ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1978

УДК 538.574 : 530.18

К ПРОБЛЕМЕ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

С. Н. Гурбатов, Е. Н. Пелиновский, А. И. Саичев

Рассмотрено модельное уравнение, в рамках которого удается точно вычислить все статистические характеристики нелинейной волны в турбулентной среде. На этом примере показывается, что в задачах распространения нелинейной волны через турбулентную среду нельзя пользоваться распространенной схемой метода среднего поля [6–11]. Обсуждается влияние фазовых флуктуаций на статистические моменты нелинейной волны

1. Проблема вычисления усредненных характеристик нелинейных волновых полей в средах с флуктуирующими параметрами достаточно сложна как из-за известных в линейной теории трудностей расщепления слагаемых типа «поле $\times$ неоднородность», так и вследствие трудностей замыкания нелинейных слагаемых типа «поле $\times$ поле» относительно среднего поля или высших моментов. К настоящему времени разработано несколько регулярных методов, позволяющих замкнуть уравнения для моментов поля во многих важных случаях. В линейной теории это, например, диаграммные методы (см., например, [1, 2]), приводящие в приближении Бурре к интегродифференциальным уравнениям для средних полей. В задачах распространения нелинейных волн в однородной среде — это теория слабой турбулентности (см., например, [3]), опирающаяся на приближение случайных фаз в отсутствие регулярной компоненты поля. Еще менее изучено прохождение нелинейных волн через турбулентную среду. Остановимся на развиваемых здесь подходах подробнее. Это, во-первых, борновское приближение [4]. Его ограниченность очевидна, так как рассеянное поле быстро возрастает. Однако уже здесь получены интересные результаты. В частности, показано, что в недиспергирующей нелинейной среде нарушается изотропность рассеяния и рассеяние вперед становится превалирующим. Во-вторых, это метод кинетических уравнений для плотностей вероятности волн [5]. Этот способ достаточно строг. Однако он применим к узкому классу нелинейных волн и не позволяет описывать взаимодействие волн разных типов, а также дисперсию и высокочастотную диссипацию волн. Пожалуй, наиболее универсальным, применимым к произвольной системе уравнений с достаточно малой нелинейностью является метод среднего поля [6–11]. Первоначально развитый применительно к волнам в недиспергирующих средах (акустические волны в газе, длинные волны на поверхности жидкости), он был быстро обобщен на волны в диспергирующих средах (волны в плазме, электромагнитные волны в линиях передачи и т. д.). В этом методе используется малость нелинейности и рассеяния волны. Рассеяние на неоднородностях, в рамках метода среднего поля, приводит к дополнительным слагаемым, описывающим статистическую дисперсию и диссипацию волны. В результате

уравнение для средних волн (которое, например, в слабо диспергирующей среде имеет вид уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса) удается исследовать привычными методами теории нелинейных волн.

Следует, однако, иметь в виду, что при выводе уравнения среднего поля в случайно-неоднородной среде используют прием (см., например, [12]), основанный на замыкании уравнений с помощью малых поправок к полю, вычисленных в приближении однократного рассеяния. Поскольку затухание среднего поля, обусловленное переходом энергии волны в рассеянное поле, в общем случае не мало, а значит, и не мало рассеянное поле, то по крайней мере внешняя некорректность схемы очевидна. Косвенным аргументом в пользу такой процедуры замыкания может служить тот факт, что в линейной теории ее иногда удается обосновать методами селективного суммирования диаграмм (см., например, [1, 2]). В нелинейных задачах обосновать используемую схему пока еще не удалось, и трудности на этом пути очевидны. Поэтому большую теоретическую ценность имеют модельные, точно решаемые уравнения, на примере которых удается сравнить точные результаты и результаты, полученные приближенным методом среднего поля.

В данной работе рассмотрено несколько таких примеров. Анализ их показал, что метод среднего поля, вообще говоря, неприменим к нелинейным уравнениям. Более того, из этих примеров видно, что схемой Канера, даже в линейной теории, нужно пользоваться более осторожно, чем ей обычно пользуются. В то же время приведенные примеры позволили выделить «в чистом виде» влияние фазовых флуктуаций на среднее поле в нелинейной среде. Этим вопросам и посвящена настоящая статья.

2. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{Q}_{\text{л}\,x} u + \hat{Q}_{\text{н}\,x} u = 0, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ — исследуемая волна, $\hat{Q}_{\text{л}x}$, $\hat{Q}_{\text{н}x}$ — соответственно линейный и нелинейный детерминированные операторы, не зависящие явно от x, $\alpha(t)$ — произвольная случайная функция времени. Выбор модельного уравнения в такой форме связан с желанием продемонстрировать эффекты, обусловленные совместным действием нелинейности и неоднородности, наиболее просто.

Легко видеть, что замена переменных

$$t = t, \quad z = x - \eta(t), \quad \dot{\eta}(t) = \alpha(t), \quad \eta(0) = 0, \quad u(x, t) = U(z, t) \tag{2}$$

переводит стохастическое уравнение (1) в детерминированное:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \hat{Q}_{\text{л}\,z} U + \hat{Q}_{\text{н}\,z} U = 0, \tag{3}$$

решение которого следующим образом связано с решением уравнения (1):

$$u(x, t) = U(x - \eta(t), t). \tag{4}$$

Отметим, что аналогичные идеи случайной замены переменных, приводящие к точным уравнениям для различных статических характеристик, использовались, применительно к обыкновенным дифференциальным стохастическим уравнениям, в работах [13, 14].

В принципе $U(z, t)$ может быть случайным как из-за случайных начальных условий, так и из-за возможной стохастизации решений уравнения (3). Нам важно, однако, подчеркнуть, что возможная статистика $U(z, t)$ не связана со статистикой $\alpha(t)$. По известной U, которую мы будем для определенности считать детерминированной, нетрудно определить моменты $u(x, t)$. В частности, среднее поле описывается следующим выражением:

$$\langle u(x, t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(x-\eta, t)\, W[\eta; t]\, d\eta, \tag{5}$$

где $W[\eta; t]$ — вероятное распределение η. В дальнейшем для простоты будем считать $\alpha(t)$ стационарным гауссовым процессом с нулевым средним и известной функцией корреляции $B[\tau]$. При этом

$$W[\eta; t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi d(t)}} \exp\{-\eta^2/2d(t)\}, \quad d(t) = 2\int_0^t (t-\tau) B[\tau]\, d\tau \tag{6}$$

и W удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial d} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}.$$

Попробуем, исходя из известного выражения (5), найти уравнение для среднего поля. Для этого домножим (3) на $W[\eta; t]$, проинтегрируем в бесконечных пределах по η и, учитывая (4) и (6), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \hat{Q}_{\text{л}\,x}\langle u\rangle + \langle \hat{Q}_{\text{н}\,x} u\rangle = A(t)\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2}, \\ A(t) = \int_0^t B[\tau]\, d\tau, \quad A(t \gg \tau_0) = A(\infty) = D\end{gathered} \tag{7}$$

(τ_0 — время корреляции $\alpha(t)$). Приведем для сравнения уравнение для $\langle u\rangle$, полученное с помощью метода среднего поля. Стандартная процедура вывода методом среднего поля приводит к следующему уравнению (см., например, [6–11]):

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \hat{Q}_{\text{л}\,x}\langle u\rangle + \hat{Q}_{\text{н}\,x}\langle u\rangle = \int_0^t B[t-\tau]\frac{\partial^2\langle u(x, \tau)\rangle}{\partial x^2}\, d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, видно, что точное (7) и приближенное (8) уравнения среднего поля отличаются двумя слагаемыми: а) слагаемое, ответственное за диссипацию среднего поля, из-за рассеяния в точном уравнении не имеет интегрального вида, характерного для метода среднего поля; б) среднее от нелинейного члена в точном уравнении в общем случае не равно действию нелинейного оператора на среднее.

