

## С О Д Е Р Ж А Н И Е

<b>Соболев Я. М.</b> Степенные распределения электронов и ионов в сильном магнитном поле . . . . .	1559
<b>Иткина М. А.</b> Интенсивность рентгеновского излучения Солнца и величина аномального поглощения радиоволн в периоды внезапных ионосферных возмущений . . . . .	1558
<b>Беллюстин Н. С.</b> О линейном взаимодействии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме . . . . .	1563
<b>Гершман Б. Н., Жмур Л. Е.</b> О влиянии силы тяжести на условия возникновения некоторых неустойчивостей в области $F$ ионосферы . . . . .	1572
<b>Бездродный В. Г., Блиох П. В., Фалькович И. С., Ямпольский Ю. М.</b> Отражение сверхдлинных волн от терминатора в волноводе Земля — ионосфера . . . . .	1582
<b>Гельберг М. Г., Волков Н. Н., Кукушкина Р. С.</b> Влияние слабых крупномасштабных неоднородностей авроральной ионосферы на распространение радиоволн КВ диапазона . . . . .	1591
<b>Кармов Х. Н.</b> Некоторые результаты экспериментальных исследований радиохарактеристик градовых облаков . . . . .	1597
<b>Миллер М. А., Пермитин Г. В., Фрайман А. А.</b> О влиянии фазовых флуктуаций волн на деформацию каустических поверхностей . . . . .	1603
<b>Воробьев В. В., Шеметов В. В.</b> О неустойчивости светового пучка и его распаде при тепловом самовоздействии в движущейся среде . . . . .	1610
<b>Кулагин Е. В., Пихтельев А. И., Соколов В. П., Фатеев Б. П.</b> Естественные флуктуации в квартцевом генераторе с АРУ . . . . .	1618
<b>Гурбатов С. Н., Шепелевич Л. Г.</b> Спектры шумовых разрывных волн . . . . .	1627
<b>Бараш Ю. С.</b> О моменте ван-дер-ваальсовых сил между анизотропными телами . . . . .	1637
<b>Короленко П. В., Маркова С. Н., Хапаев А. М.</b> О расчете дифракции лазерных пучков в ближней и дальней зонах . . . . .	1644
<b>Калинкевич А. А.</b> О влиянии диэлектрической пленки на свойства открытого резонатора Фабри—Перо . . . . .	1648
<b>Гаврилов В. М., Сазонов Д. М., Фролов Н. Я.</b> Расчет коэффициента отражения бесконечной фазированной антенной решетки зеркально-итерационным методом . . . . .	1653
<b>Курушин Е. П., Яцкарь Г. С.</b> Численный расчет характеристик волноводного вентиля-фланца миллиметрового диапазона . . . . .	1662
<b>Кеванишвили Г. Ш.</b> К теории волноводного тройника . . . . .	1669
<b>Немировский В. А.</b> Диагностика пристеночного участка плазмы посредством многомодового зондирования электромагнитными волнами . . . . .	1675
<b>Бажанов В. С., Марков Г. А.</b> Экспериментальное исследование влияния нелинейных эффектов на резонансное СВЧ поглощение в неоднородной плазме . . . . .	1685
<b>Ланда П. С., Пономарев Ю. В., Садовский В. Н.</b> Ионизационные волны (страты) в ограниченной низкотемпературной плазме . . . . .	1691
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Буров А. Б., Воронов В. Н., Красильников А. А., Мезенцев В. П.</b> Чувствительный радиометр диапазона волн 3—4 мм . . . . .	1702
<b>Глазов Г. Н., Тузова С. И.</b> О возможности когерентно-доплеровского определения спектра размеров аэрозоля в турбулентном потоке . . . . .	1703
<b>Пелиновский Е. Н., Степанянц Ю. А.</b> Линейное приближение в задачах о распространении импульсов в нелинейных средах . . . . .	1706
<b>Газазян Э. Д., Лазиев Э. М., Тер-Погосян А. Д.</b> Взаимодействие электромагнитной волны с движущейся в волноводе диэлектрической пластиной . . . . .	1709

## Информация

<b>Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XVIII, № 4, 1978 г.</b> . . . . .	1712
--	------

УДК 538.12 : 523.164

## СТЕПЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Я. М. Соболев*

Исследована возможность установления стационарных степенных распределений с постоянными потоками в системах из двух сортов частиц. Получено локальное распределение  $n_e = p_e^{3/2}$  для замагниченных электронов, взаимодействующих с ионами, которое может устанавливаться в магнитосферах пульсаров.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При объяснении особенностей излучения космических объектов, в частности степенной зависимости интенсивности от частоты, используются неравновесные распределения частиц по энергиям [1].

Среди неравновесных распределений наиболее универсальны и в значительной мере не зависят от детальных свойств источника — стационарные распределения с постоянными потоками, существующие в интервале пространства импульсов между источником и стоком [2, 3]. Как правило, механизм образования таких распределений — это соударения частиц с волнами [1, 4]. Однако в столкновительной плазме возможно установление неравновесных степенных распределений за счет соударений частиц [3]. Так, в системе заряженных частиц одного сорта, взаимодействующих по закону Кулона, устанавливается стационарное распределение  $n = E^{-5/4}$  ( $E$  — энергия частиц), соответствующее постоянному потоку энергии. Это распределение локально [3, 5] (т. е. на нем сходится интеграл столкновений (ИС), что означает малый вклад соударений с большими передачами импульса в формирование степенных распределений). Это позволяет находить стационарные распределения, обращающие в нуль ИС, не конкретизируя источника и стока, расположенных в областях больших и малых энергий.

Представляет интерес исследование степенных распределений в системе из двух взаимодействующих подсистем различных сортов частиц. Такое исследование системы кинетических уравнений для двух сортов свободных частиц проведено Кацем и Конторовичем (см. Приложение). Однако в этом случае распределения, обращающие в нуль ИС заряженных частиц, нелокальны, что показывает необходимость исследования, наряду с ИС, источников и стоков.

В настоящей работе показана возможность установления локальных степенных распределений в системе ионов и замагниченных электронов. Оказывается, что в сильном магнитном поле  $H$ , когда электроны находятся на нижнем уровне Ландау,

$$p_e^2 < 2m\hbar\Omega_e \equiv 2m^2c^2\frac{H}{H_0}, \quad H_0 = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \quad (1)$$

и движутся вдоль магнитного поля, а нерелятивистские ионы обладают энергией

$$E_i \gg \hbar \Omega_i = \frac{m}{M} mc^2 \frac{H}{H_0} \quad (2)$$

( $m$ ,  $M$  — электронная и ионная массы), достаточной для того, чтобы их движение можно было рассматривать как свободное, кулоновское взаимодействие приводит к установлению связанных локальных (см. разд. 3) степенных распределений электронов и ионов [6]. В магнитных полях  $H = 10^{12}$  Гс, которые существуют вблизи поверхности пульсаров [7], все нерелятивистские электроны удовлетворяют условию (1). Более энергичные электроны, которые высветили энергию поперечного движения, могут быть источником частиц на нижнем уровне Ландау.

В настоящее время одним из источников ускоренных частиц в Галактике считаются пульсары, поэтому представляет интерес выяснить, какие распределения частиц существуют в их магнитосферах.

Заметим также, что найденные распределения являются предельно анизотропными вследствие влияния магнитного поля, чем также отличаются от обсуждавшихся ранее изотропных и слабо анизотропных распределений [8].

## 2. СИСТЕМА КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Система кинетических уравнений в пространственно-однородном случае для нашей модели имеет вид

$$\dot{n}_e = I_{ei} \{n_e, n_i\}, \quad \dot{n}_i = I_{ie} \{n_i, n_e\} + I_{ii} \{n_i\}, \quad (3)$$

$n_e$ ,  $n_i$  — функции распределения электронов и ионов,  $I_{ei} \{n_e, n_i\}$  — ИС электронов с ионами.

Столкновения частиц описываются ИС Ленарда — Балеску — Силина с вероятностями перехода, вычисленными в борновском приближении на волновых функциях электронов, находящихся на нижнем уровне Ландау, и волновых функциях свободных ионов. Поляризация плазмы учитывается введением в матричный элемент взаимодействия диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega, k)$  [8].

В кинетическом уравнении для электронов отсутствует электрон-электронный ИС  $I_{ee} \{n_e\}$ , поскольку он тождественно равен нулю в случае одномерного движения. Действительно, в интересующем нас пространственно-однородном случае функция распределения электронов на нижнем уровне Ландау не зависит от  $p_x$  и  $n_e = n_e(p_z)$ . Законы сохранения энергии и импульса,  $p_2^2 + p_3^2 = p_z^2 + p_1^2$ ,  $p_2 + p_3 = p_z + p_1$ , разрешают лишь соударения, при которых  $p_2 = p_z$ ,  $p_3 = p_1$  либо  $p_2 = p_1$ ,  $p_3 = p_z$ . При таких соударениях «приходные» и «уходные» члены в  $I_{ee} \{n_e\}$  равны,  $n_e(p_2)n_e(p_3) = n_e(p_z)n_e(p_1)$  и ИС обращается в нуль.

Первое уравнение системы (3) в стационарном случае имеет вид

$$I_{ei} \{n_e, n_i\} = 0, \quad (4)$$

где

$$I_{el} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \int dp'_e dp_i dp'_i \delta \left( \frac{p'^2_i - p_i^2}{2M} + \frac{p'^2_e - p_e^2}{2m} \right) \times$$

$$\times \delta(p'_e + p'_{zi} - p_e - p_{zi}) \left| \frac{4\pi e_e e_i \hbar^2}{(p'_i - p_i)^2 \epsilon \left( \frac{p'^2_i - p_i^2}{2M\hbar}, \frac{p'_i - p_i}{\hbar} \right)} \right|^2 \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{(\mathbf{p}'_{i\perp} - \mathbf{p}_{i\perp})^2}{2m^2c^2} \frac{H_0}{H} \right] \{n_e(p'_e) n_i(p'_i) - n_e(p_e) n_i(p_i)\}, \quad (5)$$

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{4\pi e_e^2}{k^2} \int dp_e dp'_e \frac{n'_e - n_e}{E'_e - E_e - \hbar\omega} \exp \left( -\frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^2 c^2} \frac{H_0}{H} \right) \times \\ \times \delta(p'_e - p_e - \hbar k_z) - \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \int dp_i dp'_i \frac{n'_i - n_i}{E'_i - E_i - \hbar\omega} \delta(p'_i - p_i - \hbar k).$$

Решаем уравнение (4), используя однородность подынтегрального выражения в (5). Поскольку основной вклад дают соударения с малой передачей импульса, то полагаем  $\frac{(\mathbf{p}'_{i\perp} - \mathbf{p}_{i\perp})^2 H_0}{m^2 c^2 H} \ll 1$ , и тогда однородность матричного элемента взаимодействия  $-u_{ei}(\mathbf{p}'_i, \mathbf{p}_i) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{4\pi e_e e_i \hbar^2}{(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i)^2 \epsilon \left( \frac{E'_i - E_i}{\hbar}, \frac{\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i}{\hbar} \right)} \right|^2$  определяется однородностью диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Так, для незакранированного кулоновского взаимодействия показатель однородности матричного элемента  $m_{ei} = -4$ .

Стационарные степенные решения системы (3) ищем в виде

$$n_e = A_e |p_e|^{2s_e}, \quad n_i = A_i p_i^{2s_i}. \quad (6)$$

Факторизуем подынтегральное выражение в (5). Для этого воспользуемся преобразованиями симметрии из работы [2, 5], которые для ИС (5) сводятся к замене переменных, растягивающей область интегрирования в  $|\lambda| = |p_e/p'_e|$  раз:

$$q_e = \lambda p_e = \lambda^2 p'_e, \quad q_i = \lambda p_i, \quad q'_i = \lambda p'_i. \quad (7)$$

При распределениях (6) и в областях однородности матричного элемента взаимодействия  $u_{ei}\{\mathbf{p}'_i, \mathbf{p}_i\}$  ИС (5) принимает вид

$$I_{el} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp'_e dp_i dp'_i \delta(E'_e + E'_i - E_e - E_i) \delta(p'_e + p'_{zi} - p_e - p_{zi}) \times \\ \times u_{ei}(p'_i, p_i) \{1 - |\lambda|^{(2s_e + 2s_i + m_{el} + 5)}\} \{n'_e n'_i - n_e n_i\}. \quad (8)$$

Приравняв нуль выражение в первой фигурной скобке, получаем решения уравнения (4), отличные от равновесных. Первая фигурная скобка обращается в нуль за счет сохранения числа частиц, если показатели распределений  $s_e, s_i$  связаны уравнением

$$2s_e + 2s_i + m_{ei} + 5 = 0. \quad (9)$$

Покажем, что показатели, удовлетворяющие (9), соответствуют решениям с постоянным потоком электронов. Для этого запишем кинетическое уравнение (4) в виде уравнений непрерывности

$$\dot{n}_e = -\frac{dQ_e}{dp_e}, \quad E_e \dot{n}_e = -\frac{dP_e}{dp_e}, \quad (10)$$

определив потоки числа матриц  $Q_e$  и энергии  $P_e$  в импульсном пространстве как

$$\frac{dQ_e}{dp_e} \equiv - I_{ei} \{n_e, n_i\}, \quad \frac{dP_e}{dp_e} \equiv - E_e I_{ei} \{n_e, n_i\}. \quad (11)$$

ИС (8) можно записать в виде

$$I_{ei} = - |p_e|^{v_{ei}-1} F(v_{ei}) \quad (v_{ei} = 2s_e + 2s_i + m_{ei} + 5). \quad (12)$$

Функция  $F(v_{ei})$  обращается в нуль при выполнении равенства (9).

Подставив (12) в определения потоков, получаем

$$Q_e(p_e) = |p_e|^{v_{ei}} \frac{F(v_{ei})}{v_{ei}} \frac{p_e}{|p_e|}, \quad P_e(p_e) = |p_e|^{v_{ei}+2} \frac{F(v_{ei})}{v_{ei}+2} \frac{p_e}{|p_e|}. \quad (13)$$

Если показатели распределений связаны выражением (9), то

$$Q_e(p_e) = F'(v_{ei}) \equiv J_{0e} = \text{const}, \quad P_e(p_e) = 0, \quad (14)$$

т. е. поток электронов постоянен, а поток энергии электронов равен нулю. Подробнее потоки (14) рассматриваются в разд. 4. Здесь же отметим, что преобразования (7) не позволяют получить степенных решений с постоянным потоком энергии в случае ИС различных сортов частиц.

При написании ионного кинетического уравнения воспользуемся приближением свободного движения, так как энергии ионов подчиняются условию (2). Затем, решив уравнение

$$I_{ii} \{n_i\} = 0, \quad (15)$$

которое справедливо в случае, когда можно пренебречь ион-электронными столкновениями по сравнению с ион-ионными, т. е. при

$$|I_{ie} \{n_i, n_e\}| \ll |I_{ii} \{n_i\}|, \quad (16)$$

из (9) находим значения показателей  $s_e$ . Условия выполнения неравенства (16) получим ниже.

Уравнение (15) решено в [3]. Приведем это решение:

$$2s_i = - \frac{7 + m_{ii} - 2\nu}{2}, \quad (17)$$

$m_{ii}$  — показатель однородности матричного элемента взаимодействия ионов,  $\nu$  — индекс, определяющий соответствие распределения постоянному потоку ионов —  $J_{0i}$  ( $\nu = 0$ ) или постоянному потоку энергии ионов —  $J_{1i}$  ( $\nu = -1$ ).

Очевидно, (17) — это формальное решение уравнения (15). В (17) содержатся значения показателей распределений, при которых  $I_{ii}$  расходится. Физические решения, т. е. решения, при которых  $I_{ii}$  сходятся, определяются неравенствами [3]

$$-3 < 2s_i < -2. \quad (18)$$

Условию (18) удовлетворяет решение вида (6)

$$s_i = -\frac{5}{4}, \quad A_i = \left[ \frac{5}{(8\pi)^3} \right]^{1/2} \frac{1}{e^2 \Lambda_i^{1/2}} |J_{1i}|^{1/2}, \quad (19)$$

соответствующее постоянному потоку энергии ионов  $J_{1i}$ , направленному в сторону малых импульсов, и которое устанавливается при неэкранированном кулоновском взаимодействии,  $m_{ii} = -4$ ,  $\Lambda_i = \ln \frac{1}{n} \left( \frac{\bar{E}_i}{e_i^2} \right)^3$  — кулоновский логарифм.

Распределения, удовлетворяющие неравенствам (18), локальны [3]. При этих распределениях основной вклад в ИС (15) вносят столкновения ионов со сравнимыми импульсами, и поэтому при решении уравнения (15) можно не рассматривать областей источника и стока.

### 3. СХОДИМОСТЬ ЭЛЕКТРОН-ИОННОГО ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ

Чтобы выделить локальные распределения в (9), исследуем сходимость  $I_{ei}$  в областях малых и больших импульсов, где из-за степенного характера функций распределения могут возникать расходимости. Таких областей четыре. Законы сохранения энергии и импульса допускают: обращение в нуль одного (область I) или двух (область II) импульсов; либо обращение в бесконечность двух (область III) или трех импульсов (область IV). Будем исследовать расходимости ИС, связанные с расходимостью функций распределения в этих областях, не рассматривая особенностей ИС, связанных с матричным элементом взаимодействия.

В области I сходимость  $I_{ei}\{n_e, n_i\}$  определяется выражениями

$$\int_{p_i \rightarrow 0} d\mathbf{p}_i n_i(p_i), \quad \int_{|p'_e| \rightarrow 0} d\mathbf{p}'_e n_e(p'_e), \quad (20)$$

из которых получаем условия для показателей распределений:

$$3 + 2s_i > 0, \quad 1 + 2s_e > 0. \quad (21)$$

В области II ( $p_i, p'_i \ll |p_e|, |p'_e|$ )  $I_{ei}$  приводим к виду

$$I_{ei} \sim \int d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}'_i \delta \left( E_i - E'_i - q_z \frac{dE_e}{dp_e} - \frac{q_z^2}{2} \frac{d^2 E_e}{dp_e^2} \right) u_{ei}(p'_i, p_i) \times \\ \times \left\{ n_e(n_i - n'_i) - q_z \frac{dn_e}{dp_e} n'_i - \frac{q_z^2}{2} \frac{d^2 n_e}{dp_e^2} n'_i \right\}, \quad (22)$$

$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}'_i$ . Подсчетом степеней  $p_i, p'_i$  для неэкранированного кулоновского взаимодействия получаем условие сходимости интеграла (22):

$$3 + 2s_i > 0. \quad (23)$$

Экранировка,  $\epsilon(0, \mathbf{q}) \sim 1 + (qr_B)^{-2}$ , приводит к улучшению сходимости (22) и устраняет кулоновскую расходимость ИС при малых передачах импульса.

Если выполняется неравенство  $p_i, |p'_e| \ll |p_e|, p'_i$ , то (23) заменяется условиями

$$4 + 2s_i > 0, \quad 4 + 2s_e > 0. \quad (24)$$

В области III ( $p_i, p'_i \gg |p_e|, |p'_e|$ ), когда  $|p'_i - p_i| \ll p_i$ , ограничиваясь в ИС главным членом по разности  $\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i = \mathbf{k}$ , получаем

$$I_{ei} \sim \int dk u_{ei}(\mathbf{k}) \int_{p_i \rightarrow \infty} d\mathbf{p}_i \delta(\mathbf{kp}) n_i(p_i) n_e(p_e). \quad (25)$$

Это выражение дает нам условие

$$2 + 2s_i < 0. \quad (26)$$

Если  $|p'_i - p_i| \sim p_i$ , то (26) заменяется более слабым неравенством

$$-1 + 2s_i < 0. \quad (27)$$

Условие для показателя  $s_e$  в области III ( $|p'_e|, p_i \gg |p_e|, p'_i$ ) имеет вид

$$-3 + 2s_e < 0. \quad (28)$$

Аналогично находим ограничения на показатели распределений в области IV ( $|p'_e|, p_i, p'_i \gg |p_e|$ ):

$$s_e + s_i < 0, \quad 2s_i < 0. \quad (29)$$

Объединив (21), (23), (24), (26) — (29), получаем условия сходимости электрон-ионного ИС  $I_{ei}\{n_e, n_i\}$ :

$$-3 < 2s_i < -2, \quad -1 < 2s_e < 3, \quad s_e + s_i < 0. \quad (30)$$

Среди распределений (9), (19) условиям сходимости (30) удовлетворяет лишь распределение с показателем

$$2s_e = 3/2, \quad (31)$$

устанавливающееся при неэкранированном кулоновском взаимодействии,  $m_{ei} = -4$ .

#### 4. НОРМИРОВКА ЛОКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выражение (14) позволяет определить постоянную  $A_e$  для показателя (31) через постоянный поток электронов  $J_{0e}$  в пространстве импульсов. Чтобы найти его, воспользуемся ИС в форме Ландау:

$$I_{ei} = 2\pi\Lambda_e(e_i e_e)^2 M \frac{d}{dp_e} \int dp_i \frac{p_e v_{i\perp}^2}{[v_{i\perp}^2 + (v_{zi} - v_e)^2]^{3/2}} \times \\ \times \left\{ \frac{n_i}{Mp_e} \frac{dn_e}{dp_e} - \frac{n_e}{mp_i} \frac{dn_i}{dp_i} \right\}, \quad (32)$$

$\Lambda_e = \ln \frac{r_D}{a_m}$  — кулоновский логарифм, в который в качестве минимального прицельного расстояния входит магнитная длина  $a_m^2 = \frac{2\hbar c}{|e_e|H}$ .

Подставив в (32) распределения (6) и интегрируя, получаем

$$I_{ei} = -16\pi(e_i e_e)^2 \Lambda_e A_e A_i \left\{ m \left( \frac{M}{m} \right)^{3+2s_i} (2s_i + 2s_e + 1) |p_e|^{2s_i+2s_e} \times \right. \\ \times \left[ \frac{2s_e}{(2+2s_i)(5+2s_i)} - \frac{m}{M} \frac{1}{3+2s_i} \right] + \frac{M}{3} \frac{d}{d|p_e|} |p_e|^{2s_i+2s_e+1} \times \\ \times \left[ \frac{2s_e}{(2+2s_i)} \left( \frac{p_2}{|p_e|} \right)^{2+2s_i} - \frac{M}{m} \left( \frac{p_2}{|p_e|} \right)^{2s_i} + \left( \frac{m}{M} \right)^2 \frac{1}{3+2s_i} \times \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{p_1}{|p_e|} \right)^{3+2s_i} - \left( \frac{m}{M} \right)^3 \frac{2s_e}{5+2s_i} \left( \frac{p_1}{|p_e|} \right)^{5+2s_i} \right] \right\}, \quad (33)$$

$p_1, p_2$  — минимальный и максимальный импульсы степенного распределения  $n_i$ . Из (33) видна локальность распределений (19), (31), т. е. сходимость (33) при  $p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow \infty$ .

Подставив (33) в определение потоков (11), получаем в случаях (19), (31)

$$J_{0e} = -\frac{3}{5}(8\pi)^2(e_i e_e)^2 \Lambda_e (mM)^{1/2} A_i A_e \frac{p_e}{|p_e|}. \quad (34)$$

Поток числа электронов (34) постоянен и направлен в сторону малых (абсолютных) значений импульса электронов. Поток энергии электронов при (19), (31) равен нулю. Выражения (19), (34) определяют константу  $A_e$  через постоянные потоки числа электронов и энергии ионов:

$$A_e = \frac{1}{3} \left( \frac{5}{8\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{e_i}{e_e} \right)^2 \frac{1}{(mM)^{1/2}} \frac{|J_{0e}|}{|J_{1i}|^{1/2}} \frac{\Lambda_i^{1/2}}{\Lambda_e}. \quad (35)$$

Зная электронное (31), (35) и ионное (19) распределения, получим условия выполнения неравенства (16). Для этого сравним значения ион-электронного ИС  $I_{ie}$ , явный вид которого получается из (5) заменой  $dp'_e dp_i dp'_i$  на  $dp'_i dp_e dp'_e$ , с величиной «приходной» (или «уходной») части ион-ионного ИС  $I_{ii}$ .  $I_{ie}$  расходится в случае (31), поэтому в оценки войдет значение предельного импульса для нашей модели (1),  $p_e^{\max} = mc \left( 2 \frac{H}{H_0} \right)^{1/2}$ . Пусть  $p_i = \delta \left( Mmc^2 2 \frac{H}{H_0} \right)^{1/2}$ , тогда при  $\delta < (m/M)^{1/6}$  неравенство (16) выполняется, если

$$\frac{|J_{1i}|}{|J_{0e}|} \frac{p_i^2}{M} \gg \delta^{2/3} \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e_i}{e_e} \right)^2 \left( \frac{m}{M} \right)^{5/4}. \quad (36)$$

При  $\delta > (m/M)^{1/6}$  условие (36) заменяется неравенством

$$\frac{|J_{1i}|}{|J_{0e}|} \frac{p_i^2}{M} \gg \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e_i}{e_e} \right)^2 \frac{m}{M}. \quad (37)$$

При выполнении неравенства (36) или (37) ионные распределения устанавливаются за счет ион-ионных соударений (если уровень турбулентности достаточно низок, чтобы можно было пренебречь столкновениями частиц с плазмонами [1]).

Таким образом, в сильном магнитном поле, например вблизи поверхности пульсаров, кулоновские соударения могут приводить к установлению связанных степенных распределений электронов и ионов (19), (31); (35) с потоками по спектру. Возможность реализации описанного механизма формирования связанных степенных распределений имеется там, где существенные соударения одномерно движущихся частиц с изотропно распределенными частицами другого сорта.

Автор выражает благодарность В. М. Конторовичу за постановку задачи и руководство работой, А. В. Кацу за обсуждение результатов.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ\*

##### Степенные распределения в системе из двух сортов частиц

Рассмотрим систему, описываемую кинетическими уравнениями

$$\dot{n}_a = \sum_b I_{ab} \{n_a, n_b\} \quad (a, b = 1, 2) \quad (\text{П.1})$$

\* Исследование принадлежит А. В. Кацу и В. М. Конторовичу.

с интегралами столкновений

$$I_{ab} = \int d\tau_{ab} w_{ab} f_{ab}, \quad d\tau_{ab} = dp_{2a} dp_{1b} dp_{3b}, \quad f_{ab} = n_{2a} n_{3b} - n_a n_{1b}, \quad (\text{П.2})$$

$$w_{ab} = u_{p_{2a} p_{3b} | p_a p_{1b}}^{ab} \delta(p_a + p_{1b} - p_{2a} - p_{3b}) \delta(E_a + E_{1b} - E_{2a} - E_{3b}).$$

При этом

$$w_{p_{2a} p_{3b} | p_a p_{1b}} = w_{p_{3b} p_{2a} | p_{1b} p_a} = w_{p_a p_{1b} | p_{2a} p_{3b}}, \quad (\text{П.3})$$

$$E_a(\lambda p) = \lambda^{\beta_a} E_a(p), \quad u_{\lambda p}^{ab} = \lambda^{m_{ab}} u_p^{ab}.$$

Ищем степенные решения вида  $n_a = A_a E^{\gamma_a}$ . Воспользовавшись преобразованиями симметрии из работы [2], факторизуем ИС. Получаем

$$I_{aa} = \frac{E^{\gamma_{aa}}}{4} \int d\tau_{aa} w_{aa} f_{aa} (E^{-\gamma_{aa}} + E_1^{-\gamma_{aa}} - E_2^{-\gamma_{aa}} - E_3^{-\gamma_{aa}}), \quad (\text{П.4})$$

$$\gamma_{aa} = 2s_a - 1 + \frac{1}{\beta_a} (m_{aa} + 9).$$

В отличие от (П.4) для перекрестных ИС с  $a \neq b$  ( $\beta_a = \beta_b = \beta$ )

$$I_{ab} = \frac{E^{\gamma_{ab}}}{2} \int d\tau_{ab} w_{ab} f_{ab} (E^{-\gamma_{ab}} - E_2^{-\gamma_{ab}}), \quad (\text{П.5})$$

$$\gamma_{ab} = s_a + s_b - 1 + \frac{1}{\beta} (m_{ab} + 9).$$

Видно, что ИС (П.4), описывающий столкновения в системе частиц одного сорта, допускает решения с постоянным потоком числа частиц ( $\gamma_{aa} = 0$ ) и энергии ( $\gamma_{aa} = -1$ ). ИС (П.5) допускает лишь решения с постоянным потоком числа частиц в пространстве импульсов ( $\gamma_{ab} = 0$ ).

Для показателей распределений  $s_a$  получаем систему уравнений

$$s_a + s_b - 1 + \frac{1}{\beta} (m_{ab} + 9) = \gamma_{ab}, \quad \gamma_{aa} = 0, -1, \quad \gamma_{ab}(a \neq b) = 0 \quad (\text{П.6})$$

$$(a, b = 1, 2),$$

условия совместности которой имеют вид

$$m_{ab} = m_{ba}, \quad m_{ab} = \frac{1}{2} (m_{aa} + m_{bb}) - \gamma_{aa} - \gamma_{bb} \quad (a \neq b). \quad (\text{П.7})$$

При выполнении условий (П.7) получаем решения системы (П.6):

$$s_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta} (m_{aa} + 9) + \frac{\gamma_{aa}}{2} \quad (a = 1, 2). \quad (\text{П.8})$$

Решение системы кинетических уравнений (П.1) упрощается в случае различных скоростей процессов. Так, при выполнении неравенств  $I_{bb} \gg I_{ba}$ ,  $I_{ab} \gg I_{aa}$  имеются два решения, соответствующие постоянному потоку частиц и энергии в системе  $b$ .

Проведенное исследование показывает, что в системах из двух сортов частиц могут устанавливаться стационарные степенные распределения, если показатели однородности матричных элементов связаны соотношением (П.7). Локальность получаемых распределений зависит от конкретного вида взаимодействия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Плазменная астрофизика, изд. Наука, М., 1972.
2. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 511 (1974).
3. А. В. Кац, В. М. Конторович, С. С. Моисеев, В. Е. Новиков, Письма в ЖЭТФ, 21, 13 (1975); ЖЭТФ, 71, № 7, 177 (1976).
4. В. И. Бодман, А. В. Кац, В. М. Конторович, ДАН СССР, 220, № 5, 1053 (1975).
5. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51, № 8, 688 (1966).
6. Я. М. Соболев, Тезисы докл. конф. по галактической и внегалактической радиоастрономии, Харьков, 1976.
7. J. H. Taylor and R. N. Manchester, Astron. J., 80, № 10, 794 (1975).
8. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 42, № 3, 896 (1962).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
18 июля 1977 г.

**POWER DISTRIBUTION OF ELECTRONS AND IONS IN A STRONG MAGNETIC FIELD**

*Ya. M. Sobolev*

The possibility is investigated of stationary power distribution formation with constant fluxes in systems consisting of two types of particles. The local distribution  $n_e = p_e^{3/2}$  which may be established in the pulsar magnetospheres has been obtained for magnetized electrons interacting with ions.

УДК 621.371.25

## ИНТЕНСИВНОСТЬ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА И ВЕЛИЧИНА АНОМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ПЕРИОДЫ ВНЕЗАПНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

*M. A. Иткина*

Получена экспериментальная статистическая зависимость между интенсивностью рентгеновского излучения Солнца в диапазоне  $1-8 \text{ \AA}$  ( $I_{1-8}$ ) и величиной аномального поглощения радиоволн на частоте  $f = 13 \text{ МГц}$  ( $\Gamma_{13}$ ) в периоды внезапных ионосферных возмущений. Эта зависимость имеет вид  $\Gamma_{13} \sim I_{1-8}^{0.8} \cos \chi$  и может быть использована для оперативной классификации вспышек рентгеновского излучения. Ее характер объясняется уменьшением коэффициента потерь электронов с ростом интенсивности рентгеновского излучения.

Во время внезапных ионосферных возмущений (ВИВ) возникает дополнительное (аномальное) поглощение радиоволн, проходящих через ионосферу. Источником дополнительной ионизации  $D$ -области ионосферы в периоды ВИВ является рентгеновское излучение солнечных вспышек. В настоящей работе устанавливается связь между интенсивностью рентгеновского излучения, ответственного за ионообразование на высотах  $D$ -области во время ВИВ, и величиной аномального поглощения радиоволн, которая является интегральной мерой дополнительной концентрации электронов в нижней ионосфере. Анализируется влияние на полученную зависимость изменений коэффициента потерь электронов и спектра рентгеновского излучения. Предпринята также попытка обнаружить сезонные вариации величин поглощения. В качестве исходного экспериментального материала использованы результаты измерений методом  $A_2$  аномального поглощения радиоволн на частоте  $f = 13 \text{ МГц}$ , полученные в г. Горьком.

За период с 1969 по 1974 гг. было зарегистрировано около 300 случаев ВИВ. Примерно для половины из них имеются сведения об измеренных на спутниках потоках рентгеновского излучения Солнца в диапазонах  $\lambda \sim 0,5 \div 3 \text{ \AA}$ ,  $1 \div 8 \text{ \AA}$  и  $8 \div 20 \text{ \AA}$  [1]. Данные спутниковых измерений в коротковолновом диапазоне  $0,5-3 \text{ \AA}$  в большинстве случаев искажены из-за насыщения счетчиков. Результаты, относящиеся к диапазонам  $1-8 \text{ \AA}$  и  $8-20 \text{ \AA}$ , в этом отношении более надежны. Однако и они даны в [1] с недостаточно хорошим временным разрешением. Поэтому детальное сопоставление временного хода поглощения и характеристик рентгеновского излучения оказалось возможным только в нескольких отдельных случаях. Основные результаты, представленные в настоящей работе, получены путем сопоставления величин аномального поглощения радиоволн на частоте  $f = 13 \text{ МГц}$  ( $\Gamma_{13}$ ), измеренных в моменты максимумов ВИВ, с соответствующими значениями максимальных потоков рентгеновского излучения в диапазоне

$1 - 8\text{ \AA}$  ( $I_{1-8}$ )\*. Случаи, когда отмечалось очень быстрое возрастание и спад рентгеновского излучения в течение нескольких минут (острый максимум), не рассматривались\*\*.

Для исключения влияния зенитных углов Солнца весь массив данных был разделен на 5 групп, которым соответствовали значения  $\cos \chi$ , указанные в табл. 1.

Таблица 1

Номер группы	1	2	3	4	5
$\cos \chi$	$> 0,75$	$0,65 - 0,75$	$0,5 - 0,65$	$0,35 - 0,5$	$< 0,35$
$\chi^\circ$	$< 40$	$40 - 50$	$50 - 60$	$60 - 70$	$> 70$

Большая часть полученных нами данных относится к весеннему и летнему периодам. Зимних и осенних ВИВ оказалось немного. При классификации данных по зенитным углам Солнца все зимние и часть осенних событий попали в пятую группу.

Экспериментальная зависимость максимальных величин аномального поглощения  $\Gamma_{13}$  от соответствующих значений  $I_{1-8}$  для каждой из пяти групп данных представлена на рис. 1. Точки на рис. 1 соответствуют весенним месяцам, крестики — летним, треугольники — осенним, квадраты — зимним. Усредненная зависимость  $\Gamma_{13}$  от  $I_{1-8}$ , найденная без учета сезонных вариаций, показана для каждой из первых четырех групп линиями 1—4. Характерно, что кривые 1—4 не обнаруживают изменения наклона (или тенденций к насыщению) даже при достаточно высоких значениях потоков  $I_{1-8}$ . Аналитически усредненная экспериментальная зависимость  $\Gamma_{13}$  от  $I_{1-8}$  для случаев, когда  $\chi < 70^\circ$ \*\*\*, может быть представлена простым соотношением

$$\Gamma_{13} \sim I_{1-8}^n \cos^k \chi, \quad (1)$$

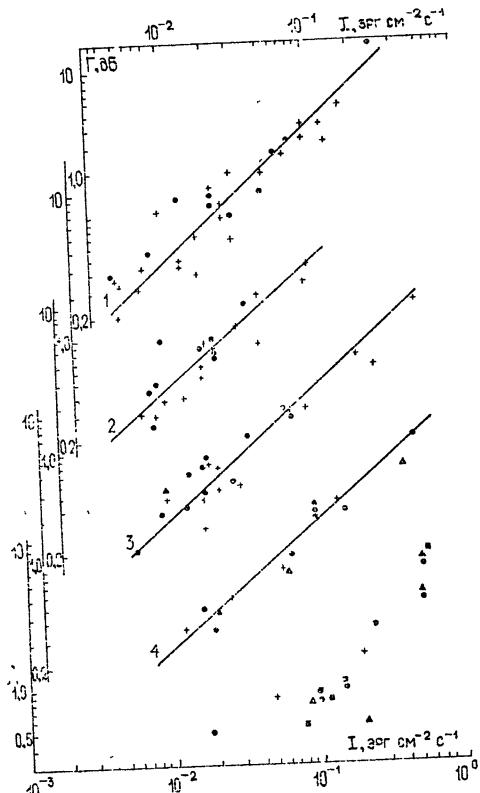


Рис. 1.

\* Данные диапазона  $8 - 20\text{ \AA}$  использованы нами при классификации вспышек по характеру спектра рентгеновского излучения на сравнительно мягкие ( $I_{1-8}/I_{8-20} < 0,4$ ) и жесткие ( $I_{1-8}/I_{8-20} > 0,4$ ) — см. об этом ниже.

\*\* В этих случаях наблюдалось систематическое занижение величин  $\Gamma_{13}$ , которое легко объяснить временным запаздыванием значений  $\Gamma_{13}(t)$  относительно  $I_{1-8}(t)$  из-за нарушения равновесных условий.

\*\*\* При  $\chi > 70^\circ$  следует заменить  $\cos \chi$  функцией Чепмэна,

где  $n = 0,8 \div 0,9$ ,  $k = 1 \div 1,1$ . Напомним, что наиболее часто встречающиеся величины « $k$ », полученные по измерениям аномального поглощения в средних и высоких широтах, находились в интервале 0,9—1,2 [2].

Обратим внимание на то, что соотношение (1) дает возможность при известных зенитных углах Солнца установить соответствие между величинами потоков рентгеновского излучения солнечных вспышек и аномального поглощения радиоволн в ионосфере. Согласно принятой классификации солнечные рентгеновские вспышки делятся на классы  $C$ ,  $M$  и  $X$  [3]. Характерные принятые для этих классов величины потоков рентгеновского излучения  $I_{1-8}$ , а также ориентировочные значения аномального поглощения  $\Gamma_{13}$ , полученные нами на основании экспериментальных данных, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Класс вспышки	$C$	$M$	$X$
$I_{1-8}$ , $\text{эр} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	$1 \cdot 10^{-3} \div 9 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2} \div 9 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1} \div 9 \cdot 10^{-1}$
$\Gamma_{13} \cos^{-1} \chi, \text{дБ}$	$< 0,6$	$0,6 \div 5$	$> 5$

Таким образом, по измерениям величины аномального поглощения радиоволн в максимальной фазе ВИВ можно (при известном зенитном угле) определять класс рентгеновской солнечной вспышки.

Проанализируем соотношение (1), исходя из общих представлений о балансе ионизации области  $D$ . Функция ионообразования  $Q(h)$  в периоды ВИВ зависит от интенсивности и спектра рентгеновского излучения. Можно полагать, что на высотах, где в основном поглощаются радиоволны частоты  $f = 13 \text{ МГц}$ ,  $Q(h)$  определяется соотношением

$$Q(h) \sim I_{1-8} q(F, h). \quad (2)$$

Здесь  $q(F, h)$  характеризует зависимость  $Q(h)$  от спектра рентгеновского излучения  $F(E)$ . В квазиравновесных условиях величина аномального поглощения радиоволн находится из уравнения

$$\Gamma = \int [Q(h)/\psi(h)]^{0.5} K(h) dh, \quad (3)$$

где  $K(h)$  — дифференциальное поглощение, соответствующее единичной электронной концентрации,  $\psi(h)$  — коэффициент потерь электронов. Подстановка (2) в (3) дает

$$\Gamma_{13} \sim I_{1-8}^{0.5} \int [q(F, h)/\psi(h)]^{0.5} K(h) dh. \quad (4)$$

При сопоставлении (4) и (1) обращает на себя внимание существенное отличие показателя « $n$ » в (1) от 0,5. Это отличие можно объяснить возрастанием интегрального сомножителя в (4) с ростом  $I_{1-8}$ . Величина этого сомножителя может возрастать по следующим причинам: а) с ростом  $I_{1-8}$  уменьшается коэффициент потерь электронов  $\psi(h)$  в области аномальной ионизации; б) рост  $I_{1-8}$  сопровождается увеличением жесткости спектра  $F(E)$ , и область аномальной ионизации несколько смещается по высоте вниз, где  $K(h)$  резко возрастает\*, а величина  $\psi(h)$  существенно не изменяется.

\* Для частоты  $f = 13 \text{ МГц}$  максимальное значение  $K(h)$  достигается на высоте  $h \lesssim 60 \text{ км}$ . Выше этого уровня  $K(h)$  экспоненциально спадает с высотой,

На эффекты уменьшения  $\phi(h)$  на высотах  $D$ -области с ростом интенсивности во время возмущений обращалось внимание в работах [4–10].

Указанием на возможное изменение характера спектра с ростом  $I_{1-8}$  служат результаты классификации анализируемых вспышек по величине отношения  $I_{1-8}/I_{8-20}$ . Оказалось, что слабые и умеренные возмущения соответствуют вспышкам с относительно мягким спектром ( $I_{1-8}/I_{8-20} < 0,4$ ), а для сильных ВИВ характерен сравнительно жесткий спектр ( $I_{1-8}/I_{8-20} > 0,4$ ). К сожалению, мы не располагаем надежными сведениями об изменениях жесткости спектра в коротковолновом диапазоне рентгеновского излучения ( $\lambda = 0,5 \div 3 \text{ \AA}$ ), ответственного за ионизацию нижней части области  $D$ . Поэтому предположение о влиянии изменений спектра на зависимость  $\Gamma_{13}$  от  $I_{1-8}$  представляется недостаточно обоснованным. В этой связи интересно рассмотреть результаты измерений, полученные нами в течение спадающей фазы пяти достаточно длительных интенсивных ВИВ. Два из них (5.6.69 и 20.7.70) происходили при зенитных углах  $\chi \approx 40 \div 50^\circ$ . Остальным трем вспышкам (24.11.69, 11.2.70, 27.3.69) соответствовали  $\chi \approx 75 \div 80^\circ$ .

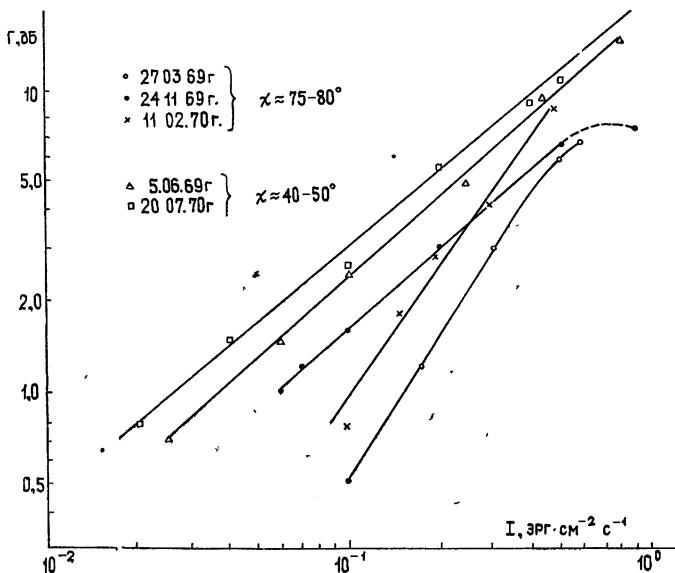


Рис. 2.

Значения интенсивности  $I_{1-8}$  в максимуме этих вспышек составляли более  $5 \cdot 10^{-1} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Спад  $I_{1-8}(t)$  до  $(2 \div 5) \cdot 10^{-2} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  происходил в течение 40–60 минут. Изменений характера спектра для вспышек 5.6.69, 20.7.70 и 24.11.70 в первом приближении не обнаружено. Во время спада возмущений 27.3.69 и 11.2.70 заметно смягчение спектра. В этих пяти случаях удалось детально сопоставить  $\Gamma_{13}$  с  $I_{1-8}$  в течение спадающей фазы ВИВ. Зависимость  $\Gamma_{13}$  от  $I_{1-8}$  для каждого из этих событий показана на рис. 2. В случаях, когда спектр рентгеновского излучения практически не изменялся, данные индивидуальных событий приводят к такой же зависимости  $\Gamma_{13}$  от  $I_{1-8}$ , как и усредненные результаты. Для возмущений, спектр которых смягчался в течение спадающей фазы, показатель  $n$  в соотношении (1) увеличивается примерно до 1,4. Можно предположить, что в этих случаях величины

интегрального поглощения в периоды спада ВИВ уменьшались как за счет увеличения  $\psi(h)$ , так и за счет смягчения спектра.

Таким образом, отличие показателя  $n$  в (1) от 0,5 можно объяснить уменьшением коэффициента потерь электронов с ростом интенсивности ионизирующего излучения.

В двух из рассмотренных здесь случаев (24.11.69 и 27.3.69) намечается замедление роста поглощения  $\Gamma_{13}$  с интенсивностью  $I_{1-8}$ . Возможно, это указывает на прекращение спада  $\psi$  при  $I_{1-8} > 5 \cdot 10^{-1}$  эрг·см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$ \*. Очевидно, вариации  $\psi$  проявляются в широком диапазоне изменений потоков рентгеновского излучения  $I_{1-8}$  (от  $\sim (2 \div 3) \cdot 10^{-3}$  до  $\sim 5 \cdot 10^{-1}$  эрг·см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$ ).

Попытка проанализировать сезонные вариации величин поглощения сводилась к выявлению весенне-летних различий, поскольку, как уже отмечалось выше, зимних и осенних случаев было немного. В каждой из первых четырех групп весенние значения поглощения  $\Gamma_{13}$  во время слабых ВИВ ( $I_{1-8} < 5 \cdot 10^{-2}$  эрг·см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$ ) оказались в целом несколько выше летних. Это различие наиболее заметно при  $\chi = 40 \div 60^\circ$  и составляет 20—30%. Такие изменения можно объяснить вариациями коэффициента потерь электронов, связанными с сезонными изменениями плотности малых нейтральных составляющих ионосферы.

Выражаю благодарность Е. А. Бенедиктову, В. В. Беликовичу за внимание к работе и критическое обсуждение ее результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Solar Geophysical Data, ESSA Res. Lab. Boulder, 1969—1974.
2. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Изв. вузов — Радиофизика, 16, 840 (1973).
3. Наблюдения и прогноз солнечной активности, изд. Мир, М., 1976, стр. 291.
4. J. N. Row et al., J. Atm. Terr. Phys., 32, 1609 (1970).
5. S. D. Deshpande and A. P. Mitra, J. Atm. Terr. Phys., 34, 243 (1972).
6. A. P. Mitra and J. N. Row, J. Atm. Terr. Phys., 34, 795 (1972).
7. A. P. Mitra, J. Atm. Terr. Phys., 37, 895 (1975).
8. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Изв. вузов — Радиофизика, 17, 1469 (1974).
9. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Изв. вузов — Радиофизика, 19, 174 (1976).
10. М. А. Иткина, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 6 (1978).

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
25 октября 1977 г.

#### INTENSITY OF X-RAY SOLAR RADIATION AND THE VALUE OF ANOMALOUS RADIO WAVE ABSORPTION IN THE PERIODS OF SUDDEN IONOSPHERIC DISTURBANCES

*M. A. Itkina*

An experimental statistical dependence is obtained between the intensity of X-ray solar radiation in the range 1—8 Å ( $I_{1-8}$ ) and the value of anomalous radio wave absorption at the frequency  $f=13$  MHz ( $\Gamma_{13}$ ) in the periods of sudden ionospheric disturbances. This dependence has the form  $\Gamma_{13} \sim I_{1-8}^{0.8} \cos \chi$  and may be used for operative classification of bursts of X-ray radiation. Its character is explained by the decrease of the coefficient of the electron loses with the growth of the X-ray radiation intensity.

\* Согласно данным Митра [7], предельное значение интенсивности  $I_{1-8}$ , при котором прекращался спад величин  $\psi$  во время ВИВ на высотах 70—80 км, составляло  $5 \cdot 10^{-2}$  эрг·см $^{-2} \cdot$ с $^{-1}$ ,

УДК 621.371.25

## О ЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*H. С. Беллюстин*

В работе изложен асимптотический метод, позволяющий разбить исходные уравнения для полей в плоскослоистой плазме на две независимые системы, каждая из которых описывает волны различных типов, распространяющихся в одном направлении. Коэффициенты полученных уравнений остаются регулярными в точках, где равны друг другу показатели преломления нормальных волн  $n_1 = n_2$ . Уравнения используются для анализа конкретного типа взаимодействия, который сейчас привлекает внимание в связи с исследованиями низкочастотных волн в ионосфере. Методом эталонной системы найдено решение, описывающее поле в области взаимодействия, а вне этой области переходящее в решение геометрической оптики. Коэффициенты трансформации волн сравниваются с полученными ранее методом фазовых интегралов.

Если параметры плазмы мало изменяются на длине волны, для решения волнового уравнения используется приближение геометрической оптики, в котором за основу берутся нормальные волны однородной среды [1]. В областях, где фазовые скорости и поляризации волн становятся одинаковыми, геометрооптическое решение неприменимо — здесь происходит линейное взаимодействие (трансформация) волн, которое играет важную роль при распространении в ионосфере, космической и лабораторной плазме [1–3].

Трансформация двух волн в плоскослоистой плазме приближенно описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В [4] были найдены уравнения для амплитуд нормальных волн, которые затем широко использовались [1, 2]. Однако в последнее время отмечались недостатки этих уравнений, связанные с резким изменением их коэффициентов в области взаимодействия. Для случая слабоанизотропной плазмы более удобные уравнения были получены в работе [5]. Предпринимались также попытки вывести более общие уравнения такого типа (см. [6, 7]). Эта задача решается в первой части настоящей работы; во второй части полученные уравнения применяются для исследования конкретного типа взаимодействия.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

Пусть ось  $z$  системы координат направлена вдоль градиента плазменных параметров, внешнее магнитное поле составляет угол  $\theta$  с осью  $z$ , а его проекция на плоскость  $xy$  образует угол  $\varphi$  с осью  $y$ . Будем рассматривать волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ . Исходные уравнения для гармонических ( $e^{-i\omega t}$ ) полей удобно записать в матричной форме (см. [6]):

$$\hat{\vec{E}}' = ik_0 \hat{T} \hat{\vec{E}}, \quad (1.1)$$

где  $\hat{\vec{E}}$  — матрица-столбец из элементов  $E_x, E_y, H_y, -H_x$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  —

скорость света, штрих означает  $d/dz$ ,  $\hat{T}$  — квадратная матрица  $4 \times 4$ , которую можно записать в виде

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{t} & \hat{0} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

При этом матрицу  $\hat{t}$  будем представлять следующим образом:

$$\hat{t} = \alpha \hat{1} + \beta \hat{\tau}_1 + \gamma \hat{\tau}_2 + \delta \hat{\tau}_3. \quad (1.3)$$

В (1.2) и (1.3) используются известные обозначения для простейших матриц  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \hat{0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\tau}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\tau}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\tau}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а коэффициенты разложения (1.3) выражаются через параметры плазмы по формулам

$$\alpha = \frac{2\epsilon\eta - (\epsilon\eta - \epsilon^2 + g^2) \sin^2 \theta}{2(\epsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}, \quad \beta = \frac{(\epsilon\eta - \epsilon^2 + g^2) \sin^2 \theta}{2(\epsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)} \sin 2\varphi, \quad (1.5)$$

$$\gamma = -\frac{\eta g \cos \theta}{\epsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta}, \quad \delta = -\frac{(\epsilon\eta - \epsilon^2 + g^2) \sin^2 \theta}{2(\epsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)} \cos 2\varphi;$$

$$\epsilon = 1 - \sum_a \frac{\omega_{La}^2 (\omega + i\nu_a)}{\omega [(\omega + i\nu_a)^2 - \omega_{Ha}^2]}, \quad g = -\sum_a \frac{\omega_{La}^2 \omega_{Ha}}{\omega [(\omega + i\nu_a)^2 - \omega_{Ha}^2]}, \quad (1.6)$$

$$\eta = 1 - \sum_a \frac{\omega_{La}^2}{\omega (\omega + i\nu_a)}.$$

Здесь  $\omega_{La}$  — ленгмюровские частоты,  $\omega_{Ha}$  — гирочастоты,  $\nu_a$  — частоты соударений частиц различных сортов.

Заменой переменных  $\hat{E} = \hat{U}\hat{G}$ , где  $\hat{G}$  — матрица-столбец из элементов  $G_1, G_2, G_3, G_4$  и

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{p} & -\hat{p} \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \alpha_0 \hat{1} + \beta_0 \hat{\tau}_1 + \gamma_0 \hat{\tau}_2 + \delta_0 \hat{\tau}_3; \quad (1.7)$$

$$\alpha_0 = (n_1 + n_2)/2, \quad \beta_0 = \beta/2\alpha_0, \quad \gamma_0 = \gamma/2\alpha_0, \quad \delta_0 = \delta/2\alpha_0, \quad (1.8)$$

$$n_{1,2} = (\alpha \pm \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2})^{1/2} = \alpha_0 \pm \sqrt{\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \delta_0^2},$$

из (1.1) получаем

$$\hat{G}' = ik_0 \hat{P} \hat{G} + \hat{\Lambda} \hat{G}, \quad (1.9)$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{p} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{p} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & -\hat{\lambda} \\ -\hat{\lambda} & \hat{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda} = \alpha^{(1)} \hat{1} + \beta^{(1)} \hat{\tau}_1 + \gamma^{(1)} \hat{\tau}_2 + \delta^{(1)} \hat{\tau}_3;$$

$$\begin{aligned}
 \alpha^{(1)} &= -\frac{\alpha_0 \alpha'_0 - \beta_0 \beta'_0 - \gamma_0 \gamma'_0 - \delta_0 \delta'_0}{2(\alpha_0^2 - \beta_0^2 - \gamma_0^2 - \delta_0^2)} = -\frac{1}{4} \frac{(n_1 n_2)'}{n_1 n_2}, \\
 \beta^{(1)} &= \frac{\alpha'_0 \beta_0 - \alpha_0 \beta'_0 + i(\gamma_0 \delta'_0 - \gamma'_0 \delta_0)}{2n_1 n_2}, \\
 \gamma^{(1)} &= \frac{\alpha'_0 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma'_0 + i(\delta_0 \beta'_0 - \delta'_0 \beta_0)}{2n_1 n_2}, \\
 \delta^{(1)} &= \frac{\alpha'_0 \delta_0 - \alpha_0 \delta'_0 + i(\beta_0 \gamma'_0 - \beta'_0 \gamma_0)}{2n_1 n_2}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Если в (1.9) положить  $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{pmatrix}$ , то получим две независимые системы первого приближения для волн встречных направлений. Будем рассматривать систему для  $G_1$  и  $G_2$ , которая описывает волны, бегущие в положительном направлении  $z$ , полагая  $G_3 = G_4 = 0$ , при этом  $G_1 = E_x$ ,  $G_2 = E_y$ . В итоге имеем уравнения первого приближения непосредственно для компонент электрического поля:

$$\begin{aligned}
 E'_x &= ik_0(\alpha_0 + \delta_0)E_x + ik_0(\beta_0 - i\gamma_0)E_y + (\alpha^{(1)} + \delta^{(1)})E_x + (\beta^{(1)} - i\gamma^{(1)})E_y, \\
 E'_y &= ik_0(\beta_0 + i\gamma_0)E_x + ik_0(\alpha_0 - \delta_0)E_y + (\beta^{(1)} + i\gamma^{(1)})E_x + (\alpha^{(1)} - \delta^{(1)})E_y.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Эти уравнения позволяют описать трансформацию попутных волн различных типов. При отсутствии взаимодействия из них легко получить первое приближение геометрической оптики. Для случая слабоанизотропной среды система (1.11) согласуется с квазизотропным приближением [5].

С целью более строгого обоснования результата (1.11) и определения пределов его применимости нужно сделать дополнительную замену переменных в (1.9):

$$\hat{G} = \left( \hat{1}_4 + \sum_{m=1}^{n-1} (ik_0)^{-m} \hat{D}^{(m)} \right) \hat{F}_n \tag{1.12}$$

( $\hat{F}_n$  — матрица-столбец из новых переменных  $F_{n1}, F_{n2}, F_{n3}, F_{n4}$ ), которая приводит к уравнениям  $n$ -го приближения

$$\hat{F}'_n = ik_0 \left( \hat{P} + \sum_{m=1}^n (ik_0)^{-m} \hat{\Lambda}^{(m)} \right) \hat{F}_n, \tag{1.13}$$

где

$$\hat{\Lambda}^{(1)} = \hat{P} \hat{D}^{(1)} - \hat{D}^{(1)} \hat{P} + \hat{\Lambda},$$

$$\hat{\Lambda}^{(2)} = \hat{P} \hat{D}^{(2)} - \hat{D}^{(2)} \hat{P} + \hat{\Lambda} \hat{D}^{(1)} - \hat{D}^{(1)} \hat{\Lambda}^{(1)} - \hat{D}^{(1)\prime}, \tag{1.14}$$

$$\hat{\Lambda}^{(3)} = \hat{P} \hat{D}^{(3)} - \hat{D}^{(3)} \hat{P} + \hat{\Lambda} \hat{D}^{(2)} - \hat{D}^{(2)} \hat{\Lambda} - \hat{D}^{(1)} \hat{\Lambda}^{(2)} - \hat{D}^{(2)\prime},$$

Выбирая определенным образом матрицы  $\hat{D}^{(m)}$ , можно «развязать»

встречные волны в любом порядке малости по параметру  $(ik_0)^{-1}$ . Нетрудно убедиться, что для этих целей удобно искать  $\hat{D}^{(m)}$  в виде

$$\hat{D}^{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{d}^{(m)} \\ (-1)^m \hat{d}^{(m)} & \hat{0} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Тогда имеем матричные уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{d}^{(1)} \hat{p} + \hat{p} \hat{d}^{(1)} &= \hat{\lambda}, \\ \hat{d}^{(2)} \hat{p} + \hat{p} \hat{d}^{(2)} &= \hat{d}^{(1)} \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \hat{d}^{(1)} + \hat{d}^{(1)\prime}, \\ \hat{d}^{(3)} \hat{p} + \hat{p} \hat{d}^{(3)} &= \hat{d}^{(2)} \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \hat{d}^{(2)} - \hat{d}^{(1)} \hat{\lambda} \hat{d}^{(1)} + \hat{d}^{(2)\prime}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

При условиях (1.16) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}^{(m)} &= \begin{pmatrix} \hat{\lambda}^{(m)} & \hat{0} \\ \hat{0} & (-1)^{m-1} \hat{\lambda}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \hat{\lambda}^{(1)} &= \hat{\lambda}, \quad \hat{\lambda}^{(2)} = \hat{\lambda} \hat{d}^{(1)}, \quad \hat{\lambda}^{(3)} = -\hat{\lambda} \hat{d}^{(2)}, \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

Пренебрегая теперь в (1.13) недиагональными элементами матрицы  $\hat{\Lambda}^{(n)}$ , получим две независимые системы, из которых рассмотрим уравнения для волн, бегущих в положительном направлении  $z$ , полагая  $F_{n3} = F_{n4} = 0$ . Если записывать каждую матрицу  $\hat{\lambda}^{(m)}$  как

$$\hat{\lambda}^{(m)} = \alpha^{(m)} \hat{1} + \beta^{(m)} \hat{\tau}_1 + \gamma^{(m)} \hat{\tau}_2 + \delta^{(m)} \hat{\tau}_3, \quad (1.18)$$

уравнения  $n$ -го приближения принимают вид

$$\begin{aligned} F'_{n1} &= ik_0 (\alpha_n + \delta_n) F_{n1} + ik_0 (\beta_n - i \gamma_n) F_{n2}, \\ F'_{n2} &= ik_0 (\beta_n + i \gamma_n) F_{n1} + ik_0 (\alpha_n - \delta_n) F_{n2}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (ik_0)^{-m} \alpha^{(m)}, \quad \beta_n = \beta_0 + \sum_{m=1}^n (ik_0)^{-m} \beta^{(m)}, \\ \gamma_n &= \gamma_0 + \sum_{m=1}^n (ik_0)^{-m} \gamma^{(m)}, \quad \delta_n = \delta_0 + \sum_{m=1}^n (ik_0)^{-m} \delta^{(m)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При этом компоненты электрического поля связаны с  $F_{n1}$  и  $F_{n2}$  соотношениями

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \left( \hat{1} + \sum_{m=1}^n (-ik_0)^{-m} \hat{d}^{(m)} \right) \begin{pmatrix} F_{n1} \\ F_{n2} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.21)$$

Для элементов матриц  $\hat{d}^{(1)}$  и  $\hat{\lambda}^{(2)}$ , входящих во второе приближение, из (1.16) — (1.18) имеем

$$\hat{d}^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' (\alpha_0 - \delta_0) + \delta^{(1)} & -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' (\beta_0 - i\gamma_0) + \beta^{(1)} - i\gamma^{(1)} \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' (\beta_0 + i\gamma_0) + \beta^{(1)} + i\gamma^{(1)} & \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' (\alpha_0 + \beta_0) - \delta^{(1)} \end{bmatrix}; \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} &= \frac{\alpha^{(1)2} - |\lambda|}{2\alpha_0} + \frac{n_1 n_2}{8\alpha_0} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)', \\ \beta^{(2)} &= \frac{\alpha^{(1)} \beta^{(1)}}{2\alpha_0} - \frac{n_1 n_2}{8\alpha_0} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' \left( \frac{\beta_0}{n_1 n_2} \right)', \\ \gamma^{(2)} &= \frac{\alpha^{(1)} \gamma^{(1)}}{2\alpha_0} - \frac{n_1 n_2}{8\alpha_0} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' \left( \frac{\gamma_0}{n_1 n_2} \right)', \\ \delta^{(2)} &= \frac{\alpha^{(1)} \delta^{(1)}}{2\alpha_0} - \frac{n_1 n_2}{8\alpha_0} \left( \frac{\alpha_0}{n_1 n_2} \right)' \left( \frac{\delta_0}{n_1 n_2} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Для исследования трансформации волн существенно, что коэффициенты системы любого  $n$ -го приближения (1.19) не имеют особенностей, связанных с заменой переменных, в точках взаимодействия, где равны друг другу показатели преломления нормальных волн ( $n_1 = n_2$ ). Коэффициенты в (1.19) могут обратиться в бесконечность лишь в особых точках исходной системы (1.1) и в точках отражения  $n_{1,2} = 0$ , где становится нулевым определитель алгебраических систем (1.16).

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕТОДОМ ЭТАЛОННОЙ СИСТЕМЫ

Пусть показатели преломления нормальных волн сближаются в ограниченной области (рис. 1), для ионосферы такое поведение дисперсионных кривых реализуется в различных частотных диапазонах [1, 8]. Этот тип трансформации исследовался ранее методом фазовых интегралов [9, 10], результаты которого могут быть уточнены и существенно дополнены методом, развивающимся в настоящей работе. Необходимость детального анализа этого случая в значительной степени связана с изучением низкочастотных волн в земной ионосфере [11, 12].

Для простоты будем считать плоскость внешнего магнитного поля фиксированной и выберем систему координат так, что в (1.5)  $\phi = 0$ ,  $\beta = \beta_0 = 0$ . В окрестности области взаимодействия величины  $\gamma_0$  и  $\delta_0$  можно считать линейными функциями  $z$ , при этом в комплексной плоскости  $z$  близко друг к другу расположены точки взаимодействия, рис. 2.

Будем решать (1.10) методом эталонной системы, аналогичным методу эталонного уравнения [13]. В качестве эталонной возьмем систему (см. [14])

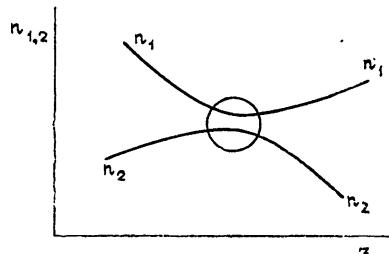


Рис. 1.

$$\frac{dh}{ds} = ik_0(r \hat{\tau}_2 + s \hat{\tau}_3) \hat{h}, \quad \hat{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= P_1 D_{ip} (\sqrt{2k_0} s e^{-i\pi/4}) + P_2 p^{1/2} e^{-i\pi/4} D_{-1-ip} (\sqrt{2k_0} s e^{i\pi/4}), \\ h_2 &= P_2 D_{-ip} (\sqrt{2k_0} s e^{i\pi/4}) + P_1 p^{1/2} e^{i\pi/4} D_{-1+ip} (\sqrt{2k_0} s e^{-i\pi/4}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $P_1$  и  $P_2$  — произвольные постоянные,  $D_\mu$  — функция параболического цилиндра [15],  $p = (1/2) k_0 r^2$ .

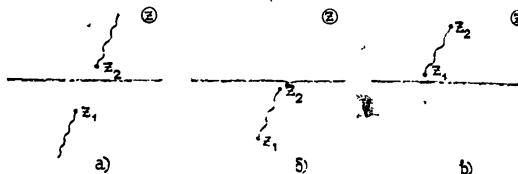


Рис. 2.

