

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ, ПОКРЫТОГО ТОНКИМ СЛОЕМ ДИЭЛЕКТРИКА

Е. Н. Васильев, А. И. Гореликов, И. Г. Ефимова

Методом интегральных уравнений рассматривается осесимметричное возбуждение металлического тела вращения, покрытого тонким слоем диэлектрика. Задача сводится к интегральному уравнению первого рода относительно поверхностной плотности заряда, наведенного на теле. Сравнение с результатами, полученными методом собственных функций для сферы со слоем диэлектрика, позволяет оценить границы применимости интегрального уравнения.

Для численного решения граничных задач электродинамики с успехом применяется метод, в соответствии с которым задача сводится к интегральному уравнению обычно относительно поверхностных токов, истинных или эквивалентных. Метод интегральных уравнений достаточно подробно разработан применительно к задачам возбуждения тел вращения с идеально проводящей [1], импедансной [2] поверхностью и однородных диэлектрических тел [3]. Для тела, покрытого слоем диэлектрика, также может быть составлено интегральное уравнение относительно электрического тока на металлическом теле и эквивалентных электрического и магнитного токов на поверхности диэлектрика [4]. Это уравнение имеет три неизвестные векторные функции. Эффективное численное решение таких уравнений возможно только в случае тел относительно небольших электрических размеров. Однако, если слой диэлектрика тонок и его диэлектрическая проницаемость не сильно отличается от единицы, можно составить приближенное интегральное уравнение всего с одной неизвестной векторной функцией [5], как и в задаче возбуждения идеально проводящего или импедансного тела. В случае осесимметричного возбуждения неизвестная функция становится скалярной.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается идеально проводящее тело вращения с произвольной формой образующей, покрытое тонким слоем диэлектрика. Толщина слоя h и его диэлектрическая проницаемость ϵ могут изменяться вдоль образующей тела. Возбуждающие сторонние источники расположены в области W вне тела, рис. 1. Используется система координат вращения u, v, φ , такая, что поверхность $u = \text{const}$ совпадает с идеально проводящей поверхностью тела Σ .

Для составления интегрального уравнения воспользуемся методом, рассмотренным в работе [6] применительно к задаче определения заряда на идеально проводящем теле. Запишем полное электрическое поле в виде суммы поля тока, текущего по поверхности тела, поля тока поляризации, эквивалентного диэлектрическому покрытию, и первичного поля. Далее на некоторой вспомогательной поверхности Σ' , целиком

лежащей в области V , приравняем нулю нормальную составляющую полного электрического поля:

$$E_u(q) = 0, \quad q \in \Sigma'. \quad (1)$$

Можно показать, что условие (1) эквивалентно общепринятому граничному условию

$$E_\tau = 0 \quad \text{на } \Sigma. \quad (1')$$

В результате получим интегральное уравнение

$$\int_0^L K_1(v', v) J_v^s(v) dv + \int_{u_0}^{u_0+h} \int_v K_2(v', v) j_u^{\text{пол}}(v, u) dv du + E_u^{\text{перв}} = 0, \quad (2)$$

где J_v^s — поверхностная плотность тока, наведенного на металлической поверхности тела; $j_u^{\text{пол}}$ — плотность тока поляризации, соответствующего слою диэлектрика; $E_u^{\text{перв}}$ — поле сторонних источников; K_1 и K_2 — ядра уравнения, которые могут быть записаны через функции S_m , S_m^I и S_m^{II} [7]:

$$K_1(v', v) = i \{ \sin \theta \cos \theta' S_m + [\cos \theta \cos \theta' R' + \cos \theta \sin \theta' (z - z') + \sin \theta \sin \theta' R] (z - z') S_{m+1}^{II} + \cos \theta \sin \theta' S_{m+1}^I + \sin \theta \cos \theta' S_m^I + [-\sin \theta \sin \theta' R' - \cos \theta \cos \theta' R + \sin \theta \cos \theta' (z - z')] (z - z') S_m^{II} \}, \quad (3)$$

$$K_2(v', v) = i \{ \cos \theta \cos \theta' S_m + [-\sin \theta \cos \theta' R' - \sin \theta \sin \theta' (z - z') + \cos \theta \sin \theta' R] (z - z') S_{m+1}^{II} - \sin \theta \sin \theta' S_{m+1}^I + \cos \theta \cos \theta' S_m^I + [-\cos \theta \sin \theta' R' + \sin \theta \cos \theta' R + \cos \theta \cos \theta' (z - z')] (z - z') S_m^{II} \}.$$

