ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1978

УДК 621.372.81.09

О МЕТОДЕ МНОГОКРАТНО ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН

Г. И. Макаров, Л. А. Федорова

Рассматривается вопрос о строгости представления поля в волноводе в виде ряда многократно отраженных волн. В рамках плоской модели показано, что строгое решение волноводной задачи наряду с разложением по лучам содержит разложение по волнам другого типа (боковым и поверхностным волнам). Обсуждаются некоторые свойства боковых и поверхностных волн в волноводе.

В настоящее время известны два подхода к проблеме распространения радиоволн в волноводах простейшей геометрической формы. Один из них связан с методом нормальных волн [1, 2], другой — с дифракционно-лучевым методом, или методом скачков [3]. При этом считается, что оба метода эквивалентны, а нестрогость дифракционно-лучевого представления поля связывают только со способом вычисления соответствующих интегралов [4, 5]. В настоящей работе мы собираемся внести ясность в некоторые аспекты этого вопроса и на примере плоской модели волновода покажем, что возможны ситуации, когда для строгого описания поля разложение по лучам следует дополнить разложением по волнам другого типа, именно — боковым и поверхностным волнам. Можно ожидать, что и в рамках других задач будет иметь место «неполнота» разложения по лучам. Это обстоятельство следует учесть при построении решения методом конструирования [5, 6].

Формально ряд многократно отраженных волн получается из строгого решения (представленного для определенности в виде контурного интеграла) путем разложения

$$(1 - R_1\tilde{R}_2)^{-1} = \sum_0^\infty (R_1 \tilde{R}_2)^n \tag{1}$$

в бесконечную геометрическую прогрессию по степеням коэффициентов отражения от нижней (R_1) и верхней ($\tilde{R}_2$) стенок волновода и замены исходного контура интегрирования контуром спуска, причем способ вычисления интегралов на контуре спуска не предрешен. Подобная процедура, хотя и приводит к физически прозрачному результату, с математической точки зрения нуждается в обосновании. Действительно, для правомерности разложения (1) необходимо исходный контур Г совместить с контуром Г′, во всех (или почти во всех) точках которого выполнено $|R_1\tilde{R}_2| < 1$. На Г′ ряд (1) можно оборвать при $n < \infty$, после чего деформировать Г′ в контур спуска Γ_1. При этом надо учесть вклад слагаемых, которые, вообще говоря, добавляются к интегралам по Γ_1 при обеих деформациях.

В качестве примера рассмотрим задачу о поле вертикального электрического диполя в трехслойной среде с плоскими границами раздела. В цилиндрической системе координат (r, Ф, z) уравнения граничных поверхностей запишем в виде $z = 0$ и $z = h$, диполь поместим в точку

$r=0$, $z=z'$ $(0 \leqslant z' \leqslant h)$. Будем считать нижний полубесконечный слой $z<0$ идеально проводящим, а верхний $(z>h)$ — однородной изотропной средой с комплексной относительной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon'_m = \rho e^{i\varphi}, \qquad \rho \equiv |\varepsilon'_m|, \qquad \varphi \equiv \arg \varepsilon'_m \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Слой $0<z<h$ пусть представляет собой вакуум. Строгое решение сформулированной задачи, записанное для вертикальной компоненты электрического поля E_z $(0 \leqslant z \leqslant h)$, имеет вид [7]

$$E_z = E_z^{\mathrm{I}} + \frac{iP_0}{8\pi\varepsilon_0 h^3} \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \int\limits_{\Gamma} \frac{(\beta^2-\eta^2)\tilde{R}_2}{1-R_1\tilde{R}_2} H_0^{(1)}\left(\sqrt{\beta^2-\eta^2}\,\frac{r}{h}\right) \exp\left(i\eta\frac{z^{(j)}}{h}\right) d\eta,$$
$$E_z^{\mathrm{I}} \equiv \frac{iP_0}{8\pi\varepsilon_0 h^3} \int\limits_{\Gamma} (\beta^2-\eta^2) H_0^{(1)}\left(\sqrt{\beta^2-\eta^2}\,\frac{r}{h}\right) \times$$
$$\times \left\{ \exp\left(\frac{i\eta\,|z-z'|}{h}\right) + R_1 \exp\left(\frac{i\eta\,(z+z')}{h}\right) \right\}. \qquad (2).$$

