

УДК 538.56 : 519.25

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СИСТЕМ

Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев

Марковская теория термодинамических флуктуаций в нелинейных системах, получившая в [1] строгое обоснование и обобщение на основе фундаментальных постулатов статистической механики, применяется к анализу флуктуаций в существенно нелинейных и неравновесных осцилляторных системах. Для изучения неравновесных стационарных флуктуаций в открытой системе используется представление последней как части медленно релаксирующей замкнутой системы. Рассматривается термодинамически последовательный метод определения характеристик «шумовых» источников в стохастических (ланжевеновских) уравнениях, обеспечивающий выполнение универсальных нелинейных флюктуационно-диссипационных соотношений [1–7]. Этот метод, начинающийся с построения кинетического оператора марковского процесса, можно противопоставить подходу, при котором нелинейные уравнения Ланжевена записываются из «физических соображений», а шумовые источники удовлетворяют лишь линейным флюктуационно-диссипационным соотношениям. Изучаются неравновесные флуктуации в нелинейном осцилляторе, в том числе критические флуктуации у границ области устойчивости, а также эффект подавления флуктуаций при больших отклонениях от термодинамического равновесия. На примере осциллятора с тепловыми флюктуациями емкости рассматривается обратная задача восстановления диссипативных характеристик системы по флюктуационным. Показано, что тепловые параметрические флюктуации неразрывно связаны с нелинейной диссипацией.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание привлекает теория тепловых флюктуаций в нелинейных системах. Начальным элементом теории является линейная флюктуационно-диссипационная теорема (ФДТ), которая связывает между собой линейную часть среднего отклика системы на динамическое внешнее воздействие и вторые моменты* равновесных флюктуаций. В линейной системе флюктуации гауссова и полностью определяются вторыми моментами, поэтому вся теория исчерпывается ФДТ. В результате устанавливается однозначное соответствие между характеристиками — корреляционными функциями шумовых источников и макроскопическими (или феноменологическими) диссипативными характеристиками системы. В нелинейном случае флюктуации негауссова, и для полного их описания необходимо привлечь высшие кумулянтные функции. Таким образом, число неизвестных флюктуационных характеристик становится, вообще говоря, бесконечным, в то время как феноменологическая информация (уравнения движения для макроскопических переменных системы) в определенном смысле остается прежней. Поэтому задача восстановления шумовых характеристик по диссипативным не имеет, в отличие от линейного случая, универсального одно-

* Точнее, «вторые, третий, ... моменты» следует называть здесь и далее «моментными функциями второго, третьего, ... порядка».

значного решения. Однако и здесь можно установить ряд важных общих соотношений, подобных линейной ФДТ, исходя лишь из основных предположений статистической механики, в первую очередь из обратимости микроскопического движения во времени. Первый такой результат был получен Ефремовым [2], который доказал квадратичную ФДТ, связывающую квадратичную часть отклика системы на динамическое возмущение с третьими моментами равновесных флуктуаций. Стратонович рассмотрел четырехиндексные соотношения (для четвертых моментов) и показал [7], что кубической ФДТ не существует (позднее четырехиндексные соотношения изучались также Ефремовым [3]). В марковской теории Стратонович первым получил и проанализировал [4, 5] полную систему многоиндексных соотношений и применил их к анализу флуктуаций в слабо нелинейных радиотехнических цепях [6]. Наконец, авторы данной работы обобщили результаты Ефремова и Стратоновича, найдя производящую формулу для полной системы флуктуационно-диссипационных соотношений в общей (немарковской) теории (как в классическом, так и в квантовом вариантах) [1].

Приведем для дальнейшего эту формулу. Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ некоторую совокупность макропеременных системы, через $J = \dot{\mathbf{x}}(t)$ — соответствующие им токи. Пусть на систему действуют внешние силы $f(t) = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, эффект которых определяется гамильтонианом взаимодействия, равным $h(t) = \mathbf{x}(t) f(t) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$, и которые выводят систему из первоначального состояния термодинамического равновесия. В [1] установлено, что вероятностный функционал $W[J(\tau); f(\tau)]$, токов удовлетворяет следующему, вытекающему из микроскопической обратимости соотношению:

$$W[J(\tau); f(\tau)] \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} N(\tau) d\tau \right\} = W[-\epsilon J(-\tau); \epsilon f(-\tau)], \quad (1)$$

где ϵ — диагональная матрица с элементами $\epsilon_k = \pm 1$ ($\epsilon_k = 1$, если макропеременная x_k не меняет знака при обращении времени, и $\epsilon_k = -1$ в противном случае), T — температура термостата и системы,

$$N(\tau) \equiv \sum_i \dot{x}_i(\tau) f_i(\tau)$$

есть мощность, накачиваемая в систему внешним динамическим воздействием. Укажем для дальнейшего, что (1) относится к замкнутой системе, в которой при $f_i = \text{const}$ средние значения $\langle x_i(t) \rangle = 0$, т. е. постоянные внешние силы не совершают работы над такой системой.

Важно подчеркнуть, что формула (1) содержит все следствия микроскопической обратимости. Она не связана с какими-либо ограничениями на гамильтониан системы и поэтому носит универсальный характер. Требования, предъявляемые формулой (1) к характеристикам тепловых флуктуаций, должны выполняться в любой феноменологической или модельной теории.

Ясно, что дальнейшее продвижение флуктуационно-диссипационной теории возможно лишь при уменьшении общности и введении некоторых дополнительных условий или предположений. Здесь, как и вообще в статистической термодинамике, возможны два подхода: модельно-микроскопический и феноменологический.

Данная работа посвящена феноменологическому анализу тепловых шумов в нелинейных радиофизических системах и преследует две основные цели. Первая заключается в том, чтобы продемонстрировать

последовательный термодинамический подход к введению шумовых источников в феноменологические уравнения — подход, опирающийся на формулу (1) и приводящий к термодинамически согласованным флуктуационно-диссипационным характеристикам систем. Вторая цель — кратко обсудить результаты анализа получаемых стохастических уравнений, в частности, связь нелинейных и параметрических флуктуационных эффектов. Общая схема введения шумовых источников рассматривается параллельно с двумя примерами: осциллятором, содержащим нелинейный диссипативный элемент — нелинейную проводимость, и осциллятором, в котором параметр (емкость) испытывает тепловые флуктуации.

1. ВЫВОД СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

1. Пусть известны феноменологические эволюционные (динамические) уравнения системы. Как построить полные стохастические уравнения этой системы, удовлетворяющие универсальному соотношению симметрии (1)? Рассмотрим эту общую проблему (без потери общности рассуждений) на примере нелинейного осциллятора, пользуясь для наглядности радиотехнической терминологией.

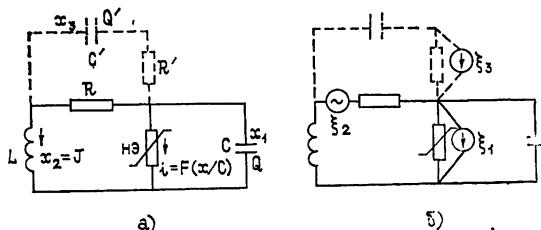


Рис 1. а) Диссипационная осцилляторная система ($R'C' \gg L/R$);
б) эквивалентная схема осциллятора; ξ_1 , ξ_3 — шумовые
источники тока, ξ_2 — шумовой источник напряжения, по-
рождаемые термостатом.

