ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1978

УДК 538.574

ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ В ДВИЖУЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Г. Ф. Глинский

В общем виде исследуется вопрос о распространении электромагнитных волн в движущихся анизотропных средах. Обсуждаются свойства материального тензора Тамма — Мандельштама, а также его связь с тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Определены достаточные условия отсутствия двулучепреломления в движущейся среде с произвольной анизотропией. В качестве примера рассматриваются электромагнитные волны в равномерно движущейся изотропной среде и в гравитационном поле.

Интерес к электродинамике движущихся сред в последние годы значительно возрос, о чем свидетельствует все увеличивающееся число работ по данному вопросу (см. обзор Болотовского и Столярова [1], где приведена подробная библиография). В большинстве своих исследований авторы используют предложенную Таммом и Мандельштамом [2] инвариантную форму записи материальных уравнений, в которой свойства движущейся среды полностью определяются тензором четвертого ранга ε^{iklm} (материальным тензором). Несмотря на то, что эта форма записи является общепринятой, единого мнения относительно симметрии материального тензора и связи его с тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей в настоящее время нет. Достаточно отметить работы [2–11], в которых использованы различные выражения для материального тензора и в ряде случаев [6, 7, 11] получены несовпадающие результаты.

Вопросы, связанные с двулучепреломлением в движущихся анизотропных средах, также недостаточно изучены. По существу только в работе [2] была предпринята попытка в самом общем случае определить необходимые и достаточные условия отсутствия двулучепреломления в движущейся анизотропной среде. Однако эти результаты не подтверждаются данными работ [12–14], в которых было показано, что достаточным условием отсутствия двулучепреломления является пропорциональность в рассматриваемой точке тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей.

В настоящей работе определены достаточные условия отсутствия двулучепреломления для произвольно движущихся безграничных анизотропных сред. Найденные соотношения являются естественным обобщением результатов, полученных в [12–14]. Нами принята естественная симметрия материального тензора, аналогичная той, которая была использована для описания свойств гиротропных сред в [9], и отличающаяся от симметрии тензора Тамма — Мандельштама [2]. Применение развитого метода к частным случаям распространения электромагнитных волн в равномерно движущейся изотропной среде и в гравитационном поле позволило последовательно и в более общем виде получить ранее известные результаты [1, 2, 12–14].

1. МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СВОЙСТВА МАТЕРИАЛЬНОГО ТЕНЗОРА

Для простоты мы ограничимся рамками специальной теории относительности и будем использовать галилееву систему координат, в которой $g_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$. Однако не представляет труда перенести полученные результаты на случай произвольных 4-координат и риманова пространства (см. разд. 3).

В общем случае предполагается, что рассматриваемая среда неоднородна, а скорость ее переноса зависит от координат и времени.

Уравнения Максвелла в среде в отсутствие источников поля имеют вид

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x^k}(e^{iklm} F_{lm}) = 0. \tag{1}$$

Здесь e^{iklm} — символ Леви—Чивиты, а индексы i, k, l ... пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Для линейной среды без дисперсии связь тензора индукции H^{ik} с тензором напряженности поля F_{ik} может быть представлена как*

$$H^{ik} = \varepsilon^{iklm} F_{lm}. \tag{2}$$

Если принять во внимание, что $H^{ik} = -H^{ki}$, $F_{ik} = -F_{ki}$, а диэлектрическая и магнитная проницаемости неподвижной среды, для которой уравнение (2) также справедливо, являются симметричными 3-тензорами, то мы приходим к выводу, что естественной симметрией материального тензора является следующая:

$$\varepsilon^{iklm} = -\varepsilon^{kilm} = -\varepsilon^{ikml} = \varepsilon^{lmik}. \tag{3}$$

Число независимых компонент этого тензора равняется 21.