Здесь P_0 — полный дипольный момент источника, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, $\beta \equiv kh$, k — волновое число в вакууме, $\alpha_1 \equiv 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 \equiv R_1$, $\alpha_4 \equiv R_1^2$, $R_1 = 1$, $z^{(1)} \equiv -(z+z')$, $z^{(2)} \equiv z'-z$, $z^{(3)} \equiv z-z'$, $z^{(4)} \equiv z+z'$, $\tilde{R}_2 \equiv R_2 \exp(2i\eta)$, $R_2 = \dfrac{\varepsilon'_m\eta - \sqrt{\eta^2+\beta^2(\varepsilon'_m-1)}}{\varepsilon'_m\eta + \sqrt{\eta^2+\beta^2(\varepsilon'_m-1)}}$.

Ветви многозначных функций $\sqrt{\beta^2-\eta^2}$ и $\eta^* \equiv \sqrt{\eta^2+\beta^2(\varepsilon'_m-1)}$ фиксированы условиями $\operatorname{Im}\sqrt{\beta^2-\eta^2} \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\eta^* \geqslant 0$ (I лист), разрезы проведены вдоль линии $\operatorname{Im}\sqrt{\beta^2-\eta^2}=0$ и $\operatorname{Im}\eta^*=0$. Контур интегрирования Γ идет по берегам разреза $\operatorname{Im}\sqrt{\beta^2-\eta^2}=0$ в I квадранте I листа четырехлистной римановой поверхности (рис. 1). Наконец, зависимость от времени всюду подразумевается в виде $\exp(-i\omega t)$.

Первое слагаемое, выделенное в (2), соответствует прямой волне [3, 6], второе — неявно содержит многократно отраженные волны.

Следуя изложенной выше схеме преобразования точного решения, изучим структуру области G: $|R_1\tilde{R}_2|<1$. Уравнение границы L этой области имеет вид $|R_1\tilde{R}_2|=1$ или в параметрической форме $R_1\tilde{R}_2 = \exp(2i\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$. Учитывая явные выражения R_1; $\tilde{R}_2$, последнее уравнение можно переписать в виде

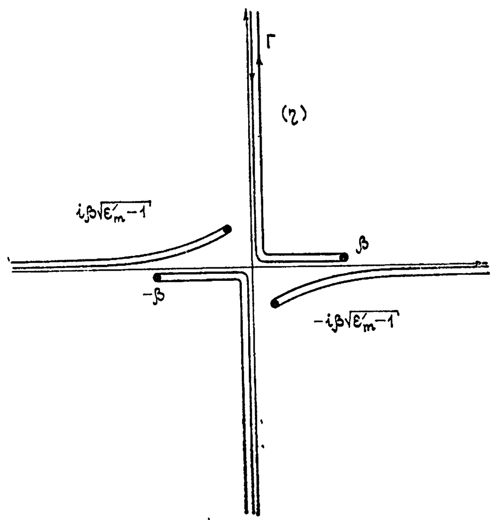

Рис. 1.

$$i\eta\varepsilon'_m \operatorname{tg}(\eta-\theta) = \sqrt{\eta^2+\beta^2(\varepsilon'_m-1)}, \qquad \theta \in [0, \pi]. \tag{3}$$

Исследуя (3) при $\varepsilon'_m = \text{const}$ и изменении β от 0 до ∞, можно проследить, как деформируется L (а вместе с тем и G) на двулистной римановой поверхности $\eta^* = \sqrt{\eta^2 + \beta^2(\varepsilon'_m - 1)}$. Такое исследование вполне аналогично проделанному в [7], поэтому мы сразу сформулируем окончательные результаты. Структура L и G при $\beta = 0$ схематически изображена на рис. 2 (область G здесь и ниже выделена штриховкой), L состоит из двух параллельных вещественной оси прямых

$$\eta = \operatorname{arctg}\frac{i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \eta}{\varepsilon'_m} + \pi m + \theta,$$

расположенных на нижнем листе римановой поверхности η^* и точки $\eta = 0$, которая в данном случае является точкой ветвления функции η^*.