Решение системы (1.11) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z \alpha_1 dz' \right) \hat{u} \hat{h} [s(z)], \quad (2.3)$$

где  $\hat{u}$  — некоторая матрица  $2 \times 2$ . Подставляя (2.3) в (1.11), получим матричное уравнение

$$\hat{u}^{-1} (\beta_1 \tau_1 + \gamma_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_3) \hat{u} - s'(r \tau_2 + s \tau_3) = \frac{1}{ik_0} \hat{u}^{-1} \hat{u}'. \quad (2.4)$$

Для нахождения приближенного решения можно пренебречь правой частью (2.4), если  $\hat{u}^{-1} \hat{u}'$  не имеет особенностей в рассматриваемой области комплексной плоскости  $z$ , поэтому достаточно найти удовлетворяющее такому условию решение приближенного уравнения

$$\hat{u}^{-1} (\beta_1 \tau_1 + \gamma_1 \tau_2 + \delta_1 \tau_3) \hat{u} = s' r \tau_2 + s' s \tau_3. \quad (2.5)$$

Из равенства определителей матриц в обеих частях соотношения (2.5) получаем

$$\beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 = s'^2 (s^2 + r^2). \quad (2.6)$$

Чтобы наше решение переходило в первое приближение геометрической оптики вне области взаимодействия, в разложении фазы

$$s = s_0 + \frac{1}{ik_0} s^{(1)} + \dots \quad (2.7)$$

нужно учесть два первых слагаемых, что дает

$$\int \sqrt{s_0^2 + r^2} dz' = \int \sqrt{\sigma^2 + r^2} d\sigma; \quad (2.8)$$

$$\int \sqrt{s_0^2 + r^2} dz' = \int \frac{\gamma_0 \gamma^{(1)} + \delta_0 \delta^{(1)}}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}} d\sigma = \frac{1}{4} \ln \frac{n_2}{n_1} + \text{const}, \quad (2.9)$$

а при определении амплитуды  $\hat{u}$  достаточно уравнения нулевого приближения

$$\hat{u}^{-1} (\hat{\tau}_2 \sin \eta + \hat{\tau}_3 \cos \eta) \hat{u} = \hat{\tau}_2 \sin \xi + \hat{\tau}_3 \cos \xi, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \sin \eta &= \frac{\gamma_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}, & \cos \eta &= \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}, \\ \sin \xi &= \frac{r}{\sqrt{s_0^2 + r^2}}, & \cos \xi &= \frac{s_0}{\sqrt{s_0^2 + r^2}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Равенству (2.10) удовлетворяет широкий класс решений, из них возьмем

$$\hat{u} = \hat{1} \cos \frac{\xi - \eta}{2} + i \hat{\tau}_1 \sin \frac{\xi - \eta}{2} \quad (2.12)$$

как наиболее простое.

Постоянные интегрирования в (2.8), (2.9) и параметр эталонной системы  $r$  однозначно определяются из требования, чтобы  $\hat{u}^{-1} \hat{u}'$  и  $s^{(1)}$  были конечными в точках  $z = z_{1,2}$  и  $s_0(z) = \mp ir$ , для этого необходимо, чтобы  $s_0(z_{1,2}) = \mp ir$ , т.е.

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^z \sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2} dz' &= \int_{-ir}^{s_0} \sqrt{s^2 + r^2} d\sigma, & s^{(1)}(z) &= \frac{1}{4 \sqrt{s_0^2 + r^2}} \ln \frac{n_2}{n_1}, \\ \int_{z_1}^z \sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2} dz &= \int_{-ir}^{ir} \sqrt{s_0^2 + r^2} ds_0 = \frac{i\pi r^2}{2} = \frac{i\pi p}{k_0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Знаки корней  $\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}$  и  $\sqrt{s_0^2 + r^2}$  изменяются на разрезах, выходящих из точек взаимодействия (рис. 2).

Таким образом, искомое решение определяется формулами (2.2), (2.3), (2.12), (2.11), (2.7), (2.13); оно с хорошей точностью описывает поле в области взаимодействия, а вне этой области переходит в приближение геометрической оптики:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{C_1}{\sqrt{n_1}} \sqrt{1 + \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_1 dz' \right) + \frac{iC_2}{\sqrt{n_2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{1 - \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_2 dz' \right), \\ E_y &= \frac{iC_1}{\sqrt{n_1}} \sqrt{1 - \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_1 dz' \right) + \frac{C_2}{\sqrt{n_2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{1 + \frac{\delta_0}{\sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2}}} \exp \left( ik_0 \int_{z^*}^z n_2 dz' \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

причем амплитуды волн в (2.14)  $C_1, C_2$  — до взаимодействия и  $C'_1, C'_2$  — после взаимодействия связаны линейными соотношениями

$$C'_1 = t_{11} C_1 + t_{12} C_2, \quad C'_2 = t_{21} C_1 + t_{22} C_2. \quad (2.15)$$

Полученное решение позволяет определить все коэффициенты трансформации, при этом необходимо иметь в виду, что разрезы в комплексной плоскости  $z$  проводятся так, чтобы они не пересекали действительной оси, в противном случае пришлось бы в точке пересечения изменить нумерацию ветвей нормальных волн, что обычно не делается.

Поэтому рассмотрим три различных случая.

а) Точки взаимодействия  $z_{1,2}$  лежат в комплексной плоскости по разные стороны от действительной оси (рис. 2а), тогда

$$\begin{aligned} t_{11} &= e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(ip)} p^{-1/2+ip} e^{-\pi p/2-ip}, \\ t_{12} &= i \exp(-\pi p + ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \left( \frac{s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}}{r} \right)^{2ip}, \\ t_{21} &= i \exp(-\pi p - ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \left( \frac{s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}}{r} \right)^{-2ip}, \\ t_{22} &= e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-ip)} p^{-1/2-ip} e^{-\pi p/2+ip}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь  $p$  определяется из (2.13), а значение  $s_0^*$  связано с  $z^*$  равенством

$$\int_{-ir}^{s_0^*} \sqrt{s_0^2 + r^2} ds_0 = \int_{z_1}^{z^*} \sqrt{\gamma_0^2 + \delta_0^2} dz. \quad (2.17)$$

Коэффициенты трансформации  $t_{12}$  и  $t_{21}$  в (2.16) совпадают с теми, которые дает метод фазовых интегралов, выражения для  $t_{11}$  и  $t_{22}$  ранее не были известны.

б)  $\operatorname{Im} z_{1,2} < 0$  (рис. 2б):

$$\begin{aligned} t_{11} &= e^{-2\pi p}, \quad t_{12} = e^{-3i\pi/4} p^{-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(ip)} \times \\ &\times \exp\left(\frac{\pi p}{2} - ip + ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2} \left[ \sqrt{\frac{k_0}{2}} (s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \right]^{2ip}\right), \\ t_{21} &= e^{-i\pi/2} p^{-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-ip)} \exp\left(-\frac{3\pi p}{2} + ip - ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2}\right) \times \\ &\times \left[ \sqrt{\frac{k_0}{2}} (s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \right]^{-2ip}, \quad t_{22} = 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

в)  $\operatorname{Im} z_{1,2} > 0$  (рис. 2в):

$$\begin{aligned} t_{11} &= 1, \quad t_{12} = e^{-3i\pi/4} p^{-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(ip)} \exp\left(-\frac{3\pi p}{2} - ip + \right. \\ &\left. + ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2}\right) \left[ \sqrt{\frac{k_0}{2}} (s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \right]^{2ip}, \end{aligned}$$

$$t_{21} = e^{-i\pi/4} p^{-1/2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-ip)} \exp\left(\frac{\pi p}{2} + ip - ik_0 s_0^* \sqrt{s_0^{*2} + r^2}\right) \times \\ \times \left[ \sqrt{\frac{k_0}{2}} (s_0^* + \sqrt{s_0^{*2} + r^2}) \right]^{-2ip}, \quad t_{22} = e^{-2\pi p}. \quad (2.19)$$

В формулах (2.18) и (2.19) выражения для  $t_{11}$  и  $t_{22}$  могут быть найдены методом фазовых интегралов, остальные коэффициенты, содержащие гамма-функцию, этим методом не определяются.

Таким образом, для рассматриваемого типа взаимодействия развитый в настоящей работе подход позволил:

1) найти выражение для поля непосредственно в области взаимодействия,

2) обосновать результаты метода фазовых интегралов (для тех коэффициентов трансформации, которые этим методом определяются), что особенно важно при учете поглощения среды, когда точки взаимодействия нельзя соединить линией Стокса (см. [10]),

3) получить коэффициенты трансформации, которые не определяются методом фазовых интегралов.

Автор благодарен Н. Г. Денисову за постоянный интерес к работе и полезные дискуссии, а также В. Е. Белову и Л. В. Родыгину за ценное замечание.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. В. В. Железняков, Электромагнитные волны в космической плазме, изд. Наука, М., 1977.
3. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, М., 1973.
4. K. G. Budden, Proc. Roy. Soc., 215, 215 (1952).
5. Ю. А. Кравцов, ДАН СССР, 183, 74 (1968).
6. K. G. Budden, J. Atm. Terr. Phys., 34, 1909 (1972).
7. M. A. Simpson, Austr. J. Phys., 29, 343 (1976).
8. C. Altman, in ELF-VLF Radio Waves Propagation, ed. by Holtet, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht—Holland/Boston—USA, 10, 87 (1974).
9. Н. Г. Денисов, Ученые записки ГГУ, 35, 3 (1957).
10. Н. С. Беллюстин, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 4, 487 (1978).
11. D. Jones, Ann. Geophys., 28, 527 (1972).
12. E. Fialkov, C. Altman and H. Cory, J. Atm. Terr. Phys., 35, 317 (1973).
13. S. C. Miller and R. H. Good, Phys. Rev., 91, 174 (1953).
14. Ю. А. Кравцов, О. Н. Найда, ЖЭТФ, 71, 237 (1976).
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 ноября 1977 г.

#### ON THE LINEAR INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA

N. S. Bellustin

The paper gives an asymptotic method permitting to divide the initial equations for fields in a plane stratified plasma into two independent systems. Each system describes waves of different types propagating in one direction. Coefficients of equations obtained are regular at points where indexes of refraction of normal waves are equal  $n_1 = n_2$ . Equations are used to analyse the concrete type of interaction which is of interest due to investigations of low frequency waves in the ionosphere. By the method of standard system a solution is found describing the field in the interaction region and outside this region it transforms to the solution of the geometric optics. Coefficients of the wave transformation are compared with ones obtained earlier by the method of phase integrals.

УДК 551.510.535

## О ВЛИЯНИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ОБЛАСТИ F ИОНОСФЕРЫ

*Б. Н. Гершман, Л. Е. Жмур*

Рассматривается поведение плазменной неоднородности синусоидальной формы в области  $F$  ионосферы. Анализ проведен с учетом вклада поля тяжести в условиях, когда возможно возникновение нестабильности, связанной с неоднородным характером движения плазмы. Нестабильность обусловлена конвергенцией плазменных неоднородностей в присутствии геомагнитного поля. Определено поведение неоднородностей разных масштабов в различные моменты времени

Исследование плазменных неустойчивостей продолжает оставаться весьма актуальным применительно к высотам области  $F$  в связи с вопросом о происхождении неоднородностей электронной концентрации. Если в понимании мелкомасштабной структуры области  $E$  достигнут прогресс (особенно для неоднородностей в зонах токовых струй [1–4]), то механизмы образования неоднородной структуры области  $F$  остаются, за небольшими исключениями, недостаточно ясными [1, 3, 5]. Так, например, трудно четко назвать процессы, приводящие к сильной диффузности области  $F$  (явлению spread  $F$ ).

Трудности в построении теории генерации неоднородностей небольших масштабов в области  $F$  в существенной мере связаны с необходимостью преодоления демпфирующего влияния диффузии в направлении геомагнитного поля  $H_0$ . Для обеспечения условий возникновения неустойчивости во многих работах (иногда неявно) используется модель крайне сильно вытянутых вдоль  $H_0$  неоднородностей. При этом значения фактора вытянутости берутся более высокими, чем это обычно следует из экспериментальных исследований [3, 6].

При учете продольной диффузии существенную роль может играть поле тяжести, вкладом которого можно пренебречь только при  $l_z \ll H$ , где  $l_z$  — вертикальный размер неоднородностей и  $H$  — высота однородной атмосферы. Кроме того, не должны быть слишком большими времена существования неоднородности. При  $l_z \gtrsim H$  этот вывод несправедлив и, как следствие, нельзя использовать приближение слabo-неоднородной атмосферы.

Далее мы рассмотрим вклад гравитационного поля при наличии нестабильности, связанной с неоднородным характером движения плазмы. Эта неустойчивость без учета силы тяжести анализировалась ранее в [3, 7, 8]. Нестабильность обусловлена специфическим характером перераспределения плазмы в присутствии внешнего магнитного поля. Будут учтены не только изменения коэффициента диффузии и других параметров по высоте  $z$ , но и порождаемая силой тяжести конвергенция плазмы, которая, если взять ее изолированно, приводит к усилению возмущений малой амплитуды.

Ниже в разд. 1 будет получено общее выражение для возмущения электронной концентрации. В разд. 2 с помощью интеграла Фурье — Бесселя будет дано интегральное представление для этого возмущения,

которое в начальный момент времени характеризуется периодической зависимостью от горизонтальных координат и высоты  $z$ . В разд. 3 будет рассмотрено поведение возмущений различных масштабов при малых временах  $t$ . Асимптотическое поведение возмущений при больших  $t$  будет проанализировано в разд. 4.

## 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Исходим из системы квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов, записанных сразу же в линеаризованном виде. Отмечая неравновесные величины штрихами, а равновесные оставляя без значков, имеем систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}'_e}{\partial t} + (\mathbf{u}'_e \nabla) \mathbf{u}_e + (\mathbf{u}_e \nabla) \mathbf{u}'_e + \nu_{en} \mathbf{u}'_e + \nu_{ei} (\mathbf{u}'_e - \mathbf{u}'_i) = - \frac{x T_e}{m N} \nabla N' + \frac{x \nabla (N T_e)}{m N^2} N' - \frac{e}{mc} [\mathbf{u}'_e \mathbf{H}_0] + \frac{e}{m} \nabla \varphi'; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'_i}{\partial t} + (\mathbf{u}'_i \nabla) \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}'_i + \nu_{in} \mathbf{u}'_i + \frac{m}{M} \nu_{ei} (\mathbf{u}'_i - \mathbf{u}'_e) = \\ = - \frac{x T_i}{M N} \nabla N' + \frac{x \nabla (N T_i)}{M N^2} N' + \frac{e}{Mc} [\mathbf{u}'_i \mathbf{H}_0] - \frac{e}{M} \nabla \varphi'; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N'}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \nabla + \operatorname{div} \mathbf{u}_e + 2\alpha_r N) N' + (N \operatorname{div} + \nabla N) \mathbf{u}'_e = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial N'}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \nabla + \operatorname{div} \mathbf{u}_i + 2\alpha_r N) N' + (N \operatorname{div} + \nabla N) \mathbf{u}'_i = 0. \quad (4)$$

В этих уравнениях  $\mathbf{u}_e$  и  $\mathbf{u}_i$  — упорядоченные скорости электронов и ионов,  $T_e$  и  $T_i$  — их температуры,  $m$  и  $M$  — их массы,  $\nu_{en}$ ,  $\nu_{in}$  и  $\nu_{ei}$  — частоты столкновений электронов с нейтральными частицами или ионами и ионов с нейтральными частицами\*,  $x$  — постоянная Больцмана,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $N$  — концентрация электронов, равная в силу квазинейтральности концентрации ионов (это относится и к возмущению). Кроме того, в (1), (2)  $\varphi'$  — возмущенное значение потенциала внутреннего поля, обеспечивающего квазинейтральность плазмы, а в (3), (4)  $\alpha_r$  — эффективный коэффициент рекомбинации. Детали учета фотохимических процессов имеют здесь для нас второстепенное значение. Развитие возмущений в рамках (1)–(4) описывается в изотермическом приближении.

Система уравнений (1)–(4) часто используется для исследования ионосферных плазменных неустойчивостей (см., например, [3], гл. 6). При выбранном способе линеаризации слагаемые с ускорением силы тяжести  $\mathbf{g}$  в (1), (2) явно не входят. Положим, что все изменения во времени  $t$  происходят по закону  $\exp(i\omega t)$ , и будем далее рассматривать сначала спектральные компоненты  $N'$  и других переменных. При нестабильности или затухании частота  $\omega$  комплексна.

\* При столкновениях считается, что скорости нейтральных частиц остаются неизменными.

Считаем выполненными условия

$$\nu_{in} \gg |\omega|, \quad \nu_{el} \gg |\omega|. \quad (5)$$

Из первого неравенства (5) следует, что  $\nu_{en} \gg |\omega|$ . При анализе динамических процессов в ионосфере традиционным является использование неравенств типа  $|(\mathbf{u}'_e \nabla) \mathbf{u}_e| \ll \nu_e \mathbf{u}'_e (\nu_e = \nu_{en} + \nu_{el})$  и  $|(\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}'_i| \ll \nu_{in} \mathbf{u}'_i$ . Полагаем, что на высотах области  $F$  выполнены условия замагниченности как для электронов, так и ионов, а именно

$$\omega_H \gg \nu_e, \quad \Omega_H \gg \nu_{in}, \quad . \quad (6)$$

где  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — гирочастоты для электронов и ионов.

При использовании указанных выше уравнений можно из (1), (2) найти значения компонент  $\mathbf{u}'_e$  и  $\mathbf{u}'_i$  и подставить в (3), (4). Последующее исключение  $\phi'$ , даже при упрощениях в силу (5), (6), довольно громоздко. Ситуация упрощается, если наложить ограничение на степень вытянутости неоднородностей в форме

$$l_\perp^2 / l_\parallel^2 \gg \nu_e^2 \nu_{in} / (\nu_{en} \omega_H \Omega_H), \quad (7)$$

где  $l_\parallel$  и  $l_\perp$  — характерные масштабы возмущений вдоль поля  $\mathbf{H}_0$  и перпендикулярно к нему. На высотах области  $F$  и ниже  $\nu_e \sim \nu_{en}$ . Тогда в силу (6) неравенство (7) при  $l_\perp \gg l_\parallel$  выполняется автоматически. В области  $F$  первое из условий (6) выполнено с большим запасом, так что требование (7) совместимо и со случаем  $l_\parallel \gg l_\perp$ . Неравенство (7) нарушается только при крайне сильной вытянутости неоднородностей вдоль  $\mathbf{H}_0$ .

При ограничении (7) процедура исключения потенциала  $\phi'$  в исходной системе упрощается, и можно прийти к приближенному уравнению для  $N'$  в виде

$$\left\{ i\omega + \operatorname{div} \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \nabla) + 2\alpha_r N - \frac{\chi T}{M \nu_{in}} \left[ \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu_{in}^2}{\Omega_H^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) - \cos \chi \left( \frac{T_e}{T_i} \frac{d \ln \nu_e}{dz} + \frac{d \ln \nu_{in}}{dz} \right) \frac{\partial}{\partial z'} \right] \right\} N' = 0. \quad (8)$$

При его записи использована прямоугольная система координат с осью  $z'$ , направленной вдоль  $\mathbf{H}_0$ , и горизонтальной осью  $y'$ . Значения  $z$  отсчитываются вверх вдоль вертикали. Введен угол  $\chi$  между осью  $z$  и полем  $\mathbf{H}_0$ . При переходе к (8) опущен ряд членов с  $d \ln N/dz$  и  $d \ln T_i/dz$ , которые при благоприятных условиях могут дать некоторый вклад в нарастание возмущений. Мы, однако, сосредоточим внимание только на одном типе нестабильности, обусловленной неоднородным распределением скорости  $\mathbf{u}_i$ . При  $\operatorname{div} \mathbf{u}_i < 0$  возникает эффект конвергенции плазменных неоднородностей.

Используя (6), (7), можно установить, что скорость продольной диффузии значительно больше, чем поперечной, вкладом которой мы далее пренебрегаем. Имея в виду, что основной вклад в слагаемое  $\operatorname{div} \mathbf{u}_i$  в (8) дает продольная компонента скорости  $u_{iz'}$ ,\*, разобьем ее на две части, полагая  $u_{iz'} = u_{iz'g} + u_{iz'0}$ . Первая из них  $u_{iz'g} = -g_{z'} / \nu_{in}$

\* В присутствии внешнего электрического поля в области  $F$  возникает поперечный к  $\mathbf{H}_0$  дрейф плазмы с довольно значительными скоростями. Однако имеются основания, согласно которым вклад дрейфовых движений в конвергенцию плазмы —  $\operatorname{div} \mathbf{u}_i$  незначителен [3].

связана с влиянием силы тяжести, а вторая — с другими воздействиями (например, с увлечением заряженных частиц нейтральными). Последняя составляющая скорости также предполагается зависящей только от высоты  $z$ .

Считая, что в силу однородности среды по горизонтали  $N' \propto \exp(ik_x x + ik_y y)$  и используя для частоты столкновений  $\nu_{ln}$  зависимость от высоты в виде

$$\nu_{ln} = \nu_{lno} \exp(-z/H)^*, \quad (9)$$

где высота однородной атмосферы  $H = \kappa T / Mg$  ( $T$  — температура нейтральных частиц,  $M$  — масса молекулы, которая для простоты приравнивается массе иона), с учетом сделанных выше замечаний приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} D_a \cos^2 \chi \frac{d^2 N'}{dz^2} + & \left[ D_a \cos^2 \chi \left( \frac{\zeta}{1+\zeta} H_e^{-1} + \frac{2}{1+\zeta} H^{-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2ik_x \cos \chi \sin \chi \right) - u_{iz0} \right] \frac{dN'}{dz} + \left\{ D_a \left[ -k_x^2 \sin^2 \chi + \frac{\cos^2 \chi}{1+\zeta} H^{-2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2ik_x \sin \chi \cos \chi \left( \frac{\zeta}{1+\zeta} H_e^{-1} + \frac{1}{1+\zeta} H^{-1} \right) \right] - i\omega - 2\alpha_r N - \right. \\ & \left. - ik_x u_x - ik_y u_y - \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} \right\} N' = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\zeta = T_e/T_i$ ,  $D_a = \frac{\kappa(T_e+T_i)}{M \nu_{ln}}$  — коэффициент амбиполярной диффузии

при  $H_0 = 0$  (или вдоль поля  $H_0$ ).

Будем считать величину скорости  $u_{iz0}$  ограниченной неравенством  $|u_{iz0}| \ll D_a \cos^2 \chi H^{-1}$ , которое обычно в ионосферных условиях выполняется. На умеренных и высоких широтах из него следует, что  $|u_{iz0}| \ll (l_i/H) v_i$ , где  $l_i$  — длина свободного пробега ионов и  $v_i$  — средняя тепловая скорость. Так вблизи максимума области  $F$   $l_i/H \approx 10^{-1}$ , тогда как отношение  $v_i/|u_{iz0}|$  в большинстве случаев достигает двух порядков. Пренебрегая в силу сказанного членом с  $u_{iz0}$  в квадратной скобке перед  $dN'/dz$ , вводя безразмерную переменную  $p = z/H$  и учитывая в соответствии с (9) зависимость  $D_a = D_{a0} \exp(z/H)$  (уровень  $z = 0$  выбирается в зоне генерации возмущений), приходим к уравнению

$$\frac{d^2 N'}{dp^2} + a \frac{dN'}{dp} + (be^{-p} + c) N' = 0, \quad (11)$$

где

$$a = \frac{\zeta H}{(1+\zeta) H_e} + \frac{2}{1+\zeta} + 2ik_x H \operatorname{tg} \chi,$$

$$b = t_0 \left( -i\omega - 2\alpha_r N - ik_x u_x - ik_y u_y - \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} \right),$$

$$c = -k_x^2 H^2 \operatorname{tg}^2 \chi + \frac{1}{1+\zeta} + 2ik_x H \operatorname{tg} \chi \left( \frac{\zeta H}{H_e(1+\zeta)} + \frac{1}{1+\zeta} \right),$$

\* Для частоты столкновений  $\nu_{en}$  используется такая же аппроксимация, но с другой высотой  $H$ , обозначаемой  $H_e$ .

а параметр  $t_0 = H^2/(D_{a0} \cos^2 \chi)$  имеет размерность времени.

Решение этого уравнения записывается в виде

$$N' = \exp\left(-\frac{ap}{2}\right) [C_1 J_v(2\sqrt{b} e^{-p/2}) + C_2 J_{-v}(2\sqrt{b} e^{-p/2})], \quad (12)$$

где  $v = \sqrt{a^2 - 4c}$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Рассмотрим плазменную неоднородность, имеющую при  $t = 0$  по оси  $z$  форму такого же типа, как и по осям  $x, y$ , а именно

$$N'(z, 0) = \exp(ikz) = \exp(-ikH \ln \xi), \quad (13)$$

где  $\xi = e^{-p} = \exp(-z/H)$ . Обозначив  $f(\xi) = (\xi)^{-a/2} \exp(-ikH \ln \xi)$ , представим  $f(\xi)$  в виде интеграла Фурье — Бесселя\*, так что

$$f(\xi) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_v(2\sqrt{\xi x}) J_v(2\sqrt{\eta x}) f(\eta) dx d\eta. \quad (14)$$

Общее решение в соответствии с (12), (14) можно записать в виде

$$N'(\xi, \tau) (\xi)^{-a/2} = \exp\left[-\left(\frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + ik_x u_x + ik_y u_y + 2\alpha_r N\right)t\right] \times \times \int_0^\infty \int_0^\infty f(\eta) \exp(-\tau x) J_v(2\sqrt{\xi x}) J_v(2\sqrt{\eta x}) d\eta dx, \quad (15)$$

где  $\tau = t/t_0$ . Естественно, что при  $t = 0$  мы приходим к выражению для  $f(\xi)$  (14). Делая замену переменной  $x = y^2$  и используя соотношение

$$\int_0^\infty \exp(-\gamma y^2) J_v(\alpha y) J_v(\beta y) y dy = \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right) I_v\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right),$$

в котором  $I_v$  — модифицированная функция Бесселя 1-го рода, получаем

$$N'(\xi, \tau) = (\xi)^{a/2} \exp\left[-\left(\frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + ik_x u_x + ik_y u_y + 2\alpha_r N\right)t\right] \times \times \tau^{-1} \exp(-\xi/\tau) \int_0^\infty \exp(-\eta/\tau) I_v\left(\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\tau}\right) \exp(-ikH \ln \eta) (\eta)^{-a/2} d\eta. \quad (16)$$

В последующих разделах на основе результата (16) будет рассмотрено поведение плазменной неоднородности вида (13) в различные периоды времени  $t$ . Характерные временные масштабы определяются амбиполярной диффузией и размерами неоднородностей. В зависимости от соотношений между  $t$  и этими масштабами будут выбраны приближения для функции  $I_v(2\sqrt{\xi\eta}/\tau)$  в подынтегральном выражении (16).

\* Интеграл Фурье — Бесселя широко применялся ранее при анализе диффузионных процессов (в том числе и при изучении этих процессов применительно к области F ионосферы) [9, 10].

### 3. ПОВЕДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД ВРЕМЕНИ

Имея в виду при достаточно малых  $t$  использование асимптотического разложения для  $I_v(2\sqrt{\xi\eta/\tau})$  при значительных величинах  $2\sqrt{\xi\eta/\tau}$  ( $2\sqrt{\xi\eta/\tau} \gg 1$  и  $2\sqrt{\xi\eta/\tau} \gg |\nu|$ ), обратим внимание на то, что при вычислении (16) интервал интегрирования с  $\eta \ll \tau$  вносит небольшой вклад, а интервал с  $\eta \gg \tau$  фактически исключается из-за фактора  $\exp(-\eta/\tau)$ . Таким образом, при определении  $N'$  основное значение имеет область  $\eta \sim \tau$ . Тогда при  $|k_x H \operatorname{tg} \chi| \leq 1^*$  из  $2\sqrt{\xi\eta/\tau} \gg 1$  приходим к требованию  $\sqrt{\xi} \gg \sqrt{\tau}$ , которое записывается в виде

$$t \ll t_0 \exp(-z/H). \quad (17)$$

Если учесть, что  $D_a = D_{a0} \exp(z/H)$ , то отсюда следует, что  $t \ll \ll H^2/(D_a \cos^2 \chi)$ . Последнее неравенство означает, что отсчитываемое от момента  $t = 0$  время меньше времени диффузии неоднородности с характерным масштабом  $H$ .

При  $|k_x H \operatorname{tg} \chi| \gg 1$  для  $|\nu|$  (см. (11), (12)) имеем  $|\nu| \sim \sim \sqrt{k_x H \operatorname{tg} \chi} \gg 1$ . Требуя, чтобы  $2\sqrt{\xi\eta/\tau} \gg |\nu|$ , приходим вместо (17) к более жесткому ограничению:

$$t \ll \frac{H}{k_x \sin \chi \cos \chi D_a}, \quad (18)$$

означающему при  $\sin \chi \sim \cos \chi \sim 1$ , что время  $t$  меньше характерного времени диффузии для неоднородности с эффективным масштабом  $L \sim \sqrt{k_x^{-1} H}$ .

В рамках ограничения (17) (или при  $|k_x H \operatorname{tg} \chi| \gg 1$  — (18)), используем для  $I_v(2\sqrt{\xi\eta/\tau})$  известное асимптотическое разложение. Оставляя только один член  $(I_v(w) \approx e^w / \sqrt{2\pi w}$  при  $|w| \gg 1$  и при  $|w| \gg |\nu|$ ), после подстановки в (16) приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} N'(\xi, \tau) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi\tau}} \exp \left[ - \left( \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + ik_x u_x + ik_y u_y + 2a_r N \right) t \right] \xi^{a/2-1/4} \times \\ &\times \exp(-\xi/\tau) \int_0^\infty \exp \left( -\frac{\eta}{\tau} + \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\tau} - ikH \ln \eta \right) \eta^{-1/4-a/2} d\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

Интеграл в (19) можно выразить через функции параболического цилиндра  $D_{-\mu}(w)$ . С этой целью нужно в (19) сделать замену  $2\sqrt{\xi\eta/\tau} = x$  и воспользоваться соотношением

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} \exp(-\beta x^2 - \gamma x) dx = (2\beta)^{-1/2} \Gamma(\mu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-\mu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),$$

в котором  $\Gamma$  — гамма-функция. В результате из (19) имеем

\* В использовании требования о том, чтобы  $2\sqrt{\xi\eta/\tau} \sim 2\sqrt{\xi/\tau} \gg |\nu|$ , в случае  $|k_x H \operatorname{tg} \chi| \lesssim 1$  нет необходимости, так как здесь  $|\nu| \approx 1$ .

$$N'(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{a/2-1/4} \exp(-\xi/2\tau) \times \\ \times \exp \left[ - \left( \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + ik_x u_x + ik_y u_y + 2\alpha_r N \right) t \right] \times \quad (20) \\ \times \tau^{1/4-a/2-ikH} 2^{a/2-7/4+ikH} \Gamma \left( -2ikH + \frac{3}{2} - a \right) D_{2ikH-3/2+a}(-\sqrt{2\xi/\tau}) -$$

В последнем соотношении  $D_\mu$  содержит в качестве аргумента большую по модулю величину  $-\sqrt{2\xi/\tau}$ . Это утверждение следует из неравенства (17). Воспользуемся для функции  $D_\mu(w)$  справедливым при  $|w| \gg 1$  и  $|w| \gg |\mu|$ \* асимптотическим представлением

$$D_\mu(w) \approx \exp(-w^2/4) w^\mu \left[ 1 - \frac{\mu(\mu-1)}{2w^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2 \cdot 4w^4} - \dots \right] - \\ - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\mu)} e^{i\pi\mu} \exp(w^2/4) w^{-\mu-1} \times \quad (21) \\ \times \left[ 1 + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2w^2} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2 \cdot 4w^4} + \dots \right].$$

Оставляя только совокупность слагаемых, имеющих своим множителем большую величину  $\exp(w^2/4)$ , и обозначив ряд в квадратной скобке в (21) через  $K(\mu)$ , получаем

$$D_{2ikH-3/2+a} \left( -\sqrt{\frac{2\xi}{\tau}} \right) = \sqrt{2\pi} \left( \frac{2\xi}{\tau} \right)^{-ikH+1/4-a/2} \frac{K(2ikH-3/2+a)}{\Gamma(-2ikH+3/2-a)}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), приходим к следующему результату:

$$N'(\xi, \tau) = \exp \left[ - \left( \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + ik_x u_x + ik_y u_y + 2\alpha_r N \right) t \right] \exp(ikz) K(2ikH-3/2+a). \quad (23)$$

Для неоднородностей достаточно малых масштабов, когда

$$kH \gg 1, \quad k_x H \operatorname{tg} \chi \gg 1, \quad (24)$$

имеем

$$K(2ikH-3/2+a) \approx 1 - \frac{k_\parallel^2 H^2 \tau^2}{\cos^2 \chi \xi^2} + \frac{k_\parallel^4 H^4 \tau^4}{\cos^4 \chi \xi^4} - \dots = \exp(-D_a k_\parallel^2 t).$$

Подставляя полученное выражение для функции  $K$  в (23), мы видим, что в рассматриваемом приближении происходит усиление неоднородностей (при  $\partial u_{iz0}/\partial z < 0$ ), их дрейф и диффузационное затухание (а также затухание из-за рекомбинации). Однако результаты таковы, что их приближенно можно получить, не принимая во внимание силу тяжести. Поэтому здесь наибольший интерес представляет формулировка условий применимости этих результатов.

\* Первое из этих неравенств эквивалентно (17), а второе можно представить в виде  $t \ll (D_a k_\parallel^2)^{-1}$ , где  $k_\parallel = k \cos \chi + k_x \sin \chi$ . Необходимость в использовании последнего возникает при  $k_\parallel H \gg 1$ .

При условии (17) для крупномасштабных неоднородностей, когда одновременно

$$kH \ll 1 \quad \text{и} \quad k_x H \tan \chi \ll 1, \quad (25)$$

при  $H = H_e$  и  $\zeta = 1$  ( $T_e = T_i$ ) с учетом выражения для коэффициента  $a$  (см. (11)) имеем у функции  $K$  тот же аргумент, что и в случае (24). Естественно, что вклад диффузии по сравнению с предшествующим случаем будет относительно меньше.

Если же при условиях (17) и (25)  $T_e \gg T_i$  и  $H \ll H_e$ , то в (23) следует подставить значения  $K(-3/2)$ . При  $\xi \gg \tau$  (см. (17)) можно считать, что  $K(-3/2) \approx 1$ . Таким образом, при небольших длительностях для крупномасштабных возмущений диффузионное затухание еще не проявляется.

#### 4. ПОВЕДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ ДЛЯ ТЕЛЬНОСТЯХ

В этом разделе мы используем общий результат (16) для определения вида возмущений электронной концентрации  $N'$  по прошествии достаточно большого интервала времени  $t$ . Если  $t$  (а также  $\tau$ ) значительны, то аргумент функции  $I_v(2\sqrt{\xi\eta}/\tau)$  в (16) должен быть мал, так что  $2\sqrt{\xi\eta}/\tau \ll 1$ . Тогда можно воспользоваться известным разложением для  $I_v(\omega)$  при  $\omega \gg 1$  [11]. Оставляя в этом разложении только основное слагаемое, приближенно имеем

$$I_v\left(\frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\tau}\right) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{\sqrt{\xi\eta}}{\tau}\right)^v. \quad (26)$$

Имея в виду, что при  $\eta \gg \tau$  вклад в интеграл в (16) нивелируется из-за фактора  $\exp(-\eta/\tau)$ , приходим к достаточному критерию применимости (26), обратному (17), а именно:

$$t \gg t_0 = H^2 / (D_a \cos^2 \chi). \quad (27)$$

Подставив выражение для  $I_v$  (26) в (16) и принимая во внимание, что [11]

$$\int_0^\infty x^{q-1} e^{-\mu x} dx = \mu^{-q} \Gamma(q),$$

приходим к результату

$$\begin{aligned} N'(\xi, \tau) &= \exp \left[ - \left( \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + i k_x u_x + i k_y u_y + 2\alpha_r N \right) t \right] \times \\ &\times \exp(-\xi/\tau) \frac{\Gamma(v/2 - a/2 - ikH + 1)}{\Gamma(v+1)} \xi^{-ikH} (\xi/\tau)^{a/2+v/2+ikH}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для крупномасштабных возмущений (25), если к тому же принять для конкретности  $\zeta = T_e/T_i = 1$ ,  $H = H_e^*$ , из (28) имеем

$$\begin{aligned} N'(\xi, \tau) &= \frac{2H^2 e^{ikz}}{t D_a \cos^2 \chi} \exp \left( - \frac{H^2}{t D_a \cos^2 \chi} \right) \times \\ &\times \exp \left[ - \left( \frac{\partial u_{iz0}}{\partial z} + i k_x u_x + i k_y u_y + 2\alpha_r N \right) t \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

\* При условии (25) для данного примера  $a = 3/2$  и  $v = 1/2$ .

При ограничении (27) в последнем соотношении фактор  $\exp[-H^2/(D_a \cos^2 \chi t)] \approx 1$ . Из формулы (29) видно, что в выражении для  $N'$  имеется характерный множитель  $t_0/t$ , определяющий фактически убывание  $N'$  во времени  $t$  (по закону  $t^{-1}$ ). В то же время следует отметить, что нарастание из-за рассматриваемой нестабильности, если  $d\ln_{t=0}/dt < 0$ , происходит по экспоненциальному закону. Обращаясь к зависимости  $N' \propto t^{-1}$ , можно констатировать, что эффект конвергенции плазмы в присутствии силы тяжести существен и как бы замедляет процесс диффузационного рассасывания неоднородностей. На эффекты компенсации влияния диффузии за счет гравитационных сил, хотя бы частичной, уже обращалось внимание, но при решении задач иного типа, чем рассмотренная в данной статье [9, 10].

Указанная тенденция при  $t \gg t_0$ , хотя и в меньшей степени по сравнению с (29), проявляется при расплывании мелкомасштабных неоднородностей (25). Мы не будем приводить здесь громоздкого выражения для  $N'$  в этом случае, которое вытекает из (28) после использования асимптотических представлений для функций  $\Gamma(\nu/2 - a/2 - ikH + 1)$  и  $\Gamma(\nu + 1)$ . Укажем только самое существенное — закон убывания  $N'$  по мере увеличения времени  $t$ . Как и в случае неоднородностей больших масштабов  $\exp[-H^2/(D_a \cos^2 \chi t)] \approx 1$ . В итоге главные изменения  $N'$  во времени из-за диффузационного расплывания определяются зависимостью

$$N' \propto (t_0/t) \sqrt{\frac{\zeta H}{2(1+\zeta)H_e} k_x H \operatorname{tg} \chi}.$$

При условии  $k_x H \operatorname{tg} \chi \gg 1$  спадание  $N'$  с ростом  $t$  оказывается более существенным, чем в случае крупномасштабных неоднородностей. Однако указанное спадание имеет степенной, а не экспоненциальный характер.

Резюмируя, можно отметить, что по крайней мере для крупномасштабных неоднородностей как в случае (17), так и обратном, учет силы тяжести существен и приводит к эффекту нивелирования демпфирующего влияния диффузии, что существенно с точки зрения вопросов об ионосферных неустойчивостях и о природе возникновения неоднородностей электронной концентрации в области  $F$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. T. Farley, Geophys. Space Sci. Revs., 12, № 2 (1974).
- 2 Б. Н. Гершман, Ю. А. Игнатьев, Г. Х. Каменецкая, Механизмы образования ионосферного спорадического слоя  $E_s$  на различных широтах, изд. Наука, М., 1976.
- 3 Б. Н. Гершман, Динамика ионосферной плазмы, изд. Наука, М., 1974.
4. R. A. Greenwald, J. Geophys. Res., 79, 4807 (1974).
5. M. K. Hudson and G. F. Keppler, J. Geophys. Res., 80, 4581 (1975).
- 6 С. Ф. Миркотан, Ю. В. Кушнеревский, сб. ·Ионосферные исследования, изд. Наука, М., № 12, 1964.
7. Б. Н. Гершман, Геомагнетизм и аэрономия, 3, 879 (1963).
8. Л. Е. Жмур, Геомагнетизм и аэрономия, 17, 134 (1977).
9. А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 18, изд. Наука, М., 1972.
10. А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Изв. вузов — Радиофизика, 15, 840 (1972).
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963,

THE INFLUENCE OF GRAVITY ON THE OCCURRENCE OF SOME  
INSTABILITIES IN THE IONOSPHERE *F* REGION*B. N. Gershman, L. E. Zhmur*

The behaviour of a plasma inhomogeneity of sinusoidal form in the ionosphere in *F* region is considered. The analysis is made taking into account the contribution of the gravity field under the conditions when the occurrence of the instability associated with the inhomogeneous character of plasma motion is possible. The instability is due to the convergence of plasma inhomogeneities in the presence of the geomagnetic field. The behaviour of inhomogeneities of different scales is defined at different moments of time.

---

УДК 621.371.25

## ОТРАЖЕНИЕ СВЕРХДЛИННЫХ ВОЛН ОТ ТЕРМИНАТОРА В ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ — ИОНОСФЕРА

*В. Г. Безродный, П. В. Блиох, И. С. Фалькович, Ю. М. Ямпольский*

В работе приведены результаты экспериментального исследования отражений СДВ-радиосигналов от области перехода «день—ночь» в волноводе Земля — ионосфера. Отраженный сигнал удалось обнаружить и выделить благодаря доплеровскому смещению его частоты, связанному с движением терминатора. Определены значения коэффициентов отражения, которые оказались порядка  $10^{-3} \div 10^{-2}$ . Выполнены оценки, согласно которым наблюдаемое отражение не удается описать в рамках плавного изменения параметров волновода в области перехода «день—ночь». В соответствии с этим решена статистическая задача рассеяния сверхдлинных волн «шероховатостью» терминатора. Показано, что резонансное рассеяние существенно усиливает отраженный сигнал. При использовании характеристик неоднородностей переходной области, не противоречащих литературным данным, удалось получить расчетные значения коэффициентов отражения, близкие к наблюдаемым экспериментально.

Несмотря на обширные исследования различных областей ионосферы, состояние нижних ее слоев изучено в настоящее время еще недостаточно. Особенно это касается варииаций ионосферных параметров в часы восхода и захода Солнца. В настоящей работе для подобных исследований предлагается использовать наблюдения за изменениями параметров СДВ-радиосигналов, распространяющихся в волноводном канале между Землей и нижней ионосферой. В частности, как будет показано ниже, результаты измерений коэффициентов отражения СДВ от области перехода «день — ночь» способствуют выбору модели неоднородной структуры перехода.

Главная экспериментальная трудность при измерении коэффициента отражения заключается в разделении слабого отраженного сигнала и прямого излучения передатчика на фоне флуктуаций их амплитуд и фаз. Мы воспользовались тем обстоятельством, что переходная

область все время движется относительно передатчика и приемника за счет вращения Земли. Отражение от движущейся границы сопровождается доплеровским смещением частоты, что позволяет не только обнаружить отраженный сигнал, но и оценить его величину.

На вход приемника, расположенного в г. Харькове, поступал квазимонохроматический сигнал  $U(t) \exp(-i2\pi f_0 t)$  с частотой  $f_0 = 16 \text{ кГц}$  (станция GBR, Лондон, длина трассы — около 2500 км). Он представлял собой суперпозицию полей регулярного сигнала  $U_0 \exp(-i2\pi f_0 t)$ , приходящего от передатчика, и флуктуи-

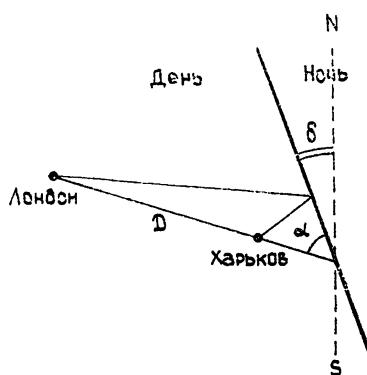


Рис. 1.

ирующих волн  $u(t) \exp(-i2\pi f_0 t)$ , возникающих в результате отражения прямой волны от терминатора и рассеяния на неоднородностях дневной и ночной частей волновода (см. рис. 1). Предполагая малость  $u(t)$  по сравнению с  $U_0$ , результирующее поле в точке наблюдения можно представить в виде

$$U(t) = U_0 \exp [\chi(t) + i\Psi(t)], \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(t) &\equiv \operatorname{Re}[u(t)/U_0] — \text{флуктуации уровня}, \\ \Psi(t) &\equiv \operatorname{Im}[u(t)/U_0] — \text{флуктуации фазы}. \end{aligned} \quad (2)$$

Результатом измерений являлись энергетические спектры флуктуаций фазы:

$$\langle G(F) \rangle = \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_0^T dt \Psi(t) e^{i2\pi F t} \right|^2 \right\rangle. \quad (3)$$

Здесь косые скобки означают усреднение по множеству полученных в измерениях реализаций  $G(F)$ ,  $T$  — длительность сеанса наблюдения.

Ожидалось, что спектр  $\langle G(F) \rangle$  будет иметь подъем в области частоты доплеровского смещения  $F = F_d$ , обусловленный вкладом в  $u(t)$  волн, отраженных от движущегося терминатора. Действительно, если бы отсутствовало рассеяние в дневном и ночном волноводах, изменения комплексного вектора  $u(t)/U_0$  со временем происходили бы по гармоническому закону  $\sim \exp(-i2\pi F_d t)$ . В соответствии с этим средние квадраты его проекций,  $\langle \chi^2 \rangle$  и  $\langle \Psi^2 \rangle$  (см. (2)), были бы равны между собой, а их сумма равнялась квадрату коэффициента отражения  $R^2$  от области перехода «день — ночь»:

$$R^2 \equiv \left\langle \left| \frac{u}{U_0} \right|^2 \right\rangle = \langle \chi^2 \rangle + \langle \Psi^2 \rangle = 2 \langle \Psi^2 \rangle. \quad (4)$$

Спектр флуктуаций фазы в этом случае имел бы вид бесконечно узкого всплеска на частоте  $F_d$ .

Площадь под этим всплеском характеризует интенсивность флуктуаций фазы  $\langle \Psi^2 \rangle$ , связанную с отражением от терминатора, и согласно (4) оказывается равной  $R^2/2$ . Можно ожидать, что поля, рассеянные разными областями волновода (дневной, ночной и переходной), будут складываться некогерентным образом. Это должно приводить к аддитивности их вкладов в  $\langle G(F) \rangle$ , а следовательно, и к сохранению величины доплеровского всплеска на спектре, а также его положения на частотной оси.

Величина  $F_d$  согласно рис. 1 определялась формулой

$$F_d = f_0 \frac{2(V/\gamma_\phi) \cos \delta (D \sin \alpha + 2V \Delta t \cos \delta)}{[D^2 + 4V \cos \delta \Delta t (D \sin \alpha + V \Delta t \cos \delta)]^{1/2}}, \quad (5)$$

где  $\Delta t$  — время, отсчитанное от момента захода Солнца над приемником,  $V_\phi \approx c$  — фазовая скорость основной волноводной моды в дневной части волновода. Из (5) следует, что величина доплеровского смещения не остается постоянной, а изменяется со временем. Причем она определяется как текущим моментом  $\Delta t$ , так и сезоном измерений (наклон терминатора  $\delta$  изменяется в течение года).

Первичным материалом для определения спектров  $G(F)$  служили регистрация моментов нулевых значений принимаемого сигнала. Функциональная схема установки и алгоритм обработки исходных данных описаны в [1]. Для проверки чувствительности системы (включая алго-

ритм обработки) нами были проведены лабораторные контрольные измерения. На вход приемного устройства подавались два сигнала от одного высокостабильного стандарта частоты: «прямой» сигнал частоты  $f_0 = 16 \text{ Гц}$  и «отраженный», частота которого с помощью фазовращателя была сдвинута относительно  $f_0$  на величину «доплеровского смещения»  $F_d$ . Необходимое значение модуля «коэффициента отражения»  $R$  моделировалось изменением соотношения амплитуд сигналов. В указанных контрольных измерениях  $F_d$  и  $R$  выбирались близкими к ожидаемым значениям соответствующих величин и были соответственно равны  $F_d = 0,05 \text{ Гц}$ ,  $R = 0,005$ .

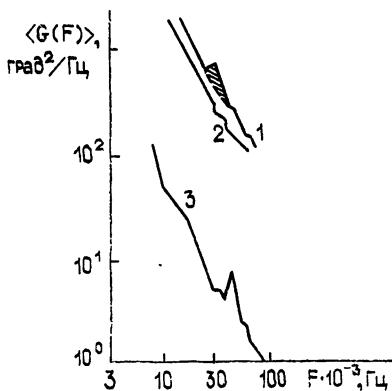


Рис. 2.

На рис. 2 кривая 3 представляет собой усредненный по 15 трехминутным реализациям энергетический спектр флуктуаций фазы суммы двух таких сигналов. Флуктуации были порождены собственными шумами измерительной установки и шумами, связанными с алгоритмом обработки. Их дисперсия в полосе анализа не превышала величины порядка  $0,04 \text{ rad}^2$ . В окрестности флуктуационной частоты  $F = F_d$  отчетливо виден всплеск спектральной плотности, удвоенная площадь под которым совпадает с квадратом модуля «коэффициента отражения»  $R^2$ . В дальнейших измерениях кривая 3 была использована

для оценки точности воспроизведения реальных спектров  $\langle G(F) \rangle$ .

Наблюдения за отражением от терминатора проводились сеансами по 3 мин в течение примерно двух часов, предшествующих заходу Солнца у приемника. Экспериментальные спектры, полученные с разрешением  $\Delta F = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}$  и усредненные по большому числу сеансов, обнаруживают возрастание энергии флуктуаций на частоте  $F_m$ , близкой к расчетным значениям  $F_d$ . Величина  $F_d$ , как указывалось выше, определялась на основании формулы (5). Хотя при выводе (5) не была учтена сферичность Земли, тем не менее оценки показывают, что для конкретной геометрии эксперимента это приводило к неточности в расчете частоты доплеровского смещения, не превышающей указанной выше величины разрешения  $\Delta F$  спектра-анализатора. Наконец, заметим, что в силу статистической природы реализаций  $G(F)$  доплеровский всплеск в каждой из них «замаскирован» шумами аппаратуры и канала связи и проявляется только после выполнения процедуры усреднения, т. е. перехода от  $G(F)$  к  $\langle G(F) \rangle$ .

В качестве контрольных были выполнены измерения в местный полдень. Как и ожидалось, в этих экспериментах характерный максимум в спектре отсутствует. На рис. 2 для примера приведены усредненные по 30 реализациям энергетические спектры флуктуаций фазы  $\langle G(F) \rangle$  для заходных (кривая 1) и полуденных (кривая 2) условий. Статистическая погрешность определения оценок спектральной плотности на флуктуационных частотах  $F \sim F_d$  не превышала 17%. Значения модуля  $R$  коэффициента отражения от терминатора определялись как корень квадратный из удвоенной площади под доплеровским всплеском, на спектре (заштрихованная область на рис. 2). Необходимо заметить, что такой способ позволял оценить коэффициент отражения только по порядку величины, поскольку само понятие всплеска на спектре являлось в данном случае достаточно интуитивным. Результаты

ты сопоставления расчетных и наблюдаемых доплеровских частот приведены в табл. 1. Экспериментальные точки отнесены к срединам частотных интервалов. Там же указаны число сеансов  $N$ , по которым проводилось усреднение, и значение модулей  $R$  коэффициентов отражения. Видно, что зависимости  $F_m$  от сезона (т. е. от угла  $\delta$ ) и от времени наблюдения  $\Delta t$  находятся согласно (5) в хорошем соответствии с поведением  $F_d$ . Это обстоятельство иллюстрируется рис. 3, на котором представлены расчетные кривые доплеровского смещения частоты  $F_d$  как функции угла наклона  $\delta$  терминатора к меридиану. Параметром для них является время наблюдения  $\Delta t$ . Точки соответствуют экспериментальным значениям  $F_m$ .

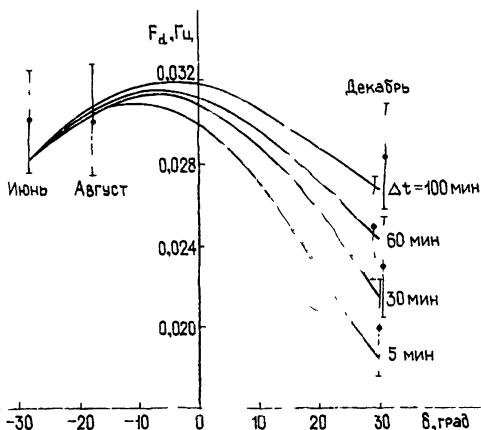


Рис. 3.

Таблица 1

Цикл	$N$	$\Delta t$	$F_d$	$F_m$	$R$
Июнь	30	0—100	0,028	0,0275	0,01
Август	36	0—100	0,03	0,0325	0,005
Декабрь	30	60—100	0,026	0,0275	0,01
Декабрь	30	30—60	0,024	0,0225	0,007
Декабрь	33	30—5	0,02	0,0225	0,01
Декабрь	15	—5—5	0,018	0,0175	0,012

Интерпретация экспериментальных значений  $R$  непосредственно связана с выбором модели перехода «день — ночь». В численных оценках будем предполагать, что переходная область имеет ширину  $L \sim 300 \div 500$  км и описывается плавным изменением высоты ионосферы  $h(x)$  от дневного значения  $h_1 \approx 60$  км до ночного  $h_2 \approx 90$  км. Поверхность Земли будем считать идеально проводящей, а электрические свойства ионосферы описывать с помощью приведенного поверхностного импеданса  $\zeta$ . Для простоты рассмотрим нормальное падение волны на волноводный переход без учета сферичности Земли и векторного характера электромагнитного поля. Заметим при этом, что неучет сферичности не должен приводить к значительным ошибкам в расчете коэффициента отражения, поскольку в формировании отраженного сигнала участвует только переходная область, размер которой мал по сравнению с радиусом Земли. В результате приходим к следующей постановке задачи. Волноводный канал, образованный поверхностью Земли  $z = 0$  и нижней границей ионосферы  $z = h(x) + \zeta_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ , см. рис. 4), возбуждается точечным электрическим диполем,

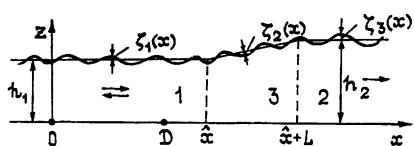


Рис. 4.

расположенным в начале координат ( $x_0=0, z_0=0$ ). «Шероховатость»  $\zeta_i(x)$  характеризует неоднородность свойств верхней стенки волновода, возникающую за счет флуктуаций параметров ионосферной плазмы, и в общем случае может описываться разными функциями в каждой из областей (дневной, ночной, переходной). Относительно статистических свойств  $\zeta_i(x)$  будем предполагать следующее:  $\langle \zeta_i(x) \rangle = 0$ ,  $\langle \zeta_i^2(x) \rangle = \sigma_i^2$ ,  $\langle \zeta_i(x) \zeta_i(x+\rho) \rangle = \sigma_i^2 W_i(\rho)$  (косые скобки по-прежнему означают статистическое усреднение). Поле  $U(x, z; x_0, z_0)$  вертикальной составляющей электрического поля в произвольной точке ( $x, z$ ) такого волновода описывается уравнением

$$\Delta U + k^2 U = -4\pi\delta(x-x_0)\delta(z-z_0) \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= 0 && \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= -ik\eta U && \text{при } z = h(x) + \zeta_i(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{-(\mu + \gamma_i)}{\sqrt{1 + (\mu + \gamma_i)^2}}$  — производная по нормали,  $\mu(x) \equiv dh(x)/dx$  и  $\gamma_i(x) \equiv d\zeta_i(x)/dx$  — соответственно регулярный и случайный наклоны.

Решение (6), (7) будем искать в первом приближении метода возмущений по малым параметрам  $\mu$ ,  $k\sqrt{\langle \gamma_i^2 \rangle}$ , представив  $U(x, z; x_0, z_0)$  в виде

$$U(x, z; x_0, z_0) = U_0(x, z; x_0, z_0) + u(x, z; x_0, z_0). \quad (8)$$

Здесь  $U_0$  — регулярный сигнал, приходящий от передатчика,  $u$  — малая добавка к полю, связанная с отражением прямой волны от термина тора и рассеянием ее на неоднородностях дневной и ночной частей волновода. В качестве функции  $U_0$  может быть использовано решение (6), (7) в приближении типа ВКБ:

$$U_0(x, z; x_0, z_0) = \frac{4\pi}{i} \sum_m A_m(x_0, z_0) A_m(x, z) \exp \left[ i \left| \int_{x_0}^x \mathbf{x}_m(\xi) d\xi \right| \right], \quad (9)$$

где

$$A_m(x, z) = \left[ \frac{1}{q_m(x) \mathbf{x}_m(x)} \frac{dq_m(x)}{dh} \right]^{1/2} \cos [q_m(x) z], \quad (10)$$

поперечные  $q_m(x)$  и продольные  $\mathbf{x}_m(x)$  волновые числа связаны обычным образом ( $\mathbf{x}_m^2(x) + q_m^2(x) = k^2$ ) и являются решениями дисперсионного уравнения

$$q_m(x) \operatorname{tg} [q_m(x) h(x)] = -ik\eta. \quad (11)$$

Поверхностный импеданс  $\eta$  во всех трех областях волновода для простоты предполагается одинаковым, хотя это ограничение и не является принципиальным.

Рассмотрим сначала регулярное отражение волны от термина тора без учета случайной неоднородности формы границы. Для этого подставим выражения (8), (9) в (6), (7), положив в них предварительно

$\zeta_i, \gamma_i \equiv 0$ . Выполняя необходимые дифференцирования и удерживая члены, линейные по  $\mu$ , для отраженного поля  $u_0 \equiv u|_{\zeta_i, \gamma_i=0}$  получим уравнение

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = -4\pi P^{(V)} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial z} &= 0 && \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} - ik\gamma u_0 &= P^{(S)} && \text{при } z = h(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Функции  $P^{(V)}$  и  $P^{(S)}$ , имеющие смысл объемных и поверхностных источников, определяются выражениями

$$\begin{aligned} P^{(V)}(x, z; x_0, z_0) &= \mu(x) \operatorname{sgn}(x - x_0) \sum_m \exp\left(i \left| \int_{x_0}^x d\xi \chi_m(\xi) \right| \right) \times \\ &\times A_m(x_0, z_0) \left[ 2\chi_m(x) \frac{\partial A_m(x, z)}{\partial h} - \frac{q_m(x)}{\chi_m(x)} \frac{\partial q_m(x)}{\partial h} A_m(x, z) \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P^{(S)}(x, z; x_0, z_0) &= 4\pi\mu(x) \operatorname{sgn}(x - x_0) \sum_m \exp\left(i \left| \int_{x_0}^x d\xi \chi_m(\xi) \right| \right) \times \\ &\times A_m(x_0, z_0) A_m(x, z) \chi_m(x). \end{aligned} \quad (15)$$

С использованием формулы Грина решение (12), (13) в первом по  $\mu$  приближении может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_0(x, z; x_0, z_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_0^{h(x_1)} dz_1 P^{(V)}(x_1, z_1; x_0, z_0) \times \\ &\times U_0(x, z; x_1, z_1) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 P^{(S)}(x_1, h(x_1); x_0, z_0) \times \\ &\times U_0(x, z; x_1, h(x_1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Входящие в (16) интегралы удается асимптотически вычислить, благодаря плавности изменений параметров волновода в области перехода «день — ночь» (о вычислении интегралов подобного сорта см., например, [2]). В результате для модуля регулярного коэффициента отражения  $R_0 \equiv |u_0/U_0|$  приходим к следующим оценкам:  $R_0 \leq \frac{\mu}{kh} e^{-kL}$ , если переходная область описывается аналитической функцией;  $R_0 \leq \frac{\mu}{kh(kL)^{p-1}}$ , если на краях перехода терпит разрыв  $p$ -я производная  $h(x)$ . Поскольку трудно предположить, чтобы форма ионосферной границы волновода имела изломы, в приведенных выражениях необходимо положить  $p \geq 2$ . Однако уже при  $p = 2$  это приводит к значениям  $R_0 < 10^{-5}$ , которые явно не согласуются с экспериментом. Таким образом, механизм регулярного отражения не объясняет экспериментально наблюдаемых величин  $R$ , и возникает необходимость решения статистической задачи об обратном рассеянии СДВ-радиосигналов случайными неоднородностями переходной области.

С этой целью подставим (8) в (6), (7). Раскладывая (7) по степеням  $\zeta_i$  и удерживая линейные по  $\zeta_i$  и  $\gamma_i$  члены, перенесем граничное условие с поверхности  $z = h(x) + \zeta_i(x)$  на невозмущенную границу  $z = h(x)$  (подробнее об этой процедуре см. [3]). В результате для определения рассеянного поля  $u$  приходим снова к выражениям (12), (13), (16), в которых, однако,

$$\begin{aligned} P^{(V)} &\equiv 0, \\ P^{(S)} &= \gamma_i \frac{\partial U_0}{\partial x} - \zeta_i \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} + k^2 \eta^2 U_0 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Как нами уже указывалось, экспериментально наблюдавшийся отраженный от терминатора сигнал был сдвинут относительно несущей частоты на величину доплеровского смещения  $F_d$ . Можно показать, что необходимым условием такого смещения является движение неоднородностей переходной области вместе с терминатором:  $\zeta_3(x) \equiv \zeta_3(x - \hat{x})$  (см. рис. 4). На возможность образования в переходной области неоднородностей, перемещающихся со скоростью терминатора, указывается, в частности, в работах [4, 5]. Поэтому будем считать последнее требование выполненным. Кроме того, предположим, что приемный пункт  $(D, 0)$  удален от передатчика и от терминатора настолько, что для описания прямого и отраженного полей пригодно однодомовое приближение (напомним, что нормальные волны высших номеров испытывают в волноводе Земля — ионосфера сильное затухание). Пренебрегая исчезающе малым регулярным отражением, выделим из флюктуационной добавки  $u$  к полю ту часть ее  $\hat{u}$ , которая обусловлена рассеянием сигнала на неоднородностях терминатора. Согласно (16), (17), (9) она может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}(D, 0; x_0, z_0) &= -\frac{4\pi}{k^2} \left( \frac{1}{q^1} \frac{dq^1}{dh} \right) \exp[i \hat{x}^1 (2\hat{x} - x)] \times \\ &\times \int_{\hat{x}}^{\hat{x}+L} dx_1 \{ ik \gamma_3(x_1 - \hat{x}) + [q^2(x_1) - k^2 \eta^2] \zeta_3(x_1 - \hat{x}) \} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{q(x_1)} \frac{dq(x_1)}{dh} \right] \cos^2[q(x_1)h(x_1)] \exp \left[ 2i \int_{\hat{x}}^{x_1} d\xi \hat{x}(\xi) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $q^1$  — поперечное волновое число основной моды дневной части волновода.

Для квадрата статистического коэффициента отражения  $\hat{R}^2 \equiv \langle |\hat{u}|^2 \rangle / |U_0|^2$  это приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \hat{R}^2 &\equiv \sigma_3^2 \int_0^L \int dx_1 dx_2 \left\{ W_3(x_2 - x_1) + \frac{k^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} W_3(x_2 - x_1)}{[q^2(x_1) - k^2 \eta^2][q^2(x_2) - k^2 \eta^2]^*} + \right. \\ &+ \left. \frac{ik \frac{\partial}{\partial x_1} W_3(x_2 - x_1)}{q^2(x_1) - k^2 \eta^2} - \frac{ik \frac{\partial}{\partial x_2} W_3(x_2 - x_1)}{[q^2(x_2) - k^2 \eta^2]^*} \right\} \times \end{aligned} \quad (19)$$

$$\times \frac{d\chi(x_1)}{dh} \frac{d\chi(x_2)}{dh} \exp \left[ 2i \int_0^{x_1} d\xi \chi(\xi) - 2i \int_0^{x_2} d\xi \chi^*(\xi) \right].$$

При выводе (19) были использованы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{k} \frac{dq(x)}{dh} &= \frac{d\chi(x)}{dh}, \quad \frac{\cos [q(x)h(x)]}{q(x)} = [q^2(x) - k^2\eta^2]^{-1}, \\ \langle \zeta_3(x_1) \gamma_3(x_2) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x_2} W_3(x_2 - x_1), \\ \langle \gamma_3(x_1) \gamma_3(x_2) \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} W_3(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Произведем в (19) замену переменных  $x_2 - x_1 = \rho$ ,  $(x_2 + x_1)/2 = \theta$  и воспользуемся тем обстоятельством, что размер переходной области  $L$  значительно превосходит длину волны:

$$kL \gg 1. \quad (20)$$

В результате выражение для  $\hat{R}^2$  может быть преобразовано к окончательному виду:

$$\hat{R}^2 = 2\pi\sigma_3^2 \hat{W}_3(2k) \int_0^L d\theta \left| \frac{d\chi(\theta)}{dh} \right|^2 \left\{ 1 + 4k^2 \frac{k^2 + \operatorname{Re}[q^2(\theta) - k^2\eta^2]}{|q^2(\theta) - k^2\eta^2|^2} \right\}, \quad (21)$$

где  $\tilde{W}_3(2k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho W_3(\rho) e^{-i2k\rho}$  — спектральная плотность неоднородностей терминатора, приводящих к резонансному рассеянию волн в обратном направлении. Для оценок зададим функцию  $\tilde{W}_3$  в виде

$$\tilde{W}_3(2k) = \frac{l_3}{\pi} \frac{1}{1 + (2kl_3)^2}. \quad (22)$$

Входящие в (22) значения параметров в соответствии с [4, 5] выберем следующими: высота неоднородностей  $\sigma_3 \sim 1 \text{ км}$ , характерный горизонтальный масштаб  $l_3 \sim 100 \text{ км}$ . Подставляя последнее выражение в (21) и полагая  $|q/k| \sim 0.1$ ,  $|\eta| \sim 0.3 \div 0.5$ ,  $|dx/dh| \sim 10^{-4} \text{ км}^{-2}$  (см. [6]), для коэффициента отражения получим величину  $\hat{R} \sim \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ , которая согласуется с приведенными выше экспериментальными данными.

