

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Захар-Иткин М. Х. Неевклидова геометрия и теория волноводов (Обзор) . . .	5
Беллюстин Н. С. Об излучении волн свистового диапазона в плазме . . .	22
Фрейман М. Е. О нелинейной перекачке энергии между нормальными волнами с разными частотами в магнитоактивной столкновительной плазме . . .	36
Градов О. М., Измайлов Г. Н. Параметрический резонанс в электронной ограниченной плазме . . .	42
Боев А. Г., Прокопов А. В. Распространение поверхностной электромагнитной волны в плазме с учетом нагрева электронов . . .	48
Бетин А. А., Пасманик Г. А. О нелинейных эффектах при ВКР, связанных с нагревом среды оптическими фотонами . . .	55
Березин Ю. В., Крашенинников И. В. Оценка параметров периодически нестационарного процесса на основе его автокорреляционной функции . . .	67
Малахов А. Н., Музычук О. В. О моментных и кумулянтных функциях стохастических линейных систем . . .	71
Дубков А. А., Малахов А. Н. К статистике обобщенных телеграфных сигналов	81
Ингель Л. Х., Рубаха Н. Р. Эффект гравитационной линзы с учетом дифракции	87
Кеванишвили Г. Ш., Сикмашвили З. И., Цагарейшвили О. П. К теории дифракции электромагнитных волн на двух цилиндрах . . .	91
Лозьяной В. И., Прохода И. Г. Использование волны $H_{30}$ в области связи $H$ -плоскостного щелевого направленного ответвителя для расширения рабочей полосы частот	100
Кириленко А. А., Масалов С. А., Рудь Л. А., Сергиенко Ю. И. Поляризационные свойства решеток волноводного типа . . .	104
Абрамов В. И. Об отклике антенны на тепловое излучение поглощающего тела	114
Кириленко А. А., Масалов С. А., Шестопалов В. П., Шинкаренко В. Ф. О собственных колебаниях цилиндрического резонатора с коаксиальным кольцевым выступом . . .	119
Генкин В. Н., Китай М. С. О зависимости потерь на СВЧ от степени конверсии полиметилметакрилата . . .	128
Игнатов А. А., Романов Ю. А. Абсолютная отрицательная проводимость в полупроводниках со сверхрешеткой . . .	132

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Маковецкий П. В. Эффективность привязки позывных внеземных цивилизаций к естественным явлениям . . .	139
Хакимов Ф. Х., Цыгович В. Н. О стабилизации модуляционной неустойчивости и быстрых ленгмюровских солитонов в неравновесной плазме . . .	141
Борисов В. В. К отражению электромагнитного сигнала ионизованной областью при возрастании плотности частиц со временем . . .	143
Кузнецов А. М., Кузьмин В. Г., Орлов И. Я. К вопросу о потере чувствительности параметрического усилителя . . .	146
Насонов Н. Н. О волнах намагниченности конечной амплитуды . . .	149
Нагорнов А. И., Постников А. И., Васильев В. П., Гордеев В. А. Исследование поглощающих свойств резистивных пленок, расположенных перпендикулярно оси волновода . . .	151

### Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомagnetизм и аэрономия», т. XVII, № 5, 1977 г. . . . .	154
--	-----

УДК 513.81 : 621.372.81

## НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ВОЛНОВОДОВ (Обзор)

М. Х. Захар-Иткин

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Введение

1. Математические модели неоднородных многомодовых линий
  2. Уравнения Риккати для параметров неоднородной линии и свойство их диссипативности
  3. Операторные круг и полуплоскость Зигеля как геометрическое место параметров многомодовых линий
  4. Инвариантная неевклидова метрика матричного круга Зигеля
  5. Операторы сжатия геометрического места параметров диссипативного волновода
  6. Асимптотика параметров диссипативного волновода с периодическими и случайными неоднородностями
  7. Уравнения Риккати и расчет матрицы передачи неоднородного волновода
- Заключение

### ВВЕДЕНИЕ

Диаграмма Вольперта — Смита для коэффициента отражения одномодового однородного несогласованного волновода была исторически первым контактом теории волноводов с неевклидовой геометрией, однако их глубинная связь стала ясной лишь после исследования Герценштейна и Васильева [1]. В этой работе с использованием модели Пуанкаре плоскости Лобачевского строилось распределение вероятностей коэффициента отражения одномодового статистически неоднородного волновода без потерь (аналогичны результаты В. И. Беспалова [2]). Работы [1, 2] послужили источником важного направления статистической радиофизики, интенсивно развивающегося в настоящее время. Для этого направления характерно, что исходными служат телеграфные либо волноводные уравнения со случайными коэффициентами, а объектом рассмотрения оказываются параметры: входное сопротивление, коэффициенты отражения и передачи неоднородного волновода — случайные функции его продольной координаты  $x$ .

В настоящей работе выясняется неевклидова сущность всех важнейших параметров многомодовых неоднородных волноводов. За основу принят метод поперечных сечений, предложенный Каценеленбаумом [3], осуществляющий корректный переход от уравнений Максвелла к бесконечной ( $n = \infty$ ) системе обыкновенных дифференциальных уравнений (аналогичен метод Щелкунова [4]). В излагаемой методике исследования протяженных волноводов принципиальную роль играет уравнение Риккати, как это было сформулировано в докладе [5].

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОМОДОВЫХ ЛИНИЙ

Обобщенные телеграфные уравнения Щелкунова [4] связывают вектор-функции  $U(x)$ ,  $I(x)$  напряженностей электрических и магнитных полей, могущих существовать в неоднородном закрытом волноводе, и имеют вид

$$-\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) & Z(x) \\ Y(x) & -F_t(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x) \\ I(x) \end{pmatrix} \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1)$$

где  $Z(x)$ ,  $Y(x)$  — комплексные симметрические матрицы-функции порядка  $n$ , а  $t$  — знак транспозиции матрицы. В [6] уравнения вида (1) выведены, исходя из теоремы взаимности для многомодовой неоднородной линии, причем показано, что частным случаем этих уравнений являются волноводные уравнения Каценеленбаума [3], связывающие вектор-функции  $U^\pm(x)$  амплитуд волн обоих направлений:

$$-\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} U^+(x) \\ U^-(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x) - \mu(x) & \nu(x) \\ \nu(x) & -\gamma(x) - \mu(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+(x) \\ U^-(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(0 \leq x \leq l).$$

Здесь  $\mu(x)$  — кососимметрическая,  $\gamma(x)$ ,  $\nu(x)$  — симметрические матрицы-функции.

Если систему (2) рассматривают [7] без учета отраженных волн, то приходят к уравнениям связанных мод прямого направления, записываемым [8] так:

$$-\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) & C(x) \\ -A(x) & -D(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} \quad (0 \leq x \leq l), \quad (3)$$

причем вектор-функция  $U_1(x)$  размерности  $m$  составлена из амплитуд слабозатухающих волн, а вектор-функция  $U_2(x)$  размерности  $n - m$  — из амплитуд сильнозатухающих волн прямого направления.

Для теории неоднородных открытых волноводов роль, аналогичную (2), играют интегродифференциальные уравнения типа [9]:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial U^+(x, p)}{\partial x} &= \int_{\Lambda} [\gamma(x; p, q) - \mu(x; p, q)] U^+(x, q) dq + \\ &+ \int_{\Lambda} \nu(x; p, q) U^-(x, q) dq \\ -\frac{\partial U^-(x, p)}{\partial x} &= \int_{\Lambda} \nu(x; p, q) U^+(x, q) dq + \int_{\Lambda} [-\gamma(x; p, q) - \\ &- \mu(x; p, q)] U^-(x, q) dq \end{aligned} \right| \begin{array}{l} p \in \Lambda \\ \\ 0 \leq x \leq l \end{array}, \quad (4)$$

а роль, аналогичную (3), играют интегродифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dU_0(x)}{dx} &= b(x) U_0(x) + \int_{\lambda} c(x; p) u(x, p) dp \\ -\frac{\partial u(x, p)}{\partial x} &= -a(x; p) U_0(x) - \int_{\lambda} d(x; p, q) u(x, q) dq \end{aligned} \right| \begin{array}{l} p \in \lambda \subset \Lambda \\ \\ 0 \leq x \leq l \end{array}, \quad (5)$$

полученные из (4) отбрасыванием отраженных волн и отдельным рассмотрением поверхностной волны  $U_0(x)$  и волн  $u(x, p)$  непрерывного спектра.

Системы (1) — (5) представляют наиболее употребительные математические модели основных типов неоднородных волноводов. Характерной особенностью любой из этих систем является разделение решений по естественному физическому признаку (он был конкретизирован выше для каждой модели) на две группы:  $U(x)$  и  $I(x)$  для (1),  $U^+(x)$

и  $U^-(x)$  для (2),  $U_1(x)$  и  $-U_2(x)$  для (3),  $U^+(x, p)$  и  $U^-(x, p)$  для (4),  $U_0(x)$  и  $u(x, p)$  для (5). Решения этих двух групп не независимы, а связаны между собой линейным соотношением, которое в каждом случае имеет прозрачный физический смысл:

$$а) \mathcal{U}(x) = W(x)I(x), \quad б) U^-(x) = K(x)U^+(x),$$

$$в) U_2(x) = \xi(x)U_1(x), \quad г) U^-(x, p) = \int_{\Delta} \kappa(x; p, q)U^+(x, q)dq, \quad (6)$$

$$д) u(x, p) = \tau(x; p)U_0(x).$$

Соотношения (6а), (6б) представляют определение  $(n \times n)$ -матриц  $W(x)$ ,  $K(x)$  входного сопротивления и коэффициента отражения в сечении  $x$  закрытого  $n$ -модового волновода, независимых от способа возбуждения волновода сторонними токами  $I(0)$  или падающими волнами  $U^+(0)$ . Входящая в (6в) матрица  $\xi(x)$ , имеющая  $n-t$  строк и  $t$  столбцов, интерпретируется [8] как относительный попутный поток сильнозатухающих волн прямого направления, отнесенный к слабозатухающим волнам того же направления. Для рассмотрения  $\xi(x)$  как параметра волновода удобно предположить существование генератора электромагнитных волн  $U_1(0)$ ,  $U_2(0)$ , обладающего свойством: при любых амплитудах  $U_1(0)$  слабозатухающих волн постоянна матрица  $\xi(0)$  соотношения, связывающего их с сильнозатухающими волнами:  $U_2(0) = \xi(0)U_1(0)$ . При этом  $\xi(0)$  оказывается параметром генератора и  $\xi(x)$  определяется через коэффициенты системы (3) на отрезке  $(0, x)$  волновода и через  $\xi(0)$ . Аналогична интерпретация параметра  $\tau(x; p)$ , входящего в соотношение (6д) для открытого волновода. Линейный интегральный оператор (6г) с ядром  $\kappa(x; p, q)$  имеет смысл коэффициента отражения в сечении  $x$  открытого волновода.

## 2. УРАВНЕНИЯ РИККАТИ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ И СВОЙСТВО ИХ ДИССИПАТИВНОСТИ

При подстановке любого из соотношений (6) в соответствующую систему (1) — (5) получим вместо нее одно из уравнений Риккати:

$$\frac{dW(x)}{dx} = W(x)Y(x)W(x) - W(x)F_t(x) - F(x)W(x) - Z(x), \quad (7)$$

$$W(l) = Z_{\text{нагрузки}};$$

$$\frac{dK(x)}{dx} = K(x)\nu(x)K(x) + K(x)[\gamma(x) - \mu(x)] + [\gamma(x) + \mu(x)] \times$$

$$\times K(x) - \nu(x), \quad K(l) = K_{\text{нагрузки}}; \quad (8)$$

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \xi(x)C(x)\xi(x) + \xi(x)B(x) + D(x)\xi(x) + A(x), \quad (9)$$

$$\xi(0) = \xi_{\text{генератора}};$$

$$\frac{\partial \kappa(p, q)}{\partial x} = \int_{\Delta} \int_{\Delta} \kappa(p, s)\nu(s, r)\kappa(r, q)dr ds + \int_{\Delta} \kappa(p, r) \times$$

$$\times [\gamma(r, q) - \mu(r, q)] dr + \int_{\Delta} [\gamma(p, r) + \mu(p, r)] \kappa(r, q) dq - \nu(p, q); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau(p)}{\partial x} = \tau(p) \int_{\lambda} c(q)\tau(q) dq + b\tau(p) + \int_{\lambda} d(p, q)\tau(q) dq + a(p). \quad (11)$$



В последних уравнениях аргумент  $x$  не выписывался для сокращения записи. Они являются интегродифференциальными уравнениями Риккати, аналогичными дифференциальным уравнениям Риккати (8), (9) соответственно. Переход от линейных систем (1)—(5) к нелинейным уравнениям Риккати (7)—(11), названный в [10] методом факторизации в теории неоднородных волноводов, единообразно применяется для волновода любого типа и вскрывает единую математическую природу всех рассматриваемых физических параметров.

Основное для теории волноводов свойство уравнений Риккати — диссипативность, подробно рассмотренная в [11] применительно к матричному уравнению Риккати (8) и в [12] — применительно к обобщенным телеграфным уравнениям (1), причем использовано понятие активной мощности  $p(x)$  в сечении  $x$ , определяемой как значение эрмитовой формы напряжений и токов:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iU(x) \\ I(x) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iU(x) \\ I(x) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iU(x) \\ I(x) \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} -iU(x) \\ I(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $i = \sqrt{-1}$ ,  $E$  — единичная матрица,  $*$  — знак эрмитова сопряжения.

Диссипативность уравнения Риккати (7) для входного сопротивления  $W(x)$  означает, что переносимая в линии (1) активная мощность (12) убывает экспоненциально в направлении передачи с погонным затуханием, не меньшим  $2\alpha$ :

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{p(x_1)}{p(x_2)} \geq 2\alpha > 0 \quad (0 \leq x_1 < x_2 \leq l). \quad (13)$$

Если с использованием (6а) переписать (12) в виде  $p(x) = I^*(x) \operatorname{Re} W(x) I(x)$ , то определение (13) диссипативности уравнения Риккати (7) можно переформулировать:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(x_1) &> 0 \text{ для всех } x_1 < x_2, \text{ если} \\ \operatorname{Re} W(x_2) &\geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Эквивалентность этих двух определений ясна из [12]. Частным случаем этих определений, относящимся к частному случаю (2) обобщенных телеграфных уравнений (1), является определение диссипативности уравнения Риккати (8) для коэффициента отражения  $K(x)$  закрытого волновода:

$$\begin{aligned} \|K(x_1)\| &< 1 \text{ при всех } x_1 < x_2, \text{ если} \\ \|K(x_2)\| &\leq 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Диссипативность (13)—(15) следует из закона сохранения энергии при отражении и преломлении электромагнитных волн в неоднородных волноводах.

Определение диссипативности обобщенного уравнения Риккати (8) в виде

$$\begin{aligned} \|\xi(x_1)\| &< 1 \text{ при всех } x_1 > x_2, \text{ если} \\ \|\xi(x_2)\| &\leq 1, \end{aligned} \quad (16)$$

математически аналогично (15) — использовано то же понятие опера-

торной нормы матриц [13], — но имеет иной физический смысл: если энергия сильнозатухающих волн не превосходит энергии волн слабозатухающих в каком-то сечении, то это верно и для всех более далеких от начала сечений волновода. В [8, 10, 12] приведены критерии диссипативности уравнений Риккати разных типов (7) — (9), выраженные через коэффициенты этих уравнений.

Диссипативность уравнения Риккати (10) для коэффициента отражения открытого волновода определяется так: единичному кругу комплексной плоскости принадлежат все собственные значения линейного интегрального оператора (6г),  $x < x_1$ , если это верно для сечения  $x_1$  открытой линии. Эта диссипативность есть следствие закона сохранения энергии и означает, что суммарная энергия волн прямого направления (поверхностных и псевдоповерхностных, в терминологии [9]) превосходит суммарную энергию волн обратного направления (поверхностных и псевдоповерхностных).

Диссипативность уравнения Риккати (11) для относительного попутного потока  $\tau(x; p)$  псевдоповерхностных волн прямого направления, отнесенного к потоку поверхностной волны того же направления, определяется как условие преобладания энергии поверхностной волны над энергией псевдоповерхностных волн во всех сечениях  $x > x_1$  открытой линии, если это верно в сечении  $x_1$ . Эта диссипативность, как и (16), имеет место не всегда, но может рассматриваться как характерное свойство волноводов, эффективных для дальней передачи электромагнитных колебаний.

### 3. ОПЕРАТОРНЫЕ КРУГ И ПОЛУПЛОСКОСТЬ ЗИГЕЛЯ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ПАРАМЕТРОВ МНОГОМОДОВЫХ ЛИНИЙ

Совокупность квадратных матриц  $K$  (прямоугольных матриц  $\xi$ ), удовлетворяющих неравенству  $\|K\| \leq 1$  (соответственно  $\|\xi\| \leq 1$ ), называется матричным кругом Зигеля [14]. Определения диссипативности (15), (16) означают принадлежность  $K(x)$  и  $\xi(x)$  матричному кругу Зигеля, если этому кругу принадлежат граничные значения  $K(l)$  и  $\xi(0)$ .

Линейный оператор (6г) с ядром  $\kappa(x; p, q)$  обозначим через  $U^-(x) = H(x) U^+(x)$ , и аналогичные обозначения примем для линейных интегральных операторов типа (6г) с ядрами  $\gamma(x; p, q)$ ,  $\mu(x; p, q)$ ,  $\nu(x; p, q)$ , входящими в (4), (10), и с ядрами  $c(x; p)$ ,  $d(x; p, q)$ , входящими в (5), (11). Тогда интегродифференциальное уравнение Риккати (10) переписется как операторное уравнение Риккати вида (8), интегродифференциальное уравнение Риккати (11) — как операторное уравнение Риккати вида (9). Тем самым, операторный круг Зигеля  $\|H\| \leq 1$  оказывается геометрическим местом значений коэффициента отражения и относительного попутного потока открытого волновода.

Геометрическим местом входного сопротивления  $W(x)$  (6а), в соответствии с формулировкой (14) диссипативности и свойством взаимности [6], является правая полуплоскость  $\operatorname{Re} W \geq 0$  комплексных симметрических матриц, называемая матричной полуплоскостью Зигеля. Отметим, что полуплоскость есть частный случай круга, получающийся, если граница круга проходит через бесконечно удаленную точку (здесь — матрицу).

Диссипативное уравнение Риккати (7) — (11) определяет однопараметрическое семейство дробно-линейных преобразований, которым связаны текущее (в любом сечении  $x$ ) и граничные значения любого из параметров (6) волновода. В [15] применительно к коэффициенту отражения изложен способ численной реализации этого семейства дробно-линейных преобразований.

В этих терминах ясно принципиальное различие между традиционным использованием диаграммы Вольперта — Смита и ее интерпретацией, впервые введенной Герценштейном и Васильевым [1]. Дробно-линейное преобразование коэффициента отражения однородного волновода без потерь  $K(l) \rightarrow K(x)$  обычно рассматривалось как перемещение точки по диаграмме Вольперта — Смита, а в [1] интерпретировано как взаимно-однозначное преобразование всей диаграммы, не меняющее расстояний между любой парой ее точек и, в частности, переводящее  $K(l)$  в  $K(x)$ . Для многомодового волновода без потерь соответствующая интерпретация впервые проведена в [16], аналогичные результаты имеются в [17].

#### 4. ИНВАРИАНТНАЯ НЕЕКЛИДОВА МЕТРИКА МАТРИЧНОГО КРУГА ЗИГЕЛЯ

Хорошо известный [18] факт, что на диаграмме Вольперта — Смита наиболее удобными являются неевклидовы координаты, получил новую интерпретацию в [1]. Именно было использовано, что при дробно-линейных преобразованиях коэффициента отражения волновода без потерь расстояния между точками диаграммы, измеренные в метрике Лобачевского, инвариантны. При этом диаграмма Вольперта — Смита рассматривалась как модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. При обобщении этих результатов [1] на многомодовый волновод без потерь было показано [16], что следует привлекать не многомерное пространство Лобачевского [19], а матричный круг Зигеля — аналог модели Пуанкаре.

В работах Зигеля и его последователей [20] на единичном матричном круге  $\|K\| \leq 1$  построена такая метрика, что измеренное в ней расстояние между любой парой точек инвариантно при дробно-линейных преобразованиях этого круга на себя, порожденных консервативным уравнением Риккати (8) либо (9). Консервативность означает, что в определениях (15), (16) неравенства для норм заменены равенствами. Элемент площади круга Зигеля в инвариантной метрике [20] имеет вид

$$ds^2 = \text{Sp} \{ (E - K^*K)^{-1} dK (E - KK^*)^{-1} dK^* \}, \quad (17)$$

где  $\text{Sp}[\dots]$  означает вычисление следа (суммы диагональных элементов) матрицы (оператора) в квадратных скобках. При  $n = 1$  метрика (17) совпадает с метрикой Лобачевского.

На круге Зигеля как ограниченной области  $n^2$ -мерного комплексного пространства наряду с неевклидовой метрикой (17) существует евклидова метрика, и в ней порожденные уравнением Риккати (8) дробно-линейные преобразования коэффициента отражения  $K(x)$  даже при отсутствии потерь меняют расстояния между точками круга Зигеля. Этот недостаток евклидовой метрики затрудняет ее использование в теории неоднородных волноводов.

#### 5. ОПЕРАТОРЫ СЖАТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ПАРАМЕТРОВ ДИССИПАТИВНОГО ВОЛНОВОДА

На отрезке  $(x_j, x_{j+1})$  неоднородного многомодового волновода происходит дробно-линейное преобразование любого из параметров (6):

$$\begin{aligned} \text{а) } W(x_{j+1}) &\rightarrow W(x_j); & \text{б) } K(x_{j+1}) &\rightarrow K(x_j); \\ \text{в) } \xi(x_j) &\rightarrow \xi(x_{j+1}); & \text{г) } H(x_{j+1}) &\rightarrow H(x_j); \\ \text{д) } \tau(x_j; p) &\rightarrow \tau(x_{j+1}; p). \end{aligned} \quad (18)$$

Если геометрическим местом параметра до преобразования (18) слу-

жит весь круг Зигеля (вся полуплоскость Зигеля) и выполнено условие диссипативности соответствующих уравнений Риккати (7) — (11), то получающееся после дробно-линейного преобразования (18) геометрическое место параметра лежит строго внутри круга Зигеля (внутри полуплоскости Зигеля), как показано в [10, 12] для примеров а), б), в). Важное для теории волноводов свойство таких аналитических преобразований дает обобщенная лемма Шварца из теории функций многих комплексных переменных [21].

Предварительно сформулируем и обсудим классическую лемму Шварца. Пусть функция  $\varphi(z)$  аналитическая в единичном круге комплексной плоскости, меньше единицы по модулю и равна нулю в начале координат. Тогда  $|\varphi(z)| \leq |z|$ , и равенство может иметь место во внутренней точке, если оно имеет место и всюду, а  $\varphi(z) = ze^{i\theta}$  с вещественным  $\theta$ . Для того, чтобы увидеть истинный смысл леммы Шварца, нужно отбросить ограничение  $\varphi(0) = 0$  и перейти к неевклидовым координатам на единичном круге — тем самым, которые были использованы в [1]. Получается следующая, так называемая инвариантная формулировка классической леммы Шварца.

Пусть функция  $\varphi(z)$  аналитическая в единичном круге и меньше единицы по модулю. Тогда неевклидово расстояние между точками  $\varphi(z_1)$ ,  $\varphi(z_2)$  не превосходит неевклидова расстояния между точками  $z_1$ ,  $z_2$  единичного круга и равенство этих расстояний означает линейность функции  $\varphi(z)$ .

Через  $\rho\{K_1, K_2\}$  обозначим измеренное в инвариантной неевклидовой метрике (17) расстояние между точками  $K_1$  и  $K_2$  круга Зигеля, через  $\Pi_q(x_j)$  — образ (соответственно прообраз) точки  $\Pi_q(x_{j+1})$  при отображении (18),  $q = 1$  и  $2$ ,  $\Pi$  может быть любым из параметров  $W$ ,  $K$ ,  $\xi$ ,  $H$ ,  $\tau$ . Используемое далее утверждение обобщенной леммы Шварца [21] можно записать как неравенства

$$\begin{aligned} \text{а) } & \rho\{W_1(x_j), W_2(x_j)\} < \rho\{W_1(x_{j+1}), W_2(x_{j+1})\}; \\ \text{б) } & \rho\{K_1(x_j), K_2(x_j)\} < \rho\{K_1(x_{j+1}), K_2(x_{j+1})\}; \\ \text{в) } & \rho\{\xi_1(x_j), \xi_2(x_j)\} > \rho\{\xi_1(x_{j+1}), \xi_2(x_{j+1})\}; \\ \text{г) } & \rho\{H_1(x_j), H_2(x_j)\} < \rho\{H_1(x_{j+1}), H_2(x_{j+1})\}; \\ \text{д) } & \rho\{\tau_1(x_j), \tau_2(x_j)\} > \rho\{\tau_1(x_{j+1}), \tau_2(x_{j+1})\}, \end{aligned} \tag{19}$$

которые являются эквивалентами свойства диссипативности соответствующих уравнений Риккати (7) — (11).

Итак, преобразование (18) любого из параметров диссипативного волновода есть неевклидово сжатие круга (полуплоскости) Зигеля, и совокупность таких операторов сжатия есть полугруппа. Полугрупповое свойство состоит в том, что композиция сжатий есть сжатие, так что принадлежит полугруппе, однако обратный оператор для сжатия не есть сжатие, так что полугруппе не принадлежит.

Если рассмотрение дробно-линейных преобразований (18) вести в евклидовой метрике круга Зигеля, то сжимающее свойство (19) нарушится, и для его обеспечения приходится [22] привлекать дополнительные предположения и ограничивать общность рассмотрения.

Диссипативность волновода означает сжимающее свойство и такого параметра как матрица  $X(x_j, x_{j+1})$  рассеяния волн отрезком  $(x_j, x_{j+1})$  линии, определяемая [1] равенством

$$\begin{pmatrix} U^+(x_{j+1}) \\ U^-(x_{j+1}) \end{pmatrix} = X(x_j, x_{j+1}) \begin{pmatrix} U^+(x_j) \\ U^-(x_j) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Аналогично для матрицы передачи  $T(x_j, x_{j+1})$  напряжений и токов отрезком

$$\begin{pmatrix} -iU(x_{j+1}) \\ I(x_{j+1}) \end{pmatrix} = T(x_j, x_{j+1}) \begin{pmatrix} -iU(x_j) \\ I(x_j) \end{pmatrix}$$

сжимающее свойство следует из диссипативности (13) и означает [12]:  $T^*(x_j, x_{j+1})JT(x_j, x_{j+1}) - J > 0$ , т. е. в  $2n$ -мерном пространстве решений  $\begin{pmatrix} -iU(x) \\ I(x) \end{pmatrix}$  обобщенных телеграфных уравнений (1) с заданной в нем посредством нормы  $p(x)$  (12) индефинитной (неевклидовой) метрикой [23] оператор  $T^{-1}(x_j, x_{j+1})$  является  $J$ -сжимающим.

## 6. АСИМПТОТИКА ПАРАМЕТРОВ ДИССИПАТИВНОГО ВОЛНОВОДА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Использование неевклидовой геометрии позволяет осуществить единый подход как при периодических, так и при случайных стационарных неоднородностях длинной линии, рассматривавшихся обычно разными методами. Этот подход, изложенный в [10] применительно к параметрам закрытых волноводов, здесь распространим на параметры открытого неоднородного волновода, заданного системой (4) либо (5).

Рассматривается открытая линия с периодическими (период  $x_{j+1} - x_j = \pi$ ) неоднородностями, т. е. с периодическими по  $x$  ядрами  $\gamma(x; p, q)$ ,  $\mu(x; p, q)$ ,  $\nu(x; p, q)$  интегральных операторов в (4), (10). Установим, что тем же свойством периодичности обладает асимптотически и ядро  $\kappa(x; p, q)$  интегрального оператора (6г) коэффициента отражения  $H(x)$ .

Исходным служит вытекающее из закона сохранения энергии для открытого волновода с потерями свойство диссипативности интегродифференциального уравнения Риккати (10), означающее выполнение неравенства (19г) для операторного дробно-линейного преобразования (18г) коэффициента отражения, которое в силу периодичности не зависит от индекса  $j$  и, согласно (19г), является сжимающим аналитическим отображением операторного круга Зигеля  $\|H(x_{j+1})\| \leq 1$ . В этой ситуации имеет силу принцип сжатых отображений [24], утверждающий существование неподвижной точки  $H_0$  преобразования (18г), единственной в операторном круге Зигеля  $\|H\| \leq 1$ .

Если  $H(l) = H_0$ , то для всех сечений  $x = x_j$  имеем  $H(x_j) = H_0$  или, более подробно,

$$U^-(x_j, p) = \int_{\Delta} x_0(x_j; p, q) U^+(x_j, q) dq, \quad j = M; M-1, \dots, 1, 0 \quad (l = \pi M). \quad (21)$$

В силу единственности решения задачи Коши для интегродифференциального уравнения Риккати (10) серия неравенств (21) определяет периодическое решение для оператора  $H(x)$  и, тем самым, для его ядра  $\kappa(x; p, q)$ .

Если  $H(l) \neq H_0$ , но  $H(l)$  принадлежит операторному кругу Зигеля (это означает физическую реализуемость нагрузки открытого волновода), то неевклидово расстояние  $\rho\{H(x_j), H_0\}$  монотонно убывает вместе с  $j$  (см. (19г)), т. е. задаваемое граничным значением  $H(l)$  частное решение  $H(x)$  операторного уравнения Риккати (10) монотонно (в неевклидовой метрике) сближается с периодическим решением  $H_0(x)$  этого уравнения. Это и составляет асимптотическую (при  $l - x \rightarrow \infty$ ) периодичность любого частного решения для коэффициента отражения

$\ast H(x)$  (и для ядра  $(x; p, q)$  этого оператора) периодического открытого диссипативного волновода.

Отвлекаясь от периодических неоднородностей, рассмотрим открытый волновод со стационарными случайными неоднородностями. Сжатие (17F) области значений оператора  $H$  происходит с вероятностью 1 на каждой  $j$ -й секции и означает забывание предыстории случайного процесса  $H(x)$ , начатой от  $x = l$ . Существует такая константа  $h_j < 1$ , что  $\rho \{H_1(x_j), H_2(x_j)\} < h_j \rho \{H_1(x_{j+1}), H_2(x_{j+1})\}$ , поэтому убывает экспоненциально корреляционная функция случайного частного решения  $H(x)$  операторного уравнения Риккати (10):

$$\rho \{H_1(x), H_2(x)\} < e^{-\delta(l-x)} \rho \{H_1(l), H_2(l)\} \quad (\delta > 0), \quad (22)$$

и имеет место асимптотическая (при  $l - x \rightarrow \infty$ ) стационарность  $\dot{H}(x)$ .

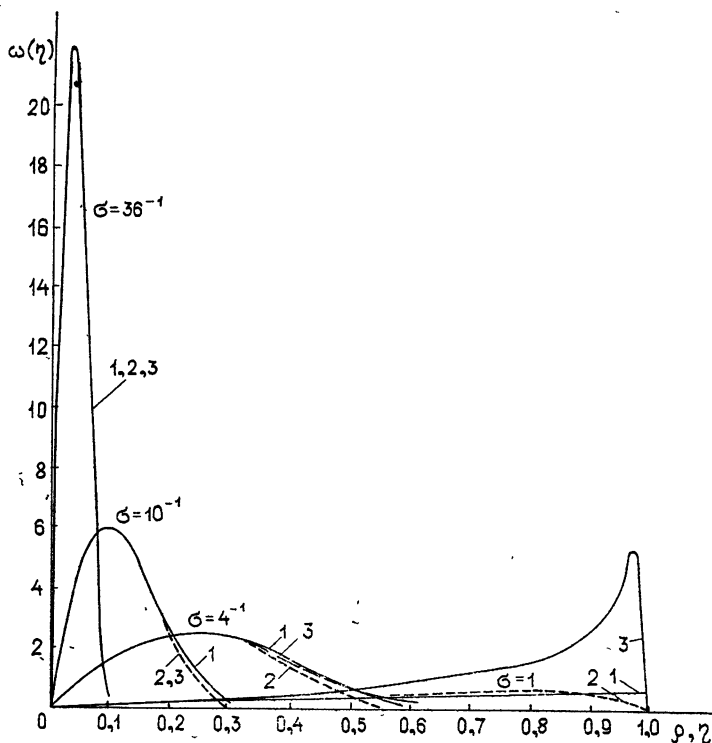


Рис. 1. Построение плотности распределения вероятностей для модуля коэффициента отражения волновода:

1—исходное рэлеевское распределение  $\omega(\eta) = \frac{\eta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\sigma^2}\right)$  на полярном радиусе  $0 < \eta < \infty$  плоскости Лобачевского;

2—та же функция на радиусе  $0 < \rho < 1$  модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, полученная в результате замены переменной  $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \rightarrow \rho$ ;

3—плотность распределения вероятностей модуля коэффициента отражения  $\omega(\rho)$  на радиусе единичного круга, полученная умножением зависимости 2 на якобиан

$$\frac{d\eta}{d\rho} = \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \text{ замены переменной } \eta \rightarrow \rho.$$

При сочетании периодических и случайных неоднородностей волновода в качестве последовательности сечений  $\{x_j\}$  следует брать точки припасовывания секций волновода, имеющих случайный разброс пара-

метров по сравнению с чисто периодическим волноводом. После такого исключения периодической составляющей можно пользоваться формулой (22) и следствиями из нее.

При  $\delta$ -коррелированных неоднородностях волновода его параметры (6) совершают броуновское движение (18), и в [1] построено диффузионное уравнение для случайного коэффициента отражения одномодового волновода без потерь. Прием [1], обобщенный на многомодовый волновод без потерь в [16], состоит в использовании единственности оператора Бельтрами — Лапласа на многообразии — круге Зигеля с неевклидовой метрикой. При наличии потерь на это броуновское движение накладывается регулярный снос к началу координат, что впервые указано в [1]. С учетом этого сноса в [25] получена для коэффициента отражения статистика типа Уленбека — Орнштейна: нормальный марковский процесс по обеим бельтрамиевым координатам на плоскости Лобачевского.

Полученный результат: для неевклидова полярного радиуса  $\eta$  ( $x$  случайно блуждающей точки на плоскости Лобачевского справедлив рэлеевский закон распределения вероятностей (см. рис. 1). Сопоставим его с решением, полученным в [26], которое можно построить, например, таким способом. Будем исходить из рэлеевского закона распределения вероятностей на полуоси  $\zeta$ ,  $\omega(\zeta) = \frac{\zeta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right)$ , и выполним в нем

замену переменных  $\zeta \equiv \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \rightarrow \rho$ , показанную на рис. 2 в сопо-

ставлении с заменой переменной  $\eta \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \rightarrow \rho$ . Обе эти заме-

ны преобразуют полуось (область значений неевклидова полярного радиуса  $\eta(x)$  точки на плоскости Лобачевского) в отрезок  $0 \leq \rho(x) \leq 1$

(область значений евклидова полярного радиуса точки на единичном круге) и различаются лишь в области больших значений модуля коэффициента отражения, которая не очень важна для реальных длинных линий передачи. Это различие вызвано принятыми в [25] упрощениями вычисленного значения коэффициента диффузии.

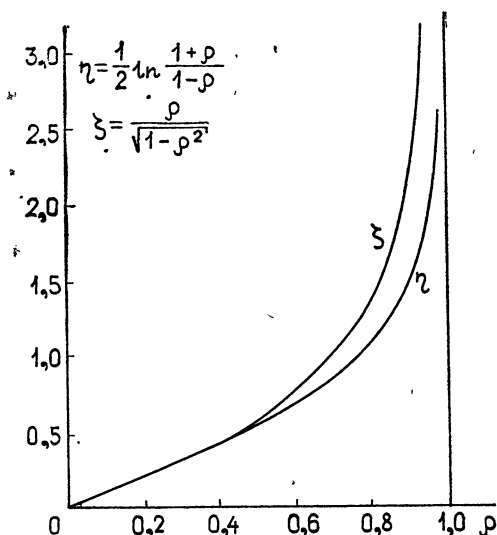


Рис. 2. Связь неевклидовых полярных координат с евклидовыми полярными координатами  $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$  в сопоставлении с отображением  $\zeta = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \rightarrow \rho$  полуоси на радиус единичного круга.

Подстановка  $\zeta = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$  в рэлеевский закон приводит его к виду

$$\omega(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\sigma^2 (1-\rho^2)}\right) \cdot \frac{1}{(1-\rho^2)^{3/2}} = \rho \omega_0(\rho), \quad (23)$$

который лишь множителем  $\rho$  отличается от решения, полученного в [26].

Выполнено условие нормировки  $\int_0^1 \omega_0(\rho) \rho d\rho = 1$ , в соответствии с кото-

рым можно рассматривать множитель  $\rho$  в (23) как якобиан преобразования прямоугольных координат в полярные (с последовавшим усреднением по угловой координате, выделившим плотность распределения полярного радиуса). В соответствии с этим на рис. 3 по данным [26] построены зависимости  $\rho^2 \omega_0(\rho)$ , которые и будут сопоставляться с зависимостями  $\rho \omega(\rho)$  рис. 4, получающимися из кривых рис. 1 в резуль-

тате указанной выше замены  $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \rightarrow \rho$ .

