) имеет место в резонаторах твердотельных лазеров [3, 4, 6] и в электрооптических модуляторах света [7]. Как правило, она является нежелательным явлением. Вместе с тем, в [8] указывалось на возможность использования термооптического эффекта для создания градиентных линз с управляемым фокусным расстоянием, отличающихся большой простотой и эффективностью по сравнению с электрооптическими управляемыми линзами [9, 10].

В настоящей работе рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в анизотропной плоскослоистой фокусирующей среде. Общий подход к таким задачам возможен на основе приближения геометрической оптики, развитого для анизотропных неоднородных сред в [11, 12]. Вместе с тем, в целом ряде случаев более эффективным оказывается непосредственное исследование уравнений электромагнитного поля.

Будем предполагать, что во всем пространстве главные оси эллипсоида диэлектрической проницаемости направлены вдоль осей декартовых координат, причем величина его компонент зависит от координаты z . Исходными в данной задаче являются уравнения Максвелла для монохроматических полей

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{D}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} \quad (1)$$

с материальными уравнениями

$$D_x = \epsilon_x(z) E_x, \quad D_y = \epsilon_y(z) E_y, \quad D_z = \epsilon_z(z) E_z, \quad B = \mu H. \quad (2)$$

Решения (1) для волн, испытывающих фокусировку, естественно искать в виде

$$E_{x,y,z}, H_{x,y,z} \sim \Phi_k(z) \exp(i\beta x + i\gamma y), \quad (3)$$

причем функции $\Phi_k(z)$ должны убывать при $z \rightarrow \infty$ достаточно быстро, чтобы энергия, переносимая волной, оставалась ограниченной. От уравнений (1), (2) с учетом (3) можно перейти к системе

$$\frac{\gamma c}{\omega \mu} (i\beta E_y - i\gamma E_x) - \frac{dH_y}{dz} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon_x E_r; \quad (4a)$$

$$\frac{dH_x}{dz} - \frac{\beta c}{\omega \mu} (i\beta E_y - i\gamma E_x) = -\frac{i\omega}{c} \epsilon_y E_y; \quad (4b)$$

$$\frac{\gamma c}{\omega \epsilon_z} (i\beta H_y - i\gamma H_x) - \frac{dE_y}{dz} = \frac{i\omega}{c} \mu H_x; \quad (4v)$$

$$\frac{dE_x}{dz} + \frac{\beta c}{\omega \epsilon_z} (i\beta H_y - i\gamma H_x) = \frac{i\omega}{c} \mu H_y, \quad (4r)$$

где E_x, E_y, H_x, H_y — функции координаты z . В общем случае в системе (4) переменные не разделяются, поэтому в настоящей работе ограничимся рассмотрением задачи при $\gamma = 0$. Отметим, что условие $\gamma = 0$ выполняется в важном частном случае одноосной среды с оптической осью, направленной вдоль оси z .

Если $\gamma = 0$, то система (4) имеет решения двух типов — ТЕ-волны ($E_x = 0, E_z = 0, H_y = 0$) и ТМ-волны ($H_x = 0, H_z = 0, E_y = 0$). Уравнение для ТЕ-волн следует из (4b), (4v) и имеет вид

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon_y - \beta^2 \right) E_y = 0. \quad (5)$$

Аналогично из (4a), (4r) получаем уравнение для ТМ-волн

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \frac{d \epsilon_r}{dz} \frac{dH_y}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu \epsilon_x - \beta^2 \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \right) H_y = 0. \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), легко убедиться в том, что законы распространения ТЕ- и ТМ-волн несколько различаются даже в локально-изотропном диэлектрике, т. е. плоскослоистая неоднородная среда обладает эффективной анизотропией [13].

Как следует из (5), распространение ТЕ-волн определяется лишь одной компонентой диэлектрической проницаемости $\epsilon_y(z)$. Для них полностью применимы результаты исследования фокусировки ТЕ-волн в изотропной среде (см. [1, 2, 14]). В частности, как показано в [15], распределение

$$\epsilon_y(z) = \epsilon_{y0} \operatorname{sech}^2 \alpha z \quad (7)$$

обеспечивает идеальную фокусировку волн в диэлектрике.

Характер фокусировки ТМ-волн в анизотропной среде зависит от поведения двух компонент диэлектрической проницаемости: $\epsilon_z(z)$ и $\epsilon_x(z)$. Ниже, в пп. 2 и 3 будет рассмотрено распространение волн в веществе, одна из компонент диэлектрической проницаемости которого изменяется в пространстве по закону $\epsilon_i(z) = \epsilon_{i0}/(1 + \theta_i z^2)$. В обоих случаях задача имеет аналитическое решение, что упрощает сравнение влияния каждой из компонент ϵ на фокусировку волн. В отличие от моделей, рассмотренных в [1, 2, 14, 15], результаты пп. 2 и 3 являются точными для необыкновенных волн. В п. 4 рассмотрена более общая задача о фокусировке в среде, в которой компоненты $\epsilon_x(z)$ и $\epsilon_z(z)$ меняются по независимым законам.

2. Рассмотрим неоднородный диэлектрик, в котором

$$\epsilon_x(z) = n_\perp^2 = \text{const}, \quad \epsilon_z(z) = \frac{n_z^2}{1 + \theta_z z^2}, \quad (8)$$

где n_z , θ_z — известные постоянные. В этом случае уравнение (6) имеет вид

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \mu n_\perp^2 - \beta^2 \frac{n_\perp^2}{n_z^2} (1 + \theta_z z^2) \right] H_y = 0. \quad (9)$$

Путем замены $H_y(z) = U(\zeta)$, где $\zeta = z(4n_\perp^2 \beta^2 \theta_z / n_z^2)^{1/4}$, оно приводится к уравнению

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \zeta^2 \right] U = 0, \quad (10)$$

где

$$m + \frac{1}{2} = \frac{n_z n_\perp}{2 + \beta + \sqrt{\theta_z}} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu - \frac{\beta^2}{n_z^2} \right). \quad (11)$$

Решениями (10) являются функции параболического цилиндра $D_m(\zeta)$ [16]. Потребовав, чтобы в фокусирующей среде ($\theta_z > 0$) амплитуда поля стремилась к нулю при $z \rightarrow \infty$, получим дискретный спектр собственных значений ($m = 0, 1, 2, \dots$), которому соответствуют собственные функции вида

$$U_m = N_m \exp(-\zeta^2/4) H_m(\zeta/\sqrt{2}), \quad (12)$$

где $H_m(\zeta)$ — полиномы Чебышева—Эрмита, N_m — нормировочный множитель. Функции $U_m(\zeta)$ образуют полную ортонормированную систему [17], поэтому распределение поля бегущей монохроматической волны (все $\beta_m > 0$) в сечении $x = 0$ всегда можно представить в виде суперпозиции собственных функций (12):

$$H_y(z, 0) = \sum_m A_m U_m(\zeta_m(z)).$$

Тогда распределение поля в любом другом сечении определяется следующим образом:

$$H_y(z, x) = \sum_m A_m U_m(\zeta_m(z)) \exp(i \beta_m x).$$

Для постоянных распространения из (11) следует выражение

$$\beta_m = \pm \beta_e [\sqrt{1 + (p^2/4)(2m + 1)^2} - (p/2)(2m + 1)], \quad (13)$$

где $\beta_e = \omega n_z \sqrt{\mu}/c$, $p^2 = c^2 \theta_z / \omega^2 \mu n_{\perp}^2$. Используя (13), можно найти выражения для фазовой и групповой скоростей. Так, для групповой скорости получим

$$v_{\text{гр. } m}^{-1} = \frac{\beta_e}{\omega \sqrt{1 + (p^2/4)(2m+1)^2}} + \frac{\beta_m}{n_z} \frac{dn_z}{d\omega} + \\ + \beta_e \frac{dn_{\perp}}{d\omega} \left[\frac{p}{2n_{\perp}} (2m+1) - \frac{p^2}{n_{\perp}} \frac{(2m+1)^2}{\sqrt{1 + (p^2/4)(2m+1)^2}} \right]. \quad (14)$$

Как видно из (13), спектр β_m не является эквидистантным, поэтому в среде, где проницаемость распределена по закону (8), идеальная фокусировка недостижима. Однако для волн оптических частот обычно выполняется условие

$$p \ll 1. \quad (15)$$

Действительно, так как в оптическом диапазоне $\omega^2/c^2 \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$, а для θ_z в соответствии с данными [2, 4] можно принять оценки $\theta_z \sim 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ см}^{-2}$, то p^2 имеет порядок $10^{-7} \div 10^{-12}$. С учетом этого вплоть до весьма больших m можно положить:

$$\beta_m \approx \beta_e [1 - (p/2)(2m+1)]. \quad (16)$$

При эквидистантности спектра постоянных распространения мод, всякая волна, являющаяся их суперпозицией, будет периодически воспроизводиться с периодом x_0 , где

$$x_0 = \frac{2\pi n_{\perp}}{n_z \sqrt{\theta_z}}.$$

Если неоднородная фокусирующая среда имеет конечную протяженность l вдоль оси x , то она эквивалентна цилиндрической толстой линзе с фокусным расстоянием

$$F = \frac{x_0}{\pi n_z \sin \frac{\pi l}{x_0}} \quad (17)$$

и с расстоянием между входной и главной плоскостями (см. рис. 1)

$$H = \frac{x_0}{\pi n_z} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2x_0}, \quad (18)$$

в чем можно убедиться по аналогии с результатами [18, 19].

В частном случае, при $m = 0$ собственной волной является пучок с гауссовым распределением амплитуды:

$$U_0 = N_0 \exp(-z^2/2w_0^2),$$

где w_0 — полуширина пучка. Для w_0 выполняется соотношение

$$w_0^2 = \frac{\lambda_0}{2\pi n_{\perp} \sqrt{\mu \theta_z}} \frac{1}{\sqrt{1 + p^2/4 - p/2}}, \quad (19)$$

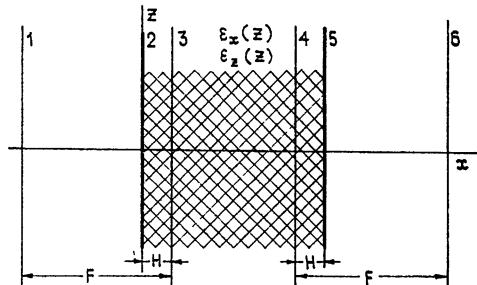


Рис. 1. К определению параметров анизотропной дефлекторной линзы:
1, 6 — фокальные плоскости, 2 — входная плоскость, 3, 4 — главные плоскости, 5 — выходная плоскость.

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$. Интересно отметить, что ширина моды не зависит от величины диэлектрической проницаемости ϵ_z , а определяется значениями компоненты ϵ_x и параметра θ_z . Легко показать, что таким же свойством обладают и высшие типы волн. При выполнении (15) выражение (19) переходит в

$$\omega_0^2 = \frac{\lambda_0}{2\pi n_{\perp} \sqrt{\theta_z \mu}}. \quad (20)$$

С учетом (15) можно также упростить выражение для групповой скорости

$$v_{\text{гр. } m}^{-1} \approx \frac{\beta_e}{\omega} + \frac{\beta_e}{n_z} \frac{dn_z}{d\omega}. \quad (21)$$

Таким образом, групповые скорости фокусируемых мод практически одинаковы, а их зависимость от частоты, как и в изотропной среде, определяется главным образом дисперсией показателя n_z [14].

3. Рассмотрим теперь случай

$$\epsilon_x(z) = \frac{n_{\perp}^2}{1 + \theta_{\perp} z^2}, \quad \epsilon_z(z) = n_z^2 = \text{const.} \quad (22)$$

Уравнение (6) с учетом (22) принимает вид

$$(1 + \theta_{\perp} z^2) \frac{d^2 H_y}{dz^2} + 2\theta_{\perp} z \frac{dH_y}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu n_{\perp}^2 - \frac{\beta^2 n_{\perp}^2}{n_z^2} \right) H_y = 0. \quad (23)$$

Решения (23) также можно найти в замкнутой форме. Действительно, замена $H_y(z) = W(\zeta)$, где $\zeta = i \sqrt{\theta_{\perp}} z$, приводит (23) к уравнению Лежандра:

$$(\zeta^2 - 1) \frac{d^2 W}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dW}{d\zeta} - \nu(\nu + 1)W = 0, \quad (24)$$

где

$$\nu(\nu + 1) = \frac{1}{\theta_{\perp}} \left(\frac{\omega^2 \mu n_{\perp}^2}{c^2} - \frac{\beta^2 n_{\perp}^2}{n_z^2} \right). \quad (25)$$

Решениями (24) являются сферические функции $P_{\nu}(\zeta)$, $Q_{\nu}(\zeta)$ [16], где ζ — мнимый аргумент. Для постоянной распространения из (25) получается выражение

$$\beta^2 = \beta_e^2 [1 - q^2 \nu(\nu + 1)], \quad (26)$$

где $q^2 = c^2 \theta_{\perp} / \omega^2 \mu n_{\perp}^2$. В настоящей работе рассматриваются бегущие (незатухающие по x) волны. Условие бегущих волн ($\beta^2 > 0$) будет выполняться либо для действительных значений индекса ν , удовлетворяющих условию

$$\nu(\nu + 1) < 1/q^2, \quad (27)$$

либо для комплексных ν вида $\nu = -1/2 + i\eta$. Дополнительные ограничения вытекают из требования конечности энергии каждой моды. Асимптотическое поведение $P_{\nu}(\zeta)$, $Q_{\nu}(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$ дается следующими выражениями [16]:

$$P_v(\zeta) \approx \begin{cases} \frac{2^v}{V\pi} \frac{\Gamma(v+1/2)}{\Gamma(v+1)} \zeta^v & (\operatorname{Re} v \geq -1/2) \\ \frac{2^{-v-1}}{V\pi} \frac{\Gamma(-v-1/2)}{\Gamma(-v)} \zeta^{-v-1} & (\operatorname{Re} v < -1/2) \end{cases},$$

$$Q_v(\zeta) \approx 2^{-v-1} V\pi \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+3/2)} \zeta^{-v-1}. \quad (28)$$

Из (28) видно, что условию достаточно быстрого убывания поля (быстрее, чем $\zeta^{-1/2}$) удовлетворяют лишь решения $Q_v(\zeta)$, причем должно быть: $v > -1/2$. Для $Q_v(\zeta)$ имеется интегральное представление [16]

$$Q_v(\zeta) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^{v+1}}. \quad (29)$$

Используя (29), можно найти для мод, соответствующих целым индексам, выражение через элементарные функции

$$W_0(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\theta_\perp} z,$$

$$W_1(z) = 1 - \sqrt{\theta_\perp} z W_0(z),$$

$$W_2(z) = (1 + 3\theta_\perp z^2) W_0(z) - 3\sqrt{\theta_z} z$$

и т. д. Отметим, что в отличие от предыдущего случая профиль моды не зависит ни от длины волны, ни от величины диэлектрической проницаемости, если только выполнено условие (27).

Из (26) найдем выражение для групповой скорости

$$v_{rp}^{-1} = \frac{\beta_e^2}{\omega \beta_v} + \frac{\beta_v}{n_z} \frac{dn_z}{d\omega} + \frac{1}{n_\perp} \frac{2q^2 v(v+1)}{\sqrt{1 - q^2 v(v+1)}} \frac{dn_\perp}{d\omega}. \quad (30)$$

Если дисперсией показателей n_z и n_\perp можно пренебречь, то среда обладает дисперсией волноводного типа, причем критическая частота каждой моды ($v > 0$) может быть определена из условия (27). Несмотря на то, что данная среда обеспечивает определенную концентрацию волн, здесь невозможно наблюдать фокусировку световых пучков. В этом легко убедиться, приняв во внимание неэквидистантный характер волновых чисел для мод с целыми индексами.

Таким образом, волновые явления в двух рассмотренных выше случаях существенно различаются фокусирующими свойствами, а также характером спектра собственных волн, видом дисперсии. Примечательно также, что в первом случае при достаточно больших z имеет место экспоненциальное спадание поля всех мод, а во втором — интенсивность поля убывает как конечная степень z .

Для более детального анализа обратимся к уравнению (6), которое путем замены $V(z) = H_y(z)/\sqrt{\epsilon_x(z)}$ приведем к виду

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + f(z)V = 0, \quad (31)$$

где

$$f(z) = \varepsilon_x \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu - \frac{\beta^2}{\varepsilon_z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon_x} \frac{d \varepsilon_x}{dz} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon_x} \frac{d \varepsilon_x}{dz} \right). \quad (32)$$

В приближении геометрической оптики световые пучки должны быть ограничены каустическими поверхностями: $z = \pm z_0$, где z_0 определяется из уравнения

$$f(z_0) = 0.$$

В случае распределения (8) для полуширины m -й моды имеем

$$z_{0m} = \sqrt{2m+1} \sqrt[4]{\frac{n_z^2}{n_\perp^2 \theta_m \theta_z}}, \quad (33)$$

или, с учетом (15) и (22),

$$z_{0m} \approx \sqrt{2m+1} w_0. \quad (34)$$

В случае неоднородной среды типа (22) при $\nu > 0$ каустики вообще не существуют. В том же случае, когда каустика должна формально существовать, т. е. при $-1/2 < \nu < 0$ решение в приближении ВКБ имеет следующее асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$:

$$H_y(z) \sim z^{1-\sqrt{-\nu(\nu+1)}}. \quad (35)$$

Несоответствие (35) точному выражению (28) иллюстрирует тот факт, что в подобной среде невозможно описать реальное распределение поля в приближении геометрической оптики.

Если для анизотропной среды вида (8) ширина волнового пучка определяется как величиной θ_z , так и длиной волны, и при $p \ll 1$ эта величина гораздо меньше, чем $\theta_z^{-1/2}$, то во втором случае расстояние, на котором спадает интенсивность поля, имеет тот же порядок, что и характерный размер неоднородности $\theta_\perp^{-1/2}$. Таким образом, в реальных анизотропных фокусирующих структурах, где одновременно имеет место неоднородность обеих компонент диэлектрической проницаемости, ε_x и ε_z , общий характер фокусировки будет определяться, главным образом, распределением $\varepsilon_z(z)$. В то же время неоднородность $\varepsilon_x(z)$ должна играть существенную роль при распространении длинных волн, для которых $\lambda \sim \theta_z^{-1/2}$.

4. Рассмотрим теперь анизотропную фокусирующую среду более общего вида. Пусть компоненты ε_z и ε_x одновременно зависят от координаты z , причем

$$\varepsilon_z(z) = \frac{n_z^2}{1 + \theta_z z^2 + \tau_z z^4}, \quad \varepsilon_x(z) = \frac{n_\perp^2}{1 + \theta_\perp z^2 + \tau_\perp z^4}. \quad (36)$$

Подставив (36) в (32), получим для $f(z)$ представление в виде степенного ряда:

$$f(z) = A - Bz^2 - Cz^4 \dots, \quad (37)$$

где

$$A = n_\perp^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu - \frac{\beta^2}{n_z^2} \right) - \theta_\perp,$$

$$B = n_\perp^2 \left[\theta_\perp \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu - \frac{\beta^2}{n_z^2} \right) + \theta_z \frac{\beta^2}{n_z^2} \right] - 4\theta_\perp^2 - 6\tau_\perp,$$

$$C = n_{\perp}^2 \left[(\tau_{\perp} - \theta_{\perp}^2) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu - \frac{\beta^2}{n_z^2} \right) + (\tau_z - \theta_{\perp} \theta_z) \frac{\beta^2}{n_z^2} \right] + 7\theta_{\perp}^3 - 19\theta_{\perp}\tau_{\perp}.$$

Вклад от членов Cz^4 и более высоких степеней можно считать малым, если $\theta_z, \theta_{\perp} \ll \beta_e^2, \tau_z, \tau_{\perp} \ll \beta_e^4$, и рассматривать уравнение (31), где $f(z)$ определена (37), как возмущенное по отношению к (9). Замена $\xi = \sqrt[4]{B} z$ приводит (31) к виду

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \left[\Lambda - \xi^2 - \frac{C}{B^{3/2}} \xi^4 \right] V = 0,$$

где $\Lambda = A/B^{1/2}$. Если $C = 0$, то локализованным волнам отвечают собственные значения $\Lambda_m = 2m + 1$. В случае $C \neq 0$ в первом приближении теории возмущений [20] имеется поправка к Λ_m , величина которой

$$\delta\Lambda_m = \frac{C}{B^{3/2}} \frac{3}{4} (2m^2 + 2m + 1).$$

Таким образом, для определения β_m получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{A}{B^{1/2}} = 2m + 1 + \frac{3}{4} \frac{C}{B^{3/2}} (2m^2 + 2m + 1). \quad (38)$$

Учитывая малость возмущения, положим

$$\beta_m^2 = \beta_{m0}^2 + \delta\beta_m^2, \quad (39)$$

где

$$\beta_{m0}^2 = \beta_e^2 [1 - p(2m + 1)]. \quad (40)$$

Подставив (39), (40) в (37) и (38), можем найти приближенное выражение для $\delta\beta_m^2$:

$$\delta\beta_m^2 = \frac{n_z^2}{n_{\perp}^2} \left[-\theta_{\perp} + \frac{1}{2} (2m+1)^2 (\theta_z - \theta_{\perp}) - \frac{3}{4} \left(\frac{\tau_z}{\theta_z} - \theta_{\perp} \right) (2m^2 + 2m + 1) \right]. \quad (41)$$

Из (40), (41) следует, что эффективность фокусировки в первом приближении не зависит от величины параметра неоднородности θ_{\perp} и определяется лишь величиной θ_z . Кроме того, в выражении для возмущения волнового числа в первом приближении отсутствует вклад от τ_{\perp} . Это подтверждает сделанный выше вывод о слабом влиянии пространственной неоднородности компоненты $\epsilon_x(z)$ на фокусировку ТМ-волн.