Введем тензор μ_{iklm}, обратный ε^{iklm},

$$\varepsilon^{iklm} \mu_{lmnp} = \delta^{ik}_{np}, \tag{4}$$

где

$$\delta^{ik}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_l \delta^k_m - \delta^i_m \delta^k_l\right). \tag{5}$$

Тогда

$$F_{ik} = \mu_{iklm} H^{lm}. \tag{6}$$

В общем случае произвольно движущейся неоднородной среды ε^{iklm} и μ_{iklm} являются функциями координат и времени. В вакууме они должны быть заменены соответственно на тензоры

$$g^{iklm} = \frac{1}{2}(g^{il} g^{km} - g^{im} g^{kl}) \tag{7}$$

и

$$g_{iklm} = \frac{1}{2}(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}). \tag{8}$$

Если $\varepsilon^{iklm} = \mathrm{const}$, то уравнения (1) и (2) эквивалентны следующей системе уравнений второго порядка:

---

* Вопросы, связанные с наличием дисперсии в неоднородных анизотропных, а также движущихся средах, рассматривались в [1, 15].

$$\varepsilon^{iklm} \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{9}$$

Подставляя в (1) $F_{ik} = \partial A_k/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^k$, получим уравнение для потенциалов

$$\varepsilon^{iklm} \frac{\partial^2 A_m}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{10}$$

Дальнейший анализ более удобно проводить в трехмерной форме*. Для этого определим следующие трехмерные величины**:

$$\begin{aligned}
&E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad B_\alpha = -\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \\
&D_\alpha = -H^{0\alpha}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma}, \\
&\varepsilon_{\alpha\beta} = -2\,\varepsilon^{0\alpha0\beta}, \quad \chi_{\alpha\beta} = e_{\beta\gamma\sigma}\,\varepsilon^{0\alpha\gamma\sigma}, \\
&(1/\mu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\sigma} e_{\beta\lambda\rho}\, \varepsilon^{\gamma\sigma\lambda\rho}, \\
&(1/\varepsilon)_{\alpha\beta} = -2\,\mu_{0\alpha0\beta}, \quad \theta_{\alpha\beta} = e_{\beta\gamma\sigma}\,\mu_{0\alpha\gamma\sigma}, \\
&\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\sigma} e_{\beta\lambda\rho}\, \mu_{\gamma\sigma\lambda\rho}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, $e_{\alpha\beta\gamma}$ — трехмерный символ Леви—Чивиты. Очевидны следующие свойства 3-тензоров: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$, $(1/\varepsilon)_{\alpha\beta} = (1/\varepsilon)_{\beta\alpha}$ и $(1/\mu)_{\alpha\beta} = (1/\mu)_{\beta\alpha}$.

Запишем материальные уравнения (2) и (6) в трехмерной форме:

$$\begin{aligned}
&D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta + \chi_{\alpha\beta} B_\beta, \\
&H_\alpha = -\chi_{\beta\alpha} E_\beta + (1/\mu)_{\alpha\beta} B_\beta;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&E_\alpha = (1/\varepsilon)_{\alpha\beta} D_\beta - \theta_{\alpha\beta} H_\beta, \\
&B_\alpha = \theta_{\beta\alpha} D_\beta + \mu_{\alpha\beta} H_\beta.
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, 4-тензоры четвертого ранга ε^{iklm} и μ_{iklm} разбиваются на совокупность четырех 3-тензоров второго ранга. Если ввести блочные матрицы

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & \chi \\ \hline -\tilde{\chi} & (1/\mu) \end{array}\right), \qquad Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} (1/\varepsilon) & -\theta \\ \hline \tilde{\theta} & \mu \end{array}\right), \tag{14}$$

где каждый из блоков является матрицей 3×3 с соответствующими элементами ($\tilde{\chi}$ и $\tilde{\theta}$ — транспонированные матрицы), то мы приходим к известному матричному представлению материальных уравнений [9, 16–18]:

$$\begin{pmatrix} D \\ H \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} D \\ H \end{pmatrix}. \tag{15}$$

---

* Это связано с тем, что только шесть уравнений из восьми в системе (1) являются независимыми

** Так как метрика евклидова, то нет необходимости различать ко- и контрвариантные компоненты 3-тензоров.

Для покоящихся сред ($\chi_{\alpha\beta}=0$, $\theta_{\alpha\beta}=0$) 3-тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ и $(1/\varepsilon)_{\alpha\beta}$, $(1/\mu)_{\alpha\beta}$ переходят в обычные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей и величины, обратные им. Однако для движущихся сред эти тензоры уже не являются обратными.