3. Вначале остановимся подробнее на анализе «статистической диссипации», считая $\hat{Q}_{\text{н}x} \equiv 0$. Нетрудно видеть при этом, что точное и приближенное уравнения для среднего поля совпадают только в случае мелкомасштабных неоднородностей, когда изменением $\langle u\rangle$ на интервалах времени $\sim \tau_0$ можно пренебречь. Тогда при $t \gg \tau_0$ уравнения (7), (8) приводятся к одному и тому же уравнению:

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \hat{Q}_{\text{л}\,x}\langle u\rangle = D\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Совпадение точного и приближенного уравнений среднего поля в случае мелкомасштабных неоднородностей следовало ожидать в свете работ по строгому обоснованию диффузионного приближения (см., например, [2]).

Приведем конкретный пример, количественно иллюстрирующий некорректность метода среднего поля на временах $t \ll \tau_0$. Полагая $\hat{Q}_{лx} \equiv 0$, легко убедиться, что уравнение (8), выведенное методом среднего поля, эквивалентно в этом случае волновому уравнению [15]

$$\frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Пусть при $t = 0$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Тогда решением уравнения (10) будут две разбегающиеся ступеньки с амплитудами u_0 и $u_0/2$ и скоростями разбегания соответственно $-\sigma$ и σ. Точное же решение, полученное из (7), имеет вид интеграла вероятности с характерной шириной σt. Следовательно, метод среднего поля при $t \ll \tau_0$ верно описывает лишь характерные масштабы изменения $\langle u(x, t) \rangle$, но никак не форму среднего поля.

Таким образом, даже в линейной теории схема Канера, применяемая для малых времен ($t \lesssim \tau_0$), приводит к ошибкам.

4. Если в линейных средах метод среднего поля справедлив при мелкомасштабных неоднородностях, то в нелинейной среде даже в этом случае остается неясным вопрос, насколько корректно замыкание нелинейных членов, т. е. замена $\langle \hat{Q}_н u \rangle$ на $\hat{Q}_н \langle u \rangle$. Различием между ними, очевидно, можно пренебречь, если $\langle [u - \langle u \rangle]^2 \rangle \ll \langle u \rangle^2$. Однако — это условие малости рассеянного поля, и, пока оно выполняется, более эффектным методом исследования является борновское приближение [4]. Чтобы выяснить, можно ли подобным образом замыкать нелинейные слагаемые на значительном рассеянии, сравним точные результаты с получаемыми методом среднего поля.

Пусть, для определенности, волна $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и $\alpha(t)$ — мелкомасштабная случайная функция. Тогда метод среднего поля приводит к следующему уравнению для $\langle u \rangle$:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} = (\mu + D) \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Таким образом, рассеяние в методе среднего поля приводит лишь к изменению эффективного коэффициента вязкости. Поскольку решение уравнения Бюргерса в общем случае весьма громоздко, обсудим лишь несколько частных случаев.

Если волна $U(z, t)$, совпадающая при $t = 0$ с начальным условием исходного стохастического уравнения (1), представляет собой стационарную ударную волну

$$U(z, t) = U_0 \left[1 - \operatorname{th} \frac{U_0 (z - U_0 t)}{2\mu} \right], \tag{12}$$

то решением приближенного уравнения (11), после установления переходных процессов, является та же стационарная волна (12), в которой изменилась лишь эффективная вязкость $\mu = > \mu_э = \mu + D$. Точное же среднее при $Dt \gg \mu^2/U_0^2$, как следует из (5), (12), имеет вид

$$\langle u(x, t) \rangle = 2U_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x - U_0 t}{\sqrt{2Dt}} \right) \right], \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{13}$$

Таким образом, истинное среднее поле даже качественно сильно отличается от среднего, найденного методом среднего поля. В частности, истинное среднее поле всегда нестационарно, причем ширина его фронта растет со временем, как $\sqrt{2Dt}$.