Используя полученные выше результаты, можно решить вопрос о среде, обладающей оптимальными фокусирующими свойствами. Так, выражение (13) отличается от идеального эквидистантного спектра (16) членами порядка p^2 . Нетрудно показать, что при условии

$$\tau_z = \theta_z \left(\frac{2}{3} \theta_z - \frac{1}{3} \theta_{\perp} \right) \quad (42)$$

выражения (40), (41) дают спектр, эквидистантный с точностью до малых порядка p^4 . В частности, если $\theta_z = \theta_{\perp}$, то для оптимальной фокусировки необходимо иметь $\tau_z = \theta_z^2/3$. В этом случае распределение проницаемости имеет вид

$$\epsilon_z(z) = n_z^2 \left(1 - \theta_z z^2 + \frac{2}{3} \theta_z^2 z^4 - \dots \right). \quad (43)$$

Интересно отметить, что (43) совпадает с первыми членами разложения по степеням z распределения (7), которое обеспечивает идеальную фокусировку ТЕ-волн. Таким образом, в изотропной среде вида (7) с высокой точностью обеспечиваются условия фокусировки света независимо от его поляризации.

Если параметры анизотропной среды заданы, то из (40), (41) можно оценить качество фокусировки. Так, если по аналогии с критерием Рэлея потребовать, чтобы разность хода для всех волн, участвующих в формировании изображения, не превышала четверти длины волны [21], то получим неравенство

$$(2m + 1)^2 \left(2\theta_z - \theta_{\perp} - \frac{3\epsilon_z}{\theta_z} \right) l^2 < 2\pi^2. \quad (44)$$

Условие (44) устанавливает ограничения на длину фокусирующего элемента и на размер апертуры, пропорциональный $\sqrt{2m+1}$ (см. 34)).

5. Проведенное выше исследование позволило выяснить ряд особенностей распространения электромагнитных волн в плоскослоистой анизотропной среде, связанных с одновременным пространственным изменением различных компонент тензора диэлектрической проницаемости. Показано, что эффект фокусировки определяется, главным образом, неоднородным распределением той компоненты проницаемости, вдоль которой направлен вектор электрического поля, однако другие компоненты могут оказывать существенное влияние на форму собственных волн и на aberrации анизотропных оптических элементов. Выяснены приближенные условия оптимальной фокусировки в анизотропной структуре, в частности, показано, что среда с распределением (7) является «изотропно фокусирующей».

В настоящей работе основное внимание уделялось фокусировке световых пучков ($\lambda \ll \theta^{-1/2}$), однако полученные результаты могут иметь и более широкую область применения, так как они не ограничены рамками приближения геометрической оптики. Возможны их обобщения на двуосные среды, а также на трехмерные волновые задачи в плоскослоистой среде, аналогично [15].

Существенное влияние на распространение волн (особенно в среде типа (24)) может оказывать конечная протяженность фокусирующей структуры. Этот вопрос будет предметом отдельного исследования.

В заключение автор выражает благодарность И. В. Иванову и Н. А. Морозову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко, С. Н. Столяров, Волноводные свойства $p-n$ -переходов и электромагнитная теория инжекционных лазеров, Ин-т физики АН БССР, Минск, 1970
- 2 А. М. Гончаренко, В. П. Редько, Введение в интегральную оптику, изд. Наука и техника, Минск, 1975
3. F. W. Quellie, Appl. Opt., 5, № 4, 633 (1966)
- 4 И. М. Бужинский, Е. М. Дианов, С. К. Мамонов, Л. М. Михайлов, А. М. Прохоров, ДАН СССР, 190, № 3, 558 (1970).
- 5 Ю. А. Ананьев, Н. И. Гришманова, ЖПС, 12, № 4, 668 (1970)
- 6 А. А. Мак, Л. Н. Сомс, А. И. Степанов, А. Б. Судаков, Оптика и спектроскопия, 30, № 6, 1081 (1971).
- 7 I. P. Kamipow, Appl. Opt., 3, № 4, 511 (1964).
- 8 Н. А. Морозов, Авт. свид. № 440630, Бюлл. изобр. № 31, 1974.
- 9 М. Е. Жаботинский, Ч. М. Брискина, В. Ф. Золин, Авт. свид. № 235350, Бюлл. изобр. № 5, 1969
10. Т. Ясуо, Японский патент кл. 104 A 4126 № 7597, опубл. 16.03.1970.

- 11 Ю. А Зайцев, Ю. А Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. вузов — Радиофизика, 11, № 12, 1802 (1968).
- 12 Ю. А Кравцов, ДАН СССР, 183, № 1, 74 (1968).
- 13 М. Б Виноградова, В. Д Гусев, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 481 (1974).
- 14 Ф. Я Бронфин, В. Г. Ильин, Г. О. Карапетян, В. Я Лившиц, В. И. Максимов, Д. К. Саттаров, ЖПС, 18, № 3, 523 (1973).
- 15 Е. Т. Kognhauser and A. D. Yaghjyan, Radio Sci., 2, № 3, 299 (1967).
- 16 Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, т 1, 2, изд Наука, М, 1966.
- 17 Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, Гостехиздат, М, 1951.
- 18 Н. Kogelnik, Bell Syst Techn J, 44, № 3, 455 (1965).
- 19 F. P. Karzon, J. Opt. Soc Amer., 60, № 11, 1433 (1970).
- 20 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, изд Наука, М, 1974.
- 21 М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М, 1970

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
26 декабря 1977 г.

THE WAVE FOCUSING IN ANISOTROPIC PLANE-STRATIFIED MEDIUM

G. V. Belokopytov

The problem of propagation of electromagnetic waves in the inhomogeneous uniaxial anisotropic medium has been considered. The analytical solutions of the Maxwell equations are found for two particular cases of the plane-stratified dielectric. The influence of different parameters of the inhomogeneous distribution of refractive indexes on the characteristics of the wave beam propagation has been analysed. The corrections of the first approximation of the perturbation theory for the constants of the natural wave propagation are obtained for the general plane-stratified focusing medium. This permitted to solve the problem of the refractive index distribution providing the optimal focusing.

УДК 621.396

ХАРАКТЕРИСТИКИ СКАНИРОВАНИЯ РЕЗОНАТОРНО-ЩЕЛЕВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АНТЕННОЙ СТРУКТУРЫ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ*

A. Ю. Гринев, А. С. Ильинский, Ю. В. Котов

Рассматривается алгоритм анализа и исследуется зависимость полной входной проводимости резонаторно-щелевой периодической структуры с прямоугольной и треугольной сеткой в зависимости от угла сканирования, геометрии решетки, толщины диэлектрического покрытия и диэлектрической проницаемости. Приводятся результаты численных расчетов, рассматривается возможность оптимизации.

В работе [1] рассмотрен алгоритм анализа и проведено исследование электродинамических характеристик изолированного резонаторно-щелевого излучателя с источниками возбуждения в плоскости щели, а также обсуждены вопросы практического применения этой антенны. Рассмотренные излучатели находят применение в фазируемых антенных решетках (ФАР) с линейной, круговой и управляемой поляризацией излучаемого поля.

Настоящая статья является развитием работы [1] на резонаторно-щелевые периодические антенные структуры с диэлектрическим покрытием. Диэлектрические покрытия используются как естественная защита ФАР от внешних воздействий, а также при соответствующем подборе величины и толщины диэлектрического покрытия для улучшения характеристик сканирования.

В работе изложен алгоритм и проведено исследование полной входной проводимости указанной структуры с излучателями, расположенными в узлах прямоугольной и треугольной сеток, в зависимости от угла сканирования, геометрии решетки, толщины и диэлектрической проницаемости покрытия.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

При анализе электродинамических характеристик используется модель в виде бесконечной, равномерно возбужденной антенной решетки с линейным фазовым набегом [2].

Геометрия структуры приведена на рис. 1 (прямоугольная сетка), диэлектрическая проницаемость покрытия ϵ_1 , толщина — t . Каждая щель закрыта с одной стороны прямоугольным резонатором с однородным заполнением ϵ_2 и возбуждена N -источниками, расположенными в плоскости щели (подробно модель возбуждения рассмотрена в [1]).

* Результаты доложены на конференции «Новое в разработках СВЧ-устройств», Киев, 1978.

Для исследования характеристик сканирования рассматриваемой структуры в рамках выбранной электродинамической модели достаточно найти тангенциальную составляющую вектора напряженности электрического поля в каждой щели как функцию угла сканирования [2].

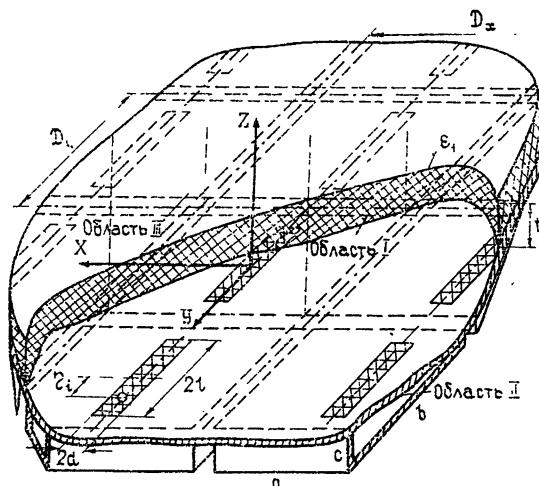


Рис. 1.

Составим интегральное уравнение относительно неизвестной тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля в щели. В отличие от [1] в интегральном уравнении необходимо учесть взаимодействие между излучателями и наличие диэлектрического покрытия. Полагаем щель достаточно узкой ($2d \ll \lambda$) и пренебрегаем продольной составляющей электрического поля в щели. Из условия непрерывности касательных компонент вектора напряженности магнитного поля на щели имеем

$$[n, (H^{(I)} - H^{(II)})] = \left[\sum_{j=1}^N j_{\eta_j}^e (\eta_j - y) \right] x_0. \quad (1a)$$

Здесь $H^{(I)}$, $H^{(II)}$ — векторы напряженности магнитного поля для рассматриваемых областей: I — канал Флоке, II — резонатор (см. рис. 1);

$$j_{\eta_j}^e (\eta_j - y) = j_{\eta_j}^e f(\eta_j - y), \quad (1b)$$

где $j_{\eta_j}^e$ — комплексные амплитуды плотности электрического тока возбуждения в j -х точках; $f(\eta_j - y)$ — функция, задаваемая с учетом аппроксимации стороннего магнитного поля j -го источника в точке η_j (конкретный вид $f(\eta_j - y)$ зависит от устройства области возбуждения антенны [1]); n — внешняя нормаль к границе $z = 0$, x_0 — единичный орт.

Поля $H^{(I)}$ и $H^{(II)}$, как и в [1], выражаются через магнитные векторные потенциалы $A^{\mu(I)}$ и $A^{\mu(II)}$ соответственно каждой из областей I и II.

Следуя [3], $A^{\mu(I), (II)}$ представляются в виде

$$A^{\mu(I), (II)}(M) = \int_{S_{\mu}} \hat{G}^{\mu(I), (II)}(M, M') j^{\mu}(M') dS_{M'}, \quad (2)$$

Здесь, с учетом сделанных выше допущений,

$$\mathbf{j}^{\mu}(M') = j_y^{\mu}(M') \mathbf{y}_0,$$

$j_y^{\mu}(M')$ — y -компоненты вектора плотности магнитного тока на щели, M, M' — соответственно точки наблюдения и источника, $S_{\text{щ}}$ — поверхность щели, $\hat{G}^{\mu(I), (II)}(M, M')$ — тензорная функция источника, имеющая вид для области I:

$$\hat{G}^{\mu(I)}(M, M') = \begin{Bmatrix} G_x^{\mu(I)}(M, M') & 0 & 0 \\ 0 & G_y^{\mu(I)}(M, M') & 0 \\ \frac{\partial g^{\mu(I)}}{\partial x} & \frac{\partial g^{\mu(I)}}{\partial y} & \frac{1}{\mu} G_z^{\mu(I)}(M, M') \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Элементы тензора $G_x^{\mu(I)}, G_y^{\mu(I)}, g^{\mu(I)}$ в соответствии с [3] определяются из решения следующих задач в случае кусочно-постоянной, магнитооднородной ($\mu = \mu = \text{const}$) среды.

В области (I)

$$\nabla^2 G_{\alpha_1}^{\mu(I)} + k_1^2 G_{\alpha_1}^{\mu(I)} = -\delta(r_{MM'}),$$

$$[\varepsilon G_{\alpha_1}^{\mu}] = \left[\frac{\partial G_{\alpha_1}^{\mu}}{\partial z} \right] = 0 \quad \text{при } z = t, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial G_{\alpha_1}^{\mu(I)}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

на боковых стенках пространственной ячейки выполнены условия квазипериодичности, а на бесконечности — условия излучения; $\alpha_1 = x, y$, $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $\Psi_x = kD_x \sin \theta \cos \varphi$, $\Psi_y = kD_y \sin \theta \sin \varphi$, θ, φ — сферические координаты; $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$; D_x, D_y — шаг решетки; $\delta(r_{MM'})$ — дельта-функция.

В области (I)

$$\nabla^2 g^{\mu(I)} + k_1^2 g^{\mu(I)} = 0,$$

$$[g^{\mu}] = \left[\frac{\partial g^{\mu}}{\partial z} + G_{\alpha}^{\mu} \right] = 0 \quad \text{при } z = t, \quad (4b)$$

$$g^{\mu} = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

на боковых стенках пространственной ячейки выполнены условия квазипериодичности, а на бесконечности — условия излучения. Квадратными скобками в (4a), (4b) обозначен разрыв функций.

Уравнение для $G_z^{\mu(I)}$ не приводится, так как данная компонента в дальнейшем не понадобится.

Решения задач (4a), (4b) имеют вид

$$G_{\alpha_1}^{\mu(1)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ \frac{v_{m,n}^{\alpha_1}(x, y) v_{m,n}^{*\alpha_1}(x', y')}{2D_x D_y \sin \alpha i \Gamma_{m,n}^{(1)}} \times \right. \\ \left. \times [f_{m,n}(z, z') + A_{m,n} 2 \cos \Gamma_{m,n}^{(1)} z] \right\}; \quad (5)$$

$$g^{\mu(1)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} - 1 \right) \frac{v_{m,n}^{\alpha_1}(x, y) v_{m,n}^{*\alpha_1}(x', y')}{2D_x D_y \sin \alpha i \Gamma_{m,n}^{(1)}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{f_{m,n}(t, z') + A_{m,n} 2 \cos \Gamma_{m,n}^{(1)} t}{\Gamma_{m,n}^{(1)} \cos \Gamma_{m,n}^{(1)} t + i \Gamma_{m,n}^{(III)} \sin \Gamma_{m,n}^{(1)} t} \right] \sin \Gamma_{m,n}^{(1)} z \right\}, \quad (6)$$

где

$$v_{m,n}^{\alpha_1}(x, y) = v_{m,n}(x, y) = \begin{cases} \exp[i(k_{xm}x + k_{yn}y)] & \text{прямоугольная сетка,} \\ \exp[i(x_{xm}x + x_{yn}y)] & \text{треугольная сетка,} \end{cases}$$

$$\Gamma_{m,n}^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{k_1^2 - k_{xm}^2 - k_{yn}^2} & \text{прямоугольная сетка,} \\ \sqrt{k_1^2 - x_{xm}^2 - x_{yn}^2} & \text{треугольная сетка,} \end{cases}$$

$$k_{xm} = \frac{2\pi m - \Psi_x}{D_x}, \quad k_{yn} = \frac{2\pi n - \Psi_y}{D_y}, \quad \alpha_1 = x, y,$$

$$x_{xm} = k_{xm}, \quad x_{yn} = 2\pi \left(\frac{n}{D_y \sin \alpha} - \frac{m}{D_x \tan \alpha} \right) - \frac{\Psi_y}{D_y},$$

$$f_{m,n}(z, z') = \exp[-i\Gamma_{m,n}^{(1)}|z - z'|] + \exp[-i\Gamma_{m,n}^{(1)}|z + z'|],$$

$$A_{m,n} = f_{m,n}(t, z') \frac{\epsilon_3 \Gamma_{m,n}^{(I)} - \epsilon_1 \Gamma_{m,n}^{(III)}}{2(\epsilon_1 \Gamma_{m,n}^{(III)} \cos \Gamma_{m,n}^{(1)} t + i \epsilon_3 \Gamma_{m,n}^{(1)} \sin \Gamma_{m,n}^{(1)} t)},$$

$\Gamma_{m,n}^{(III)}$ определяется аналогично $\Gamma_{m,n}^{(I)}$ с заменой k_1 на $k_3 = \omega \sqrt{\epsilon_3 \epsilon_0 \mu_0}$; α — угол, характеризующий треугольную сетку.

Для $A^{\mu(1)}$ тензор Грина $\hat{G}^{\mu(1)}(M, M')$ является диагональным и используемая в дальнейшем компонента $G_y^{\mu(1)}$ записывается в виде [1]

$$G_y^{\mu(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \epsilon_m u_{m,n}(x, y)}{ab \gamma_{m,n} \sin \gamma_{m,n} c} \times \\ \times u_{m,n}(x', y') \begin{cases} \cos \gamma_{m,n} z \cos \gamma_{m,n} (c - z') & (z < z') \\ \cos \gamma_{m,n} z' \cos \gamma_{m,n} (c - z) & (z > z') \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$u_{m,n}(x, y) = \cos \beta_x \left(x + \frac{a}{2} \right) \sin \beta_y \left(y + \frac{b}{2} \right),$$

$$\beta_x = \frac{\pi m}{a}, \quad \beta_y = \frac{\pi n}{b}, \quad \epsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases},$$

$$\gamma_{m,n} = \sqrt{k_2^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2}, \quad k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0 \mu_0},$$

a, b, c — геометрические размеры резонатора.

Используя представления $H^{(I)}$, $H^{(II)}$ через векторные потенциалы $A^{\mu(I)}$, $A^{\mu(II)}$ [1], с учетом (1а), (1б), имеем

$$\begin{aligned} H_y^{(I)} - H_y^{(II)} &= \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (A_y^{\mu(I)} - A_y^{\mu(II)} + \tilde{A}_z^{\mu(I)}) + \kappa_1^2 A_y^{\mu(I)} - k_2^2 A_y^{\mu(II)} \right] = \\ &= - \left[\sum_{j=1}^N I_{\eta_j}^e f(\eta_j - y) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_y^{\mu(I)}$, $A_y^{\mu(II)}$ определяются соотношениями (2)–(7):

$$\tilde{A}_z^{\mu(I)} = \int_{S_{\text{щ}}} j_y^{\mu}(M') \frac{\partial g^{\mu(I)}(M, M')}{\partial z} ds_{M'}. \quad (9)$$

Добавляя к обеим частям (9) член $k_2^2 (A_y^{\mu(I)} + \tilde{A}_z^{\mu(I)})$ и обращая оператор $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2^2 \right)$, получим

$$\begin{aligned} A_y^{\mu(I)} - A_y^{\mu(II)} + \tilde{A}_z^{\mu(I)} &= C_1 \cos k_2 y + C_2 \sin k_2 y - \\ &- \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2 \epsilon_0}} \left\{ \sum_{j=1}^N I_{\eta_j}^e \int_{-l}^l f(\eta_j - y) \sin k_2 |y - y'| dy' \right\} - \\ &- \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_2} \int_{-l}^l \left\{ A_y^{\mu(I)} + \frac{k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \tilde{A}_z^{\mu(I)} \right\} \Big|_{y=\xi} \sin k_2 |y - \xi| d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

где C_1 , C_2 — комплексные постоянные интегрирования, определяемые из условия равенства нулю поперечной компоненты электрического поля при $y = \pm l$; $I_{\eta_j}^e$ — задаваемая комплексная амплитуда электрического тока возбуждения в j -й точке.

Используя представления (2)–(7), (9) и учитывая связь $j^{\mu}(M') = \mp [\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ на щели, получаем следующее интегральное уравнение I рода относительно тангенциальной поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля в щели $E_x(x', y')$ ($z = z' = 0$):

$$\begin{aligned} &\int_{S_{\text{щ}}} E_x(x', y') \left(G_y^{\mu(I)} + G_y^{\mu(II)} + \frac{\partial g^{\mu(I)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=z'=0} dx' dy' + \\ &+ \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_2} \int_{-l}^l \left\{ A_y^{\mu(I)} + \frac{k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \tilde{A}_z^{\mu(I)} \right\} \Big|_{y=\xi} \sin k_2 |y - \xi| d\xi = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= C_1 \cos k_2 y + C_2 \sin k_2 y - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2 \epsilon_0}} \left\{ \sum_{j=1}^N I_{\eta_j}^e \int_{-l}^l f(\eta_j - y') \sin k_2 |y - y'| dy' \right\}.$$

Для нахождения $E_x(x', y')$ из уравнения (11) используется метод саморегуляризации с выделением особенности типа $1/r$ в ядре интегрального уравнения [4, 5], позволяющий свести решение интегрального уравнения (11) к решению устойчивой системы линейных алгебраических уравнений.