Если скорость движения исследуемой среды не зависит от координат и времени, то соответствующими преобразованиями 4-координат матрицы Q и Q^{-1} могут быть приведены к квазидиагональному виду ($\chi_{\alpha\beta}=0$, $\theta_{\alpha\beta}=0$) во всем пространстве, т. е. можно перейти к системе отсчета, в которой среда покоится как целое. В общем же случае произвольно движущейся среды это можно сделать локально в любой точке 4-пространства.

Соотношения (4) в трехмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\alpha\beta}(1/\varepsilon)_{\beta\gamma}+\chi_{\alpha\beta}\theta_{\gamma\beta}=\delta_{\alpha\gamma},\\ &\mu_{\alpha\beta}(1/\mu)_{\beta\gamma}+\theta_{\beta\alpha}\chi_{\beta\gamma}=\delta_{\alpha\gamma},\\ &\varepsilon_{\alpha\beta}\theta_{\beta\gamma}-\chi_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}=0,\\ &(1/\varepsilon)_{\alpha\beta}\chi_{\beta\gamma}-\theta_{\alpha\beta}(1/\mu)_{\beta\gamma}=0. \end{aligned} \tag{16}$$

Из компонент тензоров ε^{iklm} и μ_{iklm} можно составить следующие релятивистские инварианты:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{iklm}g_{iklm}=\varepsilon_{\alpha\alpha}+(1/\mu)_{\alpha\alpha}=\mathrm{inv},\\ &\mu_{iklm}g^{iklm}=(1/\varepsilon)_{\alpha\alpha}+\mu_{\alpha\alpha}=\mathrm{inv},\\ &\varepsilon^{iklm}e_{iklm}=\chi_{\alpha\alpha}=\mathrm{inv},\\ &\mu_{iklm}e^{iklm}=\theta_{\alpha\alpha}=\mathrm{inv}. \end{aligned} \tag{17}$$

Два последних из них являются псевдоскалярами.

Интересно отметить, что совокупность 3-тензоров $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $(1/\mu)_{\alpha\beta}$ и $\chi_{\alpha\beta}$ можно объединить в один комплексный 3-тензор:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+(1/\mu)_{\alpha\beta}-i(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}), \tag{18}$$

аналогично тому, как напряженности электрического и магнитного полей могут быть объединены в один комплексный вектор [19]. При этом четырехмерные преобразования тензора ε^{iklm} будут эквивалентны трехмерным комплексным поворотам, производимым над тензором $\sigma_{\alpha\beta}$.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Выпишем шесть независимых уравнений системы (1):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(e_{\alpha\beta\gamma}H_{\gamma})=\frac{\partial D_{\alpha}}{\partial x^{0}},\\ &\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(e_{\alpha\beta\gamma}E_{\gamma})=-\frac{\partial B_{\alpha}}{\partial x^{0}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Будем рассматривать электромагнитные волны в среде, для которых волновой вектор и частота удовлетворяют условиям $|k_{\alpha}|\gg|\partial\varepsilon^{iklm}/\partial x^{\alpha}|$ и $\omega\gg|\partial\varepsilon^{iklm}/\partial x^{0}|$. Ищем решение системы (19) в следующем виде [17]:

$$H_{\alpha},E_{\alpha},D_{\alpha},B_{\alpha}\sim e^{i(k_{\alpha}x^{\alpha}-k_{0}x^{0})}=e^{ik_{0}(n_{\alpha}x^{\alpha}-x^{0})}, \tag{20}$$

где $k_0=\omega/c$, $n_{\alpha}=k_{\alpha}/k_0$. Подставляя (20) в (19), получим

$$n_\beta (e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma) = -D_\alpha,$$
$$n_\beta (e_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma) = B_\alpha. \qquad (21)$$