Здесь θ и θ' — углы между осью z и нормальями к поверхности в точках p и q , рис. 1; z , R и z' , R' — цилиндрические координаты точек p и q ; функция S_m определяется как m -й член разложения функции Грина $e^{-i\rho/\rho}$ в ряд Фурье по координате φ , а функции S_m^I и S_m^{II} выражаются через производные от S_m по координате z . Рассматриваемому осесимметричному случаю соответствует $m = 0$. Свойства функций S_m , S_m^I , S_m^{II} и различные представления для них описаны в работе [8]; эффективный алгоритм вычисления этих функций приведен в [9].

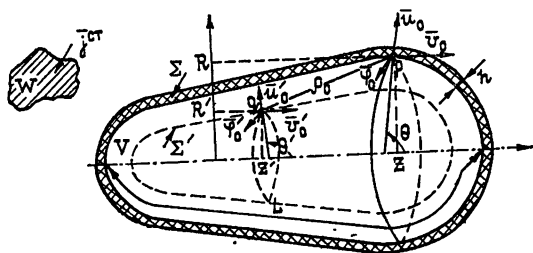


Рис. 1. К задаче возбуждения тела вращения, покрытого слоем диэлектрика.

При составлении уравнения (2) предполагается, что ток поляризации имеет только нормальную компоненту $j_u^{\text{пол}}$, а компонента $j_\tau^{\text{пол}}$ мала, и ею можно пренебречь. Это справедливо для слоя малой толщины $s \ll \epsilon$, близким к единице.

Уравнение (2) является интегральным уравнением первого рода с различными областями изменения точек наблюдения и интегрирования. В силу осевой симметрии токов и полей уравнение не содержит интеграла по азимутальной координате, который вычисляется явно.

В (2) и далее все линейные размеры полагаются умноженными на волновое число свободного пространства $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

Интегральное уравнение (2) содержит две неизвестные функции — поверхностную плотность продольного тока $J_v(v)$ и плотность тока поляризации $j_u^{пол}(v)$. Однако эти токи не являются независимыми. Ток поляризации простым образом связан с нормальной компонентой поля \bar{E} , т. е. с зарядом. В свою очередь продольная составляющая электрического тока связана с зарядом уравнением непрерывности, которое в системе координат u, v, φ для осесимметричного возбуждения имеет вид [6]

$$\frac{\partial}{\partial v} [R(v) J_v(v)] = -i \frac{\sigma(v)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} R(v), \quad (4)$$

где $R(v)$ — радиус точки p в цилиндрической системе координат, рис. 1.

Таким образом, интегральное уравнение (2) можно записать относительно одной неизвестной функции — поверхностной плотности заряда, наведенного на теле,

$$\int_0^L T(v', v) \tilde{\sigma}(v) dv = -E_u^{перв}, \quad (5)$$

где $\tilde{\sigma}(v) = \frac{\sigma(v)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, $\sigma(v)$ — поверхностная плотность заряда, ядро $T(v', v)$ имеет вид

$$T(v', v) = i \left[- \int_0^v K_1(v', v) dv + \frac{\epsilon(v) - 1}{\epsilon(v)} h(v) K_2(v', v) \right] R(v). \quad (6)$$

При переходе от уравнения (2) к уравнению (5) интеграл по координате u во втором слагаемом в (2) вычислен приближенно, в предположении, что подынтегральная функция по толщине слоя постоянна. Это справедливо для малых h/λ_0 и ϵ , не сильно отличающихся от единицы.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Решение интегрального уравнения (5) может быть получено путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений высокого порядка по аналогии с тем, как это делалось для уравнений второго рода [1]. Однако решение интегральных уравнений 1-го рода есть некорректная задача, и в этом случае требуется применение методов регуляризации. В настоящей работе используется метод «саморегуляризации», в котором ядро интегрального уравнения выбирается таким, чтобы матрица системы линейных алгебраических уравнений имела ярко выраженную диагональ.