В заключение сформулируем основные результаты работы.

В ходе экспериментальных исследований флюктуаций сверхдлинных радиоволн на заходе Солнца у приемного пункта удалось зарегистрировать сигнал, отраженный от области перехода «день — ночь». Частота этого сигнала сдвинута относительно несущей вследствие эффекта Доплера, связанного с движением отражающей области. Оценена величина коэффициента отражения. Проведены расчеты, которые показали, что наблюдавшееся отражение не может быть объяснено в рамках модели волновода Земля — ионосфера с плавным изменением параметров в области терминатора. В то же время в работе установлено, что резонансное рассеяние волны на случайных неоднородностях переходной области может существенно усилить отраженный сигнал. При использовании характеристик неоднородностей, не

противоречащих литературным данным, удается получить расчетные значения коэффициентов отражения, близкие к наблюдаемым экспериментально.

В заключение авторы хотят выразить свою искреннюю благодарность Б. Н. Гершману, И. М. Фуксу и В. Д. Фрейлихеру за знакомство с предварительным вариантом статьи и ряд полезных советов, а также сотрудникам кафедры радиофизики НИИФ ЛГУ, принимавшим участие в обсуждении результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Фалькович, Ю. М. Ямпольский, Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
2. А. Б. Мигдал, Качественные методы в квантовой теории, изд. Наука, М., 1975.
3. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
4. В. М. Сомсиков, Б. В. Троицкий, Геомагнетизм и аэрономия, 15, № 5, 856 (1975).
5. В. М. Сомсиков, Геомагнетизм и аэрономия, 16, № 5, 853 (1976).
6. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, А. Б. Орлов, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 3, 321 (1970).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
24 августа 1977 г.,  
после доработки  
4 мая 1978 г.

### REFLECTION OF VERY LONG WAVES FROM A TERMINATOR IN THE EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE

*V. G. Bezrodnyi, P. V. Bltokh, I. S. Fal'kovich, Yu. M. Yampol'ski*

The paper presents results of the experimental investigation of VLF-radio signal reflections from the region of „day-night“ transition in the Earth-ionosphere waveguide. The reflected signal was detected and separated due to Doppler shifting of its frequency associated with the terminator motion. The value of the reflection coefficient have been found and are of the order  $10^{-3} \div 10^{-2}$ . Estimations are made according to which the observed reflection is not described in the frames of smooth variations of the waveguide parameters in the transition region. According to this a statistical problem of very long wave scattering by „roughness“ of the terminator is solved. It is shown that the resonance scattering amplifies essentially the reflected signal. Calculated values of the reflection coefficients have been obtained by using characteristics of the transition region inhomogeneities which are in agree to the published data. These values are close to ones observed experimentally.

УДК 621.371 25

## ВЛИЯНИЕ СЛАБЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ АВРОРАЛЬНОЙ ИОНОСФЕРЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН КВ-ДИАПАЗОНА

*М. Г. Гельберг, Н. Н. Волков, Р. С. Кукушкина*

Искривление уровней равной концентрации ионосферных слоев слабыми крупномасштабными неоднородностями описано совместным распределением зенитных углов  $\theta$  и азимутов  $\varphi$  нормалей  $N(\theta, \varphi)$  к элементарным отражающим площадкам. Распределения  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  для  $E$ - и  $F$ -областей ионосферы и частот  $f = 1,84; 2,51; 3,18; 3,85$  и  $4,52$  МГц построены по измерениям углов прихода при вертикальном зондировании ионосферы в Лопарской в январе и феврале 1977 г. Показано, что шероховатость уровней равной концентрации увеличивает толщину ионосферного слоя, формирующего отраженный радиосигнал.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При наличии в ионосфере крупномасштабных неоднородностей высота  $Z$  уровня равной электронной концентрации  $n_0$  будет функцией горизонтальных координат  $x$  и  $y$ . Амплитуда отклонения  $\delta Z_m = \max |Z(x, y) - Z_0|$  от средней высоты  $Z_0$  уровня  $n_0$  зависит от относительной интенсивности неоднородностей  $\Delta n/n_0$ . Слабыми будем считать неоднородности, для которых

$$\delta Z_m/\Lambda \leqslant 0,01 \quad (1)$$

( $\Lambda$  — горизонтальный масштаб). Неравенство (1) выражает условие прихода лишь одного луча при вертикальном зондировании ионосферы [1].

По измерениям углов прихода радиоволн и скорости движения неоднородностей можно проследить детальную структуру уровней равной электронной концентрации (шероховатостей) [2]. Однако, как показали наблюдения [3], ширина спектра  $\Delta\Lambda$  неоднородностей, искривляющих уровни равной концентрации, порядка  $\Lambda$  и шероховатости имеют характер нерегулярной структуры, которую можно описать для каждого значения  $n_0$  (или соответствующей  $n_0$  электронной плазменной частоты  $f$ ) двумерным распределением  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  зенитных углов  $\theta$  и азимутов  $\varphi$  нормалей  $N(\theta, \varphi)$  к элементарным отражающим площадкам. (Размер элементарной площадки порядка радиуса первой зоны Френеля.)

В настоящей работе приведен анализ эмпирических распределений  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  для областей  $E$  и  $F$  авроральной ионосферы и электронных плазменных частот  $f = 1,84; 2,51; 3,18; 3,85; 4,52$  МГц. Показано, что вариации углов  $\theta$  и  $\varphi$  для всех  $f$  скоррелированы слабо (коэффициент корреляции  $r_{\theta\varphi} < 0,4$ ), и при вычислениях принято приближение

$$\Psi_f(\theta, \varphi) = \Psi_{1f}(\theta) \Psi_{2f}(\varphi). \quad (2)$$

Распределения  $\Psi_{2f}(\varphi)$  отличны от равномерного, и эффекты шероховатостей зависят от азимутального угла потока радиоволн.

По эмпирическим распределениям  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  были рассчитаны вероятности прохождения и отражения падающего на неоднородную ионосферу параллельного потока радиоволн. Отмечено, что шероховатость уровней равной концентрации увеличивает толщину ионосферного слоя, формирующего отраженный сигнал.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ШЕРОХОВАТОСТЕЙ УРОВНЕЙ РАВНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В АВРОРАЛЬНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Совместные распределения  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  для электронных плазменных частот  $f = 1,84; 2,51; 3,18; 3,85$  и  $4,52$  МГц в  $E$ - и  $F$ -областях ионосферы были построены по результатам измерений углов прихода радиоволн при вертикальном зондировании. Измерения проведены в январе и феврале 1977 г. в Лопарской (исправленная геомагнитная широта  $64^{\circ}5$ ) на базе ионозонда SP-3. Данные по  $F$ -области получены в утренние и полуденные часы от 8 до 12 часов местного времени. Зондирование  $E$ -области (в основном,  $E_s$  типа  $r$ ) проводилось в вечерние иочные часы от 20 до 00 LT. Метод измерения и обработки результатов изложен в [3, 4]. Время одного измерения углов прихода — 1 минута, длительность сеанса — от 20 до 50 минут. Для построения  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  на каждой частоте  $f$  было отобрано от 15 до 30 сеансов (от 300 до 1000 единичных измерений). Составлены таблицы двумерных распределений  $\theta$  и  $\varphi$ , по которым вычислены коэффициенты корреляции  $r_{\theta\varphi}$  (табл. 1). Из таблицы видно, что как в  $E$ -, так и в  $F$ -областях ионосферы корреляция в изменениях зенитных и азимутальных углов мала.

Таблица 1

Параметры распределений для  $E$ - и  $F$ -областей авроральной ионосферы

$f, M\text{Гц}$	Область $E$				$r_{\theta\varphi}$	Область $F$				$r_{\theta\varphi}$	
	$\bar{\theta}$	$\sigma_\theta$	$\bar{\varphi}$	$\sigma_\varphi$		в градусах					
1,8	5,9	3,2	186	97	0,31	5,2	2,6	186	123	0,26	
2,5	6,0	3,7	214	108	0,35	4,0	2,3	164	109	0,39	
3,2	4,0	2,6	184	93	0,37	3,2	2,0	165	112	0,40	
3,8	4,2	2,8	168	98	0,30	3,5	2,0	187	108	0,11	
4,5	4,9	2,5	172	87	0,38	3,4	1,8	182	91	0,28	

По формуле Крамера  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  можно записать в виде

$$\Psi_f(\theta, \varphi) = \Psi_{1f}(\theta) \Psi_{2f}(\varphi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_{\theta\varphi}^j}{j!} \Psi_{1f}^{(j)}(\theta) \Psi_{2f}^{(j)}(\varphi) \sigma_\theta \sigma_\varphi, \quad (3)$$

где  $\Psi_{1f}(\theta)$ ,  $\Psi_{2f}(\varphi)$  — одномерные распределения  $\theta$  и  $\varphi$ , представленные на рис. 1,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_\varphi$  — стандарты этих распределений, а  $\Psi_{1f}^{(j)}(\theta)$  и  $\Psi_{2f}^{(j)}(\varphi)$  —  $j$ -е производные по  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно. Из данных табл. 1, рис. 1 и формулы Крамера следует, что максимальная погрешность приближения (2) будет при  $\theta = 0^\circ$ , где  $\Psi_{1f}^{(1)}(\theta)$  максимально, а  $\Psi_{1f}(\theta)$  мало. Поскольку основные эффекты на распространение радиоволн оказывают элементарные отражающие площадки с большими  $\theta$ , коэффициенты корреляции  $r_{\theta\varphi} < 0,4$  и для большинства частот производные  $\Psi_{2f}^{(1)}(\varphi)$  малы, приближение (2) можно считать удовлетворительным.

Из рис. 1 и табл. 1 видно, что распределения  $\Psi_{1f}(\theta)$  в  $E$ -области имеют моду  $\theta_m \approx 3 \div 4^\circ$  для частот  $f \leq 2,51 \text{ МГц}$  и  $\theta_m \approx 2 \div 3^\circ$  для частот  $f \geq 3,18 \text{ МГц}$ . В  $F$ -области  $\theta_m \approx 2 \div 3^\circ$  для  $f \leq 2,51 \text{ МГц}$  и только для  $f = 1,84 \text{ МГц}$   $\theta_m$  оказалось  $5^\circ$ . С увеличением частоты средние  $\theta$  и стандарты  $\sigma_\theta$  убывают как в  $E$ -, так и в  $F$ -областях ионосферы.

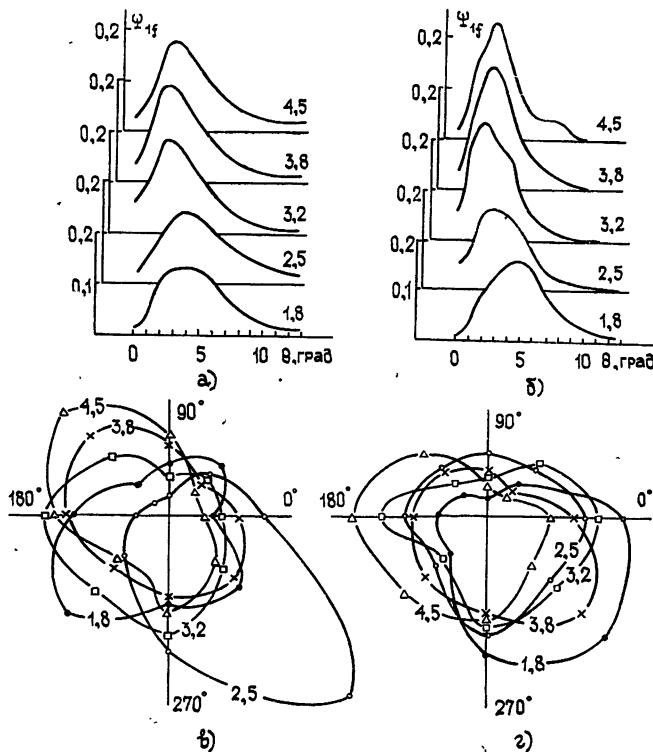


Рис. 1. Распределения  $\Psi_{1f}(\theta)$  и  $\Psi_{2f}(\varphi)$ ; а), в) —  $E$ -область, б), г) —  $F$ -область. Распределения  $\Psi_{2f}(\varphi)$  вычеркены в полярной системе координат.  $0^\circ$  — направление на север,  $90^\circ$  — на восток. Цифры у графиков показывают соответствующие плазменные частоты.

Распределения  $\Psi_{2f}(\varphi)$  для всех частот отличны от равномерного. Графики  $\Psi_{2f}(\varphi)$  в полярной системе координат вытянуты преимущественно по линии юго-восток — северо-запад, что можно объяснить горизонтальной анизотропией неоднородностей, формирующих шероховатости. Кривые  $\Psi_{2f}(\varphi)$  имеют смещение относительно центра для  $E$ -области к югу (за исключением  $f = 2,51$ ), а для  $F$ -области ионосфера — к западу. По-видимому, это смещение связано с небольшим наклоном уровней равной концентрации планетарного масштаба. Средние  $\varphi$  и стандарты  $\sigma_\varphi$  распределений  $\Psi_{2f}(\varphi)$  приведены в табл. 1. Для сравнения укажем, что при равномерном распределении  $\varphi$  от  $0$  до  $360^\circ$   $\varphi = 180^\circ$ ,  $\sigma_\varphi \approx 106^\circ$ .

### 3. ОТРАЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА РАДИОВОЛН НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРОЙ

— Положим, что на ионосферу падает параллельный поток радиоволн частоты  $f$  с углом места  $\alpha$  и азимутом  $\beta$  относительно направле-

ния на север. При вычислении вероятности отражения и прохождения потока пренебрегли эффектами поглощения радиоволн и их рефракцией. Толщу ионосферы от нижней границы области  $F$  (или  $E$ ) до высоты максимума электронной концентрации представили набором тонких слоев и предположили, что на каждой вертикали нормали  $N$  к элементарным отражающим площадкам внутри тонких слоев ориентированы одинаково, а в соседних слоях — независимо.

Пусть  $f_s$  — наибольшая электронная плазменная частота в  $s$ -м тонком слое. Отвлекаясь от дифракционных эффектов вблизи уровня отражения, полагали, что элементарная площадка  $s$ -го слоя отражает радиоволну, если луч падает на эту площадку под углом  $\gamma > \gamma_s$ . Если  $\gamma < \gamma_s$ , то радиоволна пройдет из  $s$ -го слоя в  $s + 1$ -й:

$$\gamma_s = \arccos(f/f_s); \quad (4)$$

$$\gamma = \arccos[\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha \cos(\varphi - \beta)]. \quad (5)$$

В принятой модели вероятность прохождения  $P_s^n(\alpha, \beta, f)$   $s$ -м слоем параллельного потока радиоволн частоты  $f$  будет

$$P_s^n(\alpha, \beta, f) = \frac{1}{A_s} \iint_{\gamma < \gamma_s} \cos \gamma \Psi_{f_s}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (6)$$

где

$$A_s = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \Psi_{f_s}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi$$

— нормировочный множитель распределения  $\Psi_{f_s}(\theta, \varphi)$ .

Вероятность отражения радиоволн от  $s$ -го слоя

$$P_s^0(\alpha, \beta, f) = 1 - P_s^n(\alpha, \beta, f). \quad (7)$$

В пренебрежении кратными отражениями вероятность прохождения всей толщи ионосферы определяется как

$$P^n(\alpha, \beta, f) = \prod_{s=1}^m P_s^n(\alpha, \beta, f), \quad (8)$$

где  $m$  — число тонких слоев. А вероятность отражения будет

$$P^0(\alpha, \beta, f) = 1 - P^n(\alpha, \beta, f). \quad (9)$$

В настоящей работе коррелированность шероховатостей уровней равной концентрации на разных высотах не исследовалась. За  $f_s$  тонких слоев приняты указанные выше частоты, для которых построены эмпирические распределения  $\Psi_f(\theta, \varphi)$ . Вероятности  $P_s^n(\alpha, \beta, f)$  рассчитаны для частот  $f = 5,6$  и  $8 \text{ МГц}$  для  $E$ - и  $F$ -областей ионосферы.

На рис. 2 представлена зависимость вероятностей пропускания (а следовательно, согласно (7), и вероятностей отражения) от угла места  $\alpha$  параллельных потоков радиоволн с  $f = 5$  и  $8 \text{ МГц}$ . Цифры около кривых показывают значения азимутальных углов  $\beta$ , для которых в данном варианте просчета  $P_s^n(\alpha, \beta, f)$  ( $P_s^0(\alpha, \beta, f)$ ) имели максимальное и минимальное значения. Из рисунка видно, что шероховатости уровней равной электронной концентрации делают тонкие слои «полупрозрачными» в некотором интервале углов места  $\Delta \alpha$ . Степень «полупрозрачности» существенно зависит от азимутального угла  $\beta$ . Максимальные различия в вероятностях прохождения (отражения) при фиксированных  $f$  и  $\alpha$

$$\max [P_s^n(\alpha, \beta_1, f) - P_s^n(\alpha, \beta_2, f)] \approx 0,6.$$

Видно также, что разность  $|\beta_1 - \beta_2| \approx 180^\circ$ . Другими словами, азимутальная зависимость эффекта шероховатостей на распространение радиоволн связана с неравномерностью распределения  $\Psi_{2f}(\theta, \varphi)$ .

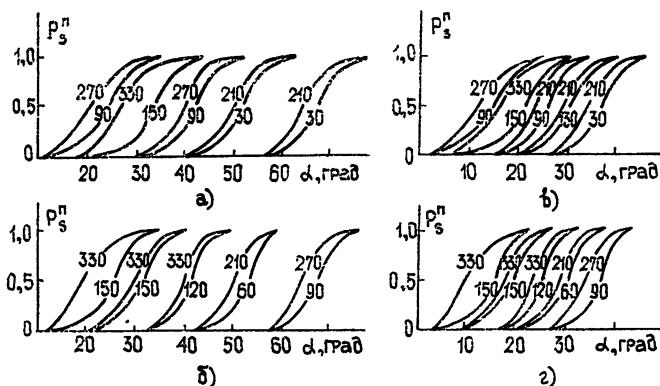


Рис. 2. Зависимость вероятности пропускания  $P_s^n(\alpha, \beta, f)$  от угла места  $\alpha$  параллельного потока радиоволн с частотами  $f = 5 \text{ МГц}$  (а, б) и  $8 \text{ МГц}$  (в, г) на  $s$ -й слой  $E$  (а, б) и  $F$  (в, г) области ионосферы;  $1-f=1,84$ ,  $2-f=2,51$ ,  $3-f=3,18$ ,  $4-f=3,85$ ,  $5-f=4,52$ . Цифры возле кривых указывают азимуты  $\beta_1$  (верхний ряд) и  $\beta_2$  (нижний ряд), для которых  $P_s^n(\alpha, \beta, f)$  имеют максимальное и минимальное значения.

Проведенные расчеты показывают, что при вычислениях  $P^n$  и  $P^0$  по формулам (8) и (10) в большинстве случаев достаточно учитывать только три слоя: слой с  $f_s = f \sin \alpha$  и слои с  $f_{s+1}$  и  $f_{s-1}$ .

Из результатов расчетов вероятностей пропускания (отражения) следует, что шероховатость уровней равной электронной концентрации в ионосфере:

а) увеличивает толщину ионосферных слоев, формирующих отраженный сигнал;

б) при распространении радиоволн на частотах  $f \sim f_0 \operatorname{cosec} \alpha$  ( $f_0$  — критическая частота ионосферных слоев) ведет к дополнительным потерям энергии;

в) делает возможным передачу сигналов на частотах выше МПЧ. Максимальное превышение частоты радиосигнала над МПЧ существенно зависит от ориентации трассы.

В работе [5] показано, что статистические характеристики отраженных радиосигналов при вертикальном и наклонном зондировании в большинстве случаев существенно различаются, что трудно объяснить в рамках теории фазового экрана с мелкомасштабными неоднородностями.

Результаты [5] можно понять, если учесть, что при наклонном зондировании эффекты шероховатостей более существенны, чем при вертикальном. Если при вертикальном отражении выполняется условие однолучевости, то при наклонном зондировании того же участка ионосферы в точку приема могут прийти два и более луча. Тогда при вертикальном зондировании замирания сигнала будут вызваны мелко-

масштабными неоднородностями, а при наклонном — в основном интерференцией нескольких лучей.

Эмпирические распределения  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  позволяют вычислить ряд важных параметров отраженного потока (угловую ширину пучка, средние отклонения потока по азимуту и зенитному углу и т. д.) и поэтому являются важными характеристиками неоднородной ионосфера.

Авторы признательны Н. Л. Волковой, Л. Е. Гореловой, Л. М. Коминой, Т. Н. Семяшкиной, Т. Н. Хорьковой и Т. П. Якубович за помощь в обработке результатов измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Whitehead, J. Atm. Terr. Phys., 9, 269 (1951).
- 2 Э. Л Афраймович, А. Д Калихман, В. А Королев, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 21, 77 (1972).
3. Н. Н. Волков, Р. С Кукушкина, А. М Ройзен, М Г Гельберг, сб Распространение радиоволн, изд Наука, Апатиты, 1977, стр. 61.
4. R. H. Clarke, Planet. Space Sci., 19, 1387 (1971).
- 5 В. А Алимов, Л М Ерухимов, Л. Ф Мироненко, Л. А Скребкова, А. В Раухлин, В П Урядов, К. И. Юрин, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 9, 1317 (1975).

Полярный геофизический институт  
Кольского филиала АН СССР

Поступила в редакцию  
27 июня 1977 г.

#### THE INFLUENCE OF WEAK LARGE-SCALE INHOMOGENEITIES OF AURORAL IONOSPHERE ON RADIO WAVE PROPAGATION IN HIGH-FREQUENCY RANGE

*M. G. Gel'berg, N. N. Volkov, R. S. Kukushkina*

Distortion of levels with equal density of ionospheric layers by weak large-scale inhomogeneities is described by mutual distribution of zenith angles  $\theta$  and azimuth  $\varphi$  of normals  $N(\theta, \varphi)$  to elementary reflecting areas. Distributions  $\Psi_f(\theta, \varphi)$  for  $E$  and  $F$  regions of the ionosphere and the frequency  $f = 1.84; 3.18; 3.85$  and  $4.52$  MHz are built according to measurements of arrival angles at the ionosphere vertical sounding in Loparskaya in January and February 1977. It is shown that roughness of levels of equal density increases the depth of the ionospheric layer which forms the reflected signal.

УДК 525.7

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАДИОХАРАКТЕРИСТИК ГРАДОВЫХ ОБЛАКОВ

*Х. Н. Кармов*

Обсуждаются особенности экспериментальных характеристик радиоизлучения атмосферы в сантиметровом диапазоне волн при наличии градовых очагов. Приведены количественные иллюстрации эффективности комплексного (активного и пассивного) радиофизического метода обнаружения градовых очагов по результатам наблюдений в предгорных и горных районах Северного Кавказа.

Весьма актуальными в настоящее время являются дистанционные исследования характеристик окружающей среды и на их основе прогнозирование стихийных явлений природы с целью оперативного принятия мер для охраны природных ресурсов Земли. Одним из опасных явлений для народного хозяйства страны представляется выпадение града. Поэтому заблаговременное определение возможного градообразования в облаках и параметров града является важной научной и практической задачей.

1. Типичные характеристики града приведены в [1]. Средние размеры градин чаще всего составляют  $1,5 \div 2$  см, для катастрофического града их размер превышает 4 см и может достигать 8 см. Длительность выпадения града над определенной местностью составляет в среднем  $\sim 5 \div 6$  мин, при этом средняя протяженность градовой дорожки равняется 15—20 км при ширине порядка 2—6 км, а максимальная протяженность ее может возрастать до 100—200 км. В равнинных районах Северного Кавказа катастрофический по размерам град выпадает 1—2 раза в год, в предгорных районах град выпадает 7—8 раз в году и еще чаще — в горных районах. Естественно, что успех воздействия на градовые процессы с целью предотвращения выпадения града может быть обеспечен в случае обнаружения града на ранней стадии градообразования и в случае определения пространственного расположения градового очага.

В настоящее время наибольшее распространение в практике градозащиты получил двухволновой метод активной радиолокации, в основе которого лежит сравнение мощностей радиоэха на волнах  $\lambda = 3,2$  и 10 см [2]. Активный двухволновой метод обеспечивает большой объем информации, необходимой для активного воздействия на градовые процессы, но этому методу присущи и определенные трудности [2, 3]. В частности, с помощью метода активной локации нельзя оценить потенциальную градоопасность облака, а также недостаточно точно определяется дальняя граница градовых очагов из-за существенного поглощения излучения на волне  $\lambda = 3,2$  см при интенсивных и крупномасштабных процессах в облаках (в этом случае в облаках присутствует

вуют градины больших размеров, для которых  $\pi d/\lambda \geq 1$ ,  $d$  — диаметр градин).

Между тем, теоретические [4] и экспериментальные [5] исследования показывают, что для определения фазового состояния облаков весьма эффективным средством является пассивная радиолокация (радиотеплолокация) на ряде длин волн. Однако из-за интегрального характера радиоизлучения облаков радиотеплолокационный метод не дает пространственного разрешения по дальности. Поэтому для решения рассматриваемой проблемы естественным представляется совместное использование активных радиолокационных и пассивных радиометрических измерений. Теоретические аспекты таких возможностей анализировались в [4, 6]. В данной статье особенности радиоизлучения атмосферы при наличии градовых облаков и эффективность комплексного (активного и пассивного) радиофизического метода для обнаружения градовых очагов обсуждаются на базе экспериментального материала.

2. Экспериментальные исследования проводились с мая по сентябрь месяцы 1974—1977 гг. на Куба-Табинском предгорном (высота над уровнем моря  $H = 780$  м) и Муштинском высокогорном ( $H = 2082$  м) научно-исследовательских полигонах Высокогорного геофизического института (г. Нальчик). Эти исследования включали радиотеплолокационные измерения излучения градовых и дождевых облаков на волнах  $\lambda = 3,2; 8,5$  см, а также одновременное наблюдение радиолокационных характеристик на волне  $\lambda = 10$  см. Измерения выполнялись с помощью аппаратуры и методики, описанных в [2, 6].

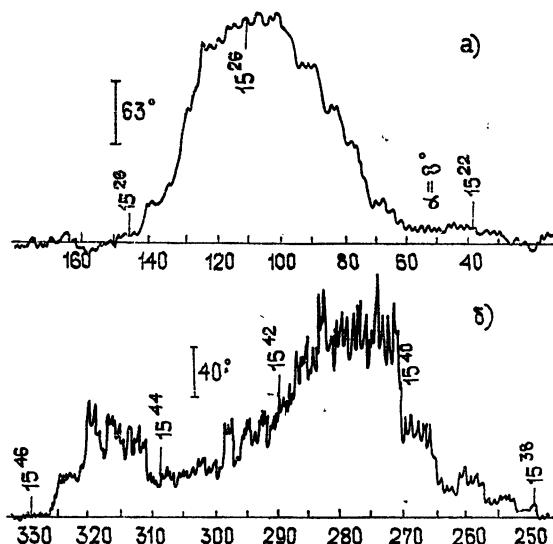


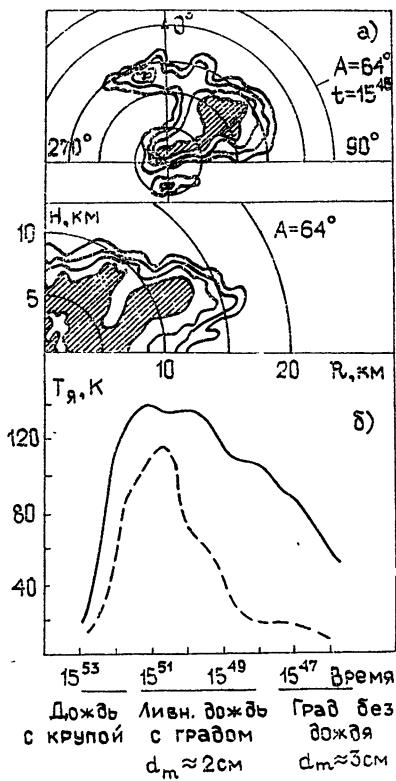
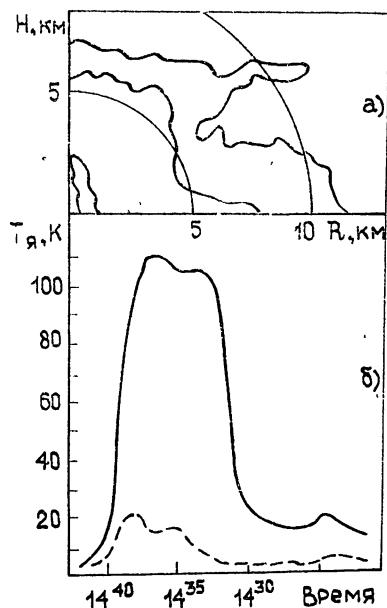
Рис. 1. Азимутальное изменение радиояркостной температуры  $T_y$  облачной атмосферы на волне  $\lambda = 3,2$  см:  
а) суперячейковое градовое облако 20.8.76; б) мультиячейковое градовое облако 27.8.76;  
на рисунке нанесены метки времени (15<sup>26</sup>, 15<sup>28</sup> и т. д.) и масштаб изменений  $T_y$ , а — угол места наблюдений.

На рис. 1 приведены характерные изменения яркостной температуры на волне  $\lambda = 3,2$  см для градовых очагов с различной структурой: для суперячейковой структуры, когда преобладает в облаке одна

большая ячейка (1—А) и для мультиячейковой структуры (1—Б). Во втором случае характерным является шумоподобное радиоизлучение, которое накладывается на постоянную составляющую радиоизлучения. Наличие шумоподобного радиоизлучения связано, на наш взгляд, с начальной стадией градообразования. Подобные эффекты также наблюдаются на волне  $\lambda = 8,5 \text{ см}$ , но они оказываются существенно меньшими по величине. Изложенное позволяет констатировать, что соответствующие процессы сопровождаются радиоизлучением, имеющим скорее тепловую, а не электрическую природу.

Рис. 2. Пространственно-временное распределение радиохарактеристик в кучево-дождовом облаке 27.6.75:

а) изоконтуры радиолокационной отражаемости  $\eta$  ( $\lambda=10 \text{ см}$ )  $\text{см}^{-1}$  через  $10 \text{ дБ}$  (сверху вниз— $\eta=10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9} \text{ см}^{-1}$ ) на диаграмме, высота  $H$ —дальность  $R$ ; б) значения яркостной температуры атмосферы  $T_y$  на волнах  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  (сплошная кривая) и  $\lambda = 8,5 \text{ см}$  (пунктирная кривая).



На рис. 2, 3 сравниваются яркостные температуры облачной атмосферы с различными осадками, измеренные на длинах волн  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  и  $\lambda = 8,5 \text{ см}$  при близких макропараметрах облаков, но при различных фазовых состояниях гидрометеоров, а следовательно, и при различных их диэлектрических свойствах. Из рисунков видно, что при

Рис. 3. Пространственно-временное распределение радиохарактеристик в градовом облаке 10.7.76:

а) изоконтуры радиолокационной отражаемости  $\eta$  ( $\lambda=10 \text{ см}$ )  $\text{см}^{-1}$ , б) значения яркостной температуры  $T_y$  атмосферы на волнах  $\lambda=3,2 \text{ см}$  и  $8,5 \text{ см}$ .

Заштрихованная область соответствует значению  $\eta=10^{-8} \text{ см}^{-1}$ ,  $d_{\max}$ —максимальный диаметр градин по наземным измерениям,  $A$ —азимут,  $t$ —время, остальные обозначения те же, что и на рис. 2.

дожде без града разница между яркостными температурами на указанных длинах волн достаточно велика  $\Delta T_{я} = [T_{я}(\lambda = 3,2 \text{ см})] - T_{я}(\lambda = 8,5 \text{ см})] \cdot 100 \text{ K}$ , в то время как при обводненном граде эта разница заметно уменьшается ( $\Delta T_{я} \sim 20 \div 30 \text{ K}$ ), т. е. соответствующие яркостные температуры становятся сравнимыми между собой.

Радиолокационная отражаемость  $\eta$  облаков без града на волне  $\lambda = 10 \text{ см}$  характеризуется более однородной структурой (для ливневых дождей без града  $\eta \sim 10^{-11} \div 10^{-9} \text{ см}^{-1}$ , а при наличии града на диаграмме обзора присутствуют и изоконтуры отражаемости  $\eta \sim 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ см}^{-1}$ ). Таким образом, рассмотренные характеристики действительно содержат информацию о градовых очагах и могут быть использованы для индикации этих очагов.

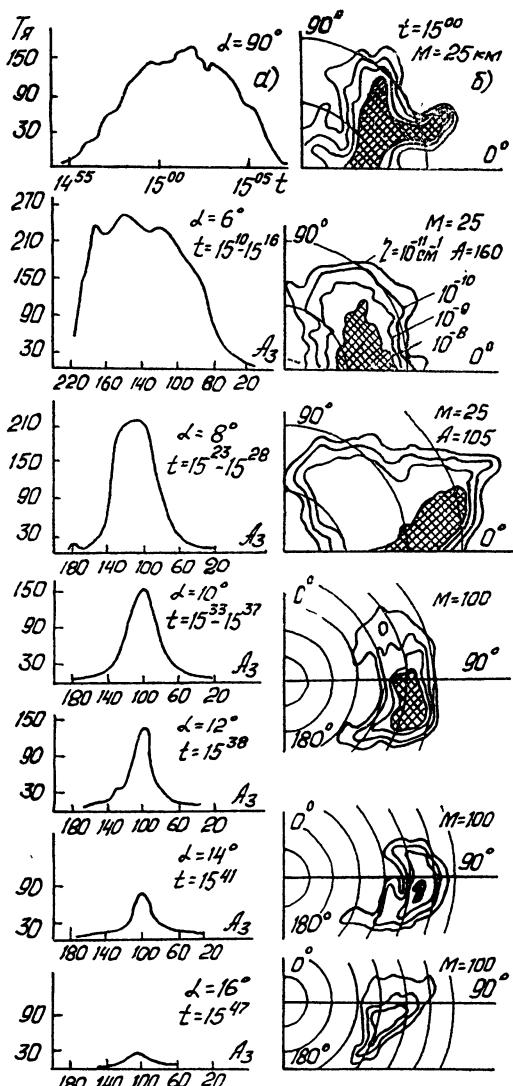


Рис. 4. Изменение радиояркостной температуры  $T_{я}$  на волне  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  (а) и радиолокационной отражаемости  $\eta$  ( $\lambda = 10 \text{ см}$ ) (б) при различных углах зондирования для опасного градового облака. Обозначения те же, что и на рис. 2, 3.

На рис. 4 приведены изменения яркостной температуры для  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  и радиолокационной отражаемости на волне  $\lambda = 10 \text{ см}$  для особо опасного градового облака в зависимости от угла места, азимута и времени. Из рисунка следует, что яркостная температура для такого облака в зенитном направлении (угол места  $\alpha = 90^\circ$ ) мало отличается от значений  $T_y$  для облаков с меньшими размерами града (соответствующая разница  $\Delta T_y$  составляет несколько градусов), но величина  $\Delta T_y$  возрастает при углах  $\alpha \sim 6 \div 8^\circ$ . Однако специфика опасного градового облака очень наглядно проявляется в относительных радиохарактеристиках облака  $\eta(\lambda = 10 \text{ см})/T_y(\lambda = 3,2 \text{ см})$  и  $\eta(\lambda = 10 \text{ см})/T_y(\lambda = 8,5 \text{ см})$  (см. рис. 4 в [7]). Значения  $\eta/T_y$  чувствительны также к росту и обводненности градин в облаке (подробнее см. в [7]). Комплексный радиофизический метод позволяет определять пространственное расположение градового очага в облаке и изменение характеристик очагов от периферии к центру и наоборот.

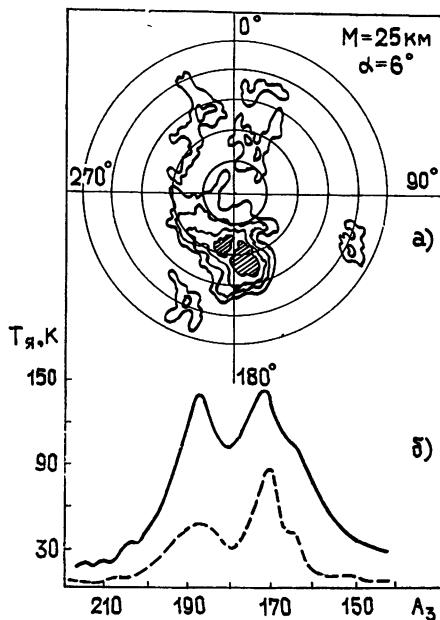


Рис. 5. Распределение радиохарактеристик в многоячейковом градовом облаке 11.7.76:

а) радиолокационная отражаемость  $\eta$  ( $\lambda = 10 \text{ см}$ ); б) радиояркостная температура на волнах  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  (сплошная линия)  $\lambda = 8,5 \text{ см}$  (пунктирная линия).

Рис. 5 иллюстрирует возможность более детальной идентификации градовых очагов при наличии многоячейковой структуры с помощью измерений теплового радиоизлучения на волне  $\lambda = 8,5 \text{ см}$ . В рассмотренном случае радиометрические измерения на волне  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  дали примерно одинаковые значения  $T_y$  в двух (разнесенных по азимуту) ячейках градовых облаков. Измерения  $T_y$  на волне  $\lambda = 8,5 \text{ см}$  показали различие в микроструктуре этих ячеек. Обнаруженное различие лучше соответствует и структуре радиоэха на волне  $\lambda = 10 \text{ см}$  (ср. рис. 4—А и 4—Б). В физическом отношении разница в значениях  $T_y$  для двух рассмотренных градовых очагов на волне  $\lambda = 8,5 \text{ см}$  в рамках дифракционной теории Ми [8] объясняется тем, что отношение  $\pi d/\lambda$  оказывается ближе к единице для второго очага, локализованного при

$A_3 \sim 170^\circ$ , чем для очага, локализованного при  $A_3 \sim 187^\circ$ . С учетом реальных размеров града возможна оптимизация радионаблюдений теплового излучения градовых очагов при  $\lambda \sim 5 \div 6$  см (см. также [6, 7]).

Приведенные результаты свидетельствуют об эффективности радиофизических методов обнаружения градовых очагов и о возможностях получения оперативной информации о физических процессах, происходящих в облаках, и о микроструктуре облачных образований.

Автор выражает глубокую признательность А. П. Наумову, М. Т. Абшаеву за ценные советы и постоянное внимание к данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. К. Сулаквелидзе, Ливневые осадки и град, Гидрометеоиздат, Л., 1967.
2. М. Т. Абшаев, Ю. А. Дадали, Метеорология и гидрология, № 9, 28 (1970).
3. P. I. Eceles and D. A. Atlas, Preprint of the 14-th Radar Meteorological Conference Tucson, Amer. Met. Soc., Boston, 1970, p. 1.
4. М. Т. Абшаев, Х. Н. Кармов, В. И. Розенберг, Тр. ВГИ, вып. 29, 18 (1975).
5. Х. Н. Кармов, Тр. ВГИ, вып. 41, 43 (1977).
6. М. Т. Абшаев, Х. Н. Кармов, Тр. ВГИ, вып. 33, 43 (1976).
7. Х. Н. Кармов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана (в печати).
8. D. E. Kegg, Propagation of shot radio waves M. I. T. Radiation Laboratory Series, 13, N. Y., 1951 (перевод. в сб Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954).

Высокогорный геофизический  
институт

Поступила в редакцию  
17 февраля 1978 г.

#### SOME RESULTS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF HAILCLOUD RADIO CHARACTERISTICS

*Kh. N. Karmov*

Peculiarities of experimental characteristics of the atmosphere radiation in the centimeter wavelength region in the presence of hailclouds are discussed. Quantitative illustrations are given of the efficiency of the complex (active and passive) radiophysical method of hail sources detection according to the observational results in the foothills and mountain regions of the North Caucasus.

УДК 538.56 . 519.25

## О ВЛИЯНИИ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ВОЛНЫ НА ДЕФОРМАЦИЮ КАУСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*M. A. Миллер, Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман*

Рассматривается эволюция каустических поверхностей, образованных излучением с хаотически модулированным фазовым фронтом, в зависимости от параметров этой модуляции. Показано, что известное уменьшение среднестатистических характеристик поля вблизи каустик может происходить как с незначительным изменением фактора фокусировки в отдельной реализации, так и с его существенным уменьшением. Введен параметр, определяющий тип каустической поверхности, а следовательно, и величину и структуру поля вблизи нее. Определены условия, при которых максимальное значение поля в отдельной реализации близко к невозмущенному, превышает его или существенно меньше.

В задачах распространения и дифракции волн хаотические искривления фазового фронта волны (обусловленные, например, случайными неоднородностями показателя преломления среды либо шероховатостями отражающих поверхностей) приводят к изменению величины и структуры поля в первую очередь в областях фокусировки волн, т. е. вблизи каустических поверхностей. Распределения средних по ансамблю реализаций амплитуды и плотности энергии поля в прикаустической зоне были получены в [1, 2]. Однако в ряде приложений важно знать не только среднестатистические характеристики, но и хотя бы приблизительную структуру, а также максимальную амплитуду волнового поля в отдельных наиболее типичных реализациях\*. В настоящей работе делается попытка установить некоторые общие закономерности (или тенденции) деформации каустических поверхностей, определяющих структуру волнового поля, в зависимости от параметров флукутирующего излучения. Для простоты исследуются только двумерные скалярные системы.

1. Некоторые общие свойства флукутирующего излучения в областях фокусировки могут быть продемонстрированы на примере достаточно подробно исследованной (см., например, [3, 4]) задачи о распределении поля в фокальной плоскости собирающей линзы. Пусть на линзу с фокусным расстоянием  $F$  падает вдоль оптической оси  $z$  волновой пучок со следующим распределением поля в плоскости апертуры линзы:  $U(x, z=0) = \exp(-x^2/d^2 + iS(x))$ , где  $S(x)$  — случайная функция, характеризуемая нормальным законом распределения, имеющая  $\bar{S} = 0$ ,  $\bar{S}^2 = S_0^2$  и радиус автокорреляции  $l_s$  (конкретный вид амплитудной зависимости не является определяющим и выбран гауссовым только для упрощения математических преобразований). В парак-

\* Под отдельной типичной реализацией мы здесь понимаем выбранную из ансамбля реализацию, у которой характерные «амплитуда» и «период» изменения не слишком отличаются от дисперсии и радиуса корреляции, задаваемых соответствующим законом распределения.

сиальном приближении ( $d \ll F$ ) поле в фокальной плоскости линзы имеет вид

$$U(x, F) = (ik_0/2\pi F)^{1/2} \exp(ik_0x^2/2F) \times \quad (1)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2/d^2 + iS(\xi) - ik_0x\xi/F) d\xi.$$

Невозмущенное распределение поля ( $S = 0$ ) является гауссовым с максимумом на оптической оси и характерной шириной  $d_F = 2F/k_0d$ :  $|U(x, F)| = (k_0d^2/2F)^{1/2} \exp(-k_0^2d^2x^2/4F^2)$ . В случае малых фазовых флуктуаций ( $S_0 \ll 1$ ) изрезанность фазового фронта пучка слабо влияет на распределение поля в фокальной плоскости. В случае больших фазовых флуктуаций ( $S_0 > 1$ ) можно выделить следующие предельные ситуации\*:

а)  $l_s^2 \gg S_0d^2$  — область, существенная для интегрирования в (1), определяется амплитудным фактором  $\exp(-\xi^2/d^2)$ . При этом для вычисления (1) достаточно разложить  $S(\xi)$  в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка. В результате получим, что распределение поля отличается от невозмущенного только сдвигом в фокальной плоскости на расстояние  $\Delta x = \frac{S'(0)F}{k_0}$ . Средний квадрат этого сдвига сов-

падает со средним квадратом поперечного смещения луча:  $\bar{\Delta x}^2 = \sigma_x^2 = (S_0F/k_0l_s)^2$ . Существенное (в масштабе  $d_F$ ) смещение максимума поля без искажения формы амплитудного распределения может иметь место в отдельных реализациях при одновременном выполнении следующих неравенств:  $l_s/d \ll S_0 \ll (l_s/d)^2$ , т. е. только для таких флюктуаций фазы, масштаб которых превышает размер линзы.

б)  $l_s \ll d$  — области (число их  $N \sim d/l_s$ ), существенные для интегрирования в (1), определяются фазовым множителем. Эти области локализованы в окрестностях точек стационарной фазы  $\xi_i$ , удовлетворяющих уравнению  $x = S'(\xi_i)F/k_0$ . Нетрудно видеть, что вероятность существования точек стационарной фазы на действительной оси  $\xi$  не мала только для точек наблюдения, лежащих в интервале  $|x| \leq S_0F/k_0l_s$ . Следовательно, в этом предельном случае характерная ширина амплитудного распределения поля в фокальной плоскости в отдельных наиболее типичных реализациях совпадает со среднеквадратичным смещением луча  $\sigma_x$ , а максимальная амплитуда приблизительно в  $(S_0d/l_s)^{1/2}$  раз меньше, чем в невозмущенной задаче\*\*.

Несмотря на то, что в рассмотренных предельных случаях распределения поля в отдельных реализациях существенно различаются, усредненные по ансамблю реализаций распределения плотности энергии совпадают и имеют вид

$$|U(x, F)|^2 = \frac{k_0d}{2F(1/d^2 + S_0^2/l_s^2)^{1/2}} \exp\left[-k_0^2x^2/2F^2\left(\frac{1}{d^2} + \frac{S_0^2}{l_s^2}\right)\right]. \quad (2)$$

Такое совпадение является очевидным следствием закона сохранения

\* Очевидно, что в пределе очень сильных случайных фазовых искажений эффекты, связанные с регулярным фазовым корректором — линзой, становятся несущественными. Здесь мы такие ситуации не рассматриваем, полагая выполненным неравенство  $(k_0l_s^2/S_0F) \gg 1$ .

\*\* Тот факт, что фокальное распределение поля в одной реализации определяется среднестатистическим параметром  $\sigma_x$ , объясняется усредняющим действием самой линзы. Это обстоятельство становится очевидным, если предположить эргодичность процесса.

потока энергии и того обстоятельства, что поле в среднем приблизительно одинаково «размазывается» (от реализации к реализации в случае «а» и в каждой отдельной реализации в случае «б») в пределах одной и той же площадки размером  $\sigma_L$ . Однако распределения других статистических моментов, например среднего квадрата интенсивности, различаются.

2. Рассмотрим теперь задачу о деформации под воздействием фазовых искажений первоначально гладкой каустики в вакууме. Амплитуда поля в окрестности гладкой каустики может быть представлена в виде [5]

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp \left[ ik_0 \left( x\theta - \frac{1}{2} y\theta^2 + \frac{1}{6} \rho\theta^3 \right) \right] d\theta, \quad (3)$$

где  $x, y$  — локальная декартова система координат с началом в точке на каустике,  $x$  — нормальная к каустике координата, направленная в область тени,  $\rho$  — радиус кривизны каустики. Интегральное представление (3) является малоугловым приближением разложения прикаустического поля по плоским волнам и получено в предположении  $k_0\rho \gg 1, |x|, |y| \ll \rho$ . Переменная интегрирования  $\theta$  имеет смысл угла между волновым вектором парциальной плоской волны и осью  $y$ .

Действуя формально и не интересуясь конкретным механизмом возникновения фазовых флуктуаций, добавим к фазе подынтегрального выражения в (3) случайную функцию угла  $S(\theta)$  с  $\bar{S} = 0, \bar{S}^2 = S_0^2$  и углом корреляции  $\theta_S$ :

$$\Psi(x, y, \theta) = k_0 \left( x\theta - \frac{1}{2} y\theta^2 + \frac{1}{6} \rho\theta^3 \right) + S(\theta). \quad (4)$$

Дифференцируя  $\Psi(x, y, \theta)$  три раза по  $\theta$  и приравнивая результаты дифференцирования нулю, получаем следующую цепочку уравнений:

$$k_0 x - k_0 y \theta + \frac{k_0}{2} \rho \theta^2 + S'(\theta) = 0; \quad (5a)$$

$$-k_0 y + k_0 \rho \theta + S''(\theta) = 0; \quad (5b)$$

$$k_0 \rho + S'''(\theta) = 0. \quad (5c)$$

Уравнение (5a) является уравнением луча, составляющего с осью  $y$  угол  $\theta$  ( $\theta \ll 1$ ). Совместная система уравнений (5a), (5b) описывает локальное поведение каустики в отдельной реализации  $S(\theta)$  (при  $S = 0$

$x_k = \frac{y_k^2}{2\rho}$ ). Наконец, совместное решение всех трех уравнений (5a) — (5c) определяет точки возврата на каустике, если таковые имеются.

Из (5c) следует, что в случае, когда  $\gamma = (S_0/k_0\rho\theta_S^3) \ll 1$ , появление точек возврата на каустике маловероятно, и каустика при уровне флуктуаций, соответствующих приведенному неравенству, остается, как правило, гладкой, плавно изогнутой относительно невозмущенной каустики (знак кривизны каустики при этом не меняется). Максимальное отклонение каустики от невозмущенной приблизительно одинаково в обе стороны и составляет по порядку величины  $\sigma_{\max} \sim S_0/k_0\theta_S$ , т. е. совпадает со среднеквадратичным смещением луча  $\sigma_L$ . Характерный продольный масштаб искажений каустики  $L_{\parallel} \sim \theta_S \rho$ .

В случае обратного неравенства  $\gamma \gg 1$  на каустике всегда оказывается счетное множество точек, в которых удовлетворяются одновременно все три уравнения (5а) — (5в). Каустика в этом случае перестает быть гладкой, на ней образуются петли с точками возврата. Путем несложных преобразований из (5а), (5б) можно получить выражение для поперечного смещения каустики относительно невозмущенной в параметрическом виде\*:

$$k_0 \sigma_{\perp} = -S'(\theta) - (S''(\theta))^2 / 2k_0 \rho, \quad (6)$$

где знак  $\sigma_{\perp}$  выбран положительным при смещении каустики в область тени.

Как видно из (6),  $\sigma_{\perp}$  имеет экстремумы в двух случаях:  $S''(\theta) = 0$  ( $\sigma_{\perp} = -S'/k_0 \sim \pm \sigma_s$ ) и  $S''' + k_0 \rho = 0$ , т. е. в точках возврата ( $\sigma_{\perp} \sim -\frac{1}{2} \gamma \sigma_s$ ). Таким образом, в область тени каустика по-прежнему сдвигается на расстояние порядка среднеквадратичного смещения, а в области света образуются петли с точками возврата, отодвинутыми от невозмущенной каустики на расстояние в  $\gamma$  раз больше, чем  $\sigma_s$ . Продольный размер петли (расстояние между точками возврата одной петли) составляет величину порядка  $S_0/k_0 \theta_s^2$ , а характерный масштаб «повторяемости» петель на каустике величину порядка  $\rho \theta_s$ . При  $\gamma \gg 1$  петли взаимно перекрываются (число перекрытий порядка  $\gamma$ ), образуя «ажурную решетку».

Очевидно, что при постепенном увеличении фазовых флуктуаций переход от гладкой каустики к каустике с самопересечениями и точками возврата осуществляется при значении  $\gamma \sim 1$ . Петли зарождаются в точках, которым соответствует минимум функции  $S'''(\theta)$ , т. е. в точках, где  $\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} = 0$  (в этих же точках равны нулю и первые три производные  $\Psi$  по  $\theta$ ). Такие точки на каустике являются точками излома и называются каустическими фокусами [6]. В отличие от всех остальных точек каустической кривой через фокус проходит бесконечное число лучей, образующих конус с углом раствора  $\Delta\theta$ , равным углу излома каустики. Очевидно, что в нашем случае предельно возможная фокусировка поля ограничена корреляционными свойствами функции  $S(\theta)$ , т. е. углы излома не могут превышать угол корреляции ( $\Delta\theta < \theta_s$ ). Минимальное значение угла излома, определяемое минимумом области, существенной для интегрирования в разложении поля по плоским волнам, в точках, где обращаются в нуль четыре первых производных функции  $\Psi(\theta)$  по  $\theta$ , составляет величину порядка  $\left( \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial \theta^5} \right)^{-1/5}$ , т. е.

$\Delta\theta \geq S_0^{-1/5} \theta_s$ . Учитывая, что изломы каустики существуют при  $\gamma \sim 1$ , получаем  $S_0^{2/15} (k_0 \rho)^{-1/3} < \Delta\theta < S_0^{1/3} (k_0 \rho)^{-1/3}$ . При этом фактор дополнительной фокусировки поля случайными фазовыми искажениями\*\*  $G = U_s/U_0$  не может превышать величины порядка  $2S_0^{2/15} \div S_0^{1/3}$ .

При  $\gamma \ll 1$  дополнительной фокусировки нет и амплитуда поля в окрестности каустики приблизительно равна невозмущенному значению  $U_0$ . При  $\gamma \gg 1$  поле максимально в точках возврата каустики ( $G_{\max} \sim S_0^{1/12} \gamma^{-1/3}$ ), при  $\gamma > S_0^{1/4}$  поле везде меньше невозмущенного,

\* Выражение (6) получается из (5а), (5б), если вычислять смещение каустики под действием флуктуаций в сечении  $y = \text{const}$ .

\*\* Он определяется отношением размеров областей, существенных для интегрирования в разложении поля по плоским волнам, в «возмущенной» и «невозмущенной» задачах.

т. е. очень сильные случайные фазовые искажения приводят к дефокусировке во всем пространстве.

Для иллюстрации эволюции каустик в зависимости от параметра  $\gamma$  на рис. 1 приведены рассчитанные на ЭВМ каустические картины для случая, когда функция  $S(\theta)$  является синусоидой,  $S(\theta) = S_0 \cos \beta \theta$ ; при этом  $\gamma = \beta^3 S_0 / k_0 \rho$  (в случае  $\gamma < 1$  каустика практически не отличается от невозмущенной, изображенной на рисунке пунктиром).

Как известно [1, 2], усредненная по ансамблю реализаций плотность энергии вблизи каустики уменьшается по сравнению с невозмущенной, если среднеквадратичное смещение луча  $\sigma_\lambda$  больше характерной ширины прикаустической зоны  $\Lambda = (\rho/2k_0)^{1/3}$ , т. е. в случае, когда  $\gamma S_0^2 > 1$ . Следовательно, среднестатистическое ослабление поля возможно и при  $\gamma \ll 1$ , когда в отдельных реализациях амплитуда поля почти не отличается от невозмущенного значения, и при  $\gamma \sim 1$ , когда в отдельных реализациях амплитуда может (в отдельных областях) существенно превышать невозмущенное значение. То, что «размах» каустики при  $\gamma \gg 1$  превышает размеры области локализации среднего квадрата амплитуды волны  $\sigma_\lambda$  (в примере с линзой они совпадали), объясняется пространственной локализацией полей в окрестностях точек возврата каустики. При усреднении по ансамблю реализаций происходит «размазывание» полей не только в поперечном, но и в продольном к невозмущенной каустике направлении. Именно это обстоятельство позволяет снять излишне жесткие ограничения применимости результатов [1, 2], предположенные в [1].

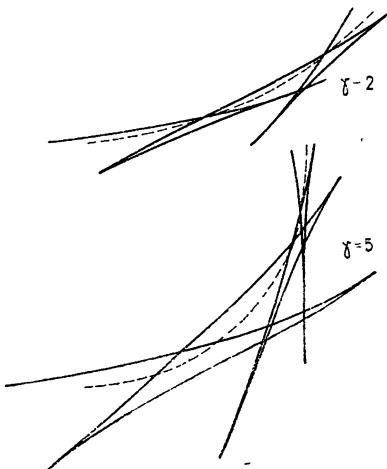


Рис. 1.

3. Итак, структура каустики определяется величиной универсального безразмерного параметра  $\gamma$ , зависимость которого от параметров флуктуирующего излучения выражена, однако, через характеристики формально введенной случайной функции  $S(\theta)$ . Пользуясь тем обстоятельством, что через дисперсию и радиус корреляции  $S(\theta)$  могут быть выражены такие «канонические» параметры флуктуирующего излучения, как дисперсия геометрооптической фазы  $\bar{\Delta\phi}^2$  и среднеквадратичное смещение луча  $\sigma_\lambda (\bar{\Delta\phi}^2 = S_0^2, \sigma_\lambda = S_0/k_0\theta_s)$ , можно представить  $\gamma$  в виде

$$\gamma = \frac{1}{2} (\sigma_\lambda/\Lambda)^3 / \bar{\Delta\phi}^2, \quad (7)$$

где  $\Lambda$  — характерная ширина прикаустической зоны в невозмущенной задаче.

Выражение (7) для  $\gamma$  оказывается не только более удобным при решении прикладных задач, но и применимым для каустик в неоднородных средах, достаточно удаленных от областей, где показатель преломления среды обращается в нуль. «Степень удаленности» определяется условием  $\left( \Lambda \frac{\partial \epsilon}{\partial n} \right) / \epsilon \ll 1$  (это требование несколько более жесткое, чем обычный критерий плавности неоднородной среды  $|\lambda \nabla \epsilon / \epsilon| \ll 1$ ).

Мы не будем приводить довольно громоздкое доказательство применимости (7) к каустикам в неоднородных средах и ограничимся только рассмотрением подтверждающего примера.

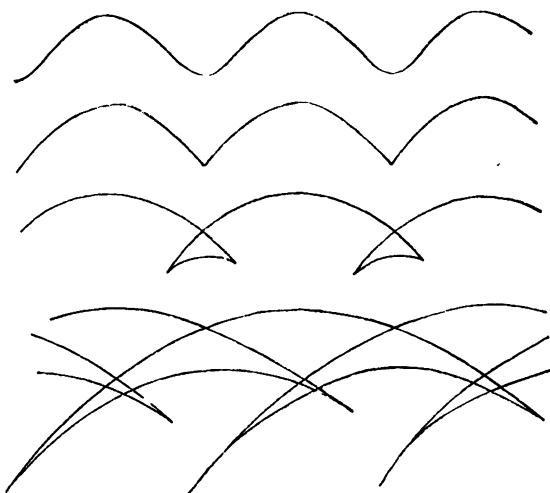


Рис. 2.

На рис. 2 приведены каустики в плоскослоистой среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(x) = 1 - \alpha x$ , образованные падающей на слой под углом  $\theta_0$  волной с синусоидально модулированной фазой:  $\phi(x=0, y) = k_0 y \sin \theta_0 + S_0 \cos hy$  (считается выполненным условие удаленности каустики от уровня  $\epsilon = 0$ , которое в данном случае записывается в виде  $\sin \theta_0 \gg (\alpha/k_0)^{1/3}$ ). Топология каустики в этой модельной задаче определяется величиной безразмерного параметра  $\tilde{\gamma} = 4 S_0 h^3 \sin^3 \theta_0 / k_0 \alpha^2$ . Каустики на рисунке изображены в системе безразмерных координат  $y_b = hy$ ,  $x_b = x \left( \frac{2S_0 h^2 \sin \theta_0}{\alpha} \right)$  для следующих

значений параметров:  $\theta_0 = \pi/6$ ,  $h/\alpha = 10^2$ ,  $\tilde{\gamma} = 0,5; 1; 2,5; 7,5$ . Подставляя в (7) выражение для максимального поперечного смещения луча и размера прикаустической зоны ( $\sigma_a \sim (2S_0 h/k_0 \alpha) \sin \theta_0$ ,  $\Lambda = (k_0^2 \alpha)^{-1/3}$ ), можно убедиться в совпадении  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$ .

4. То обстоятельство, что «грубые» признаки каустик волновых полей в системах со случайными искривлениями фазовых фронтов (наличие петель, число точек возврата и самопересечений, характерные размеры и радиусы кривизны) определяются одним безразмерным параметром  $\tilde{\gamma}$ , зависящим только от среднестатистических характеристик, позволяет говорить о следующих очевидных приложениях полученных результатов. Зная решение регулярной задачи распространения или дифракции (в пренебрежении флуктуациями показателя преломления среды или шероховатостями отражающих поверхностей) и вычислив дисперсию геометрооптической фазы и среднеквадратичное смещение лучей, можно предсказать максимально возможные значения амплитуды и приблизительную структуру волнового поля в областях фокусировки в отдельных реализациях.

С другой стороны, измерив параметры флуктуирующей каустики,

дисперсию фазы и среднеквадратичное смещение лучей, можно восстановить форму «невозмущенной» каустической поверхности, т. е., тем самым, получить информацию об источниках излучения либо о регулярных свойствах среды. При этом, конечно, возникает задача «обмера» каустик, решение которой для волн разной природы потребует различных технических средств. В оптике, например, возможно прямое фотографирование следов каустик в мелкодисперсных рассеивающих средах типа сигаретного дыма. Серия таких фотографий приведена в [7], из которых, кстати, видно, что в оптических системах параметр  $\gamma$  может меняться в широком диапазоне значений. В задачах ионосферного распространения электромагнитных волн коротковолнового диапазона мыслим другой способ измерения параметров каустик. Как известно, ионосферные слои со случайными неоднородностями электронной концентрации дрейфуют с довольно большими скоростями в горизонтальном направлении. Смена различных реализаций каустики в области фокусировки может быть проинтерпретирована как непрерывное движение одной реализации в пространстве (скорость этого движения связана со скоростью дрейфа неоднородностей довольно простыми соотношениями). По временным разверткам сигнала, принятого в нескольких разнесенных точках, можно восстановить приблизительную пространственную структуру каустики. Оценки показывают, что при типичных для коротковолнового диапазона и  $F$ -слоя ионосферы параметрах —  $\Delta \epsilon \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$ , длинах трасс распространения  $L \sim 10^5 \div 10^6$  м, размерах неоднородностей  $l \sim 10^3$  м,  $\Lambda \sim (1 \div 3) \cdot 10^2$  м — величина  $\gamma$  принимает значения от  $10^{-1}$  до  $10^3$ , т. е. экспериментально в ионосфере должны наблюдаться все этапы эволюции каустик.

В заключение отметим, что в общем случае трехмерных систем картины флуктуирующих каустических поверхностей будут более сложными, и их нельзя характеризовать только одним безразмерным параметром  $\gamma$ . Однако в ряде случаев, когда фокусировка имеет квазилиндрический характер, полученные здесь результаты могут быть применены непосредственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Баарнов, Ю. А. Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, 12, 1500 (1969).
2. Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман, Изв. вузов — Радиофизика, 12, 1836 (1969).
3. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 6, 488 (1963).
4. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 9, 33 (1964).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
6. Ю. А. Орлов, Диссертация, МЭИ, 1969.
7. M. V. Berry, Advanc. Phys., 25, 1 (1976).

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 декабря 1977 г.

#### THE INFLUENCE OF PHASE FLUCTUATIONS OF A WAVE ON THE DEFORMATION OF CAUSTIC SURFACES

*M. A. Miller, G. V. Permitin, A. A. Fraiman*

Evolution of caustic surfaces is considered which are formed by the radiation with randomly modulated phase front depending on parameters of this modulation. It is shown that the known decrease of the statistical average characteristics of the field close to caustics may occur both with the negligible variation of the focusing factor in a separate realization and with its essential decrease. A parameter is introduced which defines the type of the caustic surface and hence the value and the structure of the field close to it. Conditions are defined when the maximum value of the field in a separate realization is close to the undisturbed one, exceeds it or is essentially smaller.

УДК 535.3

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА И ЕГО РАСПАДЕ ПРИ ТЕПЛОВОМ САМОВОЗДЕЙСТВИИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

*B. B. Воробьев, B. B. Шеметов*

На основе линеаризованных уравнений для возмущений в одномерном световом пучке, распространяющемся в движущейся среде с тепловой нелинейностью, показана возможность экспоненциального роста этих возмущений при превышении интенсивности в пучке критической. Проведены численные решения нелинейных уравнений распространения гауссовых пучков, показавшие, что наличие малых начальных возмущений может приводить к распаду пучков

При распространении интенсивных лазерных пучков в средах, показатель преломления которых увеличивается с увеличением плотности мощности светового поля из-за эффекта Керра или электрострикции, возможен распад пучка на мелкомасштабные нити [1]. Это связано с неустойчивостью возмущений поля световой волны, причем наиболее неустойчивыми оказываются возмущения с поперечными масштабами, на которые приходится мощность порядка критической мощности самофокусировки.

При стационарном тепловом самовоздействии в неподвижных средах с  $\frac{dn}{dT} < 0$ , а также при нестационарном самовоздействии, когда изменение температуры пропорционально времени действия теплового излучения, такой неустойчивости нет, напротив, тепловая нелинейность среды приводит к сглаживанию возмущений, как и дифракция. Устойчивыми оказываются и флюктуации, вызываемые «замороженной» турбулентностью в движущейся среде [2]. Тепловая нелинейность приводит к уменьшению этих флюктуаций по сравнению с флюктуациями в линейной среде.