Построение численного решения интегрального уравнения (11) проводилось по схеме разработанного в [1] алгоритма решения интегрального уравнения, подобного (11).

Входная проводимость щелевого излучателя в составе антенной решетки определялась как отношение комплексной амплитуды электрического тока, подводимого в точку возбуждения (координата η_j), к разности потенциалов между краями щели в той же точке.

Поле излучения элемента решетки в области основного лепестка (при наличии дополнительных главных лепестков или их отсутствии) можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_\varphi(\theta, \varphi) &= [p_{00}(k_{y0} \sin \varphi + k_{x0} \cos \varphi) - \Gamma_{00}^{(III)} \epsilon_1 \sin \varphi] \Psi_{00}, \\ E_\theta(\theta, \varphi) &= [p_{00} \cos \theta (k_{x0} \sin \varphi - k_{y0} \cos \varphi) + \\ &\quad + \epsilon_1 (\Gamma_{00}^{(III)} \cos \theta \cos \varphi + k_{x0} \sin \theta)] \Psi_{00}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{00} &= (\epsilon_1 - \epsilon_3) \frac{i k_{y0} \sin \Gamma_{00}^{(I)} t}{\Gamma_{00}^{(I)} \cos \Gamma_{00}^{(I)} t + i \Gamma_{00}^{(II)} \sin \Gamma_{00}^{(I)} t}, \\ \Psi_{00}(\theta, \varphi) &= \frac{2 J_0(k_{x0} d) \sin k_{y0} \delta_y}{D_x D_y \sin \alpha k_{y0} (\epsilon_1 \Gamma_{00}^{(III)} \cos \Gamma_{00}^{(I)} t + i \epsilon_2 \Gamma_{00}^{(I)} \sin \Gamma_{00}^{(I)} t)} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{M-1} \left\{ E_x(y_k, \theta, \varphi) \exp(-ik_{y0} y_k) \right\}, \end{aligned}$$

где $\Gamma_{00}^{(I)}$, $\Gamma_{00}^{(III)}$, k_{x0} , k_{y0} — значения $\Gamma_{m,n}^{(I)}$, $\Gamma_{m,n}^{(III)}$, k_{xm} , k_{yn} при $m = 0$, $n = 0$, $J_0(k_{x0} d)$ — функция Бесселя нулевого порядка (d — половина ширины щели), M — число точек разбиения по щели, δ_y — половина интервала разбиения, $E_x(y_k, \theta, \varphi)$ — значение искомого поля по щели в центрах тяжести интервалов разбиения, зависящее от направления сканирования.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Рис. 2 иллюстрирует характер зависимости активной (G) и реактивной (B) составляющих полной входной проводимости резонаторно-щелевого излучателя в составе бесконечной периодической антенной решетки от угла сканирования θ в E -плоскости ($\varphi = 0$) без диэлектрика (кривые 1*) и с диэлектрическим покрытием толщиной $t = 0,125 \lambda_e$ и величиной $\epsilon_1 = 1,1$ (кривые 2); возбуждение в центре щели, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$. Размеры $a = 0,35 \lambda$, $b = 0,6 \lambda$, $c = 0,4 \lambda$ выбраны из условия резонансного режима работы ($B = 0$) щелевого излучателя для случая $\epsilon_1 = 1$, $\theta = 0$, $D_x = 0,6 \lambda$, $D_y = 0,6 \lambda$, $2l/\lambda = 0,5$.

Резкие выбросы на кривых G и B соответствуют моменту появления дифракционного лепестка при сканировании. Интересно отметить, что при угле сканирования, отстоящем на $0,1^\circ$ в сторону нормали от угла, соответствующего появлению первого дифракционного лепестка, наблюдается резкий провал (до нуля) на кривой активной составляющей полной входной проводимости от угла сканирования. Знак реактивной составляющей B меняется на противоположный, что соответствует моменту полного отражения подведенной электромагнитной энергии к плоскости щели, при этом модуль коэффициента отражения $|R(\Psi_x, \Psi_y)| = 1$ [2]. В этом случае распределение поля по щели резко отличается от синусоидального (рис. 3).

* Штриховая кривая 1 в правой части рис. 2 продолжается в сторону отрицательных значений до $-77,5$.

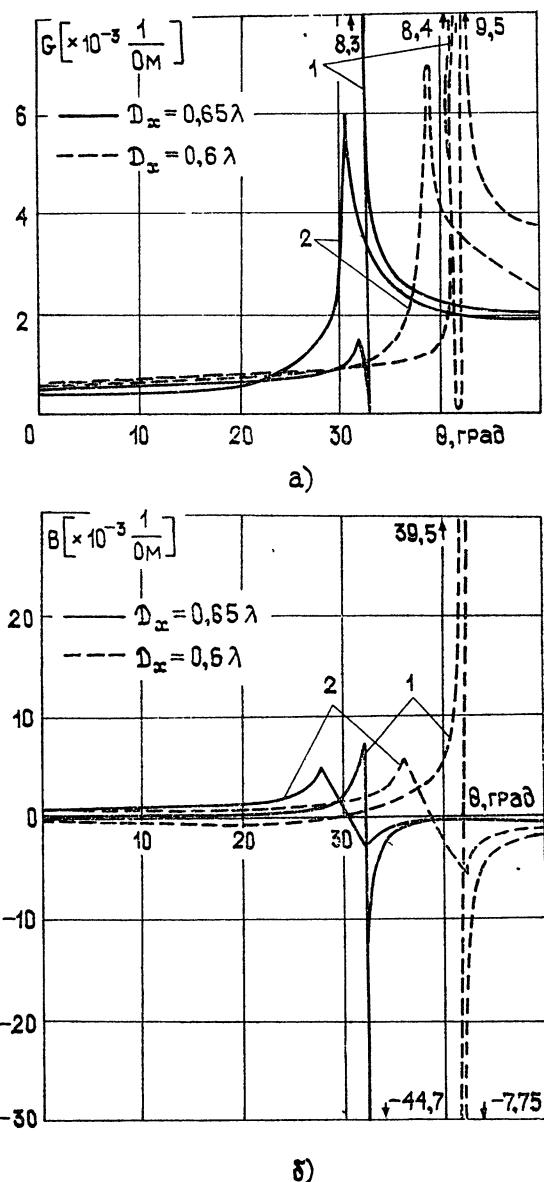


Рис. 2.

Введение диэлектрического покрытия с небольшой величиной диэлектрической проницаемости $\epsilon_1 = 1,1$ и толщиной $t = 0,125\lambda_e$ приводит к сужению сектора сканирования и отсутствию резкого провала (до нуля) на кривой активной составляющей входной проводимости $G(\theta)$ от угла сканирования. Отметим, что первый всплеск на кривой $B(\theta)$ (реактивная составляющая) соответствует моменту возникновения следующей волноводной моды, в области I (рис. 1) канала Флоке; резкий выброс на кривой $G(\theta)$ — моменту перехода кривой $B(\theta)$ через нуль. Второй всплеск на кривой $B(\theta)$ связан с возникновением первого дифракционного лепестка, обусловленного шагом решетки.

Аналогичные расчетные зависимости при сканировании в H -плоскости ($\varphi = \pi/2$) приведены на рис. 4, амплитудно-фазовые распределения

ния поля по щели, соответствующие некоторым углам сканирования, — на рис. 3.

На рис. 5 представлены зависимости активной и реактивной составляющих полной входной проводимости щелевой антенны в составе периодической решетки с диэлектрическим покрытием ($\epsilon_1 = 3$) от угла сканирования в E - и H -плоскостях. В качестве параметра на рис. 5 взята толщина диэлектрического покрытия t .

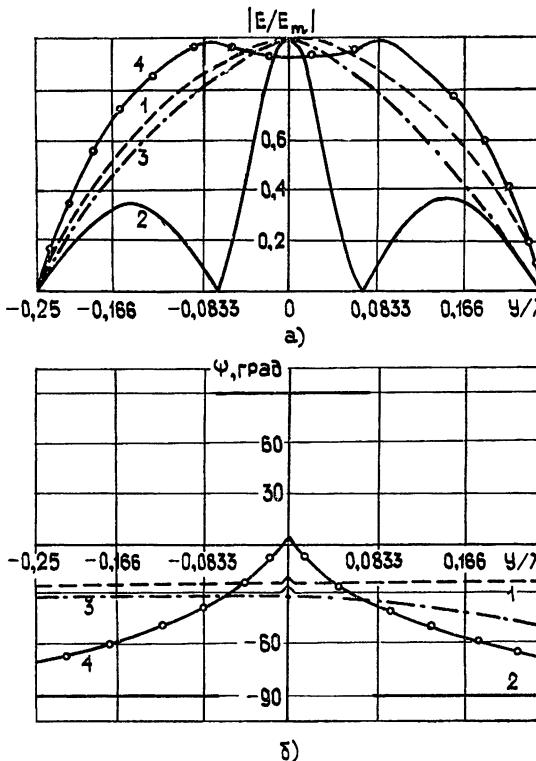


Рис. 3. Амплитудные (а) и фазовые (б) распределения поля вдоль щели (решетка излучателей) $D_x = 0,65 \lambda$, $D_y = 0,6\lambda$, 1— $\theta = 0^\circ$, 2— $\theta = 32^\circ, 58$ (E -плоскость), 3— $\theta = 40^\circ$ (H -плоскость), 4— $\theta = 0^\circ$, $\epsilon_1 = 3$, E -плоскость.

Численные расчеты показали, что, подбирая параметры ϵ_1 и t , можно добиться согласования в широком секторе углов. Возможность такого согласования (оптимизации излучателя в решетке) иллюстрируется на рис. 5 (см. кривую $\epsilon_1 = 2,35$, $t = 0,05 \lambda_e$). Значения КСВН в секторе углов 50° не хуже 1,3 на фиксированной частоте. Наиболее характерное амплитудно-фазовое распределение поля по щели ненастроенного ($B \neq 0$) резонаторно-щелевого излучателя в решетке показано на рис. 3 ($\epsilon_1 = 3$, E -плоскость).

На рис. 6 приведены зависимости активной G - и реактивной B -составляющих полной входной проводимости щелевого излучателя в решетке от угла сканирования в E -плоскости при возбуждении антенны симметрично относительно центра щели в двух точках для прямоугольной и треугольной сеток ($\alpha = 45^\circ$) расположения излучателей. Такое симметричное возбуждение необходимо для получения круговой и упра-

вляемой поляризаций. Сплошная и пунктирная линии на рис. 6 соответствуют изменению активной G - и реактивной B -составляющих полной входной проводимости щелевой антенны в первой и второй точках запитки (см. рис. 6).

Все расчеты, приведенные на рис. 2—6, проводились на ЭВМ БЭСМ-4. Машинное время счета при определении полной входной проводимости для одного угла сканирования составляло порядка 10 мин. Бесконечные суммы в ядре интегрального уравнения (1) аппроксимировались конечным числом слагаемых — 110 и 121 соответственно для функций Грина резонатора и канала Флоке. Увеличение числа слагаемых до 400 приводило к изменению результата на 0,01%. Число точек разбиения по щели выбиралось равным 11.

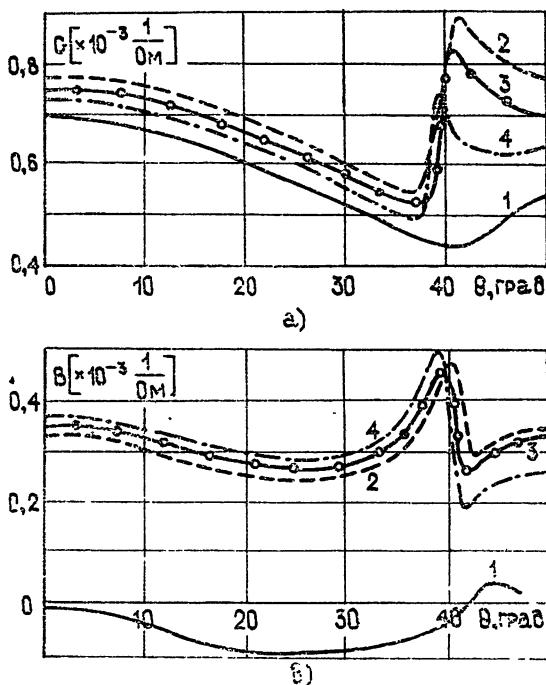
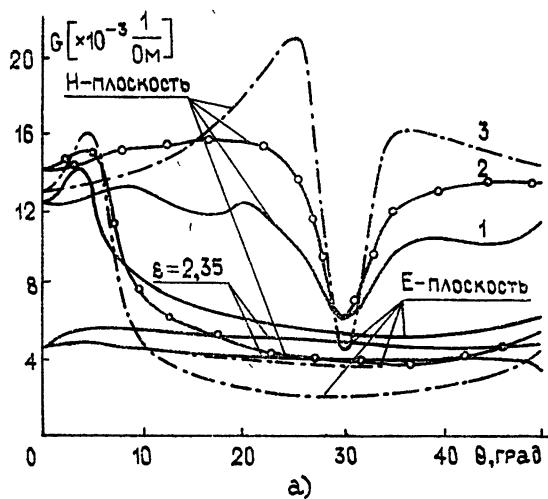
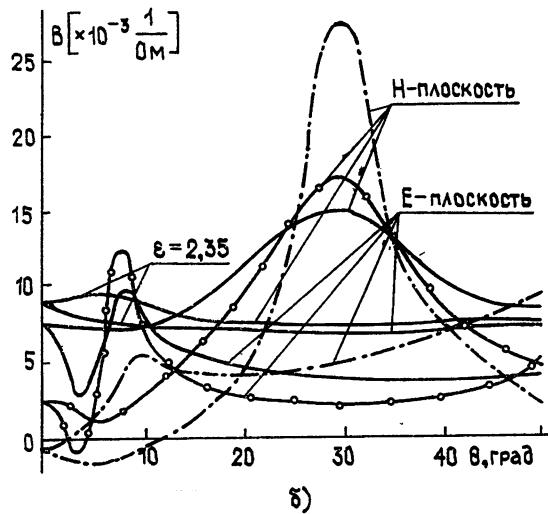


Рис. 4. Зависимость активной (G) и реактивной (B) составляющих входной проводимости излучателя в решетке от угла сканирования в H -плоскости; $D_y = 0,6\lambda$, $D_x = 0,65\lambda$, $2L/\lambda = 0,5$, $\epsilon_1 = 1,1$; $1-t=0$, $2-t=0,05\lambda_\varepsilon$, $3-t=0,125\lambda_\varepsilon$, $4-t=0,25\lambda_\varepsilon$.

Развитый и реализованный алгоритм позволяет анализировать (оптимизировать) энергетические и диапазонные характеристики резонаторно-щелевых излучателей в составе периодической антенной решетки (AP).

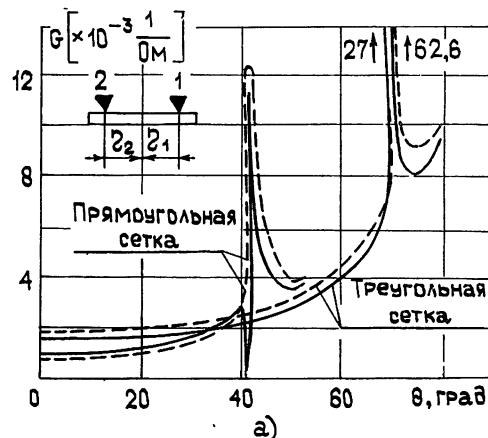


a)

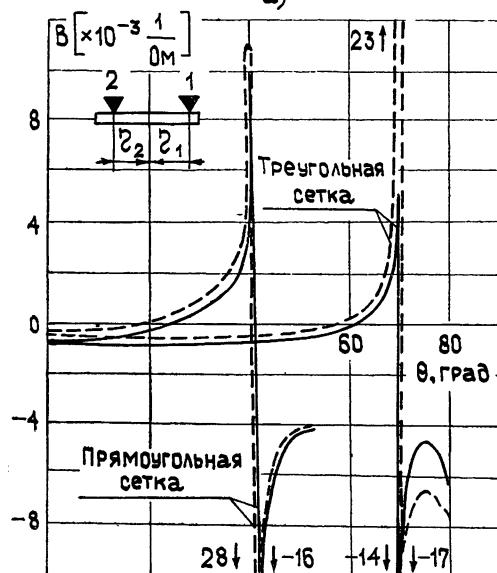


б)

Риç. 5. $D_y = 0,6\lambda$, $D_x = 0,6\lambda$, $2l/\lambda = 0,5$, $\epsilon_1 = 3$,
 $\epsilon_1 = 2,35$;
 $1 - t = 0,05\lambda_\epsilon$, $2 - t = 0,125\lambda_\epsilon'$, $3 - t = 0,25\lambda_\epsilon$.



а)



б)

Рис. 6. $D_x = 0,65\lambda$, $D_y = 0,6\lambda$, $2l/\lambda = 0,5$, \blacktriangleright — точка возбуждения: 1 — сплошная линия, 2 — штриховая линия, $\eta_1 = \eta_2 = 0,166\lambda$.

Алгоритм и реализованная программа обладают достаточной универсальностью и пригодны не только для анализа рассмотренной структуры, но и целого ряда близких задач (например, АР из криволинейных щелевых излучателей с круглым резонатором, АР из печатных вибраторов, расположенных на диэлектрическом слое, АР из простейших директорных излучателей).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Ильинский, А. Ю. Гринев, Ю. В. Котов, Радиотехника и электроника, 23, 5, 922 (1978)
2. Н. Амитей, Б. Галиндо, Ч. Ву, Теория и анализ фазированных антенных решеток, М., Мир, 1974.
3. В. И. Дмитриев, Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 10, 55 (1968).
4. А. С. Ильинский, В. М. Репин, Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 24, 249 (1975)
5. А. Н. Тихонов, В. И. Дмитриев, Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 10, 3 (1968)

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
13 октября 1977 г

THE SCANNING CHARACTERISTICS OF THE RESONATOR-SLOT PERIODIC ANTENNA STRUCTURE WITH A DIELECTRIC COATING

A. Yu. Grinev, A. S. Il'insky, Yu. V. Kотов

The analysis algorithm is considered, and the dependence is investigated of the total input conductivity of the resonator-slot periodic structure with a rectangular and triangular lattice as a function of the scanning angle, the lattice geometry, the thickness of the dielectric layer and dielectric constant. The results of numerical calculations are given, the possibility of the optimization is considered.

УДК 621.372.81.09

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕТКАМИ**

T. B. Белявцева

В работе в строгой постановке решена задача о распространении электромагнитных волн в волноводе с одной или двумя периодическими решетками простой или специальной формы. Полученные выражения исследованы на ЭВМ, и проведен анализ численных результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Волноводные системы с продольными металлическими решетками широко используются в технике сверхвысоких частот в качестве различных узлов волноводного тракта, таких, как направленные ответвители, делители и ослабители мощности, фильтры и преобразователи типов волн, а также в конструкциях излучающих систем.

Широкий диапазон практических применений обусловил значительный интерес к исследованию свойств таких структур [1–8]. Однако, строгое решение задач о распространении электромагнитных волн в подобных системах связано со значительными математическими трудностями, вызванными сложной формой границ. Поэтому обычно при решении таких задач пользуются приближенными методами электродинамики, позволяющими получить сравнительно простые выражения, отражающие основные характеристики рассматриваемых структур в длинноволновом приближении. В настоящее время, в связи с освоением миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов электромагнитных волн и развитием многомодовых линий передачи, такой подход не может считаться удовлетворительным, так как проектирование устройств, содержащих связанные многомодовые волноводы, требует знания их характеристик при длинах волн, соизмеримых с характерным размером структуры, что может быть достигнуто лишь с помощью строгих методов решения краевых задач электродинамики.

В связи с этим в настоящей статье в отличие от исследований, проведенных в [2–8], решение задачи о распространении электромагнитных волн в волноводе с двумя продольными металлическими решетками получено в строгой постановке без каких-либо ограничений на соотношения между длиной волны и геометрическими параметрами волновода или решеток. В качестве математического аппарата использован метод задачи Римана—Гильберта, развитый в основном в работах Шестопалова В. П., успешно используемый для решения широкого класса задач дифракции и распространения электромагнитных волн.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим структуру, состоящую из прямоугольного волновода сечения ($a \times b$) с двумя идентичными периодическими бесконечно тонкими решетками, образованными металлическими лентами одинаковой

или чередующейся ширины при фиксированных размерах щелей — одноэлементные и двухэлементные решетки соответственно (рис. 1).

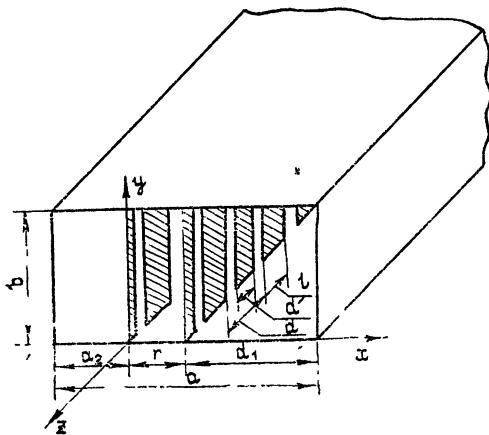


Рис. 1.