Диагональные элементы матрицы определяются, в основном, поведением ядер при малых расстояниях ρ_0 между точками p и q . Рассмотрим поведение слагаемых K_1 и K_2 , входящих в ядро интегрального уравнения (5), при малых ρ_0 . Поведение K_1 и K_2 определяется функцией S_m и ее производными [3]; при $\rho_0 \rightarrow 0$ функция $\text{Re } S_m$ имеет логарифмическую особенность, а $\text{Im } S_m$ является гладкой.

Предварительный анализ, основанный на исследовании асимптоти-

ки функций S_m , S_m^I и S_m^{II} , показывает, что поведение K_1 и K_2 слабо зависит от вида поверхности Σ . В качестве примера на рис. 2 приводятся графики мнимых частей $K_1(v', v)$ и $K_2(v', v)$ для цилиндрической поверхности радиуса $R=2,0$ при трех расстояниях ΔS между поверхностями Σ и Σ' : $\Delta S = 0,1; 0,2; 0,3$. Действительные части являются функциями гладкими, и не они определяют поведение ядер интегрального уравнения при $\rho_0 \rightarrow 0$. Функция K_1 нечетна относительно $v - v'$, но в ядро входит интеграл $\int_0^v K_1(v', v) dv$; таким образом, первое слагаемое в ядре является функцией четной с положительным экстремумом. При решении задачи возбуждения тела без слоя только оно определяет поведение ядра. Функция K_2 является четной относительно $v - v'$ и имеет ярко выраженный экстремум. Величины K_1 и K_2 в максимуме можно существенно изменять, варьируя расстояние ΔS между поверхностями Σ и Σ' . Таким образом, оба слагаемых в ядре (6) четны и имеют ярко выраженный экстремум, величина которого растет при сближении точек p и q .

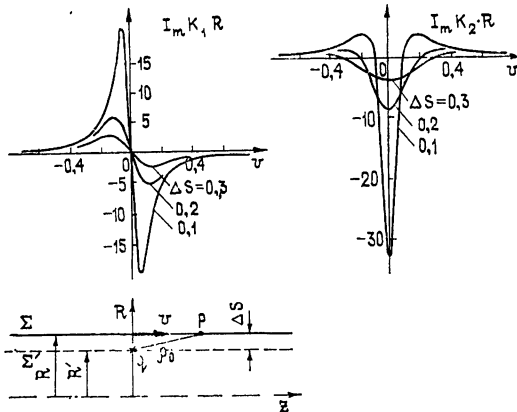


Рис. 2. Ядра K_1 и K_2 на цилиндрической поверхности: $v' = 0$; $R = 2,0$; $R' = 1,9; 1,8; 1,7$.

В случае возбуждения тела без слоя поведение K_1 обеспечивает «саморегуляризацию» вычислительного процесса. Если на поверхности тела задан слой диэлектрика толщиной h с диэлектрической проницаемостью ϵ , то в ядре (6) интегрального уравнения появляется дополнительное слагаемое, изменяющее диагональные свойства матрицы. Степень этого изменения определяется характером составляющей K_2 и коэффициентом

$$\alpha = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} h. \quad (7)$$

Если идеально проводящее тело покрыто слоем диэлектрика с $\text{Re } \epsilon > 1$, $\text{Im } \epsilon = 0$, то величина диагональных элементов матрицы уменьшается, что при больших значениях α может привести к ошибке в решении уравнения. Если же тело покрыто тонким слоем плазмы ($\text{Re } \epsilon < 1,0$), то диагональные элементы матрицы возрастают и решение уравнения в этом случае выполняется с достаточной точностью.

Ниже на основе конкретных расчетов оценивается влияние ϵ и h на точность результатов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Интегральное уравнение (5) выведено в предположении малой толщины слоя и диэлектрической проницаемости, близкой к единице, и в этом смысле является приближенным. Уравнение будет точным, если слой отсутствует; оно переходит в уравнение для заряда на теле