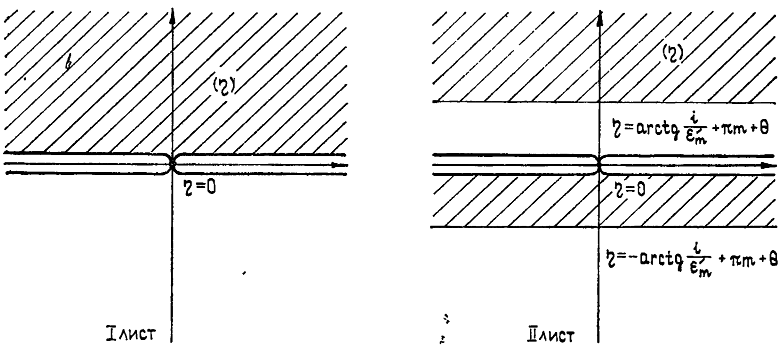

Рис. 2.

При $\beta = \infty$ картина существенно иная: на каждом листе L совпадает с вещественной осью, а G — с верхней полуплоскостью (η). Схематический вид L и G при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\beta < \beta_1 \equiv - \frac{\operatorname{Im}(\bar{\varepsilon}'_m \sqrt{\bar{\varepsilon}'_m - 1})}{|\varepsilon'_m - 1|}$, $\bar{\varepsilon}'_m \equiv \rho e^{-i\varphi}$ представлен на рис. 3. Случай $\varphi = \frac{\pi}{2}$ — единственный, когда L не пересекает разрезы $\operatorname{Im} \eta^* = 0$. Рис. 4 иллюстрирует вид L и G при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\rho \gg 1$. Случай (а) имеет место при $\beta \gg \sqrt{\rho}$. Звездочками отмечены изолированные точки $\eta = \pm \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon'_m + 1}}$, связанные с особым решением (3) [7]. При безграничном увеличении β линии

$$\eta = \frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{i\varepsilon'_m \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \eta^*}{\beta\sqrt{\varepsilon'_m - 1}}},$$

проходящие через начало координат на обоих листах римановой поверхности η^*, стремятся к вещественной оси, а разрезы и особые точки уходят на бесконечность. Тем самым осуществляется предельный переход $\beta \longrightarrow \infty$. В случае (б) выполнено $\beta \ll \frac{\cos^{3/2}\varphi}{\rho^{3/2}}$; $\beta < \beta_1 \approx \sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$. Здесь легко проследить предельный переход $\beta \longrightarrow 0$ (см. рис. 2).

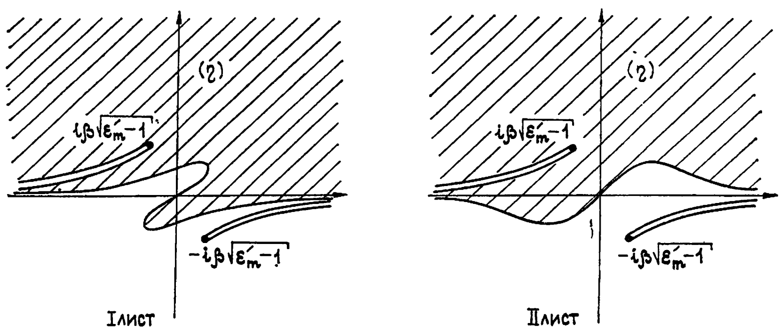

Рис. 3.

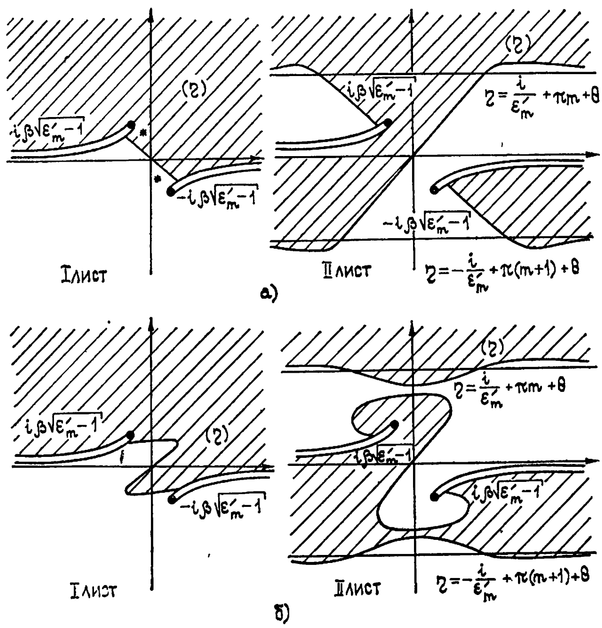

Рис. 4.

