

УДК 621.373.42

## О СИНХРОНИЗАЦИИ И СТОХАСТИЗАЦИИ ДВУХЧАСТОТНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

С. Я. Вышкинд

Рассмотрены неавтономные автоколебательные режимы двухмодового генератора. Показано, что внешнее поле может либо синхронизовать автогенератор, либо способствовать его стохастизации. В пространстве параметров системы найдены области стабилизации различного типа. Рассмотрение проведено для случая линейных потерь, а также с учетом нелинейного поглощения.

Известно, что при нелинейном взаимодействии нарастающей моды с другими, для которых диссипация положительна, возможно ограничение амплитуды этой моды. Процессы такого рода имеют место в плазме с потоками [1], нелинейной оптике, когда для одной из частот создана инверсная заселенность уровней, в гидродинамике [2], механических системах и т. д. Характер стабилизации такой линейной неустойчивости может быть различным — наряду со статическим и динамическим существует стохастический режим стабилизации [2–5], причем реализация того или иного режима ограничения амплитуды определяется, в основном, соотношением между параметрами системы — инкрементом и диссипацией (линейной [1–4] и нелинейной [5]), величиной расстройки от синхронизма (линейной [4] и нелинейной [6]) и т. д. В связи с этим возникает проблема управления этими режимами, например, с помощью внешнего гармонического поля. Эта задача и решается в данной работе.

1. Рассмотрим автогенератор, представляющий собой две резонансно связанные моды с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  (основная мода  $\omega$  затухает, а ее гармоника обладает инкрементом). Пусть на этот генератор действует внешняя сила с частотой, близкой к собственной частоте  $\omega$ . Усредненные уравнения для комплексных амплитуд  $a_{1,2}$ , взаимодействующих за счет квадратичной нелинейности осцилляторов, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \sigma a_1^* a_2 e^{i\bar{\delta}t} - \bar{\nu} a_1 + \bar{\mathcal{E}} e^{i\bar{\xi}t}, \\ \dot{a}_2 &= -\sigma a_1^2 e^{-i\bar{\delta}t} + \bar{\gamma} a_2 - \rho a_2 |a_2|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\bar{\nu}$  — линейный декремент  $a_1$ ,  $\bar{\gamma}$  — декремент  $a_2$ ,  $\bar{\delta}$  — расстройка от синхронизма,  $\bar{\mathcal{E}}$  — амплитуда внешнего поля,  $\bar{\xi}$  — учитывает различие между частотой внешнего поля и основной частотой  $\omega$ ,  $\sigma$  — коэффициент нелинейного взаимодействия,  $\rho$  характеризует нелинейное затухание неустойчивой моды.

Если ввести новое время  $\tau = \sigma t$  и параметры  $\nu, \gamma, \delta, \xi, \mathcal{E} = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\nu}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\xi}, \bar{\mathcal{E}}$ , то в действительных переменных

$$X = |a_2| \sin(\arg a_2 - 2 \arg a_1 + \delta t),$$

$$Y = |a_2| \cos(\arg a_2 - 2 \arg a_1 + \delta t), \quad Z = |a_1|, \quad (2)$$

$$T = \frac{\mathcal{E}}{|a_1|} \sin(\arg a_1 - \xi t), \quad V = (\mathcal{E}/|a_1|) \cos(\arg a_1 - \xi t)$$

система (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Z^2 + Y(2Y - T + \delta) + \gamma X - \rho X(X^2 + Y^2), \\ \dot{Y} &= -X(2Y - T + \delta) + \gamma Y - \rho Y(X^2 + Y^2), \\ \dot{Z} &= Z(X - V - \nu), \\ \dot{T} &= -T(X - V - \nu) - V(Y - T + \xi), \\ \dot{V} &= V(X - V - \nu) + T(Y - T + \xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим вначале случай малых амплитуд, когда величиной  $\rho(X^2 + Y^2)$  в (1) можно пренебречь по сравнению с  $\gamma$ , т. е. ограничение неустойчивости еще не связано с нелинейным поглощением. При  $T = V = 0$ , т. е. в отсутствие внешней силы, движения с конечной амплитудой возможны только при наличии расстройки  $\delta$ , причем стабилизация носит статический характер, если

$$\delta^2 > \frac{(\gamma - 2\nu)^2(2\nu^2 - 2\gamma\nu + \gamma^2)}{(2\nu^2 - 2\gamma\nu - \gamma^2)}, \quad (4)$$

и динамический характер (периодические пульсации) при выполнении обратного неравенства [4].