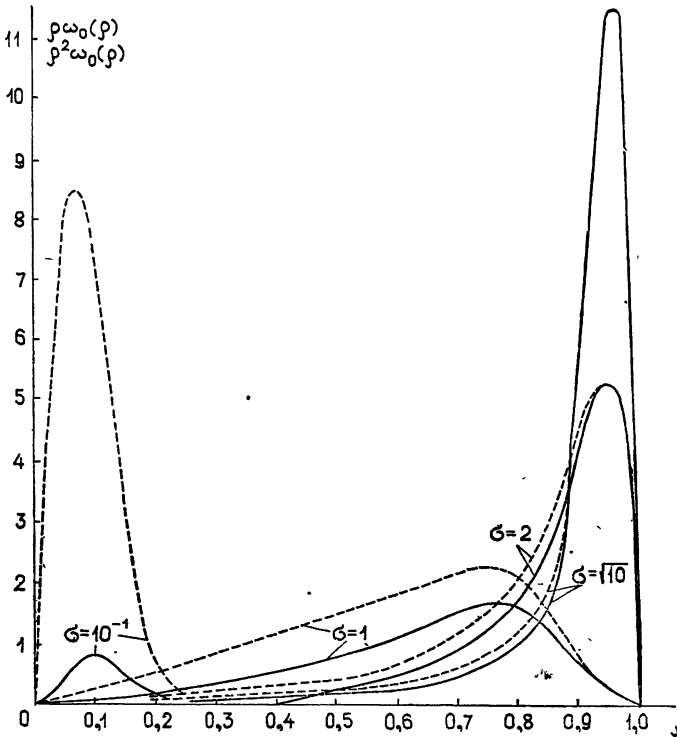
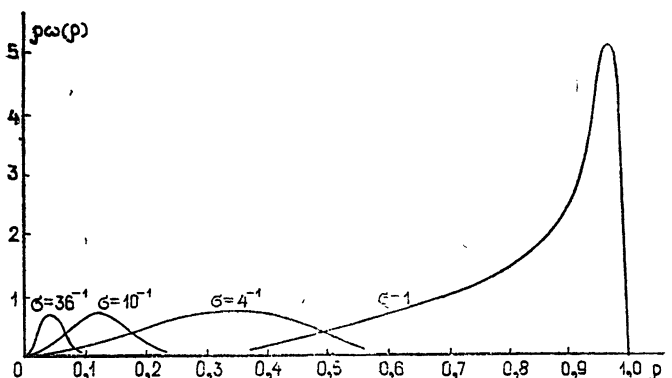


Рис. 3. Зависимости  $\rho^2 \omega_0(\rho)$  (сплошная линия) и  $\rho \omega_0(\rho) = \frac{2}{\sigma^2(1-\rho^2)^2} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$  [26] (штриховая линия), построенные при  $\sigma = 10^{-1}; 1; 2; \sqrt{10}$ .

Полученное сопоставление оказывается точным при малых значениях  $\sigma$ , которым соответствует большой коэффициент затухания или малый коэффициент диффузии случайных неоднородностей: в этих условиях модуль коэффициента отражения мал с вероятностью, близкой к 1, так что мы находимся в области совпадения кривых на рис. 2. Для того, чтобы проводимое сопоставление было успешным при  $\sigma > 1$ , достаточно значению  $\sigma$  на рис. 4 ставить в соответствие значение порядка  $2\sigma$  на рис. 3, чем компенсируется различие якобианов этих замен пере-

$$\text{менных: } \frac{d\eta}{d\rho} = \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \text{ и } \frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{1}{(1-\rho^2)^{3/2}}.$$



Рис. 4. Зависимость  $\rho\omega(\rho)$ , построенная по кривым рис. 1.

## 7. УРАВНЕНИЯ РИККАТИ И РАСЧЕТ МАТРИЦЫ ПЕРЕДАЧИ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА

Матрица-функция  $\theta(x, \chi)$  передачи волн прямого направления неоднородным волноводом определяется как решение уравнения

$$-\frac{\partial \theta(x, \chi)}{\partial x} = \begin{pmatrix} B(x) & C(x) \\ -A(x) & -D(x) \end{pmatrix} \theta(x, \chi) \quad (x > \chi, \theta(\chi, \chi) = E), \quad (24)$$

соответствующего (3), и является основной характеристикой волновода. Расчеты и асимптотические исследования, основанные на представлении вида

$$\theta(l, 0) = \theta(x_M, x_{M-1}) \theta(x_{M-1}, x_{M-2}) \dots \theta(x_2, x_1) \theta(x_1, x_0) \quad (25)$$

$$(0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = l),$$

сопряжены с такой трудностью: если множители  $\theta(x_{j+1}, x_j)$  (25) известны с погрешностью порядка  $\varepsilon$  (именно так и бывает при расчетах системы (24) с переменными коэффициентами), то погрешность произведения растет, как  $\varepsilon(2n)^{M-1}$ , где  $n$  — порядок матриц-множителей, т. е. велика.

Для преодоления этой трудности служит полученное в [27] представление матрицы передачи

$$\theta(x, \chi) = \frac{1}{R(x, \chi)} \begin{pmatrix} 1 & -\omega(x, \chi) \\ \zeta(x, \chi) & -\zeta(x, \chi)\omega(x, \chi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S(x, \chi) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

использующее векторные и матричные функции от коэффициентов системы (3):

1) вектор-функцию  $\zeta(x, \chi)$ , являющуюся решением при всех  $x > \chi$  уравнения Риккати (9) ( $m = 1$ ) и удовлетворяющую граничному условию  $\zeta(\chi, \chi) = 0$ ;

2) решение  $S(x, \chi)$  матричного уравнения типа (24) порядка  $n-1$ :

$$\frac{\partial S(x, \chi)}{\partial x} = [D(x) + \zeta(x, \chi)C(x)] S(x, \chi) \quad (S(\chi, \chi) = E); \quad (27)$$

3) скалярную экспоненту

$$R(x, \chi) = \exp \left\{ \int_{\chi}^x [B(t) + C(t)\zeta(t, \chi)] dt \right\}; \quad (28)$$

4) определяемую через (27), (28) вектор-строку  $\omega(x, \chi)$ :

$$\frac{\partial \omega(x, \chi)}{\partial x} = R(x, \chi) C(x) S(x, \chi) \quad (\omega(x, \chi) = 0), \quad (29)$$

которая, как можно показать по аналогии с [11], удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\frac{\partial \omega(x, \chi)}{\partial \chi} = \omega(x, \chi) A(\chi) \omega(x, \chi) + \omega(x, \chi) D(\chi) + B(\chi) \omega(x, \chi) + C(\chi), \quad (30)$$

т. е. получается из своего граничного значения  $\omega(x, \chi) = 0$  последовательно дробно-линейных преобразований, знаменатели которых скалярны, так что не требуется обращения матриц. Этот способ вычислений позволяет обойтись без предварительного нахождения матрицы-функции  $S(x, \chi)$  порядка  $n-1$  и дает первое слагаемое в представлении (26) матрицы передачи из решения двух векторных уравнений Риккати размерности  $n-1$  и одной скалярной экспоненты (28).

Аналогично вычисляется второе слагаемое (26), т. е. матрица-функция  $S(x, \chi)$ : решением двух векторных уравнений Риккати типа (9) и (30) размерности  $n-2$  и нахождением еще одной скалярной экспоненты типа (28) задача сводится к еще меньшей размерности искомой матрицы типа  $S(x, \chi)$ . В результате этой процедуры получается представление [25] матрицы передачи в виде

$$\theta(x, \chi) = \Xi(x, \chi) \text{diag} \left( \frac{1}{R_1(x, \chi)}, \frac{1}{R_2(x, \chi)}, \dots, \frac{1}{R_n(x, \chi)} \right) \Omega(x, \chi), \quad (31)$$

где  $\Xi(x, \chi)$  и  $\Omega_i(x, \chi)$  — матрицы одинаковой «треугольной» структуры: по диагонали единицы, над диагональю нули, а каждый столбец под диагональю есть решение векторного уравнения Риккати с нулевым граничным значением.

Приведенный алгоритм вычисления матрицы передачи  $\theta(x, \chi)$  исключает перемножение (25) матриц передачи отдельных секций волновода, сопровождающееся быстрым накоплением погрешности, и сводит весь расчет к решению  $2(n-1)$  векторных уравнений Риккати и  $n$  скалярных экспонент. При выполнении условий диссипативности [27] для этих уравнений Риккати остаются ограниченными как абсолютная, так и относительная погрешности их численного решения и, тем самым, определения матрицы передачи  $\theta(x, \chi)$  неоднородного многомодового волновода сколь угодно большой длины.

Для доказательства воспользуемся явной записью [27] дробно-линейного преобразования (18в):

$$\xi(x_{j+1}) = \frac{\zeta(x_{j+1}, x_j) + [R(x_{j+1}, x_j)S(x_{j+1}, x_j) - \zeta(x_{j+1}, x_j)\omega(x_{j+1}, x_j)]\xi(x_j)}{1 - \omega(x_{j+1}, x_j)\xi(x_j)}. \quad (32)$$

Когда вектор  $\xi(x_j)$  обегает все точки векторного круга Зигеля  $\|\xi\| \leq 1$ , соответствующий (32) вектор  $\xi(x_{j+1})$  обегает все точки круга  $\|P^{-1}(\xi - G)\| \leq 1$ , лежащего внутри единичного при выполнении условия диссипативности уравнения Риккати (9). Здесь

$$G(x_{j+1}, x_j) = \zeta(x_{j+1}, x_j) + \frac{R(x_{j+1}, x_j)S(x_{j+1}, x_j)\omega^*(x_{j+1}, x_j)}{1 - \omega(x_{j+1}, x_j)\omega^*(x_{j+1}, x_j)},$$

$$P(x_{j+1}, x_j) = \{ R(x_{j+1}, x_j)S(x_{j+1}, x_j) [1 - \omega(x_{j+1}, x_j)\omega^*(x_{j+1}, x_j)]^{-1} \times \\ \times [E - \omega^*(x_{j+1}, x_j)\omega(x_{j+1}, x_j)]^{-1} R^*(x_{j+1}, x_j)S^*(x_{j+1}, x_j) \}^{1/2}$$

— центр и радиус векторного круга, являющегося геометрическим местом  $\xi(x_{j+1})$ .

При этом дробно-линейное преобразование (32) есть композиция: 1) сжатия  $\xi(x_j) \rightarrow P(x_{j+1}, x_j) \xi(x_j)$  в инвариантной неевклидовой метрике векторного круга Зигеля, 2) параллельного переноса  $P(x_{j+1}, x_j) \xi(x_j) \rightarrow G(x_{j+1}, x_j) + P(x_{j+1}, x_j) \xi(x_j)$ , 3) взаимно-однозначного отображения (неевклидова вращения) векторного круга

$$\zeta \rightarrow \left( \frac{E - \omega^* \omega}{1 - \omega \omega^*} \right)^{-1/2} \frac{\zeta - \omega^*}{1 - \omega^* \zeta},$$

переводящего в центр точку  $\omega^* = \omega^*(x_{j+1}, x_j)$  этого круга.

За счет входящего в (32) соответствующего отрезку  $(x_j, x_{j+1})$  неевклидова сжатия уменьшаются накопленные в значении  $\xi(x_j)$  погрешности промежуточных вычислений на длине  $(0, x_j)$  волновода. Таким образом, существует длина  $\Delta$ , такая, что в значении  $\xi(x)$  фактически «забыты» погрешности, накопленные расчетом на длине  $(0, x - \Delta)$ , а присутствуют лишь погрешности, внесенные расчетом на отрезке  $(x - \Delta, x)$ . Независимость значения  $\Delta$  от сечения  $x$  волновода и неизменный уровень погрешностей промежуточных вычислений обеспечивают стабилизацию относительной погрешности счета.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана целесообразность привлечения неевклидовой геометрии для построения общей теории многомодовых неоднородных волноводов и расчетов их параметров. Отказ от такого подхода приводит к усложнению теории, ослаблению ее результатов, сужению области ее применения. Идея такого привлечения формулируется так: общую теорию многомодовых неоднородных волноводов и алгоритмы численного анализа их коэффициентов отражения и передачи, входного импеданса и относительного попутного потока следует основывать на аппарате диссипативных уравнений Риккати — векторных либо матричных, обобщенных либо операторных. Эта формулировка следует из показанной в работе глубокой связи неевклидовой геометрии с уравнениями Риккати. Иными словами, можно сказать, что предпочтительны для расчета и асимптотического исследования параметры волновода, преобразующиеся по дробно-линейному закону. Удобство неевклидовой метрики объясняется тем, что она определяется ангармоническим соотношением, а именно ангармонические соотношения являются инвариантами дробно-линейных преобразований.

Показанная в работе целесообразность использования свойства диссипативности уравнений Риккати приводит к вопросу о том, как быть при отсутствии этой диссипативности. Пример постановки и решения этого вопроса дан в предыдущем разделе работы, посвященном матрице передачи волновода. Поскольку она определяется как решение линейного дифференциального уравнения (24), постольку уравнения Риккати строятся при помощи искусственного приема (26) с использованием введенного в [8] понятия относительного попутного потока. Для этого параметра неоднородного многомодового волновода неприменимо непосредственно понятие диссипативности, следующее из закона сохранения энергии, поэтому это понятие пришлось вводить заново, исходя из математической аналогии (15) и (16), и оно получило физический смысл свойства фильтрации волн по затуханию. Имеется достаточно широкий класс волноводов, обладающих этим свойством диссипативности, а также практически важные типы волноводов, для которых и такой диссипативности нет.

Приведенный пример «искусственного» введения диссипативности и другие аналогичные примеры, рассмотренные в работе, позволяют ставить задачу обнаружения новых типов диссипативности для волноводов, не обладающих диссипативностью в известном смысле.

Рассмотрим световод, т. е. диэлектрический волновод, у которого большое количество волн (тысячи) имеют примерно одинаковое затухание. При наличии даже малых случайных неоднородностей оказывается нарушенным условие фильтрации волн по затуханию, так что нет диссипативности ни в одном из рассмотренных выше смыслов, если рассматривается матрица передачи волн прямого направления в таком световоде.

Воспользуемся методикой, разработанной Мысельским и Пашковским применительно к несколько другой физической задаче [30], для применения метода диссипативного уравнения Риккати к такому световоду.

Рассматривается отрезок  $(x_m, x_{m+1})$   $n$ -модового световода, в который слева и справа вносится и влево и вправо выносится мощность  $i$ -х мод ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Пусть вектор-столбец  $V^+(x_m)$  (соответственно вектор-столбец  $V^-(x_{m+1})$ ) таков, что его  $i$ -й элемент измеряет вероятность внесения мощности  $i$ -й модой слева (соответственно справа), вектор-столбец  $V^+(x_{m+1})$  (соответственно вектор-столбец  $V^-(x_m)$ ) таков, что его  $i$ -й элемент измеряет вероятность вынесения мощности  $i$ -й модой вправо (соответственно влево). Все эти векторы имеют неотрицательные элементы.

Векторы  $V^+(x_m)$ ,  $V^-(x_{m+1})$  характеризуют все варианты возбуждения электромагнитных колебаний рассматриваемого отрезка световода, поэтому равна единице сумма их элементов. При отсутствии поглощения и высвечивания электромагнитной энергии то же верно для суммы элементов векторов  $V^-(x_m)$ ,  $V^+(x_{m+1})$ . Эта сумма строго меньше 1 при наличии поглощения и высвечивания. Зададим теперь статистику неоднородностей отрезка световода: матрицы  $p(x_m, x_{m+1})$ ,  $P(x_m, x_{m+1})$ ,  $q(x_m, x_{m+1})$ ,  $Q(x_m, x_{m+1})$  условных вероятностей с элементами:  $p_{ij}$  (соответственно  $P_{ij}$ ) — условная вероятность выноса мощности вправо (соответственно влево)  $i$ -й модой, если она внесена слева (соответственно справа)  $j$ -й модой;  $q_{ij}$  (соответственно  $Q_{ij}$ ) — условная вероятность выноса мощности влево (соответственно вправо)  $i$ -й модой, если она внесена слева (соответственно справа)  $j$ -й модой,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Для рассматриваемого отрезка световода формула полной вероятности имеет вид

$$\begin{pmatrix} V^+(x_{m+1}) \\ V^-(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_m, x_{m+1}) & Q(x_m, x_{m+1}) \\ q(x_m, x_{m+1}) & P(x_m, x_{m+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^+(x_m) \\ V^-(x_{m+1}) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

аналогичный формуле для матрицы рассеяния (20), поэтому аналитические свойства матрицы условных вероятностей аналогичны аналитическим свойствам матрицы рассеяния [11]. Следовательно, справедливы уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial q(x, \chi)}{\partial x} &= \lambda(x) + M(x)q(x, \chi) + q(x, \chi)\mu(x) + q(x, \chi)\Lambda(x)q(x, \chi) \\ &\quad (q(\chi, \chi) = 0), \\ -\frac{\partial p(x, \chi)}{\partial x} &= p(x, \chi)[\mu(x) + \Lambda(x)q(x, \chi)] \quad (p(\chi, \chi) = E), \\ -\frac{\partial P(x, \chi)}{\partial x} &= [M(x) + q(x, \chi)\Lambda(x)]P(x, \chi) \quad (P(\chi, \chi) = E), \end{aligned} \quad (34)$$

$$-\frac{\partial Q(x, \chi)}{\partial x} = p(x, \chi) \Lambda(x) P(x, \chi) \quad (Q(x, \chi) = 0),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \left. \frac{\partial Q(x, \chi)}{\partial \chi} \right|_{x=\chi}, & \lambda(x) &= \left. \frac{\partial q(x, \chi)}{\partial \chi} \right|_{x=\chi}, \\ M(x) &= \left. \frac{\partial P(x, \chi)}{\partial \chi} \right|_{x=\chi}, & \mu(x) &= \left. \frac{\partial p(x, \chi)}{\partial \chi} \right|_{x=\chi} \end{aligned} \quad (35)$$

можно считать независимыми от  $x$ , если не меняются вероятностные свойства вдоль оси световода. Для нахождения этих коэффициентов (35) уравнений (34) достаточно исследовать, например экспериментально, матрицы  $Q$ ,  $q$ ,  $P$ ,  $p$  на малом отрезке световода ( $x, x + \Delta x$ ).

Сумма элементов векторов (33) есть их норма, согласованная с нормой  $\max_{1 < i < n} \left\{ \sum_{i=1}^n (p_{ij} + q_{ij}), \sum_{i=1}^n (P_{ij} + Q_{ij}) \right\}$  матриц (33), не превосходящей единицу. При наличии поглощения и высвечивания норма этой матрицы строго меньше единицы, так что имеем сжимающее свойство в сформулированной неевклидовой метрике. Отсюда следуют асимптотическое постоянство решения  $q(x, \chi) \rightarrow q_\infty$  при  $\chi - x \rightarrow \infty$  для матричного уравнения Риккати (34) с постоянными коэффициентами и экспоненциальная асимптотика матриц  $p(x, \chi)$ ,  $P(x, \chi)$ :

$$p(x, \chi) \rightarrow \exp[-(\mu + \Lambda q_\infty)(\chi - x)],$$

$$P(x, \chi) \rightarrow \exp[-(M + q_\infty \Lambda)(\chi - x)].$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Теория вероятностей и ее применения, 4, вып. 4, 424 (1959)
2. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 5, 711 (1959).
3. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
4. S. A. Schelkunoff, Bell. Syst. Techn. J., 34, № 5, 995 (1955).
5. М. Х. Захар-Иткин, XXXI Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио. Аннотации и тезисы докладов секции волноводных устройств, изд. НТО РЭС им. А. С. Попова, М., 1976
6. М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 19, № 11, 2338 (1974).
7. Р. Б. Ваганов, Р. Ф. Матвеев, В. В. Мернакри, Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями, изд. Сов. радио, М., 1972.
8. М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 21, № 4, 670 (1976).
9. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
10. М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 21, № 6, 1179 (1976).
11. М. Х. Захар-Иткин, УМН, 28, № 3, 83 (1973).
12. М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 21, № 10, 2040 (1976)
13. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.
14. К. Л. Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, ИЛ, М., 1954.
15. М. Х. Захар-Иткин, Электричество, № 2, 60 (1969).
16. М. Х. Захар-Иткин, Теория вероятностей и ее применения, 15, вып. 2, 291 (1970).
17. R. Burridge and G. Papanicolaou, Comm. Pure and Appl. Math., 25, № 6, 715 (1972).
18. А. Вайсфлор, Теория цепей и техника измерений в дециметровом и сантиметровом диапазонах, изд. Сов. радио, М., 1961.
19. В. Н. Тутубалин, Теория вероятностей и ее применения, 14, вып. 4, 577 (1969).
20. И. И. Пятацкий-Шапиро, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, изд. Физматгиз, М., 1961.
21. Б. А. Фукс, Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, изд. Физматгиз, М., 1963.

22. М. Х. Захар-Иткин, Теория вероятностей и ее применения, 18, вып. 2, 289 (1973).
23. К. Л. Надь, Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, изд. Мир, М., 1969.
24. Функциональный анализ, под ред. С. Г. Крейна, изд. Наука, М., 1964
25. М. Х. Захар-Иткин, Радиотехника и электроника, 22, № 2, 225 (1977).
26. Б. С. Абрамович, А. И. Дятлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 8, 1222 (1975).
27. М. Х. Захар-Иткин, УМН, 30, вып. 4, 241 (1975).
28. С. И. Альбер, В. И. Беспалов, Радиотехника и электроника, 6, № 2, 448 (1961).
29. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1240 (1973).
30. J. Mysielski and S. Paszkowski, Studia Mathem., 15, № 2, 186 (1956).

Всесоюзный научно-исследовательский  
институт электроэнергетики

Поступила в редакцию  
19 января 1976 г.,  
после доработки  
16 мая 1977 г.

УДК 533.951

**ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛН СВИСТОВОГО ДИАПАЗОНА В ПЛАЗМЕ**

*Н. С. Беллюстин*

Рассматривается излучение стороннего тока в свистовом диапазоне частот. Получены выражения для волновых полей и диаграммы направленности произвольного излучателя. Обсуждаются пределы применимости квазипродольного приближения. Приведены формулы, определяющие полную мощность излучения дипольных источников в различных случаях. Показано, что в низкочастотной области свистового диапазона заметная часть энергии может излучаться под большими углами к внешнему магнитному полю.

Магнитоактивная плазма является анизотропной средой, распространение волн в которой характеризуется тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ . В системе координат с осью  $z$  вдоль внешнего магнитного поля тензор  $\epsilon_{ij}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где  $\epsilon, g, h$  определяются параметрами плазмы (см. [1], гл. 5). В такой среде возможно распространение двух нормальных волн, показатели преломления которых зависят от угла  $\psi$  между волновым вектором  $k$  и внешним магнитным полем  $H_0$ :

$$n_{0,e}^2 = \frac{(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta) \sin^2 \psi - 2\epsilon\eta \pm \sqrt{(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta)^2 \sin^4 \psi + 4g^2 \eta^2 \cos^2 \psi}}{2(\epsilon \sin^2 \psi + \eta \cos^2 \psi)}. \tag{2}$$

Излучение волн в среде с тензором (1) рассматривалось в ряде работ [2-4]. В некоторых частотных диапазонах дисперсионное уравнение для нормальных волн и выражение (2) можно существенно упростить и получить аналитические выражения для волновых полей и других характеристик излучения (см., например, [5, 6]). В свистовом диапазоне частот выполнены неравенства

$$\Omega_H \ll \omega \ll \omega_H, \quad \omega \ll \omega_0; \tag{3}$$

$$|\epsilon| \ll |g| \ll |\eta|, \quad g < 0, \eta < 0 \tag{4}$$

(здесь  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — гирочастоты электронов и ионов,  $\omega_0$  — электронная ленгмюровская частота), которые также позволяют упростить дисперсионное уравнение. В этом случае обыкновенная волна не распространяется ( $n_0^2 < 0$ ), а для необыкновенной всюду, кроме узкой области углов вблизи  $\psi \sim \pi/2$ , справедлива простая формула

$$n_e^2 = \frac{|g|}{|\cos \psi|} \tag{5}$$

(квазипродольное приближение), соответствующая пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $|\eta| \rightarrow \infty$  в (2). В работе [7] найдены волновые поля элементарного излучателя в таком приближении. Как показано в [8], для источника малых размеров излучаемая мощность существенно зависит от диагональных компонент тензора  $\varepsilon_{ij}$  и квазипродольное приближение непригодно.

В настоящей работе рассматривается излучение, создаваемое сторонним током с произвольным распределением. В первой части работы получены общие формулы для характеристик излучения в свистовом диапазоне. Во второй части указаны условия применимости квазипродольного приближения и рассмотрено излучение в этом случае. В пп. 3—5 рассмотрено излучение мелкомасштабных излучателей в трех различных случаях, соответствующих диапазону (3). В качестве примера взяты диполи конечных размеров:

$$J_e = \frac{i \omega P_e}{\pi^{3/2} a^2 b} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right), \quad J_m = \frac{i \omega P_m}{\pi^{3/2} a^2 b} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \quad (6)$$

Рассмотренные здесь вопросы представляют интерес для ионосферы, где источником может быть как спутниковая антенна, так и токи другого происхождения (см., например, [9, 10]). Полученные результаты могут быть также использованы при изучении галактической, солнечной и лабораторной плазмы.

1. Решение исходных волновых уравнений для полей, создаваемых внешним гармоническим источником в плазме, удобно искать с помощью разложения по плоским волнам:

$$a(\mathbf{R}) = k_0^3 \int a^f(\mathbf{n}) \exp(i k_0 \mathbf{n} \mathbf{R}) d\mathbf{n}, \quad a(\mathbf{n}) = \int a(\mathbf{R}) \exp(-i k_0 \mathbf{n} \mathbf{R}) d\mathbf{R}, \quad (1.1)$$

где  $a = E_i, H_i, j_i, k_0 = \omega/c$ . Величины  $E_i(\mathbf{n})$  и  $H_i(\mathbf{n})$  находятся из алгебраических соотношений

$$n^2 E_i - n_i n_j E_j - \varepsilon_{ij} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i(\mathbf{n}), \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \mathbf{E}], \quad (1.2)$$

и задача сводится к вычислению обратного интеграла Фурье (1.1). В свистовом диапазоне (3), решая систему (1.2) и имея в виду волновые поля необыкновенной волны, находим

$$E_z = -\frac{4\pi i n_z n^2 F(\mathbf{n})}{\eta \omega (n_z^2 - n_{z0}^2)(n_z^2 - n_{ze}^2)}, \quad F(\mathbf{n}) = \left(n_x - \frac{i g n_y}{n^2}\right) j_x(\mathbf{n}) + \left(n_y + \frac{i g n_x}{n^2}\right) j_y(\mathbf{n}) + \frac{n_z n^2}{n_{\perp}^2 - \eta} j_z(\mathbf{n}), \quad (1.3)$$

$$n_{z0,e} = \sqrt{\varepsilon - \frac{n_{\perp}^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\eta}\right)} \mp \sqrt{\frac{n_{\perp}^4}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 - n_{\perp}^2 \frac{g^2}{\eta} + g^2},$$

$$n_{\perp}^2 = n_x^2 + n_y^2, \quad n^2 = n_{\perp}^2 + n_z^2.$$

Зависимости  $n_z(n_{\perp})$  (1.3) и  $n(\psi)$  (2) определяют поверхность показателя преломления в пространстве  $\mathbf{n}$ , нормаль к которой совпадает с направлением потока энергии в волне. Остальные компоненты поля выражаются через  $E_z$  соотношениями



$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{(n_{\perp}^2 - \eta)(n_x n^2 + i g n_y)}{n_z n_{\perp}^2 n^2} E_z, & E_y &= \frac{(n_{\perp}^2 - \eta)(n_y n^2 - i g n_x)}{n_z n_{\perp}^2 n^2} E_z, \\
 H_x &= \frac{i g n_x (n_{\perp}^2 - \eta) + \eta n_y n^2}{n_{\perp}^2 n^2} E_z, & H_y &= \frac{i g n_y (n_{\perp}^2 - \eta) - \eta n_x n^2}{n_{\perp}^2 n^2} E_z, \\
 H_z &= -\frac{i g (n_{\perp}^2 - \eta)}{n_z n^2} E_z.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если сторонним источником является магнитный ток, то поля определяются выражениями (1.3) и (1.4), где

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{n}) &= \left( \frac{\eta n_y n_z}{n_{\perp}^2 - \eta} - i g \frac{n_x n_z}{n^2} \right) j_{mx}(\mathbf{n}) + \\
 &+ \left( -\frac{\eta n_x n_z}{n_{\perp}^2 - \eta} - i g \frac{n_y n_z}{n^2} \right) j_{my}(\mathbf{n}) + \frac{i g n_{\perp}^2}{n^2} j_{mz}(\mathbf{n}).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

В полупространстве  $z > z'$  ( $z'$  принадлежит области с током), интегрируя (1.1) по  $n_z$ , получим

$$E_z = -\frac{i}{2\pi^2 \omega \eta} \iint \frac{n_{ze} n^2 F(n_{\perp}, n_{ze}) \exp[ik_0(n_{\perp} r + n_{ze} z)]}{\sqrt{n_{\perp}^4 + 4g^2}} dn_{\perp}. \tag{1.6}$$

Аналогичные выражения можно записать и для других компонент.

Для вопросов, связанных с излучением, достаточно найти асимптотическое представление полей в волновой зоне источника, где интегралы типа (1.6) всюду, за исключением некоторых особых направлений (см. [4]), находятся методом перевала:

$$E_z = \frac{\omega(1+\delta^2)^{1/2}}{c^2 \eta R \delta^{1/2}} \frac{n_s^2 F(\mathbf{n}_s)}{\sqrt{n_{\perp s}^4 + 4g^2}} \sqrt{\frac{n_{\perp s}}{n_{ze}(n_{\perp s})}} \exp(ik_0 n_s R). \tag{1.7}$$

Здесь индекс «s» означает, что значения величин берутся в перевальной точке,  $n_{\perp s}$  определяется из уравнения

$$\frac{dn_{ze}(n_{\perp})}{dn_{\perp}} = -\frac{r}{z} = -\operatorname{tg} \vartheta = -\delta. \tag{1.8}$$

Остальные величины в (1.7) определяются равенствами

$$n_{\perp s} = n_{\perp} \frac{r}{r}, \quad n_{zs} = n_{ze}(n_{\perp s}), \tag{1.9}$$

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости  $xy$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . Другие компоненты полей выражаются через  $E_z$  с помощью соотношений (1.4), где нужно положить  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_s$ . Имея это в виду, в дальнейшем будем приводить лишь выражение для компоненты  $E_z$  в тех случаях, когда поля находятся методом перевала.

Нетрудно убедиться, что в общем случае для нахождения  $n_{\perp s}$  нужно решить алгебраическое уравнение шестой степени с произвольными коэффициентами. Это обстоятельство не позволяет получить общих аналитических выражений для волновых полей излучателя в магнитоак-

тивной плазме. Ниже будет показано, как корни уравнения (1.8) могут быть найдены приближенно в свистовом диапазоне частот (3). Заметим, что когда уравнение (1.8) имеет несколько действительных решений, то полное поле представляет собой сумму соответствующих выражений по всем перевальным точкам. Зная поля в волновой зоне, легко найти выражение для вектора Пойнтинга и построить диаграмму направленности. Если в точку наблюдения приходят несколько лучей, соответствующих различным перевальным точкам, то удобно рассматривать поток энергии в каждом луче отдельно [2]\*.

Для ряда приложений важно знать полную мощность излучения источника. В непоглощающей среде ее можно получить, интегрируя по телесному углу диаграмму направленности, или по реакции излучения:

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (\mathbf{j} \mathbf{E}^*) dR.$$

В рассматриваемом случае (4) из (1.9) имеем

$$W = \frac{\omega^2}{4\pi c^3 |\eta|} \operatorname{Re} \int \frac{n^2 (n_{\perp}^2 + |\eta|) |F(\mathbf{n}_{\perp}, n_{ze}(\mathbf{n}_{\perp}))|^2}{n_{ze} n_{\perp}^2 \sqrt{n_{\perp}^4 + 4g^2}} d\mathbf{n}_{\perp}. \quad (1.10)$$

2. В диапазоне (3) при условиях

$$n_{\perp}^2 \ll \frac{g^2}{|\varepsilon|}, \quad n_{\perp}^2 \ll |\eta| \quad (2.1)$$

справедливо квазипродольное приближение:

$$n_{ze} = \sqrt{-\frac{1}{2} n_{\perp}^2 + \sqrt{\frac{1}{4} n_{\perp}^4 + g^2}}. \quad (2.2)$$

Этим выражением можно пользоваться, если  $F(\mathbf{n}_{\perp}, n_{ze}(\mathbf{n}_{\perp}))$  лежит в области (2.1). Если учесть, что ширина пространственного спектра источника по порядку величины определяется значением  $n_{\perp} \sim \frac{1}{k_0 a}$ , где  $a$  — наименьший характерный размер источника поперек магнитного поля, то условие применимости (2.2) можно записать в виде

$$k_0^2 \frac{g^2}{|\varepsilon|} a^2 \gg 1, \quad k_0^2 |\eta| a^2 \gg 1. \quad (2.3)$$

Решая (1.8), в этом случае, имеем

$$\begin{aligned} n_{s1,2} &= |g|^{1/2} \left( \frac{1 - 4\delta^2 - 8\delta^4 \mp \sqrt{1 - 8\delta^2}}{2\delta^2(1 + \delta^2)} \right)^{1/4}, \\ n_{zs1,2} &= |g|^{1/2} \left( \frac{1 - 2\delta^2 \pm \sqrt{1 - 8\delta^2}}{2(1 + \delta^2)} \right)^{1/4}, \\ n_{s1,2} &= \frac{|g|}{n_{zs1,2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

\* Полный поток вектора Пойнтинга в точке наблюдения, вообще говоря, не равен сумме потоков приходящих в эту точку лучей.

Если  $\delta^2 \ll 1/8$ , то (2.4) можно упростить и приближенно считать

$$\begin{aligned} n_{\perp s1} &\simeq 2\delta |g|^{1/2}, \quad n_{z s1} \simeq n_{s1} \simeq |g|^{1/2}, \\ n_{\perp s2} &\simeq n_{s2} \simeq \sqrt{\frac{|g|}{\delta}}, \quad n_{z s2} = \sqrt{|g|\delta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для направлений внутри конуса Стори в точку наблюдения приходят два луча, вне конуса — область тени. Подставив (2.4) в (1.7), находим

$$E_{z1,2} = \frac{\omega (1 + \delta^2)^{1/2} n_{s1,2} \sqrt{n_{\perp s1,2}} F(n_{s1,2})}{c^2 \eta R \delta^{1/2} \sqrt{2} (2\delta n_{\perp s1,2} - n_{z s1,2})} \exp(ik_0 n_{s1,2} R), \quad (2.6)$$

и радиальный поток вектора Пойнтинга в каждом из лучей запишется в виде

$$S_{R1} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |F(n_{s1})|^2}{16\pi c^3 R^2 \delta^2 (n_{z s1} - 2\delta n_{\perp s1})}, \quad S_{R2} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |F(n_{s2})|^2}{16\pi c^3 R^2 \delta^2 (2\delta n_{\perp s2} - n_{z s2})}. \quad (2.7)$$

На рис. 1 изображены зависимость (2.2) и вид диаграммы направленности поперечного электрического источника (6) ( $P_e \perp H_0$ ) в плоскости, проходящей через ось диполя, при условиях  $k_0^2 |g| a^2 = 0,1$ ,  $k_0^2 |g| b^2 \ll 1$ . Диаграмма имеет максимум при  $\vartheta \sim k_0^2 |g| a^2$ . Выражения (2.6) и (2.7) обращаются в бесконечность при  $\delta \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , это связано с тем, что две перевальные точки приближаются к точке перегиба кривой  $n_{ze}(n_{\perp})$  и асимптотика интеграла (1.6) не сводится к (1.7). Вычисляя (1.6) более строго (см. [2, 4]) и используя (2.4), в этом случае получим

$$E_z = \frac{3\omega^{7/6} F(n_0) |g|^{1/3} e^{-i\pi/4}}{2^{1/6} c^{13/6} R^{5/6} \eta} v \left( \frac{k_0^{2/3} |g|^{1/3} (2\sqrt{2} r - z)}{2^{1/6} 3^{1/2} R^{1/3}} \right). \quad (2.8)$$

Здесь  $v(\xi)$  — функция Эйри [1],

$$n_{\perp 0} = \frac{2^{1/2} |g|^{1/2} r}{3^{1/4}}, \quad n_{z0} = \frac{|g|^{1/2}}{3^{1/4}}, \quad n_0 = 3^{1/4} |g|^{1/2}. \quad (2.9)$$

Остальные компоненты поля связаны с  $E_z$  соотношениями

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{3^{1/2} \eta}{2^{1/2} g} E_z, \quad E_\varphi = \frac{i \eta}{2^{1/2} g} E_z, \quad H_z = -\frac{i \eta}{3^{1/4} |g|^{1/2}} E_z, \\ H_r &= \frac{i \eta}{2^{1/2} 3^{1/4} |g|^{1/2}} E_z, \quad H_\varphi = -\frac{3^{1/4} \eta}{2^{1/2} |g|^{1/2}} E_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

(здесь используется цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ ). Когда аргумент функции Эйри принимает большие отрицательные значения, решение (2.8) — (2.10) переходит в сумму двух лучей (2.7), в области больших положительных значений аргумента поля экспоненциально малы. Более слабый, чем обычно, закон спадаения волновых полей вдоль особого направления, пропорциональный  $R^{-5/6}$ , обуславливает особен-

ность диаграммы направленности. Размер области, где необходимо пользоваться формулой (2.8), растет с расстоянием как  $R^{-1/3}$ , в то время как ее угловая ширина уменьшается пропорционально  $R^{-2/3}$ .