Приведем также условия, при совместном выполнении которых L на I листе идет из III квадранта в I:

$$\rho > 2\cos\varphi; \qquad \beta < \beta_1 \equiv -\frac{\mathrm{Im}\left(\bar{\varepsilon}'_m\sqrt{\varepsilon'_m-1}\right)}{|\,\varepsilon'_m-1\,|}. \tag{4}$$

Осталось понять, как происходит изменение структуры L по мере уменьшения β от больших значений (а) к малым (б) (рис. 4). Оказывается, это явление связано с касанием линий L, которое обусловлено вырождением решений (3). Рассмотрим подробно случай $\varphi=0$

(диэлектрический волновод), $\rho \gg 1$. При $|\eta| \ll 1$ и $\theta = 0$ (3) имеет следующие 4 решения:

$$\eta = \pm i \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2}}} \Big/ \sqrt{2}\,\rho, \qquad \beta_0 \equiv \frac{1}{2\rho^{3/2}}. \tag{5}$$

На рис. 5, схематически изображающем L и G на II листе в рассматриваемом случае, эти корни отмечены крестиками. При $\beta \gg \beta_0$ все 4 корня (5) заведомо различны (рис. 5а) и по мере уменьшения β стремятся к мнимой оси. При $\beta = \beta_0$ имеет место вырождение решений (5) и касание линий L в точках $\eta = \pm \frac{i}{\sqrt{2}\rho}$ (рис. 5б). При дальнейшем уменьшении β происходит расщепление решений (5), причем одна пара корней стремится к началу координат, увлекая за собой область в виде «восьмерки», а другая — удаляется от него в направлении, указанном на рис. 5в стрелками.

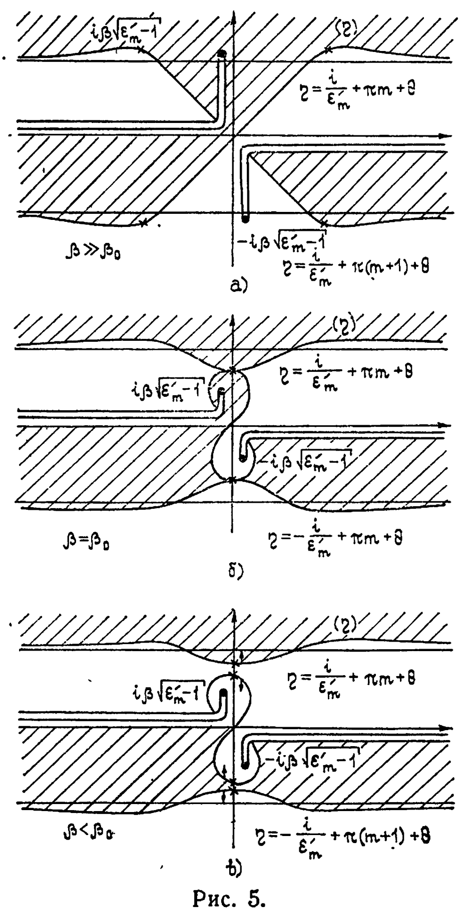

Рис. 5.

Из изложенного выше становится ясным, что при выполнении условия (4) разложение (1) теряет смысл на исходном контуре интегрирования Г (рис. 1). Как это видно из рис. 3, 4, в таком случае Г можно деформировать в I квадранте I и III листов ($\mathrm{Im}\,\eta^* > 0$, $\mathrm{Im}\sqrt{\beta^2 - \eta^2} \gtrless 0$) четырехлистной римановой поверхности так, чтобы новый контур Г′ целиком попадал в область: $|R_1\tilde{R}_2| < 1$. Подынтегральное выражение (2) не имеет особенностей в I квадранте I и III листов [7], и деформация Г в Г′ происходит без препятствий. На контуре Г′ можно подставить разложение (1) во второе слагаемое (2) и, оборвав ряд (1) при $n < \infty$, вернуться к исходному контуру интегрирования Г (полюсы R_2 не попадают в I квадрант (η) и не затрагиваются при деформации).

Преобразованные, как указано выше, интегралы по Г удобно вычислять на комплексной плоскости ψ: $\eta = \beta \sin\psi$, $\mathrm{Re}\,\psi \in [-\pi, \pi]$.