Схема осциллятора показана на рис. 1а. Лишняя полустепень свободы введена здесь из принципиальных соображений. Дело в том, что интересующая нас одностепенная осцилляторная система (рис. 4) является открытой*, и к ней непосредственно неприменимо соотношение (1). Использованный прием позволяет рассмотреть флуктуации в открытой системе, как флуктуации в замкнутой системе в процессе медленной релаксации ее к равновесию. Подробнее все эти вопросы будут обсуждены в конце данного раздела.

Обозначим через x_1 и x_3 соответственно заряды на емкостях C и C' , через x_2 — ток, протекающий по индуктивности. Уравнения движения для макропараметров x_1 , x_2 , x_3 имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -F(x_1/C) - x_2 \equiv A_1(x), \\ \dot{x}_2 &= \omega_0^2 x_1 - \mu_1 x_2 - \gamma \omega_0^2 x_3 \equiv A_2(x), \\ \dot{x}_3 &= \gamma x_2 - \mu_2 x_3 \equiv A_3(x). \end{aligned} \quad (2)$$

* Источник смещения $u = \text{const}$ вызывает постоянный поток заряда и совершает работу над системой (рис. 4), что является характерным свойством открытой системы. Если постоянная времени цепи, показанной на рис 1а пунктиром, достаточно велика, то на нелинейном элементе (НЭ) создается почти постоянное смещение.

Здесь $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$, $\omega_1^2 = (LC')^{-1}$, $\gamma = R(R + R')^{-1}$, $\mu_1 = R'\gamma/\Delta$, $\mu_2 = [C'(R + R')]^{-1}$, $F(z)$ — вольт-амперная характеристика нелинейной проводимости (НП).

Пусть система находится в тепловом равновесии с термостатом при температуре T . Нас интересуют свойства равновесных тепловых флуктуаций макропеременных — зарядов и токов x_i .

Феноменологические уравнения (2) неинвариантны относительно обращения времени, поскольку содержат диссипативные члены. Последние учитывают взаимодействие системы с термостатом, но односторонне: они описывают лишь поток энергии (и энтропии) в термостат, в то время как существует и обратный поток, имеющий стохастический характер. Полные флуктуационные уравнения должны включать оба потока и быть инвариантными при обращении времени. Поэтому соответствующие (2) флуктуационные, или стохастические уравнения будем искать в виде

$$\dot{x}_i \equiv a_i(x) + \eta_i(x, t), \quad (3)$$

где $\eta_i(x, t)$ — шумовые источники (тока или ЭДС), порождаемые термостатами, а функции a_i описывают обратимую компоненту в эволюции системы.

Поскольку временная четность обеих частей (3) одинакова, x_i и η_i имеют противоположные четности. Отсюда следует, что в правой части уравнений (3) для зарядов x_1, x_3 должны стоять токовые шумовые источники, а в уравнении для тока x_2 — шумовая ЭДС. Таким образом, эквивалентная шумовая схема осциллятора содержит два токовых источника и один источник ЭДС, как это изображено на рис. 1б.

Для того, чтобы найти связь между a_i и A_i , мысленно уберем термостат, т. е. в (3) положим $\eta_i(t) = 0$, а в (2) устраним диссипативные члены. Ясно, что $a_i(x)$ совпадет с обратимой компонентой $A_i(x)$, которая, как нетрудно убедиться, равна

$$\frac{1}{2} \{ A_i(x) - \varepsilon_i A_i(\varepsilon x) \} \equiv a_i(x) \quad (4)$$

(в нашем примере $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$). Диссипативные компоненты $A_i(x)$ обозначим через $b_i(x)$:

$$\frac{1}{2} \{ A_i(x) + \varepsilon_i A_i(\varepsilon x) \} = b_i(x), \quad (4')$$

$$A_i(x) = a_i(x) + b_i(x).$$

Вообще говоря, обратимые компоненты $a_i(x)$ правых частей тоже зависят от параметров термостата. В нашем случае, например, $a_2(x) = \omega_0^2 x_1 - \frac{R}{R+R'} \omega_1^2 x_3$ содержит R и R' . Можно сказать, что эта зависимость учитывает потенциальную часть взаимодействия макропеременных с термостатом, которая приводит к перенормировке эволюции макропеременных, но не к диссипации. Это замечание уточняет смысл устранения термостата из уравнений (2) и (3).

2. Мы предположили, что макропеременные $x(t)$ составляют полный набор, т. е. образуют замкнутую систему феноменологических уравнений (2). Во флуктуационной теории будем считать совокупность $x(t)$ марковской, а источники $\eta_i(x, t)$ в (3) соответственно δ -коррелированными*.

* Немарковость (многомерного) случайного процесса $x(t)$ означала бы, что его можно аппроксимировать марковским процессом с большим числом компонент. Так можно поступить, например, при рассмотрении модели инерционного НЭ.

Все статистические характеристики марковского процесса определяются его двумерной плотностью вероятности $W(t, \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)})$, где $\mathbf{x}_{(1)} \equiv \mathbf{x}(t_1)$, $t \equiv (t_1 - t_2)$. Для нее из общей формулы (1) нетрудно вывести (при $f(\tau) \equiv 0$) следующее соотношение симметрии [1, 4, 5]:

$$W(t; \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}) = W(t, \varepsilon \mathbf{x}_{(2)}, \varepsilon \mathbf{x}_{(1)}). \quad (5)$$

Отсюда вытекает формула

$$W_0(\mathbf{x}) = W_0(\varepsilon \mathbf{x}). \quad (5')$$

для одномерной стационарной (и равновесной) плотности вероятности $W_0(\mathbf{x})$ и бесконечный набор соотношений Стратоновича для кинетических коэффициентов [4, 5] (мы их записываем в тензорной форме):

$$W_0(\mathbf{x})(-\varepsilon)^n K_{(n)}(\varepsilon \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dx}\right)^m K_{(n+m)}(\mathbf{x}) W_0(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Здесь $x \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$; $(n) \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$; $\varepsilon^n \equiv \varepsilon_1^{n_1} \varepsilon_2^{n_2} \dots \varepsilon_N^{n_N}$ и т. д., кинетические коэффициенты равны по определению

$$K_{(n)}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (\Delta x_1)^{n_1} \dots (\Delta x_N)^{n_N} \rangle_x,$$

$\langle \dots \rangle_x$ — условное среднее (при заданном x). Соотношения (6) являются, как и исходные формулы (1), (5), следствием микроскопической обратимости во времени и представляют собой строгую формулировку утверждения об обратимости стохастических уравнений (3).

3. Прежде чем рассматривать соотношения (6), нужно установить связь между феноменологическими уравнениями (2) и стохастическими уравнениями (3), или, иными словами, дать определенную статистическую трактовку уравнениям (2). Простейшая возможность, которую мы и примем далее, заключается в том, что уравнения (2) являются результатом условного усреднения (3), т. е. что

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dx_i}{dt} \right\rangle_x &= a_i(x) + \langle \eta_i(x, t) \rangle_x = A_i(x), \\ K_1^i(x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta x_i \rangle_x}{\Delta t} = \left\langle \frac{dx_i}{dt} \right\rangle_x = A_i(x). \end{aligned} \quad (6')$$

Отсюда и из (4') следует, что $\langle \eta_i(x, t) \rangle_x = b_i(x)$, т. е. диссипативные члены в (2) равны средним значениям макропараметров*. Равенства $K_1^i(x) = A_i(x)$, связывающие первые кинетические коэффициенты $K_1^i(x)$ с правыми частями (2), приводят, в частности, к следующей интерпретации «вольт-амперной характеристики» $F(z):F(z)$ есть условное среднее значение тока через нелинейную проводимость при заданном напряжении z на ней.