Хорошо известно, однако, что неустойчивость и связанное с ней вынужденное температурное рассеяние может возникнуть при нестационарном воздействии световой волны с температурными волнами (см., например, [3]). Аналогом температурных волн может быть перенос возмущений ветром, и следует ожидать, как на это указывалось в [4], что стационарное тепловое самовоздействие в движущейся среде также может быть неустойчивым. Однако расчетов развития возмущений ранее не было сделано, так как даже на основе линеаризованных уравнений эти расчеты усложняются тем, что принципиально необходимым при рассмотрении этой задачи является учет ограниченности пучка. Эти трудности, как показано в настоящей работе, можно обойти, рассматривая зависимость среднеквадратичных величин случайных возмущений от поперечных координат. Показано, что при плотностях мощности светового излучения, больших критической, возмущения могут экспоненциально нарастать при распространении пучка, причем в отличие от нелинейности из-за эффекта Керра наиболее неустойчивыми являются возмущения не аксиально-симметричные, а имеющие вытянутую форму вдоль направления ветра.

Проведенные численные расчеты распространения гауссовых пучков с мощностями, много большими критической, также показали, что характерная серповидная форма пучка, образующаяся при тепловом самовоздействии в движущейся среде, также не является устойчивой, возможно образование нитевидных структур, подобных тем, которые наблюдались экспериментально в работе [6]. Количество, положение и размеры нитей в значительной мере зависят от возмущений формы пучка.

### 1. РАЗВИТИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУМЕРНОМ ПУЧКЕ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ В ЕГО ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ

В пренебрежении теплопроводностью среды стационарное распространение пучка в среде, движущейся со скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ , перпендикулярной направлению распространения, описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E + k^2 \left( \frac{i\alpha}{k} + \frac{2}{n_0} \frac{dn}{dT} T \right) E = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha n_0 c |E|^2}{8\pi\rho c_p V}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} n_0$ ,  $\alpha$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $c_p$  — соответственно коэффициенты поглощения, преломления, плотность и теплоемкость среды,  $c$  — скорость света в вакууме,  $T$  — изменение температуры среды.

Переходя в уравнениях (1) к безразмерным переменным, которые были предложены в работе [6],

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{z} = z/L_T, \quad \bar{E} = (E/E_T) \exp(\alpha L_T/2)$$

$$(a — радиус пучка), \quad E_T = \sqrt{\frac{8\pi J_0}{cn_0}}, \quad \bar{T} = T \frac{\rho c_p V}{\alpha a J_0}, \quad L_T = \sqrt{\frac{n_0 \rho c_p \alpha V}{|dn/dT| \alpha J_0}},$$

$J_0 = \frac{n_0 c |E_0|^2}{8\pi}$  — максимальная интенсивность в пучке, будем иметь

$$2i \frac{\partial E}{\partial z} + \epsilon_0 \Delta_{\perp} E - \frac{2}{\epsilon_0} TE = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = EE^* \exp(-\alpha L_T z). \quad (2)$$

(Здесь и в дальнейшем черту в обозначениях новых переменных будем опускать.)

В уравнение (2) входят два безразмерных параметра:  $\epsilon_0 = \frac{L_T}{ka^2} = \sqrt{J_{kp}/J_0}$ , где  $J_{kp} = \frac{n_0 \rho c_p V}{k^2 \alpha a |dn/dT|}$  — критическая интенсивность света,

при которой нелинейность вносит искажения в распространение пучка того же порядка, что и дифракция, а также параметр  $\alpha L_T$ , характеризующий ослабление мощности пучка на длине теплового самовоздействия. В дальнейшем параметр  $\alpha L_T$  будем полагать равным нулю; при необходимости ослабление мощности будет учтено, однако это значительно загромождает расчеты.

Точных аналитических выражений для поля  $E$  нет ни для каких начальных распределений интенсивности в пучке. Наиболее простым из приближенных решений, которое можно получить в приближении геометрической оптики, является решение для случая равномерного распределения интенсивности в поперечном сечении. При этом тепловая нелинейность приводит лишь к повороту пучка без изменения его интенсивности. Рассмотрим развитие возмущений именно для этого случая. Пусть на границе нелинейной среды (при  $z = 0$ ) распределение поля имеет вид

$$E(x, y, 0) = E_0(x) + E_1(x, y), \quad (3)$$

где

$$E_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{вне этого интервала} \end{cases}$$

$E_1(x, y)$  — случайное возмущение. Переходя в уравнении (2) к комплексной фазе  $E = \exp(\Psi_0 + \Psi_1)$ , для возмущений комплексной фазы  $\Psi_1$  в системе координат, поворачивающейся вместе с пучком (при замене координаты  $x$  на  $\bar{x} = x - x_0(z)$ , где  $x_0(z) = \int_0^z \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} dz$ ,  $\varphi_0$  — «действительная» фаза невозмущенного поля), можно получить уравнения [2]

$$2i \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \epsilon_0 \Delta_{\perp} \Psi_1 = \frac{2}{\epsilon_0} T_1; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = |E_0(x)|^2 (\Psi_1 + \Psi_1^*). \quad (5)$$

Систему уравнений (4), (5) будем решать, используя преобразование Фурье по координатам  $x$  и  $y$ . Выделяя в  $\Psi_1$  действительную и мнимую части,  $\Psi_1 = \chi + i\varphi$ , для спектральной плотности флюктуаций логарифма амплитуды

$$\chi(p, q, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, y, z) e^{-ipx - iqy} dx dy$$

получим уравнение

$$\chi''(p, q, z) + \frac{\epsilon_0^2 \chi^4}{4} \chi(p, q, z) + \frac{\dot{\chi}^2}{ip} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(p - p') \chi(p', q, z) dp' = 0, \quad (6)$$

где

$$\gamma(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0^2(x) \exp(-ipx) dx, \quad \chi^2 = p^2 + q^2.$$

Из уравнения (6) можно перейти к уравнениям для среднеквадратичных величин. Введем функции

$$\Gamma_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = \langle \chi(p_1, q_1) \chi^*(p_2, q_2) \rangle = \langle \chi_1 \chi_2^* \rangle,$$

$$\Gamma_2 = \langle \chi'_1 \chi_2^* \rangle, \quad \Gamma_3 = \langle \chi_1 \chi_2'^* \rangle, \quad \Gamma_4 = \langle \chi'_1 \chi_2'^* \rangle,$$

для которых из уравнения (6) и уравнения для  $\chi^*$  получим систему уравнений\*

\* В уравнениях (6) — (13) штрих у  $p$  обозначает переменную интегрирования, а у переменных  $\chi$ ,  $\Gamma$ ,  $\Phi$  — дифференцирование по  $z$ .

$$\Gamma'_1 = \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Gamma'_2 = \Gamma_4 - \frac{\epsilon_0^2 x_1^4}{4} \Gamma_1 - \frac{x_1^2}{ip_1} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(p_1 - p') \Gamma_1(p', p_2, q_1, q_2) dp'; \quad (7)$$

$$\Gamma'_3 = \Gamma_4 - \frac{\epsilon_0^2 x_2^4}{4} \Gamma_1 + \frac{x_2^2}{ip_2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(p_2 - p') \Gamma_1(p_1, p', q_1, q_2) dp'; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_4 = & -\frac{\epsilon_0^2}{4} (x_1^4 \Gamma_3 + x_2^4 \Gamma_2) - \frac{x_1^2}{ip_1} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(p_1 - p') \Gamma_3(p', p_2, q_1, q_2) dp' + \\ & + \frac{x_2^2}{ip_2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^*(p_2 - p') \Gamma_2(p_1, p', q_1, q_2) dp'. \end{aligned} \quad (9)$$

Выделим в корреляционных функциях

$$B_n(\rho_1, \rho_2) = \int \int \int \int \Gamma_n(x_1, x_2) \exp(i x_1 \rho_1 + i x_2 \rho_2) d^2 x_1 d^2 x_2$$

зависимости от медленной координаты  $X = (x_1 + x_2)/2$  и от быстрых координат  $x = x_1 - x_2$ ,  $y = y_1 - y_2$ :

$$\begin{aligned} B_n(X, x, y) = & \int \int \int \int \Gamma_n(P, p, Q, q) \exp(ipX + iqY + ipx + iqy) \times \\ & \times dp dP dq dQ = \int \int \Phi_n(P, Q, X) e^{ipx + iqy} dP dQ, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $P = (p_1 + p_2)/2$ ,  $Q = (q_1 + q_2)/2$ ,  $p = p_1 - p_2$ ,  $q = q_1 - q_2$ .  $\quad (11)$

(В предположении об однородности случайного поля по  $y$  функция  $\Phi$  не зависит от  $Y$  и  $\Gamma(q_1, q_2) \sim \delta(q_1 - q_2)$ .) Введенная таким образом функция  $\Phi_1$  представляет собой спектр флуктуаций логарифма амплитуды, медленно меняющийся с изменением координаты  $X$  и в случае однородного поля, т. е. неограниченных пучков, не зависящий от этой координаты.

Для того, чтобы получить уравнения для величин  $\Phi_n$ , будем искать решение уравнений (7)–(10) методом итераций. Положим в нулевом приближении

$$\Gamma_n(p_1, p_2, q_1, q_2) = \Phi_n^0(P, Q) \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2).$$

Уравнения первого приближения умножим на  $\exp(ipX + iqY)$  и проинтегрируем по  $p$  и  $q$ . При этом, учитывая, что функции  $\Gamma_n(p)$  являются быстро меняющимися, величины  $p_1, p_2$  можно положить равными их средним значениям  $P = (p_1 + p_2)/2$  везде, кроме тех членов, в которых они входят в знаменатель. Воспользовавшись также соотношениями

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(p)}{ip_1} e^{ipX} dp &= f(P, X) = 2 \int_0^X E_0^2(x') e^{-i2P(X-x')} dx', \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^*(-p)}{ip_2} e^{ipX} dp &= -f^*(P, X), \end{aligned}$$

для величин  $\Phi_n(P, Q, X)$  в первом приближении получим уравнения

$$\Phi'_1 = \Phi_2 + \Phi_3, \quad (\Phi_2 + \Phi_3)' = 2 \left[ \Phi_4 - \frac{\epsilon_0^2 x^4}{4} \Phi_1 - x^2 \left( \frac{f + f^*}{2} \right) \Phi_1^0 \right],$$

$$\Phi_4' = -\frac{\epsilon_0^2 \kappa^4}{4} (\Phi_2 + \Phi_3) - \kappa^2 \left( \frac{f + f^*}{2} \right) (\Phi_2^0 + \Phi_3^0).$$

Предполагая, что подобные соотношения справедливы во всех порядках итераций, исключая функции  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ ,  $\Phi_4$ , для  $\Phi_1$  получим уравнение

$$\text{где } \Phi_1''(P, Q, X) - g^2(P, Q, X) \Phi_1 = 0, \quad (12)$$

$$g^2 = -\epsilon_0^2 (P^2 + Q^2)^2 - 2(P^2 + Q^2)(f + f^*). \quad (13)$$

В том случае, когда функция  $E_0(x)$  задается формулой (3),

$$g^2 = -\epsilon_0^2 (P^2 + Q^2)^2 - 4(P^2 + Q^2) \frac{\sin 2PX}{P} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (14)$$

Возмущения неустойчивы при  $g^2 > 0$ . Критическое значение параметра  $\epsilon_0$ , при котором появляется неустойчивость, определяется условием существования положительных корней уравнения  $\sin 2PX = -\frac{\epsilon_0^2}{4} P^3$ , которые могут быть при

$$\epsilon_0 \leq 0,468X^{3/2}. \quad (15)$$

При  $X < 1,66 \epsilon_0^{2/3}$ , т. е. в передней части пучка, возмущения всегда устойчивы.

На рис. 1 показано изменение области неустойчивости по  $P$  и  $Q$  в подветренной части пучка (при  $X = 1$ ) в зависимости от параметра  $\epsilon_0$ . Как видно из рисунка, при значении  $\epsilon_0 = 0,2$  существует одна область неустойчивости с  $\frac{\pi}{2} < P < \pi$ ,  $0 \leq Q \leq 5$ , при  $\epsilon_0 = 0,1$  появляются две неустойчивые области и т. д. С уменьшением  $\epsilon_0$  растет область волновых векторов  $Q$ , при которых возможна неустойчивость:

$$Q_{\max} \approx \frac{2}{\epsilon_0 \sqrt{P}}.$$

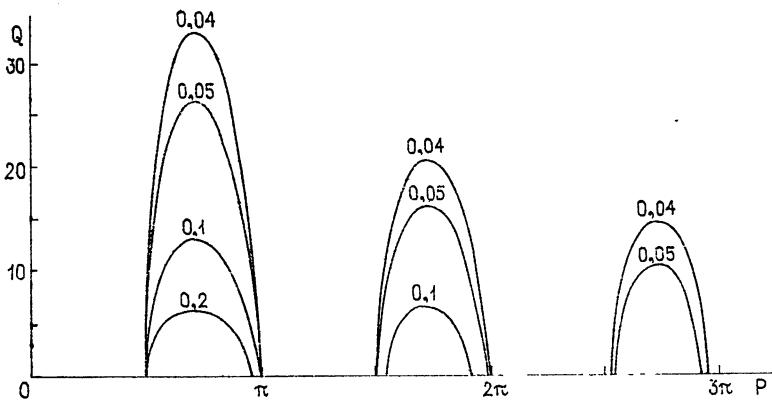


Рис. 1. Области неустойчивости возмущений в пучке с равномерным распределением интенсивности при различных значениях параметра  $\epsilon_0$ .

Максимальный инкремент неустойчивости  $g$  будет при  $P_0 = 3\pi/4$ ,  $Q_0 = (\epsilon_0 \sqrt{P_0})^{-1}$ , т. е. наиболее неустойчивыми при  $\epsilon_0 \ll 1$  являются возмущения с размерами вдоль оси  $x$ , много большими, чем вдоль оси  $y$ .

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПУЧКОВ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА $\epsilon_0$

Приведенные в предыдущем разделе приближенные расчеты развития неустойчивости в применении к реальным трехмерным пучкам могут дать лишь оценки по порядку величины тех параметров, при которых возникает неустойчивость, и качественную картину распада гауссовых пучков. Последняя показала возможность образования мелкомасштабных структур в пучках и при отсутствии начальных возмущений. При наличии же таковых распад пучков происходит значительно быстрее.

Для численного решения уравнений (2) с начальным условием  $E(x, y, 0) = \exp(-x^2/2 - y^2/2)$  и значением параметра  $\alpha L_T = 0$  использовалась неявная (абсолютно устойчивая) консервативная разностная схема. Для контроля точности счета проверялось сохранение интеграла  $\int \int |E|^2 dx dy = \pi$ . Шаги по поперечным и продольной координатам выбирались такими, чтобы значение этого интеграла отличалось от  $\pi$  не более чем на  $10^{-2}\%$ .

Основные результаты расчетов представлены на рис. 2—4. Рис. 2, 3 иллюстрируют изменение линий уровней интенсивности и значения максимальной интенсивности при распространении гауссовых пучков с различными параметрами  $\epsilon_0$ . При  $\epsilon_0 = 0,12$  и  $0,07$  распределения интенсивности в пучках на расстояниях до  $Z = 1,8$  имеют серповидную форму. Заметно смещение максимума интенсивности от оси  $x = 0$ , хотя даже при больших уровнях интенсивности ( $7/8 J_{\max}$ ) не происходит разбиения пучка. При  $\epsilon_0 = 0,04$  пучок по уровню  $7/8 J_{\max}$  распадается на два. При этом в подветренной части пучка образуются вытянутые вдоль направления ветра нитевидные структуры.

Для того, чтобы проверить выводы предыдущего раздела о том, что наиболее неустойчивыми являются возмущения, имеющие большие масштабы вдоль оси  $x$  и малые вдоль оси  $y$ , были проведены расчеты распространения пучков с распределениями поля в виде

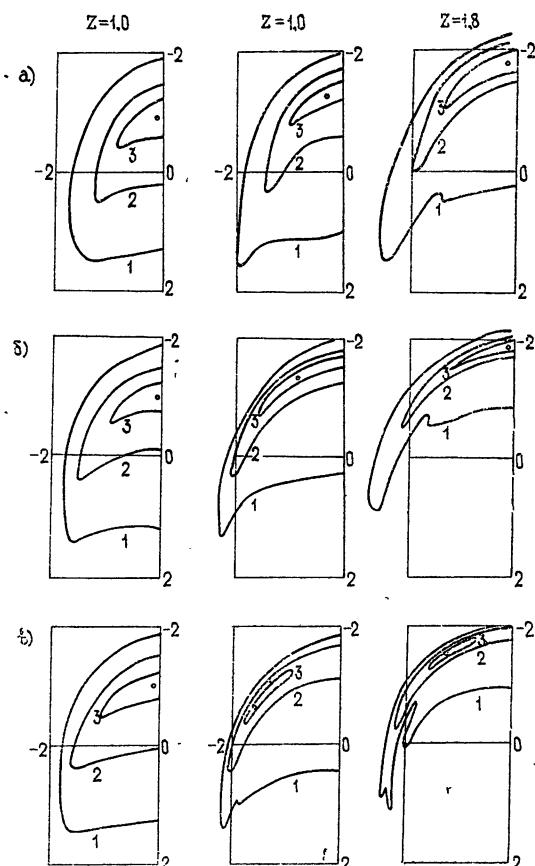


Рис. 2. Линии уровней интенсивностей  $J = \frac{1}{8} J_{\max}, \frac{1}{2} J_{\max}, \frac{7}{8} J_{\max}$  при распространении гауссовых пучков при значениях параметра  $\epsilon_0 = L_T / ka^2$ , равных 0,12 (а), 0,07(б) и 0,04(в).

$$E_1(x, y, 0) = k(1 - m \cos qy) \exp(-x^2/2 - y^2/2),$$

$$E_2(x, y, 0) = k(1 - m \cos qx) \exp(-x^2/2 - y^2/2).$$

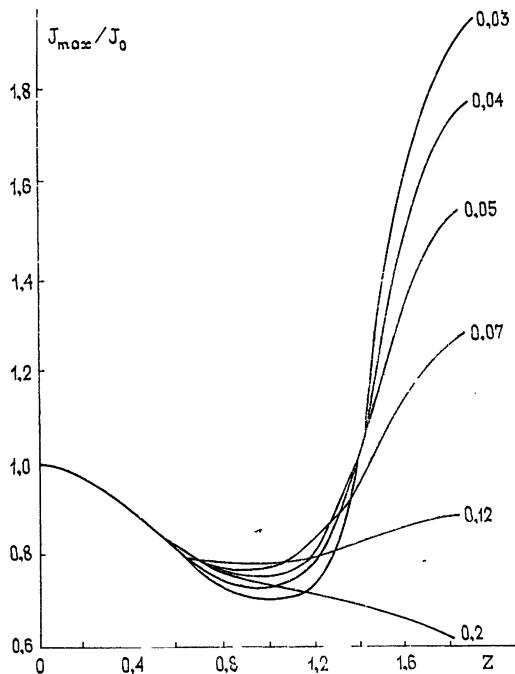
(Здесь множитель  $k$  выбирался так, чтобы сохранялась мощность в пучке.) Расчеты показали, что при  $m = 0; 1$  и распределениях поля  $E_1$  с увеличением параметра  $q$  от 2 до 10 увеличиваются и возмущения

в пучке при его распространении. На рис. 4а и 4б изображены линии уровней интенсивности возмущенных гауссовых пучков с двумя различными периодами возмущений. Из сравнения этих рисунков с рис. 2б видно, что небольшие начальные возмущения приводят к существенному перераспределению интенсивности в пучке; заметно разбиение пучка не только по высоким уровням интенсивности, но и по уровням с  $J < 1/2 J_{\max}$ . В то же время распространение возмущенного поля в виде  $E_2$  слабо отличается от распространения гауссова пучка.

Рис. 3. Изменение максимальных интенсивностей в пучках с расстоянием. У кривых указаны значения параметра  $\varepsilon_0$ .

Отметим, что при меньшей точности вычислений оказывается, что образование распределений интенсивности, подобных изображенным на рис. 4, происходит и в невозмущенных пучках при  $\varepsilon_0 \leq 0,05$ . При этом источниками возмущений являются, очевидно, ошибки вычислений.

Проведенные расчеты показывают, таким образом, возможность появления неустойчивости и образования мелкомасштабной структуры пучка при стационарном тепловом самовоздействии в движущейся среде. Отметим, что образование мелкомасштабной структуры пучка было зарегистрировано ранее в численных расчетах теплового самовоздействия сфокусированного излучения [7]. Авторы этой работы, однако, никак не интерпретировали этот факт. Экспериментально ячеистая структура пучка наблюдалась в работе [6]. Значение параметра  $\varepsilon_0$  при этом было приблизительно равно 0,07, а отношение длины кюветы к  $L_t = 3,7$ . То обстоятельство, что распад пучка не был замечен в других экспериментах, можно объяснить следующими причинами: во-первых, тем, что в ряде экспериментов для усиления нелинейных эффектов выбираются большие значения коэффициентов поглощения, так что интенсивность может сильно ослабляться на длине  $L_t$ , а во-вторых, — нестационарностью излучения; при изменениях интенсивности во времени ячеистая структура может размываться из-за движения световых пятен. Возможной причиной является также и то, что в экспериментах чаще всего измеряется распределение интенсивности в плоскости  $y = 0$ , где неустойчивость проявляется слабее, чем в «крыльях» пучка.



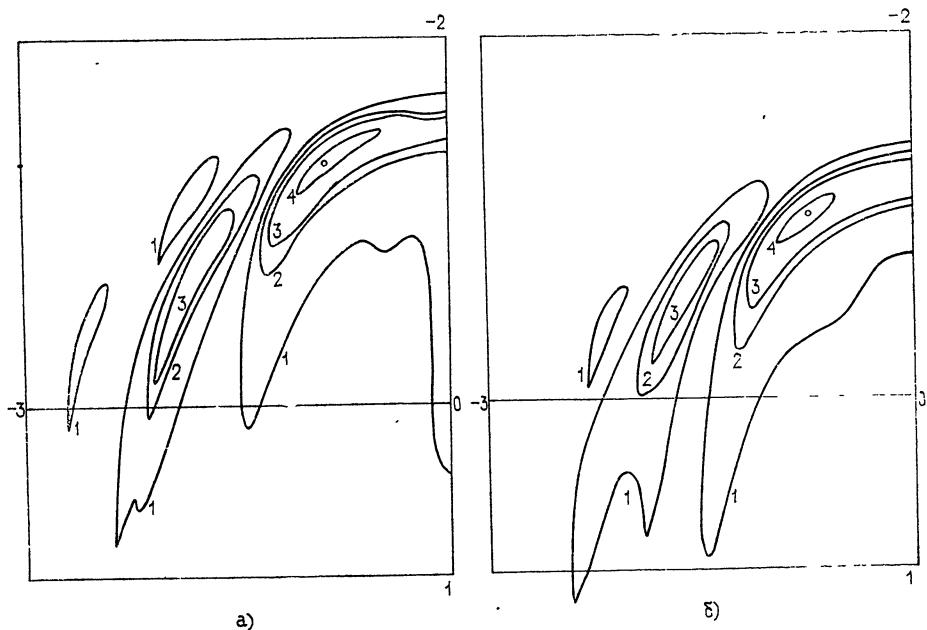


Рис. 4. Линии уровней интенсивностей 1— $1/8 J_{\max}$ , 2— $3/8 J_{\max}$ , 3— $1/2 J_{\max}$  и 4— $7/8 J_{\max}$  возмущенных гауссовых пучков с  $\epsilon_0 = 0,07$ :  
а)  $E(x, y, 0) \sim (1 - 0,1 \cos 8y) \exp(-x^2/2 - y^2/2)$ ,  $J_{\max} = 1,412$ ; б)  $E(x, y, 0) \sim (1 - 0,1 \cos 10y) \exp(-x^2/2 - y^2/2)$ ,  $m = 0,1$ ,  $x = 8$ ,  $J_{\max} = 1,471$  в плоскости  $z = -6$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 471 (1966).
2. В. В. Воробьев, Квантовая электроника, № 7, 5 (1972).
3. В. С. Старунов, И. Л. Фабелинский, УФН, 98, 441 (1969).
4. В. В. Воробьев, Диссертация, Институт физики атмосферы, АН СССР, М., 1972.
5. В. А. Петрищев, Н. М. Шеронова, В. Е. Яшин, Изв вузов — Радиофизика, 18, № 7, 963 (1975).
6. J. Wallace, J. Opt. Am., 62, 373 (1972).
7. J. N. Hayes, R. B. Ulrich and A. H. Aitken, Appl. Opt., 11, 257 (1972).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 декабря 1976 г.,  
после доработки  
17 мая 1978 г.

#### ON THE INSTABILITY OF A LIGHT BEAM AND ITS DECAY AT THE THERMAL SELF-ACTION IN MOVING MEDIUM

V. V. Vorob'ev, V. V. Shemetov

On the basis of linearized equations for disturbances in a light beam propagating in a moving medium with the thermal nonlinearity the possibility of the exponential growth of these disturbances is shown when the intensity of the beam is above the critical value. Numerical solutions of the nonlinear equations of Gaussian beam propagation have been carried out which show that such beams are unstable in the absence of the initial disturbances. When they do present the decay of the beam may occur considerably rapid.

УДК 621.373.187.4

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В КВАРЦЕВОМ ГЕНЕРАТОРЕ С АРУ

*Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, В. П. Соколов, Б. П. Фатеев*

Разработана методика расчета естественных флюктуаций в генераторах с АРУ. В качестве примера рассмотрена емкостная трехточечная схема кварцевого генератора на транзисторе. Показано, что система АРУ позволяет стабилизировать амплитуду и частоту выходного сигнала генератора.

Развитие многих областей науки и техники непрерывно повышает требования к частотной стабильности кварцевого генератора. Не случайно этому вопросу в литературе уделено большое внимание, особенно в последнее десятилетие [1—7]. Некоторое время считалось, что наиболее сильное влияние на частотные характеристики кварцевого генератора оказывает его задающий каскад, и в связи с этим в большинстве работ [1, 3, 5—7] рассматривался именно этот каскад. Вместе с тем, многолетняя практика показала [2, 4, 8], что частотные параметры генератора значительно улучшаются при введении в него системы автоматической регулировки уровня (АРУ). К сожалению, в литературе практически отсутствуют работы, посвященные исследованию флюктуационных явлений в генераторах с АРУ.

В настоящей работе рассматриваются естественные флюктуации в генераторе с системой АРУ.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА

Схема кварцевого генератора с системой АРУ, которая нашла широкое применение, приведена на рис. 1. Задающий генератор в ней собран по емкостной трехточечной схеме на транзисторе с кварцевым резонатором, работающим на механической гармонике. Сигнал задающего каскада генератора проходит через усилитель высокой частоты (УВЧ) и поступает на амплитудный детектор (АД), где вырабатывается управляющее напряжение системы АРУ ( $u_{\text{упр}}$ ), которое регулирует

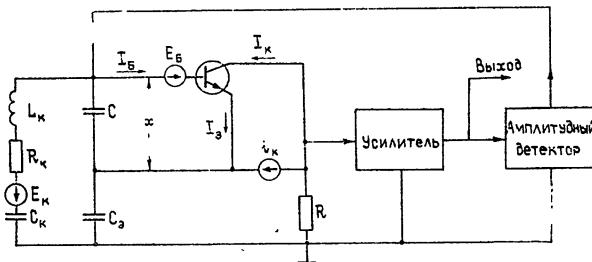


Рис. 1. Схема кварцевого генератора с системой АРУ:  $L_k$ ,  $C_k$ ,  $R_k$  — эквивалентные параметры кварцевого резонатора,  $C$  и  $C_g$  — элементы генератора,  $E_k$  и  $E_6$  — ЭДС тепловых шумов,  $i_k$  — генератор дробового шума транзистора.

напряжение смещения на базе транзистора задающего каскада генератора и тем самым стабилизирует уровень выходного сигнала.

Сначала рассмотрим статические характеристики транзистора в схеме с общим эмиттером в режиме малого сигнала. Для большого запирающего напряжения на коллекторе ( $u_k \gg m \varphi_T$ ) входную вольт-амперную характеристику транзистора, согласно формуле Молла — Эбера [9], можно представить в виде

$$I_6 = I_k \exp \left( \frac{u_6}{m \varphi_T} \right) - I_0, \quad (1)$$

где  $\varphi_T$  — температурный потенциал,  $u_6$  — напряжение на базе,  $I_k$ ,  $m$  и  $I_0$  — параметры, зависящие от конкретного транзистора.

С другой стороны, статическую передаточную характеристику по току можно аппроксимировать следующей эмпирической зависимостью:

$$I_k = \frac{\beta I_6^2 + \beta_1 I_6}{I_6 + \beta_2}, \quad (2)$$

где  $\beta$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — параметры аппроксимации.

Далее, для транзистора, работающего в режиме постоянного смещения ( $u_{60}$ ), которое регулируется управляющим напряжением, и для малого сигнала ( $x \ll m \varphi_T$ , где  $x$  — переменное напряжение на транзисторе, база — эмиттер), имеем

$$\begin{aligned} u_6 &= u_{60} + x, \\ u_{60} &= u_{6c} + u_{\text{упр}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь, подставляя (3) в (1) и (1) в (2) и проводя разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь при этом первым членом для входной характеристики и третьим для передаточной, после удаления постоянных и квадратичных членов, которые не дают вклада на частоте генерации, для характеристик транзистора получим

$$\begin{aligned} I_6 &= s_{60} (1 + h_s u_{\text{упр}}) x, \\ u_k &= s_{10} (1 + h_1 u_{\text{упр}}) x - s_{30} (1 + h_3 u_{\text{упр}}) x^3, \end{aligned} \quad (4)$$

где параметры  $s_{60}$ ,  $h_s$ ,  $s_{10}$ ,  $h_1$ ,  $s_{30}$  и  $h_3$  можно найти из соответствующих разложений.

Для описания схемы кварцевого генератора запишем для нее уравнения Кирхгофа с учетом действующих в схеме шумов. Разрешая их относительно  $x$  и учитывая (4), получим уравнение движения для генератора с АРУ:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dots) + G(u_{\text{упр}}, x, \dots) + E(t), \quad (5)$$

где  $F(x, \dots)$  — малая функция, включающая в себя потери и нелинейности генератора:

$$\begin{aligned} F(x, \dots) &= -\frac{R_k}{L_k} \ddot{x} - \frac{s_{10}x - s_{30}x^3}{L_k C C_s} - \frac{1}{L_k C} \left( \frac{1}{C_k} - \frac{1}{C_s} \right) s_{60} x - \frac{s_{60}}{C} \ddot{x} - \\ &- \frac{R_k s_{60}}{L_k C} \dot{x} + 2DC(x^2 \ddot{x} + 2x \dot{x}^2) + 2Ds_{60}^2(\ddot{x} x^2 + 6\dot{x} \dot{x} x + 2\dot{x}^3), \end{aligned}$$

$E(t)$  — малая случайная функция времени,

$$E(t) = \frac{\dot{E}_k}{L_k C} - \frac{i_k}{L_k C C_9} - \ddot{E}_6 - \frac{R_k}{L_k} \ddot{E}_6 - \omega_1^2 \dot{E}_6,$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_k} \left( \frac{1}{C_k} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C_9} \right);$$

$D$  — коэффициент, связанный с нелинейностью резонатора [6];  $G(u_{\text{упр}}, x, \dots)$  — малая функция, учитывающая действие системы АРУ на задающий каскад генератора:

$$G(u_{\text{упр}}, x, \dots) = -\frac{s_{10} h_1 x - s_{30} h_2 x^3}{L_k C C_9} u_{\text{упр}} - \frac{s_{60} h_s}{L_k C} \left( \frac{1}{C_k} + \frac{1}{C_9} \right) x u_{\text{упр}} - \frac{s_{60} h_s}{C} \ddot{x} u_{\text{упр}} - \frac{R_k s_{60}}{L_k C} h_s \dot{x} u_{\text{упр}}.$$

Полученное уравнение (5) является более сложным, чем обычное уравнение движения для томсоновского генератора, так как его правая часть содержит новый член  $G$ , который в нашем случае прямо пропорционален  $u_{\text{упр}}$ . Однако стационарное решение уравнения (5) при  $u_{\text{упр}} = 0$  находится известным образом [1, 6]:

$$x = v_0 \cos \omega_0 t, \\ v_0 = \left[ \frac{4}{3s_{30}} \left( s_{10} - R_k C C_9 \omega_1^2 - \frac{C_9}{C} s_6 \right) \right]^{1/2}, \\ \omega_0 = \left[ \omega_1^2 + \frac{R_k s_{60}}{L_k C} + \frac{1}{2} D C^2 v_0^2 \omega_1^4 + \frac{1}{8} D v_0^2 s_{60} \omega_1^6 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

В реальных системах обычно  $C_9 s_{60} \ll s_{10} C; R_k s_{60} \ll \omega_1^2 L_k C; s_6 \ll C \omega_1$ , поэтому при вычислении таких характеристик транзисторных генераторов, как амплитуда, частота и неизохронность, влиянием тока базы на них можно пренебречь.

### ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕНЕРАТОРА С СИСТЕМОЙ АРУ

Уравнение движения (5), которое получено для частного случая, можно обобщить, используя [1], для любой автоколебательной системы со звеном АРУ, имеющей  $N/2$  степеней свободы:

$$\hat{L}x = F(x, \dot{x}, \dots) + G(u_{\text{упр}}, x, \dot{x}, \dots) + E(t), \quad (7)$$

где  $\hat{L} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n}$ ,  $N$  — порядок дифференциального уравнения,  $x$  — координата, характеризующая состояние генератора. Что же касается управляющего напряжения, то, когда предельная частота транзисторов много больше частоты генерации, его можно связать с флюктуациями амплитуды ( $\alpha$ ) следующим образом:

$$\tau_{\text{APU}} \dot{u}_{\text{упр}} + u_{\text{упр}} = k v_0 \alpha + E_{\text{APU}}(t), \quad (8)$$

где  $\tau_{\text{APU}}$  и  $k$  — соответственно постоянная времени и коэффициент усиления системы АРУ, а  $E_{\text{APU}}(t)$  — флюктуации системы АРУ. Причем в реальных системах  $E_{\text{APU}}(t) \ll k v_0 \alpha(t)$ , поэтому в пределах полосы пропускания можно считать

$$u_{\text{упр}} = kv_0 \alpha(t). \quad (8a)$$

Необходимо отметить, что рассматриваемая система (7) отличается от обычной автоколебательной системы со многими степенями свободы, описанной в [1], именно этим дополнительным уравнением (8), которое отражает связь системы АРУ с задающим каскадом генератора.

Стационарное решение уравнения (7) имеет вид (5), так как  $G(u_{\text{упр}} = 0; x, \dot{x}, \dots) = 0$ , причем  $v_0$  и  $\omega_0$  находятся, как и в работе [1]. Если случайное воздействие  $E(t)$  отлично от нуля, то решение уравнения (7) ищем в виде

$$x(t) = v_0 [1 + \alpha(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (9)$$

где  $\varphi(t)$  — флуктуации фазы, причем  $\alpha(t)$  и  $\varphi(t)$  — медленные по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ , и обычно  $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle \ll \omega_0$ .

Для решения уравнения (7) подставим в его правую часть решение (9), тогда после разложения ее в ряд Фурье, а коэффициентов ряда Фурье в ряд Тейлора и ограничиваясь при этом членами порядка  $\alpha$ , с учетом результатов работы [1], получим

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}, \dots) + G(u_{\text{упр}}, x, \dot{x}, \dots) &= \Psi_F \cos \Theta + \frac{\partial \Psi}{\partial v} \alpha v_0 \cos \Theta + \Phi_F \sin \Theta + \\ &+ \frac{\partial \Phi_F}{\partial v} \alpha v_0 \sin \Theta + \Psi_G \cos \Theta + \Phi_G \sin \Theta + \text{высшие гармоники}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, подставляя (10) и (9) в (7) с учетом стационарного решения, получим следующие уравнения для  $\varphi$  и  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} a_{\parallel} v_0 \dot{\varphi} - a_{\perp} v_0 \dot{\alpha} - f_c(\alpha) &= -e_{\parallel}(t) \cos \varphi + e_{\perp}(t) \sin \varphi, \\ a_{\perp} v_0 \dot{\varphi} + a_{\parallel} v_0 \dot{\alpha} - f_s(\alpha) &= -e_{\parallel}(t) \sin \varphi + e_{\perp}(t) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f_c(\alpha) &= \left[ \Psi_F - v_0 \frac{\partial \Psi_F}{\partial v} \right] \alpha - \Psi_G^2, \quad a_{\parallel} = \sum_{n=1}^{2n < N} 2n(-1)^{n+1} a_{2n} \omega_0^{2n-1}, \\ f_s(\alpha) &= \left[ \Phi_F - v_0 \frac{\partial \Phi_F}{\partial v} \right] \alpha - \Phi_G, \quad a_{\perp} = \sum_{n=0}^{2n+1 < N} (2n+1)(-1)^n a_{2n+1} \omega_0^{2n}, \end{aligned}$$

$$e_{\parallel}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E(\xi) \cos \omega_0 \xi d\xi,$$

$$e_{\perp}(t) = -\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E(\xi) \sin \omega_0 \xi d\xi.$$

Разрешая систему (11) относительно  $\alpha$  и  $\varphi$ , опуская при этом члены со второй и более высокими степенями по  $\alpha$  и используя метод статистической эквивалентности [1], получим систему линейных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -p_{\parallel} \alpha + \frac{a_{\parallel} e_{\perp}(t) + a_{\perp} e_{\parallel}(t)}{v_0 \delta}, \\ \dot{\varphi} &= -q_{\parallel} \alpha + \frac{a_{\perp} e_{\perp}(t) - a_{\parallel} e_{\parallel}(t)}{v_0 \delta}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\delta = a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2$ ,  $p_{\Sigma} = p + Mk$ ,  $q_{\Sigma} = q + Hk$ ,  $q$  и  $p$  — соответственно неизохронность и прочность предельного цикла генератора без АРУ [1], а  $M$  и  $H$  определяются с точностью до членов порядка малости  $\alpha$  следующими соотношениями:

$$M = \frac{a_{\parallel}\Phi_g - a_{\perp}\Psi_g}{\alpha v_0 k \delta}, \quad (13)$$

$$H = \frac{a_{\parallel}\Psi_g + a_{\perp}\Phi_g}{\alpha v_0 k \delta}.$$

В дальнейшем величину  $M$  будем называть активным параметром связи задающего каскада генератора со звеном АРУ, а величину  $H$  — реактивным параметром связи. Следует отметить, что при выключении звена обратной связи ( $k = 0$ ) система уравнений (12) переходит в известную [1], а условием устойчивой работы генератора с АРУ, найденным из полученных уравнений (12), является  $k > -p/M$ .

### СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАТОРА

Разрешая далее систему (12), для амплитудного  $S_a(\omega)$  и частотного  $S_v(\omega)$  спектров, а также для четной  $S_{av}^0(\omega)$  и нечетной  $S_{av}^1(\omega)$  компонент их совместного спектра получим

$$S_a(\omega) = \frac{2S_E(\omega_0)}{\delta v_0^2(\omega^2 + p_{\Sigma}^2)},$$

$$S_{av}^0 = \frac{2S_E(\omega_0)(q + Hk)}{\delta v_0^2(\omega^2 + p_{\Sigma}^2)}, \quad (14)$$

$$S_v(\omega) = \frac{2S_E(\omega_0)}{\delta v_0^2} \left( 1 + \frac{q_{\Sigma}^2}{\omega^2 + p_{\Sigma}^2} \right), \quad S_{av}^1(\omega) = 0,$$

где  $S_E(\omega_0)$  — спектр случайной функции  $E(t)$  на частоте  $\omega_0$ .

Начнем анализ с амплитудных флуктуаций (см. рис. 2). Их спектр существенно зависит только от активного параметра связи: при положительной связи ( $-p < Mk < 0$ ) величина функции  $S_a(\omega)$  возрастает, а ее полуширина уменьшается, и, наоборот, при слабой отрицательной связи ( $0 > Mk \sim p$ ) происходит уменьшение  $S_a(\omega)$  и увеличение ее полуширины, причем сильной отрицательной связи ( $Mk > p$ ) соответствует значительное уменьшение  $S_a(\omega)$ .

Если в качестве интегральной характеристики амплитудных флуктуаций выбрать дисперсию

$$\delta_a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\omega) d\omega = \frac{2\pi S_E(\omega)}{\delta v_0^2 p_{\Sigma}}, \quad (15)$$

то легко видеть, что она уменьшается, если прочность предельного цикла генератора с АРУ  $p_{\Sigma}$  растет.

Учитывая важность параметра  $p_{\Sigma}$ , рассмотрим воздействие на него системы АРУ на примере емкостной трёхточечной схемы. Для этого, используя (5), (6) и (3), получим выражения для мощности колебаний, поступающей на кварцевый контур ( $P_G$ ), и мощности потерь в генераторе ( $P_L$ ):

$$P_G = \frac{Cv^2}{2C_0} \left\{ s_{10} [1 + h_1 k (v - v_0)] - \frac{3}{4} s_{30} v^2 [1 + h_2 k (v - v_0)] \right\}, \quad (16)$$

$$P_L = \frac{v^2}{2} \{ R_k \omega_0^2 C^2 + s_{60} [1 + h_s k (v - v_0)] \},$$

где  $v = v_0 (1 + \alpha)$ .

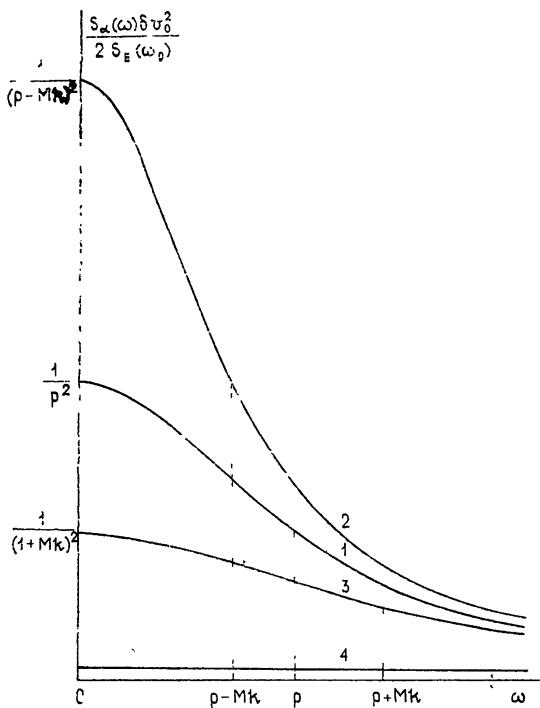


Рис. 2. Спектр амплитудных флюктуаций:  
1— $k=0$ , 2— $-p < M_k < 0$ , 3— $0 > M_k \sim p$ , 4— $M_k \gg p$ .

На основании (16) можно показать, что точка пересечения зависимостей  $P_G(v^2)$  и  $P_L(v^2)$  является устойчивой (рис. 3), и при этом выполняются следующие равенства:

$$\left[ \frac{dP_L}{d(v^2)} - \frac{dP_G}{d(v^2)} \right] \Big|_{k=0} = L_k C^2 \omega_0^2 p, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{dP_L}{d(v^2)} - \frac{dP_G}{d(v^2)} \right] \Big|_{k \neq 0} - \left[ \frac{dP_L}{d(v^2)} - \frac{dP_G}{d(v^2)} \right] \Big|_{k=0} = \frac{1}{2} L_k C^2 \omega_0^2 (p_{\Sigma} - p).$$

Полученные соотношения показывают, что использование АРУ позволяет повышать прочность предельного цикла генератора путем

увеличения крутизны характеристики транзистора задающего каскада (см. рис. 3б). Вообще говоря, звено обратной связи приводит также к небольшому изменению члена  $dP_L/d(v^2)$ , однако это изменение очень мало ( $R_{\text{кф}}^2 C^2 \gg s_0$ ) и не представляет интереса. Таким образом, звено АРУ позволяет значительно сократить время возвращения автоколебательной системы в равновесное состояние и заметно понизить уровень амплитудных флуктуаций.

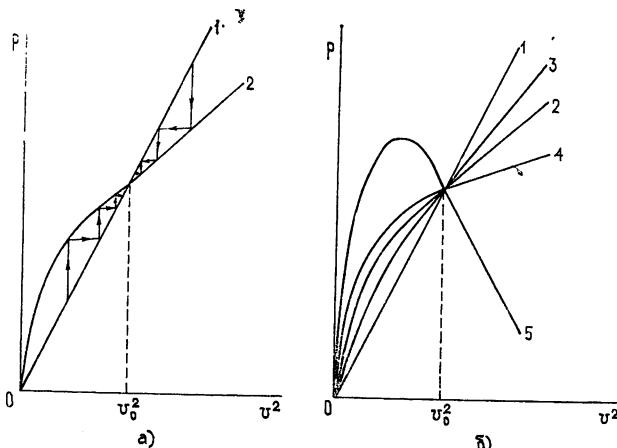


Рис. 3. Зависимости мощности колебаний, поступающих на кварцевый контур  $P_G$  (кривые 2—5), и мощности потерь в генераторе  $P_L$  (кривая 1) от квадрата амплитуды колебаний  $v^2$ :

а) генератор без АРУ, б) генератор с АРУ;  
2— $k=0$ , 3— $-p < M_k < 0$ , 4— $0 > M_k \sim p$ , 5— $M_k \gg p$ .

Перейдем далее к анализу частотных шумов. Спектр этих флуктуаций состоит из двух компонент. Первая представляет белый шум и не зависит от действия системы АРУ. Вторая же имеет резонансный вид и, в отличие от частотного спектра томсоновского генератора [1], может меняться по ширине и по величине при изменении параметров звена обратной связи. Рассмотрим дисперсию флуктуаций, связанных с этой компонентой:

$$\sigma_{v,2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{v,2}(\omega) d\omega = \frac{2\pi S_E(\omega_0) q^2}{\delta v_0^2 p} . \quad (18)$$

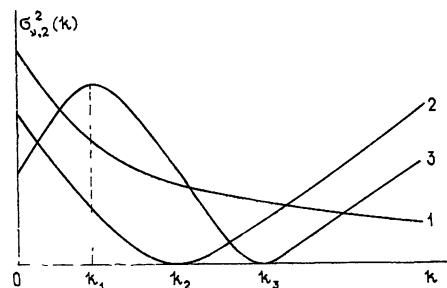
Из (14) и (18) легко видеть, что в генераторах с АРУ можно уменьшить частотные флуктуации только за счет снижения второй компоненты, при этом эффективность звена обратной связи будет выше для генераторов с большим отношением  $q/p$ .

Уменьшения  $\sigma_{v,2}^2$  можно достигать в зависимости от конкретной схемы разными путями, из которых следует выделить три наиболее интересных случая (рис. 4). В первом из них  $\sigma_{v,2}^2(k)$ , как и дисперсия амплитудных флуктуаций, монотонно убывает с увеличением  $k$ . Во втором случае зависимость  $\sigma_{v,2}^2(k)$  имеет ярко выраженный минимум. И, наконец, в третьем случае появляется дополнительный максимум. Интересно заметить, что две последние зависимости принимают нулевое значение при  $k = -q/H$ .

Следовательно, в генераторе с АРУ, в отличие от обычного кварцевого генератора [1, 6], можно снижать уровень частотных флюктуаций путем уменьшения его неизохронности  $q_{\varepsilon}$ . Рассмотрим подробнее механизм действия системы АРУ на параметр  $q_{\varepsilon}$  для конкретной схемы генератора (рис. 1). Для этого проанализируем зависимость частоты генерации от параметра  $s_6$ . Существование этой зависимости объясняется тем, что входное сопротивление транзистора, пропорциональное  $s_6^{-1}$ , шунтируя емкость генератора  $C$ , сдвигает фазу колебания в контуре и тем самым придает связи системы АРУ с задающим каскадом генератора реактивный характер. Наличие реактивного параметра связи и позволяет уменьшать величину неизохронности генератора путем выбора коэффициента усиления звена АРУ.

Рис. 4. Зависимость дисперсии частотных флюктуаций  $\sigma_{v,2}^2$  от коэффициента усиления системы АРУ  $k$ :

$$1 - H_1 = 0, \quad 2 - 2p_2q_2H_2 - q_2^2M_2^2 < 0, \\ 3 - 2p_3q_3H_3 - q_3^2M_3^2 > 0, \\ k_1 = \frac{M_3q_3 - 2H_3p_3}{M_3H_3}, \quad k_2 = -\frac{q_2}{H_2}, \quad k_3 = -\frac{q_3}{H_3}.$$



Проиллюстрируем полученные результаты для конкретного генератора (рис. 1б). Используя (1), (2) и (4), для транзистора 2Т306Б при  $u_b = 0,6$  В находим  $s_{60} = 7 \cdot 10^{-4} \frac{a}{b}$ ,  $s_{10} = 45,5 \cdot 10^{-3} \frac{a}{b}$ ,  $s_{30} = 77 \frac{a}{b^3}$ .

Параметры генератора выберем согласно [6]:  $L_k = 1,35$  Гн,  $C = 680$  нФ,  $C_a = 270$  нФ,  $D = 0,24$  а $^{-2}$ ,  $R_k = 23$  Ом,  $Q_k = 1,8 \cdot 10^6$ . Тогда, учитывая (6) и (13), получим

$$\omega_0 = 3,14 \cdot 10^7 \frac{1}{c}, \quad v_0 = 25 \cdot 10^{-3} B,$$

$$p = 145 \frac{1}{c}, \quad q = -1,06 \frac{1}{c}, \quad M = -110 \frac{1}{c}, \quad (19)$$

$$H = -0,16 \frac{1}{c}.$$

Из (12) с учетом (19) находим, что для уменьшения дисперсии амплитудных флюктуаций в десять раз необходимо выбрать  $k = -11,8$ , а для достижения нулевого значения параметра неизохронности  $-k = -6,6$ , что вполне достижимо на практике.

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1. Разработана методика расчета естественных флюктуаций в генераторах с системой АРУ. Эта методика применена для конкретной схемы.

2. Показано, что использование системы АРУ в генераторе позволяет увеличивать прочность предельного цикла и тем самым стабилизировать амплитуду.

3. Впервые обнаружен реактивный характер связи системы АРУ с задающим каскадом генератора, который дает возможность уменьшать уровень частотных флюктуаций.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность А. В. Якимову и А. Н. Малахову за просмотр рукописи и ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
2. В. П. Соколов, Обмен опытом в радиопромышленности, № 11, 69 (1968).
3. Н. Н. Солин, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 9, 1393 (1969).
4. Г. Б. Альтшуллер, Кварцевая стабилизация частоты, изд. Связь, М., 1974
5. Г. Т. Шитиков, П. Я. Цыганков, О. М. Орлов, Высокостабильные кварцевые автогенераторы, изд. Сов. радио, М., 1974
6. Е. В. Кулагин, В. П. Соколов, А. И. Пихтелев, Б. П. Fateev, Техника средств связи, серия РИТ, № 1, 19 (1977).
7. В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Кvantовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968
8. Т. Д. Гавра, И. А. Ермоленко, Радиотехника, 30, № 1, 102 (1975).
9. И. П. Степаненко, Основы теории транзисторов и транзисторных схем, изд. Энергия, М., 1973.

Поступила в редакцию  
22 декабря 1977 г.

### NATURAL FLUCTUATIONS IN A QUARTZ REGENERATOR WITH ALA

*E. V. Kulagin, A. I. Pikhatelev, V. P. Sokolov, B. P. Fateev*

A methodics of natural fluctuation calculations in generators with ALA is developed. The capacity three-point diagram of the quartz transistor generator is considered as an example. It is shown that ALA system permits to stabilize the amplitude and the frequency of the generator output signal.

УДК 538.574 : 530.18

## СПЕКТРЫ ШУМОВЫХ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН

*С. Н. Гурбатов, Л. Г. Шепелевич*

Рассматривается задача о трансформации энергетического спектра интенсивной случайной волны в нелинейной, недиспергирующей среде. Предполагается, что на входе в нелинейную среду задана случайная квазимохроматическая волна и исследованы спектры нелинейной волны на расстояниях, когда первоначально непрерывная волна переходит в последовательность пилообразных импульсов со случайным положением разрыва и со случайной амплитудой. В работе исследована зависимость спектральных характеристик шумовых разрывных волн от статистики амплитуды и фазы входной квазимохроматической волны. Найдена форма спектра волны на низких частотах, которые появляются из-за эффекта автодетектирования квазимохроматической волны в нелинейной среде. Рассматривается также влияние вязкости среды на форму энергетического спектра.

Известно, что случайный характер входного воздействия весьма существенно влияет на процессы распространения волн в нелинейных средах. Процессы нелинейного взаимодействия протекают особенно эффективно в недиспергирующих средах, например, в акустике, где из-за синхронизма взаимодействующих гармоник происходит лавинообразный рост их числа, что приводит к существенной трансформации статистических характеристик шумовой интенсивной волны в нелинейной среде. К настоящему времени статистические характеристики случайных нелинейных волн достаточно подробно исследованы в области, где для них справедливо риманово решение [1-4]. Однако с момента «опрокидывания» решение типа простой волны становится несправедливым и в волне начинают формироваться разрывы, на фронте которых происходит диссипация энергии волны. Анализ одномерных вероятностных распределений разрывных волн на различных стадиях распространения был проведен в работах [5-7].

Часто более необходимыми и информативными являются спектральные характеристики случайных волн. В настоящей работе рассматривается эволюция энергетического спектра шумовых ударных волн в практически важном случае, когда разрывные волны генерируются случайным квазимохроматическим сигналом. На основе закона сохранения импульса волны установлены связи, позволяющие определить статистические характеристики шумовой ударной волны по статистике входного квазимохроматического сигнала. На основе установленных связей удается найти аналитическую форму для спектра шумовой разрывной волны в области, где можно пренебречь столкновениями ударных фронтов. Полученное в работе выражение для спектра позволило проанализировать как эволюцию низкочастотной части спектра, параметрически возбуждаемой при распространении модулированной волны в нелинейной среде, так и рассмотреть эффекты взаимодействия низкочастотной части спектра с высшими гармониками, приводящие к уширению гармоник разрывной волны. Отметим, что полученные в работе результаты могут быть использованы и для решений обратной

задачи: восстановления статистики излучателя по искаженному в нелинейной среде спектру.

### 1. СТАТИСТИКА ШУМОВЫХ УДАРНЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

Мы будем рассматривать эволюцию спектральных характеристик интенсивной плоской волны в недиспергирующей среде с квадратичной нелинейностью. Нелинейные эффекты при распространении волн в такой среде и, в частности, формирование и эволюция ударных фронтов описываются уравнением Бюргерса [8]:

$$v'_x - \beta v v'_t = \mu v''_{tt}, \quad (1)$$

где параметры  $\beta$  и  $\mu$  характеризуют нелинейность и высокочастотную диссипацию среды. Пусть на входе в нелинейную среду, при  $x = 0$ , задана квазимонохроматическая волна

$$v_0(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (2)$$

где  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  — функции, описывающие случайную амплитудную и фазовую (частотную) модуляцию.

Искажение формы нелинейной волны определяется величиной безразмерного параметра  $p = \beta^2 \langle a^2 \rangle \omega_0^2 x^2$ , характеризующего близость римановой волны к опрокидыванию. На начальной стадии при  $p \leq 1$  эволюция энергетического спектра случайной волны была подробно исследована в рамках риманова решения в работах [1–4]. Следует, однако, отметить, что даже в этом случае использование риманова решения не позволяет найти правильную асимптотику спектра, которая определяется разрывами в первоначально непрерывной волне [6]. В области же  $p \geq 1$  разрывы начинают играть преобладающую роль в формировании всех статистических характеристик нелинейной волны [5–7].

Мы остановимся на статистических характеристиках волны в случае, когда  $p \gg 1$ , причем будем считать вначале, что коэффициент диссипации  $\mu \rightarrow 0$ , т. е. ударные фронты имеют бесконечно малую ширину. Предположим, что амплитуда первоначальной квазимонохроматической волны нигде не обращается в нуль. (Влияние нулей амплитуды на энергетический спектр разрывной волны будет обсуждено в дальнейшем.) Тогда при  $\mu \rightarrow 0$  и  $p \gg 1$  волна состоит из пилообразных треугольных импульсов с одинаковым наклоном  $v'_t = -1/\beta x$ , но со случайным положением и амплитудой ударного фронта. Профиль пилообразной волны, а следовательно, и ее статистика полностью определяются «нулями» (точками пересечения наклонных участков профиля волны или их продолжений с осью  $v = 0$ ) и координатами разрывных фронтов [9]. «Нули» пилообразной волны совпадают с нулями начального сигнала и определяются из уравнения

$$\omega_0 t_n + \varphi(t_n) = \pi/2 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Положение ударных фронтов можно определить, используя условие сохранения импульса на периоде волны  $S_n(x) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(x, t) dt = \text{const.}$

В предположении узкополосности спектра начального поля амплитуда разрыва  $\Delta U_n$ , его скорость  $v_p$  и координата  $t_n$  следующим образом выражаются через производные амплитуды  $b = a'_t$ , фазы  $\Omega = \varphi'_t$  и частоты  $\omega = \Omega'_t$  [7]:

$$\Delta U_n = (t_{n+1} - t_n)/\beta x,$$

$$v_p = \frac{d \tau_n}{dx} = \left( \frac{a x}{\omega_0^2} - \frac{b}{\omega_0} \right) \beta, \quad a \equiv a(t_n), \quad b \equiv b(t_n), \quad (4)$$

$$x \equiv x(t_n),$$

$$\tau_n = (t_{n+1} + t_n)/2 + v_p x.$$

Для анализа спектрального состава случайной пилообразной волны целесообразно рассмотреть вначале спектр производной от этой волны. Профиль производной состоит из последовательности δ-образных импульсов с амплитудой, равной амплитуде разрыва, и с координатами, совпадающими с координатами ударных фронтов. Считая, что входной процесс стационарен, и используя известные соотношения для спектров последовательности импульсных сигналов [10, 11], получим для энергетического спектра случайной пилообразной волны выражение

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{\omega_0}{(2\pi)^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_r(\omega, x) - \frac{1}{\beta^2 x^2} \delta(\omega) \right], \quad (5)$$

$$H_r(\omega, x) = \langle \Delta U_{n+r} \Delta U_n \exp[-i\omega(\tau_{n+r} - \tau_n)] \rangle.$$

Здесь усреднение проводится по случайным координатам  $\tau_n$  и амплитудам  $\Delta U_n$  разрывов и в соответствии с соотношениями (3), (4) определяется статистическими характеристиками входной квазимохроматической волны. Формула (5) имеет прозрачный физический смысл: она представляет спектр разрывной волны как сумму интерференционных членов между отдельными ударными фронтами.

Обсудим вначале качественно, как влияет амплитудно-фазовая модуляция входной квазимохроматической волны на спектральный состав пилообразной волны. Из (4), (5) видно, что пилообразная волна имеет как амплитудную модуляцию, связанную с флуктуациями амплитуды разрывов, так и фазовую, связанную с флуктуациями координаты разрыва. Из (4) видно, что амплитуда разрыва не зависит от входной амплитуды квазимохроматической волны и, следовательно, в нелинейной среде происходит эффективное подавление входной амплитудной модуляции. Флуктуации амплитуды разрывов обусловлены флуктуациями частоты входного сигнала  $\Delta U_n = (t_{n+1} - t_n)/\beta x \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 - \frac{\Omega}{\omega_0} \right) / \beta x$ , причем в силу его квазимохроматичности они много меньше регулярной составляющей. Флуктуации положений ударных фронтов, т. е. фазовые флуктуации обусловлены двумя причинами. Во-первых, это флуктуации, связанные с флуктуациями фазы входного сигнала — первое слагаемое в выражении для координаты разрыва  $\tau_n$  (4). Как видно из (3), (4), величина этих флуктуаций, как и относительная величина амплитудных флуктуаций, не зависит от расстояния и, следовательно, спектр разрывной волны, обусловленный этими флуктуациями, не меняет свою форму по мере распространения волны, в то время как его амплитуда уменьшается  $\sim 1/x^2$ .

К фазовой модуляции приводит также движение ударных фронтов, обусловленное появлением в волне из-за эффекта автодетектирования медленных составляющих. Как видно из (4), величина этих фазовых флуктуаций возрастает по мере распространения волны, что приводит, соответственно, и к уширению спектра гармоник разрывной волны. Количественный анализ всех этих эффектов мы проведем ниже, используя

те или иные предположения о статистических характеристиках входной квазимонохроматической волны.

## 2. СПЕКТРЫ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН С ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим вначале влияние фазовых флуктуаций в квазистатическом приближении, т. е. считая, что движение ударных фронтов еще несущественно и положение разрыва определяется только нулями пилюобразной волны\*. Уравнение (3) для  $t_n$  не имеет точного решения, и поэтому при статистическом анализе приходится использовать различные приближения. Прежде всего, естественно предположить (в силу квазимонохроматичности входной волны), что флуктуации фазы на периоде достаточно малы. Это позволяет считать, что для определения расстояния между двумя разрывами достаточно знать положение соответствующих нулей входного процесса:

$$\tau_{n+r} - \tau_n = (t_{n+r+1} + t_{n+r} - t_{n+1} - t_n)/2 \approx t_{n+r} - t_n. \quad (6)$$

Пусть на входе в нелинейную среду задан сигнал с гауссовыми фазовыми флуктуациями, дисперсия которых  $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$ . В этом случае в (6) для  $t_n$  можно использовать первое приближение уравнения (3) по параметру  $\langle \varphi^2 \rangle$ , и, следовательно,

$$\tau_{n+r} - \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_0} r - \frac{1}{\omega_0} \left\{ \varphi \left( \frac{2\pi}{\omega_0} (n+r) \right) - \varphi \left( \frac{2\pi}{\omega_0} n \right) \right\}. \quad (7)$$

Из (4), (5) видно, что фазовые флуктуации исходной волны приводят к модуляции разрывов амплитуды, причем амплитудная модуляция коррелирована с фазовой, что приводит к асимметрии формы спектральных линий. Однако, как показывают оценки, эта асимметрия достаточно мала и в первом приближении ею можно пренебречь, т. е. считать, что амплитуда разрыва  $\Delta U_n = 2\pi/\omega_0 \beta x$ . Тогда из (5), (7), используя гауссовость фазы, легко получить для спектра разрывной волны следующее выражение:

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\omega^2}{2\omega_0^2} D_\varphi \left( \frac{2\pi r}{\omega_0} \right) + i \omega \frac{2\pi}{\omega_0} r \right] - \delta(\omega) \right\}, \quad (8)$$

где  $D_\varphi(\tau) = \langle (\varphi(t+\tau) - \varphi(t))^2 \rangle$  — структурная функция фазы. Формула (8), так же как и (5), представляет спектр разрывной волны как сумму интерференционных членов между ударными фронтами. Из них удобно определять асимптотическое поведение спектра при  $\omega \rightarrow \infty$ , когда основной вклад в спектр дает первый член ряда ( $r=0$ ). В частности, легко видеть, что  $S(\omega, x) \approx 1/\omega^2 \beta^2 x^2 \omega_0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , что связано с появлением разрывов. Часто, однако, более удобно и наглядно другое выражение для спектра, в котором суммирование ведется по номерам гармоник. Используя формулу суммирования Пуассона (см., например, [12]), получим из (8)

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega - n\omega_0) - \delta(\omega) \right], \quad . (9)$$

$$G(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2\omega_0^2} D_\varphi(\xi) \right) e^{i u \xi} d\xi.$$

\* Отметим, что это условие выполняется точно для входного сигнала вида

$$v_0(t) = \frac{d}{dt} a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Из (9) видно, что выражение для формы спектра гармоник пилообразной волны аналогично спектру сигнала с фазовой модуляцией [10, 13], с тем лишь отличием, что частота входит в (9) непосредственно в показатель экспоненты перед структурной функцией фазы. Однако в силу предположения о квазимохроматичности входного сигнала можно считать, что на  $n$ -й гармонике коэффициент перед  $D_\varphi(\xi)$  равен  $\frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \approx$

$\approx \frac{n^2}{2}$ , и тогда мы получим, что спектр пилообразной случайной волны

на  $n$ -й гармонике совпадает по форме со спектром частотно-модулированного сигнала с эффективной структурной функцией фазы, равной  $n^2 D_\varphi(\xi)$ . В частности, форма спектра на частоте входной квазимохроматической волны совпадает (за исключением малой асимметрии) со входным спектром. Из (9) видно, что энергия гармоник уменьшается с ростом номера гармоник как  $1/n^2 \beta^2 \omega_0^2 x^2$ , т. е. как и у регулярной волны, и не зависит от входной амплитуды. По мере увеличения  $n$  происходит перераспределение энергии между непрерывной и дискретной частью спектра, а именно, происходит уменьшение регулярной компоненты пропорционально  $\exp(-n^2 \langle \varphi^2 \rangle)$ . В частности, при  $n^2 \langle \varphi^2 \rangle \gg 1$  регулярная компонента практически исчезает, а непрерывная часть спектра  $n$ -й гармоники существенно уширяется, вплоть до слияния (при достаточно больших  $n$ ) непрерывных линий и перехода в сплошной степенной спектр  $S(\omega, x) \sim \omega^{-2}$ .