Для того, чтобы найти D_α и B_α как функции напряженностей поля, введем 3-тензоры $\rho_{\alpha\beta}$ и $\omega_{\alpha\beta}$, обратные $(1/\varepsilon)_{\alpha\beta}$ и $(1/\mu)_{\alpha\beta}$,

$$\rho_{\alpha\beta} (1/\varepsilon)_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma},$$
$$\omega_{\alpha\beta} (1/\mu)_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \qquad (22)$$

Из (12), (13) и (16) следует

$$D_\alpha = \rho_{\alpha\beta} E_\beta + \nu_{\alpha\beta} H_\beta,$$
$$B_\alpha = \nu_{\beta\alpha} E_\beta + \omega_{\alpha\beta} H_\beta, \qquad (23)$$

где $\nu_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\gamma} \theta_{\gamma\beta} = \omega_{\beta\gamma} \chi_{\alpha\gamma}$. Необходимо отметить, что введенные таким образом 3-тензоры $\rho_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$ и $\nu_{\alpha\beta}$, вообще говоря, не являются компонентами какого-либо 4-тензора.

Подстановка (23) в (21) приводит к следующим уравнениям:

$$(n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} - \nu_{\alpha\gamma}) H_\gamma = \rho_{\alpha\gamma} E_\gamma,$$
$$(n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} + \nu_{\gamma\alpha}) E_\gamma = -\omega_{\alpha\gamma} H_\gamma. \qquad (24)$$

Или, исключая H_γ, будем иметь

$$[\rho_{\alpha\lambda} - (n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} - \nu_{\alpha\gamma})(n_\sigma e_{\sigma\lambda\eta} - \nu_{\lambda\eta})(1/\mu)_{\eta\gamma}] E_\lambda = 0. \qquad (25)$$

Если оределитель этой системы приравнять нулю, то мы получим уравнение поверхности волновых векторов — уравнение Френеля [20]. В любой точке пространства для заданного направления $\boldsymbol{n}$ это уравнение четвертого порядка относительно показателя преломления $n = |\boldsymbol{n}|$ (члены шестой степени взаимно сокращаются). Двулучепреломление будет отсутствовать, если поверхность волновых векторов двукратно вырождена, т. е. уравнение Френеля распадается на два одинаковых уравнения второго порядка*.

Покажем, что двулучепреломление в рассматриваемой точке будет отсутствовать, если локально выполняются следующие условия:

$$\omega_{\alpha\beta} = a \rho_{\alpha\beta},$$
$$\nu_{\alpha\beta} = -\nu_{\beta\alpha}, \qquad (26)$$

где a — некоторая постоянная**. Действительно, только в этом случае определитель системы (25) можно представить как

$$\det | \rho_{\alpha\lambda} - (n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} - \nu_{\alpha\gamma})(n_\sigma e_{\sigma\lambda\eta} - \nu_{\lambda\eta})(1/a)(1/\varepsilon)_{\eta\gamma} | =$$
$$= (1/a)^3 [\det | \sqrt{a}\, \rho_{\alpha\gamma} + i (n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} - \nu_{\alpha\gamma}) |]^2 \det | (1/\varepsilon)_{\alpha\beta} |. \qquad (27)$$

* Следует отметить, что при скоростях среды, превышающих скорость света в данной среде, даже в отсутствие двулучепреломления будут существовать такие направления $\boldsymbol{n}$, вдоль которых могут распространяться две волны с различной фазовой скоростью [1]. Однако в противоположность двулучепреломлению они не могут быть возбуждены одновременно одной плоской волной, падающей на данную среду из вакуума.

** Для покоящихся сред из (26) следует известный результат, согласно которому, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей должны быть пропорциональны друг другу [12, 13].