Решение задачи о распространении электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с двумя двухэлементными решетками проведено в строгой постановке отдельно для электрических и магнитных волн в обычном приближении идеальной проводимости и бесконечной протяженности структуры.

Учитывая граничные условия на боковых стенках волноводов и периодичность структуры вдоль z , записываем y -компоненты искомых полей в виде:

для E -волн

$$H_y = 0, \quad E_y = \cos \frac{m\pi}{b} y$$

для H -волн

$$E_y = 0, \quad H_y = \sin \frac{m\pi}{b} y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [e^{-i\gamma_n x} \mp e^{i\gamma_n (2d_2+x)}] e^{ih_n z} \\ \qquad \qquad \qquad (-d_2 \leq x \leq 0) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n e^{i\gamma_n x} \mp b_n e^{-i\gamma_n (x-r)}] e^{ih_n z}; \quad (0 < x < r) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n [e^{i\gamma_n (x-r)} \mp e^{i\gamma_n (2d_1-x-r)}] e^{ih_n z} \\ \qquad \qquad \qquad (r \leq x \leq (d_1+r)) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}, \quad k'^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2, \quad \gamma_n^2 = k'^2 - h_n^2. \quad (2)$$

Здесь и далее верхние знаки соответствуют E -волнам, нижние — H -волнам. Подчиняя поля точным граничным условиям в плоскостях решеток, получаем соотношение между амплитудами поля в смежных областях и систему однородных сумматорных функциональных уравнений, которая используется для постановки эквивалентной ей неоднородной задачи сопряжения аналитических функций. Окончательное решение имеет вид бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд пространственных гар-

моник C_n , B_n , c_n , b_n . Условие существования нетривиального решения этой системы (равенство нулю ее определителя) дает точное дисперсионное уравнение для волн обеих поляризаций, распространяющихся в волноводе.

Поскольку рассматриваемая структура неоднородна в направлении распространения волн, независимо было выведено уравнение для определения критических частот.

Путем осуществления соответствующих предельных переходов в полученных решениях исследованы следующие частные случаи: распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с двумя одноэлементными решетками и распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с одной двухэлементной решеткой.

Анализ матричных элементов всех полученных бесконечных систем алгебраических уравнений позволил доказать их сходимость и, тем самым, обосновать применение метода редукции для численных расчетов. Учет особенностей приведенных систем позволил разработать для проведения вычислений на ЭВМ эффективные алгоритмы. В длинноволновом приближении выведены упрощенные формулы для определения постоянных распространения собственных волн в рассматриваемой структуре.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основании численного анализа дисперсионных и характеристических уравнений в работе исследованы физические свойства прямоугольного волновода с одной и двумя периодическими решетками.

Анализ распространения критических частот нескольких низших E_{pm} , H_{pm} -волн исследуемых структур показал, что введение продольных периодических решеток в волновод позволяет эффективно управлять спектром собственных волн. Сравнение зависимостей критических частот собственных волн от местоположения решеток в прямоугольном волноводе с одной решеткой и в волноводе с двумя решетками показывает, что в первом случае диапазоны изменения критических частот как для E_{pm} -волн, так и для H_{pm} -волн одинаковы, но области изменения k'_{kp} , разрешенные для E_{pm} -волн, являются запрещенными для H_{pm} -волн, и наоборот. Кроме того, для волн с различными первыми индексами интервалы возможного изменения величины k'_{kp} нигде не перекрываются. Во втором случае диапазоны возможного изменения x -компоненты волновых чисел H_{pm} -волн остаются такими же, как в первом случае, а для E_{pm} -волн оказываются вдвое шире. При наличии двух решеток в волноводе, существуют области изменения $k'_{kp}(r/a)$, разрешенные как для E_{pm} , так и для H_{pm} -волн. В этих областях кривые, соответствующие волнам различной поляризации, пересекаются и, следовательно, при определенном подборе геометрических параметров E_{pm} - и H_{pm} -волны могут иметь одинаковые значения k'_{kp} . Вместе с тем для волн различной поляризации, но одной четности области изменения $k'_{kp}(r/a)$ E - и H -волн являются смежными и нигде не перекрываются.

В структуре с одной решеткой сближение критических частот двух соседних волн имеет место лишь при фиксированных значениях размеров волноводных каналов, в волноводе с двумя решетками это явление наблюдается в диапазоне значений r/a , который тем шире, чем ниже критические частоты волн. Кроме того, в последней структуре при таком расположении решеток, когда поперечные размеры парциальных волноводов кратны, наблюдается сближение критических частот трех соседних E -волн.

Изменение внутренней структуры решетки для всех рассмотренных

систем одинаково влияет на критические частоты волн обеих поляризаций: по мере выравнивания размеров узкой и широкой лент при фиксированном коэффициенте заполнения решетки критические частоты собственных волн возрастают. Введение в одноэлементную решетку узкой дополнительной ленты значительно изменяет критические частоты собственных волн для E -волн при малых, а для H -волн — при больших значениях коэффициента заполнения $\eta = (l - d + d')/l$.

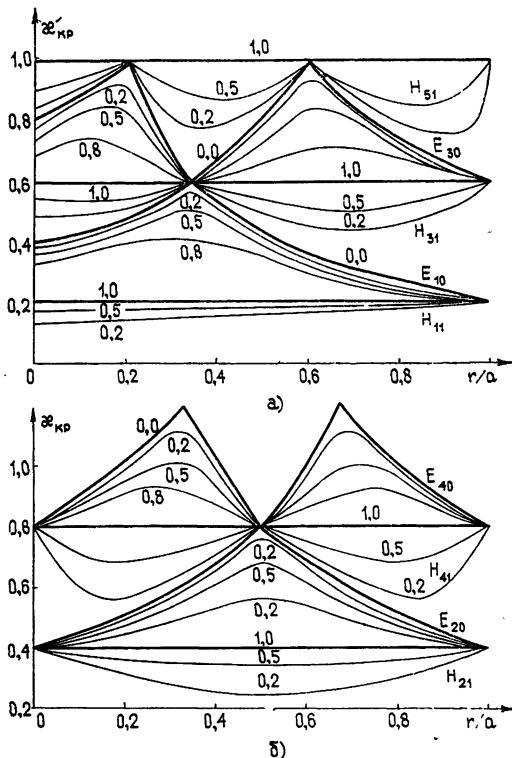


Рис. 2.

На рис. 2 представлены результаты расчета x -компонент волнового числа $k'_x = \gamma_0 l / 2\pi$ нескольких собственных E_{pm} - и H_{pm} -волн прямоугольного волновода с двумя одноэлементными ($d' = 0$) решетками от расстояния между последними (r/a) при $d_1 = d_2$, $a/l = 2,5$, $a/b = 2$ и различных значениях d/l , указанных на графиках.

Анализ частотных зависимостей показал, что чем меньше величина l/a , тем в более широком диапазоне частот значение x -компоненты, волноводного числа и амплитудные характеристики волны остаются практически неизменными.

На основании полученных данных для амплитуд пространственных гармоник в соответствии с формулами (1) были построены картины распределения поля для E_{10} - и E_{20} -волн в сечении $z = 0$ при различных параметрах структуры. При $r \leq 0,05 a$ значение величины напряженности поля между решетками существенно мало, и распределение поля в этом случае можно считать таким же, как и в случае структуры с одноэлементной решеткой конечной толщины. Дальнейшее увеличение значения величины r/a вызывает возрастание напряженности поля между решетками, и при $r/a = 1/3$ поле E_{10} -волны концентрируется в основном в области шириной r . При $r \rightarrow a$ поле волны переходит в поле

обычной H_{10} -волны регулярного волновода шириной a , представляющее собой семейство прямых $x = \text{const}$ с наибольшей густотой у стенок волновода с максимальной амплитудой в центре волновода.

Для E_{20} -волны с ростом величины r/a интенсивность поля в волноводе шириной r также увеличивается и при $r \approx 0,5a$ становится одинаковой в центральной и боковых областях. При $r \rightarrow a$ поле E_{20} -волны переходит в поле H_{20} -волны регулярного прямоугольного волновода шириной a .

На рис. 3 представлены картины распределения поля для E_{10} -волны в прямоугольном волноводе с двумя одноэлементными решетками ($d' = 0$) при $a/l = 2,5$, $a/b = 2$, $d/l = 0,5$, $x = 1,1 x_{kp}$, $d_1 = d_2$. Штриховые линии соответствуют случаю $r/a = 0,05$, сплошные — $r/a = 0,2$, штрихпунктирные — $r/a = 1/3$.

Сравнение картин поля E_{10} - и E_{20} -волн, а также расчет мощности,

переносимой собственными волнами структуры через поперечное сечение волновода, свидетельствует, что в рассматриваемых структурах наблюдается разделение этих волн по каналам, причем в волноводе с двумя решетками оно имеет место в диапазоне $r \approx (0,35 \div 0,46)a$ при $d_1 = d_2$, а в волноводе с одной решеткой — в диапазоне $d_1 \approx (1,3 \div 1,7)d_2$. Наилучшее разделение соответствует в первом случае $r = 0,4a$, $d_1 = d_2$, во втором — $d_1 = 1,5d_2$.

Расчет характеристик прямоугольного волновода с одноэлементной и двухэлементной решетками показывает, что усложнение структуры решетки за счет введения дополнительной ленты на периоде сводится, в основном, к тому, что эффективный коэффициент заполнения решетки сложной формы оказывается выше фактического.

Сравнение с результатами экспериментальных исследований

^[9] показывает, что полученные результаты с достаточной для практики точностью описывают характеристики поля в волноводе конечной протяженности с решетками конечной толщины, начиная с расстояний области возбуждения $\sim 5 \div 7 \lambda_g$, толщине решеток не превосходящей $0,003a$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ проведенных численных исследований показал, что во всех рассмотренных структурах может быть достигнуто сближение критических частот соседних E_{p0} -волн. Указанное свойство исследуемых структур делает их удобными для применения в конструкциях двухлучевых антенн, где используются системы, поддерживающие распространение двух волн одинаковой поляризации с близкими фазовыми скоростями.

Явление разделения низших E_{10} - и E_{20} -волн, соответствующих H_{10} -

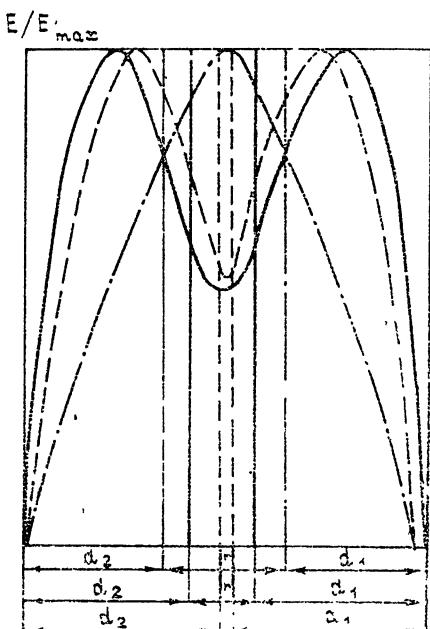


Рис. 3.

и H_{20} -волнам регулярного прямоугольного волновода, может быть использовано для создания фильтров-ответвителей H_{10} - и H_{20} -волн, осуществляющих наряду с разделением волн преобразование H_{20} -волны в основную волну соответствующего канала.

Проведенные исследования подтверждают, что для волн E -поляризации две близко расположенные бесконечно тонкие решетки хорошо описывают свойства одной решетки конечной толщины, поэтому полученные данные могут быть использованы для учета влияния конечной толщины решетки на полезные свойства структур.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. П. Шестопалова и Л. И. Белоусову за постоянное внимание и помочь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, Вища школа, Харьков, 1971, стр. 400.
2. В. В. Удалов, Е. И. Недедов, Радиотехника и электроника, 18, № 12, 2475 (1973).
3. М. Коуатма, Rev Electr Comm., 20, № 11—12, 1041 (1972).
4. К. Томиасу и С. В. Соун, Proc IRE, 41, № 6, 922 (1953).
5. Б. М. Машковцев, Л. З. Бенсман, А. А. Хохрев, Радиотехника, 15, № 4, 8 (1960).
6. В. П. Мещанов, В. И. Тищенко, Радиотехника, 31, № 5, 40 (1976).
7. В. В. Удалов, Радиотехника и электроника, 21, № 10, 2073 (1976).
8. С. В. Рагек, Proc IEE, 119, № 9, 1243 (1972).
9. Л. И. Белоусова, Т. В. Белявцева, в сб. Техническая электроника и электродинамика (Вопросы техники и приборов СВЧ), Научные труды, Саратов, вып. 94, 32 (1975).

Харьковский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
23 января 1978 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE WITH PERIODIC LATTICES

T. V. Belyavtseva

In the paper the problem of propagation of electromagnetic waves in a waveguide with one or two periodic lattices of simple or specific form has been solved strictly. The expressions obtained have been investigated by the electron computer and the analysis of numerical results has been made.

УДК 538.574

ВОЗБУЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ ПОТОКОМ ЭЛЕКТРОНОВ ИЛИ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Решена задача о возбуждении собственных электромагнитных колебаний в полупроводниковом или диэлектрическом слое под действием заряженных частиц или квантов электромагнитного поля. Определены инкременты нарастания при квазирезонансном взаимодействии поверхностных и объемных плазмонов. Исследовано возбуждение диэлектрического волновода электронным пучком. Показана возможность генерирования экситонов в диэлектрическом слое внешней электромагнитной волной.

1. В основе многих пучковых или дрейфовых неустойчивостей в плазме и плазмоподобных средах лежат элементарные процессы резонансного взаимодействия собственных колебаний среды (плазмонов, геликонов, фононов и т. д.) с волнами в электронных потоках. Условия взаимодействия: $\omega = k\mathbf{v}_0$ или $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \Omega_H$, где ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор, \mathbf{v}_0 — скорость поступательного движения, Ω_H — циклотронная частота электронов. В результате происходит преобразование энергии поступательного движения частиц в энергию колебаний, что приводит к рождению или уничтожению волн.

Условие резонанса означает равенство частот и волновых векторов взаимодействующих волн. Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются при скоростях дрейфа (пучка), превышающих фазовую скорость колебаний. Если в направлении движения заряженных частиц меняются электромагнитные свойства среды, то из-за несохранения импульса пучковых волн оказывается возможным их преобразование в собственные колебания среды при произвольном соотношении между скоростями.

Раскачка колебаний в неоднородных средах может происходить не только под действием электронных потоков, но и потоков энергии электромагнитного поля, если среда прозрачна в соответствующем диапазоне частот.

Неустойчивости поверхностных плазмонов и фононов в полубесконечных средах изучены в работах [1]. Процессы преобразования происходят более эффективно, если потоки частиц (или квантов поля) многократно пересекают границу раздела.

В предлагаемой работе исследуются неустойчивости собственных электромагнитных колебаний в пластинах, возникающие под действием заряженных частиц или квантов электромагнитного поля.

Для эксперимента объектом исследования могут служить полупроводниковые или диэлектрические пленки. Следует заметить, что их можно сделать достаточно чистыми и тем уменьшить потери собственных колебаний,

2. Пусть вдоль положительного направления оси z движется пучок с плотностью n_0 и пересекает при $z = 0$ границу вакуум — диэлектрик с проницаемостью $\epsilon = \epsilon(\omega)$, а при $z = a$ — границу с идеально проводящей поверхностью.

Система уравнений задачи состоит из уравнений Максвелла и уравнений движения электронов. Решение ищется в виде плоской волны $\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$. В вакууме возникают колебания

$$k'_{z1} = \pm ik_y \left(k_y > \frac{\omega}{c} \right) \text{ и } k''_{z1} = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\Omega_0}{v_0}, \quad (1)$$

где Ω_0 — плазменная частота электронов пучка. Выбор знака k'_{z1} определяется условием конечности полей при $z \rightarrow \infty$, т. е. $k'_{z1} = -ik_y$, а для k''_{z1} — направлением потока энергии. Если поток энергии направлен вдоль оси z , то $k''_{z1} = \frac{\omega}{v_0} - \frac{\Omega_0}{v_0}$ [1].

В диэлектрическом слое колебания связаны соотношением

$$k'_{z2} = \pm \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_y^2 \right)^{1/2}, \quad k''_{z2} = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\Omega_0}{v_0 \sqrt{\epsilon}}. \quad (2)$$

Эти соотношения получены в предположении, что резонанс между пучковыми и электромагнитными колебаниями отсутствует, т. е.

$$\left| \frac{\omega}{v_0} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_y^2 \right)^{1/2} \right| \gg \frac{\Omega_0^{1/2} k_y v_0}{\omega^{1/2} c}.$$

В отличие от безграничной среды в слое возможно существование всех четырех типов колебаний.

Заметим, что поперечные размеры электронного пучка предполагаются превышающими не только длину усиливаемой волны ($\sim 1/k_y$), но и характерную длину, на которой происходит нарастание колебаний. Кроме того, потеря пучка при проникновении в среду предполагаются малыми и изменением скорости электронов пучка можно пренебречь. Действительно, при энергиях электронов порядка 100 кэВ и скорости $\sim 10^{10} \text{ см/с}$ глубина проникновения $\sim 20 \text{ мкм}$ [2], что для рассматриваемого диапазона частот ($\omega \sim 10^{11} \div 10^{15} \text{ с}^{-1}$) значительно превосходит глубину проникновения волны и толщину пленки.

На поверхности диэлектрика должны быть выполнены граничные условия: непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля и нормальных составляющих индукции:

$$E_{y1} = E_{y2}|_{z=0}, \quad E_{z1} = \epsilon E_{z2}|_{z=0}, \quad E_{y2} = 0|_{z=a}, \quad (3)$$

непрерывность плотности и нормальной составляющей скорости пучка на границе вакуум — диэлектрик:

$$v_{z1} = v_{z2}|_{z=0}, \quad n_1 = n_2|_{z=0}. \quad (4)$$

На поверхности металла z -компоненты скорости электронов предполагается равной нулю. Это условие является следствием предположения о бесконечной проводимости металла.

Решая систему уравнений, полученную из граничных условий, найдем дисперсионное соотношение

$$\epsilon \left(\epsilon \cos \alpha - \frac{x}{k_y} \sin \alpha \right) = \frac{\Omega_0 k_y v_0}{\omega} \left\{ - \frac{i \epsilon}{\omega + i k_y v_0} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\exp \left(i \frac{\omega}{v_0} a \right) + (\epsilon - 1) \cos \kappa a \right] + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2 v_0^2} \left[-i \omega (\epsilon - 1) \exp \left(-i \frac{\omega}{v_0} a \right) + \right. \\
 & + \left(i \omega + \epsilon k_y v_0 \right) \exp \left(i \frac{\omega}{v_0} a \right) - \epsilon \left(i \omega \frac{k_y}{\kappa} - \kappa v_0 \right) \sin \kappa a + \\
 & \left. + (i \omega \epsilon - 2i \omega - \epsilon k_y v_0) \cos \kappa a \right] \Big\}, \\
 & \kappa = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_y^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим задачу о возбуждении волн в твердотельной плазме с $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 - \omega_0^2/\omega^2$, где ω_0 — ленгмюровская частота. Предположим, что $k_y^2 \gg (\omega^2/c^2)\epsilon_0$, тогда $\kappa = ik_y$, а дисперсионное уравнение (5) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \epsilon(\epsilon \operatorname{ch} k_y a + \operatorname{sh} k_y a) = & \frac{\Omega_0 k_y v_0}{\omega(\omega^2 + k_y^2 v_0^2)} \left\{ -\epsilon^2 k_y v_0 \operatorname{ch} k_y a - \right. \\
 & - \epsilon k_y v_0 \operatorname{sh} k_y a + i \left[\omega \operatorname{ch} k_y a (2\epsilon - \epsilon^2 - 2) - 2(\epsilon - 1) \times \right. \\
 & \left. \times \omega \cos \frac{\omega}{v_0} a - \epsilon \omega \operatorname{sh} k_y a \right] \Big\}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Левая часть этого соотношения определяет спектры поверхностных и объемных плазмонов в пластине*:

$$\omega'^2 = \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0 + \operatorname{th} k_y a}, \quad \omega'^2 = \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0}.$$

Частота поверхностных плазмонов меньше $\omega_0/\sqrt{\epsilon_0}$, а объемных — больше или равна $\omega_0/\sqrt{\epsilon_0}$. В тонких пластинах, когда пространственная дисперсия мала, $k_y a < \Omega_0/\omega e$, возможно сближение частот этих колебаний, и между ними возникает квазирезонанс. Инкремент нарастания в этом случае имеет вид

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\Omega_0 k_y v_0 \left(1 - \cos \frac{\omega'}{v_0} a \right) \right]^{1/2}, \tag{7}$$

и при $\cos(\omega'/v_0)a = -1$ становится максимальным. Это объясняется тем, что в слое укладывается нечетное число полуволн пучковых колебаний, так как волна, отраженная от границы $z = a$, находится в фазе с падающей волной при $z = 0$. При $\Omega_0 \approx 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $v_0 \approx 10^{10} \text{ см/с}$, $a \approx 10^{-4} \text{ см}$; $\epsilon \approx 10$, $\omega_0 \approx 10^{11} \div 10^{12} \text{ c}^{-1}$ относительный инкремент $\sim 10^{-1} \div 10^{-2}$.