Для того, чтобы найти связи высших кинетических коэффициентов с первыми, нужно знать плотность вероятности $W_0(\mathbf{x})$ равновесного распределения $\mathbf{x}(t)$. Хотя, как показано Стратоновичем [6], ряд важных соотношений можно получить из (6); не конкретизируя $W_0(\mathbf{x})$, мы найдем $W_0(\mathbf{x})$ в нашем примере. Для этого заметим, что равновесное распределение полной системы макропараметров не должно зависеть от характера связи макропараметров с термостатом, или, другими сло-

* И наоборот, из $K_1^i(x) = A_i(x)$ и $\langle \eta_i(t) \rangle_x = b_i(x)$ вытекает, что функции $a_i(x)$ в (3) и (4) действительно одни и те же.

вами, от природы термостата. В частности, $W_0(\mathbf{x})$ не изменится, если интенсивность взаимодействия с термостатом устремить к нулю, так что уравнения (3) примут вид $\dot{x}_i = a_i(\mathbf{x})$. Поэтому $W_0(\mathbf{x})$ должна удовлетворять уравнению

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x}) W_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (7)$$

Далее введем в схему осциллятора два внешних источника напряжения $f_1(t)$, $f_3(t)$ и источник тока $f_2(t)$, как показано на рис. 2. Уравнения движения примут вместо (2) вид

$$\dot{x}_i = A_i(\mathbf{x} - \lambda f(t)), \text{ где } \lambda_1 = C, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = C'.$$

Поскольку, как следует из рис. 2, мгновенная мощность, накачиваемая внешними источниками в осциллятор, равна $\dot{x}_1 f_1 + \dot{x}_2 f_2 + \dot{x}_3 f_3$, то, в соответствии с (1), (1'), параметры f_i представляют собой внешние силы, сопряженные (в смысле статистической механики) с внутренними переменными x_i [1]. Поэтому при $f_i = \text{const}$ плотность вероятности $W_f(\mathbf{x})$ стационарного распределения имеет вид [1, 5]

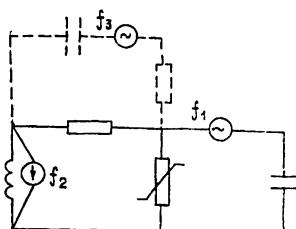


Рис. 2. Схема осциллятора с введенными в нее внешними источниками напряжения f_1 , f_3 и источником тока f_2 .

$$W_f(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}) \exp \left(\frac{x_1 f_1 + L x_2 f_2 + x_3 f_3}{T} \right). \quad (8)$$

С другой стороны, $W_f(\mathbf{x})$ можно рассматривать как равновесную (для системы во внешних «полях») и, повторяя рассуждения, приводящие к (7), написать:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x} - \lambda f) W_f(\mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда и из (7) ввиду произвольности f_i можно сделать вывод, что

$$W_f(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x} - \lambda f). \quad (9)$$

Два выражения (8), (9) для $W_f(\mathbf{x})$ верны одновременно только в том случае, когда плотность вероятности $W_0(\mathbf{x})$ гауссова, а именно:

$$W_0(\mathbf{x}) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2T} \left(\frac{x_1^2}{C} + L x_2^2 + \frac{x_3^2}{C'} \right) \right\} = \exp \left[-\frac{H(\mathbf{x})}{T} \right]. \quad (10)$$

Функция $H(\mathbf{x})$ есть энергия макропеременных, и их равновесное распределение является, следовательно, гиббсовским.

Соотношения (6), как известно [4], не позволяют однозначно выразить высшие кинетические коэффициенты через $K_i(\mathbf{x})$ и $W_0(\mathbf{x})$, чего, однако, можно добиться, если ввести некоторые дополнительные предположения. С этой целью рассмотрим выражение для рассеиваемой мощности:

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} = - \left\{ \frac{x_1}{C} F \left(\frac{x_1}{C} \right) + L \mu_1 x_2^2 + \mu_2 \frac{x_3^2}{C'} \right\}.$$

Отсюда видно, что с каждой переменной x_i связан свой механизм диссипации, не зависящий от других переменных. Поэтому естественно предположить, что соответствующие разным переменным шумовые ис-

точники (рис. 1б) статистически независимы. В таком случае каждой переменной соответствует отдельный канал связи с термостатом, а процессы в различных каналах некоррелированы. Независимость в (3) означает, что не равны нулю только кинетические коэффициенты

$$K_n^i \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (\Delta x_i)^n \rangle_x,$$

причем $K_n^i = K_n^i(x)$ являются функцией только x_i .

4. Из (6), (6') и (10) нетрудно получить соотношения:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{z}{\sigma_1^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{m+1}^1(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{\sigma_1^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{m+1}^1(z) = F\left(\frac{z}{C}\right); \quad (11)$$

$$(-1)^n K_n^1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{\sigma_1^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{n+m}^1(z), \quad n \geq 2; \quad (11')$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{z}{\sigma_2^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{m+1}^2(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{\sigma_2^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{m+1}^2(z) = \mu_1 z; \quad (12)$$

$$K_n^2(-z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{\sigma_2^2} - \frac{d}{dz} \right)^m K_{n+m}^2(z), \quad n \geq 2. \quad (12')$$

Здесь $\sigma_1^2 = TC$, $\sigma_2^2 = \frac{T}{L}$ — равновесные дисперсии заряда x_1 и тока x_2 .

Соотношения для $K_n^3(z)$ получаются из (11), (11') заменой K_n^1 на K_n^3 ; $F(z)$ на $\mu_2 z$; σ_1^2 на $\sigma_3^2 = TC'$.

Система уравнений (12), (12') имеет простое решение:

$$K_2^2 = 2 \sigma_2^2 \mu_1, \quad K_n^2 = 0 \quad \text{при } n \geq 3. \quad (13)$$

Аналогично можно положить

$$K_2^3 = 2 \sigma_3^2 \mu_2 = \frac{2 T}{R + R'}, \quad K_n^3 = 0 \quad \text{при } n \geq 3. \quad (13')$$

Таким образом, с двумя линейными диссипативными элементами — сопротивлениями R и R' — связаны гауссовые шумовые источники тока и напряжения, интенсивности которых не зависят от x и определяются формулами Найквиста (13), (13'). Если мы вначале предположим гауссовость $\eta_2(t)$ и $\eta_3(t)$ (физически это означает, что приращения Δx_2 и Δx_3 непрерывны), то получим (13) как единственно возможное решение (12), (12').

Для того, чтобы выделить одно из множества решений уравнений (11), (11'), нужно также привлечь дополнительные предположения о характере шума НП. Здесь имеются два простейших варианта: 1) шумовой источник тока НП $\eta_1(t)$ гауссов, т. е. $K_n^1 = 0$ при $n \geq 3$; 2) НП является источником шума с пуассоновской статистикой, т. е.

$$K_n^1(z) = q^n N_1(z) + (-q)^n N_2(z),$$

где q — величина элементарного заряда, N_1 , N_2 — среднее число зарядов, проходящих в единицу времени в одном и противоположном направлениях. В обоих случаях уравнения (11), (11') имеют единственное решение.