При выводе выражений для спектра (8), (9) мы предполагали, что флуктуации фазы малы. Это позволило нам приближенно записать решения уравнений для координат разрывов (7). Однако эти выражения можно использовать и при частотных флуктуациях входного сигнала, когда дисперсия фазы неограничена. Действительно, несмотря на то, что при достаточно больших расстояниях между ударными фронтами уже нельзя пользоваться приближенным выражением для  $\tau_{n+r} - \tau_n$  (7), члены ряда (8) с достаточно большими номерами  $r$  близки к нулю, и поэтому мы не делаем большой ошибки, используя выражение для спектра пилообразной волны (8), (9) в случае неограниченных фазовых флуктуаций. В этом случае спектр пилообразной волны уже не содержит дискретных составляющих и состоит из размытых линий, форма которых определяется структурной функцией фазы. Рассмотрим два примера. Пусть флуктуации входного сигнала обусловлены диффузионным набегом фазы, т. е.  $D_\varphi(\tau) = 2D|\tau|$ . Тогда из (9) легко получить, что спектр  $n$ -й гармоники имеет резонансную форму, ширина которой возрастает с номером гармоники  $\Delta\omega_n = Dn^2$ :

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{Dn^2}{(Dn^2)^2 + (\omega - n\omega_0)^2}. \quad (10)$$

Для больших и медленных уходов частоты можно в (9) ограничиться разложением структурной функции фазы  $D_\varphi(\tau) = \bar{\Omega}^2 \tau^2$  [10, 13]. Тогда из (9) имеем, что спектр  $n$ -й гармоники разрывной волны имеет гауссову форму, а ширина ее возрастает с номером гармоники более медленно, чем для резонансного спектра, а именно как  $\Delta\omega_n = (\bar{\Omega}^2)^{1/2} n$ :

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{\Omega}^2 n^2}} \exp \left[ -\frac{(\omega - n\omega_0)^2}{2\bar{\Omega}^2 n^2} \right]. \quad (11)$$

Сравнивая (10), (11) со спектром частотно-модулированной римановой волны [14], можно убедиться в том, что форма спектра гармоник частотно-модулированной волны одинакова как на начальной стадии распространения, так и на стадии пилообразного решения. Отличия в спектрах связаны лишь с разной зависимостью амплитуд гармоник от расстояния и от номера гармоники.

Следует отметить, что для больших и медленных уходов частоты анализ спектрального состава удается провести и для негауссовой статистики фазы. В этом случае основной вклад в сумме (5) дают первые члены, когда для приближенного решения уравнения для расстояний между фронтами можно ограничиться первым членом разложения разности фазы  $\varphi(t_{n+r}) - \varphi(t_n) \approx \Omega(t_{n+r} - t_n)$  ( $\Omega \equiv \dot{\varphi}_t$ ):

$$\tau_{n+r} - \tau_n \approx \frac{2\pi r}{\omega_0} \left( 1 - \frac{\Omega}{\omega_0} \right). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5), проводя усреднение по флюктуирующей частоте и используя формулу суммирования Пуассона [12], легко получить, что в этом случае форма спектральных линий разрывной волны (как и для входного сигнала [13]) повторяет форму вероятностного распределения частоты  $W_\Omega(\Omega)$ :

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} W_\Omega \left( \frac{\omega - n\omega_0}{n} \right). \quad (13)$$

### 3. СПЕКТРЫ УДАРНЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ СИГНАЛОМ СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ. УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВОВ

До сих пор мы рассматривали спектры разрывной волны, обусловленные флюктуациями фазы входного сигнала в случае, когда движением ударных фронтов можно пренебречь. Однако на достаточно больших расстояниях этот эффект становится преобладающим в формировании спектра разрывных волн. Ниже мы рассмотрим для определенности спектральный состав разрывной волны, имеющей на входе только амплитудную модуляцию. Как легко видеть из выражения для скорости разрыва  $v_p$  (4), учет движения фронтов, связанный с частотной модуляцией на входе, легко может быть проведен аналогичным образом.

Из (4) видно, что для амплитудно-модулированной волны координата разрыва  $\tau_n$  определяется производной амплитуды квазимохроматической волны  $b = a'_t(t_n)$ . Соответственно для усреднения в (5) необходимо задавать двумерную характеристическую функцию  $\Theta_{2b}(\omega_1, \omega_2; \tau) = \langle \exp[i\omega_1 b(t+\tau) + i\omega_2 b(t)] \rangle$ . В этом случае из (5) имеем

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \left[ \frac{1}{\omega_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Theta_{2b} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \beta x, -\frac{\omega}{\omega_0} \beta x; \frac{2\pi}{\omega_0} r \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -i\omega \frac{2\pi}{\omega_0} r \right) - \delta(\omega) \right], \quad (14)$$

или, представляя спектр в виде суммы по номерам гармоник,

$$S(\omega, x) = \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \left[ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |\Theta_{1b}(n\beta x)|^2 \delta(\omega - n\omega_0) + \right. \\ \left. + \right] \quad (15)$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} G \left( \frac{\omega}{\omega_0} \beta x, -\frac{\omega}{\omega_0} \beta x; \omega - n \omega_0 \right) \Big].$$

Здесь  $\Theta_{1b}(\omega_1)$  — одномерная характеристическая функция  $b(t)$ , а

$$G(\omega_1, \omega_2; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta_{2b}(\omega_1, \omega_2; \tau) - \Theta_{1b}(\omega_1) \Theta_{1b}(\omega_2)] e^{-is\tau} d\tau \quad (16)$$

— фурье-образ по параметру двумерной характеристической функции производной амплитуды.

Амплитудная модуляция исходной квазимонохроматической волны приводит к движению ударных фронтов (4), вследствие чего возникает фазовая модуляция. Появление фазовой модуляции проявляется в уменьшении амплитуд дискретных гармоник, которое существенно зависит от вида одномерного распределения производной амплитуды и увеличивается с ростом номера гармоники. Кроме того, переход амплитудной модуляции в фазовую вызывает появление и уширение, по мере распространения волны, пьедесталов вблизи дискретных линий. Величина уширения пьедесталов определяется параметром  $\sigma_b \beta x$ , имеющим смысл характерного смещения ударного фронта относительно периода волны  $2\pi/\omega_0$ . Здесь  $\sigma_b^2 = \langle b^2 \rangle$  — дисперсия флуктуаций производной амплитуды входного сигнала. При  $\sigma_b \beta x \ll 1$  индекс частотной модуляции низших гармоник пилообразной волны мал, и в (16) можно разложить характеристическую функцию в ряд по моментам, ограничиваясь первыми двумя членами. Из (16) в этом случае имеем для спектра пьедестала  $n$ -й гармоники

$$S_n(\omega, x) = \frac{S_b(\omega - n \omega_0)}{\omega_0^2} \equiv \frac{(\omega - n \omega_0)^2}{\omega_0^2} S_a(\omega - n \omega_0), \quad (17)$$

где  $S_b(\omega)$  — спектр производной амплитуды исходной волны. Следует отметить интересную особенность этого спектра, а именно — независимость спектра пьедестала от номера гармоники и расстояния от входа. Обусловлено это тем, что увеличение индекса частотной модуляции по мере распространения волны компенсируется одновременным уменьшением амплитуды гармоники с ростом расстояния и номера гармоники.

Из (15), (16) видно, что индекс частотной модуляции возрастает с номером гармоники. В частности, даже в случае, если для основной гармоники этот индекс много меньше единицы, то для достаточно высоких гармоник он становится большим, что приводит к уширению спектра пьедестала гармоник. Характерный номер гармоники  $N$ , начиная с которой происходит уширение спектра, равен  $N \sim 1/\sigma_b \beta x$ , т. е. по мере распространения волны начинают уширяться все более низкие гармоники пилообразной волны. Аналитическую форму спектра этих гармоник удается найти при условии, когда  $n \sigma_b \beta x \gg 1$ , т. е. индекс частотной модуляции гармоники много больше единицы. В этом случае основной вклад при интегрировании в (16) дают участки при  $\tau \ll \tau_0$  ( $\tau_0$  — характерное время корреляции  $b(t)$ ), когда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left\{ i \frac{\omega}{\omega_0} \beta x [b(t + \tau) - b(t)] \right\} \right\rangle \approx \\ & \approx \left\langle \exp \left[ i \frac{\omega}{\omega_0} \beta x b'_t(t) \tau \right] \right\rangle = \Theta_c \left( \frac{\omega}{\omega_0} \beta x \tau \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\Theta_c(\omega_1)$  — одномерная характеристическая функция второй про-

изводной амплитуды  $c = a''_{tt}$ . Следовательно, для спектра  $n$ -й гармоники пилообразной волны получим

$$\begin{aligned} S_n(\omega, x) &= \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \frac{\omega_0}{\omega \beta x} W_c \left[ \frac{(\omega - n\omega_0)\omega_0}{\omega \beta x} \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{\beta^3 x^3 n^3 \omega_0^2} W_c \left( \frac{\omega - n\omega_0}{n\beta x} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $W_c(c)$  — вероятностное распределение  $c = a''_{tt}$ . Таким образом, в отличие от входа, где форма спектра пьедестала полностью определялась спектром амплитуды входной волны, на достаточно больших расстояниях, из-за перехода в нелинейной среде амплитудной модуляции в фазовую, форма спектра гармоник пилообразной волны приближенно повторяет вероятностное распределение второй производной амплитуды входного сигнала. По мере распространения в нелинейной среде ширина спектра этих гармоник увеличивается как  $\Delta\omega_n = n\sigma_c \beta x$ , где  $\sigma_c^2 = \langle c^2 \rangle$ . В частности, легко оценить из этого выражения номер гармоники, начиная с которой в нелинейной среде формируется сплошной степенной спектр  $S(\omega, x) \sim \omega^{-2}$ , типичный для бюргеровской турбулентности (см., например, [15, 16]).

Приведем выражение для спектра пилообразной волны в случае гауссовой статистики амплитуды входного сигнала\*:

$$\begin{aligned} S(\omega, x) &= \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \left[ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \exp(-n^2 \sigma_b^2 \beta^2 x^2) \delta(\omega - n\omega_0) + \right. \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp \left( -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sigma_b^2 \beta^2 x^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} B_b(\tau) \beta^2 x^2 \right) - 1 \right\} \times \\ &\times \exp[i(\omega - n\omega_0)\tau] d\tau \left. \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $B_b(\tau)$  — корреляционная функция  $b(t)$ . Анализ этого выражения приводит к тем же выводам, которые мы сделали, не конкретизируя вид вероятностного распределения амплитуды. В частности, при  $n\sigma_b \beta x \gg 1$  можно ограничиться в показателе экспоненты разложением  $B_b(\tau) = \sigma_b^2 (1 - \gamma^2 \tau^2 / 2 + \dots)$ , и тогда из (19) легко получить

$$\begin{aligned} S_n(\omega, x) &= \frac{1}{\beta^2 x^2 \omega^2} \frac{\omega_0}{\omega \beta x \sqrt{2\pi \sigma_b^2 \gamma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\omega - n\omega_0)\omega_0}{\omega \sigma_b \gamma x \beta} \right]^2 \right\} \approx \\ &\approx \frac{1}{\beta^3 x^3 n^3 \omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_b^2 \gamma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega - n\omega_0}{n\sigma_b \gamma x \beta} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Строго говоря, спектр гармоники имеет несимметричную форму, а именно, он спадает более медленно при  $\omega > n\omega_0$ . На языке спектрального взаимодействия это можно объяснить тем, что эффективность взаимодействия гармоник пьедестала с низкочастотной частью спектра пропорциональна разности частот взаимодействующих гармоник, что и

\* По структуре это выражение подобно спектру нелинейной волны, состоящей на входе из смеси сигнала и шума, где в отличие от рассматриваемого нами случая модуляция гармоник сигнала происходит за счет взаимодействия со сторонним шумом [17, 19].

приводит к более эффективному уширению спектра гармоники при  $\omega > n\omega_0$ , чем при  $\omega < n\omega_0$ .

До сих пор мы рассматривали влияние фазовой модуляции на изменение спектра высших гармоник пилообразной волны. Однако, кроме перехода амплитудной модуляции в фазовую, в нелинейной, недиспергирующей среде происходит также детектирование квазимонокроматической волны и выделение низкочастотных компонент в спектре. Эволюция длинноволновой части спектра шумовой волны описывается слагаемым с  $n = 0$  в формулах (15), (19). По структуре этот член полностью совпадает с формулами для спектра простой волны, полученными в работах [1–3]. Это совпадение довольно естественно, так как в пренебрежении столкновениями ударных фронтов эволюция медленных составляющих волны описывается уравнением Римана. В частности, из (15), (19) легко видеть, что при  $\frac{\gamma}{\omega_0} \sigma_b \beta x \ll 1$  спектр низкочастотной части определяется выражением (17), где надо положить  $n = 0$ , и не меняется с расстоянием. Существование стационарного участка, где форма низкочастотного спектра не меняется по мере распространения волны, возможно и в среде с конечным затуханием. Аналитический расчет формы низкочастотного шумового спектра, параметрически возбуждаемого при распространении случайно-модулированной волны в среде с высокочастотным затуханием, был проведен в [19]. В частности, при больших числах Рейнольдса выражение для спектра низкочастотных компонент, полученное в [19], совпадает с (17).

Обсудим вопрос о влиянии конечности диссипации на форму энергетического спектра. При конечном коэффициенте диссипации  $\mu$  и при больших числах Рейнольдса форма ударных фронтов случайной волны совпадает с формой стационарного ударного фронта, а их безразмерная ширина равна  $\delta = 2\mu\omega_0^2 x/\pi$ . Отметим, что, несмотря на движение ударного фронта, профиль пилообразной волны тоже является точным решением уравнения Бюргерса [20]. Учет диссипации приводит к появлению в выражении для спектра волны (15), (19) множителя

$$K(\omega, x) = \frac{(\omega\pi\delta/2\omega_0)^2}{\sin^2(\omega\pi\delta/2\omega_0)} \sim \begin{cases} 1 & (\omega \ll \omega_0/\delta) \\ e^{-\omega\pi\delta/\omega_0} & (\omega \gg \omega_0/\delta) \end{cases}, \quad (21)$$

описывающего конечную ширину ударного фронта. Отметим, что степенной характер асимптотики спектра с экспоненциальным обрезанием спектра на достаточно больших частотах (21) наблюдался в численных экспериментах по моделированию звуковой турбулентности [16].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы рассматривали по отдельности влияние фазовой и амплитудной модуляции на спектр пилообразной волны. Легко рассмотреть и их совместное влияние. Из анализа выражений (4), (5) и формулы суммирования Пуассона следует, что в этом случае спектр гармоник будет равен свертке спектров амплитудной и фазовой модуляции.

Обсудим в заключение вопрос о спектре нелинейной волны в случае, когда амплитуда первоначальной волны в некоторых точках обращается в нуль. В этом случае на достаточно больших расстояниях волна будет в основном состоять из участков с пилообразным профилем, а также областей вблизи  $\beta a(t) \omega_0 x \leq 1$ , где она имеет искаженную синусоидальную форму [21]. Однако при  $\beta^2 \langle a^2 \rangle \omega x^2 \gg 1$  относительная длина этих областей достаточно мала, и поэтому с известной

осторожностью можно использовать полученные выше результаты. Так, например, рассмотрим сигнал с амплитудной модуляцией, такой, что  $\langle a(t) \rangle = 0$ . В этом случае в точках перехода амплитуды  $a(t)$  через нуль положение (фаза) ударных фронтов терпит скачок на  $\pi$ , что приводит к скачкообразной фазовой модуляции пилообразной волны. Строгий расчет спектра волны в этом случае достаточно труден, однако на расстояниях  $\beta^2 \langle b^2 \rangle x^2 \gg 1$ , когда основную роль в формировании спектра пилообразной волны играет движение разрывов, можно для анализа ее спектра пользоваться формулами, полученными выше для амплитудно-модулированного сигнала, но где надо считать, что  $b(t) = \frac{\partial}{\partial t} |a(t)|$ . В частности, такой анализ можно провести и для гауссова квазимонохроматического сигнала.

Авторы признательны А. Н. Малахову и А. И. Саичеву за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 О В Руденко, А С Чиркин, ДАН СССР, 214, № 5, 1045 (1974)
- 2 А Н Малахов, А И Саичев, Изв вузов — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974)
- 3 А И Саичев, Изв вузов — Радиофизика, 17, № 7, 1025 (1974).
- 4 Е Н Пелиновский, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 3, 373 (1976)
- 5 О В Руденко, А С Чиркин, ДАН СССР, 225, № 3, 520 (1975)
- 6 С Н Гурбатов, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 1, 112 (1977).
- 7 С Н Гурбатов, А Н Малахов, Акуст ж, 23, № 4, 569 (1977).
- 8 Дж Уизем, Линейные и нелинейные волны, изд Мир, М, 1977
- 9 Т. Tatsumi and Sh. Kida, J. Fluid. Mech., 55, № 4, 659 (1972).
- 10 С М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, изд Наука, М, 1976.
- 11 Б Р Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд Сов радио, М, 1974
- 12 Б Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, кн 2, изд Мир, М., 1967, стр 707
- 13 А Н Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд Наука, М, 1968
- 14 О В. Руденко, А С Чиркин, Радиотехника и электроника, 19, № 10, 2172 (1974)
- 15 D. T. Jeng, R. Foerster, S. Haaland and W. C. Meecham, Phys. Fluids, 9, № 11, 2114 (1966).
- 16 Н Токунага, J. Phys. Soc. Japan, 41, № 1, 328 (1976).
- 17 О В Руденко, А С Чиркин, ЖЭТФ, 67, № 5, 1903 (1974)
- 18 С Н Гурбатов, А А Дубков, А Н Малахов, ЖЭТФ, 72, № 2, 456 (1977)
- 19 С Н Гурбатов, А. А Дубков, Акуст ж, 23, № 2, 260 (1977).
- 20 Б К Новиков, Доклады IX Всесоюзной акуст. конференции, секция Б, М, 1977, стр. 51
- 21 Ю М Заславский, А М Сутин, Акуст ж, 23, № 1, 145 (1977)

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
21 ноября 1977 г

#### SPECTRA OF NOISE DISCONTINUOUS WAVES

*S. N. Gurbatov, L. G. Shepelevich*

A problem is considered on the transformation of the energetic spectrum of an intensive random wave in the nonlinear nondispersive medium. It is assumed that a random quasi-monochromatic wave is set at the input in the nonlinear medium and spectra of a nonlinear wave is investigated at distances when an initially continuous wave transforms into a train of sawtooth pulses with random position of the discontinuity and with the random amplitude. The dependence of spectral characteristics of noise discontinuous waves on the statistics of the amplitude and phase of an input quasi-monochromatic wave is investigated in the paper. The wave spectrum forms is found at low frequencies which occur due to the effect of autodetection of a quasi-monochromatic wave in the nonlinear medium. The influence of the medium discosity on the energetic spectrum form is also considered.

УДК 538.56

## О МОМЕНТЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ СИЛ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ

Ю. С. Бараши

Найден момент ван-дер-ваальсовых сил между двумя анизотропными одноосными толстыми пластинами, разделенными плоской щелью, заполненной изотропным веществом. Указано на ошибки, допущенные в работах [2, 3] при рассмотрении данного эффекта.

Энергия ван-дер-ваальсова взаимодействия между двумя анизотропными телами зависит от их взаимной ориентации, и, следовательно, помимо силы взаимодействия, возникающей в изотропных системах, при наличии анизотропии появляется момент сил, стремящийся повернуть тела друг относительно друга. Момент ван-дер-ваальсовых сил спадает с увеличением расстояния между телами медленнее, чем сила взаимодействия (в простейшем случае — на одну степень расстояния), и поэтому, несмотря на малость фигурирующих в результатах коэффициентов, экспериментальное изучение эффекта представляется возможным.

В данной статье найден момент ван-дер-ваальсовых сил для простейшего случая, когда имеются две толстые одноосные пластины с параллельными плоскими границами (рис. 1). Щель между пластины считается заполненной изотропной жидкостью, хотя интересен и случай пустой щели. Предположим также, что главные оси тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega)$  с неравными главными значениями параллельны в обеих средах плоскости раздела.

Свободная энергия ван-дер-ваальсова взаимодействия задается выражением [1]

$$F_{\text{в-д-в}} = T \sum_{n=0}^{\infty} \int \rho(\beta) d\beta \ln D(\beta, i\omega_n), \quad (1)$$

где  $\omega_n = \frac{2\pi}{\hbar} n$ ,  $D(\beta, \omega)$  — функция из дисперсионного уравнения для собственных частот задачи, зависящих от расстояния между телами (дисперсионное уравнение для поверхностных волн),  $\beta$  — те переменные, к которым нужно перейти в уравнениях Максвелла, чтобы получить дисперсионное уравнение (переменные  $\beta$  определяются геометрией задачи),  $\rho(\beta)$  — плотность состояний, а штрих у знака суммы означает, что член  $n = 0$  берется с половинным весом,

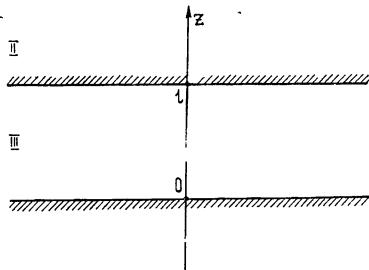


Рис. 1.

Выберем систему координат таким образом, чтобы тензор диэлектрической проницаемости первого тела был диагонален. При этом, обозначая угол между осями анизотропии двух тел через  $\theta$ , имеем

$$\hat{\epsilon}_I(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_{I1}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{I2}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{I2}(\omega) \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\hat{\epsilon}_{II}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_{II1} \cos^2 \theta + \epsilon_{II2} \sin^2 \theta, & (\epsilon_{II2} - \epsilon_{II1}) \sin \theta \cos \theta, & 0 \\ (\epsilon_{II2} - \epsilon_{II1}) \sin \theta \cos \theta, & \epsilon_{II1} \sin^2 \theta + \epsilon_{II2} \cos^2 \theta, & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{II2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Поверхностные волны, как известно, характеризуются тем, что электрическое и магнитное поля в таких волнах экспоненциально затухают с удалением от границ. В отличие от изотропной системы, где имеется поляризационное вырождение, в случае одноосных сред поверхности волны представляют собой определенную линейную комбинацию соответствующим образом поляризованных обыкновенной и необыкновенной волн. Поэтому для нахождения дисперсионного уравнения для поверхностных волн в рассматриваемой системе нужно «сшить» на границах поля, имеющие следующий вид:

$$E_1 = a_1 \exp [\rho_1 z + i(ux + vy)] + b_1 \exp [\rho'_1 z + i(ux + vy)], \quad (4)$$

$$z \leq 0; \quad \operatorname{Re} \rho_1, \quad \operatorname{Re} \rho'_1 > 0;$$

$$E_3 = a_3 \exp [\rho_3 z + i(ux + vy)] + b_3 \exp [-\rho_3 z + i(ux + vy)], \quad (5)$$

$$0 \leq z \leq l; \quad \operatorname{Re} \rho_3 \geq 0;$$

$$E_2 = a_2 \exp [-\rho_2 z + i(ux + vy)] + b_2 \exp [-\rho'_2 z + i(ux + vy)], \quad (6)$$

$$z \geq l; \quad \operatorname{Re} \rho_2, \quad \operatorname{Re} \rho'_2 > 0.$$

Из уравнения

$$\det \left\| \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega) - k^2 \delta_{ij} + k_i k_j \right\| = 0 \quad (7)$$

для обыкновенных волн в первой и второй средах и для волн в изотропной прослойке получаем

$$\rho_1^2 = r^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{I2}(\omega), \quad \rho_2^2 = r^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{II2}(\omega), \quad (8)$$

$$\rho_3^2 = r^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3(\omega),$$

а для необыкновенных волн из (7) следует, что

$$\rho_1'^2 = r^2 + \left( \frac{\epsilon_{I1}(\omega)}{\epsilon_{I2}(\omega)} - 1 \right) u^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{I1}(\omega); \quad (9)$$

$$\rho_2'^2 = r^2 + \left( \frac{\epsilon_{II1}(\omega)}{\epsilon_{II2}(\omega)} - 1 \right) (u \cos \theta - v \sin \theta)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{II1}(\omega). \quad (10)$$

Здесь  $k_x = u$ ,  $k_y = v$ , а  $r^2 = u^2 + v^2$  есть квадрат компоненты волнового вектора, параллельной граничным плоскостям.

Из уравнений Максвелла

$$\left( k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega) \right) E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (11)$$

при учете соотношений (8) — (10), а также поперечности электрической индукции следует, что обыкновенные и необыкновенные волны удовлетворяют соответственно следующим поляризационным соотношениям:

$$a_{1x} = 0, \quad b_{1x} = \frac{1}{uv} (\rho_1^2 - v^2) b_{1y}, \quad (12)$$

$$a_{1z} = \frac{v}{i \rho_1} a_{1y}, \quad b_{1z} = - \frac{i \rho'_1}{v} b_{1y};$$

$$iua_{3x} + iv a_{3y} + \rho_3 a_{3z} = 0, \quad (13)$$

$$iub_{3x} + iv b_{3y} - \rho_3 b_{3z} = 0;$$

$$a_{2x} = a_{2y} \operatorname{tg} \theta,$$

$$a_{2z} = \frac{i}{\rho_2} a_{2y} (u \operatorname{tg} \theta + v),$$

$$b_{2x} = - \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{II2} \cos \theta - u(u \cos \theta - v \sin \theta)}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{II2} \sin \theta + v(u \cos \theta - v \sin \theta)} b_{2y}, \quad (14)$$

$$b_{2z} = i \rho'_2 \frac{u \cos \theta - v \sin \theta}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{II2} \sin \theta + v(u \cos \theta - v \sin \theta)} b_{2y}.$$

Магнитные поля в поверхностных волнах находятся из (4) — (6) с помощью уравнения  $\mathbf{B} = - \frac{ic}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}$ .

Условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела сред приводят к уравнениям

$$a_{1\tau} + b_{1\tau} = a_{3\tau} + b_{3\tau}; \quad (15)$$

$$a_{2\tau} \exp(-\rho_2 l) + b_{2\tau} \exp(-\rho'_2 l) = a_{3\tau} \exp(\rho_3 l) + b_{3\tau} \exp(-\rho_3 l); \quad (16)$$

$$(\rho_1 a_{1\tau} + \rho'_1 b_{1\tau}) - ir(a_{1z} + b_{1z}) = \rho_3 (a_{3\tau} - b_{3\tau}) - ir(a_{3z} + b_{3z}); \quad (17)$$

$$[\rho_2 a_{2\tau} \exp(-\rho_2 l) + \rho'_2 b_{2\tau} \exp(-\rho'_2 l)] + ir[a_{2z} \exp(-\rho_2 l) + b_{2z} \exp(-\rho'_2 l)] = -\rho_3 [a_{3\tau} \exp(\rho_3 l) - b_{3\tau} \exp(-\rho_3 l)] + ir[a_{3z} \exp(\rho_3 l) + b_{3z} \exp(-\rho_3 l)]. \quad (18)$$

Уравнения (12) — (18) образуют однородную систему из восемнадцати уравнений для восемнадцати неизвестных  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ . Условие существования нетривиального решения данной системы уравнений и приводит к дисперсионному уравнению для поверхностных волн

в рассматриваемой системе. При проведении вычислений оказывается удобным использовать также соотношения

$$\varepsilon_{12} (a_{1z} + b_{1z}) = \varepsilon_3 (a_{3z} + b_{3z}); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{112} [a_{2z} \exp(-\rho_2 l) + b_{2z} \exp(-\rho'_2 l)] &= \\ &= \varepsilon_3 [a_{3z} \exp(\rho_3 l) + b_{3z} \exp(-\rho_3 l)], \end{aligned} \quad (20)$$

которые следуют из условий непрерывности на границах нормальной компоненты электрической индукции и, разумеется, согласованы с системой уравнений (12)–(18).

После несложных, но весьма кропотливых вычислений получается следующее искомое (см. (1)) дисперсионное уравнение для поверхностных волн:

$$\begin{aligned} D(\omega, u, v, \theta, l) = \frac{1}{\gamma(\theta)} \left\{ A - \frac{(\rho'_2(\theta) - \rho_2) \varepsilon_{112}}{\rho_2^2 - r^2 \sin^2(\varphi + \theta)} \times \right. \\ \left. \times [Br^2 \sin^2(\varphi + \theta) - E(2r^2 \sin \varphi \cos \theta \sin(\varphi + \theta) + \rho_3^2 \sin^2 \theta) + C] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) выделена зависимость от угла  $\theta$ , используются полярные координаты  $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$  и введены обозначения

$$\begin{aligned} A = [(\rho_1 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3) - (\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \exp(-2\rho_3 l)] [(\varepsilon_3 \rho_1 + \varepsilon_{12} \rho_3) \times \\ \times (\varepsilon_3 \rho_2 + \varepsilon_{112} \rho_3) - (\varepsilon_3 \rho_1 - \varepsilon_{12} \rho_3)(\varepsilon_3 \rho_2 - \varepsilon_{112} \rho_3) \exp(-2\rho_3 l)] - \\ - \frac{(\rho'_1 - \rho_1) \varepsilon_{12}}{\rho_1^2 - r^2 \sin^2 \varphi} [(r^2 \sin^2 \varphi - \rho_1 \rho_3)(\varepsilon_3 \rho_2 + \varepsilon_{112} \rho_3)(\rho_2 + \rho_3)(\rho_1 + \rho_3) + \quad (22) \\ + 2(\varepsilon_{112} - \varepsilon_3)[r^2 \sin^2 \varphi(r^2 \rho_1 - \rho_2 \rho_3^2) + \rho_1 \rho_3^2(r^2 - 2r^2 \sin^2 \varphi + \rho_1 \rho_2)] \times \\ \times \exp(-2\rho_3 l) + (r^2 \sin^2 \varphi + \rho_1 \rho_3)(\varepsilon_3 \rho_2 - \varepsilon_{112} \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \exp(-4\rho_3 l)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = [(\varepsilon_3 \rho_1 + \varepsilon_{12} \rho_3)(\rho_1 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3) + 2(\varepsilon_{12} - \varepsilon_3)(r^2 \rho_2 - \rho_1 \rho_3^2 - \\ - 2\rho_2 \rho_3^2) \exp(-2\rho_3 l) + (\varepsilon_3 \rho_1 - \varepsilon_{12} \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \times \\ \times \exp(-4\rho_3 l)] + \frac{(\rho'_1 - \rho_1) \varepsilon_{12}}{\rho_1^2 - r^2 \sin^2 \varphi} [-(r^2 \sin^2 \varphi - \rho_1 \rho_3)(\rho_1 + \rho_3) \times \quad (23) \\ \times (\rho_2 + \rho_3) + 2[r^2 \sin^2 \varphi(\rho_1 \rho_2 + \rho_3^2) - \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_1 \rho_2 \rho_3^2] \exp(-2\rho_3 l) - \\ - (v^2 + \rho_1 \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \exp(-4\rho_3 l)]; \endaligned$$

$$\begin{aligned} C = \rho_2 \rho_3 [-(\varepsilon_3 \rho_1 + \varepsilon_{12} \rho_3)(\rho_1 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3) + 2\rho_3(\varepsilon_{12} - \varepsilon_3) \times \\ \times (r^2 + \rho_1 \rho_2) \exp(-2\rho_3 l) + (\varepsilon_3 \rho_1 - \varepsilon_{12} \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \times \\ \times \exp(-4\rho_3 l)] + \frac{(\rho'_1 - \rho_1) \varepsilon_{12}}{\rho_1^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \rho_2 \rho_3 [(r^2 \sin^2 \varphi - \rho_1 \rho_3) \times \quad (24) \\ \times (\rho_1 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3) + 2\rho_3[\rho_1^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_3^2 + r^2 \sin^2 \varphi(\rho_1 - \rho_2)] \times \\ \times \exp(-2\rho_3 l) - (r^2 \sin^2 \varphi + \rho_1 \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3) \exp(-4\rho_3 l)]; \end{aligned}$$

$$E = 4\rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \frac{(\rho'_1 - \rho_1) \epsilon_{12}}{\rho_1^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \exp(-2\rho_3 l); \quad (25)$$

$$\gamma(\theta) = (\rho_1 + \rho_3)(\rho_2 + \rho_3) \left[ (\epsilon_3 \rho_1 + \epsilon_{12} \rho_3) - \frac{(\rho'_1 - \rho_1) \epsilon_{12} (v^2 - \rho_1 \rho_3)}{\rho_1^2 - v^2} \right] \times \\ \times \left[ (\epsilon_3 \rho_2 + \epsilon_{12} \rho_3) - \frac{(\rho'_2(\theta) - \rho_2) \epsilon_{12} [(u \sin \theta + v \cos \theta)^2 - \rho_2 \rho_3]}{\rho_2^2 (u \sin \theta + v \cos \theta)^2} \right]. \quad (26)$$

Ван-дер-ваальсовое взаимодействие между анизотропными пластинаами при произвольном расстоянии между ними и возникающий из-за анизотропии момент ван-дер-ваальсовых сил рассматривались в работах [2, 3], однако и в [2], и в [3] при вычислении были допущены существенные ошибки. Результаты, полученные в [3], приведены также в [1]. В статье [2] для определения момента ван-дер-ваальсовых сил использовался метод гриновских функций, но при нахождении гриновской функции одна из осей координат (ось  $Oy$ ) «для упрощения» весьма громоздких вычислений была направлена вдоль компоненты  $r$  волнового вектора, лежащей в плоскости щели (в [2] эта компонента обозначается через  $q$ ). Тем самым гриновская функция вычисляется в [2] при фиксированном угле  $\varphi = \pi/2$  ( $\varphi$  — полярный угол в плоскости щели в пространстве волновых векторов), но этим можно ограничиться лишь в изотропном случае, когда заранее ясно, что гриновская функция не зависит от угла  $\varphi$ . При наличии же анизотропии гриновская функция от угла  $\varphi$  зависит, поэтому вычисления необходимо проводить при произвольном  $\varphi$ . В [3] для нахождения ван-дер-ваальсова взаимодействия между анизотропными пластинаами использовалось выражение (1), но было неправильно вычислено дисперсионное уравнение для поверхностных волн, так как рассматривались ТЕ- и ТМ-волны, причем, независимо для обычной и необычной волн. В данной работе эта ошибка исправлена, и при нахождении дисперсионного уравнения для поверхностных волн сшиваются поля (4)–(6) с учетом поляризации обычной и необычной волн в обеих средах. В результате свободная энергия ван-дер-ваальсова взаимодействия определяется по формуле (1), где функция  $D(\theta, l, u, v, \omega)$  задается выражением (21).

Из (1), (21) получаем следующее выражение для момента ван-дер-ваальсовых сил между анизотропными пластинаами при любых макроскопическом расстоянии  $l$ , температуре  $T$  и угле разориентировки  $\theta$ :

$$M(l, \theta, T) = - \frac{\partial F(l, \theta, T)}{\partial \theta} = S \frac{T}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ (\rho'_2 - \rho_2) \epsilon_{12} \times \right. \\ \times [B \rho_2^2 r^2 \sin[2(\varphi + \theta)] + Cr^2 \sin[2(\varphi + \theta)] - E[\rho_2^2(2r^2 \sin \varphi \cos(\varphi + 2\theta) + \right. \\ \left. + \rho_3^2 \sin 2\theta) + 2r^2 \sin(\varphi + \theta) \sin \varphi (r^2 \sin(\varphi + \theta) \cos \varphi - \rho_3^2 \sin \theta)]] - \\ - \frac{(\epsilon_{11} - \epsilon_{12})}{2\rho'_2} \sin[2(\varphi + \theta)] r^2 [\rho_2^2 - r^2 \sin^2(\varphi + \theta)] [Br^2 \sin^2(\varphi + \theta) + C - \\ - E[2r^2 \sin \varphi \cos \theta \sin(\varphi + \theta) + \rho_3^2 \sin^2 \theta]] \left\{ [\rho_2^2 - r^2 \sin^2(\varphi + \theta)] [A[\rho_2^2 - \right. \\ \left. - r^2 \sin^2(\varphi + \theta) - (\rho'_2 - \rho_2) \epsilon_{12} [Br^2 \sin^2(\varphi + \theta) + C - E[2r^2 \sin \varphi \times \right. \\ \left. \times \cos \theta \sin(\varphi + \theta) + \rho_3^2 \sin^2 \theta]]]^{-1}, \right\}$$

где  $S$  — площадь поверхности одной из пластин и в аргументах всех зависящих от частоты  $\omega$  функций стоит величина  $i\omega_n$ .

В общем случае выражение (27) трудно обозримо. Можно лишь убедиться, что оно обладает теми свойствами, которые заведомо должны выполняться. Так, например, если положить  $\epsilon_{II2} = \epsilon_{II1}$ , то из (27) непосредственно следует  $M(l, \theta) = 0$ . При  $\epsilon_{I2} = \epsilon_{II1}$  выражение (27) для момента сил также обращается в нуль, поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \sin [2(\varphi + \theta)] f(\sin^2(\varphi + \theta)) = 0. \quad (28)$$

При учете (28) нетрудно также видеть, что момент сил, как и следовало ожидать, равен нулю при углах разориентировки  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

Выражение для момента сил значительно упрощается, если можно пренебречь запаздыванием взаимодействия, когда выполняется неравенство  $l \ll \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — характерная для спектров поглощения сред длина волны. В этом случае из (27) следует, что

$$\begin{aligned} M(l, \theta) = S \frac{T}{16\pi^2 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x dx \int_0^{2\pi} d\varphi \sin [2(\varphi + \theta)] (\epsilon_{II1} - \epsilon_{II2}) \times \\ \times \{(\epsilon_3 + \gamma_1 \epsilon_{I2}) + (\epsilon_3 - \gamma_1 \epsilon_{I2}) e^{-x}\} \{2\gamma_2((\epsilon_3 + \gamma_1 \epsilon_{I2}) \times \\ \times (\epsilon_3 + \gamma_2 \epsilon_{II2}) - (\epsilon_3 - \gamma_1 \epsilon_{I2})(\epsilon_3 - \gamma_2 \epsilon_{II2}) e^{-x}\}^{-1}, \end{aligned} \quad (29)$$

где введены обозначения

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \delta_1 \cos^2 \varphi}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 + \delta_2 \cos^2(\varphi + \theta)} \quad (30)$$

и  $\delta_1, \delta_2$  определяют степень анизотропии сред:

$$\delta_1 = \left( \frac{\epsilon_{II1}}{\epsilon_{I2}} - 1 \right), \quad \delta_2 = \left( \frac{\epsilon_{II1}}{\epsilon_{II2}} - 1 \right). \quad (31)$$

Если анизотропия в одной из пластин мала, то можно найти явную зависимость момента сил от угла разориентировки. Пусть, например,  $|\delta_2| \ll 1$ , тогда можно с хорошей точностью положить  $\gamma_2 \approx 1$ , и из (29) с учетом (28) получаем

$$\begin{aligned} M(l, \theta) = S \frac{T \sin 2\theta}{32\pi^2 l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x dx \int_0^{2\pi} d\varphi \cos 2\varphi (\epsilon_{II1} - \epsilon_{II2}) [(\epsilon_3 + \gamma_1 \epsilon_{I2}) + \\ + (\epsilon_3 - \gamma_1 \epsilon_{I2}) e^{-x}] [(\epsilon_3 + \gamma_1 \epsilon_{I2})(\epsilon_3 + \epsilon_{II2}) - (\epsilon_3 - \gamma_1 \epsilon_{I2})(\epsilon_3 - \epsilon_{II2}) e^{-x}]^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Если анизотропия в первой среде тоже мала и, следовательно,  $|\delta_1| \ll 1$ , то интегрирование по углу  $\varphi$  легко проводится и из (32) получаем

$$\begin{aligned} M(l, \theta) = -S \frac{T \sin 2\theta}{32\pi l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x dx [(\epsilon_{II1} - \epsilon_{II2})(\epsilon_{II1} - \epsilon_{I2}) \times \\ \times \epsilon_3^2 e^{-x}] [(\epsilon_3 + \epsilon_{I2})(\epsilon_3 + \epsilon_{II2}) - (\epsilon_3 - \epsilon_{I2})(\epsilon_3 - \epsilon_{II2}) e^{-x}]^{-2}. \end{aligned} \quad (33)$$

При условии  $l \ll \lambda_0$  часто можно считать, что  $l \ll c\hbar/T$  (см. [4]), тогда имеем

$$M(l, \theta) = -\frac{\hbar \bar{\omega} \sin 2\theta}{64 \pi^2 l^2} S; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = & \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty dx [x(\epsilon_{II1} - \epsilon_{II2})(\epsilon_{I1} - \epsilon_{I2}) \epsilon_3^2 e^{-x}] \times \\ & \times [(\epsilon_3 + \epsilon_{I2})(\epsilon_3 + \epsilon_{II2}) - (\epsilon_3 - \epsilon_{I2})(\epsilon_3 - \epsilon_{II2}) e^{-x}]^{-2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Если же выполняется условие  $lT/\hbar c \gg 1$ , то выражение для момента сил принимает вид

$$\begin{aligned} M(l, \theta) = & -S \frac{T \sin 2\theta}{64 \pi l^2} \int_0^\infty x dx \cdot [(\epsilon_{II1,0} - \epsilon_{II2,0})(\epsilon_{I1,0} - \epsilon_{I2,0}) \epsilon_{3,0}^2 e^{-x}] \times \\ & \times [(\epsilon_{3,0} + \epsilon_{I2,0})(\epsilon_{3,0} + \epsilon_{II2,0}) - (\epsilon_{3,0} - \epsilon_{I2,0})(\epsilon_{3,0} - \epsilon_{II2,0}) e^{-x}]^{-2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где индекс «0» указывает на статическое значение диэлектрической проницаемости.

В предельных случаях (34), (36) функциональные зависимости момента сил от расстояния  $l$  и угла разориентировки пластин  $\theta$  совпадают с полученными в работах [2, 3] и различие имеется при этом только в коэффициентах. На причины полученных расхождений в результатах было указано выше.

Из (34), (35) видно, что при любой прослойке в случае одинаковых сред всегда  $\omega > 0$ , и, следовательно, если предположить, что пластины могут свободно вращаться вокруг оси  $z$ , тела будут ориентироваться так, чтобы их оси анизотропии имели одинаковое направление. При этом перпендикулярное расположение осей анизотропии ( $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ ) является неустойчивым положением равновесия. Если же среды различны, то возможен и случай, когда  $\omega < 0$ . Тогда устойчивое равновесие осуществляется при  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ .

В заключение выражаю благодарность В. Л. Гинзбургу, обратившему внимание автора на существование рассмотренного в статье эффекта.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, УФН, 116, 5 (1975).
- 2 Е. И. Кац, ЖЭТФ, 60, 1172 (1972).
- 3 Ю. С. Бараш, Изв. вузов — Радиофизика, 16, 1227 (1973).
- 4 И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН, 73, 381 (1961).

Ленинградское отделение Института  
земного магнетизма, ионосферы и  
распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию  
9 ноября 1977 г.

#### ON THE MOMENT OF VAN DER WAALS FORCES BETWEEN ANISOTROPIC BODIES

*Yu. S. Barash*

A moment of Van der Waals forces is found between two anisotropic uniaxial thick plates divided by a plane gap filled by isotropic medium. Errors of papers [2, 3] are specified when considering the given effect.

УДК 621.373.826 53

## О РАСЧЕТЕ ДИФРАКЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В БЛИЖНЕЙ И ДАЛЬНЕЙ ЗОНАХ

*П. В. Короленко, С. Н. Маркова, А. М. Ханаев*

Исследуется возможность применения при расчете дифракции лазерного излучения метода разложения поля дифрагированной волны по модам свободного пространства  $\text{TEM}_{pl}$ . Алгоритм расчета дифракции как в ближней, так и в дальней зонах сводится к двум операциям: нахождению коэффициентов разложения и суммированию амплитуд  $\text{TEM}_{pl}$ -волн в плоскости наблюдения. Проведено сравнение рассчитанных на основе предлагаемого метода теоретических кривых, характеризующих распределение поля дифрагированной волны, с экспериментальными зависимостями для ближней и дальней зон.

Имеется ряд работ [1-9], в которых рассмотрен наиболее важный в практическом отношении случай дифракции  $\text{TEM}_{00}$ -волны лазера на круглой центрированной диафрагме. Пространственные характеристики поля дифракции рассчитываются в них с помощью дифракционного интеграла Френеля — Кирхгофа [10]. Составленные на его основе программы машинного расчета поля дифракции для ближней и дальней зон весьма сложны и имеют существенные отличия.

В настоящем сообщении исследуется возможность применения при расчете дифракции лазерного излучения метода разложения поля дифрагированной волны по модам свободного пространства  $\text{TEM}_{pl}$ , являющимся приближенными решениями волнового уравнения. Метод пересчета поля с одной апертуры, где оно считается заданным, в плоскость наблюдения с помощью системы волновых пучков рассмотрен в общем виде в работе [11]; в работе [12] подобный подход использован для расчета дифракции на конце полого волновода. В качестве критерия практической пригодности метода разложения, основанного на использовании пучков  $\text{TEM}$ -волн, может служить быстрота сходимости ряда разложения (в этом случае можно пренебречь модами с очень высокими индексами), а также степень совпадения полученных результатов с результатами расчетов на основе дифракционного интеграла и с данными эксперимента.

Пусть лазерная волна падает на отверстие произвольной формы в непрозрачном экране. Будем считать, что поперечное распределение амплитуды поля пучка в полярных координатах определяется функцией  $\Psi(r, \varphi)$ . Представим поле дифрагированной волны в виде суперпозиции  $\text{TEM}_{pl}$ -мод свободного пространства ( $p, l$  — радиальный и угловой индексы соответственно), поперечное распределение поля которых характеризуется нормированными ортогональными функциями  $\Phi_{pl}$  [13]. Тогда амплитуду светового поля  $\Psi_D(r, \varphi, z)$  на расстоянии  $z$  от отверстия можно представить в виде ряда

$$\Psi_D(r, \varphi, z) = \sum_{p,l}^{\infty} C_{pl} \Phi_{pl}(r, \varphi, z), \quad (1)$$

ось  $z$  совпадает с направлением распространения  $\text{TEM}_{pl}$ -волн (в плоскости отверстия  $z = 0$ ). Коэффициенты разложения можно найти из соотношения

$$C_{pl} = \int_S \Psi(r, \varphi) \psi_{p,l}(r, \varphi) dS, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по площади отверстия  $S$ . Минимальный радиус пучка мод  $\text{TEM}_{pl}$  в практических расчетах выбирается из соображений быстрой сходимости ряда (1). Таким образом, алгоритм расчета поля дифракции как в ближней, так и в дальней зонах сводится к двум операциям: нахождению коэффициентов разложения и суммированию амплитуд  $\text{TEM}_{pl}$ -волн в плоскости наблюдения.

Рассмотрим частный случай нормального падения основной волны лазера  $\text{TEM}_{00}$  на круглую центрированную диафрагму радиуса  $r_0$ . Световое поле на отверстии описывается функцией

$$\Psi(r) = \frac{1}{\bar{w}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-r^2/\bar{w}^2), \quad (3)$$

где  $\bar{w}$  — радиус пучка в плоскости отверстия. В силу аксиальной симметрии задачи отличными от нуля будут только те коэффициенты разложения  $C_{p0} = C_p$ , азимутальный индекс которых равен нулю. Переходя к безразмерным параметрам  $x = z/w$  и  $\chi = \lambda/w$  и используя выражения для  $\psi_{pl}$ , приведенные в [13], поперечное распределение интенсивности волны на расстоянии  $z$  от диафрагмы можно представить в виде (радиус пучка в плоскости диафрагмы считается минимальным,  $w = w_0$ )

$$I(x) = \Psi_D \Psi_D^* = \sum_{p,q} C_p C_q L_p(2x^2) L_q(2x^2) e^{-2x^2} \cos(\theta_{pq}) \frac{2}{\pi w^2(z)}, \quad (4)$$

где

$$x = z/w, \quad \theta_{pq} = 2(p - q) \operatorname{arctg} \left( \frac{x\chi}{\pi} \right),$$

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{x\chi}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Для улучшения сходимости ряда (4) целесообразно проводить разложение по модам  $\text{TEM}_{p0}$  с минимальным радиусом пучка, равным  $w_0 = r_0$ , если  $\alpha < 1$ , и  $w_0 = \bar{w}$ , если  $\alpha \geq 1$ , где  $\alpha = \frac{r_0}{\bar{w}}$  — параметр ограничения пучка. Поскольку ошибка в представлении светового поля в виде суперпозиции  $\text{TEM}$ -мод возрастает с увеличением параметра  $\chi$  [14], в дальнейшем будет считаться, что  $\chi \ll 1$  (для лазерных пучков это условие, как правило, выполняется).

На рис. 1 приведены кривые распределения интенсивности в дальней зоне дифракции, рассчитанные для различного количества членов в разложении (4) ( $x = 10^5$ ,  $\chi = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 1$ ). Кривые рассчитывались с помощью ЭВМ БЭСМ-4 по формуле (4) для  $N = 0; 2; 5; 20$ , где  $N$  совпадает с радиальным индексом  $p$  высшей моды, включенной в рассмотрение. На том же рисунке пунктиром проведена кривая распределения интенсивности в дальней зоне дифракции, рассчитанная с помощью дифракционного интеграла. Как видно из рисунка, уже учет шести мод ( $N = 5$ ) дает удовлетворительное приближение.

Экспериментальная проверка полученных теоретических зависимо-

стей осуществлялась с помощью гелий-неонового лазера ( $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ ), генерирующего ТЕМ<sub>00</sub>-тип колебаний. Регистрация пространственной структуры лазерного поля на выходе лазера и после прохождения диафрагмы осуществлялась фотоэлектрическим методом, основанным на сканировании пучка по поверхности малой входной диафрагмы ФЭУ.

Предварительные эксперименты показали, что при выходе излучения из резонатора через плоское диэлектрическое зеркало в поперечном распределении поля выходного пучка присутствуют заметные искажения, связанные с неоднородным по поверхности пропусканием диэлектрического покрытия. Это существенным образом сказалось на распределении интенсивности в дифракционной картине. Так, в дальней зоне в случае слабого диафрагмирования ( $\alpha \approx 1$ ) пучок не обнаруживал предсказываемого теорией уширения центрального максимума, при этом экспериментальное значение первого бокового дифракционного максимума было на порядок выше теоретического. Для улучшения поперечной структуры выходного пучка вывод излучения осуществлялся тщательно отшлифованной светофильтральной кварцевой пластиной, введенной в резонатор лазера. Круглая диафрагма располагалась в «горловине» отраженного от пластины лазерного пучка, где его фазовый фронт был плоским.

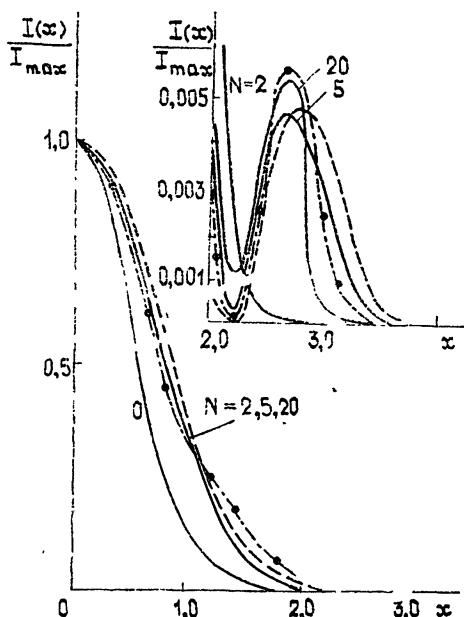


Рис. 1.

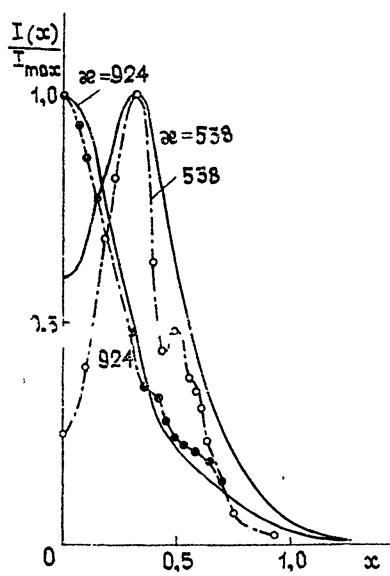


Рис. 2.

Экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности в дальней зоне (штрихпунктирная кривая) для параметров, соответствующих теоретическим кривым, приведено на рис. 1. На рис. 2 сопоставлены нормированные на максимальное значение интенсивности  $I_{\max}$  теоретические (непрерывные) и экспериментальные (штрихпунктирные) кривые для ближней зоны дифракции ( $\chi = 10^{-3}$ ,  $x = 538; 924$ ). Из рисунка видно, что теоретические кривые, рассчитанные для  $N = 20$ , дают более слаженное распределение интенсивности.

Таким образом, теоретические и экспериментальные данные свидетельствуют о практической пригодности описанного приближенного метода расчета дифракции лазерного излучения. Хронометраж времени

расчета поля дифракции на ЭВМ показал, что в тех случаях, когда распределение поля рассчитывается на многих расстояниях от диафрагмы, этот метод дает существенный выигрыш во времени по сравнению с вычислениями на основе дифракционного интеграла.

Авторы выражают благодарность Ф. А. Королеву, А. И. Костиенко и А. И. Одинцову за обсуждение результатов работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Campbell and L. G. Deshezer, J. Opt. Soc. Am., **59**, № 11, 1427 (1969).
2. G. O. Olaofe, J. Opt. Soc. Am., **60**, № 12, 1654 (1970).
3. Arnold L. Bloom, Appl. Opt., **8**, 716 (1969).
4. L. D. Dickson, Appl. Opt., **9**, № 8, 1854 (1970).
5. Richard G. Scheil and G. Tugras, J. Opt. Soc. Am., **60**, № 1, 31 (1971).
6. В. В. Малаев, Оптика и спектроскопия, **28**, № 3, 588 (1970).
7. Е. Ф. Ищенко, В. Н. Сушкин, ЖПС, **23**, № 3, 510 (1975).
8. Ю. М. Климков, Т. И. Кузьмина, Изв. вузов — Приборостроение, **18**, № 12, 87 (1975).
9. J. Svetlik, Optik, **46**, № 2, 195 (1976).
10. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1973.
11. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. вузов — Радиофизика, **7**, № 2, 311 (1964).
12. R. L. Abrams, IEEE, **QE-8**, № 11, 838 (1972).
13. Х. Когельник, сб. Квазиоптика, 210, изд. Мир, М., 1966.
14. С. С. Третьякова, Радиофизика, вып 20, изд. ХГУ, Харьков, 161 (1972)

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
20 сентября 1977 г.

### CALCULATION OF LASER BEAM DIFFRACTION IN NEAR AND FAR ZONES

*P. V. Korolenko, S. N. Markova, A. M. Khapaev*

When calculating the diffraction of the laser radiation a possibility is investigated of the method application of a diffractive wave field expansion over modes of the free space  $TEM_{pl}$ . The calculation algorithm of diffraction both in near and far zones is reduced to two operations: to find the expansion coefficient and to sum up the amplitudes  $TEM_{pl}$  of a wave in the observation plane. A comparison is made of the theoretical curves calculated on the basis of the method suggested which characterize the diffractive wave field distribution with the experimental dependences for near and far zones.

УДК 621.372.4

## О ВЛИЯНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ НА СВОЙСТВА ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА ФАБРИ—ПЕРО

*A. A. Калинкевич*

Показано, что помещение тонкой диэлектрической пленки в полость открытого резонатора Фабри—Перо под углом к его оси приводит к снятию вырождения по поляризации основных колебаний  $\text{TEM}_{q00}$ . При возбуждении резонатора плоской волной отраженное электромагнитное поле в общем случае эллиптически поляризовано. Форма резонансной кривой зависит от толщины пленки, угла, под которым помещена пленка в резонатор, от условий возбуждения резонатора и приема отраженного сигнала. Изменение плоскости поляризации возбуждающей плоской волны не приводит к плавной перестройке добротности резонатора

В резонаторах Фабри—Перо с круглыми сферическими зеркалами основные моды  $\text{TEM}_{q00}$  поляризационно вырождены. При изменении направления плоскости поляризации конфигурация поля, резонансные частоты, добротность резонатора не меняются. В такой системе, как предполагается в работе [1], собственные колебания с одной поляризацией однозначно определяются поляризацией возбуждающего поля. Для возбуждения резонатора Фабри—Перо предложен ряд способов. В частности, в работах [2, 3] рассмотрен эффективный квазиоптический способ возбуждения резонатора с помощью диэлектрической пленки, расположенной под углом  $45^\circ$  к оси резонатора. В работе [4] полагается, что добротность резонатора Фабри—Перо со связью посредством пленки плавно перестраивается путем изменения плоскости поляризации падающей волны, и можно получить непрерывный ряд значений от максимального (параллельная поляризация) до минимального значения (перпендикулярная поляризация). Однако такой вывод является ошибочным. Рассмотрение вопроса о влиянии диэлектрической пленки на свойства резонатора показывает, что помещение пленки в резонатор Фабри—Перо с круглыми сферическими зеркалами под углом  $\Theta \neq 90^\circ$  к его оси приводит к снятию вырождения колебаний по поляризации. Резонатор на одном и том же типе колебаний и при одном и том же расстоянии между зеркалами может возбуждаться на двух частотах  $v_{p1}$  и  $v_{p2}$ . Одна частота соответствует случаю, когда вектор электрического поля  $E$  параллелен плоскости пленки (колебание  $\text{TEM}'_{q00}$ ), вторая — случаю, когда вектор магнитного поля  $H$  параллелен плоскости пленки (колебание  $\text{TEM}''_{q00}$ ). Добротность резонатора на колебаниях  $\text{TEM}'_{q00}$  и  $\text{TEM}''_{q00}$  принимает разные значения.

Снятие вырождения по поляризации и изменение добротности резонатора объясняется тем, что при прохождении плоской волны через слой диэлектрика набег фазы между прошедшей волной и падающей  $\varphi_1$  и модуль коэффициента отражения от пленки  $|V_1|$  для волны, когда  $E$  параллельно плоскости пленки, не равны  $\varphi_2$  и  $|V_2|$  для волны, когда  $H$  параллельно плоскости пленки [6]. Для тонких пленок толщиной  $d$  ( $d/\lambda \ll 1$ ), достаточно больших зеркал резонатора, при расстоянии ме-

жду ними  $L \gg \lambda$  разность резонансных частот, соответствующих модам  $\text{TEM}'_{q00}$  и  $\text{TEM}''_{q00}$  при одном и том же расстоянии между зеркалами, определяется как

$$\Delta f = |\nu_{p1} - \nu_{p2}| = \frac{F_0}{\pi} |\varphi_1 - \varphi_2| \approx \frac{F_0 d}{\lambda} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\epsilon} \sin \Theta \operatorname{tg} \Theta. \quad (1)$$

Здесь  $F_0 = \frac{c}{2L}$  — межмодовое расстояние.

Помещение в полость резонатора пленки без потерь под углом к его оси приводит к увеличению относительных потерь мощности на величину, определяемую  $|V_i|^2$ . Полоса пропускания резонатора на уровне 0,5 по мощности  $2\Delta f_i$  найдется из выражений

$$2\Delta f_1 = 2\Delta f_0 + \frac{F_0 \pi d^2}{\lambda^2} \frac{(\epsilon - 1)^2}{\cos^2 \Theta} \quad (\text{вектор } E \text{ параллелен} \\ \text{плоскости пленки}), \quad (2)$$

$$2\Delta f_2 = 2\Delta f_0 + \frac{F_0 \pi d^2}{\lambda^2} \left[ \frac{\epsilon^2 \cos^2 \Theta - \epsilon + \sin^2 \Theta}{\epsilon \cos \Theta} \right] \quad (\text{вектор } H \text{ параллелен} \\ \text{плоскости пленки}),$$

$2\Delta f_0$  — полоса пропускания резонатора на уровне 0,5 по мощности в отсутствие пленки.

Разность между резонансными частотами  $\text{TEM}'_{q00}$  и  $\text{TEM}''_{q00}$  пропорциональна толщине пленки  $d$ , а полусумма полос пропускания резонатора  $\frac{2\Delta f_1 + 2\Delta f_2}{2}$  — квадрату толщины  $d^2$  и полосе пропускания резонатора  $2\Delta f_0$ . При соответствующем выборе параметров может оказаться, что  $\Delta f > \Delta f_1 + \Delta f_2$ .

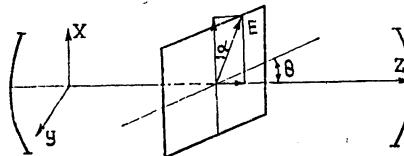


Рис. 1. Расположение диэлектрической пленки в резонансной системе.

При возбуждении резонатора с помощью диэлектрической пленки (вектор электрического поля  $E$  составляет с осью  $X$  угол  $\alpha$ , рис. 1) отраженное от резонатора поле имеет вид

$$E_{\text{отр},x} = A_0 |\rho_1| \cos \alpha \cos (\omega t + \varphi_0), \quad E_{\text{отр},z} = A_0 |\rho_2| \sin \alpha \cos (\omega t + \varphi_0 + \xi).$$

Здесь  $A_0$  — амплитуда возбуждающих колебаний,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — коэффициенты отражения от резонатора по полю, когда  $E$  и  $H$  параллельны плоскости пленки соответственно.

В случае малых потерь коэффициент отражения и тангенс разности фаз ( $\operatorname{tg} \xi$ ) можно представить таким образом:

$$\rho_i = \left( \frac{2\Delta f_i - 2\Delta f_0}{2\Delta f_i} \right) \left( \frac{1 - 2j \frac{\nu - \nu_{pl}}{2\Delta f_i}}{1 + 4 \left( \frac{\nu - \nu_{pl}}{2\Delta f_i} \right)^2} \right), \quad (3)$$

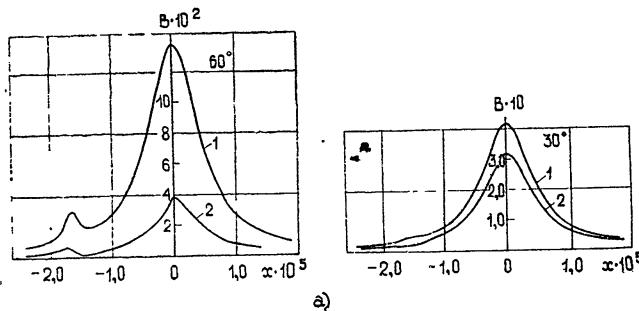
$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\frac{\nu - \nu_{p1}}{\Delta f_1} - \frac{\nu - \nu_{p1} + \Delta f}{\Delta f_2}}{1 + \frac{\nu - \nu_{p1}}{\Delta f_1} \cdot \frac{\nu - \nu_{p1} + \Delta f}{\Delta f_2}}.$$

Если приемное устройство осуществляет прием электромагнитного излучения любой поляризации, то сигнал на выходе квадратичного детектора будет

$$B_1 = \frac{A_0^2}{2} [|\rho_1|^2 \cos^2 \alpha + |\rho_2|^2 \sin^2 \alpha]. \quad (4)$$

Сигнал на выходе квадратичного детектора однополяризационного устройства (регистрирующее устройство осуществляет прием сигналов, у которых направление колебаний электрического вектора составляет с осью  $X$  угол  $\alpha_0$ ) равен

$$B_2 = \frac{A_0^2}{2} \left( |\rho_1|^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_0 + |\rho_2|^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha_0 - \frac{1}{2} |\rho_1| |\rho_2| \sin 2\alpha \sin 2\alpha_0 \cos \xi \right). \quad (5)$$



a)

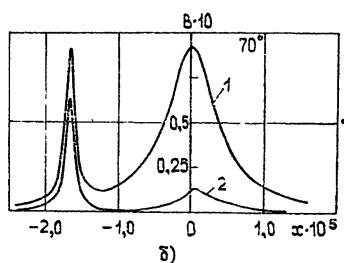


Рис. 2. Амплитудно-частотные зависимости резонатора при различных поляризациях падающей волны. Кривая 1 — приемное устройство осуществляет прием электромагнитного излучения любой поляризации. Кривая 2 — приемное устройство — однополяризационное (приемный и излучающий рупоры расположены под одним направлением); а) добротность резонатора без пленки  $Q_0 = 4 \cdot 10^5$ ; б) добротность резонатора без пленки  $Q_0 = 10^6$ .

Из выражений (1) — (5) следует, что при  $\alpha = 0^\circ$  или  $\alpha = 90^\circ$ , а также, когда  $\alpha_0 = 0^\circ$  или  $\alpha_0 = 90^\circ$ , при однополяризационном приеме форма резонансной кривой имеет вид  $M/[1 + l(\nu - \nu_0)^2]$ . Если  $\alpha \neq 0^\circ$  и  $\alpha \neq 90^\circ$ , то форма амплитудно-частотной характеристики резонатора усложняется. Влияние изменения плоскости поляризации падающей волны и добротности резонатора без пленки  $Q_0 = \frac{\nu_p}{2\Delta f_0}$  на форму отраженного сигнала представлено на рис. 2. На

рис. 2 изображены нормированные на  $A_0^2/2$  величины  $B_1$  и  $B_2$  в зависимости от  $x = \frac{v - v_{p1}}{v_{p1}}$  при различных углах  $\alpha$ . Расчет зависимостей выполнялся для резонатора со следующими параметрами: расстояние между сферическими зеркалами  $L = 530$  мм, радиус кривизны зеркал  $R = 530$  мм, добротность  $Q_0 = 4 \cdot 10^5$  и  $Q_0 = 10^6$ , толщина пленки  $d = 50$  мк, длина волны  $\lambda = 2$  мм, угол, под которым внесена пленка к оси резонатора, равен  $45^\circ$ , приемный и излучающий рупоры расположены под одним направлением ( $\alpha = \alpha_0$ ). На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики резонатора, описанного в работе [7].