Наличие внешнего поля существенно усложняет поведение системы. Так, в фазовом пространстве системы (3) пять состояний равновесия (из имеющихся шести) всегда неустойчивы, а шестое с координатами

$$\bar{X} = \nu, \quad \bar{Y} = \frac{\delta\nu}{\gamma - 2\nu}, \quad \bar{Z} = \sqrt{\gamma\nu \left[ 1 + \left( \frac{\delta}{\gamma - 2\nu} \right)^2 \right]}, \quad \bar{T} = \bar{V} = 0 \quad (5)$$

устойчиво при выполнении соотношения (4) и неустойчиво в противном случае\*. При наличии в системе только неустойчивых состояний равновесия характер стабилизации (если она возможна) достаточно сложный. Поскольку аналитически решить систему уравнений (3) и проследить за бифуркациями в ее фазовом пространстве не удастся, были проведены численный эксперимент и моделирование системы на аналоговой вычислительной машине. При этом в пространстве параметров исследуемой системы были обнаружены области статического, динамического и стохастического поведения, которым в фазовом пространстве соответствуют устойчивое равновесие, устойчивый предельный цикл и странный аттрактор. Появление странного аттрактора связано с потерей устойчивости предельного цикла, возникающего, в свою очередь, при потере устойчивости состоянием равновесия (5).

Приведем здесь основные результаты проведенного исследования системы (3). Важно отметить, что при наличии внешнего поля стабилизация наступает даже при  $\delta = 0$ , что невозможно в автономном случае [5]. Динамическая стабилизация под действием внешнего поля возникает жестко, т. е. имеет место «гистерезис» — ограничение коле-

\* Следует отметить, что это состояние равновесия негрубое—два корня характеристического уравнения чисто мнимые. Эта негрубость есть следствие принятой идеализации модели.

баний в системе наступает и срывается при разных значениях  $\xi$ . Заметим, что при малых  $\xi$  стабилизация не наблюдалась — в этом случае действие внешней силы аналогично увеличению затухания в нижней, устойчивой моде (действительно, в последних трех уравнениях системы (3) содержится сумма  $(V + v)$ , которую можно интерпретировать как эффективное затухание  $\nu_{\text{эфф}}$ , причем  $\nu_{\text{эфф}}$  тем больше, чем меньше  $\xi$  (см. (3)), и мода  $\omega$  быстро затухает, не успевая ограничивать свою нарастающую гармонику. По этой же причине стабилизация в системе не наступает и при больших значениях декремента  $\nu^*$ . Области значений параметров, соответствующих различным режимам исследуемой системы, приведены на рис. 1. Видно, что с увеличением инкремента

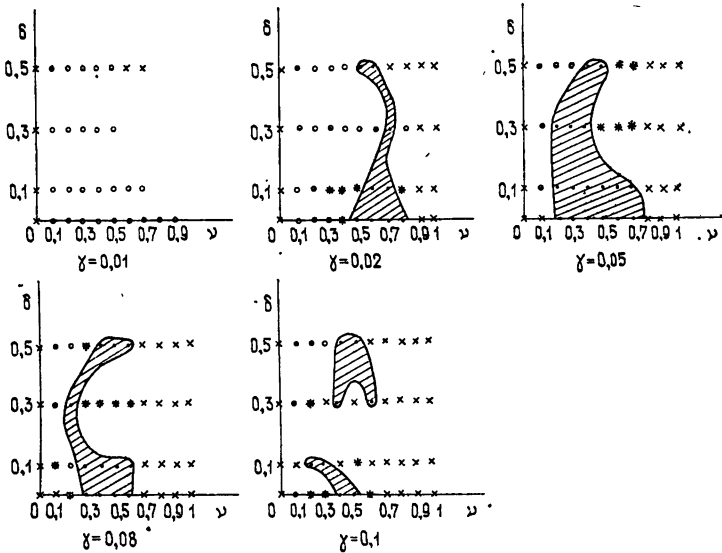


Рис. 1. Точки обозначены устойчивые состояния равновесия—им соответствует режим синхронизации; кружочками отмечены те значения параметров, которым в фазовом пространстве соответствуют предельные циклы; штриховкой обозначены области значений параметров, обеспечивающих возникновение странного аттрактора; переходные режимы показаны звездочками, неустойчивые—крестиками.