Вычисляя полную излучаемую мощность дипольных источников (6) при условиях (2.3) и

$$k_0^2 a^2 |g| \ll 1, \quad k_0^2 b^2 |g| \ll \frac{1}{k_0^2 a^2 |g|}, \quad (2.11)$$

по формуле (1.10) найдем

$$\begin{aligned} W_{e\perp} &= \frac{\pi^{1/2} \omega P_{e\perp}^2}{2^{5/2} |g| a^3}, & W_{e\parallel} &= \frac{\pi^{1/2} \omega |g| P_{e\parallel}^2}{2^{3/2} \eta^2 a^3}, \\ W_{m\perp} &= \frac{\pi^{1/2} \omega^3 |g| P_{m\perp}^2}{2^{5/2} c^2 a}, & W_{m\parallel} &= \frac{\pi^{1/2} \omega^3 |g| P_{m\parallel}^2}{2^{3/2} c^2 a}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь индексы « $e$ » и « $m$ » обозначают тип диполя, индексы  $\perp$  и  $\parallel$  — его ориентацию относительно внешнего магнитного поля.

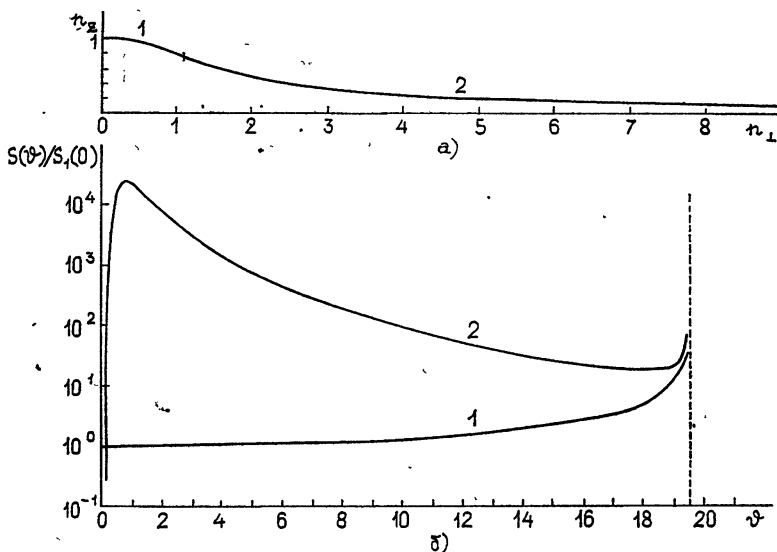


Рис. 1.

Вид зависимости  $n_{ze}(n_{\perp})$  при больших значениях  $n_{\perp}$  качественно меняется на нижней гибридной частоте  $\omega_g$ , определяемой из условия  $\varepsilon(\omega_g) = 0$  (см. рис. 2а—4а). При условии

$$n_{\perp}^2 \gg |g| \quad (2.13)$$

из (1.3) имеем

$$n_{ze} = \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{g^2}{n_{\perp}^2}\right) \left(1 + \frac{n_{\perp}^2}{|\eta|}\right)}. \quad (2.14)$$

В высокочастотной части диапазона (3) при  $\omega \geq \omega_g$  имеет место плазменный резонанс. В этом случае  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta < 0$  и показатель преломления (2) обращается в бесконечность при некотором резонансном угле  $\psi_p$ .

При  $\omega = \omega_g$   $\psi_p = \pi/2$ . На частотах  $\omega \ll \omega_g$   $\varepsilon$  и  $\eta$  отрицательны и поверхность показателя преломления замкнута, но значения  $n$  резко возрастают при  $\psi \sim \pi/2$ .

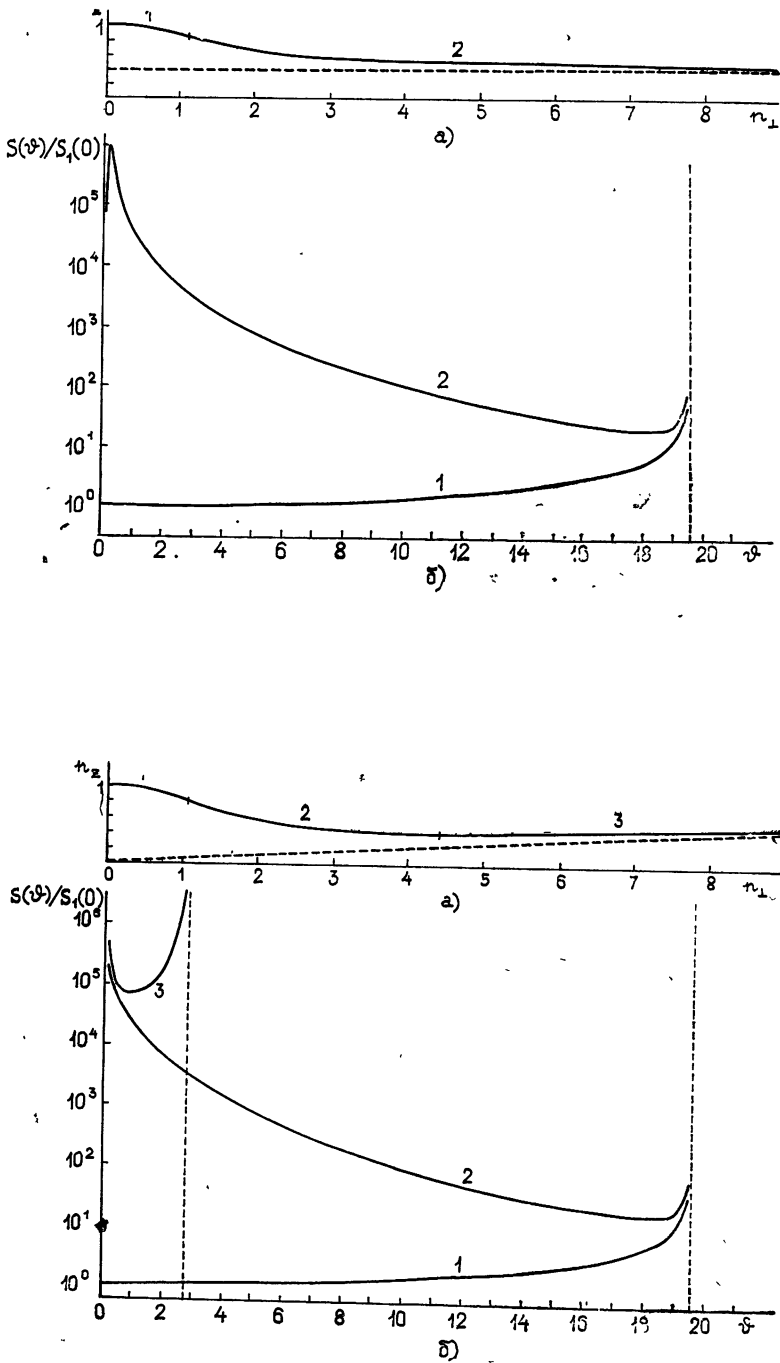


Рис. 3.

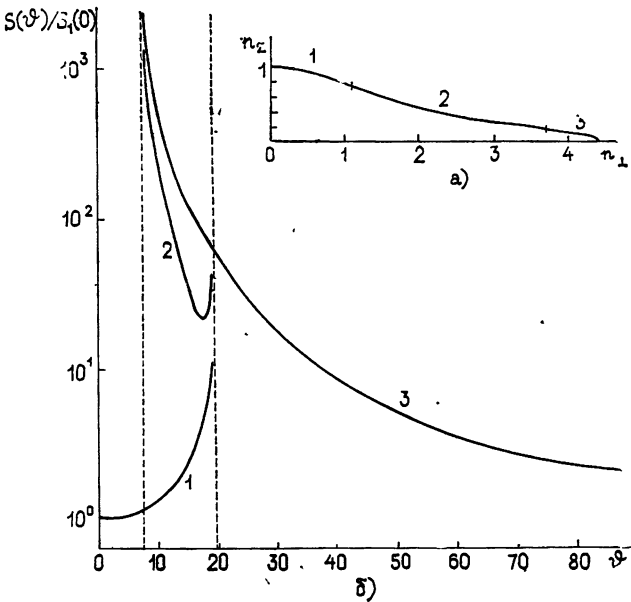


Рис. 4.

3. Рассмотрим излучение мелкомасштабных источников, для которых нарушаются неравенства (2.3), в низкочастотном случае  $\omega^2 \ll \omega_g^2$ . При этом условии  $|\eta| \ll g^2/|\varepsilon|$  и в (2) и (1.3) можно положить  $|\eta| \rightarrow \infty$ . Если выполнено (2.13), то из (2.14) имеем

$$n_{ze} = \sqrt{\frac{g^2}{n_{\perp}^2} - |\varepsilon|}. \quad (3.1)$$

Условия (2.1) и (2.13) могут быть удовлетворены одновременно, тогда приближенно получаем

$$n_z \sim \frac{|g|}{|n_{\perp}|}. \quad (3.2)$$

Таким образом, формулы (2.2) и (3.1) определяют зависимость  $n_{ze}(n_{\perp})$  в двух перекрывающихся областях  $n_{\perp}$ . Используя (3.1), запишем решение уравнения (1.8) в виде

$$n_{\perp s2,3} \approx n_{s2,3} \approx \left(\frac{\sqrt{3}g}{2\delta}\right)^{1/2} \cos^{-1/2}\left(\frac{\pi}{3} \mp \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{|\varepsilon|}{\delta|g|}\right), \quad (3.3)$$

$$n_{zs2,3} \approx \frac{g^2}{\delta n_{\perp s2,3}^3}.$$

Если  $\delta \gg \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{|\varepsilon|}{|g|}$ , то

$$n_{\perp s2} \approx n_{s2} \approx \sqrt{|g|/\delta}, \quad n_{zs2} \approx \sqrt{\delta|g|}, \quad (3.4)$$

$$n_{\perp s3} \approx \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2g^2 \delta^2} \right), \quad n_{zs3} \approx \frac{|\varepsilon|^{3/2}}{\delta |g|} \left( 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2\delta^2 g^2} \right).$$

Выражение для  $n_{s2}$  (3.4) совпадает с  $n_{s2}$  из (2.5), что позволяет «сшить» решения (3.3) и (2.4) для второго луча в области  $\frac{9\varepsilon^2}{4g^2} \ll \delta^2 \ll \frac{1}{8}$ .

В приближении (3.1) из (1.7) получим

$$E_{z2,3} = \frac{\omega |g| (1 + \delta^2)^{1/2} F(n_{s2,3}) \exp(ik_0 n_{s2,3} R)}{c^2 \eta \sqrt{n_{\perp s2,3}} \delta^{3/2} R \sqrt{3n_{zs2,3} - \delta n_{\perp s2,3}}}$$

Определив остальные компоненты поля, найдем выражение для вектора Пойнтинга:

$$S_{R2} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |F(n_{s2})|^2}{8\pi c^3 \delta^2 (3n_{zs2} - \delta n_{\perp s2})}, \quad S_{R3} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |F(n_{s3})|^2}{8\pi c^3 \delta^2 (\delta n_{\perp s3} - 3n_{zs3})}. \quad (3.5)$$

По формулам (3.3), (3.5) и (2.4), (2.7) можно построить диаграмму направленности произвольного источника. На рис. 26 построена угловая зависимость  $S_R(\vartheta)$  для поперечного электрического диполя (6) в плоскости, проходящей через ось диполя, при условиях  $\frac{|\varepsilon|}{|g|} = 0,05$ ,

$$k_0^2 b^2 |g| \ll 1, \quad k_0^2 \frac{g^2}{|\varepsilon|} a^2 \ll 1. \quad (3.6)$$

На рис. 2а показаны участки кривой  $n_{ze}(n_{\perp})$ , соответствующие лучам 1, 2, 3. Участок 2, на котором  $\vartheta$  уменьшается с ростом  $\psi$ , ограничен двумя точками перегиба.

Видно, что поток энергии отличен от нуля при любом значении  $\vartheta$ .

Основная часть энергии излучателя под углом  $\vartheta \gtrsim \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{|\varepsilon|}{|g|}$ , но есть заметное излучение под большими углами к магнитному полю, обусловленное вкладом участка 3, когда  $n_{\perp} \sim |g|/|\varepsilon|^{1/2}$ . В области углов  $\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{|\varepsilon|}{|g|} < \text{tg } \vartheta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$  в точку наблюдения приходят три луча, в остальных случаях — один луч. Структура поля под углом Стори рассматривалась выше (2.8), вблизи  $\vartheta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{|\varepsilon|}{|g|}$  сливаются перевальные точки 2 и 3 (3.3) и асимптотика поля имеет вид

$$E_z = \frac{2^{4/3} \omega^{7/6} |g|^{3/2} F(n_0) e^{-i\pi/4}}{3^{5/3} c^{13/6} |\varepsilon|^{7/6} R^{5/6}} v \left( \frac{k_0^{2/3} (3\sqrt{3} |\varepsilon| |z - 2|g|r)}{2^{3/2} 3^{7/6} R^{1/3} |\varepsilon|^{2/3}} \right),$$

где

$$n_{\perp 0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \frac{r}{r}, \quad n_{z0} = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}},$$

$$E_r = \frac{\sqrt{3}\eta}{g} E_z, \quad E_\varphi = -\frac{i3\sqrt{3}\eta|\varepsilon|}{2g^2} E_z, \quad H_z = \frac{3i\eta|\varepsilon|^{1/2}}{\sqrt{2}g} E_z,$$

$$H_r = \frac{i3\sqrt{3}\eta|\varepsilon|^{3/2}}{2\sqrt{2}g^2} E_z, \quad H_\varphi = -\frac{\sqrt{3}\eta|\varepsilon|^{1/2}}{\sqrt{2}g} E_z.$$

Полная мощность излучения источников (6) при условии (3.6) не зависит от размеров излучателя.

Оценим энергию, излучаемую источником под углами  $\vartheta$ , превышающими заданный,  $\vartheta_0 \geq \vartheta_{\text{Стори}}$ . Интегрируя диаграмму третьего луча (3.5) от  $\vartheta_0$  до  $\pi/2$ , можно найти энергию  $W'$ , излучаемую в этой области углов. Приведем отношение этой величины к полной мощности  $\Delta = W'/W$  для различных диполей:

$$\Delta_{e\perp} = \frac{4\text{ctg}\vartheta_0|\varepsilon|}{\pi|g|}, \quad \Delta_{e\parallel} = \frac{16}{3\pi} \left( \frac{|\varepsilon|\text{ctg}\vartheta_0}{|g|} \right)^3, \quad \Delta_{m\perp} = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{|\varepsilon|\text{ctg}\vartheta_0}{|g|} \right)^3, \\ \Delta_{m\parallel} = \frac{2}{\pi} \frac{|\varepsilon|\text{ctg}\vartheta_0}{|g|}.$$

Например, при  $|\varepsilon|/|g| = 0,05$  поперечный электрический диполь излучает вне конуса Стори  $\Delta_{e\perp} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{|\varepsilon|}{|g|} = 18\%$ . С уменьшением частоты растет отношение  $|\varepsilon|/|g|$ , и канализация излучаемых свистящих атмосфериков по магнитному полю ухудшается. Отметим, что сильно вытянутые вдоль магнитного поля источники (6) при  $k_0^2 b^2 |\varepsilon| \gg 1$   $k_0^2 a^2 g^2 / |\varepsilon| \ll 1$  практически всю энергию излучают под углами  $\vartheta \simeq \pi/2$ .

4. Рассмотрим излучение на частотах вблизи нижней гибридной, когда справедливы неравенства

$$\frac{g^2}{|\varepsilon|} \gg |\eta|, \quad k_0^2 a^2 \frac{g^2}{|\varepsilon|} \gg 1 \quad (4.1)$$

и можно полагать в (2) и (1.3)  $\varepsilon = 0$ . При условии (2.13) из (2.14) имеем

$$n_{ze} = \sqrt{\frac{g^2}{|\eta|} + \frac{g^2}{n_{\perp}^2}}. \quad (4.2)$$

Если  $n_{\perp}^2 \ll |\eta|$ , то зависимость (4.2) совпадает с (2.2) и определяется выражением (3.2). Используя (4.2), находим решение уравнения (1.8):

$$n_{\perp s2} = \left( \frac{\sqrt{3}|g|}{2\delta} \right)^{1/2} \cos^{-1/2} \left( \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}|g|}{2\delta|\eta|} \right) = \\ = \left( \frac{\sqrt{3}|g|}{2\delta} \right)^{1/2} \text{ch}^{-1/2} \left( \frac{1}{3} \text{arcch} \frac{3\sqrt{3}|g|}{2\delta|\eta|} \right), \quad n_{zs2} = \frac{g^2}{\delta n_{\perp s2}^3}. \quad (4.3)$$

Если  $\delta \ll \frac{3\sqrt{3}|g|}{2|\eta|}$ , то

$$n_{\perp s2} \approx \frac{|g|^{1/3} |\eta|^{1/6}}{\delta^{1/3}}, \quad n_{zs2} \approx \frac{|g|}{|\eta|^{1/2}} + \frac{\delta^{3/2} |\eta|}{2|g|^{1/2}}.$$



Продельвая вычисления, получим следующие выражения для поля:

$$E_{z2} = \frac{\omega |g| (1 + \delta^2)^{1/2} E(n_{s2}) \exp\{ik_0 n_{s2} R\}}{c^2 \eta \sqrt{n_{\perp s2}} \delta^{3/2} \sqrt{3n_{zs2} - \delta n_{\perp s2}}}$$

и радиального вектора Пойнтинга:

$$S_{R2} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |F(n_{s2})|^2 (n_{\perp s2}^2 + |\eta|)}{8\pi c^3 |\eta| R^2 \delta^2 (3n_{zs2} - \delta n_{\perp s2})}. \quad (4.4)$$

Формулы (4.3), (4.4) и (2.4), (2.7) определяют диаграмму направленности произвольного источника в этом случае. На рис. 3 приведены графики  $n_{ze}(n_{\perp})$  и  $S_R(\vartheta)$  для поперечного электрического диполя (6), когда  $|g|/|\eta| = 0,2$ ,  $k_0^2 a^2 |g| = 0,01$ . При  $\vartheta > \vartheta_{\text{сторн}}$  излучения нет. Если

$$k_0^2 a^2 |\eta| \ll 1, \quad (4.5)$$

диаграмма имеет максимум при  $\vartheta \sim k_0^3 a^3 |g| |\eta|^{1/2}$ . Мощность излучения дипольных источников (6) при условии (4.5) и  $k_0^2 b^2 g^2 / |\eta| \gg 1$  не зависит от продольного размера и выражается формулами

$$W_{e\perp} = \frac{c P_{e\perp}^2}{2a^4 |g| |\eta|^{1/2}}, \quad W_{e\parallel} = \frac{\omega^2 g^2 P_{e\parallel}^2}{2a^2 c |\eta|^{3/2}},$$

$$W_{m\perp} = \frac{\omega^4 |g| |\eta|^{1/2} P_{m\perp}^2}{8\pi^{1/2} c^3} \ln \frac{8}{k_0^2 a^2 |\eta|}, \quad W_{m\parallel} = \frac{\omega^2 g^2 P_{m\parallel}^2}{2ca^2 |\eta|^{1/2}}.$$

При  $a \rightarrow 0$  все эти выражения стремятся к бесконечности. Нужно иметь в виду, что малость  $a$  ограничена условием (4.1), кроме того, для очень малых источников существенную роль может играть пространственная дисперсия, обусловленная тепловым движением частиц плазмы, которая здесь не учитывается.

5. Рассмотрим излучение в области частот  $\omega^2 \gg \omega_g^2$ . В этом случае  $\varepsilon = g^2/|\eta|$  и при условии (2.13) из (2.14) находим

$$n_z = \left| \frac{\varepsilon}{g} n_{\perp} + \frac{g}{n_{\perp}} \right|, \quad (5)$$

что при  $n_{\perp}^2 \ll g^2/\varepsilon = |\eta|$  совпадает с (2.2) и (3.2). Решая (1.8) с учетом (5.1), имеем

$$n_{\perp s2,3} = \pm \frac{|g|}{\sqrt{\varepsilon \pm \delta |g|}}, \quad n_{zs2,3} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon \pm \delta |g|}} + \sqrt{\varepsilon \pm \delta |g|} \quad (5.2)$$

(см. рис. 4а). Волновое поле (1.7) и радиальный поток вектора Пойнтинга теперь запишутся в виде

$$E_{z2} = - \frac{\omega (1 + \delta^2)^{1/2} \varepsilon F(n_{s2}) \exp(ik_0 n_{s2} R)}{\sqrt{2|g|} c^2 \delta^{1/2} (\varepsilon + \delta |g|) R}, \quad (5.3)$$

$$E_{z3} = - i \frac{\omega (1 + \delta^2)^{1/2} \varepsilon F(n_{s3}) \exp(ik_0 n_{s3} R)}{\sqrt{2|g|} c^2 \delta^{1/2} (\varepsilon - \delta |g|) R},$$

$$S_{R2} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |g| |F(n_{s2})|^2}{16\pi c^3 \delta (\varepsilon + \delta |g|)^{3/2} R^2}, \quad S_{R3} = \frac{\omega^2 (1 + \delta^2)^{3/2} |g| |F(n_{s3})|^2}{16\pi c^3 \delta (\varepsilon - \delta |g|)^{3/2} R^2}.$$

На рис. 46 изображена диаграмма поперечного электрического диполя (6) при условиях  $\varepsilon/|g| = 0,05$ ,  $k_0^2 a^2 |\eta| = 0,2$ . Основная часть энергии излучается под малыми углами  $\vartheta \leq \varepsilon/|g| = \sqrt{\varepsilon/|\eta|}$  к внешнему магнитному полю, все излучение ограничено областью углов  $\vartheta < \vartheta_{\text{Стори}}$ . С уменьшением поперечного размера источника максимум диаграммы при  $\vartheta \sim \varepsilon/|g|$ , обусловленный плазменным резонансом, становится более острым. Поля вблизи конуса Стори определяются выражениями (2.8) — (2.10). Особенность диаграммы в направлении внешнего магнитного поля обусловлена конической рефракцией при  $n_{\perp} = |g|/|\varepsilon|^{1/2} = |\eta|^{1/2}$ , структура поля в этом случае определяется кольцевым пучком [12]. Асимптотика волновых полей с учетом сказанного имеет вид

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\omega^{3/2} g e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} |\varepsilon|^{3/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi, \\
 E_x &= -\frac{\omega^{3/2} g^2 e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} \varepsilon^{7/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \left(\cos \chi + i \frac{\varepsilon}{g} \sin \chi\right) \times \\
 &\quad \times \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi, \\
 E_y &= -\frac{\omega^{3/2} g^2 e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} \varepsilon^{7/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \left(\sin \chi - i \frac{\varepsilon}{g} \cos \chi\right) \times \\
 &\quad \times \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi, \tag{5.4} \\
 H_x &= \frac{\omega^{3/2} g^2 e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} \varepsilon^{5/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \left(\sin \chi + 2i \frac{\varepsilon}{g} \cos \chi\right) \times \\
 &\quad \times \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi, \\
 H_y &= -\frac{\omega^{3/2} g^2 e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} \varepsilon^{5/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \left(\cos \chi - 2i \frac{\varepsilon}{g} \sin \chi\right) \times \\
 &\quad \times \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi, \\
 H_z &= -\frac{i \omega^{3/2} g^2 e^{i\pi/4}}{(2\pi z)^{1/2} c^{5/2} \varepsilon^{5/4}} \int_0^{2\pi} \Phi(\chi) \exp\left(ik_0 r \frac{|g|}{|\varepsilon|^{1/2}} \cos(\varphi - \chi)\right) d\chi,
 \end{aligned}$$

где в случае электрического тока

$$\Phi(\chi) = j_x(\chi) \left(\cos \chi - i \frac{\varepsilon}{g} \sin \chi\right) + i_y(\chi) \left(\sin \chi + i \frac{\varepsilon}{g} \cos \chi\right) + \frac{\varepsilon}{g} j_z(\chi),$$

а в случае магнитного —

$$\Phi(\chi) = -\sqrt{\varepsilon} j_{mx}(\chi) \left( \sin \chi + i \frac{2\varepsilon}{g} \cos \chi \right) + \\ + \sqrt{\varepsilon} j_{my}(\chi) \left( \cos \chi - i \frac{2\varepsilon}{g} \sin \chi \right) + i \frac{\varepsilon}{g} j_{mz}(\chi).$$

Здесь

$$j_{e,m}(\chi) = j_{e,m} \left( \frac{|g|}{\sqrt{\varepsilon}} \cos \chi; \quad \frac{|g|}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \chi; \quad 2\sqrt{\varepsilon} \right).$$

Раскладывая подынтегральную функцию (5.4) в ряд Фурье и интегрируя, легко представить поля в виде сумм бесселевых функций. При  $k_0 r |g| / \sqrt{\varepsilon} \gg 1$  интегралы (5.4) вычисляются методом перевала и результат переходит в обычный (5.3) и (1.4). Вдоль оси  $z$  поля (5.4) спадают по закону  $z^{-1/2}$ .

Выпишем выражения для полных потерь дипольных источников (6)

при  $k_0^2 a^2 \eta \ll 1$ ,  $k_0^2 b^2 \varepsilon \ll 1$ :

$$W_{e\perp} = \frac{\pi^{1/2} \omega |\eta| P_{e\perp}^2}{2^{5/2} \varepsilon^{1/2} (\varepsilon b^2 + |\eta| a^2)^{3/2}}, \quad W_{e\parallel} = \frac{\pi^{1/2} \omega \varepsilon^{1/2} P_{e\parallel}^2}{2^{3/2} (\varepsilon b^2 + |\eta| a^2)^{3/2}}, \\ W_{m\perp} = \frac{\pi^{1/2} \omega^3 \varepsilon^{1/2} |\eta|^{1/2} P_{m\perp}^2}{2^{5/2} c^2 a}, \quad W_{m\parallel} = \frac{\pi^{1/2} \omega^3 g^2 P_{m\parallel}^2}{2^{3/2} c^2 a \varepsilon^{1/2} |\eta|^{1/2}}. \quad (5.5)$$

Эти потери неограниченно возрастают при  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ . Заметим, что при условии  $\varepsilon b^2 \ll |\eta| a^2$  (5.5) совпадает с (2.12), таким образом, формулы (5.5) справедливы, если выполнено более слабое условие (2.11) на поперечный размер излучателя.

Автор благодарен В. В. Тамойкину за полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Электродинамика плазмы, под ред. А. И. Ахиезера, изд. Наука, М., 1974.
2. E. Arbel and L. B. Felsen, Electromagnetic Theory and Antennas, Proc. Symp. held at Copenhagen, June 1962, Pergamon Press, 1963, p. 421.
3. В. Ф. Бункин, ЖЭТФ, 32, 338 (1957).
4. В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, 1147 (1965).
5. Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 17 (1975).
6. Н. С. Беллюстин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 7, 991 (1977).
7. H. N. K h u e l, Phys. Fluids, 5, № 9, 1091 (1962).
8. В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 8, 1121 (1976).
9. Д. С. Котик, В. Ю. Трахтенгерц, Письма в ЖЭТФ, 21, 114 (1975).
10. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 343 (1960).
11. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.
12. Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 592 (1972).

## WAVE RADIATION OF WHISTLER-RANGE IN PLASMA

*N. S. Bellyustin*

The external current radiation in the whistler-frequency range is considered. Expressions are derived for the wave fields and the radiation patterns of an arbitrary radiation. The applicability limits of quasi-longitudinal approximation are discussed. The formulas are given which determine the full radiation power of dipole sources in different cases. It is shown that within the low-frequency whistler-region a marked part of energy may be radiated at the large angles to the external magnetic field.

---

УДК 533.951

## О НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРЕКАЧКЕ ЭНЕРГИИ МЕЖДУ НОРМАЛЬНЫМИ ВОЛНАМИ С РАЗНЫМИ ЧАСТОТАМИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

*М. Е. Фрейман*

Рассматривается влияние вынужденного температурного рассеяния на нелинейное взаимодействие нормальных электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Показано, что рассеяние на возмущениях концентрации приводит к перекачке энергии между нормальными волнами при расстройке их частот. Рассматриваемый эффект может вызывать сильную демодуляцию мощных радиоволн при распространении последних в ионосфере.

Как показано в ряде работ [1-3], процесс вынужденного температурного рассеяния может сильно влиять на распространение мощных радиоволн в ионосфере. В частности, им обусловлено «резонансное взаимодействие» падающей и отраженной (от ионосферы) радиоволн, обыкновенной и необыкновенной составляющих произвольно поляризованной радиоволны и т. д. Физический механизм этого явления заключается в том, что в поле двух волн вследствие омического нагрева возникает модуляция электронной температуры и концентрации, которая приводит к дополнительному взаимодействию радиоволн. В случае слабопоглощающей плазмы вынужденное температурное рассеяние приводит к прямой перекачке энергии между взаимодействующими волнами. В [2] исследовалось «резонансное взаимодействие» в изотропной плазме. Изучение подобных явлений в магнитоактивной плазме приводит к новым эффектам, учет которых существен в задачах распространения мощных радиоволн в ионосфере.

Рассмотрим нелинейное взаимодействие обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн с близкими частотами, распространяющихся в одном направлении в столкновительной плазме с магнитным полем. В этом случае исходная система уравнений имеет следующий вид [4-6]:

$$\Delta E - \text{grad div } E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j'}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial j'}{\partial t} + \nu(T_e)j' + \omega_H \frac{j' \times H_0}{H_0} = \frac{\omega_p^2}{4\pi N_0} E; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{\nabla \cdot (\hat{\alpha}_e \nabla T_e)}{N} - \delta\nu(T_e)(T_e - T) + \frac{2}{3N} \overline{(j' E)_\omega}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div } j_e = q, \quad \text{div } j_e = \text{div } j_i; \quad (4)$$

$$j_e = -\frac{\hat{\sigma}_e}{e} E_c - \hat{D}_{ee} \nabla N - \frac{N}{T_e} \hat{D}_{Te} \nabla T_e; \quad (5)$$

$$j_l = \frac{\hat{\sigma}_l}{e} E_c - \hat{D}_{ll} \nabla N - \frac{N}{T_e} D_{T_{le}} \nabla T_e. \quad (6)$$

Здесь (1)—волновое уравнение ( $J'$  —плотность полного тока); (2)—материальное уравнение ( $\nu(T_e)$ —частота соударений электронов,  $H_0$  — постоянное магнитное поле,  $\omega_H$ —электронная гирочастота,  $\omega_p$ —электронная плазменная частота,  $N$ —концентрация электронов); (3), (4) — уравнения переноса для электронной температуры  $T_e$  и концентрации  $N$  (последний член в (3) соответствует джоулеву нагреву,  $q$ —изменение плотности электронов за счет ионизации и рекомбинации); (5), (6)—выражения для плотности потоков электронов  $j_e$  и ионов  $j_i$ , обусловленных проводимостью (с тензорами  $\hat{\sigma}_e, \hat{\sigma}_i$ ) в поляризованном поле  $E_c$ , диффузией (с тензорами  $\hat{D}_{ee}, \hat{D}_{ii}$ ) и термодиффузией (с тензорами  $\hat{D}_{T_e}, \hat{D}_{T_{ie}}$ ).

Возмущение среды описывается уравнениями переноса, если длина свободного пробега  $l$  много меньше характерного размера неоднородности джоулева нагрева в поле волн, а частота соударений  $\nu$  много больше характерного времени его изменения. В нашем случае  $l \ll |\Delta k|^{-1} \equiv \Delta k^{-1}$ ,  $\nu \gg \Omega$ , где  $\Delta k = k_1(\omega) - k_2(\omega)$ ,  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\omega = \omega_1 \approx \omega_2$ .

Поле двух волн представим в виде

$$E = E_1(z) \exp \{ i [\omega_1 t - k_1(\omega_1) z] \} + E_2(z) \exp \{ i [\omega_2 t - k_2(\omega_2) z] \},$$

где  $z$  — координата вдоль направления распространения волн.

Рассмотрим задачу в приближении слабых возмущений  $T_e$  и  $N$ . Тогда систему уравнений (3)—(6) можно линеаризовать и при выполнении условий  $\Delta k^{-1} \ll L$ ,  $\frac{v_{гр 1,2}}{\Omega}$ , где  $L$ —характерный размер изменения амплитуд  $E_1$  и  $E_2$ , а  $v_{гр 1,2}$  — групповая скорость соответственно волн 1 и 2, решить путем разделения возмущений на крупно- и мелкошаговые [7]. В результате придем к укороченным уравнениям для амплитуд  $a_{1,2} = (E_{x1,2}/E_p)^2$  ( $E_p = 3 T m \delta \omega^2 / e^2$  — плазменное поле [5]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\omega}{c} \kappa_1 a_1 + \frac{\omega}{c} \kappa_{11} a_1^2 + \frac{\omega}{c} \frac{1}{\mu_1} (\kappa_{12} + q_{1T} F_{1T} + \\ + q_{2T} F_{2T} + q_{1N} F_{1N} + q_{2N} F_{2N}) a_1 a_2 = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{\omega}{c} \kappa_2 a_2 + \frac{\omega}{c} \kappa_{22} a_2^2 + \frac{\omega}{c} \frac{1}{\mu_2} \times \\ \times (\kappa_{21} + q_{1T} G_{1T} + q_{2T} G_{2T} + q_{1N} G_{1N} + q_{2N} G_{2N}) a_1 a_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_{11,22} = (1 + |K_{1,2}|^2) \frac{2 \mu_{1,2} \kappa_{1,2}}{v_s} \left[ \xi \frac{\partial (\mu_{1,2} \kappa_{1,2})}{\partial s} s + \gamma \frac{\partial (\mu_{1,2} \kappa_{1,2})}{\partial v} v \right], \\ \kappa_{12,21} = (1 + |K_{2,1}|^2) \frac{2 \mu_{2,1} \kappa_{2,1}}{v_s} \left[ \xi \frac{\partial (\mu_{1,2} \kappa_{1,2})}{\partial s} s + \gamma \frac{\partial (\mu_{1,2} \kappa_{1,2})}{\partial v} v \right]; \\ F_{1T} + i F_{2T} = \frac{2 \operatorname{Re} K_1}{v_s} CD \frac{\partial K_2}{\partial s} s, \quad F_{1N} + i F_{2N} = \frac{2 \operatorname{Re} K_1}{v_s} CD \frac{\partial K_2}{\partial v} v, \end{aligned} \quad (8)$$

$$G_{1T} + iG_{2T} = \frac{2 \operatorname{Re} K_1}{v_s} C^* D \frac{\partial K_1^*}{\partial s} s, \quad G_{1N} + iG_{2N} = \frac{2 \operatorname{Re} K_1}{v_s} C^* D \frac{\partial K_1^*}{\partial v} v, \quad (9)$$

$D = \frac{C^*}{4} \left( 1 - \frac{1}{K_1^{2*}} \right) + \frac{\mu_1 x_1}{K_1^*}$ , величины  $\{F\}$  и  $\{G\}$  — действительные,  $K_{1,2}$  — коэффициенты поляризации,  $C$  — функция  $v$  и  $s$  [6];

$$s = \frac{v_0}{\omega}, \quad v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \xi = \left( \frac{T_e}{v} \frac{\partial v}{\partial T_e} \right)_0, \quad \gamma = - \left( \frac{T_e}{N} \frac{\partial q / \partial T_e}{\partial q / \partial N} \right)_0,$$

$$\tau_N = - \left( \frac{\partial q}{\partial N} \right)_0^{-1}, \quad q_{1T} = \operatorname{Re} q_T, \quad q_{2T} = - \operatorname{Im} q_T, \quad q_{1N} = \operatorname{Re} q_N,$$

$$q_{2N} = - \operatorname{Im} q_N, \quad q_T = \xi \frac{\delta v_0}{\Omega_T + i\Omega}, \quad q_N = \frac{\delta v_0}{\Omega_T} \times \quad (10)$$

$$\times \Omega'_N \left( \frac{1}{\Omega_N + i\Omega} - \frac{1}{\Omega_T + i\Omega} \right), \quad \Omega_T = \delta v_0 + \Delta k^2 \frac{\operatorname{sw}(\hat{x}_e)}{N_0};$$

$$\Omega_N = \frac{1}{\tau_N} + \Delta k^2 \frac{\operatorname{sw}(\hat{\sigma}_i) \operatorname{sw}(\hat{D}_{ee}) + \operatorname{sw}(\hat{\sigma}_e) \operatorname{sw}(\hat{D}_{ii})}{\operatorname{sw}(\hat{\sigma}_e + \hat{\sigma}_i)},$$

$$\Omega'_N = \frac{\gamma}{\tau_N} - \Delta k^2 \frac{\operatorname{sw}(\hat{\sigma}_i) \operatorname{sw}(\hat{D}_{Te}) + \operatorname{sw}(\hat{\sigma}_e) \operatorname{sw}(\hat{D}_{Te})}{\operatorname{sw}(\hat{\sigma}_e + \hat{\sigma}_i)}, \quad (11)$$

$$\operatorname{sw}(\hat{T}) \equiv \frac{1}{\Delta k^2} T_{ij} \Delta k_i \Delta k_j \equiv T_{\parallel} \cos^2 \theta + T_{\perp} \sin^2 \theta,$$

$\theta$  — угол между осью  $z$  и постоянным полем  $H_0$ .