Считая $\eta_1(t)$ гауссовым, получим

$$K_2^1(z) = 2TG(z/C); \quad (14)$$

$$\left(u - \sigma_0^2 \frac{d}{du} \right) G(u) = F(u), \quad (14')$$

где $\sigma_0^2 \equiv \frac{\sigma_1^2}{C^2} = \frac{T}{C}$ есть равновесная дисперсия напряжения на НП и емкости C . В формулу (14) входит эффективная или «шумовая проводимость» $G(u)$, которая зависит от приложенного к НП напряжения и связана с вольт-амперной характеристикой $F(u)$ уравнением (14').

Предполагая шум НП пуассоновским, найдем:

$$K_{2n+1}(z) = -(q)^{2n} F(z/c), \quad K_{2n+2}(z) = 2Tq^{2n} G(z/C),$$

$$2 \frac{T}{q} \operatorname{th} \left(\frac{q}{2T} D_u \right) G(u) = F(u), \quad D_u \equiv \left(u - \sigma_0^2 \frac{d}{du} \right).$$

Рассмотрим шумовую проводимость $G(u)$ в гауссовой модели. Обозначим через u_0 характерный масштаб нелинейности функции $F(u)$.

Далее мы будем считать, что $F(u)$ имеет участок с отрицательным дифференциальным сопротивлением (рис. 3а), и отождествим u_0 с точкой перегиба $F(u)$. Если выполняется неравенство $\sigma_0^2 \ll u_0^2$, то уравнение (14') имеет приближенное решение:

$$G(u) \approx \frac{F(u)}{u} \equiv G_0(u),$$

т. е. шумовая проводимость совпадает приближенно со средней

проводимостью. Вблизи точки равновесия $x_i = 0$ это равенство является точным.

Рис. 3. а) Вольт-амперная характеристика НЭ, понимаемая как условное среднее значение тока через НЭ при заданном напряжении на нем, б) средняя проводимость НЭ $G_0(u)$ и дифференциальная проводимость НЭ $G_1(u)$; u_1, u_2 — корни приближенного уравнения для определения порога самовозбуждения.

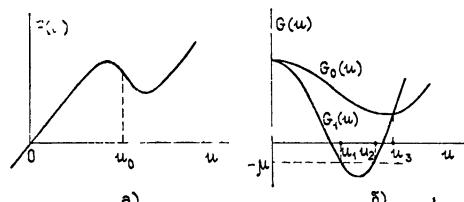
проводимостью. Вблизи точки равновесия $x_i = 0$ это равенство является точным.

5. Формулы (13), (14) полностью определяют кинетический оператор марковского процесса $x(t)$ в гауссовой модели. Зная кинетический оператор, мы можем рассмотреть как равновесные флуктуации, так и флуктуации в процессе установления равновесия. Пусть в момент $t = 0$ распределение $x(t)$ отличается от равновесного и соответствует определенному значению $x_3(0) = x_3' \neq 0$. С течением времени распределение будет стремиться к равновесному (10), в котором $\langle x_3 \rangle = 0$.

Выберем сопротивление R настолько большим, чтобы время установления равновесия в цепи $C' \rightarrow R' \rightarrow R$ $\tau \approx R'C'$ было много больше времени релаксации τ_0 в осцилляторной части системы. Тогда при $\tau_0 \ll t \ll \tau$

$$x_3(t) \approx x_3 = \text{const}, \quad \langle x_3^2(t) \rangle - x_3^2 \approx K_2^3 t \ll \sigma_3^2,$$

а $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут испытывать квазистационарные флуктуации, характеристики которых отличаются от равновесных. Текущий через сопротивление R приблизительно постоянный ток разряда емкости C' создаст смещение на НП, и, если НП имеет вид рис. 3, в осцилляторе возникнут автоколебания. Таким образом, зная характеристики шумовых источников, мы получаем возможность изучить неравновесные



флуктуации в осцилляторе, рассматривая их как квазистационарные флуктуации быстрых переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ в процессе релаксации к равновесию медленной переменной* $x_3(t)$.

Считая $x_3 = \text{const}$, переобозначив x_1 и x_2 соответственно через Q и J , можно с учетом (13), (14) написать следующие искомые стохастические уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -F(Q/c) - J + \sqrt{2T G(Q/C)} \xi_1(t), \\ \dot{J} &= \omega_0^2(Q - cu) - \mu_1 J + \sqrt{2T \mu_1/L} \xi_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 — стандартные δ -коррелированные гауссовые статистически независимые процессы (с нулевыми средними значениями и единичными интенсивностями). Уравнениям (15), (14) отвечает схема рис. 4 и уравнение ЭФП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(t, Q, J) = & \left\{ J \frac{\partial}{\partial Q} - \omega_0^2(Q - cu) \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial Q} G(Q/C) \left(Q/C + T \frac{\partial}{\partial Q} \right) + \right. \\ & \left. + \mu_1 \frac{\partial}{\partial J} \left(J + \frac{T}{L} \frac{\partial}{\partial J} \right) \right\} W(t, Q, J). \end{aligned} \quad (16)$$

С помощью уравнения (16) будут рассмотрены далее неравновесные стационарные флуктуации в схеме рис. 4, в частности, возрастание флуктуаций вблизи порога самовозбуждения, переходящее в автоколебания.

Подчеркнем еще раз, что флуктуационно-диссилипационные соотношения (6), как и формула симметрии (1), неприменимы непосредственно к схеме рис. 4, поскольку соответствующая ей физическая система является открытой (в указанном выше смысле). Действительно, из сравнения рис. 2 и рис. 4 видно, что смещение u не совпадает ни с одной из термодинамически сопряженных внешних сил f_i . В отличие от сил $f_i = \text{const}$, не нарушающих термодинамического равновесия между системой и терmostатом, смещение $u = \text{const}$ переводит открытую систему в неравновесное стационарное состояние, в котором она служит проводником направленных потоков энергии, энтропии, заряда и т. д. от источника смещения в термостат (вызванный u поток заряда показан на рис. 4 круговой стрелкой). С точки зрения статистической механики вносимое u возмущение непотенциально, т. е. не описывается изменением гамильтониана системы. Именно непотенциальностью возмущения объясняется возможность гигантского возрастания флуктуаций и радикального изменения их спектра, когда флуктуации перерастают в квазимохроматические колебания. Таким образом, введение дополнительной полустепени свободы позволяет рассмотреть стационарное состояние открытой системы (рис. 4) как квазистационарное состояние части закрытой системы, находящейся в процессе релаксации к равновесию.

Отметим также, что данный подход можно применить и к случаю, когда осциллятор одновременно испытывает и потенциальное возмущение, например, в случае сил, зависящих от времени. Стратонович в [4–6] получил обобщение формул (6) на случай $f_i = \text{const} \neq 0$, когда кинетические коэффициенты являются также функциями f_i , но в рамках

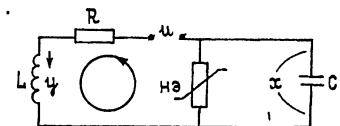


Рис. 4. Открытая неравновесная осцилляторная система. Стрелкой показан поток заряда, вызываемый постоянным смещением u .

* Это один из общих методов анализа неравновесных флуктуаций (см., например, [8]).