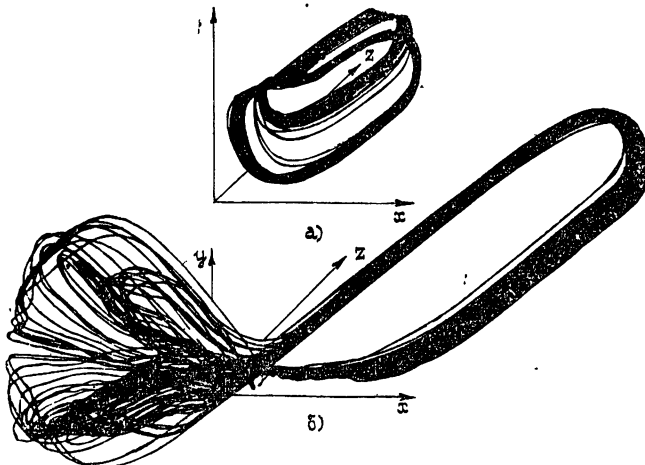


Рис. 2.  $\gamma = 0,1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\xi = 1$ : а)  $\nu = 0,1$ ; б)  $\nu = 0,4$ .

\* Очевидно, что обратная ситуация, когда  $\nu$  близко к 0, тоже не обеспечивает ограничения неустойчивости — в этом случае обе моды растут одновременно.

та  $\gamma$  ограничение неустойчивости возникает (и исчезает) при все меньших значениях декремента  $\nu$ . При достаточно больших инкрементах ( $\gamma = 0,1$ ) в системе возникают «островки динамики» — т. е. появляются

динамические режимы, соседствующие либо со стохастическими режимами, либо с областями отсутствия стабилизации. На рис. 2—6 приведены примеры фазовых портретов странных аттракторов, возникающих в рассматриваемой системе (их изображение приведено в трехмерном пространстве  $XYZ^*$ ) для различных значений параметров.

На рис. 2 можно увидеть, как с увеличением декремента  $\nu$  существенно увеличиваются размеры странного аттрактора. С помощью рис. 3 прослеживаются следующие бифуркации: при  $\nu = 0,4$  в системе существует трехкратный цикл, который при  $\nu = 0,5$  стягивается в однократный, а при дальнейшем увеличении декремента ( $\nu = 0,6$ ) этот однократный цикл передает свою устойчивость двукратному. Как уже отмечалось, для стабилизации системы оказывается существенной величина  $\xi$  — при одном и том же значении  $\delta$  ста-

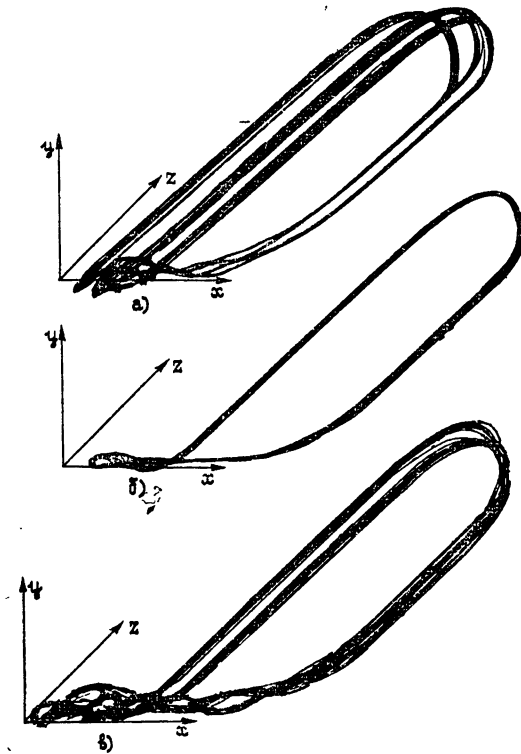


Рис. 3.  $\gamma = 0,08$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\xi = 1$ :  
а)  $\nu = 0,4$ ; б)  $\nu = 0,5$ ; в)  $\nu = 0,6$ .