Для непоперечного распространения, когда

$$\operatorname{tg}^2 \theta \ll \frac{D_{ee, \parallel \parallel}}{D_{ee, \parallel \perp}}, \quad \frac{\sigma_{e, \parallel \parallel}}{\sigma_{e, \parallel \perp}}, \quad \frac{x_{e \parallel}}{x_{e \perp}},$$

выражения (11) приобретают простой вид:

$$\Omega_T = \delta v_0 + \frac{x_{e \parallel}}{N_0} \Delta k^2 \cos^2 \theta, \quad \Omega_N = \frac{1}{\tau_N} + D_a \Delta k^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Omega'_N = \frac{\gamma}{\tau_N} - k_{Tea} D_a \Delta k^2 \cos^2 \theta,$$

где  $k_{Tea} = D_{Tea}/D_a$  — амбиполярное термодиффузионное отношение [5].

Из (7) — (11) видно, что величина «резонансного взаимодействия» в свою очередь резонансно зависит от расстройки частот  $\Omega$ . Оно не исчезает лишь в узкой полосе,  $|\Omega| \leq \Omega_T$ . Проведя аналогичный [2] анализ коэффициентов взаимодействия в уравнениях (7), можно показать, что члены с  $q_{1T}$  и  $q_{1N}$  обуславливают изменение поглощения обеих волн, а члены с  $q_{2T}$  и  $q_{2N}$  — перекачку энергии между волнами. Как показывает анализ, наиболее сильно проявляется «резонансное взаимодействие» в слабопоглощающей плазме, когда  $s = v_0/\omega \ll 1$ . В этом случае коэффициенты  $F_{1T}$ ,  $F_{2T}$ ,  $G_{1T}$ ,  $G_{2T}$ ,  $F_{1N}$ ,  $G_{1N}$  оказываются малыми по параметру  $s$ , и в нелинейной части уравнения нужно сохранить лишь члены

с  $F_{2N}$  и  $G_{2N}$ , т. е. все нелинейное взаимодействие обусловлено перекачкой энергии между волнами. При выполнении одного из неравенств

$$b_{1,2} \ll 1 \text{ или } \frac{\tilde{x}_{22}}{|\eta|} \ll \frac{b_1}{b_2} \ll \frac{|\eta|}{\tilde{x}_{11}} \text{ система уравнений (7) приобретает вид}$$

$$\frac{db_{1,2}}{dz_1} + \tilde{x}_{1,2} b_{1,2} \mp \eta b_1 b_2 = 0, \quad (12)$$

где

$$\eta = q_{2N} A, \quad A = 8 \left( \frac{x_1 x_2 b}{s^2} \right)^2 \left( 1 + \left| \frac{K_1}{K_2} \right| \right)^2; \quad (13)$$

$$b = \frac{\text{ctg}^2 \theta}{\text{ctg}^2 \theta + [1 + R^2(1 + \text{ctg}^2 \theta)] [1 + 4R^2 \text{ctg}^2 \theta(1 + \text{ctg}^2 \theta)]},$$

$$R = \frac{1-v}{\sqrt{u}}, \quad z_1 = \frac{\omega}{c} z, \quad \tilde{x}_{1,2} = 2x_{1,2},$$

$$\tilde{x}_{11,22} = \frac{4x_1 x_2 \mu_{2,1}}{s^2 \mu_{1,2}} \frac{1 + |K_{2,1}|^2}{|K_2|^2} x_{11,22};$$

$$b_1 = \frac{s^2 \mu_1}{2x_1 x_2 \mu_2} \frac{1}{1 + |K_1|^2} a_1,$$

$$b_2 = \frac{s^2 \mu_2}{2x_1 x_2 \mu_1} \frac{1}{1 + |K_1|^2} a'_2, \quad a'_2 = |K_2|^2 a_2 \approx \left| \frac{E_y}{E_p} \right|^2. \quad (14)$$

В соответствии с обозначениями в [6] индекс 1 соответствует необыкновенной волне, а индекс 2 — обыкновенной. Тогда при поперечном распространении, несмотря на то, что  $K_2 \rightarrow \infty$ , все коэффициенты в (12) остаются конечными. Параметр  $b$  введен в [3], и там же исследована его зависимость от угла  $\theta$ :  $b = 0$  при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \pi/2$  и имеет максимум на отрезке  $0, \pi/2$ . Численный расчет коэффициента перекачки  $\eta$  показывает, что  $\eta$  меняется в широких пределах и имеет острый максимум на отрезке  $0, \pi/2$ . На рис. 1\* приведены характерные кривые зависимости величины  $A$  (см. формулу (13)) от  $\theta$ . (Заметим, что в нижней ионосфере влияние процессов переноса несущественно, и в этой области зависимостью параметра  $q_{2N}$  от  $\theta$  можно пренебречь.)

Из уравнений (12) следует, что благодаря линейному поглощению рассеяние, например, волны 1, носит пороговый характер в зависимости от мощности волны накачки 2: при

$b_2 > b_{2п}$  ( $b_{2п} = \tilde{x}_1/\eta, \eta > 0$ ) рассеяние неустой-

чиво, что в стационарном случае приводит к пространственному усилению рассеянной волны. При большом превышении над порогом линей-

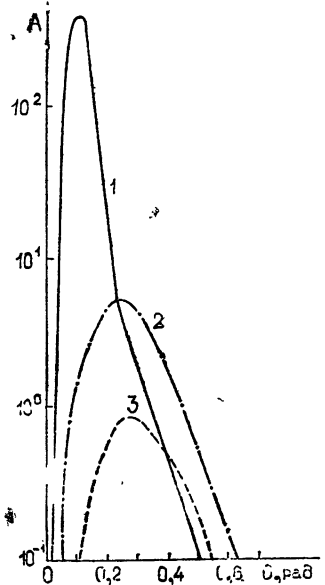


Рис. 1.

\* Цифры 1, 2, 3 у кривых относятся соответственно к случаям  $u = 10, v = 0,9; u = 10, v = 0,5; u = 1, v = 0,9$ .



ным поглощением можно пренебречь. Тогда нелинейное взаимодействие представляет собой прямую перекачку энергии между волнами. Соответствующее решение уравнений (12) имеет вид

$$b_1(z_1) = \frac{B}{1 + \frac{b_{20}}{b_{10}} \exp(-\eta B z_1)}, \quad b_2(z_1) = \frac{B}{1 + \frac{b_{10}}{b_{20}} \exp(\eta B z_1)}, \quad (15)$$

где  $B = b_1(z_1) + b_2(z_1) = b_{10} + b_{20}$  — интеграл системы (12) в рассматриваемом приближении. Из (15) следует, что на расстоянии, много меньшем длины линейного затухания, вся энергия перекачивается в одну из волн. Характерная длина перекачки равна

$$z_{\pi} = \frac{c}{\omega} (B |\eta|)^{-1} \ll \frac{c}{\omega} (\tilde{x}_{1,2})^{-1}.$$

Рассмотренный эффект должен проявляться при распространении мощной модулированной радиоволны произвольной поляризации в ионосфере. На примере модуляции с одной боковой частотой проиллюстрируем, как он влияет на демодуляцию волны. При частоте модуляции, находящейся в пределах резонансной области расстройек частот  $\Omega$ , и при мощности радиоволны, превышающей пороговую,  $b_2 > b_{2\pi}$ , самодействие исходной волны сведется к перекачке энергии между разноименными нормальными составляющими основной и боковой гармоник. Ввиду того, что направление перекачки меняет знак при изменении знака расстройки, вся энергия перекачивается либо в основную, либо в боковую гармонику на расстоянии  $z_{\pi}$ , что соответствует полной демодуляции радиоволны.

Из изложенного следует, что даже при слабых полях ( $b_{1,2} \ll 1$ ), много меньших плазменного, нелинейные искажения радиосигнала могут быть сильными. Это вызвано неустойчивостью вынужденного рассеяния нормальных составляющих радиоволны на возмущениях электронной концентрации. В литературе имеются ссылки на эксперименты, в которых при малых мощностях передатчиков обнаруживалась сильная демодуляция сигнала [8]. Полученные в настоящей работе результаты указывают на необходимость учета «резонансного взаимодействия» при интерпретации экспериментальных данных по нелинейному искажению радиосигналов в ионосфере.

В заключение выражаю благодарность И. М. Виленскому за внимание к работе и М. И. Абдулаевой за проведение расчетов и помощь в оформлении статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков и др, ЖЭТФ, 65, № 5 (11), 1893 (1973).
2. В. В. Плоткин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 2, 175 (1977).
3. А. А. Капельзон, В. В. Плоткин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 5, 625 (1975).
4. А. А. Капельзон, В. В. Плоткин, в сб. Вопросы исследования нижней ионосферы и геомагнетизма, Новосибирск, 1975, стр. 72.
5. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
7. И. М. Виленский, М. Е. Фрейман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 10, 1468 (1976).
8. M. Citolo, Nature, 167, 314 (1951); Nuovo Cimento, 9, 687 (1952).

Западно-Сибирский региональный научно-исследовательский гидрометеорологический институт

Поступила в редакцию  
22 марта 1976 г.,  
после доработки  
11 мая 1977 г.

---

**NONLINEAR ENERGY REPUMP BETWEEN NORMAL WAVES WITH DIFFERENT  
FREQUENCIES IN MAGNETOACTIVE COLLISIONAL PLASMA***M. E. Freyman*

The influence of stimulated temperature scattering on nonlinear interaction between normal electromagnetic waves in a magnetoactive plasma is considered. The scattering by the density perturbations is shown to lead to the energy repump between normal waves in the presence of their frequency detuning. The effect considered may cause a strong demodulation of powerful radiowaves propagating in the ionosphere.

---

УДК 533.951

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРОННОЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ***О. М. Градов, Г. Н. Измайлов*

Исследуется параметрическое взаимодействие нормально падающей на плазму сильной электромагнитной волны с электронными поверхностными модами. Найдены максимальные инкременты и пороговые значения напряженности поля накачки для неустойчивости, имеющей место в широком диапазоне частот поля накачки. Изучено комбинационное рассеяние сильной электромагнитной волны в непрозрачной плазме на поверхностных колебаниях. Показано, что рассеянное излучение существует в широком диапазоне частот и углов рассеяния. Найдены пороговые значения амплитуды падающей волны, начиная с которых имеет место нарастание интенсивности рассеянного сигнала.

В теоретических исследованиях нелинейного взаимодействия интенсивной электромагнитной волны с плазмой, тесно связанных с такими интересными физическими явлениями, как аномальное поглощение и вынужденное рассеяние мощного излучения, все возрастающий объем занимают работы, посвященные изучению эффектов, обусловленных неоднородностью плазмы и полей накачки. Наряду с изучением турбулентного состояния, возникающего в результате развития параметрической неустойчивости [1], такое направление развития теории соответствует тенденции приближения ее результатов к реальным условиям эксперимента. В русле этой тенденции находятся и работы по проблеме взаимодействия сильных электромагнитных волн с ограниченной плазмой, когда параметрические эффекты связаны с возбуждением поверхностных волн. Исследования по этой проблеме [2-4] позволили обнаружить, в частности, новые широкие области частот поля накачки, в которых возможно проявление аномальных эффектов, а также вскрыли множество характерных особенностей параметрического резонанса на поверхностных волнах, обусловленных их локализацией и специфическим затуханием. Существенно, однако, что изученные параметрические эффекты на поверхностных колебаниях связаны с движением ионов, т. е. характерные величины рассмотренных процессов (инкремент, пороговая напряженность поля) определяются ионными параметрами\*.

В настоящем сообщении обращается внимание на возможность раскачки электронных поверхностных мод в ограниченной неоднородной плазме под воздействием нормально падающей сильной электромагнитной волны. Найдены максимальные инкременты и пороги неустойчивости, имеющей место в широком диапазоне частот в непрозрачной плазме. Пороговые значения напряженности падающей волны целиком определяются специфическим затуханием поверхностных колебаний, которое возникает вследствие неоднородности плазмы вблизи границы.

\* Следует отметить, что рассмотренный в [5] для случая электронной плазмы процесс перекачки энергии электромагнитной волны в поверхностную существует только при косом падении волн. В случае нормально падающей волны накачки коэффициент, характеризующий эффективность этого процесса, тождественно равен нулю.

Исследовано комбинационное рассеяние сильной электромагнитной волны в непрозрачной плазме на поверхностных колебаниях. Показано, что рассеяние излучение существует в широком диапазоне частот и углов рассеяния, причем под разными углами распространяются волны с разными частотами при фиксированных параметрах накачки. Найдены пороговые значения амплитуды падающей волны, начиная с которых происходит экспоненциально быстрое нарастание интенсивности рассеянного сигнала.

Рассмотрим квазинейтральную плазму, неоднородную только вдоль одного направления, которое примем за ось  $Oz$ . Профиль плотности будем считать плавно нарастающим от нуля при  $z = 0$  до значения  $n_0$  при  $z = a$ , которое остается постоянным при  $z > a$ . Электрическое поле нормально падающей на плазму волны представим в виде

$$E_0(t, \mathbf{r}) = E_{00} \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}). \quad (1)$$

Поскольку ионы не принимают участия в рассматриваемом процессе, в качестве исходной системы уравнений, описывающей взаимодействие поверхностных колебаний с полем прошедшей в плазму волны, можно использовать уравнения Максвелла и уравнения одножидкостной гидродинамики. Электрическое поле возбуждаемых волн запишем в виде разложения в ряд по гармоникам частоты  $\omega_0$ :

$$E(t, \mathbf{r}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} E^{(s)}(\omega, \mathbf{k}_{\parallel}) \exp(-i\omega_s t + i\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}), \quad (2)$$

$$\omega_s = \omega + i\gamma + s\omega_0.$$

Здесь  $\mathbf{k}_{\parallel}$  — волновой вектор, а  $\omega$  и  $\gamma$  — соответственно мнимая и действительная части частоты полей возмущения. С точностью до членов, линейных по амплитуде  $E_{00}$ , эта система сводится к следующим уравнениям для компонент электрического поля поверхностных волн, параллельных границе плазмы  $E_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\partial^2 E_{\parallel}^{(s)}}{\partial z^2} - \mathbf{k}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{x_s^2(z)} \frac{\partial \mathbf{k}_{\parallel} E^{(s)}}{\partial z} \right) + \frac{\omega_s^2}{c^2} \varepsilon^{(s)} E_{\parallel}^{(s)} = F^{(s)}. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon^{(s)} \equiv \varepsilon(\omega_s, z) = 1 + \delta\varepsilon_e^{(s)}(z) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(z)}{\omega_s^2}$  — продольная диэлектрическая проницаемость холодной плазмы,  $x_s^2(z) = k_{\parallel}^2 - \frac{\omega_s^2}{c^2} \varepsilon^{(s)}$ ,

$$F^{(s)} = -\frac{4\pi e}{c^2} \mathbf{k}_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{n_0(z)}{x_s^2(z)} P_s^l \right] - \frac{4\pi e}{c^2} \omega_s \left[ \frac{n_0(z)}{\omega_s} P_s - \frac{V_E}{\omega_{s+1}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{en_0(z)}{m x_{s+1}^2(z)} \frac{\partial \mathbf{k}_{\parallel} E^{(s+1)}}{\partial z} \right) \exp(-k_{0z} z) - \frac{V_E}{\omega_{s-1}^2} \frac{\partial}{\partial z} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{en_0(z)}{m x_{s-1}^2(z)} \frac{\partial \mathbf{k}_{\parallel} E^{(s-1)}}{\partial z} \right) \exp(-k_{0z} z) \right],$$

$$V_E = \frac{eE_{00} k_0}{m \omega_0 \sqrt{k_0^2 + k_{0z}^2}}, \quad k_{0z}^2 = -\frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon(\omega_0, z),$$

$$P_s^l = \left[ \frac{eV_E k_{0z}}{m} \left( \frac{E^{(s+1)}}{\omega_{s+1}} + \frac{E^{(s-1)}}{\omega_{s-1}} \right) + \frac{ek_{\parallel}}{m} V_E \hbar \left( \frac{1}{\omega_{s+1} x_{s+1}^2(z)} \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z} E^{(s+1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\omega_{s-1} x_{s-1}^2(z)} \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z} E^{(s-1)} \right) + \frac{e}{m} V_E \hbar \left( \frac{\partial E^{(s+1)}}{\partial z} \frac{\hbar}{\omega_{s+1}} - i \frac{k_{\parallel} \hbar}{\omega_{s+1}} E_z^{(s+1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial E^{(s-1)}}{\partial z} \frac{\hbar}{\omega_{s-1}} - i \frac{k_{\parallel} \hbar}{\omega_{s-1}} E_z^{(s-1)} \right) \right] \exp(-k_{0z} z),$$

$$P_s = \frac{2e k_{0z}}{m} V_E \hbar \exp(-k_{0z} z) \left[ \frac{\hbar}{\omega_{s+1} x_{s+1}^2(z)} \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z} E^{(s+1)} + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{\omega_{s-1} x_{s-1}^2(z)} \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z} E^{(s-1)} + \frac{k_{\parallel}}{k_{0z}} \left( \frac{1}{2\omega_{s+1}} E_{\parallel}^{(s+1)} + \frac{1}{2\omega_{s-1}} E_{\parallel}^{(s-1)} \right) \right],$$

$$E_z^{(s)} = - \frac{i}{x_s^2(z)} \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z} E^{(s)}, \quad \hbar = \frac{E_0}{E_0}.$$

Рассмотрим случай, когда возбуждаются поверхностные колебания, бегущие вдоль направления напряженности электрического поля волны накачки, и будем считать выполненным условие  $\omega_0 a \ll c$ . Решения уравнения (3) в разных областях пространства имеют вид

$$E^{(s)}(z) = E^{(s)}(0) \exp(k_{s,i} z) \quad (z < 0); \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_{\parallel}^{(s)}}{\partial z} = \frac{E_{\parallel}^{(s)}(0)}{k_{s,i}} \frac{x_s^2(z)}{\varepsilon^{(s)}} + E_{\parallel}^{(s)}(0) \frac{x_s^2(z)}{\varepsilon^{(s)}} \int_0^z \varepsilon^{(s)}(\omega, z') dz', \quad (5)$$

$$E_{\parallel}^{(s)}(z) = E_{\parallel}^{(s)}(0) + E_{\parallel}^{(s)}(0) \int_0^z \frac{x_s^2(z') dz'}{k_{s,i} \varepsilon^{(s)}(z')}, \quad k_{s,i} = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \frac{\omega_s^2}{c^2}} \\ (0 \leq z \leq a);$$

$$E_{\parallel}^{(s)}(z) = \left\{ \int_z^{\infty} F^{(s)}(z') \exp[x_s(z-z')] dz' + \int_a^z \exp[-x_s(z-z')] F^{(s)}(z') dz' \right\} \times \\ (6)$$

$$\times \frac{c^2 x_s}{2\omega_s^2 \varepsilon^{(s)}} + C^{(s)} \exp[-x_s(z-a)], \quad |C^{(s)}| = \text{const} \quad (z > a).$$

Выражения для компонент флуктуационного поля выписаны для случая, когда  $\hbar k_{\parallel} = k_{\parallel}$ . Подчиняя их граничным условиям, вытекающим из требования непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля поверхностных волн, получим следующее дисперсионное уравнение, описывающее параметрическое взаимодействие интенсивного поля накачки с ограниченной электронной плазмой:

$$1 = \frac{\delta \varepsilon_e^{(0)} k_{0,i}}{\omega D^{(0)}} \left[ \frac{k_{1,i} \delta \varepsilon_e^{(1)}}{\omega_1 D^{(1)}} \theta_1^{(1)} \theta_2^{(1)} + \frac{\delta \varepsilon_e^{(-1)} k_{-1,i}}{\omega_{-1} D^{(-1)}} \theta_1^{(-1)} \theta_2^{(-1)} \right]. \quad (7)$$

Здесь

$$D^{(s)} \equiv D(\omega_s, k_{\parallel}) = 1 + \frac{k_{s,i} \varepsilon^{(s)}}{x_s} + \frac{\omega_s}{c} \left[ \int_0^a \varepsilon^{(s)}(z) dz - \frac{1}{k_{s,i}^2} \int_0^a \frac{x_s^2(z) dz}{\varepsilon^{(s)}(z)} \right],$$

$$\delta \varepsilon_e^{(s)} \equiv \delta \varepsilon_e^{(s)} \quad (z > a), \quad \kappa_s^2 \equiv \kappa_s^2 \quad (z > a),$$

$$\theta_{1,2}^{(s)} = \frac{V_E k_{0z}}{\kappa_0 + \kappa_s + k_{0z}} \left[ \left( 1 - \frac{\kappa_{s,0}}{k_{0z}} \right) \frac{k_{\parallel}}{\kappa_{0,s}} - \frac{2k_{\parallel}}{\kappa_{s,0}} + \frac{k_{\parallel}}{k_{0z}} + \frac{\kappa_{0,s} k_{\parallel} \omega_{s=0,s}}{\kappa_{s,0} k_{0z} \omega_{s,s=0}} \right].$$

Равенство нулю входящей в (7) дисперсионной функции  $D(\omega, k_{\parallel})$  определяет частоту  $\omega_t$ ,

$$\omega_t^2 = \frac{\omega_{Le}^2}{2} + k_{\parallel}^2 c^2 - \sqrt{\frac{\omega_{Le}^4}{4} + k_{\parallel}^4 c^4}, \quad (8)$$

где

$$\omega_{Le} \equiv \omega_{Le} \quad (z > a),$$

и декремент затухания  $\tilde{\gamma}$ ,

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\nu_e}{2} - \omega_t \sqrt{k_{\parallel}^2 c^2 \omega_t^2 - 1} \frac{\varepsilon(\omega_t)}{\varepsilon^3(\omega_t) - 1} \pi \int_0^a \delta[\varepsilon(\omega_t, z)] dz, \quad (9)$$

поверхностных колебаний в холодной ограниченной плазме.

Рассмотрим сначала возможность распадной устойчивости, когда частота внешнего поля близка к удвоенной частоте поверхностных волн ( $\omega_0 \approx 2\omega_t$ ). Считая, что частота  $\omega$  имеет малую и, вообще говоря, комплексную поправку  $\delta\omega$ , связанную с наличием внешнего поля и поглощением ( $\omega = \omega_t + \delta\omega$ ), из (7) получаем

$$\delta\omega = k_{\parallel}^2 c^2 |k_{0,t} \theta_1^{(-1)} \varepsilon(\omega_t) | (4k_{\parallel}^4 c^4 + \omega_{Le}^4)^{-1/2} - i\tilde{\gamma}. \quad (10)$$

Таким образом, для нормально падающей на плазму электромагнитной волны распадная неустойчивость в электронной плазме оказывается невозможной. Этот результат, содержащийся также в работе [6], выявляет существенное отличие характера взаимодействия поверхностных колебаний от поведения объемных мод в поле накачки.

С помощью уравнения (7) можно рассмотреть также случай параметрического резонанса на частоте поверхностной моды ( $\omega_0 \approx \omega_t$ ), когда в качестве низкочастотных возбуждаются колебания с частотой  $\omega \ll \omega_0$ . Максимальные инкременты периодической  $\gamma_m^{(p)}$  —

$$\gamma_m^{(p)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{k_{\parallel}^2 r_E^2}{2} \eta \right)^{1/3} \omega_t - \quad (11)$$

и аperiodической  $\gamma_m^{(a)}$  —

$$\gamma_m^{(a)} = (k_{\parallel}^2 r_E^2 \eta)^{1/3} \omega_t - \quad (12)$$

неустойчивостей характеризуют нарастание колебаний, волновые числа  $k_{\parallel p}$  и  $k_{\parallel a}$  которых определяются соответственно из равенств

$$\Delta_p = \left( \frac{k_{\parallel p}^2 r_E^2 \eta}{2} \right)^{1/3} \omega_t (k_{\parallel p}); \quad (13)$$

$$\Delta_a = - (k_{\parallel a}^2 r_E^2 \eta)^{1/3} \omega_t (k_{\parallel a}). \quad (14)$$

Здесь

$$\Delta_{p,a} = \omega_0 - \omega_t(k_{\parallel p,a}),$$

$$\eta = \frac{k_{1i} k_{0z} (k_{\parallel} + k_{0z})}{(k_{\parallel} + \alpha_1 + k_{0z})^3} | \varepsilon(\omega_t) | \left( 1 + \frac{\omega_{Le}^4}{4 k_{\parallel}^2 c^2} \right)^{-1/2}$$

Частота  $\omega$ , которая наряду с инкрементом характеризует периодическую неустойчивость, для значения волнового числа  $k_{\parallel} = k_{\parallel p}$  имеет следующее значение:

$$\omega = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \omega_t (k_{\parallel p}) \left( \frac{k_{\parallel p}^2 r_E^2 \eta}{2} \right)^{1/3} \quad (15)$$

Следует отметить, что рассмотренные неустойчивости существуют только в неоднородном поле волны накачки, причем область их существования по значениям частоты внешнего поля значительно шире по сравнению со случаем, когда аномальные эффекты связаны с движением ионов, а максимальные инкременты в широком диапазоне параметров задачи превосходят соответствующие значения, полученные при изучении неустойчивостей в двухкомпонентной ограниченной плазме [2-4] для соответствующих величин частоты и напряженности внешнего поля.

Во всех изученных выше процессах нелинейного взаимодействия электромагнитных волн принимали участие колебания, которые, за исключением волны накачки, локализованы вблизи границы плазмы. При этом отраженная от плазмы волна имеет ту же частоту, что и падающая. Вместе с этим в электронной плазме могут протекать также процессы комбинационного рассеяния, когда частота отраженного от плазмы сигнала отличается от соответствующего значения для падающего излучения на величину частоты поверхностных колебаний. Амплитуда бегущей от плазмы волны на комбинационной частоте нарастает во времени вместе с амплитудой поверхностной волны по экспоненциальному закону с инкрементом  $\gamma_k$ , имеющим следующий вид:

$$\gamma_k = -\tilde{\gamma} + \operatorname{Re} \frac{|\delta \varepsilon_e^{(0)} k_{0,i} | k_{-1,i} \theta_2^{(-1)} \theta_1^{(-1)}}{\omega [1 + i | k_{0,i} | \varepsilon^{(0)}/\alpha_0] \sqrt{1 + \omega_{Le}^4 / 4 k_{\parallel}^2 c^2}} \quad (16)$$

При этом формулы, определяющие  $\theta_1^{(-1)}$  и  $\theta_2^{(-1)}$ , пригодны только в случае непрозрачной плазмы, когда  $\varepsilon(\omega_0) < 0$ . Рассеянное излучение на частоте  $\omega$  распространяется от плазмы под углом  $\vartheta$  к оси  $Oz$ , определяемым из условия  $\sin^2 \vartheta = k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2$ , в котором волновое число  $k_{\parallel}$  фиксировано для заданной частоты  $\omega$  равенством  $\omega = \omega_0 - \omega_t(k_{\parallel})$ . Пороговое значение напряженности поля накачки, начиная с которого происходит нарастание бегущей от плазмы волны с комбинационной частотой  $\omega = \omega_0 - \omega_t$ , определяется из условия  $\gamma_k = 0$ . Для прозрачной плазмы существенным становится рассеяние падающего поля на объемных колебаниях [1], для которого пороговое значение напряженности поля накачки ниже, чем при рассеянии на поверхностных волнах, вследствие больших декрементов затухания последних.

Таким образом, при воздействии интенсивного излучения на электронную ограниченную плазму последняя становится неустойчивой по отношению к раскачке поверхностных колебаний в широком диапазоне частот внешнего поля. Максимальные инкременты при этом оказываются выше соответствующих значений, полученных при условии, когда определяющим фактором является движение ионов. Кроме того, при нормальном падении сильной электромагнитной волны на непрозрачную плазму идет процесс комбинационного рассеяния, в результате которого от плазмы под некоторым углом к нормали распространяется излучение с частотой, смещенной по отношению к соответствующему значению

падающей волны на частоту поверхностных колебаний. При этом для значений амплитуд падающей волны, превосходящих пороговую величину, имеет место экспоненциально быстрое нарастание интенсивности сигнала на комбинационной частоте. Относительно большая величина смещения частоты рассеянного излучения и одновременно широкий диапазон частот и углов, в котором он существует, являются отличительными чертами комбинационного рассеяния в непрозрачной плазме.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. М. Алиеву за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
2. Ю. М. Алиев, Э. Ферленги, ЖЭТФ, 57, 1623 (1969).
3. Ю. М. Алиев, О. М. Градов, А. Ю. Кирий, ЖЭТФ, 63, 1254 (1972).
4. А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1281 (1974).
5. Ю. Р. Аланакян, ЖТФ, 36, 258 (1966).
6. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, В. В. Петров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 10, 1475 (1976).

Поступила в редакцию  
13 мая 1976 г.

#### PARAMETRIC RESONANCE IN ELECTRON CONFINED PLASMA

*O. M. Gradov, G. N. Izmaylov*

The parametric interaction between a normally incident strong electromagnetic wave on plasma and electron surface models is investigated. The maximum increments and threshold values of the pump field intensity are found for the instability taking place within a wide frequency range of the pump field. The combination scattering of a strong electromagnetic wave in opaque plasma on surface oscillations is studied.

The radiation scattering is shown to exist within a wide frequency range and scattering angles. The threshold values of the incident wave amplitude beginning from which the scattered signal intensity increases are found.

---



УДК 621.396.67

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ НАГРЕВА ЭЛЕКТРОНОВ

А. Г. Боев, А. В. Прокопов

Рассматривается задача о распространении в плазме поверхностной электромагнитной волны с амплитудой, достаточной для разогрева электронов. В условиях аномального скин-эффекта найдены распределение электронной температуры, затухание волны и зависимости их от амплитуды волны.

Одним из характерных свойств плазмы является появление нелинейных эффектов в сравнительно небольших полях. Для слабоионизованной плазмы, в которой наиболее существенны столкновения электронов с нейтралами, нелинейные эффекты связаны в первую очередь с ее разогревом [1].

Ниже рассмотрена задача о распространении высокочастотной поверхностной волны в полуограниченной плазме, электронная компонента которой нагревается в поле волны. Диссипативные эффекты будем считать малыми, что возможно, если частота волны  $\omega$  много больше частоты столкновений  $\nu$ , а фазовая скорость волны заметно превышает тепловую скорость электронов  $v_T$ .

1. Рассмотрим полупространство  $z \geq 0$ , заполненное слабоионизованной плазмой с концентрацией электронов  $n$  и граничащее с диэлектриком. Температура электронов  $T$  в отсутствие поля совпадает с температурой нейтралов  $T_0$ . Вдоль границы плазмы в направлении оси  $y$  распространяется поверхностная электромагнитная волна с компонентами электрического и магнитного полей  $E \{0, E_y, E_z\}$ ,  $H \{H, 0, 0\}$ .

Амплитуда электрического поля волны удовлетворяет неравенству

$$E_p \leq E \ll E_D$$

где  $E_i$  — поле пробоя,  $E_p = [3m \delta_T T_0 \omega^2 / e^2]^{1/2}$  — плазменное поле.

Будем в дальнейшем рассматривать распространение волны с фазовой скоростью  $v_f \gg v_T$ , поле которой проникает в плазму на глубину  $\delta$ , много большей длины свободного пробега электронов  $l = v_T / \nu$ . Диэлектрическая проницаемость плазмы должна при этом удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{c^2}{v_f^2} > |\epsilon| > \epsilon_2 + \left( \epsilon_2 \frac{v_T}{c} \right) \frac{\omega^2}{\nu^2}. \quad (1.1)$$

В этих условиях основным механизмом затухания волны является объемный, связанный со столкновениями электронов с нейтралами; влиянием пространственной дисперсии можно полностью пренебречь.

Таким образом, электромагнитные свойства плазмы будут в дальнейшем описываться комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 - i \frac{\nu}{\omega} \right) \quad \left( \frac{\nu}{\omega} \ll 1 \right), \quad (1.2)$$

которая через частоту столкновений электронов с нейтралами

$$\nu = \nu_0 \theta^{1/2} \quad (\theta = T/T_0) \quad (1.3)$$

связана с температурой электронов, и, следовательно, уравнения Максвелла должны решаться совместно с уравнением баланса энергии электронов.

Для рассматриваемого диапазона частот это уравнение будет стационарным и в условиях слабой диссипации одномерным [2]:

$$\frac{d}{dz} \left[ \kappa(\theta) \frac{d\theta}{dz} \right] - \delta_T \nu(\theta) n(\theta - 1) = -3 \delta_T n \nu(\theta) \left| \frac{E}{E_p} \right|^2, \quad (1.4)$$

где

$$\kappa(\theta) = \kappa_0 \theta^{1/2} \quad (1.5)$$

— коэффициент теплопроводности,  $\delta_T$  — доля энергии, передаваемая электроном нейтралу при упругом столкновении.

Поле бегущей вдоль  $y$  поверхностной волны в плазме ( $\exp i(hy - \omega t)$ ) описывается уравнениями

$$\frac{d^2 b}{d\zeta^2} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\zeta} \frac{db}{d\zeta} = [\eta - \tilde{\varepsilon}(\theta)] b, \quad (1.6)$$

$$E_{\perp} = \frac{\eta^{1/2}}{\tilde{\varepsilon}(\theta)} b, \quad E_{\parallel} = \frac{i}{\tilde{\varepsilon}(\theta)} \frac{db}{d\zeta},$$

$$E_{\perp} = E_z/E_p, \quad E_{\parallel} = E_y/E_p, \quad b = H/E_p, \quad (1.7)$$

$$\zeta = z\omega/c, \quad \eta = \left( \frac{ch}{\omega} \right)^2.$$

Поле поверхностной волны в диэлектрике (диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_2$ ) имеет вид

$$H^{(2)} = B_2 e^{\alpha_2 \zeta}, \quad E_{\parallel}^{(2)} = \frac{i \alpha_2}{\varepsilon_2} H^{(2)}, \quad (1.8)$$

$$E_{\perp}^{(2)} = \frac{\eta^{1/2}}{\varepsilon_2} H^{(2)}; \quad \alpha_2 = (\eta - \varepsilon_2)^{1/2}.$$

Здесь так же, как и в (1.6), поля нормированы на  $E_p$ . В глубине плазмы поле волны должно исчезать:

$$b \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Температура электронов при этом стремится к температуре нейтралов:

$$\theta \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

На границе плазмы температура должна удовлетворять следующему условию:

$$\kappa(\theta) \frac{d\theta}{dz} = q(\theta)(\theta - 1) \quad \text{при} \quad \zeta = 0. \quad (1.11)$$

Величина  $q \geq 0$  характеризует скорость отдачи энергии электронами, находящимися на границе, коэффициент теплопроводности диэлектрика предполагается много больше  $\kappa$ .

2. Картина нагрева плазмы волной сильно зависит от величины соотношения длины  $L = [\kappa_0/n \delta_T \nu_0]^{1/2}$ , определяющей масштаб изменения температуры за счет теплопроводности, к глубине скин-слоя.

Для высокочастотной поверхностной волны, распространяющейся в низкотемпературной плазме, это отношение будет велико:

$$L/\delta = \frac{v_T}{c} \frac{\omega}{\nu} \frac{1}{\delta_T} \sqrt{\frac{|\epsilon|^2}{|\epsilon| - \epsilon_2}} \gg 1. \quad (2.1)$$

Следовательно, поверхностная волна будет распространяться в условиях сильно аномального скин-эффекта.

В этом случае аналогично [2] можно использовать для решения уравнения (1.4) метод последовательных приближений, пренебрегая в нулевом приближении правой частью и учитывая ее затем как возмущение. Справедливость такого метода связана с тем, что в силу сильной аномальности скин-эффекта поле волны спадает значительно быстрее температуры и поэтому нагрев плазмы происходит как бы поверхностным источником тепла.

Это обстоятельство позволяет сильно упростить задачу и решать уравнения Максвелла независимо от уравнения баланса энергии. При этом решение электродинамической задачи дает характеристики волны как функции температуры электронов на границе плазмы  $T_1 (\theta_1 = T_1/T_0)$ , решение уравнения (1.4) — зависимость  $\theta$  от амплитуды волны и координаты  $z$ . Поскольку температура электронов по глубине скин-слоя практически не меняется, то при решении электродинамической задачи в первом приближении ее можно считать постоянной. Уравнения (1.6) становятся линейными и легко решаются:

$$\begin{aligned} b &= B_1 e^{-\alpha_1 z}, & \alpha_1 &= [\eta(\theta_1) - \tilde{\epsilon}(\theta_1)]^{1/2}, \\ E_{\perp} &= \frac{\eta^{1/2}}{\tilde{\epsilon}_1} B_1 e^{-\alpha_1 z}, & E_{\parallel} &= -\frac{i\alpha_1}{\tilde{\epsilon}_1} B_1 e^{-\alpha_1 z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $B_1$  — амплитуда магнитного поля в плазме на границе  $B_1 = b(+0)$ ,  $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}(+0)$ .

Коэффициент затухания волны  $\gamma$  вычисляется из дисперсионного уравнения аналогично [3] и зависит от температуры электронов на границе:

$$\frac{\gamma}{k} = \theta_1^{1/2} \frac{\nu_0}{2\omega} \sqrt{\frac{|\epsilon| - \epsilon_2}{\epsilon_2 |\epsilon|}} \frac{\epsilon_2^2 (1 + |\epsilon|)}{(|\epsilon| - \epsilon_2)^2}. \quad (2.3)$$

Фазовая скорость в первом приближении по  $\nu/\omega$  совпадает с фазовой скоростью волны в бесстолкновительной плазме.