марковской теории нельзя рассмотреть случай переменных сил, поскольку нельзя определенно ответить на вопрос, являются ли кинетические коэффициенты 1) функциями мгновенных значений сил или же 2) функционалами от них (в этом варианте анализ соотношений между кинетическими коэффициентами существенно бы затруднился). В [1] показано, что из формулы временной симметрии (1), принципа причинности и предположения о марковости макропеременных с необходимостью следует, что осуществляется более простой первый вариант. Поэтому соотношения Стратоновича можно непосредственно распространить на случай переменных сил и, например, применить их к анализу нелинейного осциллятора, синхронизируемого внешними силами.

2. АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. В данном разделе мы проведем анализ полученных стохастических уравнений (15), соответствующих схеме, изображенной на рис. 4. Начнем с рассмотрения стационарных флюктуаций, зависящих от многих факторов, таких, как температура, форма нелинейной характеристики $F(u)$, величина линейных потерь в контуре, смещение u . Считаем нашу систему высокодобротным осциллятором, т. е. члены, характеризующие как линейную, так и нелинейную диссипацию, малыми:

$$\mu_1 \ll \omega_0, \quad F(Q/C)/Q \ll \omega_0. \quad (17)$$

Введем для удобства переменные с размерностью напряжения $x = Q/C$, $y = \rho J$, $\rho \equiv \sqrt{L/C}$ и безразмерное время $\tau = t/\sqrt{LC}$. Безразмерные комбинации μ_1/ω_0 , $\rho G(x)$ и комбинацию $\rho F(x)$ далее обозначаем по-прежнему через μ_1 , G , F , что не должно вызвать затруднений. В стационарном режиме $\left(\frac{\partial}{\partial T} W(\tau, x, y) = 0 \right)$ получаем из (16)

$$\langle F(x) \rangle + \langle y \rangle = 0, \quad \langle x \rangle - \mu_1 \langle y \rangle = u, \quad (18)$$

а также соотношения для вторых кумулянтов, связывающие их с кумулянтами более высокого порядка:

$$\begin{aligned} \langle x, F(x) \rangle + \langle x, y \rangle &= \sigma_0^2 \langle G(x) \rangle, \\ \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle &= \mu_1 \langle x, y \rangle + \langle y, F(x) \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \mu_1 (\langle y, y \rangle - \sigma_0^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь кумулянтные скобки $\langle \dots, \dots \rangle$ обозначают вторые кумулянты стационарных распределений x , y и т. д.*. Используя условие (17), вместо (18), (19), можно написать следующие приближенные уравнения:

$$\langle x \rangle \approx u, \quad \langle y \rangle \approx 0; \quad (20a)$$

$$\langle y, x \rangle \approx \mu_1 (\langle y, y \rangle - \sigma_0^2) \ll \langle x, x \rangle; \quad (20b)$$

$$\langle x, x \rangle \approx \langle y, y \rangle; \quad (20c)$$

$$\langle x, F(x) \rangle + \mu_1 \langle x, x \rangle \approx \sigma_0^2 (\mu_1 + \langle G(x) \rangle). \quad (20d)$$

При $u = 0$ x и y являются независимыми гауссовыми величинами с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ_x^2 , σ_y^2 ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2$). При любом $u \neq 0$ стационарное распределение негауссово, но, согласно

* О введенном Малаховым формализме кумулянтных скобок и его приложении к марковским процессам см., например, [9].

(20б), коэффициент взаимной корреляции x и y по-прежнему мал. Далее, пока смещение не слишком велико, флуктуации остаются приблизительно гауссовыми и слабыми в смысле $\langle x, x \rangle \ll u_0^2$, и поэтому к (20г) можно применить известную формулу размыкания для гауссовой величины (см., например, [10]):

$$\langle x, F(x) \rangle \approx \langle x, x \rangle \langle F'(x) \rangle,$$

а затем заменить $\langle F'(x) \rangle$ на $F'(\langle x \rangle) \approx F'(u)$ в соответствии с (20а). Тогда из (27г) получаем

$$\langle x, x \rangle \approx \sigma_0^2 \frac{\mu_1 + G(u)}{\mu_1 + F'(u)} \approx \sigma_0^2 \frac{\mu_1 + G_0(u)}{\mu_1 + G_1(u)}, \quad (21)$$

где $G_0(u)$ означает среднюю проводимость, а $G_1(u)$ — дифференциальную проводимость НЭ. Если вольт-амперная характеристика имеет вид, изображенный на рис. 3а, то $G_1 < G_0$ при $0 < u \leq u_0$, и с ростом u это неравенство усиливается. Согласно (21), дисперсия флуктуаций растет с увеличением смещения и обращается в бесконечность, когда $\mu_1 + G_1(u_1) = 0$. Это приближенное уравнение для порога самовозбуждения; его второй корень обозначим через $u_2 (u_2 > u_1)$. При $u_1 \leq u \leq u_2$ возбуждаются автоколебания с амплитудой порядка u_0 и $\langle x, x \rangle \sim u_0^2$.

Для определения амплитуды A колебаний, которые вследствие (17) являются квазигармоническими, представим x в виде $x = u + A \cos \varphi$, где фаза φ распределена равномерно, и пренебрежем правой частью в (20г). Получим следующее уравнение для A :

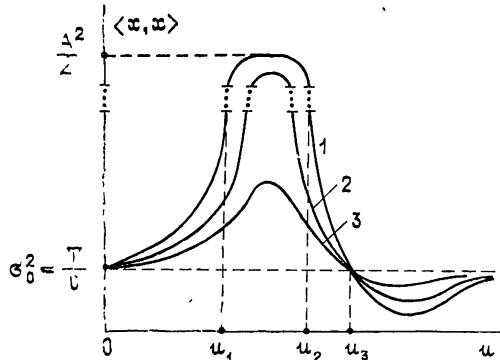
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi F(u + A \cos \varphi) d\varphi + \mu_1 \frac{A}{2} = 0. \quad (22)$$

Для улучшенной по сравнению с (22) оценки дисперсии снова пренебрежем правой частью в (20г), а в левой части используем гауссово размыкание скобки $\langle x, F(x) \rangle$. В результате получим уравнение для определения дисперсии вблизи порога ($u \leq u_1$, $u \geq u_2$):

$$\langle G_1(x) \rangle + \mu_1 \approx 0, \quad \langle x \rangle \approx u. \quad (23)$$

Рис. 5. Зависимость второго кумулянта напряжения x (заряда $Q \sim Cx$) на емкости C от величины смещения u , определяющего степень не- равновесности системы;

1—зависимость $\langle x, x \rangle$ в отсутствие тепловых флуктуаций параметров системы; 2—кривая $\langle x, x \rangle \sim \langle Q, Q \rangle$, полученная при учете тепловых флуктуаций емкости; 3—отсутствие гигантского нарастания $\langle x, x \rangle$ вследствие увеличения интенсивности тепловых флуктуаций емкости; прилежащая к u_3 область значений ($u \geq u_3$) — область подавления флуктуаций.