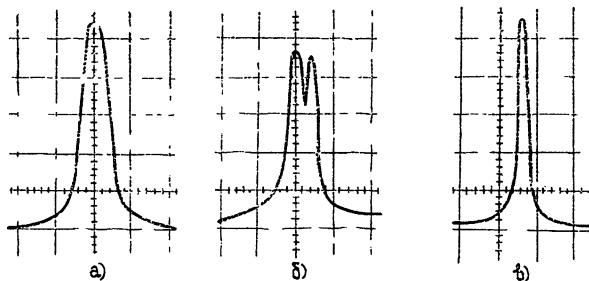
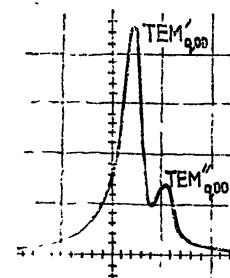


Рис. 3. Экспериментальный вид амплитудно-частотной зависимости:  
а)  $\alpha = 0^\circ$ , б)  $\alpha \approx 70^\circ$ , в)  $\alpha = 90^\circ$  (графическая копия).

Приведенное рассмотрение относится к случаю, когда коэффициент связи между ортогональными модами равен нулю [5]. Наличие дополнительных неоднородностей может привести к взаимодействию ортогональных мод и перекачке энергии от электромагнитной волны одной поляризации к волне другой поляризации. Например, при введении в полость резонатора, в котором возбуждаются колебания  $\text{TEM}'_{q00}$ , металлической проволочки с диаметром  $d_{\text{пр}} \ll \lambda$  при некоторых ее положениях наблюдались интенсивные колебания  $\text{TEM}''_{q00}$  (см. рис. 4). Явление снятия вырождения по поляризации и взаимодействие ортогональных мод могут привести к значительным отклонениям отклика резонатора от колоколообразной, что необходимо иметь в виду при построении измерительной аппаратуры, включающей в себя резонатор Фабри—Перо.

Рис. 4. Влияние неоднородности на форму амплитудно-частотной зависимости резонатора. До помещения проволочки в полость резонатора наблюдались только колебания  $\text{TEM}'_{q00}$  (графическая копия).



В результате проделанной работы можно сделать выводы.

При помещении диэлектрической пленки в открытый резонатор Фабри—Перо с круглыми сферическими зеркалами под углом к его оси происходит снятие вырождения по поляризации основных колебаний  $\text{TEM}_{q00}$ .

Отраженное электромагнитное поле в общем случае имеет эллиптическую поляризацию, а форма резонансной кривой отличается от колоколообразной.

Изменение плоскости поляризации падающего излучения не приводит к плавной перестройке добротности резонатора, а влияет только на интенсивности взаимно ортогональных колебаний.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Р. А Валитов и др, Техника субмиллиметровых волн, 1969.
- 2 G. Schulteг, Frequenz, 20, № 1, 10 (1966).
- 3 Ю А Дрягин, А Ф Крупнов, Л М Кукин, В А Скворцов, ПТЭ, 1, 95 (1969).
- 4 Френч, Арнольд, Приборы для научных исследований, 11, 43 (1967)
- 5 В. Б. Штейншлегер, Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах, Оборонгиз, М, 1955.
- 6 Л М Бреховских, Волны в слоистых средах, изд АН СССР, М, 1957
- 7 А Е Башаринов, А А Калинкевич, ПТЭ, 2, 134 (1973)

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
5 августа 1977 г

### THE INFLUENCE OF THE DIELECTRIC LAYER ON PROPERTIES OF OPEN FABRI—PEROT RESONATOR

*A. A. Kalinkevich*

It is shown that if a thin dielectric layer is placed in a cavity of the open Fabri—Perot resonator at an angle to its axis there occurs the removal of the polarization degeneration of the fundamental oscillations  $TEM_{q\infty}$ . When the resonator is excited by a plane wave the reflected electromagnetic field is elliptically polarized in the general case. The form of the resonance curve depends on the layer thickness, the angle at which the layer is placed in the resonator and on the conditions of the resonator excitation and the reception of the reflected signal. The variation of the plane of the exciting plane wave polarization does not lead to a smooth retuning of the resonator Q-factor.

УДК 621.372 8.09

## РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ЗЕРКАЛЬНО-ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

*В. М. Гаврилов, Д. М. Сазонов, Н. Я. Фролов*

Рассматривается задача электродинамического расчета коэффициента отражения бесконечной волноводной решетки зеркально-итерационным методом. В качестве примера применения метода представлены результаты расчета коэффициентов отражения в линейной волноводной решетке.

Границная задача для бесконечной фазированной антенной решетки (ФАР), образованной открытыми полуограниченными волноводами, как правило, решается либо методом интегральных уравнений ([1], стр. 56), либо методом частичных областей ([1], стр. 102). В обоих случаях возникает необходимость решать систему алгебраических уравнений значительного порядка.

В настоящей статье рассматривается зеркально-итерационный метод решения граничной задачи [2]. Метод предусматривает подход, основанный на использовании метода частичных областей, но позволяет избежать непосредственного решения системы линейных уравнений.

Основная идея зеркально-итерационного метода заключается в раздельном «сшивании» тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на общих участках поверхности раздела с помощью двух вспомогательных задач. В одной вспомогательной задаче вдоль поверхности раздела вводится идеальный магнитный экран (магнитное «зеркало») и «сшиваются» составляющие электрического поля, а в другой вводится идеальный электрический экран (электрическое «зеркало») и «сшиваются» составляющие магнитного поля. Искусственное введение магнитного экрана и электрического компенсируется путем введения наряду с заданными источниками некоторых фиктивных. Суперпозиция двух вспомогательных задач дает точное решение исходной задачи для некоторой, отличной от исходной, системы источников. Решение для заданной системы источников синтезируется далее из решений, полученных описанным выше способом, в ходе итерационного процесса.

Если заданная система источников расположена одновременно в разных областях по отношению к границе раздела, то исходную задачу можно представить как суперпозицию нескольких задач с источниками, заданными только в одной области.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечную периодическую решетку, образованную открытыми полуограниченными волноводами с толстыми стенками (рис. 1). Положим, что источник возбуждения решетки может находиться как во внутренней области решетки (режим свободного излучения), так и во внешней области (решетка в режиме приема). Воспользуемся методом частичных областей и разложим электромагнитные

поля по разные стороны границы раздела (совпадающей с плоскостью  $z = 0$ ) по соответствующим векторным ортонормированным типам волн.

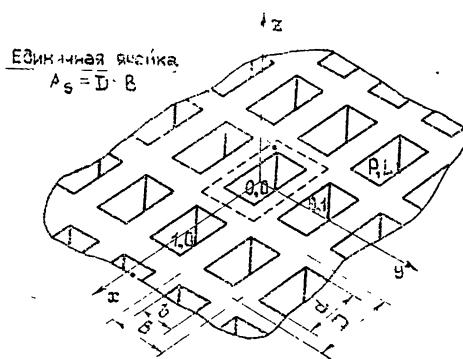


Рис. 1. Бесконечная антенна решетка из прямоугольных волноводов.

Поперечные составляющие электрического и магнитного полей в любом поперечном сечении ( $P, L$ )-го волноводного излучателя могут быть найдены в виде

$$E_{tg}(x, y, z) = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{qmn} e^{-\gamma_{mn} z} + b_{qmn} e^{\gamma_{mn} z}] \times \\ \times \Phi_{qmn}^{PL}(x, y) \exp [j(P\psi_x + L\psi_y)], \quad (1)$$

$$z \times H_{tg}(x, y, z) = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} -[A_{qmn} e^{-\gamma_{mn} z} - b_{qmn} e^{\gamma_{mn} z}] \times \\ \times y_{qmn} \Phi_{qmn}^{PL}(x, y) \exp [j(P\psi_x + L\psi_y)],$$

где  $A_{qmn}, b_{qmn}$  — не зависящие от координат комплексные амплитудные коэффициенты;  $\Phi_{qmn}^{PL}(x, y)$  — ортонормированные векторные функции, описывающие распределение поля в поперечной плоскости волновода (см. Приложение);  $y_{qmn}$  — характеристическая проводимость волноводов;

$\gamma_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}$  — постоянная распространения ( $m, n$ )-го волноводного типа волны;  $\psi_x$  — сдвиг фаз между сигналами в соседних элементах вдоль оси  $x$ ,  $\psi_y$  — вдоль оси  $y$ ; индекс  $q = 1$  соответствует  $H$ -волнам,  $q = 2$  —  $E$ -волнам. Поскольку электромагнитное поле повторяется периодически от ячейки к ячейке со сдвигом  $\psi_x$  по оси  $x$  и  $\psi_y$  по оси  $y$ , то достаточно рассмотреть поле только одной ячейки с индексами  $P = 0, L = 0$  (рис. 2).

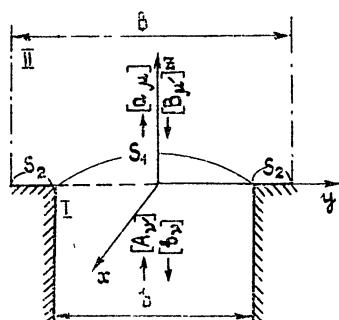


Рис. 2. „Стык“ волноводного излучателя и „пространственного волновода“.

Выражения для поперечных составляющих поля во внешнем пространстве решетки имеют вид

$$E_{tg}(x, y, z) = \sum_{q=1}^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} [a_{qrt} \exp(-\Gamma_{rt} z) + \\ + B_{qrt} \exp(\Gamma_{rt} z)] \Psi_{qrt}(x, y), \quad (2)$$

$$z \times H_{tg}(x, y, z) = \sum_{q=1}^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} - [a_{qrt} \exp(-\Gamma_{rt} z) - \\ - B_{qrt} \exp(\Gamma_{rt} z)] Y_{qrt} \Psi_{qrt}(x, y),$$

где  $a_{qrt}$ ,  $B_{qrt}$  — не зависящие от координат комплексные амплитудные коэффициенты;  $\Psi_{qrt}(x, y)$  — ортонормированные векторные поперечные функции пространственных волн (см. Приложение);  $Y_{qrt}$  — волновые проводимости;  $\Gamma_{rt} = \sqrt{\left(\frac{2\pi r + \psi_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{2\pi t + \psi_y}{B}\right)^2} - k^2$  — постоянная распространения  $(r, t)$ -го пространственного типа волны. Волны с амплитудами  $A_{qmn}$ ,  $B_{qmn}$  являются падающими волнами, распространяющимися к границе раздела; волны с амплитудами  $b_{qmn}$ ,  $a_{qmn}$  соответствуют отраженным волнам, распространяющимися от границы раздела.

Наиболее общее решение задачи рассеяния волн на «стыке» единичная ячейка решетки — пространственный волновод (рис. 2) эквивалентно отысканию обобщенной матрицы рассеяния  $[R]$ , связывающей матрицы-столбцы амплитудных коэффициентов волн, отраженных от «стыка», с матрицами-столбцами амплитудных коэффициентов первичного падающего поля:

$$\begin{bmatrix} [b_v] \\ [a_\mu] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{vv}] & [R_{v\mu'}] \\ [R_{\mu v}] & [R_{\mu\mu'}] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [A_v] \\ [B_\mu] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где матричные блоки  $[R_{vv}]$  и  $[R_{\mu\mu'}]$  могут быть названы матрицами отражений для I и II областей (рис. 2), а блоки  $[R_{v\mu'}]$  и  $[R_{\mu v}]$  — матрицами передачи из I области во II и обратно (здесь использована более простая индексация волн:  $v$  вместо  $qmn$ ,  $\mu$  вместо  $qrt$ ). В общем случае порядок этих блоков является бесконечным, однако в практических расчетах количество учитываемых типов волн может быть выбрано исходя из требуемой точности решения.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим две вспомогательные задачи.

*Задача 1* — с электрическим «зеркалом». Найдем решение, при котором

$$E_{tg}|_{S_1+S_2} = 0 \quad (\text{при } z = 0), \quad (4)$$

и осуществим сшивание полных касательных составляющих магнитных полей на общем участке  $S_1$ :

$$H_{tg}^I|_{S_1} = H_{tg}^{II}|_{S_1} \quad (\text{при } z = 0). \quad (5)$$

Из (4) получаем

$$b_{qmn}^3 = p_{qmn}^3 A_{qmn}^3, \quad p_{qmn}^3 = -1, \quad (6)$$

$$a_{qrt}^3 = p_{qrt}^3 B_{qrt}^3, \quad p_{qrt}^3 = -1.$$

Условие (5) с учетом (1), (2) и (6) принимает вид

$$-\sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{qmn}^3 y_{qmn} \Phi_{qmn}(x, y) = \\ = \sum_{q=1}^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} B_{qrt}^3 Y_{qrt} \Psi_{qrt}(x, y), \quad (7)$$

Умножая (7) на комплексно-сопряженную функцию  $\Phi_{q'm'n'}^*$  и интегрируя по  $x$  и  $y$  в пределах  $S_1$ , получим

$$A_{q'm'n'}^{\text{a}} = \frac{-1}{y_{q'm'n'}} \sum_{q=1}^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} B_{qrt}^{\text{a}} Y_{qrt} L_{q'm'n', qrt}, \quad (8)$$

где через  $L_{q'm'n', qrt}$  обозначено нормированное скалярное произведение функций  $\Phi_{q'm'n'}^*$  и  $\Psi_{qrt}$ ,

$$L_{q'm'n', qrt} = \int_{S_1} \Psi_{qrt} \Phi_{q'm'n'}^* ds / \int_{S_1} \Phi_{q'm'n'} \Phi_{q'm'n'}^* ds. \quad (9)$$

Соотношение (8) связывает амплитуду любой падающей на границу раздела волноводной волны с амплитудами падающих на границу раздела пространственных волн. Амплитуды волн, отраженных от электрического «зеркала», определяются из (6).

*Задача 2*—с магнитным «зеркалом». Найдем решение, при котором

$$\mathbf{H}_{tg}|_{S_1+S_2} = 0 \quad (\text{при } z = 0), \quad (10)$$

и осуществим сшивание полных касательных электрических полей на общем участке поверхности раздела  $S_1$ , добавив граничное условие  $\mathbf{E}_{tg} = 0$  на участке  $S_2$ , т. е.

$$\mathbf{E}_{tg}^{\text{II}}|_{S_1+S_2} = \begin{cases} 0 & \text{на } S_2 \\ \mathbf{E}_{tg}^{\text{I}} & \text{на } S_1 \end{cases}. \quad (11)$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned} b_{qmn}^{\text{M}} &= p_{qmn}^{\text{M}} A_{qmn}^{\text{M}}, \quad p_{qmn}^{\text{M}} = 1, \\ \alpha_{qrt}^{\text{M}} &= p_{qrt}^{\text{M}} B_{qrt}^{\text{M}}, \quad p_{qrt}^{\text{M}} = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенство (11) с учетом (12) после подстановки (1), (2) имеет вид

$$\sum_{q=1}^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} B_{qrt}^{\text{M}} \Psi_{qrt}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на } S_2 \\ \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{qmn}^{\text{M}} \Phi_{qmn}(x, y) & \text{на } S_1 \end{cases}. \quad (13)$$

Умножая (13) на комплексно-сопряженную функцию  $\Psi_{q'r't'}^*$  и интегрируя по  $S_1 + S_2$ , получим соотношение

$$B_{q'r't'}^{\text{M}} = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{qmn}^{\text{M}} L_{q'r't', qmn}, \quad (14)$$

в котором  $L_{q'r't', qmn}$  обозначает нормированное скалярное произведение функций  $\Phi_{qmn}$  и  $\Psi_{q'r't'}^*$ ,

$$L_{q'r't', qmn} = \int_{S_1} \Phi_{qmn} \Psi_{q'r't'}^* ds / \int_{S_1+S_2} \Psi_{q'r't'} \Psi_{q'r't'}^* ds. \quad (15)$$

Соотношение (14) связывает амплитуду любой пространственной волны, падающей на границу раздела, со всеми амплитудами падающих на границу раздела волноводных волн.

Таким образом, в результате решения вспомогательных задач 1 и 2 удается определить источники в областях I и II, при которых на границе раздела областей касательная составляющая либо электрического либо магнитного поля равна нулю.

### 3. ЗЕРКАЛЬНО-ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Используя суперпозицию вспомогательных задач 1 и 2, можно организовать итерационный процесс, в ходе которого синтезируется решение для первоначально заданной системы источников.

Рассматривая задачу об активной ФАР (источники в волноводной области I,  $A_v^m \rangle \neq 0, B_\mu^m \rangle = 0$ ), решаем последовательно задачи 2 и 1. При этом на первом цикле итерационного процесса столбец амплитудных коэффициентов  $A_v^m \rangle$  (индекс  $\rangle$  обозначает здесь, что  $A_v^m \rangle$  есть матрица-столбец) полагаем равным столбцу амплитудных коэффициентов источника в области I, т. е.  $A_v^m \rangle = A_v^{inst} \rangle$ . С помощью (14) находим столбец амплитудных коэффициентов  $B_\mu^m \rangle$  некоторого фиктивного источника, который необходимо поместить в свободное пространство (область II) для выполнения условия (11). С помощью соотношений (12) одновременно находим амплитудные коэффициенты отраженных волн в областях I и II.

Для аннулирования зеркального источника в области II, возникшего при решении второй вспомогательной задачи и отсутствовавшего в исходной задаче, в качестве первичного источника для задачи с электрическим зеркалом (задача 1) необходимо взять источник, возбуждающий волны с амплитудами  $B_\mu^o \rangle = -B_\mu^m \rangle$ . Решение этой вспомогательной задачи находится с помощью выражений (6), (8).

Суперпозиция вспомогательных задач 2 и 1 дает точное решение задачи для некоторого распределения источников в области I, характеризуемого амплитудами падающих волн  $A_v^o \rangle$ ,

$$A_v^o \rangle = A_v^m \rangle + A_v^o \rangle. \quad (16)$$

Проектируя исходный столбец  $A_v^{inst} \rangle$  на столбец  $A_v^o \rangle$ , для которого решение известно, можно записать, что

$$A_v^{inst} \rangle = q A_v^o \rangle + A_v^{oct} \rangle. \quad (17)$$

Весовой коэффициент  $q$  выбираем из условия минимизации нормы остаточного источника  $A_v^{oct} \rangle$ :

$$q = \sum_v A_v^{inst} A_v^{o*} / \sum_v |A_v^o|^2. \quad (18)$$

При этом относительная квадратичная погрешность решения может быть оценена как

$$\varepsilon^2 = \sum_v |A_v^{oct}|^2 / \sum_v |A_v^{inst}|^2.$$

Если норма остаточного источника велика, повторяем весь цикл решения задачи, используя остаточный источник в качестве исходного для второго цикла, и т. д. Возникающий итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не удается получить требуемую точность решения поставленной задачи. Описанный итерационный процесс аналогичен хорошо известному и исследованному «градиентному методу с минимальными невязками» (см. [3], стр. 498). Сходимость процесса гарантируется самим алгоритмом метода, построенным на минимизации положительно-определенного квадратичного функционала.

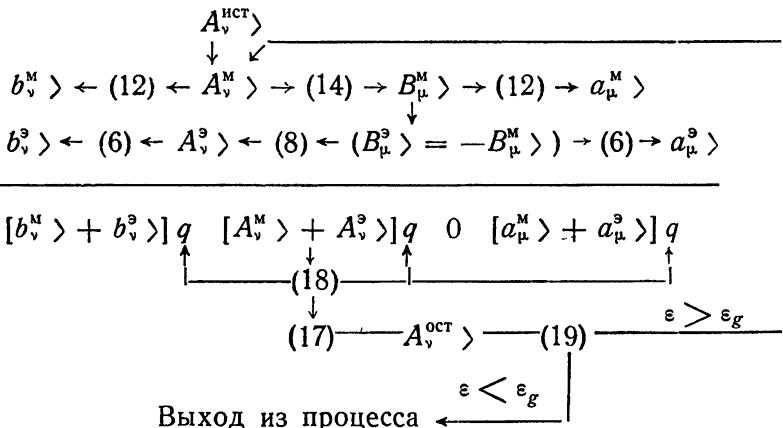
Окончательное решение исходной задачи относительно амплитудных коэффициентов вторичного поля имеет вид

$$b_v^o \rangle = \sum_{i=1}^N q^{(i)} [b_v^o \rangle + b_v^m \rangle]^{(i)}.$$

$$a_{\mu}^{\Sigma} \rangle \sum_{i=1}^N q^{(i)} [a_{\nu}^{\Sigma} \rangle + a_{\mu}^M \rangle]^{(i)},$$

где  $i$  — номер цикла, а  $N$  — общее число циклов итерационного процесса.

Построенный таким образом процесс характеризуется следующей схемой:



Здесь столбец  $A_v^{\text{ист}}$  характеризует исходный источник, с которого начинается итерационный процесс. Цифры в скобках указывают на номера используемых в процессе счета формул, стрелки — на последовательность выполняемых операций.

Процесс решения задачи для случая пассивной решетки (источник в свободном пространстве II ( $A_v^{\text{ист}} = 0$ ,  $B_\mu^{\text{ист}} \neq 0$ ) аналогичен рассмотренному выше с той разницей, что сначала решается задача 1, а затем задача 2.

#### 4. РАСЧЕТ ОДНОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФАР

По изложенной выше методике были составлены программы для ЭВМ БЭСМ-6 и рассчитаны коэффициенты отражения на основном типе волны для ФАР, образованной полуограниченными плоскопараллельными волноводами со стенками конечной толщины, в режиме свободного излучения.

Для нахождения коэффициента отражения матрица-столбец, характеризующая исходный источник  $A_v^{\text{ист}}$ , была взята в виде  $[1, 0, 0, \dots, 0]_t$ . Получаемые при этом решения определяли  $R_{v1} \rangle$  и  $R_{\mu 1} \rangle$  — столбцы блоков  $[R_{vv}]$ ,  $[R_{\mu v}]$  матрицы рассеяния. Искомый коэффициент отражения соответствовал элементу  $R_{11}$  матрицы-столбца  $R_{v1} \rangle$ .

Первоначально при вычислениях учитывалось до 41 гармоники высших типов волн в волноводах и пространстве излучения. Уменьшение числа учитываемых гармоник до 21 практически не сказалось на результатах расчета во всех рассмотренных вариантах (изменение не более чем на 0,0005 по модулю и на  $0,1^\circ$  по фазе).

Расчеты проводились для случаев сканирования в  $E$ - и  $H$ -плоскостях. Рассчитанные зависимости модуля и фазы коэффициента отражения от угла фазирования приведены на рис. 3, 4.

Зависимости на рис. 3 (сканирование в  $E$ -плоскости) имеют характерные особенности: единичное значение модуля коэффициента отражения для решетки с расстоянием между элементами менее полуволны, соответствующее уходу главного максимума в мнимую область;

ники на кривой модуля коэффициента отражения для решетки с расстоянием между элементами более полуволны, соответствующие появлению побочных главных максимумов в действительном пространстве.

В большинстве рассмотренных задач сходимость процесса с точностью 0,1% по норме столбца исходного источника обеспечивалась за 6—8 циклов. Однако возможны случаи, когда матрица-столбец остаточного источника (невязки) предыдущего цикла, используемая в качестве исходного источника для последующего цикла, становится ортогональной матрице-столбцу остаточного источника последующего цикла и происходит зацикливание процесса. Это возможно, например, в том случае, когда какая-либо гармоника в одной из областей «резонирует». В этом случае столбец  $A^2$  практически не зависит (с точностью до постоянного множителя) от вида столбца, взятого в качестве исходного. Выход в этом случае состоит в получении решений с амплитудой резонирующей гармоники, равной нулю. Такое нерезонансное решение можно всегда получить, вычитая друг из друга два любых резонансных решения, полученных от линейно-независимых исходных столбцов.

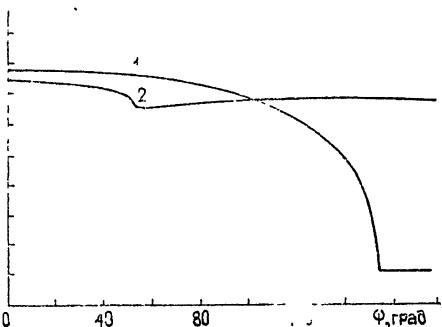
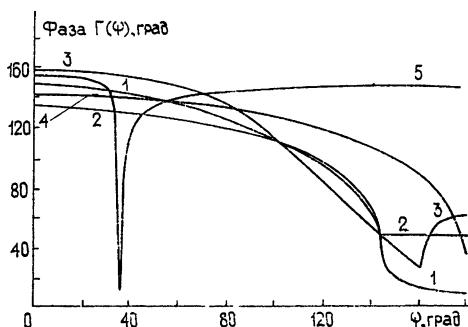
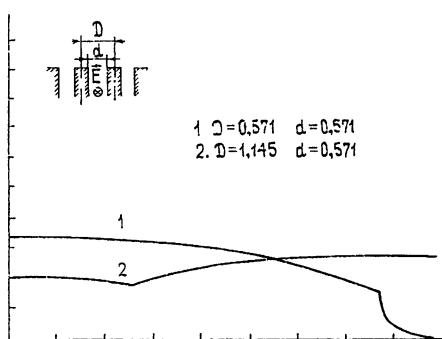
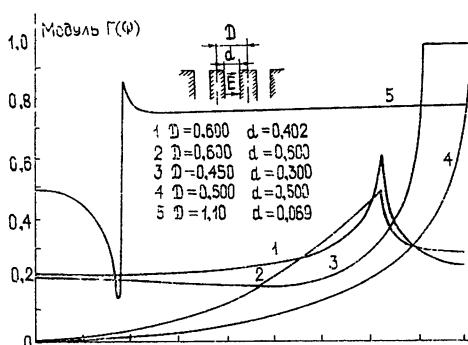


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения  $\Gamma$  от угла фазирования  $\phi$  при сканировании в  $E$ -плоскости.

Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $\Gamma$  от угла фазирования  $\phi$  при сканировании в  $H$ -плоскости.

Счетное время вычислительного процесса с использованием зеркально-итерационного метода для расчета зависимости коэффициента отражения от угла фазирования в 90 точках с точностью 0,1% по норме столбца исходного источника по всем рассмотренным вариантам не превышало 3 мин.

Таким образом, зеркально-итерационный метод может быть весьма эффективно использован для расчета характеристик волноводных фазированных антенных решеток. В отличие от традиционных методов он не требует запоминания полной матрицы коэффициентов эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений и позволяет более оптимально использовать оперативную память машины.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Ортогональные векторные функции, характеризующие поперечное распределение поля в  $(P, L)$ -м прямоугольном волноводе (рис. 1) с размерами сечения  $d$  и  $b$  по осям  $x$  и  $y$  декартовой системы координат с началом в центре сечения можно записать в следующем виде:

для волны типа  $H_{mn}$  —

$$\Phi_{1mn}^{PL}(x, y) = \left[ \left( \frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \left( \frac{r_m r_n}{db} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right) (-1)^n \Phi_{mnx}^{PL}(x, y) x - \left( \frac{m\pi}{d} \right) (-1)^m \Phi_{mny}^{PL}(x, y) y \right],$$

для волны типа  $E_{mn}$  —

$$\Phi_{2mn}^{PL}(x, y) = \left[ \left( \frac{m\pi}{d} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{-1/2} \left( \frac{r_m r_n}{db} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[ \left( \frac{m\pi}{d} \right) (-1)^m \Phi_{mnx}^{PL}(x, y) x + \left( \frac{n\pi}{b} \right) (-1)^n \Phi_{mny}^{PL}(x, y) y \right],$$

где

$$\Phi_{mnx}^{PL}(x, y) = \begin{cases} \cos \frac{m\pi}{d} (x - PD), & m \text{ — четн.} \\ \sin \frac{m\pi}{d} (x - PD), & m \text{ — нечетн.} \end{cases} \times$$

$$\times \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{b} (y - L \cdot B), & n \text{ — четн.} \\ \cos \frac{n\pi}{b} (y - L \cdot B), & n \text{ — нечетн.} \end{cases},$$

$$\Phi_{mny}^{PL}(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{m\pi}{d} (x - PD), & m \text{ — четн.} \\ \cos \frac{m\pi}{d} (x - PD), & m \text{ — нечетн.} \end{cases} \times$$

$$\times \begin{cases} \cos \frac{n\pi}{b} (y - L \cdot B), & n \text{ — четн.} \\ \sin \frac{n\pi}{b} (y - L \cdot B), & n \text{ — нечетн.} \end{cases},$$

$r_n$  — множитель Неймана, равный 1 при  $n = 0$  или 2 при  $n \neq 0$ .

Векторные функции  $\Phi_{qmn}^{PL}(x, y)$  удовлетворяют условию нормировки

$$\iint_{A_s'} \Phi_{qmn}^{PL}(x, y) \Phi_{q'm'n'}^{PL*}(x, y) dx dy = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{qq'},$$

где  $A_s$  — площадь сечения ( $P, L$ )-го волноводного излучателя. Характеристические проводимости волноводов определяются выражениями  $y_{1mn} = \gamma_{mn}/j\omega\mu$  для  $H$ -волн и  $y_{2mn} = j\omega\varepsilon/\gamma_{mn}$  для  $E$ -волн.

2. Ортогональные векторные функции, характеризующие поперечное распределение поля для пространственной волны, имеют вид для волн типа  $H_{rt}$  —

$$\Psi_{1rt}(x, y) = \left( \frac{-jk_{yt}x + jk_{xr}y}{(k_{xr}^2 + k_{yt}^2)^{1/2}} \right) \exp [j(k_{xr}x + k_{yt}y)] \sqrt{\frac{1}{DB}},$$

для волн типа  $E_{rt}$  —

$$\Psi_{2rt}(x, y) = \left( \frac{jk_{xr}x + jk_{yt}y}{(k_{xr}^2 + k_{yt}^2)^{1/2}} \right) \exp [j(k_{xr}x + k_{yt}y)] \sqrt{\frac{1}{DB}},$$

где  $k_{xr} = (2\pi r + \psi_x)/D$  и  $k_{yt} = (2\pi t + \psi_y)/B$  — волновые числа в направлениях  $x$  и  $y$ .

Векторные функции  $\Psi_{qrt}(x, y)$  удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{A_s} \Psi_{qrt}(x, y) \Psi_{q'rt'}^*(x, y) dx dy = \delta_{rr'} \delta_{tt'} \delta_{qq'},$$

где  $A_s$  — площадь некоторой единичной ячейки в раскрыве антенной решетки — ( $D \times B$ ).

Выражения для волновых проводимостей имеют вид

$$Y_{1rt} = \Gamma_{rt}/j\omega\mu \text{ для } H\text{-волн и } Y_{2rt} = i\omega\varepsilon/\Gamma_{rt} \text{ для } E\text{-волн.}$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н Амитей, В Галиндо, Ч Ву, Теория и анализ фазированных антенных решеток, изд Мир, М, 1974
- 2 В. А Николаев, Д М Сазонов, Н Я Фролов, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 5, 743 (1969)
- 3 Д К Фаддеев, В Н Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, изд Физматгиз, М — Л, 1963

Московский энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
13 декабря 1976 г,  
после переработки  
24 апреля 1978 г.

## CALCULATION OF THE REFLECTION COEFFICIENT OF AN INFINITE PHASED ANTENNA GRID BY SPECULAR-ITERATIVE METHOD

V. M. Gavrilov, D. M. Sazonov, N. Ya. Frolov

A problem is considered for the electrodynamic calculation of the reflection coefficient of an infinitely waveguide grid by specular-iterative method. As an example of the method application, the calculation results of the reflection coefficients in a linear waveguide grid are presented.

УДК 621.372.832

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОДНОГО ВЕНТИЛЯ-ФЛАНЦА МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

*E. П. Курушин, Г. С. Яцкарь*

Проведен численный расчет вентиля на основе волноводного  $T$ -циркулятора в полосе частот 32,0—38,0 ГГц для различных параметров феррито-диэлектрической вставки. Исследованы зависимости характеристик вентиля от положения вставки внутри сочленения и от коэффициента отражения и фазы поглощающей нагрузки в боковом плече.

В настоящее время для расчета характеристик волноводных вентилей на основе  $Y$ - и  $T$ -циркуляторов [1—3] используются результаты, полученные в работах [4—6]. В них рассмотрены в довольно общей постановке параметры симметричных циркуляторов, а параметры вентиляй на их основе могут быть оценены по известным матрицам рассечения циркулятора и нагрузки в его плече [2, 3]. Обычно при анализе полей в циркуляторах учитываются две-три азимутальные гармоники электромагнитного поля в центральной (резонаторной) части сочленения и только основная (распространяющаяся) гармоника в волноводных областях сочленения. В этих случаях условие резонанса низших азимутальных гармоник на центральной частоте позволяет оценить радиус феррита и согласующую диэлектрическую втулку.

Однако, как показывают исследования, проведенные в [7], пренебрежение высшими гармониками поля приводит к существенному отклонению расчетных значений центральной частоты от экспериментальной, а также величины обратных потерь на этой частоте. Существенно отличаются от экспериментальных и предсказываемые теорией диапазонные свойства циркуляторов. Кроме того, на практике часто возникают вопросы, выходящие за пределы упрощений этих моделей. К ним относятся определение оптимального, как правило, асимметричного положения феррито-диэлектрического элемента внутри сочленения (см., например, [2, 3]), оптимизация коэффициента отражения и положения [1, 2] поглощающей нагрузки в развязанном плече циркулятора, вопросы, связанные с расширением полосы рабочих частот и др. Для решения этих проблем проведен численный расчет вентиля на основе  $H$ -плоскостного волноводного  $T$ -циркулятора, результаты которого во многом объясняют экспериментальные факты, описанные в [2, 3].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схематическое изображение вентиля на основе  $T$ -циркулятора представлено на рис. 1. Предполагается, что в подводящих волноводах распространяющейся является только волна основного типа  $H_{10}$ , а волны высших типов затухают; в плече  $b$  (с нагрузкой) в принципе может быть другим диэлектрическое заполнение. Для существенного сокращения объема вычислений полагаем  $\partial/\partial y \equiv 0$ , так что задача является двумерной и параметры диэлектрика и ферритового цилиндра не ме-

няются по высоте волновода (в направлении оси  $y$ ). Это предположение использовано и в [4–6].

В двумерной постановке электрическое поле удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 E_y^{(i)} + k_i^2 E_y^{(i)} = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $E_y^{(i)}$  — составляющая электрического поля при  $i=1$  вне диэлектрической втулки,  $r \geq R_{\text{вт}}$  ( $R_{\text{вт}}$  — радиус втулки), при  $i=2$  для области внутри втулки,  $R_{\Phi} \leq r \leq R_{\text{вт}}$  ( $R_{\Phi}$  — радиус феррита), при  $i=3$  для области внутри феррита ( $r \leq R_{\Phi}$ ). В (1)  $k_i^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные вакуума,  $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{\Phi} = k_1^2 \epsilon \mu_{\Phi}$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu_{\Phi}$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала втулки,  $k_3^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{\Phi} \mu_{\perp}$ , где  $\mu_{\perp} = (\mu^2 - \mu_a^2) \mu^{-1}$ ,  $\mu$  и  $\mu_a$  — диагональный и недиагональный компоненты тензора магнитной проницаемости феррита,  $\epsilon_{\Phi}$  — относительная диэлектрическая проницаемость феррита.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$E_y^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [A_n^{(i)} J_{|n|}(k_i r) + B_n^{(i)} N_{|n|}(k_i r)] e^{jn\varphi}, \quad (2)$$

для  $i=1, 2$ , и

$$E_y^{(3)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n J_{|n|}(k_3 r) e^{jn\varphi} \quad (3)$$

для области 3, где  $J_{|n|}$  — функция Бесселя порядка  $|n|$ ,  $N_{|n|}$  — функция Неймана порядка  $|n|$ ,  $\varphi$  и  $r$  — цилиндрические координаты в плоскости чертежа (рис. 1). В (2), (3)  $C_n$  — комплексные,  $A_n^{(i)}$ ,  $B_n^{(i)}$  — действительные коэффициенты.

Из уравнений Максвелла находится азимутальная компонента магнитного поля:

$$H_{\varphi}^{(i)} = -j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [A_n^{(i)} J'_{|n|}(k_i r) + B_n^{(i)} N'_{|n|}(k_i r)] e^{jn\varphi}, \quad (4)$$

для областей  $i=1, 2$ , и для  $i=3$

$$H_{\varphi}^{(3)} = -j \frac{1}{\omega \mu_0 \mu_{\perp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[ k_3 J'_{|n|}(k_3 r) - \frac{n}{r} \frac{\mu_a}{\mu} J_{|n|}(k_3 r) \right] e^{jn\varphi}. \quad (5)$$

Коэффициенты  $A_n^{(i)}$  и  $B_n^{(i)}$  могут быть найдены из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границах раздела феррит — диэлектрик. Используя (2) — (5), поле в области 1 ( $i=1$ ) при заданных размерах феррита и втулки можно выразить в виде

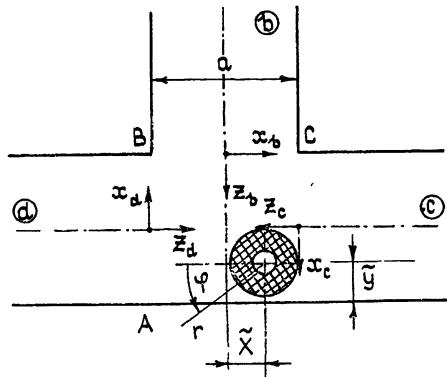


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи:  
 $X$ ,  $Y$  — координаты оси ферритового цилиндра.

$$E_y^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n P_n(r) e^{jn\varphi}, \quad H_\varphi^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Pi_n(r) e^{jn\varphi}, \quad (6)$$

где  $P_n$  и  $\Pi_n$  — известные функции радиуса. Как показано в [8, 9], разложения (6) регулярны в круге радиуса  $r = a$ , где  $a$  — размер широкой стенки волновода.

Запишем теперь поля в подводящих волноводах ( $d, b, c$ ). В волноводе  $d$  волна, распространяющаяся в сторону сочленения, имеет вид ( $p \equiv d$ )

$$\begin{aligned} E_y(x_p, z_p) &= \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(-jk_{10}z_p), \\ H_x(x_p, z_p) &= -\frac{k_{10}}{\omega\mu_0} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(-jk_{10}z_p), \\ H_z(x_p, z_p) &= \frac{j\gamma_1}{\omega\mu_0} \cos \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(-jk_{10}z_p), \end{aligned} \quad (7)$$

где индекс  $p$  указывает подводящий волновод,  $k_0 = k_1$ ,  $\gamma_1 = \pi/a$ ,  $k_{10} = \sqrt{k_0^2 - \gamma_1^2}$ .

Волны типа  $H_{m0}$ , отраженные от сочленения, в каждом волноводе представим в виде

$$\begin{aligned} E_y^{(p)}(x_p, z_p) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(p)} \sin \frac{\pi m}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(jk_{m0}z_p), \\ H_x^{(p)}(x_p, z_p) &= \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(p)} k_{m0} \sin \frac{\pi m}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(jk_{m0}z_p), \\ H_z^{(p)}(x_p, z_p) &= \frac{j}{\omega\mu_0} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(p)} \gamma_m \cos \frac{\pi m}{2} \left( 1 + \frac{2x_p}{a} \right) \exp(jk_{m0}z_p), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\gamma_m = \pi m/a$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $A_m^{(p)}$  — комплексные коэффициенты. В плече  $b$  присутствует также волна, отраженная от нагрузки.

Если нагрузка находится достаточно далеко от границы  $BC$  (рис. 1), то на границе присутствует только волна типа  $H_{10}$ , распространяющаяся к сочленению:

$$\begin{aligned} E_y^{(b)}(x_b, z_b) &= g A_1^{(b)} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_b}{a} \right) \exp[-jk_{10}(2L + z_b)], \\ H_x^{(b)}(x_b, z_b) &= -g \frac{k_{10}}{\omega\mu_0} A_1^{(b)} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_b}{a} \right) \exp[-jk_{10}(2L + z_b)], \\ H_z^{(b)}(x_b, z_b) &= \frac{j\gamma_1}{\omega\mu_0} g A_1^{(b)} \cos \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2x_b}{a} \right) \exp[-jk_{10}(2L + z_b)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $g$  — амплитудный коэффициент отражения от нагрузки,  $L$  — расстояние от границы  $BC$  до нагрузки. Электромагнитное поле всюду в пересечении  $T$  круга радиуса  $r = a$  с центром на оси феррита и внешности квадрата  $ABCD$  должно удовлетворять как разложению по цилиндрическим гармоникам, так и по волноводным колебаниям типа  $H_{m0}$ . Для приближенного определения поля можно ограничиться конечным числом как волноводных, так и цилиндрических гармоник в разложениях

и «сшивать» оба разложения в конечном числе точек, лежащих в области  $T$ . Следуя [7], выбираем условие непрерывности  $E_y$  и  $H_\varphi$  в точках области  $T$ , находящихся в воздухе, и условие  $E_y = 0$  в точках, находящихся на металлических стенках сочленения.

Согласно предварительным оценкам, для достижения приемлемой точности расчетов достаточно учитывать три волноводные гармоники  $H_{10}$ ,  $H_{20}$ ,  $H_{30}$  в каждом из подводящих волноводов и семнадцать цилиндрических гармоник с азимутальными индексами  $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8$ . Таким образом, для определения поля нужно найти по три комплексных амплитуды  $A_m^{(p)}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , в каждом плече и семнадцать комплексных амплитуд  $C_n$  (всего 26 комплексных неизвестных). Для «сшивки» полей (2)–(9) выбираем по 3 точки в воздухе на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  (рис. 1) через  $a/4$ , точки в углах квадрата  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и четыре точки через  $a/5$  на стенке  $AD$ , всего 9 точек в воздухе и 9 точек на стенках и в углах сочленения. В каждой точке в воздухе условие непрерывности  $E_y$  и  $H_\varphi$  дают два комплексных уравнения, а в каждой точке на стенках и в углах условие  $E_y = 0$  дает одно комплексное уравнение, всего 26 комплексных уравнений. Симметричный выбор точек «сшивки» на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  позволяет путем несложных преобразований системы уравнений исключить амплитуды  $A_{2,3}^{(p)}$ , при этом множитель  $g \exp(-jk_{10}2L)$  входит лишь в одно из оставшихся уравнений. Поскольку для полного исследования задачи параметры  $g$  и  $L$  необходимо варьировать в довольно широких пределах, такое преобразование позволяет весьма существенно сократить объем вычислений. Предлагаемая схема вычислений позволяет легко учесть диссипативные потери в материалах феррита и втулки, а также эффекты, возникающие при искривлении границы  $AD$ , и отклонение углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  от прямых.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Был проведен расчет характеристик вентиля в диапазоне частот  $\nu = 32 \div 38 \text{ ГГц}$  при  $a = 0,72 \text{ см}$ ,  $R_\Phi = 0,09 \text{ см}$ ,  $R_{\text{вт}} = 0,15 \text{ см}$  (см. 2). Намагниченность насыщения  $M_s$  феррита принималась равной  $370 \text{ Гс}$ . Для описания частотной зависимости компонентов тензора магнитной проницаемости феррита применялись аппроксимации, предложенные в работе [10]:

$$\mu_a = 2\gamma M \nu^{-1}, \quad \mu = \mu_d + (1 - \mu_d) \left( \frac{M}{M_s} \right)^{3/2},$$

$$\mu_d = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left( \frac{2\gamma M_s}{\nu} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{3},$$

где  $\gamma = 2,8 \text{ Гс/МГц}$  — гиромагнитное отношение,  $M$  — намагниченность феррита. В расчетах мы пренебрегали мнимыми частями всех диэлектрических и магнитных проницаемостей, главным образом, из-за отсутствия соответствующих экспериментальных данных.

В расчетах варьировались диэлектрические проницаемости феррита\* и втулки ( $\epsilon_\Phi$  и  $\epsilon$ ), положение феррито-диэлектрического элемента ( $\tilde{Y}$  — расстояние от стенки  $AD$  сочленения,  $\tilde{X}$  — расстояние от оси симметрии сочленения, отсчитываемое в направлении плеча  $C$ ), амплитудный коэффициент отражения  $q$  нагрузки и расстояние от нагрузки до линии  $BC$ .

\* В ряде случаев изменение  $\epsilon_\Phi$  может быть связано с малыми зазорами, всегда имеющими место между широкими стенками волновода и ферритовым цилиндром [3].

На рис. 2 приведены частотные характеристики вентиля, работающего на согласованную нагрузку ( $q = 0$ ) для трех положений феррито-диэлектрического элемента ( $P = -20 \lg |A_1^{(c)}|$  — прямые потери,  $R = -20 \lg |A_1^{(d)}/A_1^{(c)}|$  — обратные потери,  $T = -20 \lg |A_1^{(d)}|$  — отражение от входа). На рисунке изображена схема вентиля с ферритом и диэлектриком.

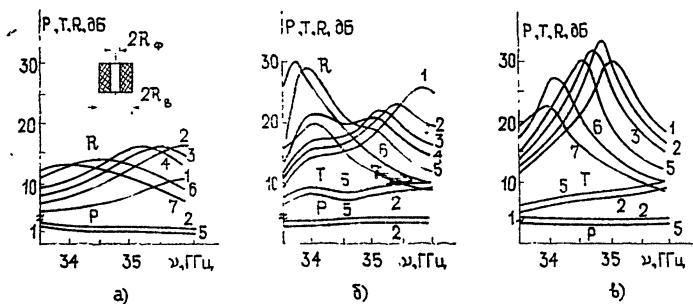


Рис. 2. Частотные характеристики вентиля при согласованной нагрузке ( $q = 0$ ) и различных положениях феррито-диэлектрического элемента:

а)  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,45 \text{ см}$ ; б)  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,46 \text{ см}$ ; в)  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,47 \text{ см}$ ,  
и различных значениях диэлектрической проницаемости феррита:  
1 —  $\epsilon_\Phi = 6,8$ ; 2 — 7,1; 3 — 7,4; 4 — 7,7; 5 — 8,0; 6 — 8,4;  
 $R_\Phi = 0,09 \text{ см}$ ;  $\epsilon = 2,2$ .

ние от входа, все величины в  $\text{дБ}$ ). Видно, что обратные потери весьма критичны к расположению феррита в направлении  $\tilde{Y}$ . Интересно отметить, что при определенном расположении феррита частотные характеристики обратных потерь имеют два максимума. Исследовано также влияние диэлектрической проницаемости втулки  $\epsilon$  на характеристики вентиля (рис. 3), выяснено, что при изменении  $\epsilon$  от 1,6 до 2,4 наи-

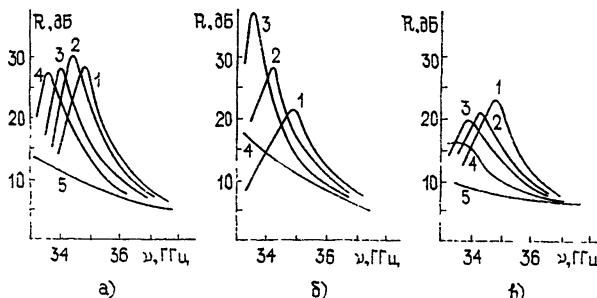


Рис. 3. Частотные характеристики вентиля при согласованной нагрузке ( $q = 0$ ) и различных положениях феррито-диэлектрического элемента:

а)  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,47 \text{ см}$ ; б)  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,46 \text{ см}$ ; в)  $\tilde{X} = 0,003$ ,  
 $\tilde{Y} = 0,46 \text{ см}$  и различных диэлектрических проницаемостях втулки:  
1 —  $\epsilon = 1,6$ ; 2 —  $\epsilon = 1,8$ ; 3 —  $\epsilon = 2,0$ ; 4 —  $\epsilon = 2,4$ ; 5 —  $\epsilon = 4,6$ ;  
 $\epsilon_\Phi = 8,7$ ;  $R_{\text{вт}} = 0,15 \text{ см}$ ;  $R_\Phi = 0,09 \text{ см}$ .

большее влияние испытывают обратные потери  $R$ . При увеличении  $\epsilon$  втулки максимум обратных потерь смещается в область меньших частот, уменьшаются прямые потери и, особенно, отражение от входа. При исследовании влияния сдвига феррито-диэлектрического элемента вдоль оси  $\tilde{X}$  выяснено, что при малых значениях практически не меняется величина прямых потерь  $P$  и отражение от входа  $T$ , в отдельных

случаях существенно меняется величина обратных потерь (рис. 3), причем анализ показывает, что влияние это не зависит от знака  $\tilde{X}$  (ср. с [2]).

Как следует из рис. 3, при  $\epsilon = 4,5$  и  $q = 0$  (нагрузка согласованная).  $T$  и  $P$  достаточно малы, тогда как обратные потери  $R$  сохраняют в достаточно широкой полосе величину порядка 10 дБ. Это указывает на возможность создания устройства с широкополосным вентильным эффектом путем подбора соответствующего коэффициента отражения и фазы поглощающей нагрузки [3]. В результате подбора величин  $q$  и  $L$  удалось добиться вентильного эффекта в полосе  $\Delta v/v \sim 12\%$  (рис. 4). Следует отметить, что зависимость  $R$  от частоты носит осциллирующий характер. Это заставляет предполагать, что при широкополосном вентильном эффекте важную роль играют высшие азимутальные гармоники. Работа на высших азимутальных гармониках не позволяет получить удовлетворительные обратные потери при работе на согласованную нагрузку, что исключает их использование в циркуляторах. Однако при создании вентиляй обратные потери могут быть настроены соответствующим подбором параметров поглощающей нагрузки в плече  $b$  (рис. 1).

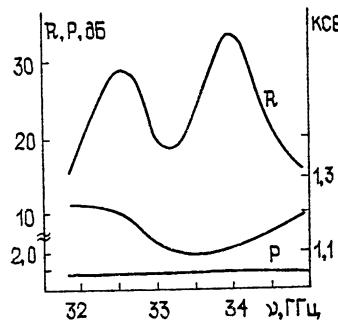


Рис. 4. Частотные характеристики вентиля при несогласованной нагрузке  $q = 0,305$ ,  $\epsilon = 4,5$ ,  $\epsilon_{\phi} = 6,8$ ,  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0,485$  см,  $R_{\phi} = 0,09$  см;  $R_{bt} = 0,15$  см.

Построена программа машинного расчета характеристик вентиля на основе волноводного  $T$ -циркулятора. Установлено, что программа дает хорошее соответствие расчетов и эксперимента, позволяющее находить область широкополосного вентильного эффекта.

Результаты проведенных расчетов подтверждают возможность перестройки вентиля за счет изменения положения феррито-диэлектрического элемента внутри сочленения [2, 3], при этом меняется не только вид частотных характеристик, но и центральная частота, так что, не изменяя размеров феррита, можно производить перестройку устройства. Подтверждено сильное влияние характера нагрузки в плече  $b$  на характеристики обратных потерь. Доказано, что подбором модуля и фазы нагрузки можно менять величину обратных потерь и их частотную зависимость. Достоинством выбранного метода расчета является возможность учета диссипативных потерь в материалах, а также дисперсии компонент тензора магнитной проницаемости.

Программа реализована на языке «Фортран» и расчеты производились на ЭВМ ЕС 10-20.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Столяров, сб. Современные проблемы антенно-волноводной техники, изд. Наука, М, 1967, стр. 158
- 2 А. И. Бочкарев, Е. П. Курушин, А. П. Часовников, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 5, 753 (1975).
- 3 А. И. Бочкарев, Б. Д. Брейгин, Е. П. Курушин, А. М. Храпко, Т. А. Часовникова, Электронная техника, серия I, Электроника СВЧ, № 7, 72 (1978).
4. А. К. Столяров, И. П. Тюков, Радиотехника и электроника, 12, № 12, 2123 (1967).

5. J. B. Helszajn and F. Tan, IEEE Trans., MTT-23, № 3, 288 (1975).
6. J. B. Davies, IEEE Trans., MTT-10, № 11, 596 (1972).
7. J. B. Castillo and L. E. Davis, IEEE Trans., MTT-18, № 1, 25 (1970).
8. L. Lewin and E. Nielsen, IEEE Trans., MTT-18, № 7, 364 (1970).
9. L. Lewin, IEEE Trans., MTT-18, № 12, 1041 (1970).
10. J. Green and F. Sandy, IEEE Trans., MTT-22, № 6, 641 (1974).

Куйбышевский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
9 ноября 1977 г

## NUMERICAL CALCULATION OF CHARACTERISTICS OF A WAVEGUIDE ISOLATOR—FLANGE IN MILLIMETER RANGE

*E. P. Kurushin, G. S. Yatskar'*

The numerical calculation of a isolator is given on the basis of the waveguide *T*-circulator in the frequency band  $32.0 \pm 38.0$  GHz for different parameters of ferrite-dielectric insert. Dependences of the isolator characteristics on the position of the insert inside the coupling and on the reflection coefficient and the phase of the absorbing load in a side arm are investigated.

---

УДК 621.372 8

## К ТЕОРИИ ВОЛНОВОДНОГО ТРОЙНИКА

Г. Ш. Кеванишивили

Предложен строгий подход к решению задачи дифракции волны на сочленении волноводного тройника в плоскости  $E$ . Электродинамическая задача сводится к решению неоднородной системы бесконечных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов поля в главном плече тройника. Эта система решается методом редукции на ЭВМ; в результате исследована сходимость алгоритма и представлены новые численные результаты.

Строгая теория волноводных тройников в литературе до сих пор отсутствует. В известных нам работах [1–3] представлены расчеты, которые основываются на приближенном представлении поля в плоскости сочленения волноводов.

В данной работе в основном повторяется подход к задаче о волноводном тройнике, известный из [1]. Отличие состоит в том, что неизвестное поле на стыке волноводов представляется в виде ряда по ортогональным (собственным) функциям с неопределенными коэффициентами, относительно которых проекционным методом получается бесконечная система алгебраических уравнений второго рода, допускающая решение методом усечения.

## 1. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Расположение тройника в прямоугольной системе координат показано на рис. 1. Предположим, что в плечо (I) тройника поступает волна

$$E_z = e^{ik(x-b)}, \quad (1)$$

где  $b$  — высота волновода,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина рабочей волны. Конфигурация волноводов позволяет считать, что ширина волноводов по оси  $y$  (т. е. перпендикулярно плоскости рисунка) бесконечна и для перехода к волноводам конечных размеров в окончательных результатах следует произвести замену  $k$

$$\text{на } \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad k_0 \text{ — волновое число}$$

свободного пространства,  $a$  — ширина волновода.

В плечах (III) и (IV) тройника возбуждаются противофазные волны с одинаковыми амплитудами. В дальнейшем мы предположим, что в этих плечах обратные волны отсутствуют, а в плече (I), кроме волны (1), будут существовать высшие типы обратных волн, поэтому для компонент электромагнитного поля в этой области можно записать

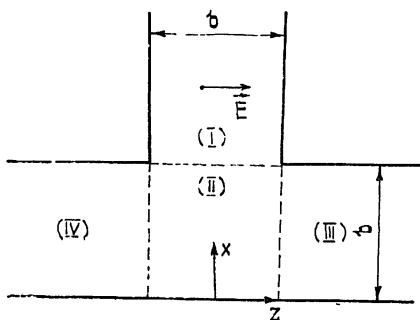


Рис. 1.

$$E_{z1} = e^{ik(x-b)} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{-ik_m(x-b)} \cos \left[ \frac{\pi m}{b} \left( \frac{b}{2} - z \right) \right]; \quad (2)$$

$$H_{y1} = i \omega \epsilon \left\{ \frac{1}{ik} e^{ik(x-b)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{ik_m} e^{-ik_m(x-b)} \cos \left[ \frac{\pi m}{b} \left( \frac{b}{2} - z \right) \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\epsilon = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{m}, \quad k_m = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 m^2}{b^2}}, \quad -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}.$$

Составляющие поля в области (II) имеют следующий вид:

$$E_{z2} = \int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itz} \operatorname{sh}(\sqrt{t^2 - k^2} x) dt; \quad (4)$$

$$E_{x2} = \int_{-\infty}^{\infty} t B(t) e^{itz} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - k^2} x)}{\sqrt{t^2 - k^2}} dt; \quad (5)$$

$$H_{y2} = -i \omega \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itz} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{t^2 - k^2} x)}{\sqrt{t^2 - k^2}} dt \quad (6)$$

$$\left( -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}, \quad 0 \leq x \leq b \right).$$

И, наконец, запишем выражения для компонент электромагнитного поля в области (III):

$$E_{z3} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-ik_n(z-b/2)} \sin \left( \frac{\pi n x}{b} \right); \quad (7)$$

$$H_{y3} = -\frac{i \omega \epsilon}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} e^{-ik_n(z-b/2)} \cos \left( \frac{\pi n x}{b} \right); \quad (8)$$

$$E_{x3} = -\frac{ib}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n R_n}{n} e^{-ik_n(z-b/2)} \cos \left( \frac{\pi n x}{b} \right). \quad (9)$$

Область (IV) можно не рассматривать, поскольку сведения о поведении распространяющихся там волн можно получить из поведения волн в области (III) с учетом условий симметрии.

Задача заключается в определении неизвестных величин  $A_n$ ,  $B(t)$  и  $R_n$ , которые входят в приведенные выше выражения полей для различных плеч тройника. Для решения этой задачи необходимо, чтобы искомые коэффициенты удовлетворяли следующим граничным условиям задачи:

$$\left. \begin{aligned} E_{z1} &= E_{z2} \\ H_{y1} &= H_{y2} \end{aligned} \right\} \text{при } x = b, \quad -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2},$$

$$\left. \begin{aligned} E_{x2} &= E_{x3} \\ H_{y2} &= H_{y3} \end{aligned} \right\} \text{при } z = \frac{b}{2}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Подставляя сюда выражения (2) — (9), приходим к следующим системам функциональных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itz} \operatorname{sh}(\alpha(t)b) dt = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \left[ \frac{\pi m}{b} \left( \frac{b}{2} - z \right) \right] \equiv E(z),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itz} \frac{\operatorname{sh}(\alpha(t)b)}{\alpha(t)} dt = -\frac{1}{ik} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{ik_m} \cos \left[ \frac{\pi m}{b} \left( \frac{b}{2} - z \right) \right] \equiv F(z) \\ \left( \alpha(t) = \sqrt{t^2 - k^2}, \quad -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \right); \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t B(t) e^{itb/2} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(t)x)}{\alpha(t)} dt = -\frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n k_n}{n} \cos \left( \frac{\pi n x}{b} \right), \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(t) e^{itb/2} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(t)x)}{\alpha(t)} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n} \cos \left( \frac{\pi n x}{b} \right) \\ (0 \leq x \leq b).$$

## 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим прежде всего систему (10), из первого уравнения которой следует [1]

$$B(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - k^2}} \left\{ \frac{e^{itb/2} - e^{-itb/2}}{it} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \Phi_m(t) \right\}, \quad (12)$$

где

$$\Phi_m(t) = it \frac{e^{-itb/2} - (-1)^m e^{itb/2}}{t^2 - \sigma_m^2} \quad \left( \sigma_m = \frac{\pi m}{b} \right). \quad (13)$$

Подставляя (12) во второе уравнение системы (10), мы приходим к ключевому функциональному уравнению задачи относительно последовательности неизвестных  $A_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$U_0(z, b) - V_0(z, b) + A_0 [U_0(z, b) - V_0(z, b)] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} A_m W_m(z, b) = F(z); \quad (14)$$

$$U_0(z, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(z+b/2)} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(t)b)}{t \alpha(t) \operatorname{sh}(\alpha(t)b)} dt; \quad (15)$$

$$V_0(z, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(z-b/2)} \frac{\operatorname{ch}(\alpha(t)b)}{t \alpha(t) \operatorname{sh}(\alpha(t)b)} dt; \quad (16)$$

$$W_0(z, b) = U_0(z, b) - V_0(z, b); \quad (17)$$

$$W_n(z, b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t) \frac{\operatorname{ch}(\alpha(t)b)}{\alpha(t) \operatorname{sh}(\alpha(t)b)} e^{itz} dt = \\ = (-1)^n U_n(z, b) - V_n(z, b). \quad (18)$$

Входящие в эти выражения интегралы можно вычислить с помощью теории вычетов, в результате получаем

$$U_0(z, b) = -\frac{\operatorname{ctg} kb}{2k} + \frac{e^{ik(z+b/2)}}{2k^2 b} + \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{ik_m(z+b/2)}}{k_m^2},$$

$$V_0(z, b) = \frac{\operatorname{ctg} kb}{2k} - \frac{e^{ik(b/2-z)}}{2k^2 b} - \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{ik_m(b/2-z)}}{k_m^2},$$

$$U_m(z, b) = \frac{e^{i\sigma_m(b/2+z)}}{2\sqrt{\sigma_m^2 - 1}} \operatorname{ctg}(\sqrt{\sigma_m^2 - k^2}b) + \frac{e^{ik(b/2+z)}}{2b(k^2 - \sigma_m^2)} + \\ + \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ik_n(b/2+z)}}{k_n^2 - \sigma_m^2}, \\ V_m(z, b) = -U_m(-z, b). \quad (19)$$

Из функционального уравнения (14) перейдем к эквивалентной системе бесконечных алгебраических уравнений. Для этого используем проекционный метод, а именно: умножим обе части уравнения (14) на  $\cos\left[\frac{s\pi}{b}\left(\frac{b}{2}-z\right)\right]$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрируем от 0 до  $b$ , в результате получим нужную систему

$$A_0 = \frac{1 + Z_0}{1 - Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{Y_{2n}}{1 - Z_0}; \quad (20)$$

$$A_s = c_s + q_s A_{2s} + \sum_{n \neq s \neq 0} A_n Z_{ns}, \quad (21)$$

где положено

$$Z_0 = -i \operatorname{ctg} \pi v_b - \frac{1 - \cos \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} + \frac{i \sin \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} - \frac{2i v_b}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi \gamma_m}}{\gamma_m^3}$$

$$(\gamma_m = \sqrt{m^2 - v_b^2}, \quad v_b = 2b/\lambda),$$

$$Y_{2n} = \frac{1 - \cos \pi v_b}{\pi^2 (4n^2 - v_b^2)} - i \frac{\sin \pi v_b}{\pi^2 (4n^2 - v_b^2)} - \frac{i v_b}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi \gamma_m}}{\gamma_m (\gamma_m^2 + 4n^2)},$$

$$Z_{ns} = -i v_b \frac{[(-1)^s + 1][1 - (-1)^n \cos \pi v_b]}{\pi^2 \gamma_n^2 \gamma_s} - v_b \frac{[(-1)^s + 1](-1)^n \sin \pi v_b}{\pi^2 \gamma_n^2 \gamma_s} - \\ - \frac{2 \gamma_s}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{[(-1)^{s+n} + 1][1 - (-1)^n e^{-\pi \gamma_m}]}{(\gamma_m^2 + s^2)(\gamma_m^2 + n^2)},$$

$$c_s = 2i \frac{1 - \cos \pi v_b}{\pi^2 v_b \gamma_s} + \frac{2 \sin \pi v_b}{\pi^2 v_b \gamma_s} + \frac{4 \gamma_s}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi \gamma_m}}{\gamma_m (\gamma_m^2 + 4s^2)},$$

$$q_s = -\frac{i v_b (1 - \cos \pi v_b)}{8 \pi^2 \gamma_s^2} - \frac{v_b \sin \pi v_b}{8 \pi^2 \gamma_s^3} + \frac{4 \gamma_s}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \frac{1 - e^{-\pi \gamma_m}}{(\gamma_m^2 + 4s^2)^2}.$$

Таким образом, решая систему (21) относительно  $A_{2n}$  и подставляя его в правую часть (20), мы найдем важную характеристику тройника — величину коэффициента отражения ( $A_0$ ) на основной волне.

Решение системы (21) можно искать методом усечения, поскольку имеют место очевидные оценки

$$\sum_{s=1}^{\infty} |c_s|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n \neq s \neq 0} \sum_{s=1}^{\infty} |Z_{ns}|^2 < \infty,$$

которые следуют из того факта, что свободные члены ( $c_s$ ) и матричные элементы ( $Z_{ns}$ ) системы (21) при  $s \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  убывают как  $c_s \sim 1/s$  и  $Z_{ns} \sim 1/n^2 s$ . Эти же условия гарантируют, что с ростом

количества решаемых уравнений в усеченной системе приближенное решение будет стремиться к точному решению системы (21).

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение системы (21) методом усечения нами осуществлялось на ЭВМ (БЭСМ-6). Одновременно исследовался вопрос о сходимости приближенного решения к точному при увеличении количества решаемых уравнений в усеченной системе.

В табл. 1 в качестве иллюстрирующего примера представлены некоторые результаты численного счета для модуля  $|A_0|$  коэффициента отражения как функции параметра  $v_b$  и порядка усечения  $N$ .