3. При решении уравнения баланса энергии электронов (1.4) удобно перейти к новой функции

$$\omega = \int_0^{\theta} \alpha(\theta) d\theta / \int_0^1 \alpha(\theta) d\theta. \quad (3.1)$$

Уравнение (1.4) переходит при этом в следующее:

$$\frac{d^2 \omega}{d\alpha^2} - s^2 P(\omega) = -s^2 Q(\omega) |E|^2, \quad (3.2)$$

где

$$P(\omega) = [Q(\omega) - 1] \frac{\nu(\theta)}{\nu_0}, \quad Q(\omega) = \frac{\sigma(\omega) E_p^2}{n T_0 \nu_0 \delta_T}.$$

Величина

$$s^{-1} = \left[ n \nu_0 \delta_T / \int_0^1 \kappa(\theta) d\theta \right]^{-1/2}$$

имеет размерность длины и по порядку величины совпадает с «энергетической» длиной пробега электрона  $s^{-1} \sim l/\delta_T^2$ .

Функция  $\omega$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dz} &= \tilde{q}(\omega) [\theta - 1] & \text{при } z = 0, \\ \omega &\rightarrow 1 & \text{при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\tilde{q}(\omega) = q(\omega) / \int_0^1 \kappa(\theta) d\theta.$$

В предположении сильной аномальности скин-эффекта решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$\omega = u + v \quad (|u| \gg |v|),$$

где  $u$  — решение уравнения (3.2) без правой части:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} sz &= \int_{u_1}^u du \left[ \int_1^u dt P(t) \right]^{-1/2}, \\ u_1 &= u(z=0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для функции  $v$  с точностью до малых порядка  $s\delta$  получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -s^2 Q(u_1) |E|^2. \quad (3.5)$$

Решение его имеет вид

$$v = -\frac{s^2 Q(u_1) |E_1|^2}{4 k^2 \kappa_1^2} e^{-2k\kappa_1 z}, \quad (3.6)$$

где  $|E_1|$  — напряженность электрического поля на границе плазмы. Учитывая (1.3), (1.5) и замечая, что  $\omega = \theta^{3/2}$ , получим из (3.3) следующее уравнение для определения температуры электронов на границе:

$$\frac{3}{2} \frac{s^2 |E_1|^2 \theta_1^{1/2} (|\varepsilon| - \varepsilon_2)^{1/2}}{k |\varepsilon|^2} = \frac{2s}{\sqrt{5}} [\theta_1^{5/2} - 1]^{1/2} + \tilde{q}(\theta_1) [\theta_1 - 1]. \quad (3.7)$$

Пусть теперь мощность поверхностной релаксации энергии мала  $\tilde{q}(\theta_1) \ll s$  и, следовательно, поверхностные электроны отдают свою энергию в основном нейтралам плазмы. Уравнение (3.7) переходит при этом в следующее:

$$\theta_1^{-1/2} (\theta_1^{5/2} - 1)^{1/2} = \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2, \quad E_0 = E_p \sqrt{\frac{4}{\sqrt{5}} \frac{k |\varepsilon|^2}{s (|\varepsilon| - \varepsilon_2)^{1/2}}}, \quad (3.8)$$

Величина  $E_0$ , имеющая смысл некоторого эффективного электрического поля, играет роль, аналогичную плазменному полю  $E_p$  при локальном нагреве, и отличается от него большим множителем порядка  $(l_{эфф}/\delta)^{1/2}$ , характеризующего отношение объемов, в которых энергия выделяется и поглощается.

Отсюда следует, что относительно слабое электрическое поле, удовлетворяющее неравенству  $E_p < E < E_0$  и приводящее в случае нормального скин-эффекта к сильному нагреву поверхностных электронов, в случае аномального скин-эффекта будет приводить лишь к небольшим изменениям их энергии.

Решение уравнения (3.8) выглядит при этом следующим образом:

$$\theta_1 = 1 + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}} \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2}.$$

В сильном же поле

$$\theta_1 \approx \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^{8/3} \quad (3.9)$$

— зависимость температуры от поля более сильная, чем в случае нормального скин-эффекта. Этот результат есть следствие нелинейности задачи, объяснение его будет дано несколько ниже.

Зависимость электронной температуры на границе плазмы от электрического поля, изменяющегося в диапазоне  $0 \leq E_1/E_0 \leq 5$ , представлена на рис. 1 (кривая 2). Там же (кривая 1) приведена зависимость поглощаемой плазмой мощности волны в единице объема скин-слоя  $W/W_0$ .

При сильном нагреве ( $\theta_1 \gg 1$ )

$$W \approx W_0 \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^{10/3}, \quad W_0 = e^2 n \nu_0 E_0^2. \quad (3.10)$$

На этой характеристике волны сильно сказывается нелинейность. В рассматриваемом диапазоне изменения напряженности электрического поля неравенства

$$\nu(\theta) \ll \omega, \quad E \ll E_1$$

будут заведомо выполнены для волны с частотой  $\omega \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , распространяющейся в атомном газе при давлении  $p \sim 10^{-1} \div 1 \text{ тор}$  и температуре нейтралов  $T_0 \sim 10^3 \text{ К}$ .

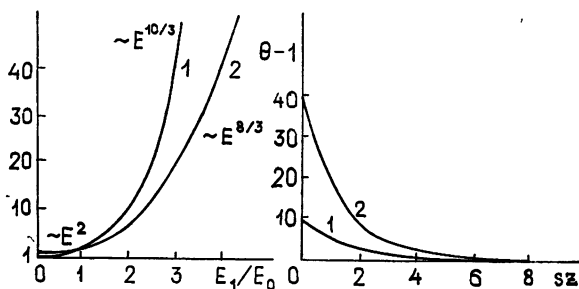


Рис. 1.

Рис. 2.

Распределение температуры электронов в объеме плазмы при известной температуре на границе определяется по формуле (3.4). Для

рассматриваемого типа столкновений интеграл в правой части (3.4) берется в элементарных функциях и получается следующее уравнение для определения  $\theta$  как функции  $z$ :

$$-sz = 3 \ln \frac{\sqrt{1+2\theta} + \sqrt{2\theta}}{\sqrt{1+2\theta_1} + \sqrt{2\theta_1}} + \frac{3}{8} \ln \frac{[(\sqrt{1+2\theta}-1-\sqrt{3\theta})^2-\theta][(\sqrt{1+2\theta_1}-1+\sqrt{3\theta_1})^2-\theta_1]}{[(\sqrt{1+2\theta}-1+\sqrt{3\theta})^2-\theta][(\sqrt{1+2\theta_1}-1-\sqrt{3\theta_1})^2-\theta_1]}. \quad (3.11)$$

Решение его для различных значений  $\theta_1$  представлено на рис. 2. Кривая 1 соответствует значению относительной напряженности электрического поля волны  $E_1/E_0 = 2, 3$  ( $\theta_1 = 10$ ), кривая 2 — значению  $E_1/E_0 = 4$  ( $\theta_1 = 40$ ).

Анализ выражения (3.11) и кривых на рис. 2 показывает, что более высокая температура электронов на границе приводит к более сильному спаду ее в глубь плазмы; вдали от границы температура спадает экспоненциально.

Глубина прогретого слоя плазмы  $\delta_0$  увеличивается с ростом амплитуды волны; при  $\theta_1 \gg 1$

$$\delta_0 \approx \frac{3}{2} s^{-1} \ln 8 \theta_1 \approx \frac{3}{2} \frac{l}{\sqrt{\delta_T}} \ln \left( \frac{E_1}{E_0} \right)^{8/3} \sim \ln \frac{E_1}{E_0}. \quad (3.12)$$

Так как эта зависимость более медленная, чем (3.10), то глубина прогретого слоя увеличивается медленнее, чем растет мощность, поглощаемая плазмой в объеме скин-слоя. Это и приводит к более сильной, по сравнению с нагревом в нормальных условиях, зависимости (3.9) температуры от амплитуды волны.

Для типичного значения  $\delta_T \sim 10^{-4}$  в условиях сильного нагрева ( $1 < E_1/E_0 \leq 5$  в нашем случае) глубина прогретого слоя плазмы составляет

$$\delta_0 \approx (6 \div 8) \frac{l}{\sqrt{\delta_T}},$$

что в сотни раз превышает глубину свободного пробега электрона и в десятки раз — глубину проникновения поля  $\delta$ .

Коэффициент затухания волны зависит от амплитуды ее через электронную температуру на границе.

В случае сильного нагрева ( $\theta_1 \gg 1$ )

$$\frac{\gamma}{k} = \frac{\nu_0}{2\omega} \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^{4/3} \frac{(1 + |\epsilon|)}{|\epsilon|^{1/2}} \left( \frac{\epsilon_2}{|\epsilon| - \epsilon_2} \right)^{3/2}.$$

Используя (3.8) и учитывая, что частота столкновений электронов с нейтралами прямо пропорциональна давлению газа  $p$ , нетрудно получить явное выражение  $\gamma/k$  через частоту волны  $\omega$ , давление  $p$ , концентрацию электронов  $n$ . При достаточно больших значениях  $|\epsilon|$  эта зависимость имеет вид

$$\gamma/k \approx \left( \frac{p}{\omega} \right)^{5/3} E_1^{4/3} n^{-2/3}.$$

Видно, что коэффициент затухания поверхностной волны в условиях аномального скин-эффекта характеризуется более сильной, чем в нормальных условиях, зависимостью не только от амплитуды волны, но и от давления газа и частоты волны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, М., 1967.
2. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, УФН, 103, 3 (1971).
3. А. Н. Кондратенко, Плазменные волноводы, Атомиздат, М., 1976.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
9 сентября 1975 г.,  
после переработки  
11 апреля 1977 г.

PROPAGATION OF A SURFACE ELECTROMAGNETIC WAVE IN PLASMA  
WITH ALLOWANCE FOR ELECTRON HEATING

*A. G. Boev, A. V. Prokopov*

The problem of propagation in plasma of a surface electromagnetic wave with the amplitude sufficient for electron heating is considered. Under the conditions of abnormal skin-effect the electron temperature distribution, wave attenuation and their dependence versus the wave amplitude are found.

---

538.56 : 519.25

## О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ ВКР, СВЯЗАННЫХ С НАГРЕВОМ СРЕДЫ ОПТИЧЕСКИМИ ФОНОНАМИ

А. А. Бетин, Г. А. Пасманик

Обращается внимание на нелинейные процессы, связанные с нестационарным нагревом среды из-за перехода в тепло энергии возбужденных при ВКР молекул. Показано, что изменение температуры в области интенсивной перекачки энергии возбуждающего излучения в стоксову компоненту приводит, с одной стороны, к фазовым искажениям во взаимодействующих пучках накачки и стока, а с другой — к подавлению ВКР из-за температурного ухода частоты оптических фононов от резонанса. Находятся критические плотности энергии в стоксовой волне, при превышении которых возможны тот или иной из указанных выше эффектов. Оценивается длительность рассеянного импульса в условиях подавления ВКР при квазистатическом и сильно нестационарном нагреве среды.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с исследованием вопросов возбуждения с помощью внешней накачки интенсивных собственных колебаний или волн в различных средах, сильно затухающих в обычных условиях, возрастающее внимание уделяется изучению особенностей процессов, связанных с нелинейным преобразованием этих колебаний. Это относится, например, к эффектам нелинейного преобразования ленгмюровских колебаний в высокотемпературной плазме, возбуждаемых мощным электромагнитным излучением [1-3], удвоению или утроению высокочастотных звуковых волн, генерируемых в результате вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна [4], и т. д.

В настоящей работе обсуждаются особенности еще одного эффекта подобного типа, а именно, нелинейного процесса, связанного с преобразованием колебаний оптических фононов, возбуждаемых при ВКР мощных световых пучков.

Хорошо известно, что при комбинационном рассеянии фотон электромагнитной волны падающего излучения частоты  $\omega_L$  распадается на фотон рассеянной (стоксовой) волны частоты  $\omega_s$  и оптический фонон частоты  $\Omega$ , так что выполняется закон сохранения энергии  $\hbar\omega_L = \hbar\omega_s + \hbar\Omega$  ( $\hbar$  — постоянная Планка). Отсюда, в частности, следует, что в фононную волну\* будет преобразовываться доля энергии накачки, в  $\Omega/\omega_s$  раз отличная от доли, приходящейся на рассеянную волну. Однако, если стоксовый фотон, распространяющийся со скоростью света, достаточно быстро покидает область рассеяния, то оптический фонон, скорость которого практически равна нулю (речь идет о колебаниях неполяритонного характера), остается в среде. Вследствие этого происходит накопление оптических фононов до стационарного уровня, при

\* Далее мы будем говорить о фононной волне, имея в виду, что этот термин может относиться к почти не распространяющимся фононным колебаниям.



котором потери на релаксацию компенсируют поток фононов, возбуждаемых из-за комбинационного рассеяния. При интенсивном вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР), когда почти все кванты накачки отдают свою энергию квантам стоксовой волны и фононам, этот стационарный уровень может быть весьма высоким (при не очень малом отношении  $\Omega/\omega_s$ ), а плотность энергии фононов может значительно превысить плотность энергии в волне накачки. Очевидно в подобных условиях вполне возможны процессы, вызванные нелинейным преобразованием возбужденных фононов.

Один из таких процессов, связанный с нестационарным нагревом области рассеяния вследствие поглощения (продольной релаксации) оптических фононов и перехода их энергии в тепло, рассматривается ниже. Возникающие при этом эффекты могут приводить, с одной стороны, к значительной модуляции показателя преломления среды [5] или даже оптическому пробое из-за относительно большого тепловыделения в сравнительно малом объеме, а с другой, — к подавлению уже развитого ВКР вследствие изменения частоты оптических фононов или их времени релаксации при увеличении температуры.

Ниже проводится исследование обоих указанных эффектов, а именно — определяется изменение температуры в области интенсивной перекачки энергии возбуждающего излучения в стоксову компоненту и оцениваются фазовые искажения во взаимодействующих пучках, а также находятся условия подавления ВКР из-за температурного ухода частоты оптических фононов от резонанса и оценивается длительность рассеянного импульса при квазистатическом и сильно нестационарном нагреве среды.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что на плоский слой комбинационно-активной среды падает коллимированный или сфокусированный пучок монохроматического излучения накачки с интенсивностью  $I_L = \frac{cn}{2\pi} |\mathcal{E}_L|^2$ . Рассмотрим

возбуждение первой стоксовой компоненты в условиях «чистого» эксперимента, считая, что высшие компоненты подавлены из-за влияния геометрических факторов и дисперсии среды, а обратная связь по стоксовой волне отсутствует. Предположим, кроме того, что изменение диэлектрической проницаемости из-за самофокусировки, связанной с керровской или электронной нелинейностью, также несущественно (речь идет о газах или таких средах, как, например, жидкий азот, кальцит, вода, для которых порог ВКР заметно ниже порога самофокусировки). Тогда в квазиоптическом приближении попутное ВКР описывается системой связанных уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_L}{\partial z} + \frac{i}{2k_L} \Delta_{\perp} \mathcal{E}_L + \frac{ik_L \delta \varepsilon}{2\varepsilon} \mathcal{E}_L = ik_L \frac{(\partial \varepsilon / \partial Q)}{2\varepsilon} \mathcal{E}_s Q; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial z} + \frac{i}{2k_s} \Delta_{\perp} \mathcal{E}_s + \frac{ik_s \delta \varepsilon}{2\varepsilon} \mathcal{E}_s = ik_s \frac{(\partial \varepsilon / \partial Q)}{2\varepsilon} \mathcal{E}_L Q^*, \quad (2)$$

где  $\mathcal{E}_L$  и  $\mathcal{E}_s$  — комплексные амплитуды электрических полей возбуждающей и рассеянной волн,  $k_L$  и  $k_s$  — их волновые векторы,  $\delta \varepsilon$  — изменение диэлектрической проницаемости,  $Q$  — амплитуда фононной волны, пропорциональная недиагональному элементу матрицы плотности, описывающей комбинационно-активную среду.

Укороченное уравнение для амплитуды фононной волны можно представить в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + T_2^{-1} Q + i(\Omega - \Omega_0) Q = i \frac{\partial \varepsilon / \partial Q}{8\pi\rho\Omega_0} (1 - 2\Delta) \mathcal{E}_L \mathcal{E}_s^* \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $\Omega_0$  — невозмущенное значение собственной частоты оптических фононов,  $T_2$  — время поперечной релаксации,  $\Delta$  — относительное число возбужденных в процессе ВКР молекул. Уравнение для  $\Delta$  записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + T_1^{-1} \Delta = i \frac{\partial \varepsilon / \partial Q}{8\pi N \hbar} Q^* \mathcal{E}_L \mathcal{E}_s^* + \text{к. с.}, \quad (4)$$

где  $T_1$  — время продольной релаксации,  $N$  — полное число молекул.

Тепло  $\dot{u} = \frac{N \Delta \hbar \Omega_0}{T_1}$ , выделяемое в единице объема в единицу времени в среде с запрещенным радиационно-комбинационным переходом (например, для полносимметричных колебаний), приводит к изменению энтропии в единице объема среды (теплопроводностью пренебрегается)

$$\delta S = \int_0^t \frac{\dot{U}}{T_0} dt = \int_0^t dt \frac{N \Delta \hbar \Omega_0}{T_0 T_1} \quad (5)$$

( $T_0$  — температура среды). Для описания обсуждаемых во Введении тепловых эффектов учтем также, что частота оптических фононов зависит от температуры [6]; причем для малых возмущений  $\delta \Omega = \Omega - \Omega_0 = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) \delta T$ . Эффекты, связанные с температурной зависимостью времен поперечной и продольной релаксации, рассматривать сейчас не будем, предполагая просто, что температурные изменения этих параметров не превышают самих невозмущенных значений.

Упростим исходные уравнения, воспользовавшись тем обстоятельством, что практически даже для очень интенсивных полей число возбужденных при ВКР молекул мало по сравнению с их общим числом, т. е.  $\Delta \ll 1$ . Тогда легко показать, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + T_1^{-1} \right) N \Delta = \frac{\text{div } \mathcal{S}}{\hbar \omega_s} \quad (6)$$

( $\mathcal{S}$  — вектор Пойнтинга стоксовой волны), т. е. изменение числа возбужденных молекул определяется разностью между числом «рожденных» стоксовых квантов и числом девозбуждений в единицу времени. При длительности импульса  $t_L$ , превышающей время  $T_1$ ,

$$N \Delta = \frac{T_1}{\hbar \omega_s} \text{div } \mathcal{S}, \quad \dot{U} = \frac{\Omega_0}{\omega_s} \text{div } \mathcal{S} \quad (7)$$

### 3. ТЕПЛОЕ САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВКР

Рассмотрим вначале эффекты, приводящие к модуляции диэлектрической проницаемости из-за нагрева среды, предполагая при этом, что максимальное изменение температуры недостаточно для заметного (в пределах ширины линии стоксова излучения) смещения частоты опти-

ческих фононов. Прежде всего оценим изменение температуры. Для импульсов длительностью  $t_L > T_1$  находим

$$\delta T = \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right) \delta S = \frac{\Omega_0}{\rho C \omega_s} \int_0^t \operatorname{div} S dt. \quad (8)$$

Удельная теплоемкость  $C$  берется при постоянном объеме или давлении в зависимости от того, меньше или больше длительность импульса  $t_L$  времени пробега звука  $t_{зв}$  через характерный масштаб области изменения температуры  $V$ . Для нахождения  $\operatorname{div} S$ , вообще говоря, необходимо решить самосогласованную задачу, описывающую ВКР с учетом модуляции показателя преломления  $\delta n = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right) \delta T$  (производная  $\frac{\partial n}{\partial T}$  берется

при постоянном объеме или давлении в зависимости от упомянутого выше соотношения  $t_L$  и  $t_{зв}$ ). Для оценки эффекта ограничимся, однако, так называемым приближением тонкой линзы, предполагая, что нелинейное изменение фаз волн, связанное с вариацией  $\delta n$ , достаточно мало и на небольших трассах не оказывает существенного влияния на амплитуды световых пучков. В этом случае для определения  $\operatorname{div} S$  достаточно исследовать решение задачи о ВКР невозмущенных пучков накачки и

стоксовой компоненты. В плосковолновом приближении  $\operatorname{div} S = \frac{\partial I_s}{\partial z}$

( $I_s = \frac{cn}{2\pi} |g_s|^2$  — интенсивность стоксовой волны), а распределения  $I_s(z)$

и  $\frac{\partial I_s}{\partial z}$  для стационарного ВКР задаются выражениями [7]\*

$$I_s(z) = \frac{I_s(0) I_L(0)}{I_s(0) + I_L(0) \exp(-g_s I_L(0) z)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial I_s}{\partial z} = \frac{g_s I_s(0) I_L^2(0) \exp(-g_s I_L(0) z)}{I_s(0) + I_L(0) \exp(-g_s I_L(0) z)},$$

где  $g_s = \frac{k_s (\partial \varepsilon / \partial Q)^2 T_2}{8\pi \rho \Omega_0}$ . Формула (9) относится к случаю, когда вход-

ное значение  $I_s(0) \ll I_L(0)$ . Максимальное значение  $\frac{\partial I_s}{\partial z}$  достигается

при  $z = \frac{1}{g_s I_L(0)} \ln \frac{I_L(0)}{I_s(0)}$  и равно  $\left( \frac{\partial I_s}{\partial z} \right)_m = \frac{g_s I_L^2(0)}{4}$ , соответствующее изменение температуры

$$\delta T_m = \frac{\Omega_0 g_s I_L^2(0) t}{4\rho C \omega_s}. \quad (10)$$

\* Распределения  $I_s$  и  $\frac{\partial I_s}{\partial z}$ , рассчитанные с учетом дифракционных эффектов [8], в области наиболее интенсивной перекачки энергии в стоксову компоненту незначительно отличаются от (9) и поэтому уточнение плосковолнового приближения здесь не принципиально. По той же причине не принципиален учет шумового характера затравочных источников.

В обычных условиях порог стационарного рассеяния находится из соотношения

$$g_s I_{\Pi}^{\text{CT}} L = M_{\Pi} \approx \ln \frac{I_{\Pi}^{\text{CT}}}{I_s(0)},$$

где  $L$  — длина среды,  $M_{\Pi}$  — пороговое значение полного инкремента, определяемого из условия достижения мощностью рассеянного излучения величины, сравнимой с мощностью накачки. Если ВКР начинается со спонтанных шумов, то  $M_{\Pi} \approx 25$ . Выражая  $\delta T_m$  через параметр  $\alpha = \frac{I_L(0)}{I_{\Pi}^{\text{CT}}}$ , характеризующий превышение над порогом, получим

$$\delta T_m = \frac{\Omega_0 M_{\Pi}^2 \alpha^2 t}{4\rho C \omega_s g_s L^2}. \quad (10')$$

Если взять типичные значения параметров для ВКР света в жидкостях ( $\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$ ,  $C = 4 \text{ Дж/г-град}$ ,  $\omega_s = 4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $g_s = 10^{-3} \text{ см/МВт}$ ,  $\Omega_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ), то  $\delta T[\text{К}] = \frac{2\alpha^2 t [\text{нс}]}{L^2 [\text{см}]}$ . При  $L = 10 \text{ см}$ ,  $\alpha = 5$ ,  $t = 25 \text{ нс}$ ,  $I_L^{\text{CT}}(0) \approx 2,5 \text{ ГВт/см}^2$  получим  $\delta T \approx 12 \text{ К}$ .

Если нагрев происходит за время, меньшее времени ухода звука из области тепловыделения  $V$  (в обычных условиях — за время, меньшее времени пробега звука поперек пучка накачки), то увеличение температуры приводит к изменению давления на величину

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \delta T = -\rho v_T^2 \sigma \delta T,$$

где  $v_t$  — изотермическая скорость звука,  $\delta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  — коэффициент объемного расширения. Поскольку  $\rho v_T^2$  по порядку величины характеризует внутреннее давление в среде  $p_{\text{вн}}$ , то

$$\delta p/p_{\text{вн}} = -\sigma \delta T,$$

Для указанных параметров значение  $\sigma \delta T$  может приблизиться к единице уже при  $\alpha = 30 \div 40$  (в большинстве жидкостей  $\delta \approx 10^{-3} \text{ 1/К}$ ). В подобных условиях возможен разрыв межмолекулярных связей, т. е. пробой\*.

Аналогичные эффекты, конечно, могут иметь место и в твердых телах. Более того, сам по себе нагрев в твердом теле приводит к полной перестройке кристаллической структуры и плавлению вещества. Экспериментально подобный эффект может наблюдаться как оптический пробой прозрачных диэлектриков.

При длительности импульса, превышающей время пробега звука через минимальный размер объема  $V$ , температурные изменения плотности вещества могут вызвать заметную модуляцию показателя преломления, приводящую в конечном счете к образованию дефокусирующей

\* Если мощность звуковой волны достаточно велика, то возможно образование ударной волны уже на небольших расстояниях от центра тепловыделения, распространяющейся в разные стороны от области максимального давления [2]. Отражение накачки и стоксовой компоненты от фронтов обеих ударных волн может привести к появлению в частотном спектре стоксовых и антистоксовых сателлитов.

щей линзы вблизи области тепловыделения (при  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p < 0$ ). Для оценки критической плотности энергии стоковского излучения, превышение которой приведет к заметному увеличению расходимости обоих взаимодействующих пучков, приравняем дифракционную расходимость  $\theta_{sd} = (k_s r_s)^{-1}$  к нелинейной расходимости  $\theta_n = r_s/F_n$ , связанной с дефокусировкой лучей в наведенной тепловой линзе\*. Фокусное расстояние  $F_n$  в геометрооптическом приближении оценивается по изменению фазы

$$\delta \varphi_s = k_s \int_0^z \delta n dz = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right) \frac{k_s \Omega_0}{2\rho C \omega_s} [\omega_s(r_{\perp}, z, t) - \omega_s(r_{\perp}, 0, t)], \quad (11)$$

где  $\omega_s(r_{\perp}, z, t)$  — плотность энергии в стоковом пучке. Аппроксимируя вблизи оси пучка зависимость  $\omega_s(r_{\perp}, z, t)$  параболой, найдем, что

$$F_n = \frac{r^2 \rho C \omega_s}{2(\partial n / \partial T) \Omega_0 \omega_s(0, z, t)}. \quad (12)$$

Сравнивая  $\theta_{sd}$  и  $\theta_n$ , получаем

$$\omega_{skp} = \frac{\rho C}{4\pi\nu(\partial n / \partial T)n^2}, \quad (13)$$

где  $\nu = \Omega_0/2\pi c$  — частотный сдвиг, измеряемый в  $см^{-1}$ . Так как значение  $\omega_T = \rho CT$  по порядку величины характеризует энергию теплового движения в среде, то  $\omega_{kr} \approx \frac{\omega_T}{4\pi\nu n^2 \left(T \frac{\partial n}{\partial T}\right)_p}$ . Для типичных параметров

жидкостей  $\omega_T = 10^3$  Дж/см<sup>3</sup>,  $\left(T \frac{\partial n}{\partial T}\right)_p \approx 0,1$  и  $\omega_{kr} [\text{Дж/см}^2] \approx \frac{1}{\nu[\text{тыс. см}^{-1}]}$ ,

т. е. составляет величину порядка единицы. При  $\omega_s \gg \omega_{kr}$  величина  $F_n$  к концу импульса может быть существенно меньше длины дифракционного расплывания стоковского пучка  $z_{sd} = k_s r_s^2$  и, тем более, пучка накачки.

Модуляция показателя преломления приводит также к искажению временного спектра пучка. Относительное смещение мгновенной частоты

$$\frac{\delta \omega_{L,s}}{\Omega_0} = \frac{1}{\Omega_0} \frac{\partial \varphi_{L,s}}{\partial t} = \frac{\omega_{L,s}}{\omega_s} \left(T \frac{\partial n}{\partial T}\right)_p \frac{U_s(z, t) - U_s(0, t)}{\omega_T}, \quad (14)$$

где  $U_s = \frac{n}{c} I_s$  — плотность энергии стокового поля в среде. В обычных

условиях  $U_s(0, t) = 0$ ,  $\omega_L \approx \omega_s$ ,  $(T \partial n / \partial T)_p \approx 0,1$  и  $\frac{\delta \omega_{L,s}}{\Omega_0} \approx 0,1 U_s / \omega_T$ .

При сжатии пучка накачки, например, с помощью длиннофокусной линзы и сравнительно большом коэффициенте преобразования  $\eta$  в стоково излучение, отношение  $U_s/\omega_T$  может достигнуть  $\sim 10^{-2} - 10^{-3}$  и даже больших значений, т. е.  $\delta \omega_{L,s} \approx (10^{-3} \div 10^{-4}) \Omega_0$ , что обычно составляет величину  $\sim 0,1 - 1$  см<sup>-1</sup>. Так как в реальных условиях  $U_s$  зависит от времени, то в частотном спектре прошедшего излучения на-

\* Заметим, что на малых временах фокусное расстояние наведенной линзы может оказаться положительным из-за различия поляризуемостей молекул в возбужденном и невозбужденном состояниях (ВКР-самофокусировка [9]).

качки и стоксовой компоненты может наблюдаться заметное уширение (увеличение частоты от начала к середине импульса и последующий спад)\*.

#### 4. ПОДАВЛЕНИЕ ВКР

Перейдем к рассмотрению ВКР в условиях, когда температурное изменение частоты оптических фононов за время импульса превышает невозмущенную ширину линии стоксовой компоненты. Смещение частоты

$$\delta\Omega = \frac{(\partial \Omega / \partial T)}{\rho C} \int_0^t \dot{u} dt. \quad (15)$$

Из (15) видно, что возмущение частоты нарастает со временем, так что расстройка от синхронизма, в принципе, может накопиться достаточно большой (в первую очередь в тех плоскостях, где значение  $\dot{u}$  максимально). Если расстройка превысит невозмущенную ширину линии ВКР, то коэффициент преобразования в стоксово излучение снижается из-за резкого изменения частоты фонной волны вдоль продольной координаты  $z$ . Соответствующее уменьшение  $\dot{u}$ , в свою очередь, ограничивает нарастание  $\delta\Omega$ .

В зависимости от скорости изменения частоты  $\delta\Omega$  удобно различать два предельных случая. Первый — это квазистатический нагрев, когда характерное время изменения  $\delta\Omega$  до значений, при которых начинается подавление ВКР, значительно превышает время установления стационарного процесса  $t_{ст} = \frac{g_s I_L L}{2} T_2$ . Второй — это быстрый нагрев, при котором подавление ВКР начинается раньше, чем процесс выйдет на стационарный уровень.

В первом случае с учетом квазистатического характера процесса амплитуда фонной волны может быть выражена из уравнения (3) (при условии  $\Delta \ll 1$ ):

$$Q \approx \frac{i(\partial \epsilon / \partial Q)}{8\pi\rho\Omega_0} \frac{g_s g_s^{*1}}{T_2^{-1} + i\delta\Omega}. \quad (16)$$

Подставляя  $Q$  из (16) в (1) и (2) и ограничиваясь приближением плоских волн, получим следующую систему замкнутых уравнений для интенсивностей взаимодействующих полей:

$$\frac{\partial I_s}{\partial z} = g_s \frac{I_s I_L}{1 + T_2^2 (\delta\Omega)^2}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial I_L}{\partial z} = -g_L \frac{I_s I_L}{1 + T_2^2 (\delta\Omega)^2}, \quad (18)$$

\* Уширение спектра стоксовой компоненты в надпороговом режиме исследовалось экспериментально, главным образом, в веществах с большой постоянной Керра (см., например, [10]), в которых может быть существенна самомодуляция возбуждающих импульсов. Это затрудняет сопоставление экспериментальных значений с результатами теоретических расчетов по формуле (14), тем более, что в указанных выше работах отсутствуют данные о плотности энергии стоксова пучка (теоретическая оценка этой величины может быть лишь очень приближенной из-за чрезвычайно резкой зависимости  $U_s$  от геометрии опыта).

где  $g_L = \frac{k_L}{k_s} g_s$ . Значение  $\delta\Omega$  для  $t > T_1$  определяется из соотношения (см. (7) и (15))

$$\delta\Omega = \frac{\beta}{T_2} \int_0^T dt \frac{\partial I_s}{\partial z}, \quad \beta = \frac{(\partial\Omega/\partial T) \Omega_0 T_2}{\rho C \omega_s}. \quad (19)$$

Поскольку отыскание строгого аналитического решения системы уравнений (17) и (18) практически не представляется возможным, ограничимся нахождением приближенного решения, качественно описывающего картину развития ВКР.

Учтем то обстоятельство, что основное изменение  $\delta\Omega$  накапливается за время, когда подавление ВКР еще не существенно. Поэтому в нулевом приближении значение  $\delta\Omega$  можно рассчитать, подставляя в формулу (19) невозмущенное распределение  $\partial I_s^{(0)}/\partial z$ , а затем, уже в первом приближении решать уравнения (17) и (18) с заданной функцией  $\delta\Omega(z, t)$ .

Такое решение действительно можно отыскать для самосогласованной системы (17) и (18), описывающей нелинейную стадию процесса перекачки энергии в стоксову волну, однако оно весьма громоздко, и мы его здесь не приводим.

Ограничимся для простоты рассмотрением задачи в заданном поле накачки, когда значение  $I_L$  в (17) считается постоянным. Искомое решение в первом приближении имеет вид

$$I_s^{(1)} \approx \frac{I_s^{(0)}}{[1 + \beta^2 t^2 \exp(2\Gamma z) I_s^2(0) \Gamma^2]^{1/2}}, \quad I_s^{(0)} = I_s(0) \exp(\Gamma z). \quad (20)$$

Здесь  $I_s^{(0)}(z)$  — невозмущенное решение нулевого приближения с инкрементом  $\Gamma = g_s I_L$ . Распределение  $|Q|^2$  или  $\partial I_s^{(1)}/\partial z$  определяется по формуле

$$|Q^{(1)}|^2 \sim \frac{\partial I_s^{(1)}}{\partial z} = \frac{\Gamma I_s(0) \exp(\Gamma z)}{[1 + \beta^2 t^2 \exp(2\Gamma z) I_s^2(0) \Gamma^2]^{3/2}}. \quad (21)$$

Очевидно, полученное в первом приближении решение дает заниженную оценку значений функции  $I_s(z)$ , в то время как решение нулевого приближения — завышенную. Уточненное решение, в принципе, можно получить в более высших приближениях, однако качественная картина достаточно хорошо видна уже из первого приближения.

Это приближение можно считать справедливым, пока полученная с его помощью заниженная оценка функции  $I_s(z)$  незначительно отличается от завышенной оценки нулевого приближения. Сравнение выражений для  $I_s^{(0)}$  и  $I_s^{(1)}$  показывает, что при

$$\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma z} \lesssim 3 \quad (22)$$

функции  $I_s^{(0)}$  и  $I_s^{(1)}$  отличаются менее чем вдвое. Поэтому условие (22) можно считать условием применимости полученных выражений.

Анализ формулы (21) показывает, что функция  $|Q|^2$  достигает максимума при  $\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma z} \approx 1/2$ , т. е. прежде чем нарушится условие (22) (при  $\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma z} = 1/2$  значение  $I_s^{(1)} \approx 0,82 I_s^{(0)}$ , а при  $\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma z} = 3$  величина  $|Q|^2$  примерно в 4,4 раза ниже, чем в максимуме).

На основании зависимостей (20) и (21) динамику ВКР можно качественно представить следующим образом (рис. 1). Вначале, после установления стационарного режима рассеяния, распределения  $I_s(z)$  и  $|Q|^2$  почти не зависят от времени (сплошная  $I_s(z)$  и штриховая  $|Q(z)|^2$  кривые 1). При достижении параметром  $\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma z}$  на границе среды значения  $1/2$  распределение  $|Q|^2$  достигает максимума, интенсивность  $I_s$  при этом почти не отличается от первоначального значения (кривые 2). Далее, с увеличением времени, максимум функции  $|Q|^2$  смещается вглубь среды, а интенсивность  $I_s(z)$  нарастает значительно медленнее (кривые 3): процесс ВКР срывается. Условие  $\Gamma^2 I_s^2(0) \beta^2 t^2 e^{2\Gamma L} \approx 1/2$  можно принять за порог эффекта подавления ВКР. Длительность импульса, при превышении которой начинают сказываться обсуждаемые здесь эффекты, равна  $t^* = \frac{1}{\sqrt{2} \beta I_s^{(0)}(L) \Gamma}$ , а пороговая плотность энергии стокова излучения

$$w_s^* = I_s^{(0)}(L) t^* = \frac{1}{\sqrt{2} \beta \Gamma}. \quad (23)$$

Например, для ВКР в жидкостях или кристаллах при типичных значениях параметров [6]  $\partial \Omega / \partial T \approx 10^{10}$  ( $c^{-1}/K$ ),  $\Omega_0 / \omega_s = 0,1$ ,  $\rho \approx 1$  г/см<sup>3</sup>,  $C \approx 4 \frac{Дж}{г \cdot К}$  и  $\Gamma L = M_{\Pi} \approx 25$ ,  $w_s^* [Дж/см^2] \approx 3 \delta v [см^{-1}] L [см]$  ( $\delta v = 2/T_2$  — ширина линии спонтанного комбинационного рассеяния).

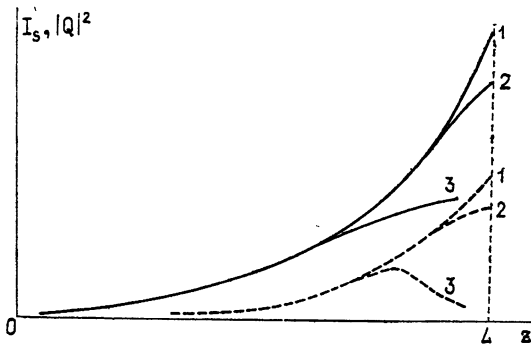


Рис. 1.