При этом уравнение поверхности волновых векторов будет иметь вид

$$\det \mid \sqrt{a}\, \rho_{\alpha\gamma} + i e_{\beta\alpha\gamma} (n_\beta - c_\beta) \mid = 0, \tag{28}$$

где мы ввели вектор $c_\alpha = (1/2)\, e_{\alpha\beta\gamma}\, \nu_{\beta\gamma}$, дуальный тензору $\nu_{\alpha\beta}$.

Нетрудно видеть, что условия отсутствия двулучепреломления (26) совпадают с условиями, при которых электромагнитное поле в среде может быть описано с помощью одного комплексного вектора $F_\alpha = E_\alpha + i\sqrt{a}\, H_\alpha$. Подставляя (26) в (24), умножая второе уравнение на $i/\sqrt{a}$ и складывая его с первым, получим

$$\left[\sqrt{a}\, \rho_{\alpha\gamma} + i (n_\beta e_{\beta\alpha\gamma} - \nu_{\alpha\gamma})\right] F_\gamma = 0. \tag{29}$$

Условие разрешимости этой системы эквивалентно уравнению (28).

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ И В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Пусть изотропная среда движется вдоль оси x^1 со скоростью v. Компоненты материального тензора такой среды могут быть получены с помощью преобразований Лоренца:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \varepsilon_0\,; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\varepsilon_0 - (1/\mu_0)(v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}\,, \\
(1/\mu)_{11} = 1/\mu_0\,, \quad (1/\mu)_{22} = (1/\mu)_{33} = \frac{1/\mu_0 - \varepsilon_0 (v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}\,, \\
\chi_{23} = -\chi_{32} = \frac{(1/\mu_0 - \varepsilon_0)(v/c)}{1 - v^2/c^2}\,, \quad \mu_{\alpha\beta} = (\mu_0/\varepsilon_0)\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,, \\
(1/\varepsilon)_{\alpha\beta} = (\mu_0/\varepsilon_0)(1/\mu)_{\alpha\beta}\,, \quad \theta_{\alpha\beta} = (\mu_0/\varepsilon_0)\,\chi_{\alpha\beta}\,.
\end{gathered} \tag{30}$$

Здесь ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости неподвижной среды. Эти тензоры совпадают с соответствующими элементами матриц в [16, 17] и с альтернированной частью материального тензора Рязанова [3]. Можно показать, что соотношения (30) совместно с уравнениями (12) и (13) эквивалентны известным уравнениям Минковского для движущихся сред.

Так как $\omega_{\alpha\beta} = (\mu_0/\varepsilon_0)\,\rho_{\alpha\beta}$ и $\nu_{\alpha\beta} = -\nu_{\beta\alpha}$, то двулучепреломление отсутствует и уравнение Френеля, согласно (28), принимает вид

$$\rho_{11} (n_1 - c_1)^2 + \rho_{22} n_2^2 + \rho_{33} n_3^2 - (\mu_0/\varepsilon_0)\, \rho_{11} \rho_{22} \rho_{33} = 0, \tag{31}$$

где

$$\begin{gathered}
\rho_{11} = \varepsilon_0\,, \quad \rho_{22} = \rho_{33} = \frac{\varepsilon_0 (1 - v^2/c^2)}{1 - \varepsilon_0 \mu_0 (v^2/c^2)}\,, \\
c_1 = -\frac{(\varepsilon_0 \mu_0 - 1)(v/c)}{1 - \varepsilon_0 \mu_0 (v^2/c^2)}\,.
\end{gathered} \tag{32}$$

Это соотношение находится в полном согласии с известным законом дисперсии для плоских волн в движущейся изотропной среде [1].