При монохроматической на входе волне $u_0(x) = a \sin k_0 x$ решение уравнения Бюргерса для $U(z, t)$ имеет вид

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(a, \mu, t) \sin k_0 n x, \tag{14}$$

где $A_n(a, \mu, t)$ — известные (см., например, [16]) амплитуды гармоник. Заменив здесь $A_n(a, \mu, t)$ на $A_n(a, \mu + D, t)$, мы получим выражение для $\langle u(x, t) \rangle$, найденное методом среднего поля. Точное же среднее равно

$$\langle u(x, t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(a, \mu, t)\, e^{-n^2 k_0^2 Dt} \sin k_0 n x. \tag{15}$$

Причем, $A_n(a, \mu + D, t) \neq A_n(a, \mu, t)\, e^{-n^2 k_0^2 Dt}$. Можно показать, что коэффициенты гармоник точного и приближенного средних с течением времени все больше отличаются. Лишь при $a \to 0$, когда нелинейность несущественна, коэффициенты при первой гармонике равны. Таким образом, истинная μ- и статистическая D-вязкости влияют на вид среднего поля по-разному.

Обсудим более подробно, как влияют истинная и эффективная вязкости на процесс генерации высших гармоник средней волны. Пусть число Рейнольдса $\mathrm{Re} = a/k_0 \mu \gg 1$. Тогда при $t > t_н \approx (k_0 a_0)^{-1}$ синусоидальная волна трансформируется в пилообразную с шириной ударного фронта, определяемой числом Рейнольдса. При этом коэффициенты ряда (14) задаются выражением [16]

$$A_n(a, \mu, t) = \mu k_0 / \mathrm{sh}\, \mu k_0^2 n t. \tag{16}$$

Заменив здесь μ на $\mu + D$, получим выражение для $\langle u \rangle$, найденного методом среднего поля. Таким образом, для него число гармоник определяется суммарной вязкостью $\mu + D$ и равно $[(\mu + D) k_0^2 t]^{-1}$. Точное же решение (5), (14) показывает, что истинная μ- и статистическая D-вязкости по-разному влияют на изменение числа $\langle u \rangle$. Например, при $\mu \ll D$ из сравнения точного и приближенного средних видно, что среднее поле, вычисленное на основе уравнения (11), имеет в $p = (D k_0^2 t)^{-1/2}$ $(p \gg 1)$ раз больше гармоник, чем содержится в истинном среднем поле. Заметим, что $1/p \ll 1$ характеризует в линейной задаче величину рассеянного поля.

Рассматривая изменение амплитуд высших гармоник в решении (15), (16) со временем, видно, что в методе среднего поля $A_n \sim \sim \exp\{-n(\mu + D)k_0^2 t\}$, т. е. показатель степени пропорционален n, в отличие от линейной теории, где $A_n \sim \exp\{-n^2(\mu + D)k_0^2 t\}$. Это связано с подкачкой энергии от низших гармоник к высшим. Из точного же решения мы имеем $A_n \sim \exp\{-[(n\mu + n^2 D)k_0^2 t]\}$. Таким образом, нелинейное взаимодействие гармоник среднего поля компенсирует частично истинное затухание, но не уменьшает затухания среднего поля, связанного с рассеянием.

Из приведенных примеров можно сделать вывод, что метод среднего поля в нелинейных задачах дает заведомо завышенное значение для процессов нелинейного взаимодействия при формировании $\langle u \rangle$.

5. Рассмотрим теперь волну в среде с высокочастотной дисперсией, когда распространение волны описывается уравнением Кортевега—де Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{17}$$

Здесь метод среднего поля приводит к обобщенному уравнению Кортевега—де Вриза—Бюргерса для среднего поля [8, 9].*. Точное же среднее можно найти из (5), используя те или иные решения уравнения КДВ для $U(z, t)$. Рассмотрим рассеяние солитона

$$U(z, t) = U_0 \operatorname{sch}^2\left[\sqrt{\frac{U_0}{12\beta}}\left(z - \frac{U_0}{3}t\right)\right]. \tag{18}$$