Если $\frac{\Omega_0}{\omega e} < k_y a < 1$, то усиливается поверхностный плазмон $\omega'^2 =$

* Для получения зависимости частоты от волнового вектора объемного плазмона в пластине необходимо рассмотреть уравнение движения носителей с учетом их тепловой скорости. При малой толщине пластины это колебание имеет только E_z -компоненту электрического поля.

$$= \frac{\omega_0^2}{\epsilon_0 + k_y a} \text{ с инкрементом}$$

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{\Omega_0 \omega k_y v_0 (1 - \cos(\omega'/v_0) a)}{k_y a (\omega'^2 + k_y^2 v_0^2)}. \quad (8)$$

Зависимость инкремента (8) от величины $1/k_y a$ связана с возрастанием продольной компоненты электрического поля в пластине по сравнению с полем падающей волны. Действительно, $E_{z2} = \frac{1}{\epsilon} E_{z1}$, где в тонком слое $\epsilon = -k_y a$. Для приведенных выше параметров и $k_y a \approx 10^{-2}$ относительный инкремент превышает 10^{-1} .

Если глубина проникновения плазмона меньше толщины пластины ($k_y a > 1$), то

$$\omega' = \frac{\omega_0}{(1 + \epsilon_0)^{1/2}}, \quad \operatorname{Im} \omega = \frac{2\Omega_0 \omega' k_y v_0}{(1 + \epsilon_0)^{1/2} [\omega_0^2 + k_y^2 v_0^2 (1 + \epsilon_0)]}. \quad (9)$$

Этот результат совпадает с выводами для полубесконечной среды [1].

Исследуем взаимодействие пучка с электромагнитной волной в слое при $\epsilon = \epsilon_0 \gg 1$.

Если $\Omega_0/\omega = 0$, то решение левой части (5) может быть найдено графически [3]. Зависимость $k_y a$ от $k_z a$ представлена на рис. 1 рядом сплошных кривых. Решение уравнения лежит на пересечениях с окружностью $k_y^2 a^2 + k_z^2 a^2 = \epsilon \frac{\omega^2 a^2}{c^2}$, радиус которой определяется частотой. Если $\epsilon \frac{\omega^2 a^2}{c^2} < \pi$,

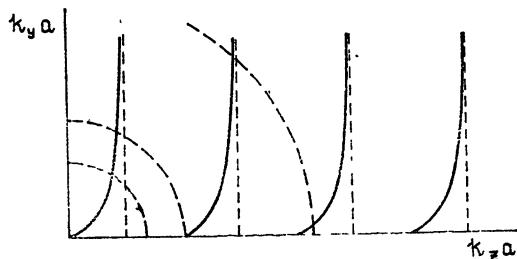


Рис. 1.

то в слое возможно распространение только одной моды; вторая мода появляется при $\epsilon \frac{\omega^2 a^2}{c^2} > \pi$.

При увеличении частоты, т. е. увеличении радиуса окружности, $k_z a$ для каждой моды стремится к конечному пределу, а $k_y a$ пробегает значения до бесконечности. Таким образом, $k_z a$ для определенной моды лежит в пределах $\pi n - \pi n + \pi/2$, где n — номер моды. Величина $k_y a$ обратно пропорциональна глубине проникновения поля в вакуум. Следовательно, при $k_z a \geq \pi n$ поле электромагнитной волны может быть обнаружено на значительных расстояниях от пленки, а при $k_z a \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$ волна прижата к границе диэлектрика.

Определим инкременты первых мод ($n = 0, 1$). При появлении моды $k_z a = \pi \gg k_y a$, $\omega' \approx \frac{\pi c}{a \sqrt{\epsilon}}$. Пренебрегая в (5) слагаемыми, пропорциональными $k_y a$, получим

$$\operatorname{Im} \omega = \Omega_0 \frac{k_y^2 a^2}{\pi^3} \frac{v_0}{c} \epsilon = \frac{\Omega_0}{\omega'} \frac{k_y v_0 k_y a}{\pi^2} \sqrt{\epsilon}, \quad (10)$$

Около точки окончания каждой моды $k_z a \approx \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \ll k_y a$, $\omega' \approx \frac{k_y c}{\sqrt{\epsilon}}$, а мнимая часть частоты равна

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\pi} \Omega_0 \frac{v_0}{c}. \quad (11)$$

Таким образом, инкремент изменяется при малых значениях $k_y a$ приблизительно пропорционально отношению $/k$, а при $k_y a \gg 1$ не зависит от значения продольного волнового числа (рис. 2). При $k_y a \approx k_z a$ оценки дают $\operatorname{Im} \omega \approx \Omega_0 \frac{v_0}{c}$. Следовательно, наличие экстремума у кривой $\operatorname{Im} \omega(k_y a)$ возможно при $\epsilon^{1/2} < \pi/2$, $3\pi/2$. Следует учесть, что при $k_y \approx k_z$ величина инкремента зависит от соотношения между фазами полей пучка и электромагнитной волны. Очевидно, что в этом случае величина инкремента существенно меньше, чем в резонансе. Оценки для относительного инкремента дают величину $\sim 3 \cdot 10^{-3}$.

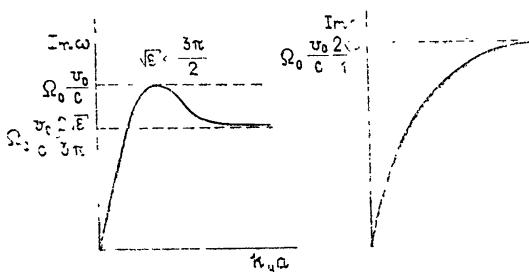


Рис. 2.

3. Если частота ω лежит вблизи полосы экситонного поглощения диэлектрического слоя, то помимо электромагнитной волны в диэлектрике возможно распространение экситонных волн [4]. Для исследования этого случая к исходной системе уравнений необходимо добавить уравнение для вектора поляризации P и учесть связь между индукцией и поляризацией $D = \epsilon_0 E + 4\pi P$. Если вектор поляризации направлен по нормали к поверхности слоя, то характеристическое уравнение для колебаний в диэлектрике имеет вид

$$\left(k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \right) [\omega^2 - \omega_s^2 - \alpha(k_y^2 + k_z^2)] = \frac{\omega_N^2}{\epsilon_0} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \right), \quad (12)$$

где ω_s^2 и ω_N^2 — величины, описывающие свойства среды, α — параметр, характеризующий пространственную дисперсию

Как известно, это уравнение [5] описывает электромагнитную и экситонную волны, которые вблизи полосы поглощения трансформируются друг в друга. Мы рассмотрим область $\omega^2 \gg \frac{\omega_N^2}{\epsilon_0}$, где обе волны существуют независимо:

$$k_{z2} = \pm \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 - k_y^2 \right)^{1/2}, \quad k_{z2}''' = \pm \left(\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\alpha} - k_y^2 \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Остановимся на возбуждении экситонных волн электромагнитной волной, падающей из вакуума. В качестве дополнительных граничных условий выберем равенство нулю z -составляющей вектора поляризации на границах пленки. Дисперсионное соотношение для экситонов, рас-

пространяющихся в пленке, при $\frac{\omega_N^2}{\epsilon_0 \omega^2} \rightarrow 0$ имеет вид

$$\sin \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha}} - k_y^2 a = 0, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \left[k_y^2 + \left(\frac{n \pi}{a} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Учитывая малый параметр, получим инкремент этой волны:

$$\text{Im } \omega = \frac{\omega_0^2 \left(\frac{n \pi}{a} \right)^3 \alpha \left(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k_y^2 \right)^{1/2} [1 - (-1)^n \cos \alpha a]^2}{\omega_0 a \left[k_y^2 + \left(\frac{n \pi}{a} \right)^2 \right]^2 \left[\epsilon_0^2 \left(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k_y^2 \right) \cos^2 \alpha a + \alpha^2 \sin^2 \alpha a \right]}. \quad (15)$$

Максимальное значение $\text{Im } \omega$ имеет, если на толщине пленки укладывается целое число полуволн экситонного и электромагнитного типов, причем фазы их на границах противоположны. Объяснить этот результат можно, анализируя поля на границах диэлектрика. Соотношение между тангенциальными составляющими электрических полей электромагнитной и экситонной волн на границе $z = a$ имеет вид

$$E_{y\phi}^{(2)} + (-1)^{n+l} E_{y\theta}^{(2)} = 0, \quad (16)$$

где $E_{y\phi}$ и $E_{y\theta}$ — амплитуды y -составляющих электрического поля волн в слое, n и l — число полуволн вдоль нормали к пленке, соответственно экситона и фотона. Если $n + l$ — четное число, то $E_{y\phi}^{(2)} = E_{y\theta}^{(2)} = 0$, т. е. оба поля этих волн удовлетворяют граничным условиям независимо друг от друга. При $n + l$ — нечетном $E_{y\phi}^{(2)} = E_{y\theta}^{(2)}$. В этом случае происходит максимальный обмен энергией между фотоном и экситоном. Например, для пленки Cu Br $\omega_N \approx \omega_0 \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ [6] $\text{Im } \omega / \omega \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$.

Следует отметить, что возбуждение электромагнитной волной объемных колебаний в линейном приближении возможно только в неоднородных средах. В однородной волне обмен энергией между различными электромагнитными волнами происходит в результате нелинейных процессов (например, распадная неустойчивость).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ФТТ, 18, 1568 (1976), ФТТ, 18, 3406 (1976).
- 2 В. Ф. Коваленко, Теплофизические процессы и электровакуумные приборы, изд. Сов. радио, М., 1975.
- 3 Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 316.
- 4 В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965, В. М. Агранович, Теория экситонов, изд. Наука, М., 1968.
- 5 В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
- 6 I. Higabayashi, T. Koda, Y. Tokuda, J. Migata and Y. Kapako, J. Phys. Soc. Japan, 40, 1215 (1976).

**EXCITATION OF NATURAL OSCILLATIONS IN BOUNDED MEDIA BY
ELECTRON FLUX OR ELECTROMAGNETIC FIELD ENERGY***A. A. Bulgakov, S. I. Khankina, V. M. Yakovenko*

A problem is solved on the excitation of natural electromagnetic oscillations in a semiconductive or dielectric layer by charged particles or electromagnetic field quanta. Increments are defined at the quasi-resonance interaction of surface and volume plasmon. The excitation of the dielectric waveguide by an electron beam is investigated. The possibility is shown of the exciton generation in a dielectric layer by an external electromagnetic wave.

УДК 621.385.6

К ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГИРОПРИБОРА
(ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ УЧЕТ И НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ
КОРРЕКТНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО ДРЕЙФА
ВЕДУЩИХ ЦЕНТРОВ ЭЛЕКТРОННЫХ РОТАТОРОВ)

B. A. Жураховский

В развитие работ [5, 6] по теории гироприборов с однородным магнитным полем показано, что и в определенных задачах со связью подобранными типами симметрии адиабатически-неоднородного постоянного магнитного и переменного электромагнитного полей появляются интегралы орбитально-дрейфового движения, благодаря которым уравнения поперечного перемещения ведущих центров электронных роторов строго исключаются из дифференциальной системы усредненного движения, что существенно упрощает последнюю.

Продвижение гирорезонансных приборов в область существенно релятивистских энергий стимулирует развитие новых методов их расчета и теоретического исследования, выходящих за рамки традиционного приближения малых скоростей. Релятивистские гироприборы отличают ряд особенностей — значительная трансформация массы, ощущимый дрейф ведущих центров электронных орбит, использование бегущих не всегда сильно ускоренных электромагнитных волн как *M*-, так и *E*-типа, широкие возможности оптимизационного управления неоднородностью стационарного магнитного поля и т. д. Настоящая работа посвящена проблеме создания более или менее общей математической модели для описания резонансного возмущения винтового движения релятивистских электронов электромагнитным полем конечной амплитуды в волноводе или волноводном резонаторе. Исходными упрощающими предположениями являются одномерность поля и второстепенность эффектов, связанных с разбросом начальных кинематических характеристик и влиянием сил объемного заряда в поливинтовом электронном потоке.

**УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ТЕРМИНАХ
 МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПЕРЕМЕННЫХ**

Сложное криволинейное перемещение электронов в гирорезонансных приборах описывают как плоское вращение вокруг трехмерно дрейфующего центра:

$$x = X_{\text{ц}} + r_0 \cos \vartheta, \quad y = Y_{\text{ц}} + r_0 \sin \vartheta, \quad (1)$$

$$\dot{x} = v_x = -r_0 \Omega \sin \vartheta, \quad \dot{y} = v_y = r_0 \Omega \cos \vartheta, \quad \dot{z} = v_z$$

Обозначения: $X_{\text{ц}}$, $Y_{\text{ц}}$ — текущие координаты ведущего центра траектории рассматриваемой частицы; r_0 , ϑ — радиус орбиты и геометрическая фаза; Ω — релятивистская гирочастота; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени.

В задачах с плавно неоднородным постоянным магнитным полем

$$\begin{aligned} M_x &= -[a(x - x_0) + b(y - y_0)]M'(z), \\ M_y &= -[b(x - x_0) + (1 - a)(y - y_0)]M'(z), \\ M_z &= M(z), \end{aligned} \quad (2)$$

где a, b, x_0, y_0 — структурные параметры, удобно представлять кинематические характеристики движения (1) как [1]

$$\begin{aligned} X_u &= x_0 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left\{ (X - x_0) \operatorname{ch} \left[\sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2} \ln \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{(2a-1)(X-x_0) + 2b(Y-y_0)}{\sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2}} \operatorname{sh} \left[\sqrt{(2a-1)^2 + 4b^2} \ln \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] \right\}, \\ Y_u &= y_0 + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left\{ (Y - y_0) \operatorname{ch} \left[\sqrt{(1-2a)^2 + 4b^2} \ln \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{(1-2a)(Y-y_0) + 2b(X-x_0)}{\sqrt{(1-2a)^2 + 4b^2}} \operatorname{sh} \left[\sqrt{(1-2a)^2 + 4b^2} \ln \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right] \right\}, \\ r_0 &= r/\sqrt{\delta}, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь X, Y, r — новые адиабатические переменные, возмущаемые резонансным электромагнитным полем;

$$\delta = M(z)/M(z_i), \quad (4)$$

i — индекс начальных условий.

Последовательность замен (1), (3) позволяет перейти от точных уравнений движения к слаженным путем усреднения по явно входящей быстро вращающейся фазе ϑ . В работе [1] сформулированы результаты усреднения для одной бегущей компоненты электромагнитной волны E - или M -типа, конструируемой на основе скалярной функции Герца. Теперь в целях общности будем рассматривать две такие бегущие в противоположные стороны парциальные компоненты. Вклад сил каждой из них аддитивен, даже если при этом сохраняется осциллирующий член, обусловленный несинхронной бегущей компонентой поля и дающий в общем случае такой же вклад в движение электрона, что и отброшенные при усреднении по фазе нерезонансные члены. В последнем случае можно считать, что в уравнениях движения произведено не полное, а только частичное усреднение по некоторым слагаемым или отдельным уравнениям ([2] и др.), что никак не нарушает корректности рассматриваемой задачи в целом ввиду соответствующих теорем о близости решений исходных и частично усредненных систем дифференциальных уравнений на любом промежутке. Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sum_a \frac{\partial V_{a_u}}{\partial Y}, \quad \dot{Y} = - \sum_a \frac{\partial V_a}{\partial X}, \quad \dot{r} = \sum_a \frac{n}{r} \frac{\partial V_a}{\partial \theta_a}, \\ \dot{\gamma} &= \sum_a \frac{n \Gamma^2 \delta}{c^2 \gamma s_a} \frac{\partial V_a}{\partial \theta_a}, \quad \dot{\beta}_z = \sum_a \frac{n \Gamma^2 \delta \sigma_a}{c^2 \gamma^2 s_a} \frac{\partial V_a}{\partial \theta_a} - \dot{\delta} \frac{r^2 \Gamma^2}{2 c^2 \gamma^2 \beta_z}, \\ \dot{\theta}_a &= - \sum_a \frac{n}{r} \frac{\partial V_a}{\partial r} + \omega s_a - \frac{n \Gamma \delta}{\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначения: γ , β_z — нормированная к массе покоя релятивистская масса и нормированная к скорости света c продольная скорость движущейся частицы; θ_α — электромеханическая фаза усредненных сил одной из двух бегущих компонент волны, различаемых индексом α ; n , Γ — порядок гирорезонанса и начальная нерелятивистская гирочастота ($\Omega = \Gamma \delta / \gamma$);

$$\sigma_\alpha = \frac{1 - \beta_z \beta_{\Phi\alpha}}{\beta_{\Phi\alpha}} ; \quad s_\alpha = 1 - \frac{\beta_z}{\beta_{\Phi\alpha}}, \quad (6)$$

$\beta_{\Phi\alpha}$ — нормированная к c алгебраическая фазовая скорость той либо другой бегущей компоненты суммарной волны единой частоты ω ($\omega/c = k$);

$$V_\alpha = \frac{\eta}{\Gamma k} \operatorname{Re} \left(\sigma_\alpha \Pi_n^e \vee s_\alpha \frac{r}{n} \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial r} \right) F_\alpha \exp(j\theta). \quad (7)$$

Здесь Re , j — символ взятия вещественной части комплексного выражения и мнимая единица; η — абсолютный удельный заряд покоящегося электрона; Π_n^e , Π_n^m — рабочие гармоники электрической Π^e и магнитной Π^m мембранных функций Герца, определенные на текущей траектории электрона как

$$\Pi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi(X_u + r_0 \cos \vartheta, Y_u + r_0 \sin \vartheta) e^{jn\vartheta} d\vartheta; \quad (8)$$

$F_\alpha(z)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда α -й компоненты электромагнитной волны; значок \vee имеет смысл альтернативного «или».

Отметим, что переменные, входящие в систему (5), связаны релятивистской зависимостью

$$\left(1 - \frac{r^2 \Gamma^2 \delta}{c^2 \gamma^2} - \beta_z^2 \right) \gamma^2 \equiv 1. \quad (9)$$

В статье [3] для нужд линейной теории проведена математическая работа по вычислению интегралов типа (8). Воспользуемся формулами из [3]. Тогда в декартовых координатах X_u , Y_u или полярных R_u , Φ_u ($X_u = R_u \cos \Phi_u$, $Y_u = R_u \sin \Phi_u$) получаем

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \left(k \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2}} \right)^{-|n|} J_{|n|} \left(k r_0 \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2}} \right) \times \\ &\times \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial X_u} + \frac{jn}{|n|} \frac{\partial}{\partial Y_u} \right)^{|n|} \Pi(X_u, Y_u) \\ e^{jn\Phi_u} \left(\frac{\partial}{\partial R_u} + \frac{jn}{|n|} \frac{\partial}{\partial \Phi_u} \right)^{|n|} \Pi(R_u, \Phi_u) \end{cases}, \end{aligned} \quad (10)$$

где J — бесселева функция указанного индекса и аргумента; положительным n отвечают нормальные гирорезонансные режимы; отрицательным — аномальные; при рассмотрении случаев с $\beta_\Phi^2 \leq 1$ следует воспользоваться известным аналитическим продолжением функции Бесселя.

Необходимо подчеркнуть, что в формуле (10) введены эволюционирующие координаты ведущего центра и радиус орбиты электронного ротора.

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ И ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Дифференциальную систему (5) можно упростить, понизив порядок на две единицы при таких конфигурациях электромагнитных полей, включая случаи с $\delta = \text{var}$, которым присущи определенные свойства симметрии, приводящие к существованию интегралов дрейфового или орбитально-дрейфового движения электронов. Аналогичный вопрос рассматривался в работе [4], но для более узких классов симметрии.

1. Предположим, что постоянное магнитное поле обладает эллиптическим типом симметрии относительно плоскостей $x = x_0$, $y = y_0$, а переменное электромагнитное не зависит от y . Тогда в (2), (3) $b = 0$;

$$\begin{aligned} M_x &= -a(x - x_0)M'(z), \quad M_y = -(1 - a)(y - y_0)M'(z), \\ X_u &= x_0 + \frac{X - x_0}{\delta^a}, \quad Y_u = y_0 + \frac{Y - y_0}{\delta^{1-a}}; \end{aligned} \quad (11)$$

в формуле (10) $\Pi(X_u)$ не содержит Y_u и Y , так что по (5) имеем интеграл дрейфового движения $X = X_{ui}$. В этом случае вместо (10) получается

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \left(k \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2}} \right)^{-|n|} J_{|n|} \left(kr \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2 \delta}} \right) \times \\ &\quad \times \Pi^{(|n|)} \left(x_0 + \frac{X_{ui} - x_0}{\delta^a} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

Π_n — функция только переменных r , δ , и первые два уравнения системы (5) при отсутствии бокового токооседания могут быть отброшены.