Преобразование $\eta = \beta\sin\psi$ переводит четырехлистную риманову поверхность в двулистную с разрезами $\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon_m' - \cos^2\psi} = 0$, причем $\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon_m' - \cos^2\psi} > 0$ на I листе (рис. 6). Подразумевая выполненным условие $kr\cos\,\psi_n^{(j)} > 1$, $\psi_n^{(j)} \equiv \arccos\frac{r}{r_n^{(j)}}$, $r_n^{(j)} \equiv \sqrt{r^2 + (2nh + z^{(j)})^2}$, деформируем Г в контур скорейшего спуска Γ_1: $\operatorname{Re}\cos(\psi - \psi_n^{(j)}) = 1$, $\operatorname{Im}\cos(\psi - \psi_n^{(j)}) > 0$.

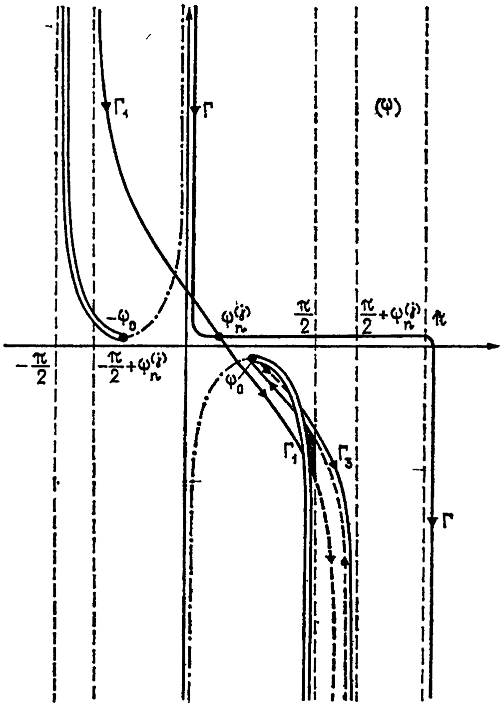

Рис. 6.

На рис. 6 показан один из вариантов расположения Γ_1 (пунктир указывает на принадлежность II листу).

Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma^{(\pm)}}{2} \equiv \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-1}-b}{a+1} \qquad (a \gtrless 1), \tag{6}$$

$$a \equiv \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon'_m} > 0, \quad b \equiv \operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon'_m - 1} > 0 \quad (\text{всегда } a^2+b^2 \geqslant 1).$$

Нетрудно убедиться в том, что при выполнении условия

$$\psi_n^{(j)} < \gamma^{(+)} \qquad (a > 1) \tag{7}$$

к интегралу по Γ_1 следует прибавить интеграл по берегам разреза Γ_2: $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon'_m - \cos^2\psi} = 0$ во II квадранте комплексной плоскости (ψ), а при совместном выполнении условий

$$\psi_n^{(j)} < \gamma^{(-)} \qquad (a < 1), \qquad \psi_n^{(j)} < \operatorname{Re}\psi_0, \tag{8}$$

$$\psi_0 \equiv \arccos\sqrt{\varepsilon'_m}$$

к интегралу по Γ_1 добавляется интеграл по разрезу в IV квадранте. В обоих случаях контур спуска уходит на бесконечность на нижнем листе.

С математической точки зрения интеграл по берегам разреза $\operatorname{Im}\sqrt{\varepsilon'_m - \cos^2\psi} = 0$ представляет собой аналог интеграла по сплошному спектру поперечного оператора задачи Зоммерфельда [6]. Его интерпретация связана с боковыми волнами [6–9].

Считая $|kr\sqrt{\varepsilon'_m}|>1$, совместим в свою очередь контур Γ_2 с контуром быстрейшего спуска Γ_3: $\mathrm{Re}\cos(\psi-\psi_n^{(j)})=\mathrm{Re}\cos(\psi_0+\psi_n^{(j)})\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\psi)$, $\mathrm{Im}\cos(\psi-\psi_n^{(j)})>0$. На рис. 6 схематически изображен контур Γ_3 в IV квадранте. Он охватывает точку ветвления ψ_0, дважды пересекает разрез и асимптотически уходит на бесконечность (на обоих листах) вдоль прямых $\mathrm{Re}\,\psi=\frac{\pi}{2}+\psi_n^{(j)}$.