Рассмотрим поведение дисперсии при $u \gg u_2$. Если $F(u) \sim u^n$ для $u > u_2$, то, согласно (21), $\langle x, x \rangle = \frac{\sigma_0^2}{n}$. Если же $F(u) \sim \exp(ku)$, то

$$\langle x, x \rangle = \frac{\sigma_0^2}{ku}, \quad \text{т. е. дисперсия флуктуаций существенно зависит от}$$

вольт-амперной характеристики, от характера ее нелинейности. Для характеристики, изображенной на рис. 3а, возможны различные зависимости $\langle x, x \rangle$ от u , показанные на рис. 5. При $u > u_3$ в любом случае имеется область подавления флюктуаций, поскольку средняя проводимость $G_0(u)$, определяющая интенсивность шумового тока НП, оказывается меньше дифференциальной проводимости, характеризующей отклик системы на шумовой ток.

2. Рассмотрим приближенно спектральные характеристики флюктуаций. Вводя обозначения $x = x(0)$, $x_\tau = x(\tau)$, $y = y(0)$, $y_\tau = y(\tau)$, из (15) получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle x_\tau, x \rangle &= -\langle x, F(x_\tau) \rangle - \langle y_\tau, x \rangle, \\ \frac{d}{d\tau} \langle y_\tau, y \rangle &= -\mu_1 \langle y_\tau, x \rangle - \langle x_\tau, x \rangle.\end{aligned}\quad (24)$$

Используя гауссово размыкание нелинейной кумулянтной скобки $\langle x, F(x_\tau) \rangle = \langle x, x_\tau \rangle F'(u)$, находим из (24) и (21):

$$\begin{aligned}\langle x_\tau, x \rangle &\approx \sigma_0^2 \frac{\mu_1 + G_0(u)}{\Delta} \left\{ \cos \Omega_0 \tau + \frac{\Delta}{\Omega_0} \sin \Omega_0 |\tau| \right\} e^{-\Delta |\tau|}, \\ 2\Delta &= \mu_1 + G_1(u), \quad \Omega_0^2 = 1 - \frac{1}{4} (G_1(u) - \mu_1)^2.\end{aligned}\quad (25)$$

Отсюда видно, что ширина полосы флюктуаций $\Delta(u)$ уменьшается вместе с ростом дисперсии и наоборот:

$$\Delta(u) \approx \frac{\sigma_0^2}{2 \langle x, x \rangle} [\mu_1 + G_0(u)]. \quad (26)$$

В области автоколебаний удобнее перейти от (26) к уравнениям для амплитуды и фазы колебаний, полагая

$$x(t) = u + [A + a(t)] \cos \varphi(t), \quad y(t) = [A + a(t)] \sin \varphi(t).$$

Для случая, когда значение u не слишком близко к границам области автоколебаний (u_1 и u_2), нетрудно найти диффузию фазы и полосы:

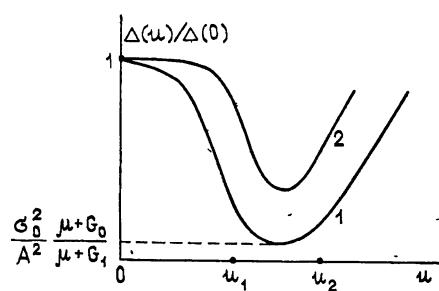


Рис. 6. Зависимость относительной полосы спектра флюктуаций $\Delta(u)/\Delta(0)$ от смещения u :

1—без учета тепловых флюктуаций параметров; 2—с учетом флюктуаций емкости

$$\begin{aligned}\Delta(u) &= \frac{1}{2} \frac{d \langle \varphi^2 \rangle}{dt} = \frac{\sigma_0^2}{2A^2} \left\{ \mu_1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi G_0(u + A \cos \varphi) d\varphi \right\},\end{aligned}\quad (26')$$

где среднее значение амплитуды A находится из (22). Качественная зависимость полосы от смещения приведена на рис. 6. В выражение (26) для естественной ширины линии автоколебания входит средняя проводимость НЭ как функция приложенного к НЭ напряжения.

3. ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СИСТЕМ

1. Выше был рассмотрен метод восстановления флюктуационных характеристик нелинейной системы по известным диссипативным характеристикам, основанный на общих соотношениях статистической механики. Можно поставить и обратную задачу определения диссипативных характеристик по флюктуационным. Такая задача возникает, если необходимо учесть флюктуации параметров системы, имеющие тепловое происхождение. Поясним ее на прежнем примере — нелинейном осцилляторе, в котором теперь флюкутирует емкость C . Здесь можно 1) ввести дополнительные макропараметры, относящиеся к емкости, причем, 2) модель для них построить таким образом, чтобы детали модели не сказывались на результатах для исходных переменных, 3) далее исследовать соотношения (6) для кинетического оператора расширенного набора макропараметров. Однако если флюктуации параметра предполагаются «быстрыми», то их можно аппроксимировать δ -коррелированным процессом с заданной интенсивностью, не вводя дополнительной макропараметром. Для того, чтобы удовлетворились, по-прежнему, общие соотношения симметрии (1), (6), (10), нужно, очевидно, заданный новый флюктуационный источник «уравновесить» добавочной диссипацией. Эта диссипация, как будет видно из дальнейшего, всегда оказывается нелинейной*.

Обозначим малые и быстрые относительные флюктуации емкости C через $\mathbf{x}(t)$, считая $\mathbf{x}(t)$ гауссовым δ -коррелированным случайным процессом с интенсивностью $2D$. Предполагая, что с каждым флюктуационным источником связан свой механизм диссипации, рассмотрим схему рис. 4, считая, что емкость C флюкутирует: $C(t) = C[1 + \mathbf{x}(t)]^{-1}$.

Стохастические уравнения в переменных $Q(t) = \frac{Cu(t)}{1+\mathbf{x}(t)}$, $J(t)$ примут вид

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -J - B_1(Q, J) + \theta_1(t), \\ \dot{J} &= -\omega_0^2 Cu - \mu_1 J - B_2(Q, J) + \theta_2(t) + \omega_0^2 [1 + \mathbf{x}(t)] Q, \end{aligned} \quad (27)$$

где $B_1(Q, J)$ — среднее значение тока через НП, $\theta_1(t)$ — его флюктуационная часть (в общем случае связанный как с диссипацией в НП, так и с флюктуациями емкости); $B_2(Q, J)$ — член, описывающий дополнительную эффективную диссипацию, связанную с флюктуациями емкости и возникающую вследствие взаимодействия системы с термостатом через флюктуации емкости, т. е. по-новому, «неэлектрическому каналу». Конкретный механизм возникновения этой диссипации (см. п. 2 настоящего раздела) в данном подходе несуществен.

В гауссовой модели зададим интенсивность шумового источника $\theta_1(t)$, обозначим ее через $2\sigma_1^2 P(Q, J)$, а также взаимную интенсивность $\theta_1(t)$ и $\mathbf{x}(t)$, равную $R(Q, J)$, поскольку эти процессы, вообще говоря, коррелированы. Тогда соответствующий (27) кинетический оператор будет иметь вид

$$\begin{aligned} J \frac{\partial}{\partial Q} - \omega_0^2 (Q - Cu) \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial Q} B_1(Q, J) + \sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial Q^2} P(Q, J) + \\ + \mu_1 \frac{\partial}{\partial J} \left(J + \sigma_1^2 \frac{\partial}{\partial J} \right) + \frac{\partial}{\partial J} B_2(Q, J) + D \omega_0^4 Q^2 \frac{\partial^2}{\partial J^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial Q \partial J} QR(Q, J). \end{aligned} \quad (28)$$

* Напомним, что флюктуации параметров в линейной системе, при соответствующих вероятностных характеристиках параметров, могут приводить к стохастической неустойчивости в том или ином смысле [1]. С другой стороны, в тепловом равновесии все физические величины устойчивы и конечны. Ясно, что в общем случае это противоречие может быть снято лишь в рамках нелинейной модели системы.