2. Допустим, что постоянное магнитное поле обладает круговой симметрией. В (11) $a = 1/2$, $x_0 = y_0 = 0$,

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{x}{2}M'(z), \quad M_y = -\frac{y}{2}M'(z), \\ R_u &= \sqrt{X_u^2 + Y_u^2} = R/\sqrt{\delta}, \quad \Phi_u = \Phi, \end{aligned} \quad (13)$$

где новые дрейфовые переменные R , Φ введены вместо прежних X , Y соотношениями $X = R \cos \Phi$, $Y = R \sin \Phi$. Соответственно этому в системе (5) первые два дифференциальных уравнения заменяются на

$$\dot{R} = \sum_a \frac{1}{R} \frac{\partial V_a}{\partial \Phi}, \quad \dot{\Phi} = -\sum_a \frac{1}{R} \frac{\partial V_a}{\partial R}. \quad (14)$$

Пусть далее переменное электромагнитное поле имеет вращающуюся структуру с $|m|$ азимутальными вариациями (m — целое, алгебраическое) или при $m = 0$ не зависит от азимута,

$$\Pi = e^{-jm\Phi_u} \begin{cases} A_1 J_{|m|} \left(kR_u \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2}} \right) + A_2 N_{|m|} \left(kR_u \sqrt{\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2}} \right), & \beta_\Phi^2 \neq 1, \\ B_1 (kR_u)^m + B_2 (kR_u)^{-m}, & \beta_\Phi^2 = 1, \quad m \neq 0, \\ C_1 \ln kR_u + C_2, & \beta_\Phi^2 = 1, \quad m = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где N — функция Неймана указанного индекса и аргумента; $A_1 \div C_2$ — некоторые весовые коэффициенты.

Тогда, согласно (7), (10), (15), $V_\alpha \propto \exp [j(\theta_\alpha + n\Phi - m\Phi)]$, что позволяет рассматривать указанное в последних скобках выражение как расширенную фазу (далее обозначаем ее снова θ_α). Вследствие этого дифференциальные системы (5), (14) порождают интеграл орбитально-дрейфового движения

$$R^2 - r^2 \left(1 - \frac{m}{n}\right) = R_{ii}^2 - r_{0i}^2 \left(1 - \frac{m}{n}\right). \quad (16)$$

и дают возможность подчинить расширенную фазу θ_α прежнему уравнению (5), где оператор $\partial/\partial r$ теперь уже действует с учетом подстановки $R(r)$ по (16).

Ввиду сказанного, вместо (10) с точностью до несущественного здесь алгебраического знака, который без потери общности включим в парциальную комплексную амплитуду F_α , получается

$$\Pi_n = \begin{cases} J_{|n|} \left(kr \sqrt{\frac{\beta_\phi^2 - 1}{\beta_\phi^2 \delta}} \right) \left[A_1 J_{|n-m|} \left(k \sqrt{R_{ii}^2 + (r^2 - r_{0i}^2)(1 - mn^{-1})} \times \right. \right. \\ \times \sqrt{\frac{\beta_\phi^2 - 1}{\beta_\phi^2 \delta}} \left. \right) + A_2 N_{|n-m|} \left(k \sqrt{R_{ii}^2 + (r^2 - r_{0i}^2)(1 - mn^{-1})} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\beta_\phi^2 - 1}{\beta_\phi^2 \delta}} \right) \left. \right], & \beta_\phi^2 \neq 1, \\ \frac{B_1 (kr)^n}{n! (\sqrt{\delta})^n} \left(k \sqrt{R_{ii}^2 + (r^2 - r_{0i}^2)(1 - mn^{-1})} \right)^{m-n} \times \\ \times |m(m-1) \dots (m-n+1)|, & \beta_\phi^2 = 1, \quad n > 0, \quad m \neq 0, \\ \frac{C_1}{2n} \left(\frac{r}{\sqrt{R_{ii}^2 + r^2 - r_{0i}^2}} \right)^n, & \beta_\phi^2 = 1, \quad n > 0, \quad m = 0, \end{cases} \quad (17)$$

Π_n — функция только переменных r , δ , и первые два уравнения системы (5) или равносильные им уравнения системы (14) при отсутствии бокового токооседания могут быть отброшены.

В частном случае $\delta = 1$ из (17) вытекают формулы работ [5, 6]. Отметим, что в этих работах впервые были найдены интегралы движения электронов в однородном магнитостатическом поле и поле волны и с их помощью исключены уравнения поперечного дрейфа.

Итак, в развитие работ [5, 6] по теории гироприборов с однородным магнитным полем показано, что и в определенных задачах со связно подобранными типами симметрии адиабатически-неоднородного постоянного магнитного и переменного электромагнитного полей уравнения поперечного дрейфа ведущих центров электронных роторов строго исключаются из дифференциальной системы усредненного движения. Рассмотренные схемы представляют типовые ситуации, встречающиеся в практике конструирования гирорезонансных приборов. Сформулированные укороченные уравнения движения, учитывающие возможную неоднородность направляющего магнитного поля, вероятно, найдут применение в последующих задачах управления и оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. А. Жураховский, сб Радиотехника, вып. 28, 60 (1974).
- 2 А. Н. Филатов, Л. В. Шарова, Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1976, стр. 91.
- 3 И. И. Антаков, А. В. Гапонов, В. К. Юлпатор, Вопросы радиоэлектроники, серия I, Электроника, № 12, 33 (1965).
- 4 А. А. Кураев, И. С. Ковалев, С. В. Колосов, Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ, изд. Наука и техника, Минск, 1975, стр. 206.
- 5 В. К. Юлпатор, Доклад на V межвузовской конференции по электронике СВЧ, Саратов, 1966.
- 6 И. М. Петелин, В. К. Юлпатор, Лекции по электронике СВЧ, книга IV, изд. Саратовского университета, Саратов, 1974, стр. 144.

Киевский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила в редакцию
29 мая 1977 г

TO THE THEORY OF RELATIVISTIC GYRO-DEVICE (A SUCCESSIVE ACCOUNT
AND SOME POSSIBILITIES OF CORRECT EXCLUSION OF TRANSVERSE
MOTION EQUATIONS OF GUIDING CENTERS OF ELECTRON
ROTATORS)

V. A. Zhurakhovskii

In developing the works [5, 6] on the theory of gyro-devices with a homogeneous magnetic field it is shown that in specific problems with connectedly selected types of the symmetry of adiabatically-inhomogeneous magnetic and variable electromagnetic fields there appear the integrals of orbital-drift motion. Due to them the equations of the transverse motion of guiding centers of electron rotators are strictly excluded from the differential system of averaged motion that essentially simplifies the latter.

УДК 621.373.432

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСОВ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

И. М. Балаклицкий, Г. С. Воробьев, А. И. Цвык, В. П. Шестопалов

Путем теоретических оценок и экспериментальных исследований анализируются физические явления, которые приводят к искажениям спектра импульсов дифракционного излучения. Экспериментальные исследования проведены для импульсов ВЧ-колебаний длительностью $0,15\text{--}10 \text{ мкс}$, возбуждаемых в генераторе дифракционного излучения миллиметрового диапазона длин волн. Установлено влияние крутизны электронной перестройки частоты, величины фокусирующего магнитного поля, давления остаточных газов на спектральные характеристики прибора. Определена область изменения параметров генератора, где паразитные эффекты, приводящие к искажениям спектра, сказываются незначительно.

Анализируются физические явления, которые вызывают искажение спектра ВЧ-сигнала импульсного дифракционного излучения. Экспериментально исследованы спектральные характеристики импульсов ВЧ-колебаний длительностью $\tau = 0,15\text{--}10 \text{ мкс}$, возбуждаемых в генераторе дифракционного излучения (ГДИ) миллиметрового диапазона длин волн ($\lambda = 3,8\text{--}8 \text{ мм}$). Результаты эксперимента представлены в виде спектрограмм при изменении мощности генерации, крутизны электронной перестройки частоты, фокусирующего магнитного поля, давления остаточных газов в приборе. Установлены режимы работы ГДИ, где влияние паразитных эффектов на качество импульсов ВЧ-колебаний невелико.

В настоящее время отсутствуют исследования спектральных характеристик импульсов дифракционного излучения, хотя качество ВЧ-сигнала является определяющим фактором в случае практического использования приборов дифракционной электроники в науке и технике [1]. Результаты таких исследований приведены в данной работе.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ, ВЛИЯЮЩИЕ НА КАЧЕСТВО СПЕКТРА ИМПУЛЬСОВ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Известно, что качество спектра ВЧ-сигнала определяется шириной спектральной линии, стабильностью амплитуды и частоты (несущей) основного колебания, а также уровнем паразитных колебаний. В [2] показано, что ширина спектра импульсного дифракционного излучения, возбуждаемого на периодической структуре идеализированным (монохроматическим) импульсом электронного потока, определяется параметрами электродинамической системы и импульса тока. Ряд физических процессов, протекающих в электронном потоке, которые могут привести в реальных приборах типа ГДИ к искажениям спектра импульсного излучения, при этом не учитывался.

В общем случае эти искажения спектра связаны с изменениями в пространстве взаимодействия параметров электронного потока, что обусловлено техническими причинами (неустойчивостью источников

питания, искажениями формы импульса напряжения модулятора, вибрацией зеркал открытого резонатора и т. д.) и физическими процессами, протекающими в приборе (нейтрализацией объемного заряда ионами остаточных газов, накоплением ионов и их последующими колебаниями, искажением формы электронного пучка в пространстве взаимодействия и другими факторами). Эти явления носят как регулярный характер (периодические флуктуации), так и случайный (хаотические флуктуации), что приводит в импульсном режиме к амплитудной и частотной модуляции несущей, а также к уширению спектра ВЧ-колебаний. Исследование качества спектра импульсного излучения с учетом указанных явлений связано с решением нестационарных задач дифракционной электроники.

Ограничимся исследованием спектра импульсов генерации, возбуждаемых в ГДИ, и определением степени влияния на ВЧ-колебания детерминированных гармонических процессов, связанных с изменениями параметров электронного потока.

Из линейной теории возбуждения ГДИ следует, что уход частоты генерации основной пространственной гармоники при изменении скорости электронов потока можно определить по формуле

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{L\omega_0}{8Q\beta c} \frac{\Delta U}{U_0}, \quad (1)$$

где L — длина пространства взаимодействия, Q — нагруженная добротность резонатора, образованного отражательной дифракционной решеткой и плоским зеркалом, $v_0 = \sqrt{2\eta U_0} = \beta c$ — постоянная скорость электронов пучка, c — скорость света, $\Delta U/U_0$ — относительное изменение напряжения, определяющее скорость электронов в пространстве взаимодействия.

Если предположить, что изменение скорости электронов пучка в пространстве взаимодействия приводит к линейному изменению амплитуды и частоты в течение длительности τ прямоугольного импульса генерации (время установления колебаний и время «звона» резонатора в генераторе значительно меньше длительности вершиныгибающей импульса ВЧ-колебаний), то спектр такого ВЧ-сигнала можно записать в виде

$$\left| \frac{A_\omega}{A_0} \right|^2 = \frac{\pi M^2}{8\alpha} (\Delta_c^2 + \Delta_s^2) + \frac{m_a M}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} (\Delta_c \cos \theta + \Delta_s \sin \theta) \times \\ \times \sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau + \left(\frac{m_a}{2\alpha} \sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau \right)^2. \quad (2)$$

Здесь $\Delta_c = C(v_1) - C(v_2)$, $\Delta_s = S(v_1) - S(v_2)$, $\Delta\omega = \omega - \bar{\omega}_0$,

$$\alpha = m_u \frac{L \bar{\omega}_0^2}{16Q\beta c}, \quad M = 1 + m_a \frac{\Delta\omega}{2\alpha}, \quad m_a = \frac{A_2 - A_1}{A_0 \tau},$$

$$m_\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\bar{\omega}_0 \tau} = \frac{2\alpha}{\omega_0}, \quad m_u = \frac{U_2 - U_1}{U_0 \tau} = \frac{\Delta U}{U_0 \tau}, \quad \theta = \frac{\alpha \tau^2}{4} - \frac{\Delta\omega^2}{4\alpha},$$

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{2} (A_2 + A_1), \quad \bar{\omega}_0 = \frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1), \quad \bar{U}_0 = \frac{1}{2} (U_2 + U_1),$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\Delta\omega}{2\alpha} \right), \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\Delta\omega}{2\alpha} \right),$$

$$S(v) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi, \quad C(v) = \int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi — \text{интегралы Френеля};$$

индексами «1», «2», «—» обозначены соответственно начальные, конечные и средние значения параметров A , ω , U . Коэффициенты модуляции m_a , m , m_u характеризуют максимальное относительное изменение среднего значения амплитуды \bar{A}_0 импульса ВЧ-сигнала, амплитуды \bar{U}_0 импульса напряжения (скорости электронов) и несущей частоты ($\omega_0 = 2\pi\bar{f}_0$) в течение длительности τ . При этом $m_u \geq 0$, $m_\omega \geq 0$ (нарастание частоты генерации с увеличением скорости электронов), а коэффициент m_a может быть положительным или отрицательным, что соответствует линейному нарастанию или спаду вершины импульса генерации.

Соотношение (2) позволяет проанализировать изменение качества спектра импульсов ВЧ-колебаний от различных параметров генератора. Если $\alpha = 0$ ($m_u = 0$), $m_a \neq 0$, то импульс генерации имеет только амплитудную модуляцию, которая приводит к несимметричности спектра (2), однако ширина спектра в этом случае примерно соответствует теоретическому значению

$$\Delta F \approx \frac{1 \div 2}{\tau}. \quad (3)$$

При наличии частотной модуляции ($\alpha \neq 0$, $m_u \neq 0$), когда

$$m_u \leq \frac{8Q\beta c}{\pi L \bar{f}_0^2 \tau^2}, \quad (4)$$

спектр импульса генерации имеет незначительные искажения, а его ширина соответствует (3). Если условие (4) не выполняется, то увеличение уклона m_u приводит к искажениям спектра (2) — наблюдается уширение спектра, а в его огибающей появляются периодические осцилляции.

С увеличением добротности резонатора величина допустимого значения m_u , при которой наблюдаются минимальные искажения спектра, возрастает. Этот факт является важным в случае генерации в ГДИ длинных импульсов ВЧ-колебаний, где значительно влияют на качество спектра изменения скорости электронов пучка вследствие нейтрализации объемного заряда ионами остаточных газов.

Следовательно, к существенным искажениям спектра может привести паразитная частотная модуляция несущей импульса дифракционного излучения. Эти результаты подтверждаются проведенными экспериментальными исследованиями.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальные исследования спектральных характеристик импульсов дифракционного излучения проводились в миллиметровом диапазоне ($\lambda = 3,8 \div 8 \text{ мм}$) как на разборных макетах ГДИ при непрерывной откачке, так и на приборах отпаянных конструкций при давлении остаточных газов не хуже $10^{-7} \text{ мм рт. ст.}$ Открытый резонатор с нагруженной добротностью 2000—3000 образован сферическим зеркалом и плоским с частичным заполнением отражательной дифракционной решеткой. Импульсы ленточного электронного потока сечением

$5 \times 0,2 \text{ мм}^2$ создавались диодной пушкой. Длительность импульсов напряжения модулятора (электронного тока) составляла $0,1 - 10 \text{ мкс}$, частота следования импульсов — $200 - 2000 \text{ Гц}$, амплитуда импульсов напряжения модулятора — $1,4 - 7 \text{ кВ}$, с уклоном вершины $k = \frac{\Delta U}{\tau} \approx 0,5 \div 5 \text{ В/мкс}$. Исследование спектра импульсов генерации проводилось на анализаторе С4-27.

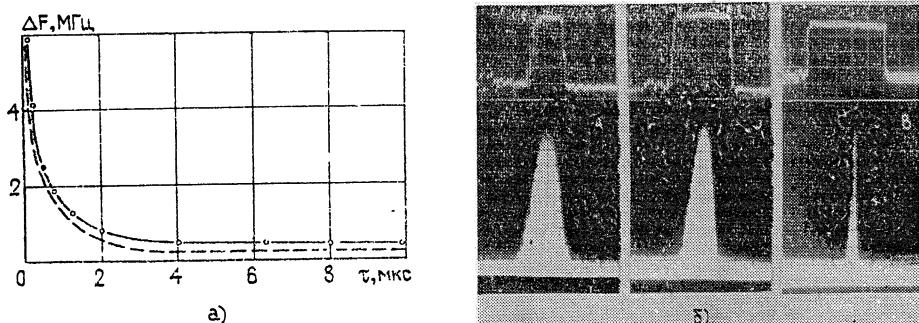


Рис. 1. Зависимости ширины спектра от длительности импульсов дифракционного излучения (а) и спектрограммы ВЧ-сигналов (б)
(А — $\tau = 0,15 \text{ мкс}$, Б — $\tau = 0,75 \text{ мкс}$, В — $\tau = 10 \text{ мкс}$).

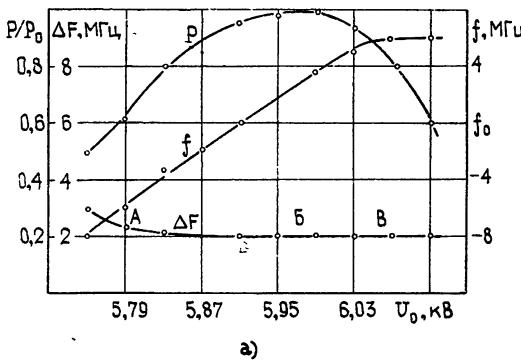
Экспериментально установлено, что при соответствующем выборе параметров и условий возбуждения генератора импульсы ВЧ-колебаний длительностью $\tau = 0,15 \div 10 \text{ мкс}$ имеют незначительные искажения — минимальную амплитудную модуляцию огибающей ($m_a \approx 0$) и удовлетворительное качество спектра (отсутствует паразитная модуляция, а его ширина примерно определяется соотношением (3)). Это наглядно видно из рис. 1, где приведены теоретическая (3) и экспериментальная зависимость ширины спектра от длительности импульса генерации ($\bar{U} = 6 \text{ кВ}$, $\bar{f}_0 = 75,8 \text{ ГГц}$), а также огибающие импульсов ВЧ-сигналов для $\tau = 0,15; 0,75; 10 \text{ мкс}$ и соответствующие им спектры (рис. 1б) с полосой $\Delta F = 6; 2; 0,4 \text{ МГц}$ на уровне 0,1 максимального значения мощности генерации (здесь спектрограммы А приведены в полосе обзора 20 МГц ; Б, В — 10 МГц). Эти характеристики соответствуют оптимальным условиям работы ГДИ (максимальная мощность генерации, минимальная крутизна электронной перестройки частоты), которые зависят от многих параметров: тока пучка, угла пролета электронов, величины магнитного поля и других. Поэтому целесообразно определить область возбуждения генератора, где влияние паразитных эффектов на качество спектра импульсов ВЧ-колебаний невелико.

Качество спектра в зоне электронной перестройки ГДИ. Экспериментальные исследования характеристик импульсов генерации в зоне электронной перестройки ГДИ (рис. 2, 3 — перестройка частоты путем изменения ускоряющего напряжения или амплитуды импульса напряжения модулятора при фиксированных расстояниях между зеркалами резонатора) показывают, что графики зависимости импульсной мощности и частоты генерации от величины импульсного напряжения примерно имеют такой же вид, как и в непрерывном режиме [1]: зависимость мощности генерации имеет несимметричный характер; с увеличением тока пучка зона перестройки частоты уширяется, при этом для большинства возбуждаемых колебаний наблюдаются в начале или в конце зоны резкие срывы мощности с проявлением гистерезисных яв-

лений; частота генерации с увеличением \bar{U}_0 на значительном участке зоны нарастает примерно по прямо пропорциональному закону с крутизной $0,1 - 0,2 \text{ МГц}/\text{В}$.

Однако в процессе исследования импульсных характеристик установлено, что для некоторых колебаний гистерезисные явления в приборе проявляются незначительно, а в зоне имеются области с малой крутизной ($\frac{df}{dU} \approx 0$), что является важным для генерации импульсов

ВЧ-колебаний с минимальными искажениями спектра. Кроме того, для большинства возбуждаемых колебаний спектр коротких импульсов генерации ($\tau \leq 1 \text{ мкс}$) по зоне имеет значительно меньшие искажения, чем длинные импульсы ($\tau > 1 \text{ мкс}$).



a)

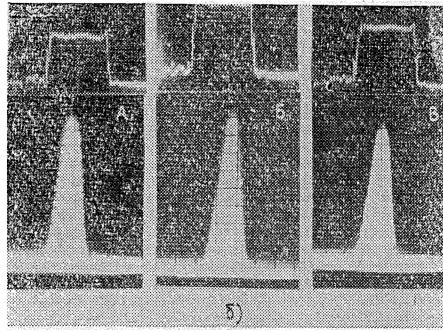
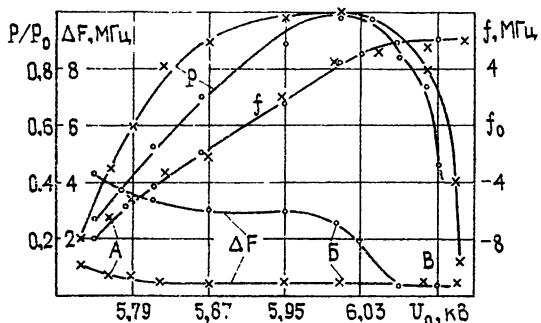


Рис. 2. Зависимости мощности, перестройки частоты, ширины спектра импульсов генерации длительностью $\tau = 0,75 \text{ мкс}$ от ускоряющего напряжения (а) и спектрограммы ВЧ-сигналов (б).

В частности, на рис. 2а приведены зависимости мощности (P), перестройки частоты (f_0) и ширины спектра (ΔF) импульса генерации длительностью $\tau = 0,75 \text{ мкс}$ в зоне электронной перестройки (ток в импульсе — $0,8 \text{ A}$, $f_0 = 75,8 \text{ ГГц}$, величина фокусирующего магнитного поля $H = 4,4 \text{ кЭ}$). Форма импульса генерации и его спектр в различных областях зоны (A, B, V) показаны на рис. 2б. Из этих характеристик видно, что несмотря на достаточно широкие пределы изменения крутизны перестройки частоты качество спектра меняется незначительно (уширение спектра импульсов $\tau \leq 1 \text{ мкс}$, в основном, наблюдается в области начала или срыва генерации).