бильзация пропадает при тем больших значениях  $\xi$ , чем больше величина  $\nu$  при неизменном  $\gamma$  (или чем меньше  $\gamma$  при постоянном  $\nu$ ), другими словами, ограничение неустойчивости обеспечивается меньшим интервалом  $\Delta\xi$ ; за бифуркациями, связанными с изменением  $\xi$ , можно проследить по рис. 4 и 5. Видно, что вначале (с уменьшением  $\xi$ ) цикл усложняется, потом возникает странный аттрактор, который при мень-

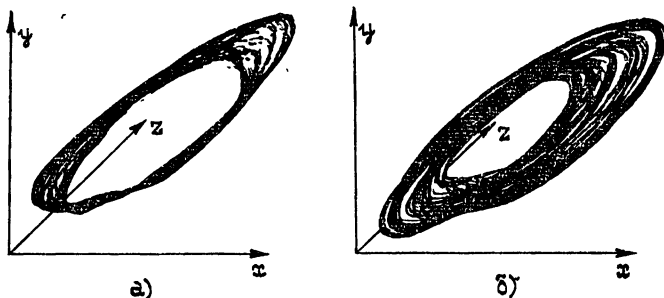


Рис. 4.  $\gamma = 0,08$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\nu = 0,2$ :  
а)  $\xi = 0,8$ ; б)  $\xi = 0,5$ .

\* Масштаб на рис. 2—6 одинаков и равен: вдоль осей  $X$  и  $Y$  — 0,01 безразмерных единиц в 1 см; вдоль оси  $Z$  — 0,02 в 1 см.

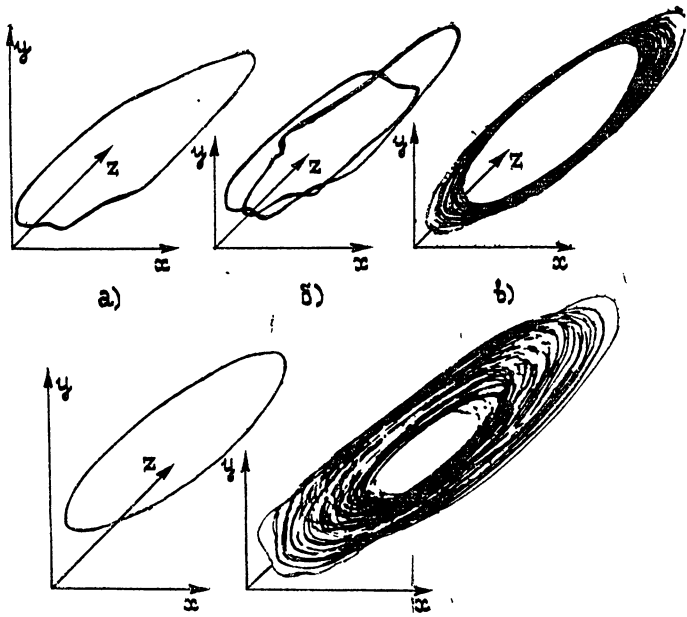


Рис. 5.  $\gamma = 0,1$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\nu = 0,2$ :  
 а)  $\xi = 1$ ; б)  $\xi = 0,9$ ; в)  $\xi = 0,8$ ; г)  $\xi = 0,7$ ; д)  $\xi = 0,6$ .

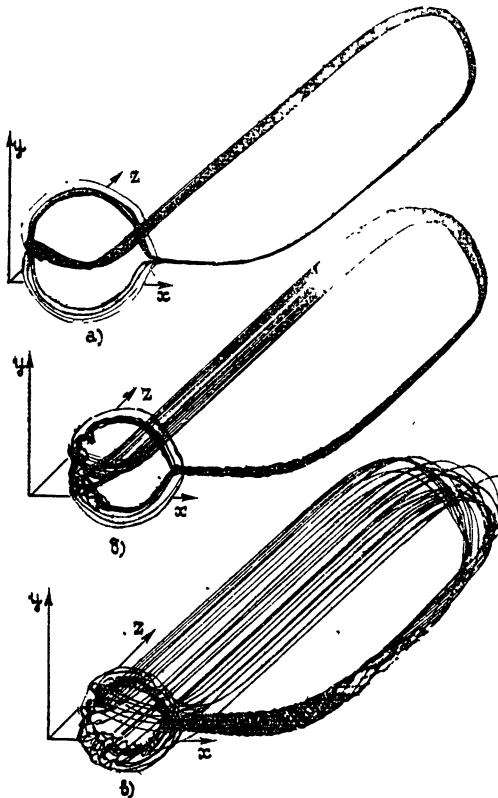


Рис. 6.  $\gamma = 0,05$ ,  $\delta = 0$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\xi = 1$ :  
 а)  $\mathcal{E} = 10^{-6}$ ; б)  $\mathcal{E} = 0,15 \cdot 10^{-3}$ ; в)  $\mathcal{E} = 0,02$ .