При смещении $u = 0$ кинетические коэффициенты этого оператора должны удовлетворять соотношениям (6) с

$$W_0(Q, J) \sim \exp \left(-\frac{Q^2}{2\sigma_1^2} - \frac{J^2}{2\sigma_2^2} \right),$$

откуда нетрудно получить условия

$$P(Q, J) = P(Q, -J), \quad R(Q, J) = -R(Q, -J);$$

$$B_1(Q, J) + B_1(Q, -J) = 2\Delta_Q P(Q, J) + \frac{1}{\sigma_1^2} \Delta_J QR(Q, J), \quad (29)$$

$$\omega_0^{-2} [B_2(Q, J) - B_2(Q, -J)] = 2 \frac{D}{\sigma_1^2} J Q^2 + \frac{1}{\sigma_1^2} \Delta_Q QR(Q, J),$$

$$\omega_0^2 \Delta_Q [B_1(Q, J) - B_1(Q, -J)] + \Delta_J [B_2(Q, J) + B_2(Q, -J)] = 0,$$

где

$$\Delta_Q \equiv \left(Q - \sigma_1^2 \frac{d}{dQ} \right), \quad \Delta_J \equiv \left(J - \sigma_2^2 \frac{\partial}{\partial J} \right).$$

Поскольку функции $B_1(Q, J)$, $P(Q, J)$ описывают ток через НП, а $R(Q, J)$ — корреляцию этого тока с флюктуациями емкости и в конечном счете с зарядом Q , естественно предположить, что эти три функции не зависят от J . Тогда из (29) следует:

$$R(Q, J) = 0, \quad B_1(Q, J) = \Delta_Q P(Q); \quad (30)$$

$$B_2(Q, J) = \omega_0^2 \frac{D}{\sigma_1^2} J Q^2 = -B_2(Q, -J). \quad (30')$$

Соотношение (30) имеет ту же форму, что и (14), поэтому, возвращаясь к старым обозначениям, заменим $B_1(Q)$ на $F(x)$, а $P(Q)$ на $G(x)$. Соотношение (30') дает эффективную нелинейную диссипацию, сопряженную с флюктуациями параметра. Стохастические уравнения (27) принимают в случае (30), (30') вид ($\mu \equiv L \mu_1$)

$$\dot{Q} = -J - F(Q/C) + \sqrt{2T G(Q/C)} \xi_1(t), \quad (31)$$

$$L \dot{J} = -u - \mu J - \frac{D}{C^2 T} J Q^2 + \sqrt{2T \mu} \xi_2(t) + \frac{Q}{C} (1 + \sqrt{2D} x(t)),$$

где ξ_1 , ξ_2 , x — стандартные δ -коррелированные независимые процессы. Не рассматривая другие возможности, допускаемые формулами (29), обратимся к анализу простейшего случая* — к уравнению (31), которому соответствует кинетический оператор

$$\begin{aligned} J \frac{\partial}{\partial Q} - \omega_0^2 (Q - Cu) \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial Q} G(Q/C) \left(Q/C + T \frac{\partial}{\partial Q} \right) + \\ + \left(\mu_1 + \omega_0^2 \frac{DQ^2}{\sigma_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial J} \left(J + \frac{T}{L} \frac{\partial}{\partial J} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Проводя приближенный анализ неравновесных флюктуаций в зависи-

* При этом не делается предположений, существенно ограничивающих общность задачи.

мости от смещения, так же, как это делалось в разд. 2, для средней амплитуды A автоколебаний найдем* вместо (22)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi F(u + A \cos \varphi) d\varphi + \frac{\mu_1 A}{2} + \frac{D}{2\sigma_0^2} A \left(u^2 + \frac{A^2}{4} \right) \approx 0,$$

или

$$\mu_1 + G_1(u) + \frac{Du^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} G_1''(u) + \frac{D}{\sigma_0^2} \right] A^2 \approx 0. \quad (33)$$

Отсюда получаем уравнение для пороговых значений смещения

$$\mu_1 + G_1(u) + \frac{Du^2}{\sigma_0^2} = 0, \quad (33')$$

из которого видно, что с увеличением D зона автоколебаний сужается, а затем исчезает вообще. Таким образом, при достаточно большой интенсивности тепловых флюктуаций емкости самовозбуждения колебаний в рассматриваемой нелинейной системе не будет. Согласно (33) амплитуда возможных колебаний также уменьшается. Общая картина зависимости дисперсии $\langle Q, Q \rangle$ от смещения при наличии флюктуаций емкости приведена на рис. 5.

Эти результаты относительно влияния естественных флюктуаций емкости представляются весьма интересными. Возбуждающее параметрическое влияние флюктуаций компенсируется возникающей в системе эффективной нелинейной диссипацией. Вообще говоря, эти два механизма могут разделять «сферы влияния». Рассмотрев диффузию фазы при автоколебаниях и соответствующую ширину спектральной линии, получим для последней вместо (26') величину (см. также рис. 6)

$$\Delta \approx \frac{\sigma_0^2}{2A^2} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi G_0(u + A \cos \varphi) d\varphi \right\} + \frac{3}{8} D \approx \frac{\sigma_0^2}{2A^2} (\mu_1 + G_0(u)) + \frac{3}{8} D, \quad (34)$$

откуда видно, что флюктуации емкости увеличивают естественную ширину линии. Понять физическую сторону параметрических эффектов и объяснить возникновение нелинейной стохастической диссипации, сопряженной с флюктуациями емкости, помогает рассмотрение модели тепловых флюктуаций параметра.

2. Переходя к модели, сопоставим флюктуациям параметра макропеременную $\alpha(t)$, введя ее соотношением $C(t) = C/(1+\alpha(t))$. Для того, чтобы снова воспользоваться общими методами статистической механики в наиболее простой форме, полную совокупность макропеременных определим так, чтобы они описывались (в отсутствие термостата) уравнениями Гамильтона. С этой целью введем импульс $\beta(t)$, канонически сопряженный координате $\alpha(t)$, и зададим гамильтониан четырех макропеременных Q, M, α, β , где Q — заряд на емкости C , M — магнитный поток в индуктивности L , формулой

$$H = \frac{1+\alpha}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} M^2 + \frac{1}{2m} \beta^2 + V(\alpha).$$

* Для удобства сравнения результаты приведены в терминах той же размерности, что и в разд. 2.

Здесь $V(\alpha)$ — потенциальная энергия, связанная с изменением α ; m играет роль массы. Соответствующие этому гамильтониану уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -J, \quad LJ = \frac{1+\alpha}{C} Q, \\ \dot{\alpha} &= \beta/m, \quad \dot{\beta} = -\frac{1}{2C} Q^2 - V'(\alpha).\end{aligned}\tag{35}$$

Введем далее термостат, для чего добавим в (35) диссипативные члены. Для простоты считаем сначала, что связь с термостатом осуществляется только через α и β , т. е. полагаем диссипативный член в уравнении (35) для Q равным нулю (ср. с уравнением (15)). Тогда (35) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -J, \quad LJ = \frac{1+\alpha}{C} Q, \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{m} \beta, \quad \dot{\beta} = -\frac{1}{2C} Q^2 - V'(\alpha) - \frac{r}{m} \beta.\end{aligned}\tag{35'}$$

Следующий шаг в учете термостата — введение шумовых источников общим методом из (35') и соотношений (6), в которых $W_0 \sim \sim \exp\left(-\frac{H}{T}\right)$. Дальнейший анализ модели сводится к изучению получаемого кинетического уравнения.