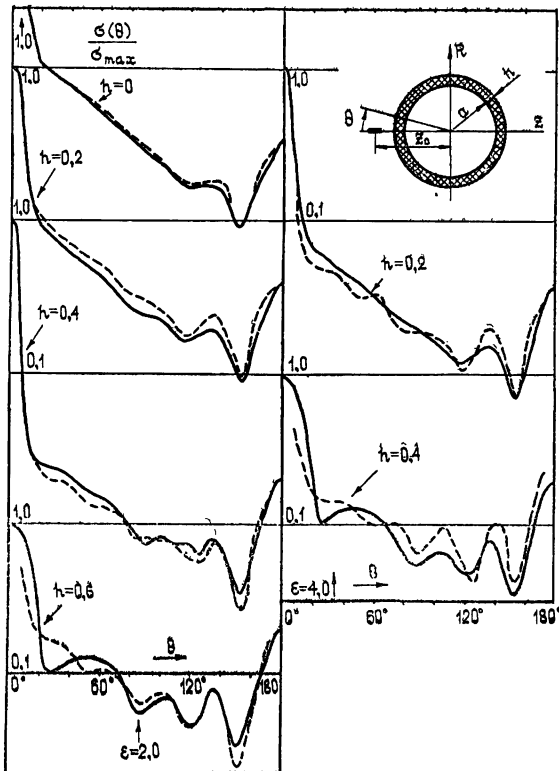


Рис. 3. Распределение поверхностной плотности заряда на металлической поверхности сферы, покрытой слоем диэлектрика: $\epsilon = 2,0$ —левые графики; $\epsilon = 4,0$ —правые графики; радиус сферы $a = 4,0$; радиальный диполь—на оси z , $z_0 = 5,0$; сплошная линия—метод ИУ, пунктир—МСФ.

вращения, полученное в работе [6]. Для определения границ применимости уравнения (5) проведена серия расчетов распределения поверхностной плотности заряда на сфере, покрытой слоем диэлектрика с различными ϵ и h . Результаты сравнивались с расчетами по методу собственных функций [10]. На рис. 3, 4, 5 приведены заряды и токи, полученные с использованием интегрального уравнения (ИУ) и метода собственных функций (МСФ). Геометрия задачи изображена на рис. 3. Сфера радиуса $a = 4,0$ возбуждалась радиальным диполем, лежащим на оси z на расстоянии $\Delta z = 1,0$ от металлической поверхности сферы. Толщина диэлектрического слоя h изменялась от 0 до 0,6 с шагом 0,2; $\epsilon = 2,0; 4,0; 0,6; 0,8$. Графики распределения поверхностной плотности заряда и тока пронормированы, и единичный уровень каждой кривой для удобства смещен на одну декаду.

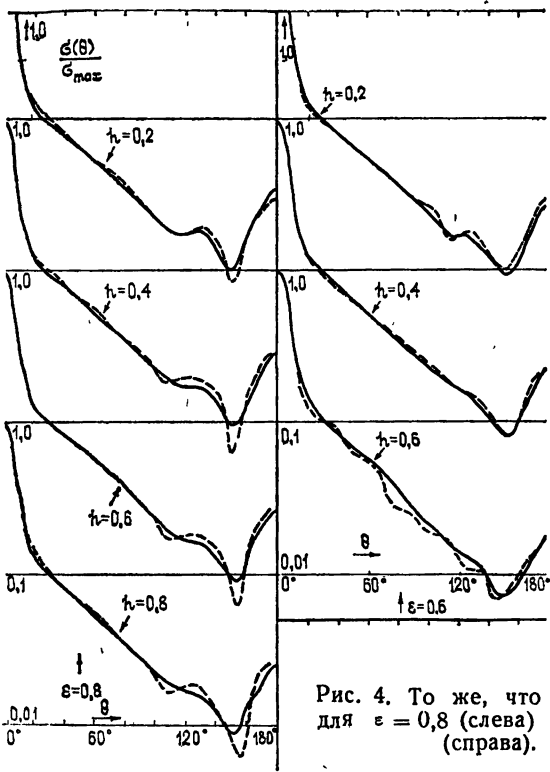


Рис. 4. То же, что и рис. 3, для $\epsilon = 0,8$ (слева) и $\epsilon = 0,6$ (справа).