Увеличение τ ($\tau > 1 \text{ мкс}$) приводило к уширению и несимметричности спектра, а также к появлению в нем паразитных ВЧ-колебаний.

ний. Установлено, что эти искажения спектра были обусловлены техническими причинами, в частности, отклонениями импульса напряжения модулятора от прямоугольной формы (угол вершины $k \approx 5 \text{ В/мкс}$). Так из теоретических оценок (4) следует, что для получения удовлетворительного спектра в исследуемых генераторах угол вершины импульса напряжения в пространстве взаимодействия не должен превышать $\sim 0,05 \text{ В/мкс}$. Этот факт проиллюстрирован на рис. 3, где приведены характеристики импульсов генерации длительностью



a)

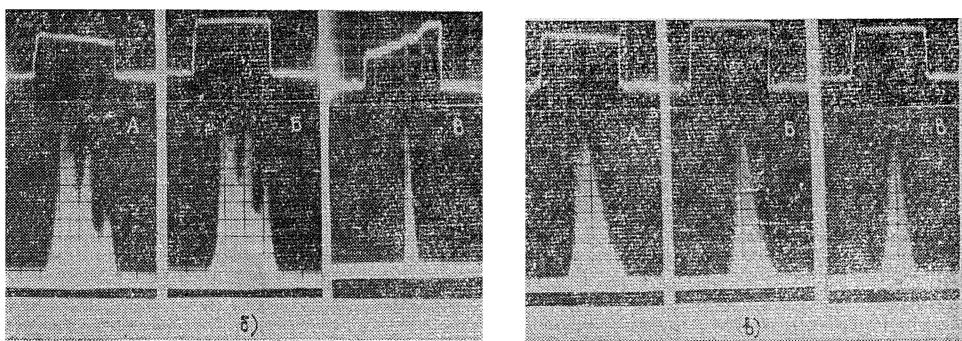


Рис. 3. Влияние угла вершины импульса напряжения модулятора на мощность, частоту, ширину спектра (а) и на качество спектра (б, в) импульсов дифракционного излучения длительностью $\tau = 10 \text{ мкс}$ в зоне электронной перестройки ГДИ.

$\tau = 10 \text{ мкс}$ при $k_1 = 5 \text{ В/мкс}$ (графики, обозначенные точками) и $k_2 = 0,5 \text{ В/мкс}$ (графики с крестиками). Спектрограммы на рис. 3б для k_1 приведены в полосе обзора 10 МГц , а для k_2 (рис. 3в) — 3 МГц .

Из спектрограмм видно, что для k_1 в области линейного изменения крутизны электронной перестройки частоты спектр импульсов генерации имеет существенные искажения, где ширина спектра достигает 5 МГц . При этом, уменьшение амплитудной модуляции несущей (область максимальной мощности генерации, где $m_a \approx 0$; сигнал Б, рис. 3б) приводит к незначительному улучшению качества спектра, что указывает на присутствие в импульсе генерации паразитной частотной модуляции. Однако в области «нулевой» крутизны, даже при наличии в этом сигнале амплитудной и частотной модуляции (сигнал В, рис. 3б), качество спектра существенно улучшается — исчезают паразитные осцилляции, — а его ширина примерно соответствует теоретическому значению (3).

Уменьшение угла вершины импульса напряжения модулятора

приводит к значительному улучшению качества спектра ВЧ-колебаний. Так, при $k_2 = 0,5 \text{ B/mks}$ (рис. 3в) спектр импульса генерации длительностью $\tau = 10 \text{ мкс}$ в зоне электронной перестройки частоты, как и для импульсов с длительностью $\tau \leq 1 \text{ мкс}$, имеет минимальные искажения.

Влияние магнитного поля. Известно, что величина фокусирующего магнитного поля определяет статическую форму траектории электронного потока в пространстве взаимодействия. С учетом ионизационных процессов квазистатические пульсации потока в приборах с длительным взаимодействием могут существенным образом влиять на спектральные характеристики сигналов генерации [3].

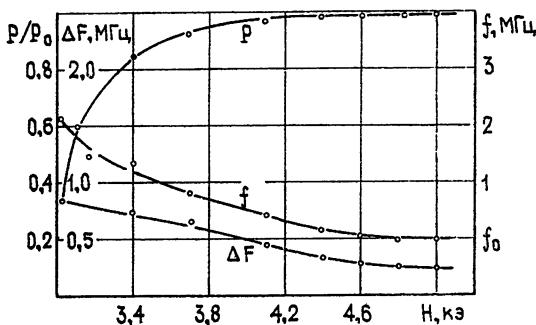


Рис. 4. Зависимости мощности, изменения частоты и ширины спектра импульсов генерации от магнитного поля ($\tau = 10 \text{ мкс}$, $f_0 = 75,8 \text{ ГГц}$, $k = 0,5 \text{ B/mks}$).

Проведенные экспериментальные исследования качества спектра импульсов генерации в ГДИ показывают, что спектр на уровне $P \geq 0,5 P_{\max}$ с изменением величины фокусирующего магнитного поля меняется незначительно; существенные искажения спектра наблюдаются в области пусковых значений H . В частности, на рис. 4 приведены зависимости мощности, изменения частоты и ширины спектра импульсов генерации длительностью $\tau = 10 \text{ мкс}$ от магнитного поля. Видно, что с уменьшением магнитного поля частота генерации и ширина спектра возрастают. При этом существует оптимальная величина H_{opt} (если прибор при изменении H не юстируется), где спектр имеет минимальные искажения. Увеличение H относительно H_{opt} уменьшает амплитуду пульсаций граничных электронов потока (поток удаляется от дифракционной решетки) и снижает эффективность взаимодействия его с полем резонатора, что приводит к уменьшению мощности и изменению качества спектра импульсов ВЧ-колебаний.

Влияние давления остаточных газов. Наиболее трудно устранимы в приборах с длительным взаимодействием являются искажения спектра, связанные с ионизационными процессами, которые приводят к нейтрализации объемного заряда и к последующему изменению параметров электронного потока. Степень влияния этих процессов на качество спектра возрастает с увеличением длительности и величины импульса электронного тока, с увеличением давления остаточных газов (например, в приборах типа ЛОВО [3]).

Экспериментальные исследования качества спектра ВЧ-колебаний в ГДИ от давления остаточных газов показывают, что на длительностях импульсов генерации $\tau \leq 10 \text{ мкс}$ при уменьшении давления в приборе от $10^{-7} \text{ мм рт. ст.}$ до $10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ заметных искажений в спектре не наблюдается. В частности, на рис. 5 приведены зависимости им-

пульсного электронного тока (*I*), ширины спектра и спектрограммы импульсов генерации длительностью $\tau = 10 \text{ мкс}$ от давления остаточных газов в ГДИ. Видно, что заметное уширение спектра проявляется при $p \leq 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$, где происходит отравление катода электронной пушки и значительное уменьшение величины электронного тока.

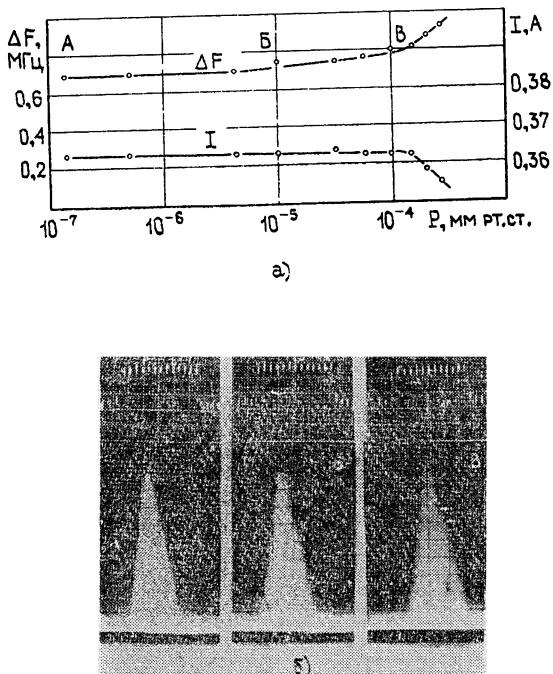


Рис. 5. Влияние давления остаточных газов в ГДИ на электронный ток, ширину спектра импульсов генерации длительностью $\tau = 10 \text{ мкс}$ (а) и на качество спектра ВЧ-колебаний (б).

В заключение отметим, что для сравнения качества спектра импульсов дифракционного излучения, возбуждаемых в ГДИ, проводились (при равных технических условиях) исследования спектра импульсов генерации резонансных ЛОВО. В результате сопоставления этих исследований установлено, что качество спектра в ГДИ выше, чем в ЛОВО. Так, на длительностях импульсов ВЧ-колебаний $\tau = 1 \text{ мкс}$ ширина спектра $\Delta F_{\text{Гди}} = 1,5 \div 2 \text{ МГц}$, $\Delta F_{\text{Лов}} = 6 \div 8 \text{ МГц}$, а для $\tau = 10 \text{ мкс} - \Delta F_{\text{Гди}} = 0,4 \div 5 \text{ МГц}$, $\Delta F_{\text{Лов}} = 40 \div 60 \text{ МГц}$, при этом в ЛОВО наблюдаются значительные искажения спектра, обусловленные как искажениями формы импульса напряжения модулятора, так и изменениями параметров пучка при нейтрализации объемного заряда ионами остаточных газов.

ВЫВОДЫ

- 1) Проведены теоретические оценки влияния изменения скорости электронов потока в пространстве взаимодействия на качество спектра импульсов дифракционного излучения, возбуждаемых в приборах типа ГДИ.
- 2) При соответствующих технических условиях в области электронной перестройки частоты ГДИ качество спектра импульсов генерации длительностью $\tau \leq 10 \text{ мкс}$ меняется незначительно.
- 3) В зоне электронной перестройки ГДИ существуют области с

достаточно малой крутизной («нулевой»), где качество спектра ВЧ-колебаний значительно улучшается.

4) Экспериментально исследовано влияние фокусирующего магнитного поля на качество спектра импульсов ВЧ-колебаний ГДИ.

5) Ионизационные процессы, протекающие в ГДИ, приводят к незначительному изменению качества спектра сигнала генерации длительностью $\tau \leqslant 10 \text{ мкс}$ при изменении давления остаточных газов в достаточно широких пределах ($p \leqslant 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. П. Шестопалов, Дифракционная электроника, изд. Вища школа, Харьков, 1976.
2. И. М. Балаклицкий, Б. К. Скрынник, А. И. Цвик, В. П. Шестопалов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 10, 1528 (1975).
3. А. М. Кац, Е. М. Ильина, И. А. Манькин, Нелинейные явления в СВЧ-приборах *O*-типа с длительным взаимодействием, изд. Сов. радио, М., 1975.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
22 июля 1977 г.

INVESTIGATION OF THE SPECTRAL CHARACTERISTICS OF DIFFRACTION RADIATION PULSES

I. M. Balaklitskii, G. S. Vorob'ev, A. I. Tsvyk, V. P. Shestopalov

The physical phenomena which lead to the spectral distortions of diffraction radiation pulses are analysed by theoretical estimations and experimental investigations. The experimental investigations have been made for HF-oscillation pulses of $0.15 - 10 \mu\text{sec}$ duration excited in the oscillator of diffraction radiation of the millimeter wave range. The influence of the curvature of the electron frequency retuning, the values of the magnetic field, the pressure of residual gases on the spectral characteristics of the device has been established. The region of the parameter variation of the oscillator in which spurious effects leading to the spectral distortion have an unessential effect is determined.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 550.388.2

ОБ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ И ВЗРЫВЫ

В. И. Дробжев, В. М. Краснов, Н. М. Салихов

В настоящее время считается, что среднемасштабные волновые возмущения электронной концентрации в ионосфере возникают за счет распространения внутренних акустико-гравитационных волн (см., например, [1]).

В данном сообщении для экспериментальной проверки этой гипотезы рассматривается воздействие на нижнюю ионосферу акустико-гравитационных волн, возникающих при взрывах и землетрясениях. Теория по данному вопросу изложена в [2]. Экспериментальные результаты аналогичных исследований для *F*-области можно найти в работах [3, 4].

В качестве регистрирующей аппаратуры использовались допплеровские установки вертикального [5] и наклонного [6] зондирования ионосферы. Вертикальное зондирование проводилось на частоте 5 $M\Gamma\mu$ (отражение от *F*-слоя), наклонное — на частоте 2,5 $M\Gamma\mu$ (трасса Ташкент — Алма-Ата, высота отражения 70—80 км). Для изучения фоновых волновых возмущений электронной концентрации в ионосфере было рассмотрено 10 записей $f_g(t)$ при отражении радиоволны от *F*-слоя и 30 записей $f_g(t)$ при отражении от *D*-слоя.

Спектры мощности $S(F)$ показывают наличие четко выраженных пиков на периодах 20—30 и 10—15 мин для *F*-слоя и 20—30, 10—15 и 4—6 мин для *D*-слоя.

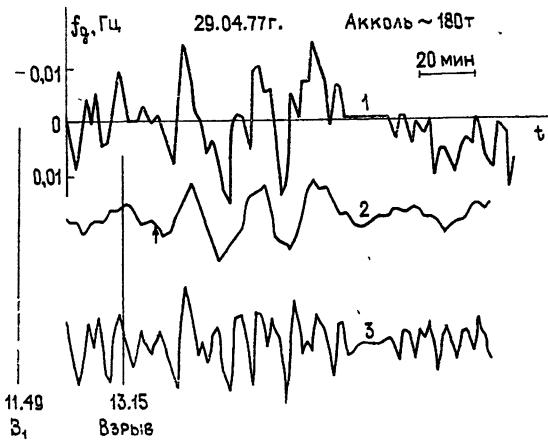


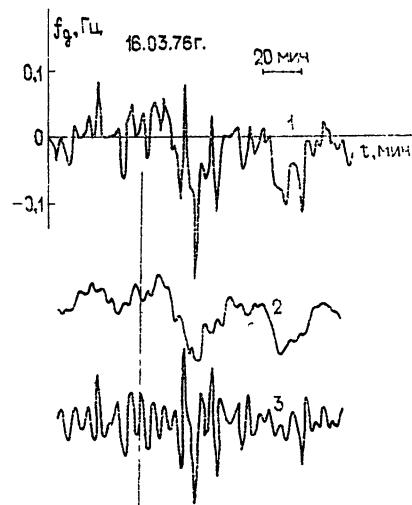
Рис. 1.

В качестве искусственных источников акустических волн рассматривалось 5 взрывов при сбросе снежных лавин (вес взрывчатки несколько сотен килограммов) и 4 поверхностных строительных взрыва (вес взрывчатки порядка сотни тонн), проводившихся на расстоянии 20—350 км от области точки отражения радиоволны. Взрывы порядка сотни килограмм не проявили никаких особенностей на записях $f_g(t)$ как при вертикальном, так и наклонном зондировании ионосферы. Не обнаружено также эффектов от мощных взрывов при вертикальном зондировании (по техническим причинам проанализировано только два случая). Вместе с тем наблюдались особенности в возмущениях электронной концентрации для всех мощных взрывов при отражении радиоволн от *D*-слоя. Одна из записей представлена на рис. 1, где кривая 1 — исходная

запись $f_g(t)$, 2 — отфильтрованная низкочастотная составляющая, 3 — высокочастотная компонента. Нетрудно видеть, что через некоторое время после взрыва (отмечено стрелкой), на кривой 2 наблюдается существенное увеличение амплитуды низкочастотных колебаний $f_g(t)$ и их четко выраженная периодическая структура. Для высокочастотной компоненты увеличение амплитуды незначительно. Аналогичная картина имела место и в остальных записях. В пользу того, что наблюдаемые особенности обусловлены именно взрывами, свидетельствует также тот факт, что для двух одинаковых по мощности взрывов, проведенных в одном месте, периодические колебания $f_g(t)$ появились на записях через один и тот же момент времени после взрыва (~ 12 мин) и продолжались в течение одинакового промежутка (~ 1 час), что в общем соответствует теоретическим оценкам времени распространения акустической волны до высот ионосферы. Расчет спектров для данных записей не показал появления каких-либо дополнительных частотных составляющих в структуре волновых возмущений по сравнению с фундаментальными.

В качестве естественных источников акустической волны рассматривались землетрясения в Среднеазиатском регионе с энергией $K = 7 \div 9,5$ (проанализировано 10 случаев; отражение радиоволн от D -слоя). Исследования показали, что особенности на записях проявляются только при $K > 9$ (по мощности соответствуют взрывам в сотни тонн). Одна из записей представлена на рис. 2, на котором приняты обозначения: 3₁ — землетрясение, $t = 14,43$ — момент начала землетрясения, $\lambda = 40^{\circ}46'$ и $\varphi = 77^{\circ}35'$ — координаты очага, $K = 9,5$. Видно, что землетрясение приводит к увеличению амплитуды низкочастотной (кривая 2) и высокочастотной составляющих (кривая 3). Незначительное увеличение амплитуды низкочастотной составляющей при землетрясениях по сравнению с эквивалентными по мощности взрывами можно объяснить большей глубиной очагов землетрясений (десятки и сотни километров) по сравнению с наблюдавшимися взрывами (метры и десятки метров).

Таким образом, взрывы (мощностью в сотни тонн) и землетрясения (по классу энергии больше 9,5) приводят к увеличению амплитуды низкочастотных и высокочастотных флуктуаций электронной концентрации в D -слое ионосферы. Кроме того, при взрывах низкочастотная компонента приобретает четко выраженный периодический характер колебаний.

3₁ Рис. 2.

- ### ЛИТЕРАТУРА
1. Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
 2. Г. С. Голицын, Изв АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, 136 (1965).
 3. G. H. Vaggy, L. J. Griffiths and J. C. Tealgeg, Geophys. Res., 71, № 17, 4173 (1966).
 4. M. Donald, Baker, Donald E. Cotten, Geophys. Res., 76, № 7, 1803 (1971).
 5. В. И. Дробжев, В. М. Краснов, Н. М. Салихов, В. С. Хачикян, в сб. Ионосфера и солнечно-земные связи, изд. Наука, Алма-Ата, 1977.
 6. М. Ф. Баюклина, В. М. Краснов, Радиотехника и электроника, 22, № 5, 957 (1977)

Сектор ионосферы АН Каз ССР

Поступила в редакцию
18 января 1978 г.

О ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ СЛОЖНЫХ V-ЛИНИЙ

Н. Н. Томас, А. Я. Яшкин

В работе [1] (рис. 8 и 9) приведены результаты численного расчета зависимости параметров основной волны и нечетных волн высшего типа от геометрии поперечного сечения двухслойной V-линии (рис. 3 и 4). В настоящей статье приводятся результаты расчета указанных в [1] двух видов V-линий с дробным отношением углов η , но уже для четных волн с четной азимутальной вариацией поля (HE_{22} , EH_{22}).

На рис. 1 представлены результаты численного расчета зависимости по-перечных постоянных \tilde{l}^* и \tilde{l} V-линий [2] для трех значений η : 1 — $\eta = 2/3$, 2 — $\eta = 1/2$, 3 — $\eta = 2/5$. Дисперсионные зависимости $\mu = f(D')$ для тех же значений η показаны на рис. 2.

Из сравнения дисперсионных характеристик (рис. 1 и 2) с аналогичными (рис. 8 и 9), приведенными в [1], следует, что в случае полуцелых значений относительного углового размера диэлектрических секторов наблюдается совпадение критических частот гибридных волн обоих типов V-линий с одновременным сужением области аномальной дисперсии обратных HE_{1m} -квазиволн. Учитывая тождественность уравнений, описывающих дисперсионные свойства V-линий и сплошного диэлектрического волновода при значениях $\eta = 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ (волны EH_{1m}, HE_{1m} V-линий аналогичны волнам $EH_{p m}, HE_{p m}$ сплошного диэлектрического волновода, где $p = 1/\eta$) и сравнивая дис-

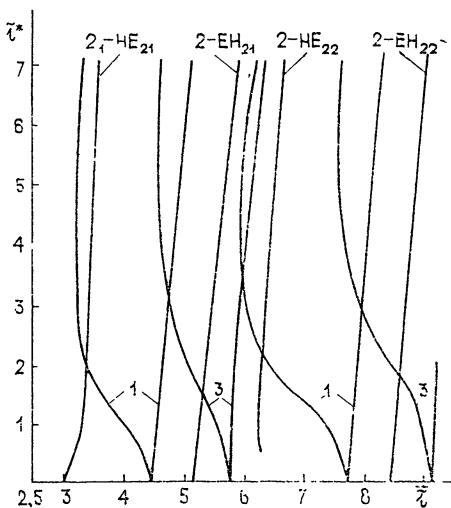


Рис. 1.

персионные кривые, изображенные на рис. 1 и 2, с рис. 8 и 9 [1], приходим к следующим выводам.