Таблица 1

$v_b$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 20$
	$ A_0 $				
0	1	1	1	1	1
0,1	0,3375023	0,3376863	0,3381151	0,3381192	0,3381175
0,2	0,3502095	0,3507017	0,3522058	0,3522203	0,3522088
0,3	0,3721069	0,3721091	0,3746464	0,3746738	0,3746403
0,4	0,4044596	0,4019284	0,4043433	0,4043825	0,4043173
0,5	0,4494447	0,4419033	0,4415413	0,4415890	0,4414899
0,6	0,5106310	0,4987921	0,4912859	0,4913359	0,4912088
0,7	0,5936211	0,5913725	0,5726053	0,5726450	0,5725044
0,8	0,7061778	0,7514833	0,7291053	0,7291169	0,7289913
0,9	0,8530946	0,9404689	0,9350527	0,9350353	0,9349751
1,0	1	1	1	1	1

Численные значения при  $N = 1$  были рассчитаны по приближенной формуле

$$|A_0| = \left| \frac{1 + Z_0}{1 - Z_0} \right| = \\ = \left| \frac{1 - \frac{1 - \cos \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} - i \left( \operatorname{ctg} \pi v_b - \frac{\sin \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} + \frac{2 v_b}{\pi^2} F(v_b) \right)}{1 + \frac{1 - \cos \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} + i \left( \operatorname{ctg} \pi v_b - \frac{\sin \pi v_b}{\pi^2 v_b^2} + \frac{2 v_b}{\pi^2} F(v_b) \right)} \right|, \quad (22)$$

$$F(v_b) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^3} (1 - e^{-\pi i m}),$$

которая получается, если в уравнении (20) ограничиться первым членом в правой части. Сравнивая приближенное решение (при  $N = 1$ ) с более точным (при  $N = 20$ ), можно усмотреть, что абсолютная разница между ними изменяется от 0,06% до 8% (при  $v_b \sim 0,9$ ), следовательно, в пределах такой точности формулу (22) можно рекомендовать для расчета тройника, а для проведения более точных расчетов следует использовать численные данные из вышеприведенной табл. 1 при  $N = 20$  или же обратиться к кривой на рис. 2, дающей зависимость  $|A_0|$  от  $v_b$ .

Чтобы определить амплитудный спектр  $T_n = -\frac{i b k_n R_n}{n \pi}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) электромагнитного поля в плече (III), необходимо сначала умножить первое (или второе) уравнение системы (11) на  $\cos \left( \frac{\pi m x}{b} \right)$

и проинтегрировать от 0 до  $b$ , а затем вместо  $B(t)$  подставить его значение из (12). Совершив интегрирование по  $t$ , получим окончательно

$$T_m = (1 + A_0) F_m(v_b) + \frac{2i}{\pi} \gamma_m \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi \gamma_m}}{\gamma_m^2 + n^2},$$

где

$$F_m(v_b) = -\frac{1}{\pi \gamma_m} (1 - e^{-\pi \gamma_m}).$$

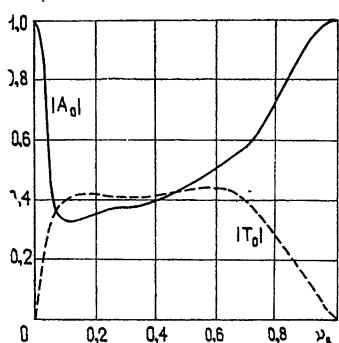


Рис. 2.

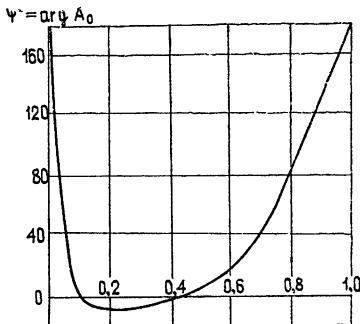


Рис. 3.

На рис. 2 пунктиром построена кривая зависимости  $|T_0|$  от  $v_b$ , рассчитанная по этой формуле, а на рис. 3 дана зависимость аргумента коэффициента отражения ( $A_0$ ) от параметра  $v_b$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
- Б. М. Машковцев, К Н Цибизов, Б. Ф Емелин, Теория волноводов, изд. Наука, М., 1966.
- Справочник по волноводам, под ред. Я. Н. Фельда, изд. Сов. радио, М., 1952.

Тбилисский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 января 1977 г,  
после переработки  
19 мая 1978 г.

#### TO THE THEORY OF THE WAVEGUIDE TRIPLET

*G. Sh. Kevanishvili*

A rigorous approach is suggested to the solution of the problem of the wave diffraction at the coupling of the waveguide triplet in the plane  $E$ . The electrodynamic problem is reduced to the solution of the inhomogeneous system of the second kind infinite algebraic equations relative to the unknown coefficients of the field in the principle arm of the triplet. This system is solved by the reduction method using the computer. As a result the algorithm convergence is investigated and new numerical results are presented.

УДК 533.951

## ДИАГНОСТИКА ПРИСТЕНОЧНОГО УЧАСТКА ПЛАЗМЫ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОМОДОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВОЛНАМИ

*B. A. Немировский*

Сформулирована и исследована задача диагностики радиофизических параметров пристеночного участка плоскооднородной плазмы методом многомодового зондирования. Решена обратная задача, доказана ее корректная разрешимость и проведен анализ погрешностей

1. Методы диагностики неоднородной плазмы путем ее зондирования электромагнитными волнами [1–3] достаточно обоснованы в настоящее время для неоднородных сред, когда распределения параметров удовлетворяют геометрооптическим условиям, либо могут быть заданы параметрически. В тех случаях, когда параметры исследуемой плазмы не описываются в рамках названных моделей, это создает серьезное ограничение для применения удобных бесконтактных микроволновых методов. В данной работе сформулирована задача о диагностике радиофизических параметров пристеночного участка плазмы методом многомодового зондирования [4] и излагаются основные результаты ее исследования. Метод расширяет возможности микроволновой диагностики за счет того, что алгоритм восстановления параметров плазмы пригоден для плоскооднородной модели плазмы, когда продольная зависимость параметров описывается ограниченной функцией расстояния. Кроме того, метод реализуется на основе невыступающей апертуры и имеет все положительные качества бесконтактных методов. Продвижение в направлении расширения моделей плазмы вплоть до «естественному» класса оказалось возможным благодаря тому, что характерные для микроволновых методов трудности по интерпретации интегральных характеристик рассеяния электромагнитных волн в локальные характеристики плазмы удалось преодолеть на основе известной и хорошо зарекомендовавшей себя в других задачах техники операторов преобразования в подходе Марченко.

Рассматривается задача рассеяния для полубесконечного (при  $z < 0$ ) волновода прямоугольного сечения ( $a \times b$ ) с бесконечным фланцем в плоскости  $z = 0$ , излучающего в плоскооднородный по координате  $z$  слой лоренцевой плазмы ( $0 < z < d$ ) с радиофизическими параметрами электронной концентрацией  $n(z)$  и частотой соударений  $\nu(z)$ . Слой плазмы при  $z = d$  граничит со свободным пространством. Сторонние источники электромагнитного поля возбуждают в волноводе волны частного вида  $H_{0l} - E = \{E_x, 0, 0\}, H = \{0, H_y, H_z\}$  — с временной зависимостью  $\exp(i\omega t)$ . В измерительном сечении волновода измеряется матрица рассеяния  $V: \beta = V\alpha$ , где  $\alpha = \{\alpha_l \exp(-i\lambda_l z)\}$  — вектор амплитуд падающих волн  $H_{0l}$ ;  $\beta = \{\beta_l \exp(i\lambda_l z)\}$  — вектор амплитуд отраженных волн  $H_{0l}$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ). Под задачей диагностики понимается измерение матрицы  $V$  и восстановление по ней (либо ее части) распределений  $n(z), \nu(z)$ .

2. Задача рассеяния состоит в получении соотношений, позволяющих для заданных ограниченных положительных функций  $n(z)$ ,  $\nu(z)$  определить матрицу  $V$ .

На основании экспериментальных результатов [5] при решении задачи пренебрегаем в отраженном поле волнами  $H$  паразитной поляризации и волнами  $E$ .

Задача рассеяния решается с использованием обычных при определении входной проводимости открытого конца волновода приемов. Исходная задача методом частичных областей сводится к системе двух краевых задач для уравнений Гельмгольца внутри и вне волновода. Задачи связаны уравнением непрерывности касательных электрических и магнитных полей на апертуре волновода. Далее система решается проекционным методом как первая граничная задача электродинамики: электрическое поле в отверстии ( $u_0 \equiv E_x$ ) ищется в виде разложения

$$u_0(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \psi_l(x, y) \text{ по системе функций } \psi_l(x, y) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \kappa_l \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad \left( \kappa_l = l \frac{\pi}{b} \right) \text{ с неизвестными амплитудными коэффициентами } \gamma_l \text{ и подставляется в уравнение непрерывности. Обе части уравнения умножаются на } \psi_l^*, \text{ и интегрируются по апертуре волновода. В результате получается алгебраическая система уравнений относительно коэффициентов } \gamma_l. \text{ После перегруппировки слагаемых с учетом сделанного выше определения матрицы } V = \{v_{ll}\} \text{ система принимает удобный для нашей задачи вид:}$$

$$V = (Y_0 + Y)^{-1} (Y_0 - Y), \quad (1)$$

где матрица  $Y_0 = \{-i\lambda_l \delta_{ll}\}$ ,  $\lambda_l = \sqrt{k^2 - \kappa_l^2}$ ,  $k = \omega/c$ , а матрица внешних проводимостей  $Y = \{Y_{ll}\}$  определяется интегралами

$$Y_{ll} = \iint \psi_l^*(x, y) \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, 0) dx dy$$

по апертуре волновода через решение уравнения Гельмгольца во внешности волновода при граничном условии ( $u = E_x$ )

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} \psi_l(x, y) & \text{на апертуре} \\ 0 & \text{на фланце} \end{cases}.$$

Следующий шаг состоит в преобразовании Фурье по  $x$ ,  $y$  всех функций в области  $z \geq 0$  и переходе к их спектральным плотностям. Для коэффициентов матрицы внешних проводимостей после использования равенства Парсеваля получается выражение непосредственно через спектральные плотности:

$$Y_{ll} = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(h, \kappa) Y(h, \kappa) \psi_l(h, \kappa) dh d\kappa, \quad (2)$$

где

$$\psi_l(h, \kappa) = \sqrt{\frac{ab}{8\pi^2}} e^{i(l-1)\pi/2} \frac{\sin ha/2}{ha/2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\sin(\kappa + \kappa_l)b/2}{(\kappa + \kappa_l)b/2} + (-1)^{l-1} \frac{\sin(\kappa - \kappa_l)b/2}{(\kappa - \kappa_l)b/2} \right],$$

а адmittанс слоя  $Y(h, \kappa)$  определяется по формуле

$$Y(h, \mathbf{x}) = \frac{u'_+(\lambda, 0)}{u_+(\lambda, 0)}, \quad \lambda = \sqrt{k^2 - h^2 - \mathbf{x}^2},$$

через решение задачи Коши:

$$u''_+ + (\lambda^2 - q(z))u_+ = 0, \quad z \in [0, d]; \quad (3)$$

$$u_+(\lambda, d) = 1, \quad u'_+(\lambda, d) = -i\lambda, \quad (3')$$

$$q(z) = \frac{(\omega_0(z)/c)^2}{1 - i\nu(z)/\omega}, \quad \omega_0(z) = 2\pi \cdot 8979 \sqrt{n(z)}, \quad [n] = cm^{-3}, \quad [\omega_0] = c^{-1}.$$

Заметим, что решение  $u_+(\lambda, z)$  задачи (3), (3') описывает волны, распространяющиеся в направлении  $+z$  и переходящие на границе слоя плазмы  $z = d$  в плоские волны  $e^{-i\lambda z}$ .

В результате получаем алгоритм решения задачи рассеяния: для заданных функций  $n(z)$ ,  $\nu(z)$  ищется решение  $u_+$  задачи (3), определяется матрица внешних проводимостей  $Y$  по формуле (2) и определяется матрица рассеяния  $V$  по формуле (1). Алгоритм (1)–(3) служит основой для постановки обратной задачи.

Поясним теперь механизм многомодового зондирования. Для выражения (2) методом контурного интегрирования [6] можно получить эквивалентное асимптотическое равенство

$$Y_{ll} = Y(0, \mathbf{x}_l)\delta_{ll} + (ka)^{-1} \text{const} \quad (4)$$

при условии  $ka \rightarrow \infty$ ;  $\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{l'} = \text{const}$  (для определенности  $a < b$ ). Из (2), (4) видно, что под интегралом стоит адмитанс  $Y(h, \mathbf{x})$  между двумя  $\delta$ -образными на плоскости  $h, \mathbf{x}$  функциями  $\psi_l$ , в основном отличными от нуля в окрестности точек  $(0, \mathbf{x}_l)$ . Для диагонального элемента интеграл представляет собой выборку — интегрирование  $Y(h, \mathbf{x})$  вблизи точек  $(0, \mathbf{x}_l)$ , где  $l = 1, 2, \dots, N$ . Число таких точек определяется числом  $N$  распространяющихся зондирующих мод, и все они расположены на интервале  $(0, k)$  оси  $\mathbf{x}$ . Эффективная величина выборки —  $\Delta h \sim 2\pi/a$ ,  $\Delta \mathbf{x} \sim 2\pi/b$  определяется размером апертуры волновода, а вариации  $Y(h, \mathbf{x})$  внутри выборки сглаживаются. Важно, однако, что для  $Y(h, \mathbf{x})$  можно подобрать размеры апертуры большими и асимптотическое равенство (4) сделать сколь угодно точным. Аналогичное рассуждение поясняет малость недиагональных элементов матрицы внешних проводимостей.

Под обратной задачей понимается восстановление  $n(z)$ ,  $\nu(z)$  по входным данным — матрице  $V$  размера  $N \times N$  (либо по ее части). Для решения обратной задачи необходимо обратить выражение (1) и определить матрицу  $Y$ , решить интегральное уравнение 1-го рода с  $\delta$ -образным ядром (2) и найти  $Y(h, \mathbf{x})$ , решить обратную задачу для уравнения (3) на отрезке. Осуществление намеченной программы в таком виде формально вполне возможно, однако доказательство корректности алгоритма с оценкой погрешности восстановления затруднительно, поскольку смысл задачи требует, чтобы окончательные результаты оценки были выражены непосредственно через характеристики класса функции  $q(z)$ . Сделаем в алгоритме (1)–(3) упрощение асимптотического характера, справедливое для многомодового волновода, и учтем его затем при оценке погрешности восстановления.

Введем в рассмотрение функцию рассеяния  $s(\lambda)$ , определяемую формулой

$$s(\lambda) = (-i\lambda + Y(\lambda))^{-1} (-i\lambda - Y(\lambda)). \quad (5)$$

Для значений  $\lambda \in (0, k)$   $s(\lambda)$  является коэффициентом отражения назад плоской волны от слоя плазмы на границе  $z = 0$  как функция продольного волнового числа. Для  $s(\lambda)$  методом [7] могут быть доказаны свойства:  $s(0) = -1$ ;  $s(\lambda)$  аналитически продолжается с положительной полуоси на отрицательную в случае среды с малыми потерями, причем  $|s(-\lambda) - s^*(\lambda)| < \max |\nu(z)/\omega| \text{const}$ ; на вещественной оси  $s(\lambda)$  по модулю полиномиально убывает при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ; в случае плазменной среды  $s(\lambda)$  не имеет полюсов при  $\operatorname{Im} \lambda < 0$ ; в верхней полуплоскости вблизи вещественной оси  $s(\lambda)$  ограничена.

Из (1), (5) с учетом (4) получаем

$$v_{rl} = s(\lambda) \delta_{\lambda l} \delta_{ll'} + (ka)^{-1} \text{const}. \quad (6)$$

Равенство (6) устанавливает связь между диагональными элементами матрицы  $V$  и значениями функции  $s(\lambda)$  в точках  $\lambda_l$ , определяемых расположением волновых чисел зондирующих мод. Из (6) и первых трех свойств  $s(\lambda)$  следует алгоритм приближенного восстановления  $s(\lambda)$  на всей вещественной оси:

— определяем  $s(\lambda)$  в узлах  $\lambda = 0, \pm \lambda_l \in (-k, k)$ :

$$\begin{aligned} s(\lambda_l) &= v_{ll}, \lambda_l \in (0, k), l = 1, 2, \dots, N, \\ s(0) &= -1, \\ s(-\lambda_l) &= s^*(\lambda_l), l = 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (7)$$

— интерполируем  $(2N+1)$  коэффициентов (7) на интервале  $(-k, k)$  и нулем вне интервала в  $s(\lambda)$ .

Дальнейшее восстановление  $q(z)$  проводится по известной методике [8]. Введем в рассмотрение решение  $u_-(\lambda, z)$  уравнения (3) с граничными условиями  $u_-(\lambda, 0) = 1$ ,  $u'_-(\lambda, 0) = i\lambda$ . Решение  $u_-$  описывает волны, распространяющиеся в направлении  $-z$  и переходящие на границе слоя  $z = 0$  в плоские волны  $e^{i\lambda z}$ . Решения  $u_\pm(\lambda, z)$  играют большую роль для восстановления  $q(z)$ , поскольку образуют фундаментальную систему решений для уравнения (3) и связаны простым равенством с функцией  $s(\lambda)$  в полосе около вещественной оси  $\lambda$  (выражение (8.3) [8]). Для решения  $u_-(\lambda, z)$  справедливо представление с помощью оператора преобразования [7]

$$u_-(\lambda, z) = e^{i\lambda z} + \int_{-z}^z K(z, t) e^{i\lambda t} dt \quad (0 \leq z \leq d)$$

через решение того же уравнения (3) с  $q = 0$ .

После подстановки в тождество для решений  $u_\pm$  с учетом четвертого свойства  $s(\lambda)$  получаем алгоритм восстановления  $q(z)$ :

— выполняем преобразование Фурье  $s(\lambda)$ ,

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) e^{i\lambda z} d\lambda; \quad (8)$$

— решаем уравнение Марченко относительно  $K(z, t)$ :

$$K(z, t) + f(z+t) + \int_{-t}^z K(z-u) f(u+t) du = 0 \quad (9)$$

в области  $0 \leq z \leq d$ ,  $-z \leq t \leq z$ ;

— определяем  $n(z)$ :

$$\omega_0^2(z) = 2c^2 \frac{d}{dz} K(z, z). \quad (10)$$

В связи с алгоритмом (7) — (10) необходимо отметить следующее. Первое — для восстановления  $n(z)$  плосконеоднородной среды достаточно зондировать частным набором мод  $H_{0l}$ . Это сразу следует из выражения (2), где адмитанс  $Y(h, x)$  на плоскости  $h, x$  является функцией четной, и для его восстановления достаточно определить его на любом луче, проходящем через начало координат  $h, x = 0$ . Второе — восстановление  $v(z)$  невозможно в рамках данной постановки задачи. Второе свойство  $s(\lambda)$  показывает, что для получения информации о  $v(z)$  необходимо восстанавливать  $s(\lambda)$  при  $\lambda < 0$  независимо от  $s(\lambda)$  при  $\lambda > 0$ . Это сделать не удается при одностороннем зондировании с измерением матрицы рассеяния назад, так как входных данных при таком зондировании не хватает (если не использовать ограничения типа параметризации распределений параметров плазмы). Третье — алгоритм восстановления — приближенный, и степень приближенности определяется (это видно из (6) и (7)) режимом зондирования  $\{\omega, N, ka\}$ , т. е. частотой сигнала, числом мод, электрическим размером апертуры и объемом входных данных (числом используемых элементов матрицы  $V$ ). Рассмотрим теперь один из центральных вопросов.

4. Корректная разрешимость обратной задачи для лоренцево-плазменной среды. Алгоритм (7) — (10) использует приближенные операции, которые могут нарушать единственность решения в рамках фиксированного уровня погрешности, и его устойчивость относительно изменения объема и погрешности  $\delta_0$  входных данных, т. е. задача в классе ограниченных функций  $n(z), v(z)$  может оказаться некорректно поставленной. Поэтому необходимо оценить величину уклонения  $\rho(q_1, q_2) = |q_1(z) - q_2(z)|$ , где  $q_1$  — исходное и  $q_2$  — восстановленное распределения, если матрицы  $V$  для них приближенно с погрешностью  $\delta_0$  совпадают на части элементов,  $V_1 \approx V_2$ .

Получение необходимой оценки состоит из двух частей. Сначала оценивается уклонение соответствующих  $s(\lambda)$ :  $\rho(s_1, s_2) = |s_1(\lambda) - s_2(\lambda)|$  при  $-\infty < \lambda < \infty$ . Вывод базируется на свойствах  $s(\lambda)$  и лемме Бернштейна [9], устанавливающей связь наилучшего приближения мероморфной функции с ее особыми точками. Величина уклонения оценивается выражением

$$\rho(s_1, s_2) = \begin{cases} \delta_0 + \delta_1 + \delta_2, & \text{если } \lambda \in (0, k) \\ \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, & \text{если } \lambda \in (-k, 0), \\ \delta_4, & \text{если } |\lambda| > k \end{cases}$$

где  $\delta_1 \sim (ka)^{-1}$ ,  $\delta_2 \sim k^{-(2N+1)}$ ,  $\delta_3 \sim v/\omega$ ,  $\delta_4 \leq 1$ . Затем оценивается  $\rho(q_1, q_2)$ , при этом используется аппарат, разработанный для анализа устойчивости обратных задач [10]:

$$\begin{aligned} \rho(q_1, q_2) &\leq \text{const} \{ \alpha(z), \alpha_1(z); w(z, h), (kh)^{-1}; \\ &\quad \max_z v/\omega; k^{-(2N+1)}; (ka)^{-1}; \delta_0 \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $q_1(z)$  дается формулой (3),  $q_2(z) = [\omega_0(z)/c]^2$ ,  $\alpha(z) = \int_0^z |q(t)| dt$ ,  $\alpha_1(z) = \int_0^z \alpha(t) dt$  — интегральное значение распределений до точки  $z$ ,

$\omega(z, h) = \max_{|t-z|<h} |q(t) - q(z)|$  — локальное изменение распределений в  $h$ -окрестности ( $h \sim k^{-1}$ ) точки  $z$ ,  $\max v/\omega$  — величина потерь в среде.

При этом функции  $\{\alpha(z), \alpha_1(z); \hat{w}(z, h); \max v/\omega\}$  описывают характеристики класса распределений, набор чисел  $\{\omega, N, ka\}$  — режим зондирования,  $N, \delta_0$  — объем и погрешность входных данных.

Неравенство (11) оценивает уклонение восстановленного распределения от исходного в зависимости от характеристик класса распределений, режима зондирования, объема и погрешности входных данных. Из (11) следует, что «естественный» класс просто ограниченных функций  $n(z)$ ,  $v(z)$  слишком широк для корректной разрешимости задачи, а классом корректности задачи является подкласс ограниченных функций с характеристиками  $\{\alpha(z), \alpha_1(z); w(z, h); \max v/\omega\}$ . В этом классе можно обеспечить требуемую точность восстановления  $n(z)$  на ограниченную пространственную глубину  $z_0$  и с ограниченным пространственным разрешением  $h$  путем соответствующего выбора режима зондирования, объема и точности входных данных. Это доказывает принципиальную возможность построения измерительной аппаратуры заданного диапазона и точности. Кроме того, из (11) следует методика оценки погрешности восстановления и методика определения пространственной глубины при реальном восстановлении. Переходим к обсуждению этих вопросов.

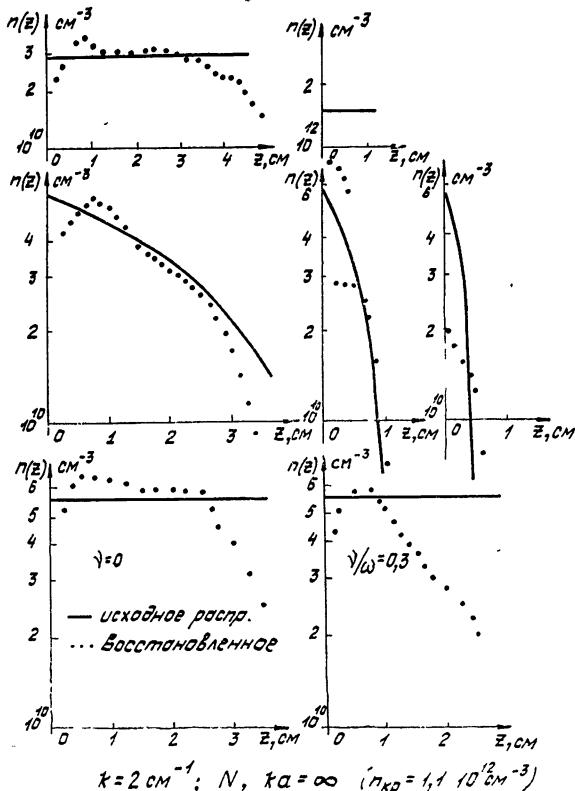


Рис. 1.

5. Погрешность восстановления и численные результаты. Погрешность включает в себя три составляющие: методическую, приборную и вычислительную. Первые две оценены аналитически неравенством (11).

Методическая погрешность (см. (11)) определяется режимом зондирования и объемом входных данных и состоит из трех составляющих: основной, структурной и за счет потерь в среде. Основная связана с  $\alpha(z)$ ,  $\alpha_1(z)$  и при фиксированных  $\{\omega, N, ka\}$  возрастает (см. (11)) по мере удаления от апертуры и с ростом плотности плазмы (рис. 1). В этом проявляется свойство роста нормы оператора резольвенты уравнения Марченко (9) с ростом  $z$  пропорционально  $\alpha(z)$ ,  $\alpha_1(z)$ . В силу этого свойства погрешность  $s(\lambda)$  трансформируется в погрешность  $n(z)$  (рис. 2, 3). При заданной точности (т. е. фиксированной правой части (11)) основная составляющая ограничивает сверху величины  $\alpha(z)$ ,  $\alpha_1(z)$  и, тем самым, пространственную глубину  $z_0$ . Если величина  $z_0$  окажется меньше толщины слоя  $d$ , то это означает, что выбранный режим

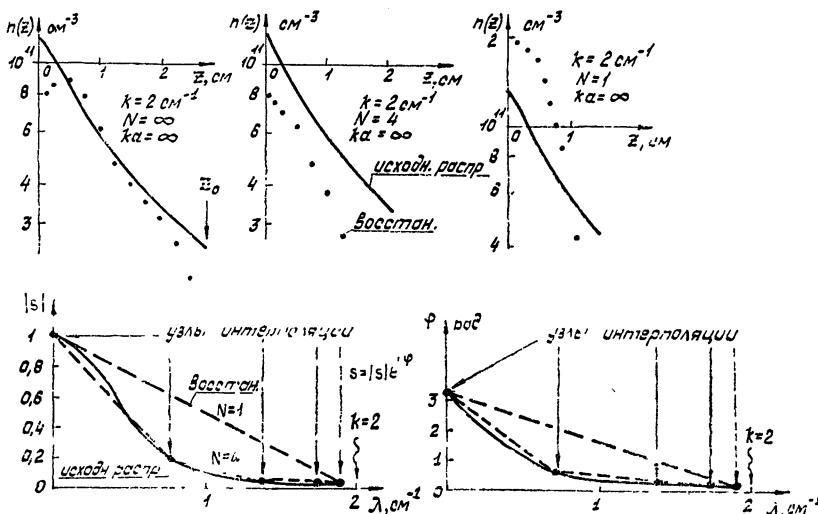


Рис. 2.

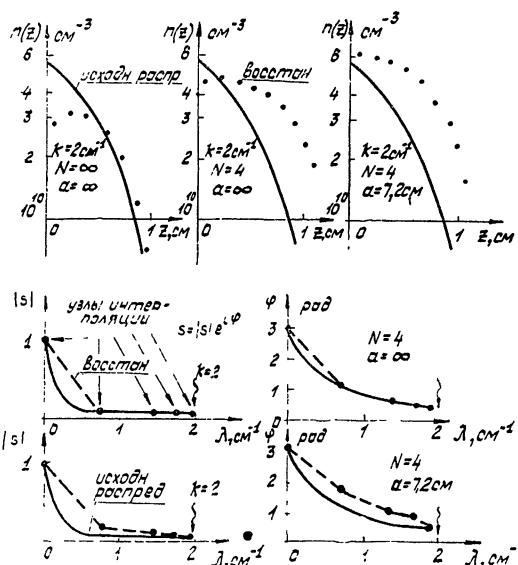


Рис. 3.

зондирования не позволяет восстановить весь слой плазмы с требуемой точностью.

Структурная составляющая связана с  $\omega(z, h)$ ,  $h \sim k^{-1}$  и при фиксированных  $\{\omega, N, ka\}$  возрастает (см. (11)) при восстановлении быстроизменяющихся распределений (рис. 1) (для слоя толщины 0,4 см по уровню 10 дБ погрешность соизмерима с основной). Это понятно, так как  $h$  и  $k$  — два противоположно действующих фактора: увеличение  $k$  увеличивает в силу (7) высокие номера гармоник в  $s(\lambda)$ , что эквивалентно, согласно свойству интеграла Фурье (8), увеличению пространственного разрешения (уменьшению  $h$ ). Отметим, что замеченное при расчетах в [11] явление «сглаживания колебаний профиля среды» при восстановлении не находит должного объяснения при решении задачи в классе параметризованных функций методом подбора.

Составляющая за счет потерь в среде связана с  $\max u/\omega$  и при фиксированных  $\{\omega, N, ka\}$  увеличивается (см. (11)) при росте  $u/\omega$  (рис. 1). Причиной является операция (7), которая согласно второму свойству  $s(\lambda)$  приводит к появлению погрешности.

Приборная составляющая погрешности восстановления возникает за счет трансформации погрешности  $\delta_0$  измерения матрицы  $V$  в погрешность  $n(z)$  (см. (11)). Ее величина была численно оценена для погрешности измерения  $|v_{il}| \sim \pm 5\%$ , фазы —  $\sim \pm 5^\circ$  и составила для  $n(z) \sim \pm 8\%$ , что вполне допустимо в задачах диагностики.

Неравенство (11) показывает также, что подбором чисел  $\{\omega, N, ka\}$  можно для одних и тех же распределений регулировать величину методической погрешности  $n(z)$ . Это хорошо иллюстрируют расчеты (рис. 2, 3). Механизм влияния виден на приведенных промежуточных кривых восстановленных функций  $s(\lambda)$ . Указанная зависимость погрешности восстановления  $n(z)$  от режима зондирования, как было отмечено выше, является непосредственным следствием корректной разрешимости задачи, причем в практическом отношении она является определяющей для построения аппаратуры на требуемый диапазон и точность.

Остановимся теперь на численной методике определения режима зондирования, который обеспечивает заданную методическую точность для заданного класса распределений. Методика в сущности вытекает из (11) и состоит в сравнении погрешностей после последовательного расчета по прямой и обратной задачам. Для режима  $\{\omega, \infty, \infty\}$  последовательным просчетом для требуемой точности восстановления находятся  $\omega$ , соответствующее ограничение на  $z_0$ ,  $h$  и ограничения характеристик  $\{\alpha, \alpha_1; \omega; u/\omega\}$ . Далее аналогичным расчетом для режимов  $\{\omega, N, \infty\}$  и  $\{\omega, N, ka\}$  при последовательном уменьшении  $N$  и  $ka$  определяются  $N_{\min}$ ,  $(ka)_{\min}$ , которые еще обеспечивают требуемую точность.

Приведенные примеры показывают механизм влияния  $N$  и  $ka$  на погрешность восстановления  $s(\lambda)$  и  $n(z)$ : уменьшение  $N$  уменьшает число узлов интерполяции (рис. 2), а уменьшение  $(ka)$  увеличивает погрешность в узлах (рис. 3). Практическое влияние уменьшения  $N$  начинается со значений  $N = 4 \div 6$ , а уменьшения  $ka$  — со значений порядка  $\sim 20$ . Отметим также, что широко используемый на практике случай восстановления при  $N = 1$  (диагностика по коэффициенту отражения) может быть обработан с использованием для его интерпретации многомодовой методики (см. рис. 2).

Важным вопросом при практической диагностике является определение фактического значения глубины  $z_0$ , для которой еще обеспечивается требуемая точность при реальном восстановлении. Методика определения пространственной глубины следует из (11) и заключается

в выборе для заданного класса распределений мажорантных распределений и последующем численном расчете для них мажорант  $\alpha(z_0)$ ;  $\tilde{\alpha}_1(z_0)$  исходя из требуемой точности восстановления.

Приведем пример для мажорантных распределений вида  $n(z) = \text{const}$  (рис. 2). На основе численных расчетов для погрешности  $\leq 3 \text{ dB}$  найдены мажоранты  $\alpha(z_0)$ ,  $\tilde{\alpha}_1(z_0)$  (рис. 4). Использование мажорант показано также на рис. 4, где приведены текущие  $\alpha(z)$ ;  $\alpha_1(z)$ , соответствующие реально восстанавливаемому  $n(z)$ , и первый корень  $z_0$  уравнений  $\alpha(z) = \tilde{\alpha}(z_0)$ ,  $\alpha_1(z) = \tilde{\alpha}_1(z_0)$ . Расхождение с фактическим значением  $\sim 10\%$  (см. рис. 2).

Вычислительная составляющая погрешности восстановления всегда присутствует в восстановленном  $n(z)$  и определяется шагом используемой разностной схемы, а также числом линеаризованных разностных уравнений, соответствующих уравнению Марченко. Линеаризация заключается в пренебрежении производной искомого  $K(z, t)$  в направлениях  $z + t = \text{const}$  в части области, где  $z + t \sim 0$ , и для проведения численных расчетов неизбежна. Это связано с тем, что порядок алгебраической системы, соответствующей уравнению Марченко, растет как удвоенный номер шага по  $z$ ,

а линеаризация позволяет рост порядка системы ограничить. Основанием для линеаризации является соответствующая оценка  $K(z, t)$  через  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  [7]. Оценка величины вычислительной составляющей может быть получена только после оптимизации всего алгоритма, чего в данной работе не проводилось. Поэтому дальнейшее исследование этого вопроса позволит уточнить потенциальные возможности метода.

**6.** В заключение отметим, что вопросы измерения матрицы  $V$  в режиме последовательного зондирования с оценкой приборной погрешности и результатами для диэлектриков изложены в [5].

Результаты работы для частного случая задачи (большой апертуры  $ka$ ) рис. 1—3 соответствуют задаче диагностики посредством наклонного зондирования плоской волной при  $N$  фиксированных углах, которая представляет также и самостоятельный интерес.

Отметим также, что актуальным представляется следующее развитие задачи. Используя аналогичный подход, обосновать родственный метод многочастотного зондирования для аналогичной плосконеоднородной плазмы. (Некоторая попытка в этом направлении была сделана в работе [12], где авторы ограничились рассмотрением решения задачи для частного случая, когда существует аналитическое решение в замкнутом виде.) На этом этапе будет возможно провести важное для практической диагностики сравнение методов многомодового и многочастотного зондирования. Сравнение позволит понять их относитель-

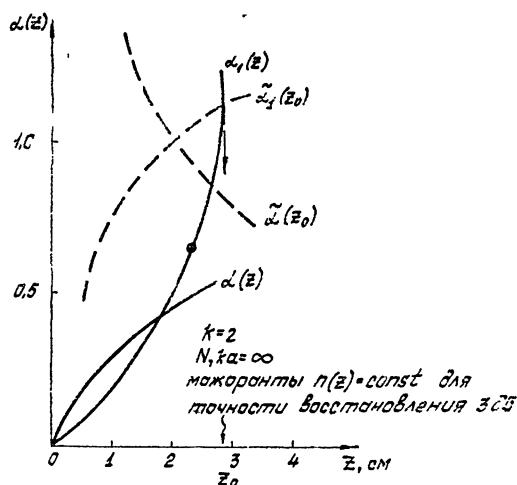


Рис. 4.

ные сильные и слабые стороны при диагностике плосконеоднородных сред и оценить точность измерения, когда используется одинаковый объем входных данных. Последующий анализ технологичности аппаратуры методов сделает это сравнение более полным.

Автор выражает искреннюю признательность Б. А. Попереченко за поддержку в работе, А. В. Суетенко за обсуждение результатов и В. А. Пермякову за полезные советы и замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Голант, СВЧ-методы исследования плазмы, изд. Наука, М., 1968
2. Зондирование неоднородной плазмы электромагнитными волнами, под ред Л. А. Душкина, Атомиздат, М., 1973
3. Д. А. Дупленков, В. П. Лисицын, Труды МЭИ, вып. 119, 16 (1972).
4. В. А. Немировский, Авт. свид № 527097 от 16.11.73, Офиц бюллетень № 47, 1977.
5. В. С. Буряк, А. М. Леонов, В. А. Немировский, А. В. Суетенко, Методика многоволнового зондирования плоскослоистых сред, МЭИ, гос. рег. инв. № Б 546617, 1976
6. Р. Митра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов, изд МИР, М., 1974.
7. В. А. Марченко, Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, изд. Наукова думка, Киев, 1972.
8. В. А. Блащак, Дифференциальные уравнения, 4, № 10, 1519 (1968).
9. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, изд ФМЛ, М., 1959
10. Д. Ш. Лундина, В. А. Марченко, Матем. сб 78(120), № 4, 475 (1969).
11. Вычислительные методы в электродинамике, под ред. Р. Митры, изд МИР, М. 1977.
12. A. K. Jordan and H. N. Kritikos, IEEE Trans. on Ant. Propag., AP-21 № 6, 909 (1973).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
10 августа 1977 г

### DIAGNOSTICS OF THE WALL-ATTACHED PART OF THE PLASMA BY ELECTROMAGNETIC WAVES MULTI-MODE SOUNDING

*V. A. Nemirovskij*

A diagnostics problem of radiophysical parameters of the wall-attached part of a plane inhomogeneous plasma is formulated and investigated by the method of multi-mode sounding. The inverse problem is solved. Its correct solvability is proved and the error analysis is carried out.

УДК 621.372.832

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ НА РЕЗОНАНСНОЕ СВЧ-ПОГЛОЩЕНИЕ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

*B. С. Бажанов, Г. А. Марков*

Исследовано нелинейное резонансное взаимодействие электромагнитного поля  $TE_{01}$ -волны с неоднородным плазменным столбом, пересекающим прямоугольный волновод перпендикулярно его узким стенкам. Показано, что в достаточно сильном поле в области критических значений плотности плазмы образуется «плато» на пространственном распределении частиц. С образованием плато наблюдается существенное увеличение СВЧ-потерь в плазме и уменьшение «добротности» резонансного взаимодействия. В окрестности плато велика амплитуда  $\left(\frac{\Delta n}{n_e} \sim 0,2\right)$  низкочастотных ( $f < 1 \text{ МГц}$ ) колебаний концентрации плазмы.

1. Изучение влияния нелинейных эффектов на поглощение энергии электромагнитного излучения в плазме [1–9] представляет в настоящее время определенный интерес в связи с проблемами высокотемпературного нагрева плазмы [1, 2] и переноса интенсивного излучения через плазму [6]. В резонансных условиях легко достигаются пороговые для нелинейных явлений значения напряженности волновых полей, что позволяет уже при небольших значениях мощности падающей волны ( $W_0 \sim 10 \text{ Вт}$ ) исследовать квазистационарное самосогласованное взаимодействие СВЧ-поля с плазмой [7–9] и оценить роль различных физических процессов, определяющих нагрев [8] и тепловые потери плазмы [8, 10].

Целью настоящей работы, которая представляет собой продолжение [9], является изучение зависимости резонансного СВЧ-поглощения в неоднородном плазменном столбе от мощности падающей волны и определение связи изменений поглощения сискажением распределения плотности плазмы в пространстве скоростей и координат и возбуждением низкочастотных колебаний.

2. Плазменный столб диаметром  $2a = 22 \text{ мм}$  с электронной плотностью  $n_e \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$  получали при разряде в гелиевой или воздушной атмосфере при давлениях  $p \sim 5 \cdot 10^{-3} \div 10^{-1} \text{ Тор}$ . Разрядная трубка диаметром 12 мм своей уширенной до 22 мм частью помещалась внутрь прямоугольного волновода ( $72 \times 34 \text{ мм}^2$ ) перпендикулярно электрическому полю  $E_{\text{пад}}$  и направлению распространения падающей  $TE_{01}$ -волны. На расстоянии четверти длины волны за трубкой волновод закорачивался металлическим поршнем. Потери на поглощение в стенах волновода и на излучение через отверстия в стенах невелики ( $W_{\text{и}} < 0,1 W_0$ ), поэтому мощность отраженной волны  $W_r$  отличается от мощности падающей волны  $W_0$  на величину СВЧ-мощности  $W$ , поглощаемой в плазме. Сигналы, пропорциональные  $W_r$  и  $W_0$ , снимались с детекторных секций направленных ответвителей и подавались на

отклоняющие пластины осциллографа. Мощность падающей волны пульсировала с частотой 50 Гц от 0 до 40 Вт. Круговая частота поля  $\omega_0 = 1,64 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ .

В разрядную трубку со стороны поршня вводился одиночный цилиндрический зонд, ориентированный перпендикулярно  $E_{\text{пад}}$ . Зонд можно было перемещать вдоль направления вектора  $E_{\text{пад}}$  и использовать для определения радиального распределения плотности плазмы. Для уменьшения влияния неоднородного СВЧ-поля на зондовый ток потенциал зонда выбирался сильно отрицательным относительно плазмы ( $\varphi_z \sim -100 \text{ V}$ ) и для измерений использовался только ионный ток насыщения. Спектральный состав сигнала с зонда определялся с помощью низкочастотного анализатора С4-8 в режиме непрерывного облучения ( $W_0(t) = \text{const}$ ). Энергетический спектр электронов в разряде определялся пристеночным плоским трехсеточным зондом, ориентированным вдоль  $E_{\text{пад}}$ . Размер ячейки стенок зонда  $l = 0,3 \text{ mm}$ , расстояние между сетками  $d = 0,5 \text{ mm}$ , геометрическая проницаемость сеток  $\beta = 0,7$ .

3. Основные результаты экспериментов представлены на рис. 1—4. Осциллограммы рис. 1 показывают зависимости мощности отраженной волны  $W_r$  (верхние кривые) и ионного тока насыщения на цилиндрический зонд  $i_h$  (нижние кривые) от мощности падающей волны  $W_0$ , снятые для гелия (а) и воздуха (б) при давлении  $p = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$  и разрядном токе  $I_0 = 500 \text{ mA}$ . Разрядный ток определял начальную концентрацию плазмы ( $n_e(r=0) \sim 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ) и не зависел от величины  $W_0$  [7, 8]. Длина рабочей части зонда в данных экспериментах была равна радиусу трубки, поэтому величина ионного тока на зонд была пропорциональна усредненной по сечению столба плотности плазмы  $\tilde{n}_e$  ( $\tilde{n}_e = \frac{1}{\pi a^2} \int n_e dS$ ). Направление изменений  $W_r$  и  $i_h$  при изменении  $W_0$  показано на рис. 1 стрелками. Ступенька на осциллограммах соответствует «самоподдерживающемуся» резонансному режиму взаимодействия [7, 8]. На линейной резонансной характеристике неоднородного плазменного столба для разряда при выбранных условиях эксперимента ( $p \geq 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $a = 11 \text{ mm}$ ) наблюдается только один пик [9] основно-

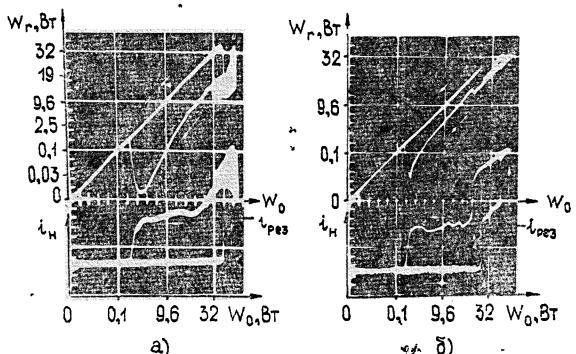


Рис. 1. Осциллограммы зависимости мощности отраженного сигнала  $W_r$  и ионного тока насыщения  $i_h$  от мощности падающей волны  $W_0$  при  $p = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$  в He (а) и воздухе (б).

го (квазистатического) дипольного резонанса при  $i_h = i_{\text{рез}}$ . Ширина резонансного пика ( $\frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{рез}}} \sim 0,25$ ) определяется в нашем случае ( $\frac{v}{\omega_0} \sim \sim 2 \cdot 10^{-3} \ll (r_D/a)^{2/3} \sim 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $v$  — частота столкновений электронов с

атомами,  $r_D$  — дебаевский радиус электрона) потерями, в основном, на линейную трансформацию падающей волны в продольные волны, затухающие на периферии плазменного столба.

Из осцилограмм рис. 1, как, впрочем, и из данных работ [7, 8], хорошо заметно, что при резонансном взаимодействии ( $i_h = i_{\text{рез}}$ ) с ростом  $W_0$  меняется относительное поглощение в плазме  $W_{\text{рез}}/W_0$ , т. е. меняется добротность резонанса. Зависимости резонансного поглощения  $W_{\text{рез}}/W_0$  ( $W_0$ ) приведены на рис. 2 для разряда в воздухе и гелии.

При малых уровнях СВЧ-мощности ( $0,2 \text{ Bt} < W_0 < 2 \text{ Bt}$ ,  $\frac{v_{\sim}}{v_e} \gtrsim 0,01$ )<sup>\*</sup> наблюдается некоторый рост относительного поглощения. Этот участок более подробно исследован в [9] для узкой трубки ( $2a = 4 \text{ мм}$ ), для которой линейное поглощение на основном резонансе  $W_{\text{рез}} \sim 0,7W_0$  и увеличение  $W_{\text{рез}}/W_0$  сравнительно велико ( $W_{\text{рез max}} \approx W_0$ ). При больших значениях подводимой СВЧ-мощности ( $W_0 \gtrsim 10 \text{ Bt}$ ,  $v_{\sim}/v_e \gtrsim 0,1$ ) наблюдается заметное уменьшение  $W_{\text{рез}}/W_0$ , которое только намечалось в [9] для узкой трубки при  $W_0 \sim 6 \text{ Bt}$ . С понижением давления газа и при наложении на разряд продольного магнитного поля уменьшение относительного поглощения в сильном СВЧ-поле выражено существенно слабее (см. рис. 2).

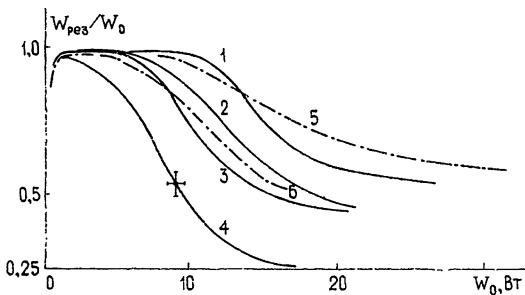


Рис. 2. Зависимости относительного резонансного поглощения в столбе  $W_{\text{рез}}/W_0$  от мощности падающей волны  $W_0$ , снятые при разряде:

1 — в He,  $p = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 0$ ; 2 — в He,  $p = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 0$ ; 3 — в воздухе,  $p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 0$ ; 4 — в воздухе,  $p = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 0$ ; 5 — в He,  $p = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 250 \text{ эрст}$ ; 6 — в воздухе,  $p = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Torr}$ ,  $H_0 = 250 \text{ эрст}$ .

Для определения причин изменений «добротности» резонансного взаимодействия в нелинейном режиме были исследованы изменения пространственного распределения плотности плазмы вдоль направления вектора электрического поля падающей волны. Результаты этих измерений представлены на рис. 3, где звездочкой отмечена граница пристеночной области пространственного заряда, внутри которой сняты зондом экспериментальные точки показывают величину ионной плотности. Распределение электронной плотности, рассчитанное согласно бесстолкновительной теории [11], показано на рис. 3 штриховой линией

\* Осцилляторная скорость электронов  $v_{\sim} = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0}$  оценивалась через амплитуду электрического поля в плазме  $E = E_{\text{пад}} Q$ , где  $Q = \omega_{\text{рез}}/\Delta\omega = 2i_{\text{рез}}/\Delta i$  — добротность резонансного пика. Тепловая скорость электронов  $v_e = \sqrt{2kT_e/m} \sim 2 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ . Разница в «пороговых» значениях ( $v_{\sim}/v_e$ ) для настоящих условий и [9] связана, по-видимому, с различием степеней неоднородности плазмы в узкой ( $a = 2 \text{ мм}$ ) и широкой ( $a = 11 \text{ мм}$ ) трубках.

для разряда в Не при  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr. Радиус собирающей поверхности зонда, рассчитанный с учетом области пространственного заряда, равен 0,4 мм. Сопоставление данных рис. 2 и 3 показывает, что существенное уменьшение относительного поглощения наблюдается в тех случаях, когда на распределении  $n_e(r)$  появляется плато в области плазменного резонанса

$$n_e \sim n_c \quad (n_c = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2}), \quad \text{где } e \text{ и } m \text{ — заряд и масса}$$

электрона). В наших условиях ( $p < 10^{-1}$  Torr,  $W_0 < 40$  Bт) ширина плато

меньше длины свободного пробега электрона. В области плато наблюдаются значительные флюктуации зондового тока ( $\Delta i_{\text{н}}/i_{\text{н}} \sim 0,2$ ), которые и определяют величину ошибок на рис. 3. В спектре флюктуаций  $i_{\text{н}}$

наблюдаются частоты от килогерц до 1 МГц. При увеличении давления в разряде до 0,2 Torr наблюдается уширение спектра флюктуаций в области высоких частот до 2,5 МГц и уменьшение до нуля в области ( $\Delta W^0$ ) существования «самоподдерживающихся» резонансов.

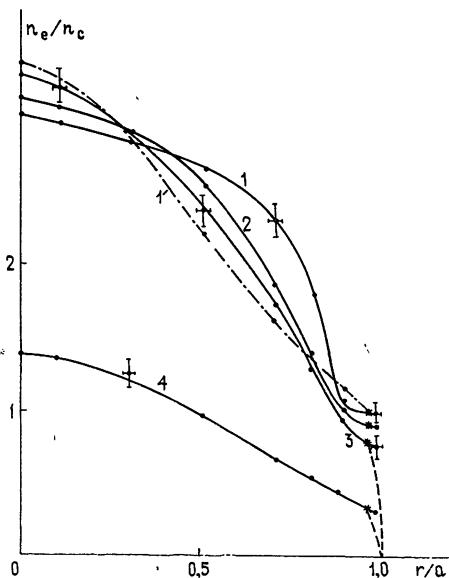


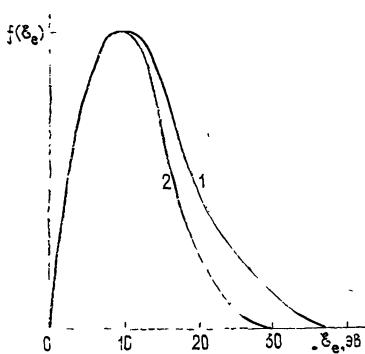
Рис. 3. Распределение электронной плотности  $n_e$  в разряде по радиусу при  $1 - W_0 = 25$  Bт,  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr, воздух;  $1' - W_0 = 0$ ,  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr,  $I_0 = 1,5$  A, воздух;  $2 - W_0 = 25$  Bт,  $p = 8 \cdot 10^{-2}$  Torr, He;  $3 - W_0 = 25$  Bт,  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr, He;  $4 - W_0 = 0$ ,  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr, He,  $I_0 = 550$  mA.

Штриховые линии показывают распределение  $n_e(r)$ , рассчитанное согласно бесстолкновительной теории [11] для пристеночной области пространственного заряда.

Изменения энергетического распределения электронов при облучении разряда СВЧ-волной мощностью до 40 Bт отражают графики рис. 4. Измерения проводились с помощью трехсеточного плоского зонда с анализирующим напряжением на коллекторе.

Как оказалось, в разряде в сильном СВЧ-поле появляется значительное количество быстрых электронов\*, которые ответственны за дополнительную ионизацию газа [8, 10] и уменьшение затухания возбуждаемых плазменных волн [9, 12].

Рис. 4. Энергетический спектр электронов при разряде в гелиевой атмосфере для  $W_0 = 25$  Bт (1) и  $W_0 = 0$  (2) при  $p = 3 \cdot 10^{-2}$  Torr,  $I_0 = 550$  mA.



\* Так как рост плотности плазмы и статических электрических полей, связанных с радиальной и продольной неоднородностью плазменного столба, при увеличении разрядного тока в 3–4 раза не ведет к заметному изменению числа быстрых электронов, то, по-видимому, появление быстрых частиц в резонансном СВЧ-разряде обусловлено наличием в плазме сильных волновых полей.

4. Совокупность экспериментальных данных настоящей работы и [9] показывает, что с ростом амплитуды падающей волны относительное резонансное поглощение в плазме  $W_{\text{рез}}/W_0$  и, следовательно, добротность основного резонанса плазменного столба сначала несколько возрастают, а затем заметно уменьшаются. Возрастание добротности резонансного взаимодействия при  $W_0 \geq 0,2 \text{ Вт}$  ( $v_\sim/v_e \geq 0,01$ ) обусловлено относительным уменьшением СВЧ-потерь в плазме, которое в условиях наших экспериментов может быть связано только с деформацией энергетического и пространственного распределения плазмы. С образованием плато на распределении  $n_e(r)$  увеличивается резкий перепад плотности электронов вблизи границы плазмы со стеклом, что препятствует проникновению возбуждаемых плазменных волн в область сильного затухания Ландау. Кроме того, появление хвоста быстрых электронов (рис. 4) и связанное с этим уменьшение затухания продольных волн [12] также способствуют увеличению добротности резонансов объекта с достаточно резкой границей [9].

При больших амплитудах СВЧ-поля ( $v_\sim/v_e \geq 0,1$ ) наблюдается уменьшение относительного резонансного поглощения  $W_{\text{рез}}/W_0$ , которое можно объяснить только значительным возрастанием потерь в плазме. В наших условиях рост СВЧ-потерь связан, по-видимому (см. рис. 2 и 3), с увеличением размеров резонансной области в плазме, когда концентрация электронов на плато близка к критической ( $n_e \text{ плато} \sim n_c$ ), и с увеличением эффективной частоты столкновений электронов, обусловленным возбуждением в плазме широкого спектра ионно-звуковых колебаний.

Таким образом, в неоднородной слабоионизированной плазме под действием сильного СВЧ-поля возможно образование плато на пространственном распределении плотности плазмы в области критических значений концентрации, что ведет к увеличению СВЧ-потерь в плазме независимо от конкретного механизма диссипации электромагнитной энергии.

Авторы благодарны В. Б. Гильденбургу за обсуждение результатов работы и некоторые замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, УФН, 110, 437 (1973)
2. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973
3. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 46, 2156 (1964)
4. В. Б. Гильденбург, Г. М. Фрайман, ЖЭТФ, 69, 1601 (1975).
5. В. И. Баринов, И. Р. Генкер, В. А. Иванов, Д. М. Карфидов, Труды ФИАН, 92, 35 (1977).
6. Г. М. Батанов, В. А. Силин, Труды ФИАН, 92, 3 (1977).
7. В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, А. Я. Шишко, Изв. вузов — Радиофизика, 14, 629 (1971)
8. Г. А. Марков, ЖТФ, 45, 267 (1975)
9. В. С. Бажанов, Г. А. Марков, В. А. Исаев, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 6, 932 (1977)
10. В. С. Лазебник, Г. А. Марков, И. В. Хазанов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 8, 1246 (1976).
11. J. V. Ralke, Phys. Fluids, 6, 1657 (1963).
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE NONLINEAR EFFECTS  
ON THE RESONANCE VUF-ABSORPTION  
IN AN INHOMOGENEOUS PLASMA

*V. S. Bazhanov, G. A. Markov*

The nonlinear resonance interaction of an electromagnetic field of a TE<sub>01</sub>-wave with an inhomogeneous plasma column crossing the rectangular waveguide perpendicular to its narrow walls is investigated. A „plateau“ is shown to be formed on the space particles' distribution in a sufficiently strong field in the region of critical values of the plasma density. When the plateau is formed an essential increase of VUF losses in the plasma and the decrease of Q-factor of the resonance interaction are observed. In the vicinity of the plateau the amplitude of low frequency ( $f \ll \text{MHz}$ ) oscillations of the plasma density is large ( $\Delta n/n_e \sim 0,2$ ).

---

УДК 533.951

## ИОНИЗАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ (СТРАТЫ) В ОГРАНИЧЕННОЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

*П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, В. Н. Садовский*

Рассмотрены резонансные свойства положительного столба при возбуждении вынужденных страт. Вскрыт механизм установления стационарной амплитуды и получены условия мягкого и жесткого режимов возбуждения собственных страт. Исследованы условия подавления страт при асинхронном воздействии на систему путем модуляции тока разряда. Анализ произведен для ограниченного положительного столба с использованием общепринятой модели [<sup>1, 3</sup>].

Расслоение или стратификация положительного столба разряда низкого давления — проявление одной из наиболее распространенных неустойчивостей низкотемпературной плазмы. Распространение и усиление бегущих страт определяется зависимостью частоты ионизации от температуры и концентрации электронов, вследствие чего эти волны получили название ионизационных. К настоящему времени достаточно хорошо разработана дисперсионная теория ионизационных волн вблизи верхней границы существования страт по току разряда (так называемой границы Пуппа), когда время жизни метастабилей много меньше времени жизни основных носителей [<sup>1-4</sup>]. Теоретическое исследование страт обычно ограничивают получением условий пространственного усиления ионизационной волны и только в работах [<sup>5</sup>] учтено влияние модуляции разрядного тока (точнее, параметров внешней цепи) и получены условия возбуждения страт в ограниченном положительном столбе.

Анализ нелинейных эффектов, имеющийся в небольшом количестве работ, также проведен для неограниченного столба. Так, в работе [<sup>6</sup>] с помощью аналога метода Уитэма получена форма ионизационной волны и исследована ее устойчивость. В работе [<sup>7</sup>] рассмотрена возможность установления стационарной амплитуды ионизационной волны из-за неустойчивости по отношению к распаду на две другие волны.

В настоящей работе рассмотрены резонансные свойства положительного столба при возбуждении вынужденных страт, вскрыт механизм установления стационарной амплитуды и получены условия мягкого и жесткого режимов возбуждения собственных страт. Исследовано асинхронное подавление собственных страт путем модуляции тока разряда. Все задачи решены для ограниченного положительного столба с использованием общепринятой модели [<sup>1, 3</sup>].

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Плазму положительного столба будем описывать, исходя из наиболее распространенной гидродинамической модели, справедливой вблизи верхней по току границы существования страт [<sup>3, 4</sup>]. Уравнения амбиполярной диффузии и баланса тепла для электронов, в одномерном приближении запишем в виде [<sup>6</sup>]

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = n \left( Z - \frac{1}{\tau_a} \right); \quad (1)$$

$$\gamma b_e \frac{\partial}{\partial x} \left( Tn \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{j}{enb_e} \left( \frac{j}{e} + b_e T \frac{\partial n}{\partial x} - \alpha b_e n \frac{\partial T}{\partial x} \right) - nH = 0. \quad (2)$$

Здесь  $n$ ,  $T$  — концентрация и температура (в электронвольтах) электронов,  $D_a = b_i T$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $b_e$ ,  $b_i$  — подвижности электронов и ионов,  $Z(n, T)$  — частота ионизации,  $H(T)$  — потери энергии электронов в единицу времени при соударениях,  $\tau_a$  — время жизни электронов за счет диффузии на стенки,  $\gamma$ ,  $\alpha$  — кинетические коэффициенты (для максвелловской функции распределения электронов по скоростям  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 3/2$ ),  $j$  — плотность тока,  $e$  — заряд электрона, положительное направление оси  $x$  выбрано от катода к аноду.

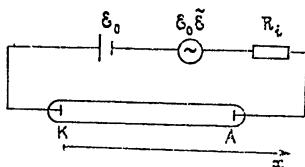


Рис. 1.

к уравнениям (1), (2) необходимо добавить закон Ома [5]

$$\mathcal{E} = R_i j \bar{s} + \int_0^L \left( \frac{j}{enb_e} + \frac{T}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx, \quad (3)$$

где  $L$  — длина столба,  $\bar{s}$  — эффективное сечение разрядной трубки,  $\beta$  — коэффициент термодиффузии. Во внутреннее сопротивление источника питания здесь включено также сопротивление приэлектродных областей разряда.

Выделяя стационарное решение уравнений (1)–(3) ( $n_0$ ,  $T_0$ ,  $j_0$ ) и переходя к безразмерным переменным

$$N = \frac{n - n_0}{n_0}, \quad U = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tilde{j} = \frac{j - j_0}{j_0}, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0},$$

$$\xi = \frac{E_0}{T_0} x, \quad \tau = b_i \frac{E_0^2}{T_0} t, \quad l = \frac{E_0}{T_0} L,$$

запишем уравнения (1)–(3) в виде

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} - \eta_T U = \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \eta_n N + f_1; \quad (4)$$

$$\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial N}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2(N - \tilde{j}) + h_T U + f_2; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{R_i}{R} \right) (\tilde{j} - \tilde{\mathcal{E}}) &= \frac{1}{l} \left\{ \int_0^l (N + f_3) d\xi - N(l) + \right. \\ &\quad \left. + N(0) - \beta (U(l) - U(0)) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R = L/enb_e \bar{s}$  — сопротивление положительного столба по постоянному току,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  — нелинейные функции  $N$ ,  $U$  и их производных по  $\xi$ ,  $\eta_T$  и  $\eta_n$  — безразмерные производные правой части уравнения (1) по концентрации и температуре,  $h_T$  — безразмерная производная  $H$  по  $T$ .

В левых частях уравнений (4), (5) выделены консервативные линейные члены, отвечающие за распространение незатухающей бегущей ионизационной волны с законом дисперсии  $\kappa = \eta_T / (\gamma\omega)$  и синфазной компоненты. Правые части описывают неконсервативные и нелинейные эффекты.

Рассматривая потоки электронов и ионов и потоки тепла через приэлектродный слой [15], можно показать, что условия на границах положительного столба для малых  $N$  и  $U$  имеют вид

$$N + \beta_1 \frac{\partial N}{\partial \xi} = 0, \quad U + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (7)$$

где  $\beta_{1,2} \sim 0,1$ .

В дальнейшем ради простоты будем рассматривать упрощенные граничные условия вида

$$N(0) = N(l) = 0, \quad U(0) = U(l) = 0. \quad (8)$$

Проведенные оценки показывают, что для достаточно длинных разрядных трубок вид граничных условий не является принципиальным и замена граничных условий (7) на (8) приводит лишь к незначительным количественным изменениям полученных результатов.

Для узких разрядных трубок вблизи области существования собственных страт справедливы соотношения [4, 5]

$$\epsilon \equiv \eta_T^{-1/4} \ll 1, \quad \omega \sim \frac{1}{\epsilon^3}, \quad \kappa \sim \frac{1}{\epsilon}, \quad \frac{N}{U} \sim \frac{1}{\epsilon}, \quad \eta_n \sim \frac{1}{\epsilon^2}, \quad (9)$$

где  $\omega$  и  $\kappa$  — безразмерные частота и волновое число ионизационной волны.

В линейном приближении система (4)–(6) имеет собственное решение в виде суперпозиции четырех волн, амплитуды и частота которых определяются из четырех граничных условий. Как показано в работах [5], амплитуды двух из этих волн порядка малого параметра  $\epsilon$  по отношению к амплитудам двух других. Это объясняется тем, что колебания температуры, как следует из уравнения (4), малы ( $\sim \epsilon$ ) по сравнению с колебаниями концентрации, вследствие чего граничные условия для температуры всегда удовлетворяются с точностью до  $\epsilon$  и их в первом приближении можно не учитывать. Оставшимся двум граничным условиям для концентрации можно удовлетворить суперпозицией только двух волн. Поэтому в качестве порождающей может быть взята система второго порядка по координате (левая часть уравнений (4), (5)).

Учитывая (9) и используя для скорости ионизации модельное выражение из работы [6], можно показать, что для малых отклонений концентрации электронов от равновесной,

$$N \leq \sqrt{\epsilon}, \quad (10)$$

правые части уравнений (4), (5) являются величинами порядка  $\epsilon$  по отношению к левым частям. В этом случае решение уравнений (4), (5) будет близко к решению линейной консервативной системы, которое в одночастотном случае имеет вид

$$N(\xi, \tau) = A \exp \{i[(\omega + \delta)\tau + \kappa\xi]\} + Be^{i(\omega+\delta)\tau} + \text{к. с.},$$

$$U(\xi, \tau) = \frac{i\omega}{\eta_T} \{A \exp \{i[(\omega + \delta)\tau + \kappa\xi]\} + Be^{i(\omega+\delta)\tau}\} + \text{к. с.}, \quad (11)$$

$$\tilde{j}(\tau) = Ce^{i(\omega+\delta)\tau} + \text{к. с.},$$

где  $A, B, C$  — медленно меняющиеся функции,  $\delta$  — нелинейный сдвиг частоты.