ших  $\xi$  стягивается к однократному циклу, а при дальнейшем уменьшении  $\xi$  вновь появляется сложный режим (см. рис. 5). Отметим, что все упомянутые режимы наблюдались при различных начальных условиях\* и для разных значений амплитуды внешнего поля (см. рис. 6). Заметим, что диапазон изменения  $\xi$  достаточно мал ( $\xi$  менялась от 0 до 0,05 в безразмерных единицах, при этом  $X$  и  $Y$  изменялись от 0 до 1,4—1,9, а  $Z$  — до 0,7—1 в безразмерных единицах).

Таким образом, внешнее поле, частота которого близка к частоте устойчивой моды генератора, может стабилизировать систему (даже если в его отсутствие система неустойчива) одним из следующих способов: 1) синхронизовать ее, 2) возбудить устойчивый режим периодических пульсаций и, наконец, 3) способствовать стохастизации автогенератора, т. е. привести к сложным, нерегулярным пульсациям амплитуд.

2. До сих пор речь шла о малых амплитудах, когда нелинейным поглощением можно было пренебречь. Очевидно, однако, что большие значения амплитуды внешнего поля сделают невозможным наше предположение о малости амплитуд взаимодействующих мод, т. е. учет нелинейной диссипации станет необходимым. В автономном случае [5] на плоскости параметров  $(\gamma, \rho)$  можно выделить области с различным поведением системы (см. рис. 7). В области 1 — одночастотный режим стабилизации, которому соответствует устойчивое состояние равновесия

$$\bar{X} = \sqrt{\gamma/\rho}, \quad \bar{Y} = \bar{Z} = 0. \quad (6)$$

При переходе через границу бифуркаций  $\gamma = \rho^2$  это состояние равновесия теряет устойчивость, передавая ее рождающемуся от него состоянию равновесия  $\bar{X} = \nu, \bar{Y} = 0, \bar{Z}^2 = \nu(\gamma - \rho^2)$ . При этом в системе возникает двухчастотный режим стабилизации (на рис. 7 — область 2а для  $\rho\nu < 1$  и — 2б для  $\rho\nu > 1$ ). На границе  $\gamma = (\rho^2 + 2\nu)$  это состояние равновесия теряет свою устойчивость, от него отделяется пара состояний равновесия:  $\bar{X} = \nu, \bar{Y} = \pm \sqrt{(\gamma - \rho^2 - 2\nu)/\rho}, \bar{Z}^2 = 2(\gamma - 2\nu)/\rho$ , устойчивых в областях 3 и 4. Это соответствует жесткому режиму стабилизации — в зависимости от начальных условий в системе устанавливается один из двух (отличающихся фазой) двухчастотных режимов. В незаштрихованных областях режимы стабилизации сложные. Так, при переходе через границы  $ab$  и  $bc$  возникает цикл вблизи теряющего свою устойчивость состояния равновесия (6). С уменьшением  $\rho$  размеры цикла увеличиваются, он сливается с сепаратрисами седел  $\bar{X} = \pm \sqrt{\gamma/\rho}, \bar{Y} = \bar{Z} = 0$  и исчезает. В фазовом пространстве системы возникает цикл, состоящий из кусков сепаратрис — негрубое образование, приводящее к появлению несобственной стохастичности [5].

Подобное же исследование в неавтономном случае приводит к следующему. Если частота внешней силы близка к частоте неустойчивой моды, то в системе либо устанавливается устойчивый одночастотный режим  $\bar{X} = \sqrt{\gamma/\rho}, \bar{Y} = \bar{Z} = \bar{T} = \bar{V} = 0$  (обл. 1 на рис. 8) — происходит синхронизация на половинной частоте внешней силы, либо возникает устойчивый двухчастотный режим (обл. 2), либо появляются сложные режимы стабилизации (обл. 3). Когда же частота внешнего поля близка к меньшей из частот взаимодействующих мод, то статическая стабилизация возможна только в области 1 (см. рис. 9) — это устойчи-

\* В качестве начальных условий выбирались, в частности, координаты состояний равновесия. Кроме того, наблюдалась последовательная потеря устойчивости каждого возникающего режима при изменении одного из параметров системы и постоянных остальных.