Значение  $t^*$  по порядку величины характеризует длительность стокова импульса, а  $w_s^*$  — его плотность энергии. Расчет фазы рассеянной волны показывает, что в рассматриваемом здесь случае квазистатического нагрева сколь-нибудь заметного искажения частотного или пространственного спектра стокова пучка за счет температурного изменения частоты фононов ожидать не приходится (разумеется, как уже указывалось в разд. 2, искажения спектра могут быть связаны с эффектами температурного изменения  $\delta n$ ). Условие квазистатического нагрева можно записать в виде  $\frac{\partial}{\partial t}(\delta \Omega) t_{ст} \ll \delta \Omega$ , или, заменяя  $\delta \Omega$  соответствующим значением нулевого приближения, взятым при  $t \sim t^*$  (т. е. при



$\delta\Omega(t^*) T_2 = \beta t \Gamma I_s(0) e^{\gamma L} \approx \frac{1}{2}$ ), получим  $t_{\text{ст}} \ll t^*$ . Если учесть, кроме того, что для вычисления  $\delta\Omega$  мы пользовались формулой (19), справедливой при  $t > T_1$ , то условие применимости приближения квазистатического нагрева принимает вид:  $t^* \gg T_1, t_{\text{ст}}$ .

Для оценки условия подавления ВКР в том случае, когда изменение  $\delta\Omega$  приводит к заметному (по сравнению с шириной спектра усиления стоксова излучения) смещению комбинационной линии уже за время, меньшее времени установления стационарного процесса  $t_{\text{ст}}$ , поступим следующим образом. Сравним при  $t < t_{\text{ст}}$  ширину спектра стоксова излучения  $[\text{II}] \Delta\omega_s = (\Gamma z / 2T_2 t)^{1/2}$  со смещением спектра фононной волны, которое в нестационарном случае оценивается по формуле (выражение для  $I_s^{(0)}$  и  $\partial I_s^{(0)} / \partial z$  следует из  $[\text{II}]$ )\*

$$\delta\Omega = \left( \frac{\partial\Omega}{\partial T} \right)_\rho \frac{\Omega_0}{CT_1 \omega_s} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \frac{\partial I_s^{(0)}}{\partial z} = \frac{(\partial\Omega/\partial T) \Omega_0 T_2 I_s(0) t}{4\pi\rho C \omega_s \Gamma z^2} \times \\ \times \exp\left(2\sqrt{2\frac{\Gamma_1 z t}{T_2}}\right).$$

Приравнявая  $\Delta\omega_s$  и  $\delta\Omega$ , находим время  $t^*$ , по прошествии которого смещение  $\delta\Omega$  сравнится с шириной спектра  $\Delta\omega_s$ :

$$t^* \approx \frac{T_2}{8\Gamma z} \ln\left(\frac{m}{\ln m^3}\right), \quad m(z) = \frac{64\pi\Gamma^2 z^4 \rho CT_1 \omega_s}{(\partial\Omega/\partial T) \Omega_0 T_2^3 I_s(0)} \gg 1. \quad (24)$$

При  $t \approx t^*$  ( $z = L$ ) область вблизи выхода накачки из рассеивающей среды прогревается настолько, что усиление стоксовой волны на протяжении этой области почти не происходит. При  $t > t^*$  ( $z = L$ ) граница области неравномерного прогрева смещается навстречу падающему лучу. Максимальный инкремент в «холодной» (непрогретой) области, достигаемый в момент  $t = t^*(z)$ , определяется по формуле

$$M \approx 2\sqrt{2\frac{\Gamma z t^*(z)}{T_2}} \approx \sqrt{\ln\left(\frac{m(z)}{\ln m^3}\right)}. \quad (25)$$

Наибольшее значение инкремента  $M_{\text{пред}}$  приходится на момент  $t = t^*(L)$ , когда еще почти всю среду можно считать «холодной» и  $z = L$ .

При дальнейшем увеличении времени и сдвиге границы неравномерного прогрева в среду полный инкремент оценивается по формуле (25), но при значении  $z < L$  (соответствующее значение  $z$  для данного момента определяется из условия  $\Delta\omega_s \approx \delta\Omega$ ).

Поскольку  $m(z) \sim z^4$ , то при уменьшении протяженности «холодной» области максимальный инкремент уменьшается (см. (25)), несмотря на увеличение времени  $t^*(z)$ . Это значит, что время порядка  $t^*(L)$  будет определять и длительность рассеянного импульса (при прямоугольном импульсе накачки), причем в рассматриваемом случае,

\* Оценка температуры по указанным выше соотношениям оправдана, если характерное время процесса  $t^*$  (см. ниже) превышает время термализации энергии в среде. Заметим, что для разреженных газов, в отличие от жидкостей, твердых тел и достаточно плотных газов ( $\rho \gg 1 \text{ атм}$ ), указанное условие может не выполняться.

разумеется,  $t^*(L) \ll t_{\text{ст}}$ . Действительно, сравнивая (24) и (25), видно, что  $t^*(L) \approx \frac{T_2}{8\Gamma L} M_{\text{пред}}^2$ . Наибольшее значение полного инкремента  $M_{\text{пред}}$  порядка величины  $M_{\text{п}} \approx 25$ , а  $\Gamma L \approx \frac{I_L}{I_{\text{п}}^{\text{ст}}} M_{\text{п}} (I_{\text{п}}^{\text{ст}} - \text{пороговая плотность мощности стационарного ВКР в кювете длиной } z = L)$ . Поэтому

$$t^* = \frac{T_2 M_{\text{п}}}{8 (I_L / I_{\text{п}}^{\text{ст}})} \approx \frac{3T_2}{(I_L / I_{\text{п}}^{\text{ст}})} \quad (26)$$

Поскольку в сильно нестационарном режиме  $I_L \gg I_{\text{п}}^{\text{ст}}$ , то длительность рассеянного импульса может достигать величины, существенно меньшей не только времени переходного процесса, но и времени поперечной релаксации  $T_2$ . Ширина спектра излучения

$$\Delta\omega_s = \sqrt{\frac{\Gamma z}{2T_2 t^*(L)}} = \frac{M_{\text{пред}}}{2t^*(L)}$$

значительно превышает обратную длительность импульса, так как полный инкремент  $M_{\text{пред}} = M_{\text{п}} \gg 1$ .

В настоящей работе мы ограничились исследованием лишь тех нелинейных процессов, индуцируемых оптическими фононами при ВКР, которые приводят к эффектам самовоздействия волн накачки и стоксовой компоненты. В то же время здесь, фактически, не рассматривались процессы, связанные с тепловым самовоздействием фононной волны и ее неустойчивостью по отношению к мелкомасштабным (в сравнении с радиусами пучков) возмущениями «фононного облака» (эффекты типа самофокусировки и вынужденного температурного рассеяния фононных колебаний [12]). Как показывают оценки, такие процессы могут оказаться иногда существенными в условиях сильно нестационарного нагрева среды с достаточно узкополосной линией комбинационного рассеяния ( $t^* \leq t_{\text{ст}}$ ). Неустойчивость фононной волны приводит к обогащению гармониками пространственного спектра стоксовой компоненты\*.

Тепловые процессы, сопровождающие ВКР, могут оказаться также существенными при работе непрерывных комбинационных генераторов [14], при исследовании ряда схем активной спектроскопии [15] (большие плотности энергии накачки в сравнительно малом объеме). Эти процессы ограничивают возможности ВКР при диагностике свойств различных сред (особенно вблизи критических точек и фазовых переходов, где особенно важна зависимость частоты фононов от температуры). С другой стороны, возможность использования тепловых процессов для укорочения импульсов, локального нагрева небольших объемов в прозрачной среде при перекрещивании двух лучей накачки и стоксовой компоненты и т. п. делает актуальным целенаправленное экспериментальное исследование указанных эффектов.

\* В этой связи можно сослаться на данные работ [13], где наблюдалось образование «пятен» в пучке рассеянного излучения. Хотя механизм этого явления остается до конца невыясненным, не исключено, что возникновение подобных особенностей связано с неустойчивостью оптических фононов, вызванной тепловыми эффектами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, **1**, 82 (1961); А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, ДАН СССР, **159**, 767 (1964); В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **62**, 174 (1972).
2. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
4. R. G. Brewer, Appl. Phys. Lett., **6**, 165 (1965). А. Л. Полякова, Письма в ЖЭТФ, **4**, 132 (1966); М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, **60**, 5, 1696 (1971).
5. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, УФН, **3**, вып. 2, 203 (1973).
6. М. М. Сущинский, Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, изд. Наука, М., 1969.
7. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
8. А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, Л. В. Пискунова, Квантовая электроника, **2**, № 11, 2403 (1975).
9. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронополо, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 3 (1969)
10. M. Maier, W. Kaiser and G. A. Giordmaine, Phys. Rev. Lett., **17**, 1275 (1966); Е. А. Морозова, А. И. Соколовская, ЖЭТФ, **69**, 488 (1975).
11. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1971.
12. А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, в сб. Вынужденное комбинационное рассеяние света, материалы I Всесоюзной конференции по спектроскопии комбинационного рассеяния света, РДЭНТП, Киев, 1975, стр. 103.
13. А. Д. Кудрявцева, А. И. Соколовская, М. М. Сущинский, ЖЭТФ, **59**, 1556 (1970); сб. Квантовая электроника, № 7, 73 (1972); А. Д. Кудрявцева, А. И. Соколовская, Квантовая электроника, **1**, № 4, 968 (1974).
14. R. L. Allwood, S. D. Devine, R. G. Mellish, S. D. Smith and R. A. Wood, J. Phys., C3, L 186 (1970); A. Mooradian, S. R. Brueck and F. A. Vhem, Appl. Phys. Lett., **17**, 481 (1970).
15. J. A. Giordmaine and W. Kaiser, Phys. Rev., **144**, 676 (1966); С. А. Ахманов, В. Г. Дмитриев, А. И. Ковригин, Н. И. Коротеёв, В. Г. Тункин, А. И. Холодных, Письма в ЖЭТФ, **15**, 600 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
25 июня 1976 г.

## ON NONLINEAR EFFECTS AT STIMULATED COMBINATIONAL SCATTERING ASSOCIATED WITH MEDIUM HEATING BY OPTICAL PHONONS

*A. A. Betin, G. A. Pasmanik*

Attention is paid to nonlinear processes associated with a stationary medium heating due to transformation of energy of molecules excited at stimulated combination scattering (SCS) into the heat. It is shown that the temperature variation in the region of intense energy repump of exciting radiation into the stokes component results, on one hand, in phase distortions in interacting pump and stokes beams and, on the other, in SCS suppression due to temperature frequency deviation of optical phonons from the resonance. The critical power densities in the stokes wave are found. When they are decreased, one or the other of the above-given effects are possible. The scattered pulse duration under the conditions of SCS suppression at quasistatic and strongly nonstationary medium heating is estimated.

УДК 538.56 : 519.25

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ЕГО АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Ю. В. Березин, И. В. Крашенинников

Рассмотрена автокорреляционная функция одной разновидности нестационарного процесса, часто встречающегося в радиолокационных исследованиях, и показано, что она зависит от отношения сигнал/шум, доплеровской частоты сигнала, частоты смещения спектра шума и ширины энергетического спектра шума. Изложен метод определения этих параметров, проанализирована устойчивость полученного решения.

При изучении случайных полей возникает необходимость оценки их параметров. Решение этого вопроса возможно в рамках определенных моделей. Рассмотрим одну разновидность периодически нестационарного процесса, описывающего поля, отраженные от движущихся объектов или сред с изменяющимся характеристиками, и покажем, что вопрос оценки основных параметров этого поля может быть решен на основе анализа его автокорреляционной функции. Допустим, что наблюдаемый процесс представляет собой сумму

$$E(t) = E_0(t) + E_n(t), \quad (1)$$

где  $E_0(t)$  — сигнал,  $E_n(t)$  — помеха (шум). При этом 1) возможен доплер-эффект, т. е.

$$E_{0c}(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi_0); \quad E_{0s}(t) = A_0 \sin(\Omega t + \varphi_0),$$

где  $A_0 = \text{const}$ ,  $\Omega = \text{const} \neq 0$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ ; 2) среднее значение шума равно нулю; 3) сигнал и шум не коррелируют; 4) спектр мощности шума имеет вид

$$G(\omega - \omega_{\text{см}}) = a \exp \left[ - \frac{\ln 2 (\omega - \omega_{\text{см}})^2}{(\Delta\omega)^2} \right], \quad (2)$$

где  $a$  — нормировочный коэффициент,  $\omega_{\text{см}}$  — частота смещения спектра,  $\Delta\omega$  — полуширина спектра.

В рамках модели (1) при соблюдении условий 1) и 4) и при конечной длительности реализации  $T$  функция корреляции одной фазоквадратурной компоненты процесса  $E(t)$  имеет вид

$$R(\tau) = \left\{ \beta^2 \left[ \left( 1 + \frac{\sin 2 \Omega T}{\Omega T} \right) \cos \Omega \tau - \frac{\sin^2 \Omega T}{\Omega T} \sin \Omega \tau - 2 \left( \frac{\sin \Omega T}{\Omega T} \right)^2 \right] + B(\tau)/\sigma^2 \right\} \left\{ 1 + \beta^2 \left[ 1 + \frac{\sin 2 \Omega T}{2 \Omega T} - 2 \left( \frac{\sin \Omega T}{\Omega T} \right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (3)$$

где  $\beta^2 = A_0^2/2\sigma^2$  — отношение сигнал/шум,  $B(\tau) = \sigma^2 \cos \omega_{\text{см}} \tau \times \times \exp \left[ - \frac{(\Delta\omega\tau)^2}{4 \ln 2} \right]$  — функция корреляции шума. Видно, что  $R(\tau)$  зависит

от характеристик и сигнала и шума, а также от отношения сигнал/шум. Это обстоятельство может быть использовано для определения указанных характеристик.

Рассмотрим частные случаи в предположении, что  $T \gg T_{\Omega}$  ( $T_{\Omega} = 2\pi/\Omega$ ).

1) При  $\Omega=0$  из (3) следует

$$R(\tau) = \cos \omega_{\text{см}} \tau \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega\tau)^2}{4 \ln 2} \right]. \quad (4)$$

В этом случае  $R(\tau)$  осциллирует, затухая, с частотой  $\omega_{\text{см}}$ , зависит от  $\Delta\omega$  и не зависит от  $\beta^2$ .

2) При  $\Omega = \text{const} \neq 0$

$$R(\tau) = \frac{1}{1+\beta^2} \left\{ \beta^2 \cos \Omega\tau + \cos \omega_{\text{см}} \tau \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega\tau)^2}{4 \ln 2} \right] \right\}, \quad (5)$$

т. е.  $R(\tau)$  зависит от  $\omega_{\text{см}}$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\Omega$  и  $\beta^2$ . Рассмотрим частные случаи.

а) Если  $\omega_{\text{см}} = 0$ , то

$$R(\tau) = \frac{1}{1+\beta^2} \left\{ \beta^2 \cos \Omega\tau + \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega\tau)^2}{4 \ln 2} \right] \right\}. \quad (6)$$

б) Если  $\omega_{\text{см}} = \Omega$ , то

$$R(\tau) = \frac{\cos \Omega\tau}{1+\beta^2} \left\{ \beta^2 + \exp \left[ -\frac{(\Delta\omega\tau)^2}{4 \ln 2} \right] \right\}. \quad (7)$$

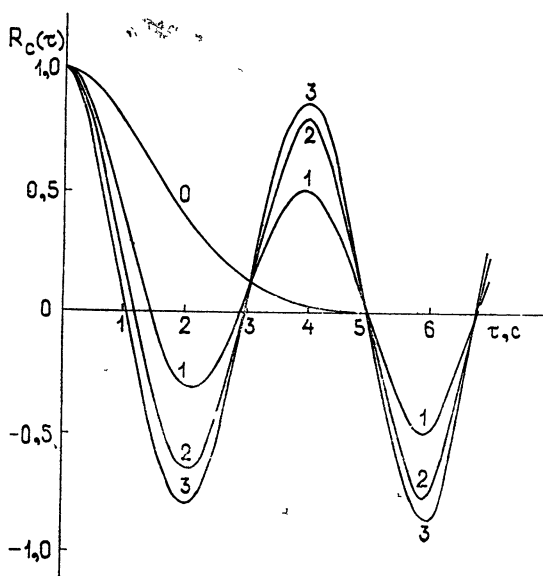


Рис. 1.

Функции  $R(\tau)$ , определяемые (6) и (8), существенно отличаются друг от друга. На рис. 1 и 2 приведены семейства  $R(\tau)$  по параметру  $\beta^2$  (при  $\Delta\omega = \pi/4 \text{ c}^{-1}$ ,  $\Omega = \pi/2 \text{ c}^{-1}$ ), построенные по формулам (6) и (7) ( $0 - \beta^2 = 0$ ,  $1 - \beta^2 = 1$ ,  $2 - \beta^2 = 3$ ,  $3 - \beta^2 = 6$ ). Особенностью функций, изображенных на рис. 1 (формула (6)), является то, что первый минимум меньше последующих и это отличие тем больше, чем меньше

значение  $\beta^2$ . При одинаковых значениях параметров функция (6) более непериодична, чем функция (7). Функция  $R(\tau)$  в виде (5) зависит от параметров  $\Omega$ ,  $\beta^2$ ,  $\omega_{\text{см}}$  и  $\Delta\omega$ , представляющих собой характеристики исследуемого процесса. Непосредственное измерение этих параметров невозможно вследствие суперпозиции сигнала и шума. Однако зависимость  $R(\tau)$  от  $\Omega$ ,  $\beta^2$ ,  $\omega_{\text{см}}$  и  $\Delta\omega$  позволяет получить необходимое число уравнений для их определения. Выбирая четыре значения аргумента  $\tau$  в той области, где имеет место наиболее сильная зависимость  $R(\tau)$  от значений искомых параметров, получим систему уравнений

$$R(\tau_i) = f(\beta^2, \Omega, \omega_{\text{см}}, \Delta\omega, \tau), \quad (8)$$

где  $i = 1 \div 4$ ,  $f$  — известная (5) функция. Решение системы (8) позволяет найти значения  $\Omega$ ,  $\beta^2$ ,  $\omega_{\text{см}}$  и  $\Delta\omega$ .

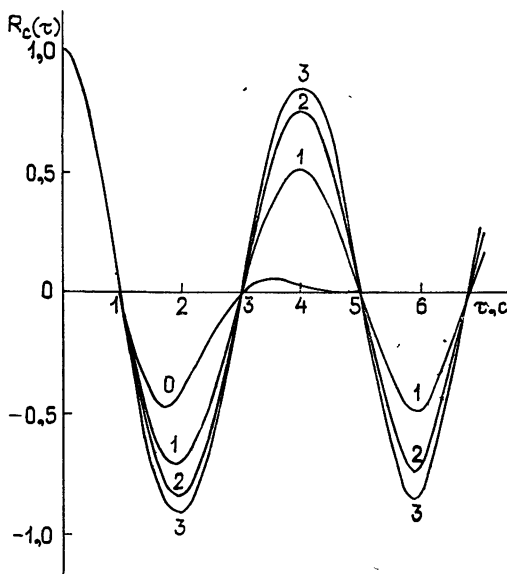


Рис. 2.

Рассмотрим решение системы (8) в случае  $\omega_{\text{см}} = \Omega$ . Из формулы (7) следует, что  $R(\tau)$  — почти периодическая функция. Это обстоятельство позволяет определить

$$\Omega \approx \pi/2 \tau_0, \quad (9)$$

где  $\tau_0$  — значение аргумента  $\tau$ , при котором  $R(\tau) = 0$ . Выбирая в соответствии с (8) два значения  $\tau_i$  (так как два параметра  $\omega_{\text{см}}$  и  $\Omega$  уже определены), на основании (7) получим

$$R(\tau_i) = \frac{\cos \Omega \tau_i}{1 + \beta^2} [\beta^2 + \exp(-z \tau_i^2)], \quad (10)$$

где  $z = (\Delta\omega)^2/4 \ln 2$ ,  $i = 1, 2$ . Исключая из (10)  $\beta^2$ , придем к уравнению

$$f_1(z) - f_2(z) = 0, \quad (11)$$

где

$$f_1(z) = a_1 [\exp(-z \tau_1^2) - b_1],$$

$$f_2(z) = a_2 [\exp(-z \tau_2^2) - b_2],$$

$$a_{1,2} = \cos \Omega \tau_{1,2} / R(\tau_{1,2}) - \cos \Omega \tau_{1,2},$$

$$b_{1,2} = R(\tau_{1,2}) / \cos \Omega \tau_{1,2}.$$

Очевидно, что  $f_{1,2}(z)$  — монотонные функции, причем

$$\text{при } z = 0 \quad f_1(z) = f_2(z) = -1,$$

$$\text{при } z = \infty, \quad f_1(z) = -a_1 b_1, \quad f_2(z) = -a_2 b_2.$$

Условия существования решения (11) сводятся к выполнению требований

$$f_1(z) < f_2(z) \quad \text{при } z = \infty, \quad (12)$$

$$\frac{df_1(z)}{dz} > \frac{df_2(z)}{dz} \quad \text{при } z = 0.$$

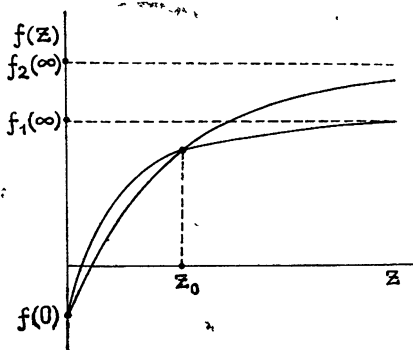


Рис. 3.

Единственность решения обеспечивается монотонностью функций  $f_{1,2}(z)$ . Условия (12) легко удовлетворяются выбором  $R$  и  $\tau$ . Решение уравнения (11)  $z_0$  (рис. 3) позволяет найти

$$\Delta\omega = 2\sqrt{z_0 \ln 2}; \quad (13)$$

$$\beta^2 = \frac{\cos \Omega \tau_i \exp(-z_0 \tau_i^2) - R(\tau_i)}{R(\tau_i) - \cos \Omega \tau_i}. \quad (14)$$

Исследование устойчивости решения показывает, что ошибка в определении  $z_0$

$$dz = F(\partial f_{1,2} / \partial x_i, d\tau, dR)_{z=z_0}, \quad (15)$$

где  $x_i = \tau, z, R$ .

Формулы (13) — (15) позволяют оценить ошибки  $\delta(\Delta\omega)$  и  $\delta(\beta^2)$ . Минимум ошибки  $dz$  соответствует экстремальным значениям  $R(\tau)$ . В качестве примера укажем, что при значениях параметров, типичных для радиоволн, отраженных от ионосферы при вертикальном зондировании ( $\beta^2 = 3, R = 0,75, \tau = 3$  с,  $\Delta R = 0,05$  и  $\Delta \tau = 2$  с) ошибка  $\delta(\Delta\omega) \leq 10\%$  и  $\delta(\beta^2) \leq 20\%$ . Для модели (1) известны способы определения лишь одного из параметров поля —  $\beta^2$  [1, 2], основанные на анализе закона распределения или характеристической функции процесса. Как показано выше, решение задачи об определении ряда основных параметров (9), (13), (14) периодически нестационарного процесса типа (1) может быть получено на основе анализа автокорреляционной функции его фазоквадратурной компоненты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Миркотан, А. Г. Вологдин, Геомagnetизм и аэрoномия, 13, 293 (1973).
2. С. Ф. Миркотан, А. Г. Вологдин, Геомagnetизм и аэрoномия, 14, 554 (1974).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
29 сентября 1976 г.

#### AN ESTIMATION OF PARAMETERS OF PERIODICALLY NONSTATIONARY PROCESSES BASED UPON ITS AUTOCORRELATION FUNCTION.

Yu. V. Berezin, I. V. Krasheninnikov

The autocorrelation function of one class of the nonstationary process which is often met in radar investigations is considered. It is shown to depend on the signal-to-noise ratio, Doppler frequency of a signal, frequency shift of the noise spectrum and energetic noise spectral width.

The method to determine these parameters is set forth. The stability of the solution obtained has been analysed.

УДК 538.56 : 519.25

## О МОМЕНТНЫХ И КУМУЛЯНТНЫХ ФУНКЦИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Малахов, О. В. Музычук

Получены замкнутые уравнения диффузионного приближения для моментных и кумулянтных функций выходного сигнала стохастической линейной системы общего вида с гауссовыми флуктуациями параметров. Рассмотрено решение этих уравнений для кумулянтных функций 2-го и 4-го порядков. В качестве примера находятся первые четыре кумулянта колебаний гармонического осциллятора с флуктуациями собственной частоты, а также кумулянты выхода стохастической системы, описываемой уравнением 1-го порядка.

1. Анализ стохастических линейных систем (динамических систем, параметры которых представляют собой случайные процессы или поля) в настоящее время весьма актуален; это относится, прежде всего, к системам с сильными флуктуациями параметров. В данной области имеется большое количество публикаций (см., например, [1-3] и библиографии в них). Известен ряд методов получения замкнутых уравнений для среднего значения и корреляционной функции «выхода» системы, использующих быстроту (мелкомасштабность) флуктуаций ее параметров, которые приводят в конечном итоге к уравнениям Дайсона и Бете—Солпитера в том или ином приближении [2-6]. Хотя указанные методы формально обобщаются и на высшие моменты [7], практически удавалось получать моменты выше 2-го лишь для систем, описываемых уравнением первого порядка по одной из координат.

Наибольшую информацию о поведении стохастической системы можно получить на основании вероятностного распределения «выхода», однако найти его обычно не удастся. В то же время задача отыскания нескольких первых кумулянтных функций, имеющая большой практический интерес, иногда может быть решена для динамических систем общего вида. Ниже мы получим и проанализируем уравнения диффузионного приближения для установившихся значений моментных и кумулянтных функций  $n$ -го порядка «выхода» стохастических линейных систем, флуктуации параметров которых представляют собой гауссовы случайные процессы с достаточно малым временем корреляции. Подобная задача для корреляционной функции решалась в работе [8].

2. Рассмотрим динамическую систему, описываемую линейным дифференциальным оператором  $N$ -го порядка с флуктуирующими коэффициентами:

$$L\left(\frac{d}{dt}, t\right)y(t) = x(t), \quad (1)$$

где

$$L\left(\frac{d}{dt}, t\right) = \frac{d^N}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k},$$

$$a_k(t) = \langle a_k \rangle + \alpha_k(t), \quad \langle \alpha_k(t) \rangle = 0,$$



$\{\alpha_k(t)\}$  — стационарная гауссова совокупность флуктуаций;  $x(t)$  и  $y(t)$  — соответственно входной и выходной сигналы, причем  $x(t)$  будем считать для простоты детерминированным.

Представив выходной сигнал в виде  $y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t)$ , где\*

$$\bar{y}(t) = \int^t g_0(t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad \tilde{y}(t) = - \int^t g_0(t - \tau) \alpha_k(\tau) y^{(k)}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$g_0(t - \tau)$  — функция Грина невозмущенной системы, запишем следующее интегральное представление моментных функций процесса  $\tilde{y}(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{y}(t_1) \tilde{y}(t_2) \dots \tilde{y}(t_m) \rangle &= (-1)^m \int^{t_1} g_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \dots \\ &\dots \int^{t_m} g_0(t_m - \tau_m) d\tau_m \langle \alpha_{k_1}(\tau_1) y^{(k_1)}(\tau_1) \alpha_{k_2}(\tau_2) y^{(k_2)}(\tau_2) \dots \alpha_{k_m}(\tau_m) y^{(k_m)}(\tau_m) \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Соответствующее выражение для кумулянтных функций имеет вид

$$\begin{aligned} \langle y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_m) \rangle &= (-1)^m \int^{t_1} g_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \dots \\ &\dots \int^{t_m} g_0(t_m - \tau_m) d\tau_m \langle \alpha_{k_1}(\tau_1) y^{(k_1)}(\tau_1), \alpha_{k_2}(\tau_2) y^{(k_2)}(\tau_2), \dots, \alpha_{k_m}(\tau_m) y^{(k_m)}(\tau_m) \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Ниже для краткости обозначим  $y_s = y(\tau_s)$ ,  $\alpha_{k_s} = \alpha_{k_s}(\tau_s)$ . Скобками  $\langle 1, 2, \dots, m \rangle$  будем обозначать кумулянтные функции произвольной совокупности статистически связанных переменных (следуя [9, 10]).

Преобразуем смешанные моментные функции в правой части (3), используя известную формулу Фуруцу — Новикова [11, 12]:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{k_1} y_1^{(k_1)} \rangle &= \int^{\tau_1} B_{k_1 j_1}(\tau_1 - \theta_1) \left\langle \frac{\delta y_1^{(k_1)}}{\delta \alpha_{j_1}(\theta_1)} \right\rangle d\theta_1, \\ \langle \alpha_{k_1} y_1^{(k_1)} \alpha_{k_2} y_2^{(k_2)} \rangle &= B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) \langle y_1^{(k_1)} y_2^{(k_2)} \rangle + \\ &+ \int^{\tau_1} \int^{\tau_2} B_{k_1 j_1}(\tau_1 - \theta_1) B_{k_2 j_2}(\tau_2 - \theta_2) \left\langle \frac{\delta^2 (y_1^{(k_1)} y_2^{(k_2)})}{\delta \alpha_{j_1}(\theta_1) \delta \alpha_{j_2}(\theta_2)} \right\rangle d\theta_1 d\theta_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где  $B_{k_j}(\tau) = \langle \alpha_{k_j}(t) \alpha_j(t - \tau) \rangle$  — совместная ковариационная функция флуктуаций параметров системы. Нетрудно показать, что в выражение для  $m$ -й моментной функции выходного сигнала войдут средние значения вариационных производных вида

$$\frac{\delta^s (y_1^{(k_1)} \dots y_m^{(k_m)})}{\delta \alpha_{j_1}(\theta_1) \dots \delta \alpha_{j_s}(\theta_s)} \quad (0 \leq s \leq m),$$

причем четность порядков  $s$  определяется четностью соответствующей моментной функции. Заметим, что разложение четной моментной функ-

\* Здесь и в дальнейшем производится суммирование по повторяющимся индексам в пределах от 0 до  $N-1$ ; нижний предел интегрирования считаем равным  $-\infty$ , полагая тем самым законченными переходные процессы, связанные с включением входного сигнала.

ции  $\langle \alpha_k, y_1^{(k_1)} \dots \alpha_{k_{2n}} y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle$  содержит разомкнутые члены, а нечетной—не содержит.

Если все времена корреляции флуктуаций параметров малы по сравнению с характерными временами системы, то в интегральных членах (5) можно заменить корреляционные функции эффективными  $\delta$ -функциями:

$$B_{kj}(\tau) = D_{kj} \delta(\tau), \quad D_{kj} = 2 \int_0^{\infty} B_{kj}(\tau) d\tau,$$

что приводит к следующим формулам размыкания диффузионного приближения\*:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k, y_1^{(k_1)} \dots \alpha_{k_{2n-1}} y_{2n-1}^{(k_{2n-1})} \rangle &= 0, \\ \langle \alpha_k, y_1^{(k_1)} \dots \alpha_{k_{2n}} y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle &= (2n - 1)!! \{ B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) \dots \\ \dots B_{k_{2n-1} k_{2n}}(\tau_{2n-1} - \tau_{2n}) \} \langle y_1^{(k_1)} \dots y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle &= \langle \alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_{2n}} \rangle \langle y_1^{(k_1)} \dots y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что эти равенства являются точными при  $\delta$ -коррелированных флуктуациях только в отсутствие в системе флуктуаций диссипативного параметра  $\alpha_{N-1}(t)$  ( $N$ —порядок системы). В противном случае интегральные члены в (5) не обращаются в нуль. В самом деле, как показано в [13], вариационные производные решения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta^s y^{(k)}(t)}{\delta \alpha_{j_1} \dots \delta \alpha_{j_s}} &= (-1)^s s! \{ g^{(k)}(t, \theta_1) g^{(j_1)}(\theta_1, \theta_2) \dots \\ \dots g^{(j_{s-1})}(\tau_{s-1}, \theta_s) y^{(j_s)}(\theta_s) \} & \quad (7) \\ (0 \leq k, j \leq N - 1), & \end{aligned}$$

где  $g(t, \theta)$  — стохастическая функция Грина системы. Поскольку она обладает начальными условиями  $g^{(k)}(t, \theta)|_{t=\theta} = \delta_{k, N-1}$ , где  $\delta_{k, m}$  — символ Кронекера, то в совпадающие моменты времени  $\theta_i = t$ ,  $i = (1, 2, \dots, s)$ , все члены в (7) обращаются в нуль, если  $k \neq N - 1$ . Чтобы сохранить общность изложения, положим далее  $\alpha_{N-1}(t) \equiv 0$ , а порядок динамической системы  $N > 1$ . Ниже мы сделаем некоторые обобщения на систему с флуктуациями  $\alpha_{N-1}$ , а также отдельно рассмотрим стохастическое уравнение 1-го порядка.

Выражения (6) означают по существу, что в диффузионном приближении выходной сигнал и флуктуации параметров системы являются статистически независимыми. Можно показать, что подобный результат справедлив и для случая негауссовых параметрических воздействий, если последние представляют собой совершенно случайные процессы.

Для кумулянтных функций в правой части (4) можно получить разложение, являющееся следствием (6), из соотношений, связывающих моментные и кумулянтные функции [9, 10, 14]:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k, y_1^{(k_1)}, \alpha_{k_2} y_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_{k_{2n-1}} y_{2n-1}^{(k_{2n-1})} \rangle &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \langle \alpha_k, y_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_{k_{2n}} y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle &= (2n - 1)!! \{ B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) \dots \\ \dots B_{k_{2n-1} k_{2n}}(\tau_{2n-1} - \tau_{2n}) \langle y_1^{(k_1)} y_2^{(k_2)}, y_3^{(k_3)} y_4^{(k_4)}, \dots, y_{2n-1}^{(k_{2n-1})} y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle \}. & \quad (8) \end{aligned}$$

\* Здесь и в дальнейшем {...} — скобка симметризации по цифровым индексам; коэффициент перед ней указывает число членов в соответствующей сумме.

Ясно, что соотношения (6), (8) можно использовать в качестве приближенных и в случае «небелых» флуктуаций параметров системы. Условия применимости диффузионного приближения для динамических систем определенного вида обсуждались в работах [2-4, 8, 13].

На основании (6), (8) запишем замкнутые уравнения для моментных и кумулянтных функций решения:

$$\langle y(t) \rangle = \bar{y}(t), \quad \langle \tilde{y}(t) \rangle = 0, \quad (9)$$

$$\langle \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_{2n-1} \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_{2n-1} \rangle = 0;$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_{2n} \rangle = & \int g_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \dots \int g_0(t_{2n} - \tau_{2n}) d\tau_{2n} \times \\ & \times (2n - 1)!! \{ B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) \dots B_{k_{2n-1} k_{2n}}(\tau_{2n-1} - \tau_{2n}) \} \times \\ & \times \langle y_1^{(k_1)} y_2^{(k_2)} \dots y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \langle y_1, y_2, \dots, y_{2n} \rangle = & \int g_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \dots \int g_0(t_{2n} - \tau_{2n}) d\tau_{2n} (2n - 1)!! \times \\ & \times \{ B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) \dots B_{k_{2n-1} k_{2n}}(\tau_{2n-1} - \tau_{2n}) \langle y_1^{(k_1)} y_2^{(k_2)}, y_3^{(k_3)} y_4^{(k_4)}, \dots \\ & \dots, y_{2n-1}^{(k_{2n-1})} y_{2n}^{(k_{2n})} \rangle \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если флуктуации параметров некоррелированы между собой,  $B_{kj}(\tau) = 0$  при  $k \neq j$ , то число индексов суммирования в последних выражениях уменьшится вдвое.

Поскольку в рассматриваемом приближении  $\langle \tilde{y} \rangle = 0$ , средние значения  $\langle \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_m \rangle$  представляют собой центральные моментные функции, связанные с моментными соотношением

$$\langle y_1 y_2 \dots y_m \rangle = \sum_{k=0}^m C_m^k \{ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k \langle \tilde{y}_{k+1} \dots \tilde{y}_m \rangle \}. \quad (12)$$

Уравнения (10), (11) можно записать и в несколько иной форме, выражая правые части через искомые функции  $\langle \tilde{y}_1 \dots \tilde{y}_{2n} \rangle$  или  $\langle y_1, \dots, y_{2n} \rangle$ , используя (12) и соотношения, связывающие моментные и кумулянтные скобки. При этом видно, что для отыскания статистических характеристик порядка  $2n$  нужно решать систему  $n$  уравнений.

Из полученных формул можно сделать ряд физических выводов. Во-первых, стационарное вероятностное распределение выхода (если оно существует) является симметричным, поскольку нечетные кумулянтные функции в рассматриваемом приближении равны нулю. Во-вторых, ясно, что уравнения для одноточечных характеристик (моментов  $\langle y^m \rangle$  и кумулянтов), получаемые при  $t_s = t$ ,  $s = 1 \div m$ , не являются замкнутыми для  $m > 2$  даже при «белых» флуктуациях параметров. Другими словами, для стохастической системы порядка  $N > 1$  нельзя построить замкнутого уравнения для одноточечной плотности вероятности решения. Это очевидное следствие немарковости процесса  $y(t)$ , хотя величины  $y, \dot{y}, \dots, y^{(N-1)}$  могут быть компонентами  $N$ -мерной марковской совокупности.