В гравитационном поле мы должны положить $\varepsilon^{iklm} = g^{iklm}$ и $\mu_{iklm} = g_{iklm}$. Введем следующие трехмерные величины:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}/\sqrt{g_{00}}\,, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\, e^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}\,,$$

$$D^{\alpha} = -\sqrt{g_{00}}\,H^{0\alpha}, \quad H_{\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}H^{\beta\gamma},$$

$$(1/\varepsilon)_{\alpha\beta} = -2g_{0\alpha0\beta}/g_{00} = -g_{\alpha\beta} + g_{0\alpha}\,g_{0\beta}/g_{00} = \gamma_{\alpha\beta}, \tag{33}$$

$$(1/\mu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\gamma\,e_{\alpha\gamma\sigma}\,e_{\beta\lambda\rho}\,g^{\gamma\sigma\lambda\rho},$$

$$\theta_{\alpha}^{\cdot\beta} = e^{\beta\gamma\sigma}\,g_{0\alpha\gamma\sigma}/\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}}.$$

Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ — трехмерный метрический тензор, $\gamma = \det|\gamma_{\alpha\beta}|$. Если метрический тензор слабо меняется в пространстве и во времени, т. е. его можно считать постоянным за период колебаний и на длине волны, то уравнения Максвелла в гравитационном поле могут быть сведены к уравнениям, аналогичным (24) и (25) [14], но в которых необходимо положить $n_{\beta} = \sqrt{g_{00}}\,k_{\beta}/\sqrt{\gamma}\,k_0$. Так как $g^{\alpha\beta} = -\gamma^{\alpha\beta}$, то из (33) следует

$$(1/\mu)_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}, \quad \rho^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta},$$
$$\nu^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\gamma}\,\theta_{\gamma}^{\cdot\beta} = -e^{\alpha\beta\gamma}\,g_{0\gamma}/\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{00}} = -\nu^{\beta\alpha}, \tag{34}$$

и мы приходим к известному результату, согласно которому двулучепреломление в гравитационном поле отсутствует [12–14].

Пользуюсь случаем выразить благодарность Б. М. Болотовскому, К. А. Барсукову и А. А. Копылову за интерес к настоящей работе и обсуждение затронутых в ней вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН, **114**, 569 (1974); Эйнштейновский сборник — 1974, изд. Наука, М., 1976.
2. И. Е. Тамм, Собрание научных трудов, изд. Наука, М., 1975.
3. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, **32**, 1244 (1957).
4. H. G. Schöpf, Ann. Phys., **13**, 41 (1964).
5. А. М. Глуцюк, ЖТФ, **34**, 1345 (1964).
6. C. V. Heer, Phys. Rev., **134**, A799 (1964).
7. А. М. Хромых, ЖЭТФ, **50**, 281 (1966).
8. A. Yildiz and C. H. Tang, Phys. Rev., **146**, 947 (1966).
9. И. А. Дерюгин, В. И. Воронцов, Изв вузов — Радиофизика, **9**, № 6, 1155 (1966).
10. А Виглин, В. Кашин, ДАН СССР, **173**, 797 (1967).
11. А. М Волков, В. А. Киселев, ЖЭТФ, **57**, 1353 (1969).
12. О. Н. Найда, Письма в ЖЭТФ, **8**, 110 (1968)
13. О. Н. Найда, Изв вузов — Радиофизика, **12**, № 4, 569 (1969)
14. А. М. Волков, А. А. Изместьев, Г. В. Скроцкий, ЖЭТФ, **59**, 1254 (1970)
15. K. C. Chen, J. Math. Phys., **12**, 743 (1971).
16. H. C. Chen and D. K. Cheng, Proc. IEEE, **54**, 62 (1966).
17. D. K. Cheng and J. A. Kong, Proc. IEEE, **56**, 248 (1968).
18. J. A. Kong, Proc. IEEE, **60**, 1036 (1972).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М, 1973.
20. Л. Д. Ландау, Е М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
10 октября 1977 г

DOUBLE RAY REFRACTION IN MOVING ANISOTROPIC MEDIA

G. F. Glinskij

A problem is studied in general form on the propagation of electromagnetic waves in moving anisotropic media. Properties of Tamm—Mandel'schtam material tensor are discussed and also its relation with tensors of dielectric and magnetic permittivity. Sufficient conditions of absence of double ray refraction in a moving medium with the arbitrary anisotropy are estimated. As an example electromagnetic waves are considered in a uniformly moving isotropic medium and in a gravitation field.