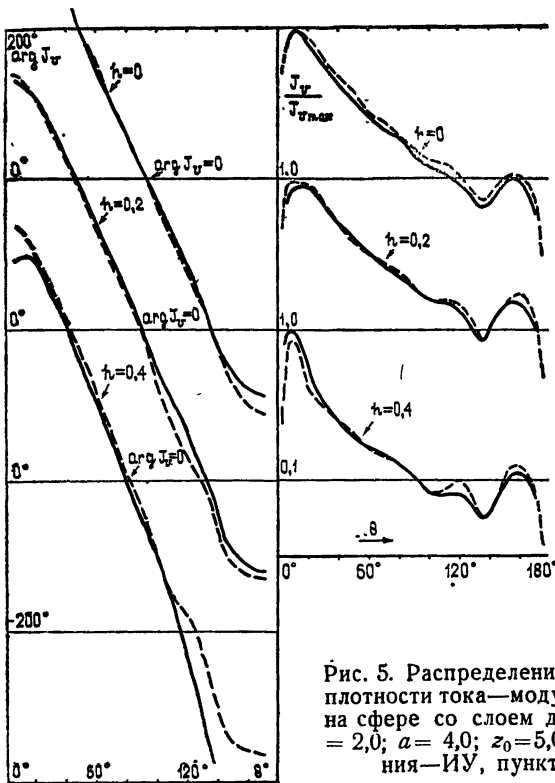


Рис. 5. Распределение поверхностной плотности тока—модуль и аргумент—на сфере со слоем диэлектрика; $\epsilon = 2,0$; $a = 4,0$; $z_0 = 5,0$: сплошная линия—ИУ, пунктир—МСФ.

Из полученных результатов можно определить параметры слоя, при которых интегральное уравнение обеспечивает заданную точность вычисления. При $\varepsilon > 1$, рис. 3, ошибка в вычислении заряда нарастает быстрее с увеличением толщины или ε -слоя, чем при $\varepsilon < 1$, рис. 4. Критерием применимости интегрального уравнения может служить параметр α (см. (7)). Хорошее совпадение распределений зарядов, посчитанных двумя методами, наблюдается при $|\alpha| < 0,3 \div 0,4$.

По распределениям поверхностной плотности заряда легко могут быть вычислены распределения поверхностной плотности тока и поля в дальней зоне. На рис. 5 приведены поверхностные токи (модуль и аргумент) для некоторых характерных случаев. Поверхностная плотность тока получена в результате интегрирования заряда в соответствии с уравнением непрерывности (4). Вычисленные таким образом токи хорошо совпадают с результатами, полученными методом собственных функций.

Получено приближенное интегральное уравнение первого рода для задачи возбуждения тела вращения с тонким слоем диэлектрика. Уравнение записано относительно поверхностной плотности заряда. Толщина слоя и его диэлектрическая проницаемость могут изменяться вдоль образующей тела вращения.

Численные результаты расчетов для сферы приводятся для оценки точности решения интегрального уравнения и носят методический характер. Предложенный метод решения и разработанный алгоритм позволяют рассматривать задачи возбуждения тел вращения со слоем диэлектрика с произвольной формой образующей. Этим методом решены задачи возбуждения металлического конуса и некоторых других тел, покрытых тонким слоем диэлектрика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Васильев, Изв. вузов — Радиофизика, 2, № 4, 588 (1959).
2. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малужков, А. А. Фалуни, ЖТФ, 37, № 3, 431 (1967).
3. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, ЖТФ, 35, № 10, 1817 (1965).
4. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 8, 1250 (1971).
5. Е. Н. Васильев, А. И. Гореликов, И. Г. Ефимова, VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению радиоволн, Краткие тексты докладов, т. 2, 1977, стр. 186.
6. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 929 (1971).
7. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малужков, А. А. Фалуни, ЖТФ, 37, № 3, 421 (1967).
8. Е. Н. Васильев, Журнал вычислительной математики и математической физики, 5, № 5, 841 (1965).
9. И. Н. Антипов, А. И. Гореликов, Вычисление функции Грина кольцевого источника, М., ВЦ АН СССР, Алгоритмы и алгоритмические языки, вып. 6, 1973, стр. 15.
10. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967, стр. 376.

AXISYMMETRIC EXCITATION OF AN PERFECTLY CONDUCTIVE BODY OF
REVOLUTION COVERED BY A THIN DIELECTRIC LAYER

E. N. Vasil'ev, A. I. Gorelikov, I. G. Efimova

Axisymmetric excitation of a metal body of revolution covered by a thin dielectric layer is considered by the method of integral equation. The problem is reduced to the integral equation of the first kind relative to the surface charge density on the body. Comparison with results obtained by the method of the eigen function for a sphere with the dielectric layer permits to estimate boundaries of application of the integral equation.