Выясним, не препятствуют ли полюсы подынтегральных выражений деформациям Γ в Γ_1 и Γ_2 в Γ_3. Коэффициент отражения $R_2(\psi)=\frac{\varepsilon'_m\sin\psi-\sqrt{\varepsilon'_m-\cos^2\psi}}{\varepsilon'_m\sin\psi+\sqrt{\varepsilon'_m-\cos^2\psi}}$ имеет два симметричных относительно начала координат полюса $\psi=\mp\arcsin\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_m+1}}$, $|\mathrm{Re}\,\psi|<\frac{\pi}{2}$, расположенных соответственно во II квадранте I листа и IV квадранте II листа римановой поверхности $\sqrt{\varepsilon'_m-\cos^2\psi}$. Полюс $\psi=-\arcsin\times\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_m+1}}$ попадает в область ниже линии разреза $\mathrm{Im}\sqrt{\varepsilon'_m-\cos^2\psi}=0$ и ее продолжения $\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon'_m-\cos^2\psi}=0$ (обозначенного на рис. 6 разделенным пунктиром) и ниже контура спуска Γ_1. Поэтому он не затрагивается при деформациях. Полюс $\psi^*\equiv\arcsin\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_m+1}}$ следует принимать во внимание лишь в случае однократного пересечения Γ_1 с разрезом. Если ψ^* попадает в. область между контурами Γ_1 и Γ_3 (на рис. 6 эта область затемнена), то при совмещении Γ_2 с Γ_3 выделяются внеинтегральные слагаемые (вычеты в кратном полюсе $R_2^n(\psi)$ на II листе). Полюс, расположенный ниже этой области, пересекается при деформациях дважды, и вычеты в нем взаимно уничтожаются.

Суммируя сказанное выше, вместо (2) будем иметь

$$E_z=E_z^{\mathrm{I}}+\sum_{n\geqslant1}R_1^{n-1}\sum_{j=1}^{4}\alpha_j\int_{\Gamma_1}F_j^{(n)}(\psi)\,d\psi+$$

$$+\sum_{n\geqslant1}R_1^{n-1}\sum_{j=1}^{4}\alpha_j\int_{\Gamma_3}F_j^{(n)}(\psi)\,d\psi+\sum_{n\geqslant1}R_1^{n-1}\sum_{j=1}^{4}\alpha_j\,\mathrm{P}_j^{(n)},\tag{9}$$

$$F_j^{(n)}(\psi)\equiv\frac{iP_0k^3}{8\pi\varepsilon_0}\cos^{5/2}\psi\,H_0^{(1)}(kr\cos\psi)\,R_2^n(\psi)\exp\left[ik\left(2nh+z^{(j)}\right)\sin\psi\right],$$

$$\mathrm{P}_j^{(n)}\equiv\mathrm{Res}\,F_j^{(n)}(\psi)\big|_{\psi^*}$$

при совместном выполнении условий

$$1>\mathrm{Re}\cos(\psi^*-\psi_n^{(j)})>\mathrm{Re}\cos(\psi_0-\psi_n^{(j)}),$$

$$\psi_n^{(j)}<\mathrm{Re}\,\psi^*,\qquad\psi_n^{(j)}<\mathrm{Re}\,\psi_0,\tag{10}$$

$$\psi^* \equiv \arcsin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_m + 1}}, \qquad \psi_0 \equiv \arccos \sqrt{\varepsilon'_m} \text{ и } \mathrm{P}_j^{(n)} \equiv 0$$

во всех остальных случаях.

Система неравенств (10) в принципе может быть совместной в случае $\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon'_m} < 1$. При $|\varepsilon'_m| \ll 1$ она упрощается и принимает вид $\arg \varepsilon'_m > \frac{\pi}{3}, \quad \psi_n^{(j)} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon'_m}$.

Выясним физический смысл внеинтегральных слагаемых (9). Асимптотическое выражение каждого из них можно представить в виде

$$R_1^{n-1}\alpha_j \mathrm{P}_j^{(n)} = \frac{k^3 P_0 \sqrt{2i}\,\varepsilon'_m}{8\pi\varepsilon_0(\varepsilon'_m+1)\sqrt{kr}} \operatorname{Res} R_2^n(\psi)\,|_{\psi^*} R_1^{n-1}\alpha_j \exp[ikr_n^{(j)}\cos(\psi^* - \psi_n^{(j)})], \tag{11}$$

причем оказывается

$$\operatorname{Re}\cos(\psi^* - \psi_n^{(j)}) < 1,$$

$$\varkappa_0 \equiv \operatorname{Im}\cos(\psi^* - \psi_n^{(j)}) = \frac{1}{r_n^{(j)}}\left[r \operatorname{Im}\sqrt{\frac{\varepsilon'_m}{\varepsilon'_m+1}} + (2nh + z^{(j)}) \operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_m+1}}\right] > 0. \tag{12}$$