Легко видеть из (5), что, хотя форма среднего поля с течением времени меняется, его интегральные характеристики, такие, как импульс $\int \langle u \rangle\, dx$, энергия $\int \langle u^2 \rangle\, dx$, остаются неизменными и совпадают с соответствующими характеристиками солитона. На больших временах $t \gg \beta/U_0 D$ среднее поле приобретает форму гауссова импульса:

$$\langle u(x, t) \rangle = \frac{M_1}{\sqrt{2\pi D t}} \exp\left\{-\frac{(x - U_0 t/3)^2}{4Dt}\right\},$$

$$M_1 = \sqrt{12}\,\beta U_0 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sch}^2 \xi\, d\xi.$$

Однако его амплитуда в любой момент времени «помнит» об амплитуде исходного солитона. В методе же среднего поля $\langle u \rangle$ на больших временах полностью «забывает» начальную амплитуду.

Заметим еще, что при $t \gg \beta/U_0 D$ любые моменты поля при «солитонном» начальном условии принимают гауссову форму,

$$\langle u^n(x, t) \rangle = \frac{M_n}{\sqrt{2\pi D t}} \exp\left\{-\frac{(x - U_0 t/3)^2}{4Dt}\right\},$$

и одинаково затухают со временем (как $t^{-1/2}$).

---

* В работе [11] уравнение для среднего поля было получено из (17) при $\alpha = \alpha(x)$ и любой нелинейности. По своей структуре оно похоже на уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса и при малой нелинейности совпадает с ним.

Точное выражение для среднего (5) позволяет рассмотреть также задачу об асимптотическом поведении $\langle u(x, t) \rangle$ при любых локализованных начальных условиях. Как известно, в этом случае решение уравнения КВД распадается на последовательность солитонов, число и амплитуда которых могут быть определены, например, из решения обратной задачи рассеяния. Известно, что расстояние между солитонами линейно растет со временем. Поэтому, как видно из (5), среднее поле распадается в этом случае на последовательность гауссовых импульсов, ширина которых возрастает, как $\sqrt{t}$. Таким образом, рассеяние не может предотвратить распада начального профиля на последовательность солитонов. В методе же среднего поля «эффективная» вязкость может препятствовать этому процессу.

Приведенные примеры показывают, что рассеяние на случайных неоднородностях приводит не только к перенормировке эффективной вязкости, но и воздействует на нелинейность системы, однако этот процесс пока удается описать только в рамках модельного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
2. R. E. Collin, Radio Sci., 6, № 11, 991 (1971).
3. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971, Нелинейные явления в плазме, изд. Наука, М., 1976.
4. Е. Н. Пелиновский, Труды VIII Всесоюзной акустической конференции, М., 1973.
5. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974); ЖЭТФ, 67, № 9, 940 (1974).
6. M. S. Howe, J. Fluid Mech., 45, № 4, 785 (1971).
7. A. C. George and K. I. Plotkin, J. Fluid Mech., 58, 461 (1973); Phys. Fluid, 14, 548 (1971).
8. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 45, № 4, 785 (1971).
9. Ю. К. Богатырев, С. М. Файнштейн, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 6, 888 (1975).
10. Е. Н. Пелиновский, А. И. Саичев, В. Е. Фридман, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 6, 875 (1974); Акуст. ж., 18, 627 (1972).
11. Г. М. Заславский, ЖЭТФ, 66, 1932 (1974)
12. Э. А. Канер, Изв. вузов — Радиофизика, 2, № 5, 827 (1959)
13. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1976.
14. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 11, 1698 (1977)
15. М. И. Швидлер, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 2, 94 (1975).
16. E. R. Benton and G. W. Platzman, Quart. Appl. Math, 30, 195 (1972).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
10 августа 1977 г.

TO THE PROBLEM OF EQUATION CLOSURE FOR AVERAGE FIELDS IN NONLINEAR MEDIA WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

S. N. Gurbatov, E. N. Pelinovskij, A. I. Saichev

A model equation is considered in the frames of which all statistical characteristics of a nonlinear wave in a turbulent medium are strictly calculated. By this example it is shown that in problems of a nonlinear wave propagation through a turbulent medium a widely used scheme of the average field method [6—11] cannot be used. The influence of phase fluctuations on the statistic moments of the nonlinear wave is discussed.