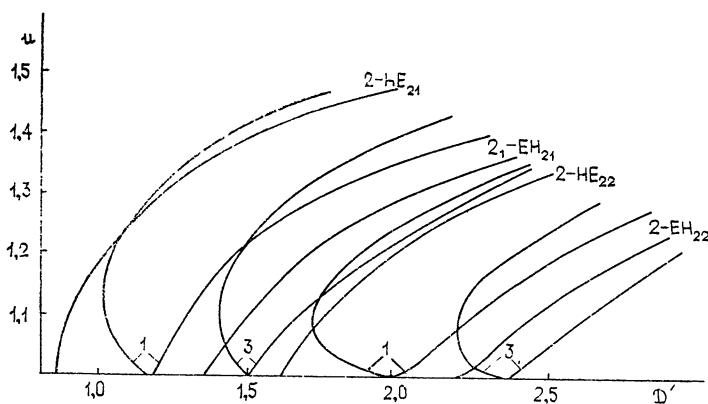


Рис. 2.

Критические условия для волн EH_{1m} обоих типов V-линий и сплошного диэлектрического волновода (волны $EH_{p m}$) совпадают. При этом в области частот, близких к критическим, фазовая дисперсия указанных типов волн сложной V-линии значительно меньше. Критические условия волн HE_{1m} V-линии, совпадая с критическими условиями для аналогичных волн сплошного диэлектрического волновода, уже не совпадают с критическими условиями для волн HE_{1m} сложной V-линии. Благодаря этому наблюдается отсутствие обратных (с аномальной дисперсией) HE_{1m} -волн V-линии.

Таким образом, ограничение сектора диэлектрического цилиндра произвольного углового размера η металлическими секторами конечных радиальных размеров [1] создает условия для совпадения критических частот волн HE_{1m} и EH_{1m} и, как следовало ожидать, для существования области аномальной дисперсии обратных HE_{1m} -квазиволн (см, например, [3]), благодаря взаимодействию (на частотах, близких к критическим) полей в каждой из диэлектрических канавок

Выявленные особенности дисперсионных свойств сложных V -линий могут найти применение в ограниченной плазме [4]

В заключение отметим наличие в сложных V -линиях основных HE_{10} -квазиволн и отсутствие таковых в простых V -линиях, что может найти применение при создании одноволновых многоканальных линий связи [5].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Я. Яшкян, Н. Н. Томас, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 265 (1977).
- 2 P. Diamond, S. P. Schlesinger and S. A. Vigant, Trans. IRE, MTT-9, № 4, 332 (1961).
- 3 P. J. B. Glaricoats, Proc. IEE, 110, № 2, 261 (1963).
- 4 А. Н. Кондратенко, Плазменные волноводы, Атомиздат, М., 1976.
- 5 В. Ф. Взятышев, Диэлектрические волноводы, изд. Сов. радио, М., 1970

Московский государственный заочный
педагогический институт

Поступила в редакцию
29 июня 1977 г

УДК 535.31

ЛУЧЕВОЙ РАСЧЕТ ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛОКНЕ С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ ФОКУСИРОВКОЙ

А. Д. Шатров

В многомодовых волокнах дополнительные потери, вызванные плавными (в масштабе длины волны) случайнymi нерегулярностями, могут быть эффективно рассчитаны лучевым методом [1]. Ниже рассматривается сельфок (двумерная модель) с флюктуирующей фокусировкой. Для случая, когда волокно возбуждается ламбертовым источником, получено аналитическое выражение, описывающее закон убывания полной мощности вдоль волокна.

Квадрат показателя преломления регулярного фокусирующего волокна имеет вид

$$n^2(x) = \begin{cases} n_0^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right], & |x| < a \\ n_0^2 [1 - 2\Delta] & , |x| > a \end{cases}, \quad (1)$$

где $\Delta \ll 1$. Предполагается, что число поверхностных мод $N = k a n_0 \sqrt{\Delta/2}$, поддерживаемых волокном, велико ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в свободном пространстве).

В регулярном волокне траектория $x(z)$ луча, распространяющегося по световедущей жиле, представляет собой синусоиду с пространственной частотой $\omega = \sqrt{2\Delta}/a$. Траекторию $x(z)$ будем характеризовать адиабатическим инвариантом (действием) I [1]. На невозмущенной траектории действие сохраняется постоянным, причем величина I связана с амплитудой колебаний функции $x(z)$ соотношением $x_{\max} = (2aI/n_0 \sqrt{2\Delta})^{1/2}$. Для лучей, удерживаемых волокном, выполняется условие $x_{\max} < a$, т. е. для них величина I лежит в интервале $(0, I_{kp})$, где $I_{kp} = a n_0 \sqrt{\Delta/2}$.

Рассмотрим нерегулярное волокно, в котором показатель преломления выражается формулой (1), где параметр a стационарным случайнym образом изменяется вдоль z . Отклонения величины $a(z)$ от своего среднего значения a предполагаются малыми и описываются функцией $f(z)$.

На траектории луча, распространяющегося в нерегулярном волокне, величина I случайным образом меняется вдоль z . Лучи, для которых значение I достигло величины I_{kp} , покидают световедущую жилу и высыпаются во внешнюю оболочку. В этом состоит механизм потерь. Как показано в [1], плотность распределения лучей

по адиабатическим инвариантам $P(I, z)$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна—Фоккера

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \left(B \frac{\partial P}{\partial I} \right). \quad (2)$$

Строго говоря, уравнение (2) описывает статистические свойства некоторого сглаженного процесса, получающегося усреднением $I(z)$ по интервалу Δz , значительно пре-восходящему как радиус корреляции функции f , так и длину цикла $\Lambda=2\pi/\chi$. Коэффициент диффузии $B(I)$ легко находится с помощью методики, описанной в [1]:

$$B = \frac{8\pi\Delta}{a^4} g(2x) I^2. \quad (3)$$

Через g в (3) обозначена спектральная плотность флюктуаций f . Уравнение (2) необходимо решать с граничными условиями

$$P|_{I=I_{kp}} = 0, \quad B \frac{\partial P}{\partial I} \Big|_{I=0} = 0, \quad P|_{z=0} = F(I), \quad (4)$$

где функция $F(I)$ характеризует начальное распределение лучей.

Решение задачи (2), (4) будем искать в виде интегрального разложения по функциям

$$U(I, \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{I}} \sin \left(\rho \ln \frac{I_{kp}}{I} \right), \quad 0 < \rho < \infty. \quad (5)$$

Эти функции являются собственными для оператора, стоящего в правой части уравнения (2). Функции $U(I, \rho)$ образуют полную и ортонормированную систему на интервале $(0, I_{kp})$:

$$\int_0^{I_{kp}} U(I, \rho) U(I, \tilde{\rho}) dI = \delta(\rho - \tilde{\rho}). \quad (6)$$

Плотность вероятности $P(I, z)$ выражается через $U(I, \rho)$ следующим образом:

$$P(I, z) = \int_0^{\infty} A(\rho) U(I, \rho) e^{-(1+4\rho^2)\sigma z} d\rho, \quad (7)$$

где

$$\sigma = \frac{\pi \Delta}{a^4} g(2x); \quad (8)$$

$$A(\rho) = \int_0^{I_{kp}} F(I) U(I, \rho) dI. \quad (9)$$

Например, для случая равномерного начального распределения ($F = 1/I_{kp}$), что соответствует возбуждению волокна ламбертовым источником, получим

$$P(I, z) = \frac{1}{2I_{kp}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\sigma z} - \frac{\ln \frac{I_{kp}}{I}}{4\sqrt{\sigma z}} \right) \right] - \frac{1}{2I} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\sigma z} + \frac{\ln \frac{I_{kp}}{I}}{4\sqrt{\sigma z}} \right) \right], \quad (10)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности,

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (11)$$

Проинтегрировав (10) по I в пределах от 0 до I_{kp} , найдем закон изменения полной мощности, переносимой по световедущей жиле:

$$Q(z) = (1 + 2\sigma z) [1 - \Phi(\sqrt{\sigma z})] - \frac{2\sqrt{\sigma z}}{\sqrt{\pi}} \exp(-\sigma z). \quad (12)$$

Выражение (12) является основным результатом настоящей работы. График функции $Q(z)$ приведен на рис. 1.

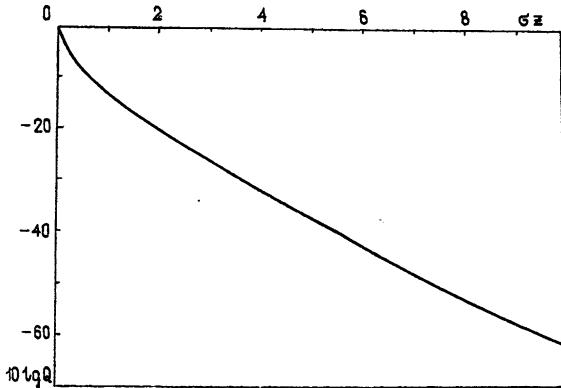


Рис. 1. Потери как функция длины волокна.

Асимптотика выражений (10) и (12) при $\sigma z \rightarrow \infty$ имеет вид

$$P(I, z) \sim \frac{\exp(-\sigma z) \ln \frac{I_{kp}}{I}}{4(\sigma z)^{3/2} (\pi I_{kp} l)^{1/2}}; \quad (13)$$

$$Q(z) \sim \frac{\exp(-\sigma z)}{\pi^{1/2} (\sigma z)^{3/2}}. \quad (14)$$

Таким образом, величина σ характеризует (с точностью до логарифмически малых величин) потонные потери мощности в достаточно протяженном волокне. Наличие в формулах (13), (14) прёдэкспоненциального множителя $(\sigma z)^{-3/2}$ — следствие того, что в рассматриваемой задаче спектр диффузационного оператора оказался сплошным. Заметим, что задача определения асимптотического ($z \rightarrow \infty$) коэффициента потерь σ при конечных значениях N решалась в [2], где применялась волновая методика, основанная на исследовании системы дифференциальных уравнений для средних мощностей мод. В случае конечного числа мод мощность убывает экспоненциально при $z \rightarrow \infty$, однако расстояние, начиная с которого применима эта асимптотика, неограниченно увеличивается с ростом N . В [2] для предельного ($N \rightarrow \infty$, что эквивалентно условию $k \rightarrow \infty$, т. е. переходу к геометрической оптике) значения коэффициента потерь было получено выражение, совпадающее с формулой (8). (При сравнении результатов следует иметь в виду, что в [2] использовалось иное определение спектральной плотности, отличающееся от g множителем 2π .)

Автор благодарит Б. З. Каценеленбаума и Р. Ф. Матвеева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Шатров, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1153 (1977).
2. Р. Ф. Матвеев, А. Д. Шатров, Радиотехника и электроника, 21, № 5, 989 (1976).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
3 января 1978 г.

**ОБ УЧЕТЕ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН И ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
В ТЕОРИИ МНОГОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДОВ
СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Л. А. Апресян

При описании многомодовых волноводов со случайными неоднородностями чаще всего не учитывают неоднородные (затухающие) волны и ограничиваются приближением рассеяния вперед [1, 2]. При этом предполагается, что неоднородные волны не переносят энергии, так что полный поток энергии бегущих волн в консервативном случае должен сохраняться. Все эти допущения, строго говоря, оправдываются лишь в пределе коротковолновой асимптотики для плавных неоднородностей и ограниченных трасс, на которых можно не учитывать обратное рассеяние. В данной заметке мы обсудим некоторые методические вопросы, возникающие при описании обратного рассеяния как в динамической, так и в статистической теории.

1. Постановка задачи. Многомодовые волноводы со случайными неоднородностями описываются системой уравнений для амплитуд взаимодействующих волн вида

$$\frac{d}{dx} a_l = \lambda_l a_l + \sum_j v_{lj} a_j, \quad (1)$$

где λ_l — постоянные распространения, а v_{lj} — случайные коэффициенты связи, $\langle v_{lj} \rangle = 0$. При этом в консервативном случае для распространяющихся волн λ_l мнимы, а для неоднородных волн — вещественны.

В случае падения излучения на волновод из области $x < 0$ отсутствие отражения на конце волновода при $x = L$ система (1) дополняется краевыми условиями:

$$a_e(0) = a_{e0}; \quad (2)$$

$$a_m(L) = 0, \quad (3)$$

где a_e и a_m — амплитуды прямых и обратных волн соответственно. В приближении рассеяния вперед, когда обратные волны не учитываются, достаточно рассматривать условие (2), что соответствует задаче с начальными условиями (т. е. задаче Коши).

2. Роль неоднородных волн в законе сохранения энергии. Явный вид коэффициентов системы (1) зависит от конкретной постановки задачи. Для определенности будем говорить о прямолинейном консервативном акустическом волноводе. Тогда, используя известное выражение для потока энергии

$$\bar{S} = \frac{1}{2ik}(u^\ast \nabla u - u \nabla u^\ast), \quad (4)$$

нетрудно получить, что полный поток энергии вдоль оси волновода равен

$$S_x = \sum_{i=1}^N S_i^{(+)} + \sum_{i=1}^N S_i^{(-)} + \sum_{j=N+1}^{\infty} S_j^{(+-)}, \quad (5)$$

причем закон сохранения S_x имеет вид

$$\frac{d}{dx} S_x = 0. \quad (6)$$

В выражении (5) $S_i^{(+)}$ и $S_i^{(-)}$ — потоки энергии прямой и обратной распространяющихся волн типа i соответственно, а $S_j^{(+-)}$ — поток, порождаемый интерференцией прямой и обратной неоднородных волн типа j . Отсюда видно, что при учете взаимодействия неоднородные волны участвуют в энергетическом балансе и могут приводить к отличным от нуля потокам энергии. Этот простой факт объясняет результат работы [3], где затухающие волны учитывались в приближении рассеяния вперед, неконсервативность окончательных уравнений в [3] обусловлена неконсервативностью исходной модели, в которой, фактически, отброшены потоки энергии, порождаемые затухающими волнами.

3. Взаимодействие волн и «укороченные» системы уравнений. Вместо полной системы связанных уравнений (1) часто рассматривают более простые «укороченные» системы, вытекающие из (1) в предположении, что отлична от нуля лишь часть ам-

плитуд $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}, i_m \leq \infty$. Такое допущение может быть оправдано при условии, что взаимодействие рассматриваемых волн друг с другом значительно сильнее их взаимодействия с волнами, амплитуды которых полагаются равными нулю. Условия малости простейших — двухволновых — взаимодействий можно оценить, предполагая, что амплитуды всех волн, кроме выбранных двух, равны нулю. Такая оценка показывает, что в случае плавнонеоднородного заполнения волновода взаимодействие бегущей волны с прямой неоднородной волной по порядку величины такое же, что и ее взаимодействие с обратной неоднородной волной. Отсюда следует, что проведенный в [3] учет неоднородных волн в рамках приближения рассеяния вперед является превышением точности этого приближения.

4. Обратное рассеяние и условия применимости одномерной теории переноса. Остановимся на ограничениях, налагаемых обратным рассеянием на одномерную теорию переноса излучения. Как известно, в теории переноса совершенно не учитывается возможность интерференции волн разных типов, что эквивалентно использованию постулата хаотичности фаз. Допустимость этого постулата, вообще говоря, не очевидна, и поэтому вопрос об области применимости теории переноса до сих пор нельзя считать окончательно решенным.

Если не учитывать обратного рассеяния и использовать приближение бегущих волн, то, как показано в [4], в случае многомодовых волноводов одномерная теория переноса находит строгое математическое оправдание в так называемом пределе Хасьминского [5]: $L \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$, $\sigma^2 L = \text{const}$, где параметр σ характеризует интенсивность флуктуаций, а L — длина трассы. Практически для допустимости такого предельного перехода должны выполняться два условия [6]: а) условие мелкомасштабности или малости флуктуаций $\sigma l_k \ll 1$, где l_k — радиус корреляции флуктуаций, и б) неравенство $(1/\sigma^2 l_k) \Delta k_{\parallel} = 1$, где Δk_{\parallel} — разность продольных волновых чисел, характеризующая биения между рассматриваемыми модами (в [6] фактически налагалось более слабое условие $(1/\sigma^2 l_k) k_{\parallel} \gg 1$, где k_{\parallel} — характерное продольное волновое число, но этого условия, строго говоря, не достаточно для перехода к пределу Хасьминского, включающему пространственное усреднение интегреренционной картины).

Систему уравнений переноса можно обосновать и при учете обратного рассеяния, но лишь в отсутствие отражения на конце волновода [7]. Однако, как показывают оценки, обратное рассеяние существенно ограничивает область применимости таких уравнений, которая оказывается совпадающей с областью применимости борновского приближения по коэффициентам обратного рассеяния. Другими словами, учет обратного рассеяния в рамках теории переноса в одномерном случае справедлив при тех же ограничениях, что и учет обратного рассеяния в борновском приближении. Этот вывод согласуется с результатами работ [8, 9], где проводилось прямое сравнение результатов теории переноса со строгими предельными оценками. С математической точки зрения указанный факт объясняется тем, что для краевой задачи, в которой не выполняется принцип причинности, разложение типа уравнения Дайсона (см. [7]) дает (при гауссовых флуктуациях) неравномерную по длине трассы L асимптотику решения при $L \rightarrow \infty$, поскольку в таком разложении содержатся секулярные члены, растущие с ростом L и не позволяющие перейти к пределу $L = \infty$. Поэтому, в частности, приведенные в [7] линейные уравнения для вторых моментов поля нужно рассматривать лишь как пример, полезный в методическом отношении.

Заметим, что если флуктуации зависят от времени, то область применимости одномерной теории переноса может оказаться значительно более широкой, в том числе и в случае обратного рассеяния, за счет конечности времени корреляции флуктуаций и причинности (по времени) системы уравнений, описывающих нестационарные флуктуации.

В заключение благодарю Ю. А Кравцова и М. Л. Левина, высказавших ряд полезных замечаний по данной заметке.

ЛИТЕРАТУРА

- Р. Б. Ваганов, Р. Ф. Матвеев, В. В. Мериакри, *Многомодовые волноводы со случайными нерегулярностями*, изд. Сов. радио, М., 1972
- М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 22, 225 (1977)
- W. E. Kohler, J. Math. Phys., 16, 356 (1975)
- G. C. Raapicolaou, J. Math. Phys., 13, 1912 (1972).
- P. З. Хасьминский, Теория вероятности и ее приложения, 11, 390 (1966)
- A Brissaud and U Frisch, J Math Phys., 15, 524 (1974)
- Л. Апресян, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 240 (1977)
- W. E. Kohler and G. C. Raapicolaou, J. Math. Phys., 14, 1742 (1973)
- Б. С. Абрамович, Ю. А. Рыжов, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Ростов-на-Дону, 1977, Тексты докладов, стр. 311

Х Р О Н И К А

ШКОЛА-СЕМИНАР ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ СВЧ

С 23 января по 6 февраля 1978 г. в Саратове проводилась 4-я зимняя школа-семинар по теоретической электронике СВЧ, которая была организована кафедрой электроники СГУ, НИИ механики и физики СГУ и Саратовским областным правлением НТОРЭС им. А. С. Попова. Большую помощь в организации школы-семинара оказали промышленные предприятия и администрации города. Основной задачей школы-семинара являлась информация молодых научных сотрудников и инженеров о проблемах и путях развития теории современной электроники СВЧ.

Центральным пунктом программы школы было одно из современных направлений электроники СВЧ — разработка и применение систем машинного проектирования электронных приборов СВЧ (СМП ЭВП СВЧ). Тематика школы охватывала как общие принципы построения СМП, так и математическое обеспечение ее отдельных блоков. В связи с этим значительное место в программе школы-семинара занял курс лекций по методам вычислительной электроники. Большое внимание было уделено экспериментальной проверке основных математических моделей и их применению к расчету конкретных приборов и узлов.

Традиционно в программу школы-семинара были включены также курсы лекций по наиболее современным проблемам электроники и радиофизики: приборы релятивистской электроники СВЧ; конкуренция колебаний в резонансных СВЧ генераторах; аналитический сигнал в теории колебаний и волн.

Были прочитаны разовые лекции по отдельным вопросам электроники СВЧ и заслушаны оригинальные доклады участников школы.

В работе школы-семинара принимали участие 128 человек из вузов и научных учреждений Москвы, Ленинграда, Горького, Саратова, Томска и Харькова. Более 20 участников школы были привлечены к чтению лекций.

За 12 дней работы школы-семинара прочитано 40 лекций и сделано 4 доклада. Проведена дискуссия «О роли ЭВМ в «забывании» физики». В лекциях, в основном, излагались новые, еще не опубликованные в периодической печати результаты исследований, подчеркивалась практическая значимость и обсуждалась перспектива их дальнейшего развития. Успешной работе школы-семинара способствовало издание лекционного материала к началу ее работы. Было издано 5 книг «Лекции по электронике СВЧ» объемом около 60 печатных листов.

Четкая организация лекций, семинаров и дискуссий в сочетании с активным отдыхом создавали творческую непринужденную атмосферу в работе школы, приводили к свободному обмену мнениями и способствовали общению и установлению личных контактов слушателей школы с ведущими учеными страны.

Периодическое проведение подобных школ-семинаров (первые три состоялись в 1970, 1972 и 1975 годах) стало для Саратова хорошей традицией и получило заслуженное признание и высокую оценку ведущих специалистов страны, руководителей предприятий и организаций, научных сотрудников и инженеров, принимавших участие в работе школ-семинаров.

По мнению всех участников школы-семинара и ее организаторов подобную форму повышения квалификации научных сотрудников и инженеров следует признать весьма целесообразной. Следующую школу-семинар по теоретической электронике намечено провести зимой 1981 года.

A. M. Кац.