вый двухчастотный режим  $\bar{X} = \nu$ ,  $\bar{Y} = 0$ ,  $\bar{Z}^2 = \nu(\gamma - \rho\nu^2)$ ,  $\bar{T} = \bar{V} = 0$ . В областях 2 и 3 существуют сложные режимы (в частности, при  $\rho = 0$  они рассмотрены в разд. 1)\*. Очевидно, что при неизменном инкременте ( $\gamma = \text{const}$ ) режим стабилизации по мере увеличения  $\rho$  становится все более простым.

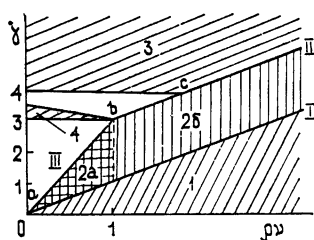


Рис. 7. I— $\gamma = \rho\nu^2$ , II— $\gamma = \rho\nu^2 + 2\nu$ , III— $\gamma = 3\rho\nu^2$ .

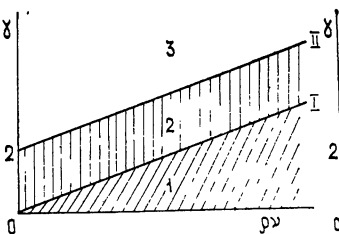


Рис. 8. I— $\gamma = \rho\nu^2$ , II— $\gamma = \rho\nu^2 + 2\nu$ .

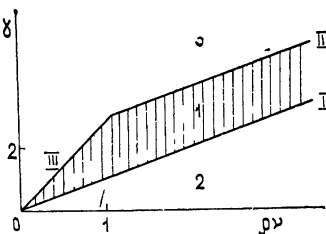


Рис. 9. I— $\gamma = \rho\nu^2$ , II— $\gamma = \rho\nu^2 + 2\nu$ , III— $\gamma = 3\rho\nu^2$ .

Итак, внешнее поле, действующее на двухмодовый автогенератор на частоте, близкой к частоте нижней, устойчивой моды, может либо синхронизовать его, либо привести к возникновению стохастического автоколебательного режима. Для больших значений амплитуд, когда существенным становится нелинейное поглощение, внешнее поле сужает область статической стабилизации (ср. рис. 7 и 9). В этом случае становится уже невозможным одночастотный режим, взамен его появляется стохастический автоколебательный режим. Если частота внешнего поля близка к частоте неустойчивой моды генератора, то в случае малых амплитуд внешнее поле приводит к дестабилизации системы, с учетом же нелинейного поглощения, напротив, область синхронизации расширяется — ср. обл. 2 на рис. 7 и 8. Таким образом, внешнее поле, действующее на двухмодовый генератор, меняет режимы работы генератора, что дает возможность использовать его для управления генератором.

Автор выражает искреннюю признательность М. И. Рабиновичу за интерес к работе и полезные замечания и Е. В. Прокофьеву за содействие в проведении эксперимента по моделированию системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4(10), 1298 (1969).
2. М. И. Рабинович, УФН, 125, № 1 (1978).
3. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, 71, № 2(8), 557 (1976)
4. С. Я. Вышкинд, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 6, 850 (1978).
5. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 2, 318 (1977).
6. В. А. Дубровин, В. Р. Коган, М. И. Рабинович, Физика плазмы (в печати).
7. А. С. Алексеев, Н. А. Железцов, И. М. Клибанова, Ученые записки ГГУ, т. XXX (серия физическая), изд. Сов радио, М., 1956.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 апреля 1978 г.

\* Аналогичные режимы были найдены при аналитическом и экспериментальном исследовании синхронизации мультивибратора периодически повторяющимися импульсами, причем при увеличении амплитуды внешних импульсов от нулевого значения наблюдался переход от более сложных режимов к менее сложным [7].

ON THE SYNCHRONIZATION AND STOCHASTIZATION OF TWO-FREQUENCY  
AUTOGENERATOR BY THE EXTERNAL FIELD*S. Ya. Vyshkind*

Nonautonomous auto-oscillation regimes of two-mode generator are considered. It is shown that an external field may either synchronize the autogenerator or contribute to its stochastization. Regions of different types of stabilization are found in the space of parameters. Consideration is carried out for the case of linear losses and also taking into account the nonlinear absorption.

---