Выражение (11) можно интерпретировать как быструю поверхностную волну, распространяющуюся в вакууме вдоль геометрооптического пути $r_n^{(j)}$ с фазовой скоростью $v = \dfrac{c}{\operatorname{Re}\cos(\psi^* - \psi_n^{(j)})}$, большей скорости света в пустоте c и затуханием $\varkappa_0$ (12), причем обе величины (v и $\varkappa_0$) зависят как от свойств верхнего полупространства (ψ^*), так и от угла падения волны на стенки волновода ($\psi_n^{(j)}$). Поскольку $z^{(j)} \gtrless 0$, то, как это видно из (11), (12), одна пара волн (в сумме по j в (9)) экспоненциально возрастает с подъемом наблюдателя, а другая — наоборот, убывает, т. е. мы имеем дело с волнами, «прилипшими» соответственно к верхней и нижней стенкам волновода. Для каждой из этих волн характерен экспоненциальный рост с увеличением высоты волновода h и экспоненциальное убывание с ростом расстояния r.

Поверхностные волны (11) являются аналогом волны Ценнека в задаче Зоммерфельда (вычета в полюсе коэффициента отражения Френеля на верхнем (и единственном в рамках импедансной постановки) листе) [6]. Отметим, что возможность появления поверхностной волны типа (11) в задаче о поле диполя над плоской границей раздела упущена Бреховских в [8].

Отметим также, что разложение поля по многократно отраженным и боковым волнам в более простом случае диэлектрической плоскослоистой среды получено в [9]. При отсутствии потерь внеинтегральные члены типа (11) в представлении поля не возникают.

Обратимся к выражению (9). Каждое слагаемое (9) имеет четкий физический смысл. Первое, как уже отмечалось, соответствует прямой волне. Асимптотические разложения интегралов по контурам спуска Γ_1 (в условиях применимости метода перевала) имеют смысл геометрооптических лучей. Именно эти слагаемые и следует называть лучами (или многократно отраженными волнами) в дифракционно-лучевом методе. Интегралы по контурам быстрейшего спуска Γ_3 (и именно они, а не интегралы по берегам разреза Γ_2 [8]) соответствуют боковым волнам. Наконец, внеинтегральные слагаемые (вычеты в полюсе коэффициента отражения Френеля на нижнем, «нефизическом» листе) интерпретируются как быстрые поверхностные волны. В рамках импедансной постановки задачи два последние типа волн, очевидно, не возникают. Далее, формула (9) показывает, что в представлении поля наряду с прямой и многократно отраженными волнами участвуют также волны другого типа — боковые и поверхностные волны. Следовательно, так называемое разложение поля по лучам (без учета двух последних групп слагаемых в (9)), вообще говоря, не является строгим и не эквивалентно разложению поля по нормальным волнам, как утверждается в [4, 5]. По-видимому, и в рамках других задач метод разложения по лучам нуждается в уточнении.

Получим асимптотическое выражение для боковых волн E_z^{III}, вычислив интегралы по контуру Γ_3 в (9) методом скорейшего спуска. Функцию Ханкеля заменим ее асимптотикой и перейдем к переменной τ: $\cos(\psi - \psi_n^{(j)}) = \cos(\psi_0 + \psi_n^{(j)} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \psi) + \dfrac{i\tau^2}{kr_n^{(j)}}$. После стандартных преобразований и упрощений будем иметь

$$E_z^{\mathrm{III}} = \frac{iP_0 k^3}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{kr \sin\psi_0}} \sum_{n\geqslant 1} nR_1^{n-1} \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \times \frac{\exp\left[ik_2 L_n^{(j)} + ik(2nl + l^{(j)}) - k\varkappa(2nl + l^{(j)})\right]}{\left[kr_n^{(j)} \sin(\psi_0 \pm \psi_n^{(j)})\right]^{3/2}}; \tag{13}$$

$$\varkappa \equiv \cos\gamma \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon_m'} \pm \sin\gamma \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_m' - 1}; \tag{14}$$

$$l \equiv \frac{h}{\sin\gamma}, \quad l^{(j)} \equiv \frac{z^{(j)}}{\sin\gamma}, \quad L_n^{(j)} \equiv r - \frac{(2nh + z^{(j)})}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{15}$$