Положив в (10), (11)  $n = 1$ , получим уравнение для ковариационной функции выхода, напоминающее «лестничное» приближение уравнения Бете — Солпитера:

$$\langle \tilde{y}(t_1) \tilde{y}(t_2) \rangle = \langle y(t_1), y(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 g_0(t_1 - \tau_1) g_0(t_2 - \tau_2) \times \\ \times B_{kj}(\tau_1 - \tau_2) [\bar{y}^{(k)}(\tau_1) \bar{y}^{(l)}(\tau_2) + \langle y^{(k)}(\tau_1), y^{(l)}(\tau_2) \rangle]. \quad (13)$$

При  $n = 2$  приходим к уравнению для кумулянтной функции 4-го порядка:

$$\langle y(t_1), \dots, y(t_4) \rangle = \int_0^{t_1} g_0(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \dots \int_0^{t_4} g_0(t_4 - \tau_4) d\tau_4 \times \\ \times 3 \{ B_{k_1 k_2}(\tau_1 - \tau_2) B_{k_3 k_4}(\tau_3 - \tau_4) \langle y^{(k_1)}(\tau_1) y^{(k_2)}(\tau_2), y^{(k_3)}(\tau_3) y^{(k_4)}(\tau_4) \rangle \}. \quad (14)$$

Как показывает анализ, при наличии в динамической системе флуктуаций диссипативного параметра  $\alpha_{N-1}(t)$  в этих уравнениях следует заменить невозмущенную функцию Грина  $g_0$  на  $\bar{g}$ , удовлетворяющую уравнению диффузионного приближения:

$$\left( \frac{d^N}{dt^N} + \bar{a}_k \frac{d^k}{dt^k} \right) \bar{g}(t - \tau) = \delta(t - \tau), \quad \bar{a}_k = \langle a_k \rangle - \frac{D_{N-1, k}}{2}.$$

Под  $\bar{y}(t)$  здесь также следует понимать решение аналогичного уравнения с правой частью  $x(t)$ .

Правая часть (14) выражается через искомые кумулянтные функции из соотношений (здесь  $s \equiv y_s, s = 1, 4$ )

$$\langle 1 \cdot 2 \rangle = \langle 1, 2 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle + 3 \{ \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \} + \\ + 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \},$$

поэтому для нахождения кумулянтной функции 4-го порядка следует предварительно найти ковариационную функцию.

3. Рассмотрим решение уравнений для второй и четвертой кумулянтных функций. Считаем для определенности входное воздействие гармоническим,  $x(t) = e^{i\omega t}$ . При этом  $y(t) = y_\omega(t)$ ,  $\langle y_\omega(t) \rangle = \bar{K}(j\omega) e^{i\omega t}$ , где  $\bar{K}(j\omega)$  — средняя или эффективная частотная характеристика системы;  $\langle y_\omega(t), y_\omega^*(t - \tau) \rangle = B_{y_\omega}(\tau)$  — ковариационная функция выхода.

Выполнив фурье-преобразование уравнения (13) по переменной  $\tau = t_1 - t_2$  (положим для простоты флуктуации параметров системы взаимно некоррелированными), приходим к уравнению для спектра выходного сигнала:

$$\Xi(\Omega; \omega) = |\bar{K}(j\Omega)|^2 \left[ \omega^{2k} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_k(\Omega - \omega) + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} u^{2k} S_k(\Omega - u) \Xi(u; \omega) du \right], \quad (15)$$

где

$$S_k(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{kk}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau, \quad \Xi(\Omega; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{y_\omega}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

— соответственно спектр мощности флуктуаций  $\alpha_k(t)$  и спектральная плотность (по переменной  $\Omega$ ) флуктуаций выходного сигнала. Полагая здесь  $B_{kk}(\tau) = D_k \delta(\tau)$ , получим решение в диффузионном приближении [8]\*:

\* Для «белых» флуктуаций параметров, как следует из (9),  $\bar{K}(j\omega) = K_0(j\omega)$ , где  $K_0(j\omega)$  — частотная характеристика невозмущенной системы, поскольку мы по-прежнему полагаем  $\alpha_{N-1}(t) \equiv 0$ .

$$\Xi(\Omega; \omega) = \frac{D_k \omega^{2k} |K_0(j\Omega)|^2 |K_0(j\omega)|^2}{1 - D_k p_k}, \quad (16)$$

где

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^{2k} |K_0(j\Omega)|^2 d\Omega, \quad k = \overline{0, N-2},$$

$D_k p_k$  — эффективная мощность флуктуаций параметра  $\alpha_k(t)$ . С помощью обратного фурье-преобразования отсюда легко найти ковариационную функцию  $B_{y_\omega}(\tau)$ . Интегрируя (16) по  $\Omega$ , получим дисперсию флуктуаций выходного сигнала:

$$x_2^\omega \equiv B_{y_\omega}(0) = \frac{p_0 D_k \omega^{2k} |K_0(j\omega)|^2}{1 - D_k p_k}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения (14) для кумулянтной функции

$$\Gamma_4^\omega(\tau) = \langle y_\omega(t), y_\omega(t), y_\omega^*(t-\tau), y_\omega^*(t-\tau) \rangle.$$

Пусть стохастическая система имеет лишь один флуктуирующий параметр, являющийся коэффициентом при нулевой производной в уравнении (1) с функцией корреляции  $B(\tau) = D \delta(\tau)$ . В этом случае уравнение (14) можно представить в виде

$$\Gamma_4^\omega(\tau) = F_\omega(\tau) + D^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau; \theta) \Gamma_4^\omega(\theta) d\theta; \quad (18)$$

здесь интегральное ядро

$$\begin{aligned} \chi(\tau; \theta) = & \int_{-\infty}^{\infty} [g_0^2(u) g_0^2(u-\tau-\theta) + 2g_0(u) g_0(u-\tau) \times \\ & \times g_0(u-\theta) g_0(u-\tau-\theta)] du \end{aligned}$$

определяется невозмущенной функцией Грина системы, а функция

$$F_\omega(\tau) = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau; \theta) [4 |K_0(j\omega)|^2 B_{y_\omega}(\theta) e^{i\omega\theta} + 2B_{y_\omega}^2(\theta)] d\theta \quad (19)$$

— ковариационной функцией выходного сигнала.

Поскольку ядро  $\chi(\tau; \theta)$  зависит в общем случае от двух переменных, решение (18), в отличие от соответствующего уравнения для ковариационной функции, можно записать лишь в виде итерационного ряда:

$$\begin{aligned} \Gamma_4^\omega(\tau) = & F_\omega(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} D^{2s} \int_s \dots \int \chi(\tau; \theta_1) \chi(\theta_1; \theta_2) \dots \\ & \dots \chi(\theta_{s-1}; \theta_s) F_\omega(\theta_s) d\theta_1 \dots d\theta_s. \end{aligned} \quad (20)$$

4. Проанализируем полученные результаты на примере осциллятора с флуктуациями собственной частоты, на входе которого присутствует гармоническое колебание

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + [\Omega^2 + \alpha(t)] y = \Omega^2 e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Флуктуации  $\alpha(t)$  полагаем широкополосными (ширина спектра  $\Pi_\alpha \gg \gg \{h, \Omega\}$ ). Функция Грина  $g_0(\tau)$ , совпадающая со средней функцией Грина в диффузионном приближении, имеет вид

$$g_0(\tau) = \omega_0^{-1} e^{-h\tau} \sin \omega_0 \tau, \quad \omega_0^2 = \Omega^2 - h^2.$$

Используя (17), находим дисперсию выходного сигнала:

$$x_2^\omega = \frac{Dp_0}{1 - Dp_0} |K_0(j\omega)|^2, \quad p_0 = (4h\omega_0^2)^{-1}.$$

Интегральное ядро  $\chi$  для случая осциллятора с добротностью  $Q = \omega_0/2h \gg 1$  имеет вид

$$\chi(0; \theta) = p_0^2 h e^{-2h|\theta|} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \theta \right).$$

При отыскании 4-го кумулянта  $x_4^\omega$  ограничимся первым приближением в (20); считаем также частоту входного воздействия резонансной,  $\omega = \omega_0$ . Тогда для первых четырех кумулянтов огибающей выходного колебания можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_1^{\omega_0} &= \langle y_{\omega_0} \rangle = Q, & x_2^{\omega_0} &= \frac{\gamma}{1 - \gamma} Q^2, \\ x_3^{\omega_0} &= 0, & x_4^{\omega_0} &= \frac{5\gamma^3 Q^4}{1 - \gamma} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где параметр

$$\gamma = Dp_0 = \sigma^2 Q \frac{\omega_0}{\Pi},$$

представляющий собой эффективную мощность параметрического воздействия, определяется добротностью системы  $Q$ , относительной шириной спектра и дисперсией относительных флуктуаций собственной частоты ( $\sigma^2 = \langle a^2 \rangle / \omega_0^4$ ). Отсюда следует, что при  $\gamma \rightarrow 1$  дисперсия и высшие четные кумулянты неограниченно возрастают и система становится неустойчивой в среднеквадратичном. Коэффициент эксцесса, характеризующий форму вероятностного распределения, здесь имеет вид\*

$$\gamma_4 = \frac{x_4}{x_2^2} = 5\gamma \left( 1 - \frac{5}{8}\gamma \right). \quad (23)$$

Малость величины  $\gamma_4$  при  $\gamma \ll 1$  означает близость вероятностного распределения выходного сигнала к гауссову; заметим, однако, что при этом становится малой и относительная дисперсия,  $\frac{x_2}{\langle y \rangle^2} \approx \gamma$ .

5. Рассмотрим в заключение статистические характеристики простой стохастической системы, описываемой дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{dy}{dt} + \langle a \rangle y + \alpha(t)y = x(t). \quad (24)$$

Пусть  $\alpha(t)$  — гауссов процесс с произвольной функцией корреляции  $B_\alpha(\tau)$ . Входное воздействие будем полагать: а) детерминированным б) широкополосным шумом с  $\langle x(t)x(t-\tau) \rangle = D_x \delta(\tau)$ .

\* Не следует забывать, что использование первого приближения в (20) накладывает ограничение на величину  $\gamma$ . Этим обусловлено также то, что из (22) мы не можем определить условие устойчивости стационарного решения по четвертому моменту. Как показывает анализ, выполненный в [15], оно имеет вид  $\gamma < 2/3$ .

Из уравнения (24) следует

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + \langle a \rangle \left\langle y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle = - \left\langle a(t) y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle + \left\langle x(t) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle, \quad (25)$$

где  $\psi(y)$  — произвольная функция выходной переменной. Используя для размыкания смешанных моментов формулу Фуруцу — Новикова, приходим к уравнению эволюции одномоментных статистических характеристик:

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + \langle a \rangle \left\langle y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle = \frac{D(t)}{2} \left\langle y \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\rangle + \left\{ \begin{array}{l} x(t) \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle \\ \frac{D_x}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\rangle \end{array} \right\}. \quad (26)$$

Здесь и ниже верхний член в фигурных скобках соответствует случаю а);  $D(t) = 2 \int_0^t B_a(\tau) d\tau$ . Из (26) вытекает, в частности, уравнение эволюции моментов

$$\frac{d}{dt} \langle y^n(t) \rangle + n \left[ \langle a \rangle - \frac{nD(t)}{2} \right] \langle y^n(t) \rangle = n \left\{ \begin{array}{l} x(t) \langle y^{n-1}(t) \rangle \\ \frac{(n-1)}{2} D_x \langle y^{n-2}(t) \rangle \end{array} \right\}. \quad (27)$$

Соответствующая система уравнений для кумулянтов выходного сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} + 2 \left[ \langle a \rangle - D(t) \right] x_2(t) &= D(t) x_1^2(t) + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ D_x \end{array} \right\}, \\ \frac{dx_n(t)}{dt} + n \left[ \langle a \rangle - \frac{nD(t)}{2} \right] x_n(t) &= \frac{nD(t)}{2} \sum_{s=1}^{n-1} s C_{n-1}^s x_s(t) x_{n-s}(t), \\ n &= 3, 4, \dots; \quad x_1(t) = \langle y(t) \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

Для установившихся значений моментов и кумулянтов отсюда трудно получить (считаем в случае а) входной сигнал единичной функцией  $x(t) = x_0 1(t)$ ) такие выражения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \langle y \rangle &= \frac{x_0}{\langle a \rangle - D/2}, \quad \langle y^n \rangle = \frac{x_0}{\langle a \rangle - nD/2} \langle y^{n-1} \rangle, \\ x_n &= \frac{D}{2} \left( \langle a \rangle - \frac{nD}{2} \right)^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} s C_{n-1}^s x_s x_{n-s} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (29a)$$

где  $D = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t)$  — спектральная плотность параметрического воздействия на нулевой частоте. Заметим, что в данном случае все кумулянты выхода отличны от нуля; отсюда видно также, что кумулянты с номерами  $n > n^* = 2 \langle a \rangle / D$  (как и соответствующие моменты [16, 17]) являются неограниченными при  $t \rightarrow \infty$ .

Коэффициенты асимметрии и эксцесса здесь имеют вид

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{8\gamma(1-\gamma)}}{1 - \frac{3}{2}\gamma}, \quad \gamma_4 = \frac{15\gamma(1-1,1\gamma)}{\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right)(1-2\gamma)}, \quad (30a)$$

где  $\gamma = D / \langle a \rangle$  — эффективная мощность параметрического воздействия.

б) При шумовом входном сигнале имеем такие установившиеся значения кумулянтов выхода:

$$x_{2n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$x_2 = \langle y^2 \rangle = \frac{D_x}{2(\langle a \rangle - D)}, \quad (296)$$

$$x_{2n} = \frac{D}{2} (\langle a \rangle - nD)^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} 2s C_{2n-1}^{2s} x_{2s} x_{2n-2s} \\ (n = 2, 3, \dots).$$

В этом случае стационарное вероятностное распределение является симметричным, поскольку нечетные кумулянты равны нулю. Соответствующий (296) коэффициент эксцесса и шестой кумулянтный коэффициент представляют собой

$$\gamma_4 = \frac{3\gamma}{1-2\gamma}, \quad \gamma_6 = \frac{x_6}{x_2^3} = \frac{20\gamma}{1-3\gamma} \gamma_4. \quad (306)$$

Отсюда видно, что как в случае а), так и в случае б) высшие кумулянты растут с увеличением  $\gamma$  быстрее, чем дисперсия.

Приведем также выражения для стационарной плотности вероятностей выходного сигнала, которые нетрудно найти из уравнения (26):

$$а) \quad W(y) = \left(\frac{2x_0}{D}\right)^{2/\gamma} \Gamma^{-1}\left(\frac{2}{\gamma}\right) \frac{\exp\left(-\frac{2x_0}{Dy}\right)}{y^{1+2/\gamma}} \quad (y > 0); \quad (31а)$$

$$б) \quad W(y) = \frac{B^{-1}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\gamma}\right)}{\Delta \left(1 + \frac{y^2}{\Delta^2}\right)^{1/2+1/\gamma}}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{D_x}{D}}. \quad (31б)$$

Здесь  $\Gamma$  и  $B$  — соответственно гамма- и бета-функции. Таким образом, в обоих случаях вероятностное распределение имеет один и тот же степенной закон спада «крыльев», причем показатель степени уменьшается с ростом эффективной мощности флуктуаций параметра  $\gamma$ . Осуществив в (31) предельный переход при  $D \rightarrow 0$ , мы приходим, как и следовало ожидать, к  $\delta$ -функции в случае а) и к гауссову распределению в случае б):

$$W(y)|_{D=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi D_x / \langle a \rangle}} \exp\left(-\frac{y^2}{D_x / \langle a \rangle}\right).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969.
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, вып. 4, 499 (1973).
5. R. E. Collin, Radio Sci., 6, № 11, 991 (1971).
6. A. Brissaud and U. Frish, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
7. Ю. И. Овчинников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 725 (1971).
8. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 222 (1975).



9. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).
10. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 71 (1976).
11. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
12. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, № 5, (11), 1919 (1964).
13. О. В. Музычук, Теоретическая и математическая физика, 28, № 3, 371 (1976).
14. М. Дж. Кендалл, А. Стюарт, Теория распределений, изд. Наука, М., 1966.
15. О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
16. T. K. Caughey and J. K. Dienes, J. Math. Phys., 41, 300 (1962).
17. Г. Н. Бочков, О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 493 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
25 мая 1976 г.

## MOMENT AND CUMULANT FUNCTIONS OF STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS

*A. N. Malakhov, O. V. Muzychuk*

Closed equations of the diffusion approximation are derived for moment and cumulant functions of the output signal of the general-type stochastic linear system with Gaussian parameter fluctuations. The solution of these equations for the 2-nd and 4-th order cumulant functions has been considered. As an example, the first four cumulants of output signal of the harmonic oscillator with the frequency fluctuations as well as cumulants of the stochastic system described by the 1-st order equation are found.

---

УДК 538.56 : 519.25

## К СТАТИСТИКЕ ОБОБЩЕННЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ СИГНАЛОВ

А. А. Дубков, А. Н. Малахов

Изучаются статистические свойства обобщенных телеграфных случайных процессов. Рассмотрение проводится на языке кумулянтных функций и их многократных фурье-преобразований (полиспектров). Отмечаются специфические особенности найденных статистических характеристик, выделяющие рассматриваемые сигналы из всего многообразия негауссовых случайных процессов.

1. При изучении статистических явлений, встречающихся в радиопроцессах, оптике, радиотехнике и т. д., флуктуации исходных физических величин иногда описывают телеграфной моделью, в которой случайный процесс скачком меняет свои значения на статистически независимые в случайные моменты времени (см., например, [1]). Подобный выбор не случаен и объясняется тем, что процессы телеграфного типа, так же, как гауссовы и пуассоновские, можно задать исчерпывающим образом. Кроме того, указанная модель позволяет, фиксируя спектральные характеристики флуктуаций, выяснить влияние их вероятностных свойств на протекание изучаемого статистического явления.

В настоящей работе определяются кумулянтные функции и соответствующие им спектры высших порядков двух типов обобщенных телеграфных случайных сигналов. Отмечаются специфические свойства найденных статистических характеристик.

2. Известно, что случайный процесс  $x(t)$  полностью описывается своим характеристическим функционалом

$$\Theta_t [u(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t x(\tau) u(\tau) d\tau \right\} \right\rangle \quad (1)$$

или бесконечным набором кумулянтных функций  $x_n(t_1, \dots, t_n)$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ). Для рассматриваемого далее обобщенного телеграфного сигнала, скачком меняющего в случайные моменты времени свои значения на статистически независимые, легче определить именно  $x_n(t_1, \dots, t_n)^*$ . Указанный случайный процесс можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta_{k, n(0, t)},$$

где  $x_k$  — принимаемые значения, а  $n(0, t)$  — число перескоков на интервале  $[0, t]$ . Будем предполагать далее, что все значения  $x_k$  распределены одинаково с плотностью вероятности  $W(x)$  и статистически не зависят от числа перескоков  $n(0, t)$ . Воспользовавшись определением и свойствами введенных в [3] кумулянтных скобок, после несложных, но довольно громоздких вычислений находим

\* Заметим, что сигнал подобного рода можно получить из непрерывного случайного процесса с помощью схемы дискретизации [2].

$$\begin{aligned}
 x_2(t_1, t_2) &= \langle x(t_1), x(t_2) \rangle = x_2 P_0(t_1, t_2) \quad (t_1 \leq t_2), \\
 x_3(t_1, t_2, t_3) &= x_3 P_0(\min t_i, \max t_i), \\
 x_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= x_4 P_0(t_1, t_4) + x_2^2 [P_{00}(t_1, t_2; t_3, t_4) + \\
 &+ 2P_0(t_1, t_4) - P_0(t_1, t_2)P_0(t_3, t_4) - P_0(t_1, t_3)P_0(t_2, t_4) - \\
 &- P_0(t_1, t_4)P_0(t_2, t_3)] \quad (t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $x_n$  — кумулянт  $n$ -го порядка одномоментного вероятностного распределения, совпадающего с плотностью вероятности принимаемых значений,  $P_{0...0}(t_1, t'_1; \dots; t_m, t'_m)$  — вероятность того, что на неперекрывающихся интервалах  $[t_1, t'_1], \dots, [t_m, t'_m]$  процесс не меняет своего значения.

Как следует из соотношений (2), в случае нормальности одномерного распределения  $W(x)$  ( $x_n = 0$  при  $n \geq 3$ ) обобщенный телеграфный сигнал все равно остается негауссовым, но симметризуется, так как нечетные кумулянтные функции  $x_{2n+1}(t_1, \dots, t_{2n+1})$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) обращаются в нуль.

Рассмотрим далее две практически наиболее важные и часто встречающиеся разновидности обобщенных телеграфных случайных процессов.

3. Как видно из (2), телеграфный сигнал является стационарным, если вероятность  $P_{0...0}(t_1, t'_1; \dots; t_m, t'_m)$  определяется лишь длиной интервалов  $[t_1, t'_1], \dots, [t_m, t'_m]$ :  $P_{0...0}(t_1, t'_1; \dots; t_m, t'_m) = P_{0...0}(t'_1 - t_1; \dots; t'_m - t_m)$ .

Полагая далее это условие выполненным, предположим еще, что перескоки на неперекрывающихся интервалах статистически независимы, т. е.

$$P_0(t_3 - t_1) = P_{00}(t_2 - t_1; t_3 - t_2) = P_0(t_3 - t_2)P_0(t_2 - t_1) \tag{3}$$

$$(t_1 \leq t_2 \leq t_3).$$

Решая функциональное уравнение (3) и учитывая, что  $P_0(0) = 1$ ,  $P_0(\infty) = 0$ , находим

$$P_0(t) = e^{-\nu t} \quad (\nu > 0), \tag{4}$$

где  $\nu^{-1}$  имеет смысл некоторого среднего промежутка времени, на котором случайный процесс сохраняет свое значение. Подставляя (4) в (2), получаем\*

$$\begin{aligned}
 B[\tau] &\equiv x_2(0, \tau) = x_2 e^{-\nu |\tau|}, \\
 x_3(0, \tau_2, \tau_3) &= x_3 \exp \{ -\nu [\max \{0, \tau_2, \tau_3\} - \min \{0, \tau_2, \tau_3\}] \}, \\
 x_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= e^{-\nu \tau_4} \{ x_4 + 2x_2^2 [1 - e^{-\nu(\tau_3 - \tau_2)}] \},
 \end{aligned} \tag{5}$$

\* В этом случае телеграфный сигнал является марковским, и для его характеристического функционала (1) можно получить линейное интегральное уравнение [1]

$$\begin{aligned}
 \Theta_t[u(\tau)] &= e^{-\nu t} \left\langle \exp \left\{ i x \int_0^t u(\xi) d\xi \right\} \right\rangle + \\
 &+ \nu \int_0^t e^{-\nu(t-t_1)} \left\langle \exp \left\{ i x \int_{t_1}^t u(\xi) d\xi \right\} \right\rangle \Theta_{t_1}[u(\tau)] dt_1,
 \end{aligned}$$

которое в нетривиальных ситуациях решить не удается.

$$x_5(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = e^{-\nu\tau_5} \{x_5 + 2x_3x_2 \times \\ \times [4 - 2e^{-\nu(\tau_4 - \tau_2)} - e^{-\nu(\tau_4 - \tau_3)} - e^{-\nu(\tau_5 - \tau_2)}]\} \\ (0 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \tau_4 \leq \tau_5).$$

Из соотношений (5) вытекают два специфических свойства кумулянтных функций рассматриваемого случайного процесса\*:

$$|x_3(0, \tau_2, \tau_3)| \leq |x_3|, \\ 1) |x_4(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4)| \leq |x_4| + 2x_2^2, \\ |x_5(0, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)| \leq |x_5| + 8|x_3|x_2; \\ 2) x_n(0, -\tau_2, \dots, -\tau_n) = x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Последнее равенство показывает, что при обращении обобщенного телеграфного сигнала во времени статистика его полностью сохраняется.

Эта особенность приводит к тому, что спектры высших порядков (полиспектры)

$$S_n(\omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) \times \\ \times \exp\left\{-i \sum_{k=2}^n \omega_k \tau_k\right\} d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (6)$$

в этом случае (обладая общим свойством симметрии по всем аргументам) являются чисто действительными. Таким образом, наличие мнимой части у спектра  $S_n(\omega_2, \dots, \omega_n)$  свидетельствует о необратимости в статистическом смысле соответствующего случайного процесса.

После подстановки (5) в (6) и несложных вычислений находим

$$S(\omega) \equiv S_2(\omega) = \frac{x_2}{\pi} \operatorname{Re} C(i\omega) = \frac{x_2}{\pi} \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}, \\ S_3(\omega_2, \omega_3) = \frac{x_3}{2\pi^2} \operatorname{Re} \{ [C(i(\omega_2 + \omega_3))C(i\omega_3)]_s + C(i\omega_2)C^*(i\omega_3) \} = \\ = \frac{x_3}{2\pi^2} \frac{\nu^2(3\nu^2 + \omega_2^2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3^2)}{(\nu^2 + \omega_2^2)(\nu^2 + \omega_3^2)[\nu^2 + (\omega_2 + \omega_3)^2]}, \quad (7)$$

$$S_4(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{x_4}{4\pi^3} \operatorname{Re} \{ C(i(\omega_2 + \omega_3))C(i\omega_3) \times \\ \times [C(i(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)) + C^*(i\omega_4)]_s + \frac{x_2^2}{4\pi^3} \nu \operatorname{Re} \left\{ C(i(\omega_2 + \omega_3)) \times \right. \\ \left. \times C\left(i \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}\right) C(i\omega_3) [C(i(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)) + C^*(i\omega_4)] \right\}_s \},$$

\* Для доказательства свойства 2) с помощью соотношений (5) достаточно учесть, что в силу стационарности рассматриваемого процесса

$$x_n(0, -\tau_2, \dots, -\tau_{n-1}, -\tau_n) = x_n(0, \tau_n - \tau_{n-1}, \dots, \tau_n - \tau_2, \tau_n),$$

где уже  $0 \leq \tau_n - \tau_{n-1} \leq \dots \leq \tau_n - \tau_2 \leq \tau_n$ .

где  $C(i\omega) = \int_0^{\infty} P_0(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 1/\nu + i\omega$ , а  $\{\dots\}_s$  означает симметризацию по всем аргументам:  $\{\Psi(1, 2)\}_s = \Psi(1, 2) + \Psi(2, 1)$ . Как видно из (7), рассматриваемый обобщенный телеграфный сигнал является процессом низкочастотного типа.

4. Другим практически важным частным случаем обобщенного телеграфного сигнала является случайный процесс с детерминированным тактовым интервалом, сохраняющий свое значение в течение заданного промежутка времени (такта)  $\vartheta$ , а затем скачком меняющий его на статистически независимое\*. Данный сигнал удобно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \Pi_{\vartheta}(t - t_0 - k\vartheta), \quad (8)$$

где  $\Pi_{\vartheta}(\tau) = 1(\tau + \vartheta) - 1(\tau)$ ,  $1(\tau)$  — единичная функция,  $0 \leq t_0 \leq \vartheta$ . Полагая далее вероятностные распределения случайных значений  $x_k$  процесса  $x(t)$  одинаковыми и применяя аппарат кумулянтных скобок [3], легко прийти к следующему выражению для кумулянтной функции  $n$ -го порядка рассматриваемого сигнала:

$$x_n(t_1, \dots, t_n) = x_n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\vartheta}(t_1 - t_0 - k\vartheta) \times \dots \times \Pi_{\vartheta}(t_n - t_0 - k\vartheta). \quad (9)$$

Здесь  $x_n$  —  $n$ -ый кумулянт одномоментного распределения, совпадающего в данном случае с плотностью вероятности принимаемых значений.

Как видно из (9), при одновременной замене  $t_i$  на  $t_i + \vartheta$  ( $i = 1, n$ ) кумулянтные функции  $x(t)$  не изменяются. Это говорит о том, что обобщенный телеграфный сигнал с детерминированным тактовым интервалом относится к классу так называемых периодически нестационарных случайных процессов.

Определим полиспектры негауссова сигнала второй группы [4] как

$$S_n(\omega_2, \dots, \omega_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \left\langle C_T(i\omega_2), \dots, C_T(i\omega_n), C_T^* \left( i \sum_{k=2}^n \omega_k \right) \right\rangle. \quad (10)$$

При  $n = 2$  и  $\langle x(t) \rangle = 0$  (10) переходит в обычную формулу для спектральной плотности мощности [2]:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \langle |C_T(i\omega)|^2 \rangle,$$

где  $C_T(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt$ . Найденные с помощью (10) функции

$S_n(\omega_2, \dots, \omega_n)$ , с другой стороны, можно рассматривать в качестве полиспектров некоторого стационарного процесса, эквивалентного (по спектру) исходному нестационарному сигналу. Опираясь на определение (10), не составляет труда показать, что кумулянтные функции указанного стационарного процесса

$$\tilde{x}_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega_2, \dots, \omega_n) \exp \left\{ i \sum_{k=2}^n \omega_k \tau_k \right\} d\omega_2 \dots d\omega_n$$

получаются из аналогичных характеристик нестационарного сигнала

\* Указанный сигнал иногда называют шаговой моделью случайного процесса или процессом периодической выборки.

стандартной процедурой усреднения по времени (как и для корреляционной функции ( $n = 2$ ) [2, 4]):

$$\tilde{x}_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_n(t, t + \tau_2, \dots, t + \tau_n) dt. \quad (11)$$

Как следует из (11), для стационарных  $x(t)$

$$\tilde{x}_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Подставим теперь (9) в (11) и определим кумулянтные функции стационарного процесса, соответствующего обобщенному телеграфному сигналу с детерминированным тактовым интервалом\*. В результате имеем

$$x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = \begin{cases} x_n \left[ 1 - \frac{\max \{0, \tau_i\} - \min \{0, \tau_i\}}{\vartheta} \right], \\ \text{если } \max \{0, \tau_i\} - \min \{0, \tau_i\} \leq \vartheta; \\ 0, \text{ если } \max \{0, \tau_i\} - \min \{0, \tau_i\} > \vartheta, \end{cases} \quad (12)$$

и, в частности, ковариационная функция

$$B[\tau] \equiv x_2(0, \tau) = \begin{cases} x_2 \left( 1 - \frac{|\tau|}{\vartheta} \right), & |\tau| \leq \vartheta; \\ 0, & |\tau| > \vartheta. \end{cases}$$

Заметим, что в частном случае  $x_n = n_0 \vartheta \langle a^n \rangle$  подобными кумулянтными функциями описывается пуассоновский случайный процесс

$$y(t) = \sum_i a_i F(t - t_i)$$

с прямоугольной формой порождающего импульса  $F(t) = \Pi_{\vartheta}(t)$ . Из соотношения (12) вытекают четыре специфических свойства кумулянтных функций:

- 1)  $|x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n)| \leq |x_n(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n)| = |x_n|$ , откуда следует, что телеграфный сигнал является нормальным тогда и только тогда, когда является гауссовым его одномоментное вероятностное распределение ( $x_n = 0$  при  $n \geq 3$ );
- 2) функция  $x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n)$  знакопостоянна, причем  $\text{sgn } x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = \text{sgn } x_n$ ;
- 3) все времена статистической зависимости одинаковы и равны  $\vartheta$ ;
- 4)  $x_n(0, -\tau_2, \dots, -\tau_n) = x_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , т. е. процесс обратим во времени в статистическом смысле.

Подставляя (12) в (6), определяем полиспектр  $n$ -го порядка обобщенного телеграфного сигнала

$$S_n(\omega_2, \dots, \omega_n) = x_n \left( \frac{\vartheta}{2\pi} \right)^{n-1} \prod_{j=2}^n \text{sinc} \left( \frac{\omega_j \vartheta}{2} \right) \text{sinc} \left( \sum_{k=2}^n \frac{\omega_k \vartheta}{2} \right), \quad (13)$$

где  $\text{sinc } x = \sin x/x$ . Обычная спектральная плотность мощности получается из (13) при  $n = 2$ :

$$S(\omega) \equiv S_2(\omega) = \frac{x_2 \vartheta}{2\pi} \text{sinc}^2 \frac{\omega \vartheta}{2}. \quad (14)$$

\* Легко проверить, что этот стационарный процесс уже не является телеграфным.

Из (13) и (14) по-прежнему следует, что в отличие от вероятностных характеристик телеграфный случайный процесс имеет вполне определенную низкочастотную спектральную структуру.

5. В качестве примера рассмотрим часто встречающееся в прикладных задачах квадратичное преобразование

$$y(t) = ax^2(t),$$

которое хорошо изучено лишь для гауссовой статистики  $x(t)$ . Определим ковариационную функцию случайного процесса  $y(t)$ , если  $x(t)$  является обобщенным телеграфным сигналом.

Полагая для простоты  $\langle x(t) \rangle = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} B_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1), y(t_2) \rangle = a^2 \langle x^2(t_1), x^2(t_2) \rangle = \\ &= a^2 [x_4(t_1, t_1, t_2, t_2) + 2x_2^2(t_1, t_2)] \quad (t_1 \leq t_2). \end{aligned}$$

Воспользовавшись общими соотношениями для кумулянтных функций (2), находим окончательно:

$$B_y(t_1, t_2) = a^2 (x_4 + 2x_2^2) P_0(t_1, t_2) \quad (t_1 \leq t_2). \quad (15)$$

Этот результат легко получить и из других соображений. Поскольку статистика перескоков у процесса  $y(t)$  та же самая, что и у  $x(t)$ , то согласно (2)

$$B_y(t_1, t_2) = \langle y, y \rangle P_0(t_1, t_2). \quad (16)$$

Раскрывая кумулянтную скобку в (16), приходим к (15).

Таким образом, в отличие от гауссова случая, при нелинейном безынерционном преобразовании спектральные свойства обобщенного телеграфного сигнала не изменяются.

Авторы благодарны Б. Р. Левину и А. И. Саичеву за полезные критические замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Brissaud and U. Frisch, *J. Math. Phys.*, **15**, № 5, 524 (1974).
2. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. I, изд. Сов. радио, М., 1969.
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1736 (1974); **19**, № 1, 71 (1976).
4. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
2 июля 1976 г.,  
после доработки  
9 июня 1977 г.

#### THE STATISTICS OF GENERALIZED TELEGRAPH SIGNALS

A. A. Dubkov, A. N. Malakhov

The statistical properties of generalized telegraph random processes are studied. The consideration is made by cumulant functions and their multiple Fourier transforms (polyspectra). The specific features of the found statistical characteristics which separate the considered signals out of the whole variety of non-Gaussian random processes are pointed out.

УДК 535.2

## ЭФФЕКТ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЛИНЗЫ С УЧЕТОМ ДИФРАКЦИИ

Л. Х. Ингель, Н. Р. Рубаха

В приближении волновой оптики рассмотрена фокусировка излучения анизотропного источника в гравитационном поле.

Поля тяготения, искривляя в соответствии с общей теорией относительности световые лучи, являются своеобразными линзами, наблюдаемое проявление которых представляет большой интерес. Изучение эффекта гравитационной линзы до сих пор, как правило, ограничивалось рассмотрением изотропных источников и приближением геометрической оптики (см., например, [1-7] и цитируемую там литературу). В [4, 5] была показана важность учета дифракции в данной задаче. Но работа [6] ограничивается исследованием поля в окрестности оптической оси (где роль дифракции наиболее существенна). В расчеты [4] вкралась, как нам представляется, ошибка (см. ниже), заметная, впрочем, только вне окрестностей оптической оси. Кроме того, указанные работы ограничиваются рассмотрением случая изотропного, «бесконечно удаленного» ( $l \gg z$ , где  $l$  — расстояние от источника до линзы,  $z$  — расстояние от линзы до наблюдателя) источника излучения. В [6, 7] обсуждается возможность использования гравитационной линзы в качестве антенны для сверхдальней связи. В настоящей работе рассмотрена фокусировка излучения анизотропного источника в приближении волновой оптики.

Так же, как и в [4, 5], пренебрегаем конечностью размеров тяготеющей массы и источника (хотя задача допускает некоторые обобщения). Воспользуемся цилиндрическими координатами  $z, \rho, \varphi$ ; ось  $z$  совпадает с направлением источник — центр линзы. Последний находится в начале отсчета  $\rho = 0, z = 0$ ; координаты источника:  $z = -l, \rho = 0$ .

Коснемся сначала приближения геометрической оптики (случай анизотропных источников ранее не рассматривались и в этом приближении). В случае изотропного источника наблюдатель, как известно [1, 2], видит два изображения источника; общий выигрыш в принимаемой мощности в точке с координатами  $\rho, z$

$$K_{из} = K_1 + K_2 = \frac{z}{\rho} \sqrt{\frac{2r_g}{Ll}} \frac{1 + \frac{L\rho^2}{4r_g z^2}}{\sqrt{1 + \frac{L\rho^2}{8r_g z^2}}}, \quad (1)$$

где  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса гравитационной линзы,  $c$  — скорость света,  $L = \frac{lz}{l+z}$  (грубо говоря,  $L$  — меньшее из двух расстояний  $l$  и  $z$  в системе),

$$K_1 = \frac{K_{из} + 1}{2}, \quad K_2 = \frac{K_{из} - 1}{2}. \quad (2)$$



Два луча, попадающих к наблюдателю, выходят из источника под углами к оси (с точностью до знака)

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho}{2(l+z)} \left( \sqrt{1 + \frac{8r_g z^2}{L\rho^2}} + 1 \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho}{2(l+z)} \left( \sqrt{1 + \frac{8r_g z^2}{L\rho^2}} - 1 \right). \quad (3)$$

На оптическую ось ( $\rho = 0$ ), где усиление максимально, попадают лучи с  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2r_g L}}{l} \equiv \varepsilon_0$ . Можно ввести эффективный радиус кольцевой апертуры линзы

$$A = \varepsilon_0 l = \sqrt{2r_g L}. \quad (4)$$

В случае анизотропного источника (для простоты мы ограничиваемся рассмотрением источника, излучающего симметрично относительно оси  $z$ ) ситуация усложняется. Пусть при отсутствии линзы к наблюдателю попадает луч, испущенный под углом  $\varepsilon^* = \frac{\rho}{l+z}$  к оси  $z$ . При наличии гравитационной линзы к тому же наблюдателю попадут два других луча, испущенных под углами  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (см. (3)). Выражение (1) для выигрыша в принимаемой мощности нетрудно модифицировать для данного случая:

$$K = K_1 \frac{J(\varepsilon_1)}{J(\varepsilon^*)} + K_2 \frac{J(\varepsilon_2)}{J(\varepsilon^*)}, \quad (5)$$

где  $J(\varepsilon)$  — интенсивность излучения источника в направлении, образующем угол  $\varepsilon$  с оптической осью.