Вследствие (10) функции  $f_1, f_2, f_3$  в уравнениях (4)–(6) можно разложить в ряд, ограничившись кубическими членами и не учитывая квадратичные, которые в первом приближении по малому параметру  $\epsilon$  не дают вклада в основные гармоники:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{6} (\eta_{3n} N^3 + \eta_{2n, T} N^2 U + \eta_{n, 2T} N U^2 + \eta_{3T} U^3), \\ f_2 &= 2N(2N - \tilde{j})(N - \tilde{j}) + \alpha N(N - \tilde{j}) \frac{\partial U}{\partial \xi} + N \left( \gamma \frac{\partial U}{\partial \xi} - \right. \\ &\quad \left. - 3N + 2\tilde{j} \right) \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{1}{6} (h_{3n} N^3 + h_{2n, T} N^2 U + h_{n, 2T} N U^2 + h_{3T} U^3), \\ f_3 &= N^2(N - \tilde{j}) + N(U - N) \frac{\partial N}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя асимптотический метод [9], можно получить укороченные уравнения для медленных амплитуд  $A(\xi, \tau), B(\xi, \tau)$ . Эти уравнения были использованы для решения всех рассмотренных ниже задач.

## 2. СТИМУЛИРОВАННЫЕ СТРАТЫ

Вынужденные, или стимулированные, страты в положительном столбе возбуждаются при введении в разряд внешнего периодического воздействия, например, при включении генератора в цепь питания (см. рис. 1). Вынужденные страты могут также вызываться развитыми неустойчивостями в приэлектродных частях разряда, если частоты последних близки к частоте собственных страт [1]. Поскольку положительный столб является распределенной колебательной системой, то глубина модуляции тока или свечения фиксированного сечения столба должны немонотонно изменяться при изменении частоты генератора, принимая максимальные значения на частотах, соответствующих собственным частотам системы. Эти резонансные явления наблюдаются экспериментально как при изменении частоты внешнего воздействия, так и при изменении длины положительного столба [10, 11].

В этой части работы рассматриваются резонансные свойства столба при малых амплитудах внешнего воздействия, когда можно ограничиться линейным приближением. В случае гармонического внешнего воздействия вынужденные страты, как и собственные, можно представить в виде суперпозиции бегущей волны и синфазной компоненты (см. (11)). Укороченные уравнения для  $A$  и  $B$  в стационарном режиме имеют вид

$$\frac{dA}{d\xi} = \psi A, \quad \frac{dB}{d\xi} = k_1 B - 2C, \quad (13)$$

где

$$\psi = \frac{\omega}{\omega} \left( \eta_n - \omega^2 - \frac{2\alpha \eta_T}{\gamma \omega^2} \right), \quad (14)$$

$$\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2\gamma}, \quad k_1 = 2 + i\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{h_T}{\gamma \omega}.$$

Подставляя (11) в закон Ома (6) и граничные условия (8), получим

$$\left(1 + \frac{R_i}{R}\right)(C - \tilde{\mathcal{E}}) = \frac{1}{l} \int_0^l (A e^{ix\xi} + B) d\xi; \quad (15)$$

$$A(0) + B(0) = 0, \quad A(l) e^{ixl} + B(l) = 0. \quad (16)$$

Решение краевой задачи (13)–(16) запишем в виде

$$A = \tilde{\mathcal{E}} \frac{1}{\Delta} (1 - e^{-k_1 l}) e^{\psi\xi},$$

$$B = \frac{2}{k_1} \left\{ C - \tilde{\mathcal{E}} \frac{1}{\Delta} (e^{kl} - 1) \exp [k_1(\xi - l)] \right\}, \quad (17)$$

$$C = \tilde{\mathcal{E}} \frac{1}{\Delta} (e^{(k-k_1)l} - 1).$$

Здесь

$$k = \psi + ix, \quad \Delta = \left[ 1 + \frac{2R}{(R_i + R) k_1} \right] \left( 1 + \frac{1}{b} e^{-k_1 l} \right) (e^{(k-k_{0m})l} - 1),$$

$$b = \frac{R_i^2 k_1^2 l}{2R(R_i + R)} \left[ 1 - \frac{2R}{(R_i + R) k_1} \right] (e^{kl} - 1)^{-1},$$

$k_{0m} = \psi_m + ix_m$  — собственные значения  $k$ , обращающие в нуль характеристический определитель  $\Delta$  и определяемые из уравнений

$$\exp \left[ \psi_m l + i \left( x_m - \frac{h_T}{\gamma x_m} \right) l \right] = (1+b)^{-1} \left\{ 1 + b \exp \left[ \left( 2 + \frac{h_T}{\gamma x_m} \right) l \right] \right\}.$$

В практически наиболее интересном случае  $R_i l / R \ll e^{2l}$ ,  $l \gg 1$  выражение для  $\psi_m$  принимает вид

$$\psi_m = \frac{1}{l} \ln \left[ \frac{2R_i l}{R} \sqrt{1 + \left( \frac{h_T}{\gamma x_m} \right)^2} \sqrt{1 + \left( \frac{(R_i + R) h_T}{2R_i \gamma x_m} \right)^2} \right]. \quad (18)$$

Используя выражение (17) для  $C$ , вычислим интенсивность модуляции тока:

$$\begin{aligned} |\tilde{j}|^2 = |C|^2 &= \tilde{\mathcal{E}}^2 \left( 1 - \frac{2R}{(R_i + R) k_1} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{1}{b} e^{-k_1 l} \right)^{-1} \times \\ &\times \frac{e^{2(\psi-2)l} - 2e^{(\psi-2)l} \cos(x - x_1) l + 1}{e^{2(\psi-\psi_m)l} - 2e^{(\psi-\psi_m)l} \cos(x - x_m) l + 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда видно, что зависимость  $|\tilde{j}|^2$  от  $x$  и  $l$  имеет резонансный характер, если модуль разности  $\psi - \psi_m$  достаточно мал. Поскольку величина  $\psi$ , в свою очередь, резонансным образом зависит от  $x$  (см. (14)), то наименьшее значение  $|\psi - \psi_m|$  достигается при  $x$ , соответствующем максимуму  $\psi$ . При этом значении  $x$  интенсивность модуляции тока будет немонотонно зависеть от  $l$ , обращаясь в максимум, когда одно из значений  $x_m$  совпадает с  $x$  (см. рис. 2). Величину  $\psi_m$ , соответствующую резонансному значению  $x_m$ , в дальнейшем будем обозначать  $\psi_0$ . Острота максимумов, характеризующая добротность системы, об-

ратно пропорциональна  $\psi_0 - \psi$ . Так как  $\psi_0$  слабо меняется при изменении длины столба на величину порядка длины волны страт (см. (18)), то от максимума к максимуму картина практически повторяется. Как следует из (19), выражение для «добротности» страт в приближении  $(\psi_0 - \psi)l \ll 1$  имеет вид

$$Q = \frac{\omega_{\max}}{2\Delta\omega_{1/2}} = \frac{x}{2\Delta x_{1/2}} = \frac{l_m}{2\Delta l_{1/2}},$$

где  $\Delta\omega_{1/2}$  и  $\Delta l_{1/2}$  — изменение частоты внешнего воздействия или длины столба, при которых интенсивность модуляции тока падает вдвое по отношению к максимальной на частоте  $\omega_{\max}$  и при длине  $l_m$  (см. рис. 2). Поскольку  $\Delta l_{1/2} \approx (\psi_0 - \psi)l/x$ , то

$$Q = \frac{x}{2(\psi_0 - \psi)}. \quad (20)$$

Выражение (20) имеет простой физический смысл: чем ближе система к порогу возбуждения, тем более ярко выражены ее резонансные свойства.

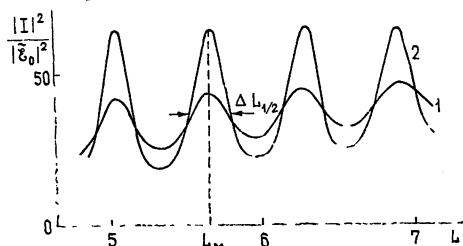


Рис. 2. Зависимость интенсивности модуляции разрядного тока от длины столба;  $R_l/R = 0,1$ ;  $x = 10$ ; 1 —  $\psi = -0,224$ ,  $Q = 15$ ; 2 —  $\psi = -0,02$ ,  $Q = 25$ .

При удалении от границы возбуждения резонансные свойства столба проявляются все слабее и уже при  $(\psi_0 - \psi)l > 3$ , как это следует из (19), интенсивность модуляции тока слабо зависит от  $l$ . Так, для трубы длиной  $L = 20$  см с  $\psi_0 E_0/T_0 = 0,4$  см<sup>-1</sup> резонансные свойства столба уже практически не проявляются для вынужденных страт с  $\psi E_0/T_0 \leq 0,28$  см<sup>-1</sup>. Этим, по-видимому, объясняются некоторые неудачные попытки выявить модовую структуру ионизационных волн с помощью вынужденных страт.

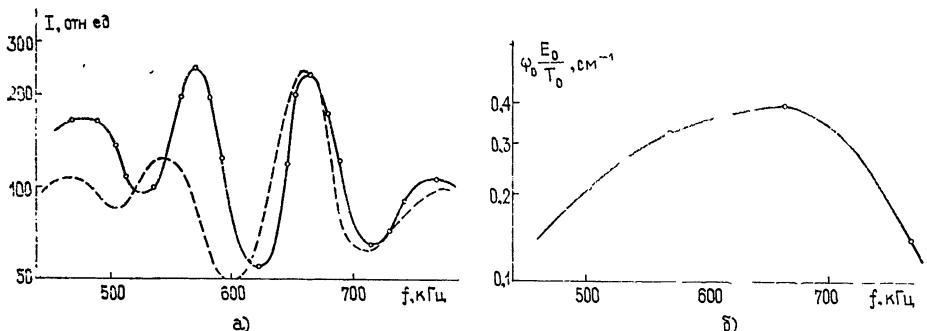


Рис. 3. а) Зависимость спектральной интенсивности флуктуаций от частоты для смеси гелия с неоном;  $i_p = 2,5$  мА,  $L = 11$  см,  $d = 0,9$  см (сплошная кривая — эксперимент, штриховая — теория).

б) Зависимость коэффициента пространственного нарастания страт от частоты для тех же параметров (эксперимент).

На рис. 3 сплошными линиями представлены экспериментальные и теоретические зависимости спектральной интенсивности флуктуаций

бокового спонтанного излучения  $I_\omega$  и коэффициента пространственного усиления этих флуктуаций  $\Psi E_0/T_0$  вблизи границы возбуждения собственных страт. Если считать, что спектральная плотность источника флуктуаций  $\tilde{\mathcal{E}}_\omega$  некоторого эквивалентного генератора шумовой ЭДС в цепи разряда не зависит от частоты в рассматриваемом диапазоне, то можно записать

$$I_\omega = |\tilde{\mathcal{E}}_\omega|^2 \frac{\alpha(\xi', \omega)}{|\Delta(\omega)|^2}, \quad (21)$$

где  $\alpha(\xi', \omega)$  — коэффициент, зависящий от точки измерения  $\xi'$  и слабо зависящий от частоты  $\omega$ . На рис. За пунктирующей линией представлена теоретическая зависимость  $I_\omega$ , построенная по формуле (21). Как видно из рисунка, эта зависимость качественно согласуется с экспериментальной.

### 3. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ГЕНЕРАЦИИ СОБСТВЕННЫХ СТРАТ

Одномодовый стационарный режим генерации страт обычно наблюдается при незначительных превышениях над порогом генерации [1]. При этом можно считать, что выполняется условие (10) и решение системы уравнений (4) — (6) можно искать в виде (11). Стационарные укороченные уравнения для комплексных амплитуд  $A(\xi)$  и  $B(\xi)$  имеют вид

$$\frac{dA}{d\xi} = \left( \psi - i \frac{x}{\omega} \delta \right) A + \{ [\chi_1 - 6(1+a) + ix(\chi_2 + 4)] A^2 + \quad (22)$$

$$+ 2[\chi_1 - 2(5+a) + ix(\chi_2 + 3)] B^2 + 4[5+a - ix] \operatorname{Re}(BC^*) - 4C^2 \} A;$$

$$\frac{dB}{d\xi} = \left\{ 2 + i \frac{h_T}{\gamma x} + 8(2+a) A^2 + 12B^2 - 6BC^* + 4C^2 + (\zeta_1 + ix\zeta_2) \times \right. \quad (23)$$

$$\left. \times (2A^2 + B^2) \right\} B - \{ 2 + 4(2+a) A^2 + 12B^2 - 2B^*C \} C.$$

Здесь

$$\chi_1 = \frac{x}{2\omega} \left( \eta_{3n} + \frac{\omega^2}{\eta_T^2} \eta_{n,2T} \right) - \zeta_1, \quad \chi_2 = \frac{1}{2\eta_T} \left( \eta_{2n,T} + \frac{\omega^2}{\eta_T^2} \eta_{3iT} \right) - \zeta_2,$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} \left( h_{3n} + \frac{\omega^2}{\eta_T^2} h_{n,2T} \right), \quad \zeta_2 = \frac{\omega}{2x\eta_T} \left( h_{2n,T} + \frac{\omega^2}{\eta_T^2} h_{3iT} \right),$$

через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  обозначены модули соответствующих амплитуд. Из закона Ома (6) следует связь между  $C$ ,  $A$  и  $B$ :

$$C = \frac{R}{(R_i + R)l} \int_0^l \left[ \left( 1 - 4A \frac{dA}{d\xi} + 2 \left( 3 + \frac{1}{\gamma} \right) A^2 + 3B^2 \right) B - \right. \quad (24)$$

$$- 2(A^2 + B^2) \frac{dB}{d\xi} - B^2 \frac{dB^*}{d\xi} - ix(A^2 + 2B^2) Ae^{ix\xi} -$$

$$\left. - 2(A^2 + B^2) C - B^2 C^* \right] d\xi.$$

Вследствие того, что уравнения (22) — (24) не допускают решения вида  $A = \text{const}$ ,  $B = \text{const}$ , их аналитическое решение в общем случае

не представляется возможным. Поэтому ограничимся рассмотрением малых превышений над порогом генерации  $\psi_0 (\psi - \psi_0 \ll 1/l)$  и воспользуемся методом возмущений, полагая

$$A = A_a + \tilde{x}(\xi), \quad B = B_a + \tilde{y}(\xi), \quad C = (C_0 + \tilde{Z}) \left( 1 + i \frac{\chi_1}{2} \right), \quad (25)$$

где  $\tilde{x}(\xi)$ ,  $\tilde{y}(\xi)$ ,  $\tilde{z}$  — малые нелинейные поправки к линейному решению, имеющему вид

$$A_a = A_0 e^{i\psi\xi}, \quad B_a = C_0 + B_0 e^{(2+i\chi_1)\xi}, \quad C_a = C_0 \left( 1 + i \frac{\chi_1}{2} \right).$$

Величина  $B_0$  имеет физический смысл амплитуды встречной волны с малым волновым числом  $\chi_1$ ,  $C_0$  — амплитуда синфазной компоненты, обусловленной модуляцией тока разряда.

Подставляя решение (25) в граничные условия (16) и исключая  $B_0$ ,  $C_0$ , найдем  $A_0^2$  и  $\delta$ . Выражения для  $A_0^2$  и  $\delta$  могут быть записаны следующим образом:

$$A_0^2 = 2\psi_0 l (\psi - \psi_0) e^{-2\psi_0 l / \mu(\psi_0)}, \quad \delta = \frac{\omega}{2\psi l} q(\psi_0) A_0^2 e^{2\psi_0 l},$$

где  $\mu(\psi_0)$  и  $q(\psi_0)$  — функции  $\psi_0$ , зависящие от параметров  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $x$ ,  $x_1$  и  $l$ . Графики функций  $\mu(\psi_0)$  и  $q(\psi_0)$  при некоторых фиксированных значениях этих параметров представлены на рис. 4. В предельных случаях: 1)  $R_i l / R \ll 1$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $q = q_0$ , где  $q_0 = \chi_2 + 4$ ,  $\mu_0 = 6(1 + a) - \chi_1$  — коэффициент самонасыщения основной ионизационной волны; 2)  $R_i l / R \gg e^{2l}$ ,  $q = 3q_0 - 3\zeta_2 - 2$ ,  $\mu = 3(\mu_0 + \zeta_1 + 12)$ . Функция  $\mu(\psi_0)$  имеет смысл эффективного коэффициента насыщения основной волны.

Из графика (рис. 4) видно, что коэффициент  $\mu(\psi_0)$  всегда больше коэффициента самонасыщения, т. е. взаимодействие основной волны с встречной волной и синфазной компонентой приводит к дополнительному пространственному затуханию основной волны. Поэтому, если имеется самонасыщение ( $\mu_0 > 0$ ), то величина  $A_0^2$  при  $\psi - \psi_0 > 0$  всегда будет положительной. Это значит, что в системе возбуждение страт будет происходить мягко. Если же самонасыщения нет ( $\mu_0 < 0$ ), то при малых  $R_i$  и  $\psi - \psi_0 > 0$   $A_0^2 < 0$ . Это означает, что для расчета стационарной амплитуды недостаточно учитывать в исходных уравнениях (5)–(7) только кубические нелинейные члены. Существование стационарной амплитуды при  $\psi - \psi_0 < 0$  (система находится ниже порога самовозбуждения) можно интерпретировать как неустойчивый предельный цикл, т. е. как возможность жесткого возбуждения колебаний. Поскольку коэффициент насыщения увеличивается с ростом  $R_i$  (см. рис. 4), то возможен переход системы от жесткого режима к мягкому при увеличении внутреннего сопротивления источника питания. Экспериментально при определенных условиях может наблюдаться как мягкий, так и жесткий режим возбуждения страт [12].

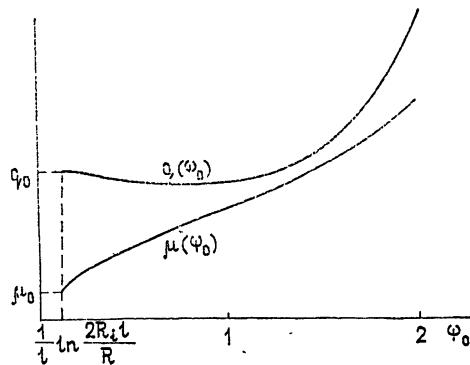


Рис. 4. Зависимость коэффициента насыщения  $\mu$  и нелинейного сдвига частоты  $\delta$  от  $\psi_0$ .

#### 4. АСИНХРОННОЕ ПОДАВЛЕНИЕ СТРАТ

Внешняя достаточно сильная модуляция тока разряда на частотах, далеких от резонанса, приводит к подавлению собственных страт [11, 13] вследствие «синхронизации гашением» [14]. Этот эффект носит пороговый характер, и здесь рассматривается задача о нахождении минимальной амплитуды внешнего воздействия, необходимой для асинхронного подавления.

Введение внешнего источника  $\tilde{\mathcal{E}} \cos \omega_1 t$  в цепь разряда (см. рис. 1) на частоте, далекой от резонанса, приводит к появлению синфазной компоненты колебаний концентрации и температуры, обусловленной модуляцией тока разряда. Влияние остальных компонент оказывается лишь вблизи границ положительного столба и обеспечивает выполнение граничных условий. Поэтому решение уравнений (4)–(6) можно искать в виде суперпозиции собственных страт и синфазной компоненты на частоте модуляции тока разряда  $\omega_1$ :

$$N(\xi, \tau) = Ae^{i(\omega\tau + \chi\xi)} + Be^{i\omega\tau} + C_2 e^{i\omega_1\tau} + \text{к. с.},$$

$$U(\xi, \tau) = \frac{i\omega}{\eta_T} [Ae^{i(\omega\tau + \chi\xi)} + Be^{i\omega\tau}] + \frac{i\omega_1}{\eta_T} C_2 e^{i\omega_1\tau} + \text{к. с.},$$

$$\tilde{j}(\tau) = Ce^{i\omega\tau} + C_1 e^{i\omega_1\tau} + \text{к. с.}$$

Связь между амплитудой вынужденных колебаний концентрации  $C_2$  и амплитудой модуляции тока  $C_1$  является частотнозависимой и дается выражением

$$C_2 = \left( 1 + i \frac{h_T \omega_1}{2\eta_T} \right)^{-1} C_1. \quad (26)$$

Вблизи границы подавления амплитуда собственных страт мала и поэтому уравнения (4)–(6) можно линеаризовать по  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\omega}{\chi} \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\omega}{\chi} \psi_a A, \quad \frac{\partial B}{\partial \xi} = \psi_b B - \psi_c C, \quad (27)$$

$$C = \frac{R}{(R_i + R)l} (1 + 2C_2^2) \left( 1 + \frac{2R}{R_i + R} C_2^2 \right)^{-1} \int_0^l B dl,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_a &= \psi + \left[ \frac{\chi}{\omega} \eta_{3n} - h_{3n} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} \left( \frac{\chi}{\omega} \eta_{n, 2T} - h_{n, 2T} \right) \right] C_2^2 - 4C_1^2 - \\ &\quad - i \chi_1 + i \left[ 2\chi + \frac{\omega}{\eta_T} \left( \frac{\chi}{\omega} \eta_{2n, T} - h_{2n, T} \right) + \frac{\omega \omega_1^2}{\eta_T^3} \left( \frac{\chi}{\omega} \eta_{3T} - h_{3T} \right) \right] C_2^2, \\ \psi_b &= 2 + \left( \eta_{3n} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} h_{3n} \right) C_2^2 + 4C_1^2 + i \chi_1 + i \frac{\omega}{\eta_T} \times \\ &\quad \times \left( \eta_{2n, T} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} h_{3T} \right) C_2^2, \\ \psi_c &= 2 + 4C_2^2, \end{aligned} \quad (28)$$

Решая краевую задачу (26), (16), получим условие подавления страт

$$\operatorname{Re} \psi_a \leq \tilde{\psi}_0 = \frac{1}{l} \ln \left| \frac{1 + \tilde{b} e^{\psi_b l}}{1 + \tilde{b}} \right|, \quad (29)$$

где

$$\tilde{b} = \psi_b \frac{R_i l}{R} \left[ 1 + \frac{R_i + R}{R_i} \left( \frac{2\psi_b}{\psi_c^2} - 1 \right) + \frac{4R}{R_i} \frac{\psi_b}{\psi_c^2} C_2^2 \right] (e^{\psi_b l} - 1)^{-1}.$$

При малых превышениях над порогом генерации, когда  $(\psi - \psi_0)l \ll 1$ , амплитуду модуляции тока можно считать малой, так что выполняется условие  $C_1^2 l \ll 1$ . В этом случае правую часть неравенства (29) можно разложить в ряд. Если  $l \gg 1$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0 \approx \psi_0 + 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{b}{1+b} \left[ \frac{1}{2} \left( h_{3n} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} h_{n,2T} \right) C_2^2 + 2C_1^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{\omega}{2\eta_T} \left( h_{2n,T} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} h_{3T} \right) C_2^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из выражений (28) и (30) видно, что модуляция тока разряда изменяет как сам коэффициент пространственного усиления страт, так и его пороговое значение. Страты будут подавлены, если коэффициент пространственного усиления  $\operatorname{Re} \psi_a$  станет меньше порогового значения  $\tilde{\psi}_0$ . При  $|b| \gg 1$  ( $R_i l / R \gg e^{2l}$ )  $\tilde{\psi}_0 \approx \psi_0 + \left[ \left( h_{3n} + \frac{\omega_1^2}{\eta_T^2} h_{n,2T} \right) C_2^2 + 4C_1^2 \right]$ , т. е. пороговое значение коэффициента усиления растет при увеличении амплитуды модуляции тока. Для подавления страт необходимо, чтобы  $\operatorname{Re} \psi_a$  росло медленнее, чем  $\psi_0$  (см. рис. 5), либо убывало. В другом, крайнем случае, когда  $|b| \ll 1$ ,  $\tilde{\psi}_0 \approx \psi_0$ , т. е. модуляция тока слабо влияет на пороговое значение коэффициента усиления. Отсюда следует, что подавление страт должно происходить легче при более высоком внутреннем сопротивлении источника питания.

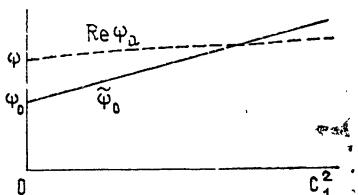


Рис. 5. Зависимость коэффициента пространственного нарастания бегущей волны  $\psi_a$  и порога самовозбуждения страт от интенсивности внешней модуляции тока разряда  $C_1^2$ .

Подставляя в (29) выражения (28), (30), найдем минимальное значение квадрата амплитуды модуляции тока, необходимое для подавления страт:

$$C_n^2 = (\psi - \psi_0) \frac{1 + (h_T \omega_1 / \eta_T)^2}{g + s \omega_1^2},$$

$$g = (4 + h_{3n}) q_1 - \frac{\kappa}{\omega} \eta_{3n} - \frac{\omega}{\eta_T} h_{2n,T} q_2,$$

$$s = (h_T^2 + h_{n,2T}) q_1 - \frac{\omega}{\omega} \eta_{n,2T} - \frac{\omega}{\eta_T} h_{3T} q_2,$$

$$q_1 = 1 + \operatorname{Re} \frac{b}{1+b}, \quad q_2 = \operatorname{Im} \frac{b}{1+b}.$$

Характер зависимости  $C_n$  от частоты модуляции  $\omega_1$  показан на рис. 6. Пунктиром помечены участки кривой вблизи резонанса, где проведенный расчет неприменим, так как в этой области под действием модуляции тока возникают стимулированные страты, не учитываемые нами в расчете.

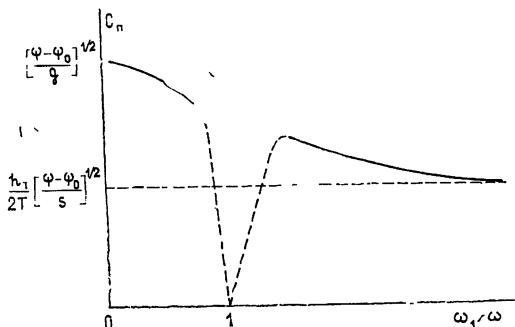


Рис. 6. Зависимость порогового значения амплитуды модуляции тока  $C_n$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Недоспасов, УФН, 94, 439 (1968).
2. Л. Пекарек, УФН, 94, 463 (1968).
3. К. Wojszak, Beitr. Plasmaphys., 2, 13 (1962); 5, 307 (1965); 6, 319 (1966).
4. Л. Д. Цендин, ЖТФ, 40, 1600 (1970).
5. П. С. Ланда, Ю. В. Пономарев, Письма в ЖТФ, 1, 759 (1975), Радиотехника и электроника, 21, 2337 (1976).
6. М. С. Горелик, Л. Д. Цендин, ЖТФ, 43, 760 (1973); 44, 1405 (1974).
7. Е. Я. Коган, О. И. Фисун, Укр. физ. ж., 18, 1104 (1973).
8. D. A. Lee and A. Garscadden, XII ICPIG, Oxford, 1971, p. 281.
9. А. В. Гапонов, М. И. Рабинович, Л. А. Островский, Изв. вузов — Радиофизика, 13, 163 (1970).
10. А. А. Зайцев, Г. С. Леонов, Радиотехника и электроника, 10, 913 (1965).
11. K. Ohe and S. Takeda, Beitr. Plasmaphys., 14, 55 (1974).
12. N. L. Oleson and A. W. Cooper, Adv. Electr. and Electron Phys., 24, 155 (1968).
13. A. A. Saitsev, W. W. Ilinsky and I. A. Savchenko, XII ICPIG, Eindhoven, 1975, p. 123.
14. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М., 1952.
15. И. П. Стаканов и др. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии, М., 1973

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30 октября 1977 г.

## IONIZATION WAVES (STRATA) IN A BOUNDARY LOW-TEMPERATURE PLASMA

P. S. Landa, Yu. V. Ponomarev, V. N. Sadovskij

Resonance properties of a positive column is considered when the induced strata are excited. The mechanism of the stationary amplitude formation is presented and conditions of the soft and rigid regimes of the proper strata excitation are obtained. Conditions of the strata suppression are investigated at the asynchronous influence on the system by the discharge current modulation. The analysis is made for the limited positive column with the use of the mode [1, 3] generally accepted.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 535.8 : 535.214.4

**ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ РАДИОМЕТР ДИАПАЗОНА ВОЛН 3—4 мм**

*А. Б. Буров, В. Н. Воронов, А. А. Красильников, В. П. Мезенцев*

Улучшение параметров смесительных диодов с барьером Шоттки позволило значительно улучшить чувствительность описанного в [1] радиометра диапазона волн 3—4 мм. Используя, с некоторыми изменениями, высокочастотную часть этого приемника, авторам удалось реализовать флуктуационную чувствительность не хуже 0,15 К при одновременном приеме по основному и зеркальному каналам и постоянной времени выходного  $RC$ -фильтра  $\tau = 1$  с. В некоторых точках диапазона чувствительность достигала 0,1 К. На рис. 1 представлена запись калибровочного сигнала от эталонной нагрузки, охлажденной до температуры кипящего азота. Усиление при записи шумовой «дорожки» было в 30 раз больше, чем при записи калибровочного сигнала.

Указанное значение чувствительности было получено прежде всего благодаря использованию арсенидо-галлиевого смесителя с малыми потерями преобразования и малошумящего усилителя промежуточной частоты (УПЧ). Потери преобразования в смесителе составили около 5 дБ. Коэффициент шума УПЧ с полосой пропускания

порядка 500 МГц имел значение 4,5—5 дБ. Малая величина потерь преобразования и сравнительно невысокая промежуточная частота (центральная частота УПЧ — около 850 МГц) привели к необходимости уделять серьезное внимание подавлению шумов гетеродина на частоте сигнала. Как известно, применяемый в тракте смесителя интерферометр Цендера — Маха является эффективным фильтром, очищающим сигнал гетеродина [2]. Однако применение одного интерферометра для подавления шумов гетеродина оказалось недостаточным. В описываемом радиометре в тракте гетеродина дополнительно использовались два фильтра, настроенные на частоту гетеродина. В качестве одного из фильтров использовался объемный резонатор, а в качестве другого — интерферометр Майельсона. Дополнительная фильтрация обеспечила подавление шумов гетеродина на частоте сигнала по крайней мере до уровня шумов УПЧ. Заметим, что малая ширина полосы пропускания частот (порядка 40 МГц по уровню половинной мощности) вышеупомянутых фильтров накладывает определенные требования на стабильность частоты сигнала гетеродина. Кроме того, форма частотной характеристики системы этих фильтров отлична от прямоугольной. Поэтому частотные флуктуации сигнала гетеродина в пределах полосы пропускания фильтров будут преобразовываться в амплитудные.

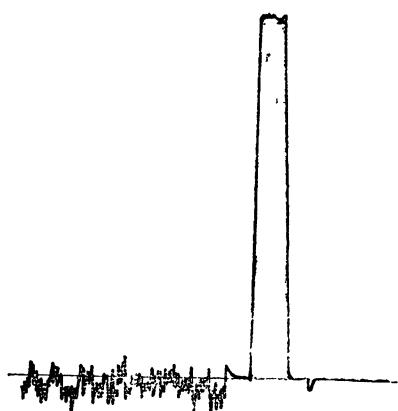


Рис. 1.

рядка 40 МГц по уровню половинной мощности) вышеупомянутых фильтров накладывает определенные требования на стабильность частоты сигнала гетеродина. Кроме того, форма частотной характеристики системы этих фильтров отлична от прямоугольной. Поэтому частотные флуктуации сигнала гетеродина в пределах полосы пропускания фильтров будут преобразовываться в амплитудные.

Отклонения частоты сигнала гетеродина вызывают также резкое изменение паразитного сигнала в радиометре. На рис. 2 представлена экспериментально снятая зависимость величины приращения паразитного сигнала  $\Delta T$  от расстройки частоты гетеродина  $\Delta f = f_0 - f$ , где  $f_0$  — частота, на которой величина паразитного сигнала равна нулю. Измерения производились на частоте гетеродина около 88 ГГц. При небольших отклонениях частоты гетеродина (меньше 1 МГц) появляется паразитный сигнал, сравнимый с предельной чувствительностью радиометра. Поэтому возникла необходимость в гетеродине с относительной нестабильностью частоты порядка  $10^{-5} \div 10^{-6}$ . В радиометре использовалась система стабилизации частоты гетеродина по кварцевому опорному сигналу [1].

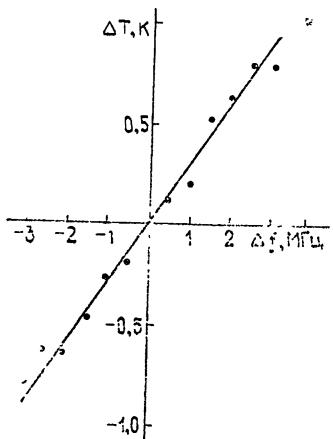


Рис. 2.

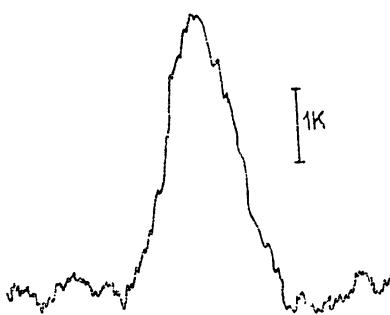


Рис. 3.

Описываемый приемник применялся в 1976—1977 гг. на РТ-22 КрАО АН СССР для наблюдения галактических и внегалактических источников. Калибровка РТ-22 производилась по излучению планет солнечной системы. На рис. 3 показана типичная запись радиоизлучения Сатурна, который сканировался при постоянной времени  $\tau = 4$  с

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Буров, В. Н. Воронов, А. А. Красильников, Н. В. Серов, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 12, 1795 (1976)
2. Ю. А. Дрягин, Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1779 (1974)

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
9 ноября 1977 г.

УДК 538.72

## О ВОЗМОЖНОСТИ КОГЕРЕНТНО-ДОПЛЕРОВСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРА РАЗМЕРОВ АЭРОЗОЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Г. Н. Глазов, С. И. Тузова

Развитие лазерных доплеровских измерителей скорости (ЛДИС) ставит вопрос о возможности разработки новых дистанционных бесконтактных методов определения спектра размеров аэрозольных частиц в турбулентных потоках. В основу таких методов может быть положено явление различного отставания частиц разных размеров от пульсаций скорости среды [1].

Будем считать турбулентность статистически однородной, изотропной и стационарной. Для дифференциального ЛДИС [2] с достаточно большой собирающей апертурой доплеровская составляющая спектра флюктуаций интенсивности излучения на детекторе запишется в виде

$$S(\omega) = \frac{\langle N \rangle}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle a^2(\rho, k_s) \cos [q \Delta r(\rho, \tau)] \rangle \cos(\omega \tau) d\tau,$$

где  $a^2(\rho, k_s)$  — интенсивность поля на детекторе от частицы радиуса  $\rho$ ,  $q = k_1 - k_2$ ,  $k_1, k_2, k_s$  — волновые векторы падающих (под малым углом  $\theta$ ) и рассеянного пучков;  $\langle N \rangle$  — среднее число частиц в объеме,  $\Delta r(\rho, \tau)$  — случайный вектор смещения частицы радиуса  $\rho$  за время  $\tau$ . Здесь, как и в [3], учтено влияние размера частицы на ее рассеивающие свойства и характеристики движения.

Поскольку временной масштаб корреляции интенсивности мал по сравнению с лагранжевым масштабом корреляции турбулентного поля скоростей [4], то плотность вероятности  $\Delta r$  равна

$$P(\Delta r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dV \int_0^{\infty} d\rho \delta [\Delta r(\rho, \tau) - V(\rho) \tau] P(V/\rho) P(\rho).$$

Как обычно [4], считаем, что скорости  $V$  частиц в турбулентном потоке распределены по гауссову закону с дисперсией  $\sigma_V^2$ . Тогда

$$S(\omega) = B \int_0^{\infty} \bar{\mu}^2(\rho, k_{s_0}) n(\rho) \frac{\exp \left[ -(\omega - \bar{\omega}_d)^2 / 2q^2 \sigma_V^2(\rho) \right]}{\sigma_V(\rho)} d\rho, \quad (1)$$

где  $\bar{\mu}(\rho, k_{s_0})$  — осредненная по пространственному углу приема индикатора рассеяния в направлении  $k_{s_0}$  к центру апертуры,  $n(\rho)$  — распределение частиц по размерам,  $\bar{\omega}_d = (q \cdot \bar{V})$  — средняя доплеровская частота.

При выводе (1) не учитывались эффекты уширения спектра за счет «конечного времени прохождения» частиц объема и броуновского движения в силу их пренебрежимости в сравнении с турбулентным уширением. Входящую в (1) функцию  $\sigma_V^2(\rho)$  можно найти, если связать лагранжевые спектры скоростей частицы  $\Phi_L(\Omega, \rho)$  и газа  $\Psi_L(\Omega)$ . Используя лагранжево стохастическое уравнение движения частицы и считая режим ее обтекания стоксовым, найдем аналогично [5], что

$$\Phi_L(\Omega, \rho) = \frac{\alpha_0^2 \Omega^2 \tau_p^2(\rho) + 1}{\Omega^2 \tau_p^2(\rho) + 1} \Psi_L(\Omega), \quad (2)$$

где  $\alpha_0 = 3\sigma/(2\sigma_s + \sigma)$ ;  $\sigma_s, \sigma$  — массовые плотности частицы и газа,  $\tau_p(\rho) = 2\sigma_s \rho^2 / 9\sigma v$  — время релаксации частицы,  $v$  — кинематическая вязкость газа.

Восстановление функции  $n(\rho)$  на основе интегрального уравнения (1) Фредгольма 1-го рода является «некорректной обратной задачей». При изучении возможности определения  $n(\rho)$  из (1) прежде всего необходимо исследование чувствительности  $S(\omega)$  к виду  $n(\rho)$  и к изменениям различных параметров задачи

Рассмотрим этот вопрос применительно к турбулентной атмосфере. Используя гипотезы подобия лагранжева и эйлерова спектров [6] и «замороженной турбулентности» [7], найдем

$$\Psi_L(\Omega) = 2\pi \frac{A}{\sigma_u} \int_{|\Omega| A/\sigma_u}^{\infty} \Psi(x) x d\Omega,$$

где  $A = 0.4 \div 1$  [6],  $\sigma_u^2$  — дисперсия скоростей среды.

Взяв пространственный спектр турбулентного поля скоростей в атмосфере  $\Psi(x)$  вида [8]

$$\Psi(x) = C_u^2 \frac{\exp(-x^2/x_m^2)}{(x^2 + x_0^2)^\alpha},$$

получаем с использованием (2)

$$\begin{aligned} \sigma_V^2(\rho) &= 2\pi C_u^2 \frac{A}{\sigma_u} \exp \left( x_0^2/x_m^2 \right) x_m^{2(1-\alpha)} \Gamma(1-\alpha) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{\alpha_0^2 \Omega^2 \tau_p^2(\rho) + 1}{\Omega^2 \tau_p^2(\rho) + 1} \left[ 1 + \frac{X^{1-\alpha}(\Omega)}{(\alpha-1)\Gamma(1-\alpha)} {}_1F_1(1-\alpha, 2-\alpha; -X(\Omega)) \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $C_u^2$  — постоянная, определяемая из соотношения [7]

$$\sigma_u^2 = 4\pi \int_0^{\infty} \Psi(x) x^2 d\Omega,$$

$$X(\Omega) = \Omega^2 A/\sigma_u^2 x_m^2 + x_0^2/x_m^2,$$

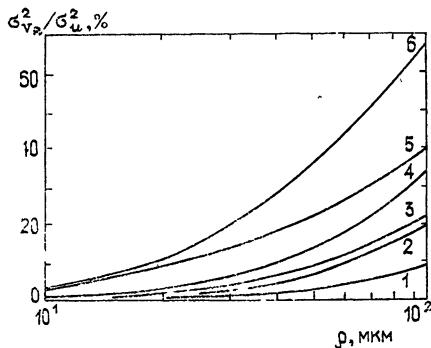
где  $x_m = 5,92/l_0$ ,  $x_0 = 1/L_0$  ( $l_0$ ,  $L_0$  — внутренний и внешний масштабы турбулентности).

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов отношения  $\sigma_{VR}^2/\sigma_u^2 = \langle (V - U)^2 \rangle / \sigma_u^2$  ( $V$ ,  $U$  — одноименные компоненты скоростей частицы и среды), характеризующего степень отставания частиц от турбулентных пульсаций (в процентах), в зависимости от радиуса частицы для различных значений [7] параметров турбулентности. С уменьшением  $A$  кривые смещаются в сторону увеличения отставания.

Рис. 1. Нормированная дисперсия относительной скорости частицы и газа

$$\sigma_{VR}^2/\sigma_u^2, \% ; A = 1;$$

1— $\sigma_u = 0,1 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 11/6$ ,  $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ; 2— $\sigma_u = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 11/6$ ,  $l_0 = 10^{-2} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ; 3— $\sigma_u = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 11/6$ ,  $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ; 4— $\sigma_u = 1 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 11/6$ ,  $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ; 5— $\sigma_u = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 10/6$ ,  $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ; 6— $\sigma_u = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $\alpha = 11/6$ ,  $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 0,1 \text{ м}$ .



На рис. 2 показан нормированный доплеровский спектр  $S(\omega)/S(\bar{\omega}_d)$  в случае полной увлечаемости частиц и при  $\rho = 100 \text{ мк}$ . Для выяснения того, насколько существенно изменение  $A$ , на рис. 2 нанесены кривые для крайних случаев  $A = 1$  и  $A = 0,4$ . Расчеты проводились при  $v = 0,157 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\sigma = 0,118 \cdot 10^{-2} \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma_s = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{U} = 10 \text{ м/с}$ ,  $\theta = 4^\circ$ ,  $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

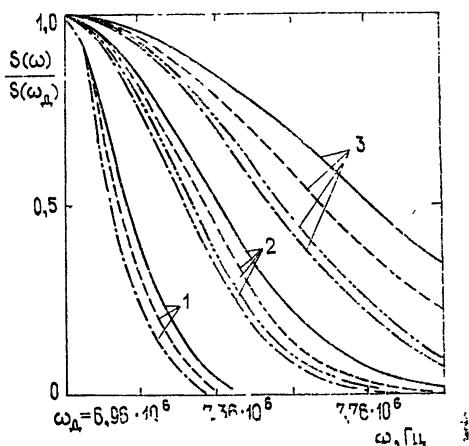


Рис. 2. Нормированный доплеровский спектр  $S(\omega)/S(\bar{\omega}_d)$  ( $l_0 = 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L_0 = 1 \text{ м}$ ):

- 1— $\sigma_u = 0,1 \text{ м/с}$ , 2— $\sigma_u = 0,5 \text{ м/с}$ , 3— $\sigma_u = 1 \text{ м/с}$ ;
- для полностью увлекаемых частиц;
- $\rho = 10^3 \text{ мк}$ ,  $\alpha = 11/6$  ( $A = 1$ );
- $\rho = 10^2 \text{ мк}$ ,  $\alpha = 10/6$  ( $A = 1$ );
- $\rho = 10^2 \text{ мк}$ ,  $\alpha = 11/6$  ( $A = 0,4$ ).

Таким образом, оценки показывают, что уменьшение ширины доплеровского спектра, по сравнению со случаем полностью увлекаемого аэрозоля, при рассеянии на частицах  $\rho = 100 \text{ мк}$  может достигать 30—50%, а для  $\rho = 10 \text{ мк}$  — всего нескольких процентов, в зависимости от метеорологической ситуации в атмосфере. С другой стороны, ошибка в определении  $\sigma_u$  по ширине  $S(\omega)$  за счет аппаратурного уширения  $\delta \lesssim 1\%$  [2]. Следовательно, «ощущимое» влияние на  $S(\omega)$  оказывают частицы с  $\rho \gtrsim 10 \text{ мк}$ . В силу слабой чувствительности  $S(\omega)$  к размерам частиц мелкодисперсного аэрозоля ( $\rho < 10 \text{ мк}$ ) решение обратной задачи по определению  $n(\rho)$  из измерений  $S(\omega)$  в условиях естественной атмосферы, в рамках принятых в данной работе ограничений, представляется пока затруднительным. Для других же типов турбулентных течений поставленная задача ожидает своего исследования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Соу, Гидродинамика многофазных систем, изд. Мир, М., 1971.
2. Б. С. Ринкевичюс, В. И. Смирнов, ПМТФ, № 4, 182 (1972).
3. А. П. Иванов, А. Я. Хайруллина, А. П. Чайковский, ЖТФ, 44, № 2, 429 (1974).
4. R. V. Edwards, J. C. Angus and J. W. Dunning, Opto-electronics, 5, 119 (1973).
5. В. Г. Левич, С. И. Кучанов, ДАН СССР, Гидромеханика, 174, № 4, 763 (1967).
6. Н. Л. Бызова, Е. К. Гаргер, Труды ИЭМ, вып. 15, 50 (1970).
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. J. W. Strohbehn, J. G. R., 75, № 6, 1067 (1970).

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
17 января 1977 г.,  
после доработки  
5 октября 1977 г.

УДК 538.574 : 530.18

**ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ  
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИМПУЛЬСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ**

E. N. Пелиновский, Ю. А. Степанянц

Представляется очевидным, что проявление нелинейных эффектов (таких, как формирование ударных волн и солитонов) возможно лишь при сравнительно больших уровнях нелинейности. Между тем, известны примеры, когда сколь угодно малое возмущение с течением времени перестает быть линейным, и для его описания необходимо учитывать нелинейность. Такая ситуация имеет место, например, для хорошо известного уравнения Кортевега—де Вриза (КдВ), решение которого для импульсного начального условия определенного знака в асимптотике описывается набором солитонов и быстроосциллирующим волновым пакетом. При этом в асимптотике всегда будет по крайней мере один солитон, как бы мала ни была амплитуда начального импульса [1]. Другой пример — затухание ударной волны (треугольного импульса) на больших расстояниях (или временах) в рамках уравнения Бюргерса: волна остается ударной, хотя ее амплитуда убывает до нуля [1]. Таким образом, необходимо указать критерий, с помощью которого можно было бы легко устанавливать характер решения в асимптотике. Целью настоящей заметки является определение такого критерия, т. е. соотношения между нелинейностью и дисперсией (дисипацией), при котором нелинейные эффекты проявляются лишь начиная с какого-то порогового уровня.

Рассмотрим сначала нелинейные волны в прозрачных диспергирующих средах. Одним из модельных уравнений для этого случая является обобщенное уравнение КдВ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^p \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \int_{-\infty}^{\infty} H(x-z) \frac{\partial^q u(z, t)}{\partial z^q} = 0, \quad (1)$$

$$H(z) = \begin{cases} \delta(z), & \text{если } q \text{ нечетно} \\ z^{-1}, & \text{если } q \text{ четно} \end{cases}.$$

Здесь  $u$  — переменная поля,  $q$  — положительные целые числа,  $p$  и  $\beta$  — произвольные константы. Уравнение (1) при  $p = 1$  и  $q = 3$  представляет собой известное уравнение КдВ, при  $p = 2$  и  $q = 3$  — модифицированное уравнение КдВ. Для этих уравнений задача Коши решается точно с помощью метода обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) [2]. Для некоторых других модификаций известны пока только стационарные решения — солитоны [3], в том числе алгебраические ( $p = 1$ ,  $q = 2$ ) [4] и осциллирующие ( $p = 1$ ,  $q = 5$ ) [5, 6]. Заметим, что с изменением  $p$  и  $q$  может кардинально меняться характер решения, в частности устойчивость солитонов и характер их взаимодействия [6, 7]. В зависимости от величин  $p$  и  $q$ , как будет показано ниже, меняются также условия, при которых возможно определение ненулевого порогового уровня проявления нелинейности.

Прежде всего, перейдем к безразмерным переменным

$$\eta = \frac{u}{U_0}, \quad \zeta = \frac{x}{L_0}, \quad \tau = \frac{U_0^p t}{L_0}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — амплитуда начального импульса,  $L_0$  — его длина. В этих переменных уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \eta^p \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \sigma_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} H(\zeta - z) \frac{\partial^q \eta}{\partial z^q} dz = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\sigma_0 = \frac{U_0^p L_0^{q-1}}{\beta} \quad (4)$$

является параметром подобия, так что эволюция импульсов одинаковой начальной формы и с одним и тем же значением  $\sigma_0$  (но разной амплитуды и длины) происходит одинаково. Из (3) видно, что решение, близкое к линейному, следует ожидать при малых  $\sigma_0$ . Поскольку по мере распространения амплитуда и длина импульса меняются, то параметр  $\sigma$ , определяемый через характерную амплитуду и длину импульса в данный момент времени, не остается постоянным. Поэтому необходимым условием близости системы к линейной является малость  $\sigma$  в любой момент времени. Определить изменение  $\sigma$  со временем, если при  $\tau = 0$   $\sigma_0 \ll 1$ , можно, используя решение линеаризованного уравнения (3). Его автомодельное решение, которое является асимптотикой для начальных импульсов с ненулевой площадью (которая, очевидно, сохраняется), имеет вид

$$\eta \sim (\sigma_0 \tau)^{-1/q} f \left[ \frac{\zeta}{(\sigma_0 \tau)^{1/q}} \right], \quad (5)$$

и, следовательно, характерная длина импульса обратно пропорциональна его амплитуде при любом  $q^*$ . Подставляя  $L \sim U^{-1}$  в (4), получаем зависимость  $\sigma$  от  $\tau$ :

$$\sigma \sim U^{p+1-q} \sim \tau^{(q-p-1)/q}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что при условии

$$q - p - 1 < 0 \quad (7)$$

параметр  $\sigma$  не растет. Это означает, что на любом участке достаточно слабого импульса при произвольном  $\tau$  нелинейный член в (3) всегда будет меньше дисперсионного и нелинейные эффекты не смогут накопиться.

Обсудим условие (7) более подробно. При квадратичной нелинейности ( $p = 1$ ) условие (7) выполняется, если  $q < 2$ . Случай  $q = 2$  реализуется для внутренних волн, распространяющихся в океане с тонким термоклином [5]; уединенные волны при этом имеют неэкспоненциальные (степенные) асимптотики — алгебраические солитоны. Таким образом, здесь нелинейность проявляется при достижении порогового значения  $U_0 \sim \beta/L_0$ . В случае же уравнения КdВ ( $p = 1, q = 3$ ) параметр  $\sigma$  растет и решение всегда переходит на нелинейный режим [1]. Аналогичная ситуация имеет место при  $p = 1/2$  и  $q = 3$ ; такое уравнение обсуждается в [6] для ионно-звуковых волн в плазме с холодными ионами и горячими неизотермическими электронами. Если нелинейность кубическая ( $p = 2$ ), то линейное приближение остается справедливым в любой момент времени при  $q \leq 3$ , т. е. в том случае и для уравнения МКдВ, точное решение которого известно [2]. Пороговое (по отношению к рождению солитона) значение амплитуды в этом случае равно  $U_0 \sim \sqrt{\beta}/L_0$ .

Полученные выводы можно пояснить на примерах, решение которых уже найдено с помощью метода ОЗТР. Действительно, как известно, для уравнения КdВ солитоны рождаются из произвольного (положительного) начального возмущения, что на языке метода ОЗТР означает существование уровней энергии для одномерного оператора Шредингера при любой (даже сколь угодно малой) потенциальной яме. Напротив, для уравнения МКдВ параметр  $\sigma$  не меняется со временем (как это следует из (7)), и, следовательно, солитоны не должны формироваться из малых начальных возмущений, для которых  $U_0 \ll \sqrt{\beta}/L_0$ . Это означает, что у одномерного оператора Дирака,

\* Отметим, что при нахождении связи между амплитудой и длиной импульса следует пользоваться законом сохранения площади, а не энергии, как это предлагается в [8], так как энергия осциллирующих хвостов за импульсом при  $\sigma_0 \ll 1$  существенно больше энергии основного импульса.

спектр которого определяет эволюцию решений уравнения МКдВ, уровни энергии существуют только при достаточно глубокой потенциальной яме. Простой расчет, проведенный в этом случае для прямоугольной ямы, показал, что уровень энергии имеется только при  $\sigma > \frac{3\pi^2}{2}$  (для солитона  $\sigma = 6$ ). Такого рода связь полученных здесь выводов с методом ОЗТР, на наш взгляд, может оказаться полезной при поиске операторов обратной задачи, поскольку одно из их свойств, а именно наличие уровня энергии при сколь угодно малой яме, определяется из проведенного выше простого анализа.

Аналогичный анализ может быть проведен для диссипативных сред без дисперсии на основе обобщенного уравнения Бюргерса. Это уравнение по виду совпадает с (1), но функция  $H(z)$  теперь выражается следующим образом:

$$H(z) = \begin{cases} \delta(z), & \text{если } q \text{ четно} \\ z^{-1}, & \text{если } q \text{ нечетно} \end{cases}.$$

Аналогично (4) вводится параметр подобия  $\sigma_0$ , имеющий смысл обобщенного числа Рейнольдса. Ясно, что при  $\sigma_0 \ll 1$  нелинейные поправки всегда малы. Обсудим более интересный случай, когда ударная волна уже сформировалась, и определим, останется ли она ударной на достаточно больших временах. Поскольку площадь импульса для  $q > 1$  при затухании сохраняется (как это следует из (1)), то его характерный масштаб снова оказывается обратно пропорционален амплитуде. Таким образом,  $\sigma \sim U^{p+1-q}$ . Отсюда видно, что если выполняется неравенство (7), то  $\sigma \rightarrow 0$ , т. е. импульс при затухании становится линейным. При выполнении обратного неравенства импульс становится все более нелинейным, несмотря на то, что его амплитуда падает. Физически это означает, что отношение ширины ударного фронта к полной ширине импульса стремится к нулю. Любопытно отметить, что обычное уравнение Бюргерса с  $p = 1$  и  $q = 2$  является в этом смысле нейтральным, для него  $\sigma$  не зависит от времени. В качестве других примеров приведем модифицированное уравнение Бюргерса ( $p = 2$ ,  $q = 2$ ):  $\sigma \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; затухание Ландау для ионно-звуковых волн [1, 10] ( $p = 1$ ,  $q = 1$ ):  $\sigma \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; затухание Брэзертонда ( $p = 1$ ,  $q = 4$ ):  $\sigma$  растет с ростом  $t$ . Кроме того, известны физические примеры, когда затухание волн пропорционально дробной степени волнового числа:  $k^{1/2}$  — для гравитационных волн на мелкой воде [10],  $k^{3/2}$  — для акустических волн в океане [11]. При этом формально  $q = 1/2$  и  $q = 3/2$  соответственно. Тогда в обоих случаях получаем, что  $\sigma \rightarrow 0$  с ростом  $t$ .

Итак, полученное здесь простое условие (7) позволяет легко классифицировать задачи по характеру их асимптотического описания и определить, является ли решение уравнения при больших временах (расстояниях) линейным или же, напротив, существенно нелинейным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
2. Э. Скотт, Ф. Чжу, Д. Маклафлин, ТИИЭР, 61, № 10, 79 (1973); см также дополнение 1 к книге Э. Скотта «Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике», изд. Сов. радио, М., 1977.
3. N. J. Zabusky, in Nonlinear partial differential equations, Academic Press Inc., N. Y., 1967.
4. H. Ono, J. Phys. Soc. Japan, 39, № 4, 1082 (1975).
5. T. Kawahara, J. Phys. Soc. Japan, 33, № 1, 260 (1972).
6. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко, ЖЭТФ, 71, № 2, 585 (1976).
7. Л. А. Островский, В. И. Ширяев, ЖЭТФ, 71, № 10, 1412 (1976).
8. Б. Б. Кадомцев, Коллективные явления в плазме, изд. Наука, М., 1976.
9. H. Schamel, J. Plasma Phys., 9, pt. 3, 377 (1973).
10. E. Ott and P. N. Sudan, Phys. Fluids, 13, № 6, 1432 (1970).
11. И. Б. Андреева, Физические основы распространения звука в океане, Гидрометеоиздат, Л., 1975.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С ДВИЖУЩЕЙСЯ В ВОЛНОВОДЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян

Рассматривается волновод произвольной односвязной формы поперечного сечения с образующими, параллельными оси  $z$ , в котором со скоростью  $v$  относительно стенок волновода движется пластина. В системе покоя пластины диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ; уравнения границ пластины с вакуумом  $z' = 0$  и  $z' = d'$ , где  $d'$  — толщина пластины. В системе наблюдения, связанной с волноводом, границы удовлетворяют уравнениям  $z = vt$  и  $z = vt + d$  ( $d = d' \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ). Пусть из вакуума (область  $z < vt$ ) на движущуюся пластину падает  $E$ -волну произвольной моды с продольной компонентой

$$E_{z0} = E_0 \psi(x, y) \exp [i(\omega_1 t + \gamma_1 z)], \quad (1)$$

где  $\psi(x, y)$  — собственная функция первой краевой задачи для поперечного сечения волновода с собственным значением  $\chi$ .

Отраженную от пластины волну ищем в виде

$$E_{z1} = E_1 \psi(x, y) \exp [i(\omega_1 t + \gamma_1 z)], \quad (2)$$

волны, преломленные в пластине, —

$$E_{z2}^\pm = E_2^\pm \psi(x, y) \exp [i(\omega_2^\pm t \mp \gamma_2^\pm z)]. \quad (3)$$

Здесь индекс (+) относится к волне, распространяющейся по оси  $z$ , индекс (-) — к волне, распространяющейся против оси  $z$ . Волну, вышедшую из пластины, ищем в виде

$$E_{z3} = E_3 \psi(x, y) \exp [i(\omega_3 t - \gamma_3 z)]. \quad (4)$$

Из условия сопряжения волн на границах получим

$$\omega_0 - \gamma_0 v = \omega_1 + \gamma_1 v = \omega_2^\pm \mp \gamma_2^\pm v = \omega_3 - \gamma_3 v \equiv \Phi. \quad (5)$$

Дисперсионные уравнения для волн, распространяющихся в вакууме,

$$\omega^2/c^2 - x^2 - \gamma^2 = 0 \quad (6)$$

и для волн в пластине —

$$\omega^2/c^2 - x^2 - \gamma^2 + (\epsilon\mu - 1) \Phi^2/c^2 (1 - \beta^2) = 0, \quad \beta = v/c. \quad (7)$$

Из (5) — (7) с учетом принципа излучения получим

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 (1 + \beta^2) - 2 v \gamma_0}{1 - \beta^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma_0 (1 + \beta^2) - 2 \beta \omega_0/c}{1 - \beta^2},$$

$$\omega_2^\pm = \frac{\Phi \pm \beta \sqrt{\epsilon\mu\Phi^2 - (1 - \beta^2)c^2x^2}}{1 - \beta^2}, \quad (8)$$

$$\gamma_2^\pm = \frac{\pm \beta \Phi + \sqrt{\epsilon\mu\Phi^2 - (1 - \beta^2)c^2x^2}}{c(1 - \beta^2)},$$

$$\omega_3 = \omega_0, \quad \gamma_3 = \gamma_0.$$

Из уравнений электродинамики движущихся сред [1] получим следующую связь между продольными ( $z$ ) и поперечными ( $\tau$ ) компонентами полей в регулярном волноводе, заполненном движущейся средой ( $\boldsymbol{v} = (0, 0, v)$ ;  $H_z = 0$ ):

$$D_z = \epsilon E_z, \quad B_z = \mu H_z = 0,$$

$$D_\tau = \frac{\epsilon}{x^2} \nabla_\tau \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$B_\tau = \frac{1}{x^2(1 - \beta^2)} \left[ \nabla_\tau \left\{ \beta (\epsilon\mu - 1) \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{c} (\epsilon\mu - \beta^2) \frac{\partial E_z}{\partial t} \right\}, \hat{z}_0 \right],$$

$$E_\tau = \frac{1}{\kappa^2(1-\beta^2)} \nabla_\tau \left[ (1 - \epsilon\mu\beta^2) \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\beta}{c} (\epsilon\mu - 1) \frac{\partial E_z}{\partial t} \right], \quad (9)$$

$$H_\tau = \frac{\epsilon}{c\kappa^2} \left[ \nabla_\tau \frac{\partial E_z}{\partial t}, \frac{\wedge}{z_0} \right]$$

$\wedge$  ( $z_0$  — орт оси  $z$ ).

Подставив (9) в граничные условия [1] при  $z = vt$  и  $z = vt + d$ , найдем амплитуды полей

$$E_1 = (\epsilon^2 \Gamma_0^2 - \Gamma_2^2) (\exp(i\gamma_2^+ d) - \exp(-i\gamma_2^- d)) M^{-1} E_0, \quad (10)$$

$$E_2^\pm = \pm 2\Gamma_0 (\epsilon\Gamma_0 \pm \Gamma_2) \exp(\pm i\gamma_2^\pm d) M^{-1} E_0,$$

$$E_3 = 4\epsilon\Gamma_0\Gamma_2 \exp(i\gamma_3 d) M^{-1} E_0,$$

где

$$M = (\epsilon\Gamma_0 + \Gamma_2)^2 \exp(i\gamma_2^+ d) - (\epsilon\Gamma_0 - \Gamma_2)^2 \exp(-i\gamma_2^- d),$$

$$\Gamma_0 = \gamma_0 - \beta \frac{\omega_0}{c}, \quad \Gamma_1 = \gamma_1 + \beta \frac{\omega_1}{c}, \quad \Gamma_2 = \sqrt{\epsilon\mu\Phi^2/c^2 - (1 - \beta^2)\kappa^2}.$$

Отражательную  $R_E$ -и пропускательную  $T_E$ -способности движущейся пластины найдем как отношения потоков энергии вектора Пойнтинга отраженной и прошедшей волн к потоку энергии падающей волны:

$$R_E = \frac{(\epsilon^2 \Gamma_0^2 - \Gamma_2^2)^2 \sin^2 \alpha}{(\epsilon^2 \Gamma_0^2 - \Gamma_2^2)^2 \sin^2 \alpha + (2\epsilon\Gamma_0\Gamma_2)^2} \frac{\omega_1\gamma_1}{\omega_0\gamma_0}, \quad (11)$$

$$T_E = \frac{(2\epsilon\Gamma_0\Gamma_2)^2}{(\epsilon^2 \Gamma_0^2 - \Gamma_2^2)^2 \sin^2 \alpha + (2\epsilon\Gamma_0\Gamma_2)^2},$$

где

$$\alpha = \frac{\Gamma_2 d}{1 - \beta^2}.$$

Аналогично решается задача и в случае падения на пластину  $H$ -волны. Выражения для отражательной  $R_H$ -и пропускательной  $T_H$ - способностей можно получить из (11), произведя замену  $\epsilon \leftrightarrow \mu$ .

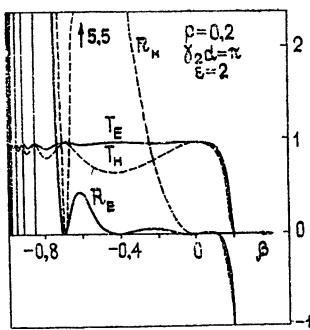


Рис. 1.

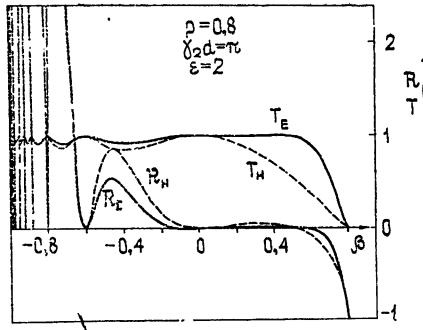


Рис. 2.

На рис. 1, 2 приведены графики зависимости отражательной и пропускательной способностей для  $E$ - и  $H$ -волн от скорости движения пластины ( $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$ ) для различных значений групповой скорости падающей волны ( $v_{\text{гро}}/c = p = 0.2; 0.8$ ). Толщина пластины выбрана из условия  $\gamma_2 d = \pi$ , где  $\gamma_2 = (\epsilon\mu\omega_0^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}$  — постоянная распространения в покоящейся пластине.

Из выражения (11) и рис. 1, 2 видно, что при  $\beta \neq 0$   $R_{E,H} + T_{E,H} \neq 1$ , равенство единице сохраняется только при  $\alpha = n\pi$ :  $R_{E,H} = 0$ ,  $T_{E,H} = 1$ . Наличие в  $\alpha$  члена

$(1 - \beta^2)^{-1}$  приводит к тому, что при  $\beta \rightarrow 1$   $R_E, n$  и  $T_E, n$  являются быстроосциллирующими функциями  $\beta$ . В случае  $\beta > 0$  при групповой скорости падающей волны  $v_{\text{гро}} < \beta c$  отсутствует взаимодействие волны с пластиной. При  $v_{\text{гро}} = \beta c$   $R_E, n = -1$ ,  $T_E, n = 0$ . При  $\beta c < v_{\text{гро}} < 2\beta c/(1 + \beta^2)$   $R_E, n$  имеют отрицательные значения, меньшие единицы. Это означает, что поток энергии отраженной волны распространяется в ту же сторону, что и поток энергии падающей волны. При  $v_{\text{гро}} = 2\beta c/(1 + \beta^2)$  частота отраженной волны равна критической  $\omega_1 = c \times$  и  $R_E, n = 0$ . В отличие от  $R_H$   $R_E$  имеет дополнительный нуль, обусловленный углом Брюстера ( $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$ ) [?]. Из рисунка видно также, что для данного  $\rho$  и  $\beta$   $R_E < R_H$ ,  $T_E > T_H$ .

При переходе к свободному пространству полученные результаты совпадают с [2-4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Изв. вузов — Радиофизика, 4, № 6, 1171 (1961).
2. С. Н. Столяров, Изв. вузов — Радиофизика, 5, № 4, 6711 (1962).
3. С. Н. Столяров, Изв. вузов — Радиофизика, 10, № 2, 284 (1967).
4. C. Yeh and K. F. Casey, Phys. Rev., 144, № 2, 665 (1966).

Поступила в редакцию  
18 октября 1977 г.