$\sin\psi_0 = -i\sqrt{\varepsilon_m' - 1}$, $k_2 \equiv k\sqrt{\varepsilon_m'}$, а под величиной γ подразумевается одна из величин $\gamma^{(\pm)}$, определенных формулой (6). В выражениях (6), (13), (14) следует брать знак (+), если выполнено условие (7), и знак (—), если выполняется (8). Геометрический смысл величин γ, $\psi_n^{(j)}$, $L_n^{(j)}$ и т. д., а также условия $\psi_n^{(j)} < \gamma$ (см. формулы (7), (8)) ясен из рис. 7, на котором изображены траектории геометрооптического луча ABCDE и боковой волны AFGHNE при $n = 1$ и $j = 2$. Как видно из выражений (6)—(8) и (13), в зависимости от свойств верхнего полупространства возникают быстрые или медленные боковые волны с фазовой скоростью вдоль верхней стенки волновода $v = \dfrac{c}{\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon_m'}} \gtrless c$. Затухание $\varkappa$ и угол падения γ быстрых и медленных волн различны (формулы (6) и (14)).

При $n \geqslant 2$ формула (15) предсказывает лишь суммарный путь $L_n^{(j)}$ вдоль верхней стенки волновода. Следовательно, точки «срыва» боковой волны, а значит, и точки отражения от нижней стенки волновода, в отличие от геометрооптических лучей, произвольны, и каждому слагаемому с $n \geqslant 2$ в (13) соответствует некоторое семейство боковых волн. Неоднозначность пути распространения боковой волны в волноводе приводит к своеобразному усреднению поля вдоль трассы распространения. Это свойство обеспечивает стабильность поля боковых волн в волноводном канале Земля—ионосфера (в отличие от поля геометрооптических или поверхностных волн).

Кроме случая $\psi = 0$, $\rho < 1$ боковые волны всегда экспоненциально затухают с расстоянием. Затухание вдоль верхней стенки волновода $(L_n^{(j)})$ обусловлено потерями в верхнем полупространстве, а вдоль пути в вакууме $(2n\,l + l^{(j)})$ — не связано с механизмом потерь и определяется величиной $\varkappa$ (14). Оказывается, $\varkappa \geqslant 0$ и $\varkappa = 0$ только при $\varphi = 0$, $\rho < 1$. В силу сказанного вклад боковых волн в поле, вообще говоря, является малым. Однако возможны ситуации, к примеру, в задаче о дальнем распространении средних или коротких волн, когда вклад геометрооптических слагаемых из-за R_n^2 также невелик (коэффициент отражения от ионосферы $|R_2| \ll 1$ [4]). В таком случае вопрос об относительной роли боковых (и поверхностных) и многократно отраженных волн следует решать в рамках модели, учитывающей реальные свойства ионосферы, и, в первую очередь, сферичность волноводного канала и неоднородность ионосферы по высоте.

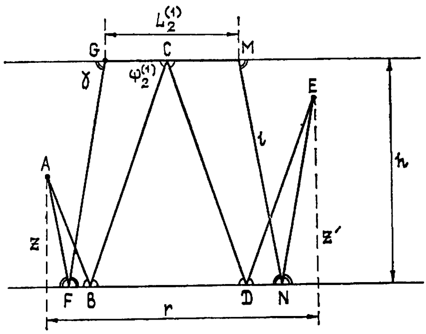

Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1 П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, изд. МГУ, М., 1947.
2. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 7, 19 (1968).
3. H. Bremmer, Terrestrial Radio Waves, N. Y., 1949.
4. Я. Л Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972.
5. Э. М Гюннинен, И. Н. Забавина, Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 5, 5 (1966)
6. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Четыре лекции по теории распространения радиоволн, изд. ЛГУ, Ленинград—Петродворец, 1972.
7. Г И Макаров, В. В. Новиков, Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 11, 3 (1972).
8 Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.
9. T. Tamir and L. B. Felsen, IEEE Trans., **AP-13**, № 3, 410 (1965).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 18 ноября 1977 г.

ON THE METHOD OF MULTIPLE REFLECTED WAVES

G. I Makarov, L. A. Fedorova

A problem is considered of the strictness of the field presentation in a waveguide in the form of a series of multiple reflected waves. In the trames of a plane model it is shown that a strict solution of the waveguide problem together with the ray expansion contains the wave expansion of another type (side and surface waves). Same properties of side and surface waves in a waveguide are discussed.