Теперь можно пояснить появление нелинейного по заряду члена $\frac{1}{2C} Q^2$ в уравнении для $\dot{\beta}$. Его происхождение — простое следствие сохранения полной энергии макропеременных, включающей энергию взаимодействия $\frac{\alpha Q^2}{2C}$ электрических и неэлектрических переменных.

Проследим теперь, как эта недиссипативная нелинейность переходит в диссипативную, когда макропеременные Q, J становятся все более медленными, чем α, β . При этом последние мы передаем термостату, т. е. переводим их в разряд микропеременных.

Введем шумовые источники в (35'). Источник в уравнении должен, как нетрудно увидеть, быть равным $\sqrt{2Tr} \times(t)$, где $\times(t)$ — стандартный гауссов δ -коррелированный процесс. Тогда (35') примет вид

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -J, \quad LJ = \frac{1+\alpha}{C} Q, \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{m} \beta, \quad \dot{\beta} = -\frac{1}{2C} Q^2 - V'(\alpha) - \frac{r}{m} \beta + \sqrt{2Tr} \times(t).\end{aligned}\tag{36}$$

Аппроксимируем функцию $V'(\alpha)$ линейной: $V'(\alpha) = d\alpha$ (что несущественно для дальнейшего). Из последних двух уравнений (36) получаем

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t),$$

$$\alpha_1(t) \equiv (mp^2 + rp + d)^{-1} \sqrt{2Tr} \times(t),$$

$$\alpha_2(t) \equiv (mp^2 + rp + d)^{-1} \left(-\frac{1}{2C} Q^2 \right),$$

где $p \equiv \frac{d}{dt}$. Найдем дисперсию σ_a^2 и интенсивность $2D$ случайного процесса $\alpha_1(t)$:

$$\sigma_a^2 = \langle \alpha^2(t) \rangle = \frac{T}{d}, \quad 2D = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \alpha_1(t) \alpha_1(0) \rangle dt = \frac{2Tr}{d^2}.$$

Отсюда $d = \frac{T}{\sigma_a^2}$, $r = \frac{DT}{\sigma_a^4}$. Подставляя эти значения в выражение для $\alpha_2(t)$, находим:

$$\alpha_2(t) = \frac{\sigma_a^2}{T} \left(m \frac{\sigma_a^2}{T} p^2 + \frac{D}{\sigma_a^2} p + 1 \right)^{-1} \left(-\frac{Q^2}{2C} \right). \quad (37),$$

Считая переменную Q очень медленной, можно заменить $\alpha_1(t)$ на δ -коррелированный процесс $\alpha_1(t) = \sqrt{2D} \times(t)$, а в (37) оставить только два члена разложения по p :

$$\alpha_2(t) \approx \frac{\sigma_a^2}{T} \left(1 - \frac{D}{\sigma_a^2} p \right) \left(-\frac{Q^2}{2C} \right) = -\sigma_a^2 \frac{Q^2}{2CT} + \frac{D}{CT} Q \dot{Q}.$$

Отсюда из первого уравнения (36) получаем

$$\alpha(t) = \sqrt{2D} \times(t) - \frac{D}{CT} JQ - \sigma_a^2 \frac{Q^2}{2CT} \times(t). \quad (38)$$

Наконец, подставляя это выражение в (36), приходим к следующему результату исключения быстрых переменных:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -J, \\ Lj &= \frac{Q}{C} \left(1 - \sigma_a^2 \frac{Q^2}{2CT} \right) - \frac{D}{C^2 T} JQ^2 + \sqrt{2D} \frac{Q}{C}. \end{aligned} \quad (39)$$

В рассмотренной модели мы получили также нелинейную зависимость напряжения на емкости от заряда: $u = \frac{Q}{C} \left(1 - \sigma_a^2 \frac{Q^2}{2CT} \right)$. Происхождение этой нелинейности можно объяснить, отбрасывая в (39) все диссипативные и флуктуационные члены. Тогда мы получим уравнения движения, соответствующие гамильтониану:

$$\frac{M^2}{2L} + \frac{Q^2}{2C} - \sigma_a^2 \frac{Q^4}{8C^2T},$$

который имеет смысл свободной энергии системы при заданных значениях макропараметров Q, M . При $\sigma_a^2 \ll 1$, что предполагается в данном анализе, член в (39), пропорциональный Q^3 , можно опустить, однако диссипативный член $\sim JQ^2$ имеет принципиальное значение.

Сравнивая (39) с (31), видим, что в пренебрежении взаимодействием системы с термостатом по электрическому каналу (а также при достаточно малой σ_a^2) обе системы стохастических уравнений, полученных разными способами, совпадают. Если же ввести связь с термостатом и через макропараметры — ток и заряд, то полная система стохастических уравнений примет вид, также полностью аналогичный системе (31).

Тем самым мы показали, что нелинейная диссипация, сопряженная

с флуктуациями емкости, возникает в результате взаимодействия электрических и неэлектрических переменных. Доказана также эквивалентность точного статистического и модельного подходов к исследованию параметрических эффектов в нелинейном осцилляторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, ЖЭТФ, 72, 237 (1977).
2. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 55, 2322 (1968).
3. Г. Ф. Ефремов, Изв. вузов — Радиофизика, 15, № 8, 1207 (1972).
4. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия физ.-астр., № 5 (1962).
5. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия физ.-астр., № 4 (1967).
6. Р. Л. Стратонович, Изв. вузов — Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
7. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 58, 1612 (1970).
8. H. Furukawa, J. Stat. Phys., 10, № 2, 139 (1974).
9. А. Н. Малахов, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974); 19, № 1, 71 (1976); 19, № 2, 214 (1976).
10. Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).
11. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. вузов — Радиофизика, 18, № 2, 222 (1975).

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
27 июля 1977 г.

NONLINEAR STOCHASTIC MODELS OF OSCILLATING SYSTEMS

G. N. Bochkov, Yu. E. Kuzovlev

Markov theory of thermodynamic fluctuations in nonlinear systems strictly founded and generalized on the basis of fundamental postulates of statistical mechanics [1] is used to analyse fluctuations in essentially nonlinear and nonequilibrium oscillation systems. To study nonequilibrium stationary fluctuations in the open system the presentation of the latter as a part of slowly relaxing closed system is used. A thermodynamically successive method of definition of "noise" source characteristics is considered in stochastic (Langevin) equations providing solution of universal nonlinear fluctuation dissipative relations [1-7]. This method beginning with the building of the kinetic operator of Markov process may be opposed to the approach when nonlinear Langevin equations are written from "physical considerations" and the noise sources satisfy only linear fluctuation dissipative relations. Nonequilibrium fluctuations are studied in the linear oscillator including critical fluctuations near the boundary of the stability region and also the effect of fluctuation suppression at large deviations from the thermodynamic equilibrium. By an example of the oscillator with thermal fluctuations of the capacity a problem of restoration of dissipative characteristics of the system by fluctuations ones is considered. It is shown that the thermal parametric fluctuations are tightly linked with the nonlinear dissipation.