Вблизи оси  $z$ , как известно,  $K_1$  и  $K_2$  стремятся к бесконечности. Следовательно, как и в случае изотропного источника, в приближении геометрической оптики получаем бесконечно большой выигрыш в принимаемой мощности для наблюдателя, находящегося на оптической оси (если только  $J(\varepsilon)$  везде отлично от нуля). В частном случае, когда диаграмма направленности источника достаточно широка (пучок шире эффективного радиуса кольцевой апертуры линзы  $A$ ), очевидно,  $J(\varepsilon_1) \approx J(\varepsilon_2) \approx J(\varepsilon^*)$  и результат (5) мало отличается от случая изотропного источника.

Для учета дифракции воспользуемся принципом Гюйгенса в виде [8]

$$E_n = \frac{k}{2\pi i} \int E_f \frac{e^{ikR}}{R} df, \quad (6)$$

где  $E_n$  — напряженность поля в монохроматической волне с волновым числом  $k$  (без множителя  $e^{i\omega t}$ , определяющего зависимость от времени) в точке наблюдения ( $z, \rho$ ). Интегрирование производится по волновой поверхности, достаточно удаленной от точки наблюдения,  $R$  — расстояние от этой точки до элемента поверхности  $df$ ,  $E_f$  — поле на волновой поверхности.

Пусть анизотропия источника описывается законом Гаусса, т. е. на линзу попадает пучок излучения, в котором

$$E = E_0 e^{-b\rho^2},$$

где  $E_0$  — константа,  $b = b_1 + ib_2$ ,  $b_1, b_2$  — также константы. Постоянная  $b$  характеризует степень анизотропии источника; величина

$$a = 1/\sqrt{b_1} \quad (7)$$

имеет смысл ширины пучка до прохождения линзы.

С учетом фазовой добавки, связанной с действием гравитационной линзы [4], уравнение волновой поверхности будет

$$z' = r_g \ln \frac{\rho'^2}{2r_g l} + \frac{b_2 \rho'^2}{k}. \quad (8)$$

Далее, преобразуя (6) аналогично [4], получаем (с точностью до несущественного фазового множителя)

$$E_n(\rho, z) \sim \frac{E_0 k}{z} \int_0^\infty \exp \left[ \left( \frac{ik}{2z} - b \right) \rho'^2 \right] J_0 \left( \frac{k \rho \rho'}{z} \right) \rho'^{1-2ikr_g} d\rho'. \quad (9)$$

Соответствующее выражение [4] получается из (8) как частный случай при  $b = 0$  (бесконечно удаленный изотропный источник).

Проинтегрировав [9], получаем

$$E_n(\rho, z) \sim \frac{E_0 k}{z} \frac{\Gamma(1 - ikr_g)}{2(b - ik/2z)^{1-ikr_g}} {}_1F_1 \left( 1 - ikr_g; 1; -\frac{k^2 \rho^2}{4z^2(b - ik/2z)} \right), \quad (10)$$

где  ${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Если бы линза отсутствовала, то поле  $E_n(\rho, z)$  описывалось бы выражением (10) с  $r_g = 0$ . Отсюда для выигрыша в принимаемой мощности имеем

$$K = \left| \frac{\Gamma(1 - ikr_g) \left( b - \frac{ik}{2z} \right)^{ikr_g} {}_1F_1 \left( 1 - ikr_g; 1; -\frac{k^2 \rho^2}{4z^2(b - ik/2z)} \right)}{\exp \left[ -\frac{k^2 \rho^2}{4z^2(b - ik/2z)} \right]} \right|^2 =$$

$$= \frac{\pi k r_g}{\text{sh } \pi k r_g} \exp \left( 2 k r_g \arctg \frac{k/2 z - b_2}{b_1} \right) \left| {}_1F_1 \left( ikr_g; 1; \frac{k^2 \rho^2}{4z^2(b - ik/2z)} \right) \right|^2 \quad (11)$$

(использованы формула Куммера и другие свойства  ${}_1F_1$  и гамма-функции [9]).

При  $b = 0$  выражение (11) переходит в соответствующую формулу [4] (но аргумент функции  ${}_1F_1$  в [4] в четыре раза меньше, чем у нас; это отличие несущественно в окрестностях оптической оси).

На оси пучка ( $\rho = 0$ ) получаем

$$K = \frac{\pi k r_g}{\text{sh } \pi k r_g} \exp \left( 2 k r_g \arctg \frac{k/2 z - b_2}{b_1} \right). \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, усиление возрастает с ростом ширины падающего пучка (с уменьшением  $b_1$ ). Для достаточно широкого пучка

$$\left( a \gg \left| \frac{k}{2z} - b_2 \right|^{-1/2} \right) \quad (13)$$

выражение (12) перестает зависеть от параметров пучка, приближаясь к соответствующему выражению для случая изотропного источника (при  $kr_g \gg 1$   $K = 2 \pi k r_g$ ).

Выигрыш в принимаемой мощности возрастает с уменьшением  $z$ . Это объясняется следующим образом. Эффективный радиус кольцевой апертуры  $A$  является в гравитационной линзе переменной величиной, будучи зависимым от положения наблюдателя. Величина  $A$  меняется от нуля (при  $z = 0$ ) до  $\sqrt{2r_g l}$  (при  $z \gg l$ ). Поэтому с приближением наблюдателя к линзе апертура уменьшается, результат приближается

к соответствующему результату для случая изотропного источника. При достаточно больших  $z$  вместе с апертурой и усиление на оси перестает зависеть от  $z$ . Относительно роли параметра  $b_2$  отметим, прежде всего, что нас интересует только наиболее реальный случай,  $b_2 < 0$  (фокусировка расходящегося пучка). Из (12) видно, что с ростом расходимости линзовый эффект усиливается. Этот результат имеет аналог в геометрической оптике, где сильно расходящиеся пучки соответствуют близким к линзе источникам, для которых мала апертура (4) и, следовательно, линзовый эффект приближается к соответствующему эффекту для случая изотропного источника. Если пользоваться гравитационной линзой как передающей антенной, то оптимальная ширина пучка определяется (13).

Пусть  $r_g = 3 \cdot 10^5$  см (звезда с параметрами Солнца),  $k = 10^4$  см<sup>-1</sup>,  $b_1 = 5 \cdot 10^{-25}$  см<sup>-2</sup> (что соответствует ширине пучка до прохождения линзы  $a \sim 1,5 \cdot 10^{12}$  см),  $b_2 = -10^{-15}$  см<sup>-2</sup>. Тогда на расстоянии  $z = 100$  пс =  $3 \cdot 10^{20}$  см на оси пучка из (12) получаем  $K = 10^9$ .

Гравитационная линза может сочетаться с системой межзвездной связи, предложенной, например, в [10]. В частности, дальность действия системы «а» [10], как явствует из приведенной оценки, может, в принципе, быть увеличена при этом на 4–5 порядков.

Отметим, что величина  $2\pi kr_g$  не является, вообще говоря, максимально возможным значением усиления гравитационной линзы, как это принято считать со времени работы [4]. Существуют линзы более совершенные, чем шварцшильдова (точечная) [7, 11, 3]. Можно показать, например, что при прохождении излучения сквозь прозрачный однородный массивный шар, усиление может достигать порядка  $(kr_g)^2$ .

Авторы искренне признательны рецензенту, замечания и исправления которого были очень полезны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Liebes, *Phys. Rev.*, **133**, В 835 (1964).
2. S. Refsdal, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **128**, 295 (1964).
3. Л. Х. Ингель, *Астрон. ж.*, **52**, 727 (1975).
4. А. В. Бялко, *Астрон. ж.*, **46**, 998 (1969).
5. P. V. Bliokh and A. A. Minakov, *Astrophys. Space Sci.*, **31**, L 7 (1975).
6. Л. Х. Ингель, *Астрон. вестник*, **9**, 131 (1975).
7. Л. Х. Ингель, *Астрон. ж.*, **50**, 1331 (1973).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, изд. Наука, М., 1967.
9. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. Наука, М., 1971.
10. Р. Шварц, К. Таунс, в сб. *Межзвездная связь*, изд. Мир, М., 1965
11. E. E. Clark, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **158**, 233 (1972).

Государственный астрономический институт  
им. Штернберга

Поступила в редакцию  
15 мая 1975 г.,  
после переработки  
24 июня 1977 г.

#### THE GRAVITATIONAL LENS EFFECT THE DIFFRACTION BEING TAKEN INTO ACCOUNT

*L. Kh. Ingel', N. R. Rubakha*

The focusing of the radiation of an anisotropic source in the gravitational field is considered in the wave optics approximation.

УДК 538 574.6

## К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ ЦИЛИНДРАХ

Г. Ш. Кеванишвили, З. И. Сикмашвили, О. П. Цагарейшвили

Изложено строгое решение задачи дифракции плоской  $E$ - и  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на двух параллельных цилиндрах из идеального диэлектрика. Представлены численные расчеты основных характеристик поля, некоторые из которых сравниваются с экспериментальными результатами работ [2, 9].

### ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции электромагнитных волн на двух идентичных, бесконечно длинных, идеально проводящих и параллельно расположенных цилиндрах круглого сечения рассматривалась многими авторами [1–6]. Ниже излагается краткий обзор некоторых работ.

Из ранних исследований заслуживает внимания работа [2], в которой наряду с теоретическим решением задачи приведены экспериментальные данные. В этой работе сделан строгий подход к решению задачи, однако некоторые численные расчеты проведены на основе приближенного решения. Можно показать, однако, что (см. ниже) приведенное в [2] решение справедливо только при  $ka \ll 1$  и  $kd \gg 1$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $a$  — радиус цилиндра,  $d$  — расстояние между осями цилиндров). Это подтверждается также расхождением теоретических результатов с экспериментальными не только количественно, но и качественно (см., например, рис. 9, 10 и 11 на стр. 672 работы [2]).

В работе [3] в результате применения теоремы сложения для цилиндрических функций задача сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов мультипольного спектра. Построены характеристики рассеяния системы для точек дальней зоны при конкретных значениях параметров  $a/\lambda$  и  $d/\lambda$ .

В работе [4] задача решается методом ортогонализации, развитым Фельдом [7] для решения интегральных уравнений относительно токов, возбуждаемых на поверхностях дифрагирующих тел. Численный материал, представленный в работе [4], также содержит информацию о характеристике рассеяния пары цилиндров при различных  $a/\lambda$ ,  $d/\lambda$  и угле падения первичной волны.

Решение задачи методом эквивалентных схем [8] приведено в работе [5]. Этот метод является эффективным при очень больших  $kd$ . Именно для такого случая представлены графики зависимости характеристики рассеяния от угла падения первичной (плоской) волны.

Численное решение задачи предложено в работе [6]. Исходное (одно) функциональное уравнение (граничное условие) распадается на систему из  $N$  алгебраических уравнений ( $N$  — число локальных граничных условий) с таким же количеством неизвестных коэффициентов мультипольных спектров. Указанная система затем решается на ЭВМ. Надежность такого подхода к решению задачи подкрепляется сравне-

нием расчетных данных с экспериментальными результатами работы [9].

В данной работе методом, аналогичным [3], дается решение задачи дифракции плоских  $E$ - и  $H$ -поляризованных электромагнитных волн на двух цилиндрах с бесконечной проводимостью, а также образованных идеальным диэлектриком. Для основных дифракционных характеристик получена новая, отсутствующая в выше приведенных работах, численная информация, часть которой сравнивается с экспериментальными данными [2].

### 1. СЛУЧАЙ $E$ -ПОЛЯРИЗАЦИИ

Расположение цилиндров в прямоугольной ( $XYZ$ ) системе координат показано на рис. 1. Ось  $Z$  направлена параллельно осям цилиндров (т. е. перпендикулярно плоскости рисунка). Начало координат выбирается в середине линии, соединяющей оси цилиндров. Допустим, что со стороны положительных  $X$  на пару цилиндров набегают плоская электромагнитная волна с электрическим вектором, параллельным оси  $Z$ ;  $z$ -компоненту напряженности искомого полного электрического поля можно представить как

$$E_z = \left\{ e^{-ikx} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m [H_m^{(1)}(kr_1) e^{-im\varphi_1} + H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\varphi_2}] \right\} e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

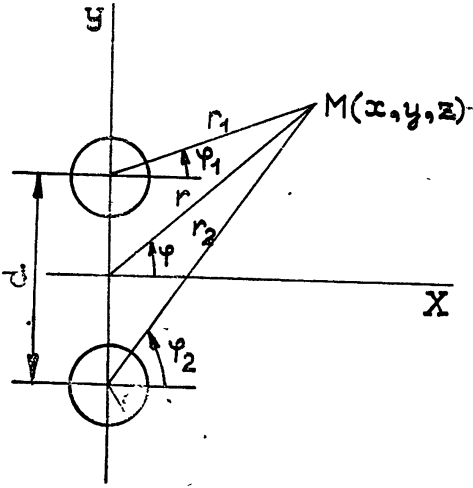


Рис. 1.

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  длина волны,  $A_m$  — неизвестные коэффициенты мультипольного спектра,  $H_m^{(1)}(t)$  — функция Ханкеля первого рода, а геометрический смысл величин  $r_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $r_2$ ,  $\varphi_2$  ясен из рис. 1.

В предположении идеальной проводимости цилиндров граничное условие, которому должны удовлетворять коэффициенты  $A_m$ , имеет вид

$$-\exp(-i\alpha \cos \varphi_1^{(1)}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m [H_m^{(1)}(ka) \exp(-im\varphi_1^{(1)}) + H_m^{(1)}(kr_2^{(1)}) \exp(im\varphi_2^{(1)})] \quad (0 \leq \varphi_1^{(1)} \leq 2\pi), \quad (2)$$

где  $\alpha = ka$ ,  $a$  — радиус цилиндров,  $\varphi_1^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$ ,  $r_2^{(1)}$  — значения  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $r_2$  в произвольно выбранной точке на поверхности верхнего цилиндра. Функциональное уравнение (2) служит для определения последовательности неизвестных  $A_m$ .

Используя теорему сложения для цилиндрических функций

$$H_m^{(1)}(kr_2^{(1)}) \exp(im\varphi_2^{(1)}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{m-s} J_s(\alpha) H_{m-s}^{(1)}(\beta) \exp(im\varphi_1^{(1)}),$$

перепишем (2) в виде

$$-\exp(-i\alpha \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m F_m(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (3)$$

где положено  $\varphi \equiv \varphi_1^{(1)}$ ,  $\beta = kd$ ,  $d$  — расстояние между осями цилиндров,

$$F_m(\varphi) = H_m^{(1)}(\alpha) e^{-im\varphi} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{m-s} J_s(\alpha) H_{m-s}^{(1)}(\beta) e^{is\varphi}. \quad (4)$$

Найдем прежде всего приближенное решение функционального уравнения (3) при  $\alpha \ll 1$  и  $\beta \gg 1$ . Представим (4) в следующей форме:

$$F_m(\varphi) = \{H_m^{(1)}(\alpha) + J_m(\alpha) H_{2m}^{(1)}(\beta)\} e^{-im\varphi} + \sum_{s \neq -m} i^{m-s} J_s(\alpha) H_{m-s}^{(1)}(\beta) e^{is\varphi}. \quad (5)$$

Поскольку справедливы соотношения  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |H_m^{(1)}(\alpha)| = \infty$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_m(\alpha) = 0$ ,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} |H_n^{(1)}(\beta)| = 0$ , то при  $\alpha \ll 1$  и  $\beta \gg 1$  в выражении (5) можно отбросить суммарный член и положить приближенно

$$F_m(\varphi) \approx [H_m^{(1)}(\alpha) + J_m(\alpha) H_{2m}^{(1)}(\beta)] e^{-im\varphi}.$$

Подставляя это выражение в (3) и используя ортогональность функций  $e^{-im\varphi}$  в промежутке  $(0, 2\pi)$ , получаем без труда

$$A_m = - \frac{i^{-m} J_m(\alpha)}{H_m^{(1)}(\alpha) + J_m(\alpha) H_{2m}^{(1)}(\beta)}.$$

Эта формула с точностью до постоянного множителя совпадает с формулой (10) из работы [2].

Таким образом, выражение для рассеянного поля, приведенное в работе [2], как указывалось во введении, достоверно при  $\alpha \ll 1$  и  $\beta \gg 1$ , а при  $\alpha \gtrsim 1$  оно неприменимо.

Для трансформации функционального уравнения (3) в эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений достаточно воспользоваться следующими соотношениями:

$$e^{-i\alpha \cos \varphi} = \sum_m i^{-m} J_m(\alpha) e^{-im\varphi}, \quad \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{mn}.$$

В результате получаем

$$-i^{-n} J_n(\alpha) = A_n H_n^{(1)}(\alpha) + J_n(\alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_{m+n}^{(1)}(\beta) i^{m-n} \quad (6)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Производя подстановку

$$A_m = i^{-m} J_m(\alpha) X_m,$$

где  $X_m$  — новые неизвестные, получаем вместо (6) ключевую систему задачи

$$X_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m Z_{mn} = b_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7)$$

где

$$Z_{mn} = \frac{J_m(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta)}{H_n^{(1)}(\alpha)}, \quad b_n = - \frac{1}{H_n^{(1)}(\alpha)},$$

Поскольку имеют место оценки [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} |Z_{mn}|^2 < \infty,$$

решение системы (7) может быть построено методом усечения (редукции).

Нами было проведено исследование на ЭВМ вопроса о требуемом порядке усечения. Оказалось, что для вычисления величин  $X_m$  с точностью не хуже чем  $10^{-4}$ , необходимо решить усеченную систему порядка  $N \gtrsim 2\alpha$ .

В случае диэлектрических цилиндров, кроме внешнего поля (1), следует учесть также волну внутри цилиндров с волновым числом  $k_1 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ :

$$E_{z1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m J_m(k_1 r) e^{-im\varphi} \quad (0 < r \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (8)$$

где  $B_m$  — неизвестные коэффициенты, а  $\varepsilon > 0$  и  $\mu > 0$  — электрические константы среды. Из краевых условий на поверхностях цилиндров

$$E_z = E_{z1}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial E_{z1}}{\partial r}$$

с применением теоремы сложения для цилиндрических функций приходим к следующей парной системе бесконечных алгебраических уравнений относительно последовательности неизвестных  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\begin{aligned} -i^{-n} J_n(\alpha) &= A_n H_n^{(1)}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-n} A_m J_n(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta) + B_n J_n(\alpha q), \\ -i^{-n} J'_n(\alpha) &= A_n H_n^{(1)'}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-n} A_m J'_n(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta) + B_n J'_n(\alpha q) W, \end{aligned} \quad (9)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\alpha$ ,  $q = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$ ,  $W = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}}$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ ,  $\mu_r = \mu/\mu_0$ .

Функциональные уравнения (9) легко сводятся к системе бесконечных алгебраических уравнений относительно неизвестных — коэффициентов  $A_m$ :

$$-i^{-n} J_n(\alpha) = A_n [H_n^{(1)}(\alpha) + J_n(\alpha q) \Phi_n(\alpha)] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m-n} A_m J_n(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta), \quad (10)$$

где

$$\Phi_n(\alpha) = \frac{2i/\pi\alpha}{J'_n(\alpha) J_n(\alpha q) - W J_n(\alpha) J'_n(\alpha q)}$$

Далее, учитывая, что  $A_m = i^{-m} J_m(\alpha) X_m$ , вместо (10) получаем

$$X_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m G_{mn} = C_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$G_{mn} = \frac{J_m(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta)}{H_n^{(1)}(\alpha) + J_n(\alpha q) \Phi_n(\alpha)}, \quad C_n = \frac{1}{H_n^{(1)}(\alpha) + J_n(\alpha q) \Phi_n(\alpha)}$$

Система (11) нами решалась также методом редукции, поскольку здесь имеют место оценки

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} |G_{mn}|^2 < \infty.$$

Заметим, что связь между коэффициентами  $A_m$  и  $B_m$ , как это непосредственно следует из системы (9), имеет следующий вид:

$$B_n = A_n \Phi_n(\alpha).$$

## 2. СЛУЧАЙ Н-ПОЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотрим теперь случай, когда электрический вектор падающей плоской волны перпендикулярен осям цилиндров;  $z$ -компоненту магнитного поля рассеянной цилиндром волны можно представить в следующей форме:

$$H_z = \left\{ e^{-ikx} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m [H_m^{(1)}(kr_1) e^{-im\varphi_1} + H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\varphi_2}] \right\} e^{-i\omega t},$$

где  $C_m$  — неопределенные коэффициенты, которые находятся из граничного условия на поверхности верхнего цилиндра

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

в предположении идеальной проводимости цилиндров.

Условие (12) (после известных процедур) сводится к бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$-i^{-n} J'_n(\alpha) = C_n H_n^{(1)'}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J'_m(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta) i^{m-n}. \quad (13)$$

Введя новую неизвестную последовательность  $\{Y_m\}$ , элементы которой связаны с величинами  $C_m$  соотношениями

$$C_m = i^{-m} J'_m(\alpha) Y_m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

получим вместо (13)

$$Y_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m F_{mn} = d_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (14)$$

где

$$F_{mn} = \frac{J'_m(\alpha) H_{m+n}^{(1)}(\beta)}{H_n^{(1)'}(\alpha)}, \quad d_n = -\frac{1}{H_n^{(1)'}(\alpha)}.$$

Для решения системы (14) может быть применен метод усечения, что вытекает из сходимости рядов  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2$  и  $\sum_{n, m=-\infty}^{\infty} |F_{mn}|^2$ .

## 3. КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ

Важной дифракционной характеристикой системы из двух цилиндров является ее коэффициент рассеяния, для вычисления которого устремим точку наблюдения ( $M$ ) в бесконечность, используя следующие замены (рис. 1):



$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \sin \varphi_0, \quad r_2 \approx r + \frac{d}{2} \sin \varphi_0, \quad \varphi_1, \varphi_2 \approx \varphi_0,$$

$$H_m^{(1)}(kr_{1,2}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left[ i \left( kr_{1,2} - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right].$$

В результате выражение для рассеянного поля примет следующий вид:

$$E_{z1} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp \left( -i \frac{\pi}{4} + ikr \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m i^{-m} \left[ \exp \left( -i \frac{kd}{2} \sin \varphi_0 - im \varphi_0 \right) + \exp \left( i \frac{kd}{2} \sin \varphi_0 + im \varphi_0 \right) \right].$$

Выделим отсюда угловую часть

$$F(\varphi_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m i^{-m} \left[ \exp \left( -i \frac{kd}{2} \sin \varphi_0 - im \varphi_0 \right) + \exp \left( i \frac{kd}{2} \sin \varphi_0 + im \varphi_0 \right) \right]. \quad (15)$$

Согласно определению [10] коэффициент рассеяния находится по формуле

$$\sigma_s = \int_0^{2\pi} F(\varphi_0) F^*(\varphi_0) d\varphi_0,$$

где  $F^*(\varphi_0)$  — комплексно-сопряженная функция.

Подставив сюда значение (15) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{\hat{\sigma}_s ka}{8} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\alpha) |X_m|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(\alpha) J_n(\alpha) J_{m+n}(\beta) X_m X_n^*,$$

где  $\hat{\sigma}_s = \sigma_s / \alpha$ . В случае  $H$ -поляризации в этой формуле следует произвести замену  $J_s(\alpha)$  на  $J'_s(\alpha)$ .

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перейдем теперь к рассмотрению численных результатов. На рис. 2 построены кривые зависимости модуля рассеянного поля  $|E_{z1}| = |E_z - e^{-ikhx}|$  от параметра  $d/\lambda$  при  $\alpha = 0,1$  и  $\alpha = 0,5$ .

Точка наблюдения находится в освещенной области на расстоянии  $2\lambda$  от начала координат. Осциллирующий характер кривых следует объяснить интерференционным взаимодействием дипольных волн, излученных каждым цилиндром. В силу  $\alpha < 1$  взаимодействия мультиполей несущественны. Интересно отметить, что интерференционные максимумы дипольных взаимодействий цилиндров имеют место при  $d/\lambda = \frac{3}{2} + n$ , а минимумы — при  $d/\lambda = n + 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

На рис. 3 представлены кривые, отображающие зависимость модуля  $|E_z|$  общего поля от  $d/\lambda$  при  $\alpha = 1,253; 1,5; 2; 3$ . Точка наблюдения выбрана в области «тени» на расстоянии  $2\lambda$  от середины линии, соединяющей оси цилиндров. Сплошные кривые соответствуют теоретическим расчетам, а пунктирные, заимствованные из работы [2], являются экс-

периментальными. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов указывает на хорошее их качественное и количественное согласие. Некоторое расхождение количественного характера объясняется тем, что в эксперименте в качестве первичного (падающего) излучения использовалась цилиндрическая волна, а изложенная нами теория построена в предположении, что цилиндры облучаются плоской электромагнитной волной.

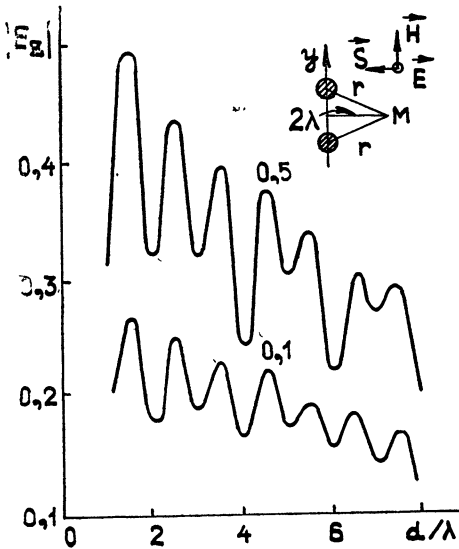


Рис. 2.

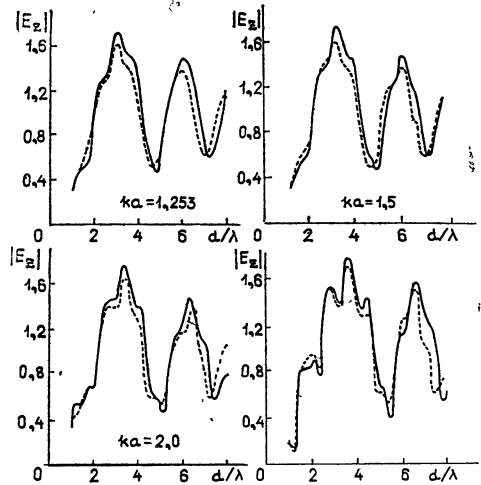


Рис. 3.

Проследив за изменением структуры кривых с ростом  $\alpha$ , легко заметить, что при  $\alpha > 1$  у них появляются интерференционные провалы, количество и глубина которых растут с увеличением  $\alpha$ . Появление последних объясняется усилением интерференционного взаимодействия мультипольных волн цилиндров. С повышением  $d/\lambda$  замечается общая тенденция сглаживания кривой, что вполне закономерно.

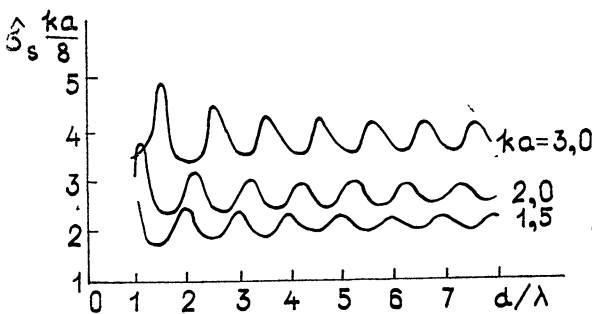


Рис. 4.

Кривые, представленные на рис. 4, показывают зависимость коэффициента рассеяния пары цилиндров от  $d/\lambda$  при различных значениях  $\alpha$  в случае  $E$ -поляризации. О сильном взаимодействии цилиндров свидетельствует осциллирующий характер кривых и весьма медленное стрем-

ление их к своим предельным значениям. Кривые, построенные на рис. 5, дают зависимость коэффициента рассеяния пары двух диэлектрических цилиндров от  $d/\lambda$  при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости, когда  $\alpha = 1,5; 2; 3$  и на цилиндры падает  $E$ -поляризованная волна. Рис. 6, 7, 8 относятся к случаю  $H$ -поляризации. На рис. 6 показана зависимость модуля общего магнитного поля  $|H_z|$  от  $d/\lambda$  при  $\alpha = 1,5; 2; 3$ , когда точка наблюдения лежит в области «тени» на расстоянии  $2\lambda$  от начала координат. В этом случае также заметны малые провалы, о причине которых уже говорилось выше. На рис. 7 представлены значения коэффициента рассеяния в зависимости от  $d/\lambda$  при различных  $\alpha$ . И, наконец, на рис. 8 построены кривые распределения поверхностного тока цилиндров по полярному углу  $\varphi$  при различных  $d/\lambda$ , когда  $\alpha = 1,253; 1,5; 2; 3$ .

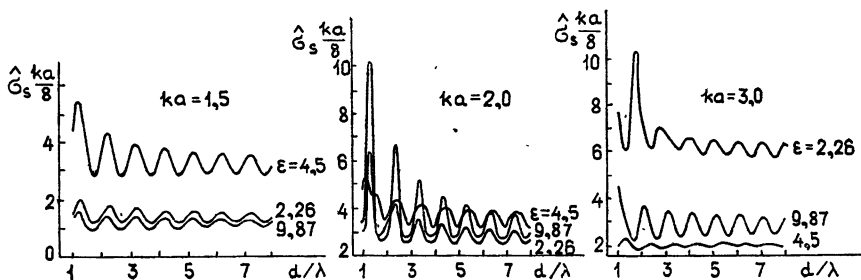


Рис. 5.

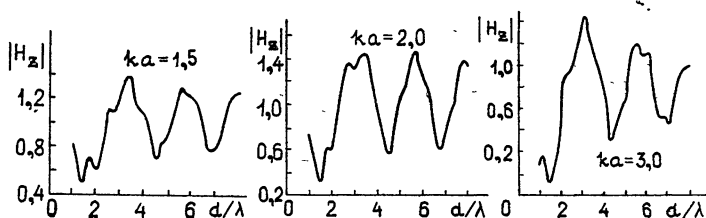


Рис. 6.

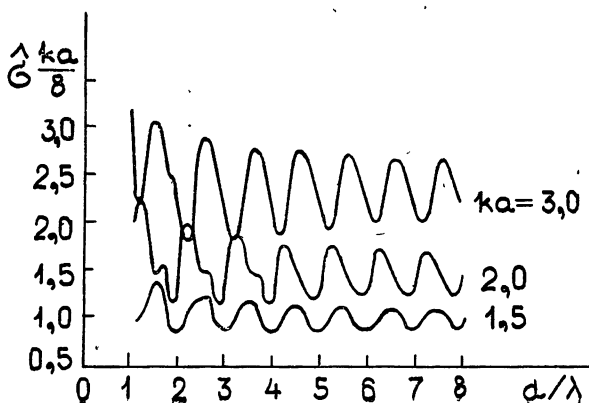


Рис. 7.

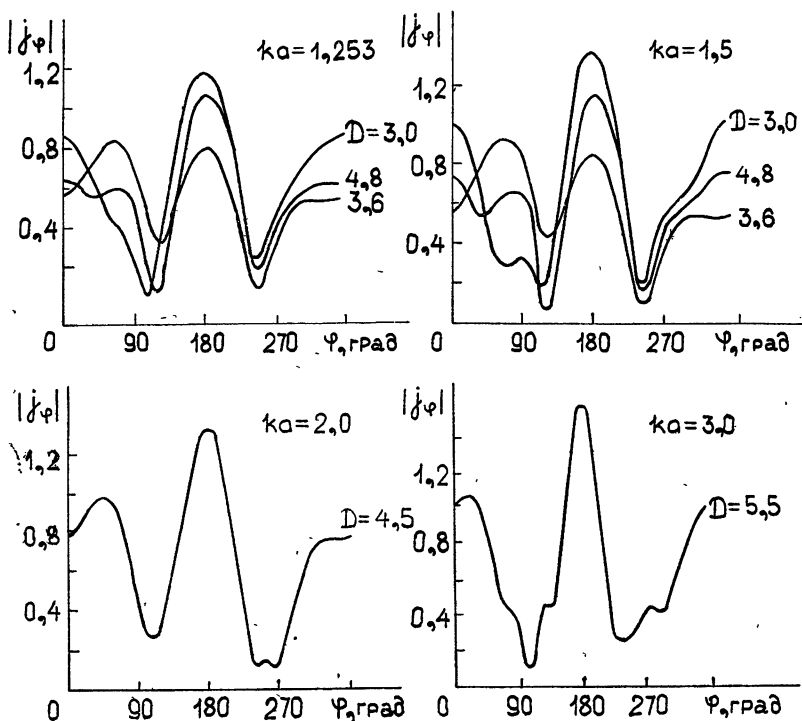


Рис. 8.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. Twersky, J. Appl. Phys., 23, 407 (1952).
2. R. V. Row, J. Appl. Phys., 26, 667 (1955).
3. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
4. А. Г. Кюркчан, Радиотехника и электроника, 17, № 12, 701 (1972).
5. Б. Е. Кинбер, С. В. Гуревич, Радиотехника и электроника, 13, № 5, 791 (1968).
6. В. П. Копалейшвили, Р. С. Поповиди, Радиотехника и электроника, 17, № 11, 2432 (1972).
7. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 4, № 12, 2004 (1959).
8. Б. Е. Кинбер, Радиотехника и электроника, 9, № 9, 1594 (1964).
9. Р. Кинг, У Тей-Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн, ИЛ, М., 1962.
10. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике, изд. Наука, М., 1970.

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 июля 1976 г.

## TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION BY TWO CYLINDERS

G. Sh. Kevanishvili, Z. I. Sikmashvili, O. P. Tsagareyshvili

A strict solution of the problem of diffraction of a plane  $E$  and  $H$  polarized electromagnetic wave by two parallel cylinders of a perfect dielectric is set forth. Numerical calculations of the main field characteristics are presented. Some of them are compared with experimental results of papers [2, 9].

УДК 621.372.821.2

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЛНЫ $H_{30}$ В ОБЛАСТИ СВЯЗИ $H$ -ПЛОСКОСТНОГО ЩЕЛЕВОГО НАПРАВЛЕННОГО ОТВЕТВИТЕЛЯ ДЛЯ РАСШИРЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ

*В. И. Лозьяной, И. Г. Прохода*

Рассмотрено влияние геометрических размеров области связи на параметры  $H$ -плоскостного щелевого направленного ответвителя в случае, когда в области связи существует распространяющаяся волна  $H_{30}$ . Показана возможность использования волны  $H_{30}$  для расширения рабочей полосы частот.

1. Теоретическим и экспериментальным исследованиям  $H$ -плоскостного щелевого направленного ответвителя (ЩНО) посвящено большое количество работ (см., например, [1-6]). В этих работах отмечается, что из всего набора волн, возбуждаемых в области связи ответвителя сторонним полем, рабочими являются волны  $H_{10}$  и  $H_{20}$ , а существование распространяющейся волны  $H_{30}$  нежелательно. В настоящей работе рассматривается влияние геометрических размеров области связи на параметры ответвителя в случае, когда в области связи существует распространяющаяся волна  $H_{30}$ . Показана возможность использования волны  $H_{30}$  в области связи  $H$ -плоскостного ЩНО для расширения его рабочей полосы частот.

2. Полученные результаты следуют из анализа влияния геометрических размеров области связи на параметры ответвителя в случае, когда в области связи существует распространяющаяся волна  $H_{30}$ . Анализ проведен на основе численного решения электродинамической задачи, для чего использовалось решение задачи дифракции электромагнитного поля в  $H$ -плоскостном ЩНО [7]. По рассчитанной многоволновой матрице рассеяния определялись электрические параметры ответвителя и исследовалось их поведение в полосе частот. Размеры волноводов ответвителя выбирались такими, что по ним может распространяться только волна  $H_{10}$ , а одно из его плеч возбуждалось сторонним полем волны  $H_{10}$ . При расчете, как и в [7], в малых волноводах учитывалось по четыре типа колебаний, а в области связи — восемь типов.

3. На рис. 1—3 приведены теоретические зависимости КСВ (сплошная линия) и переходного ослабления (пунктирная линия) ответвителя от относительных длины щели связи  $l/a$ , толщины общей стенки между волноводами  $d/a$  и частоты  $a/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве. Как видно из рис. 1, в случае, когда в области связи существует распространяющаяся волна  $H_{30}$  (зависимости построены при  $a/\lambda = 0,76$ ), КСВ ответвителя уменьшается и принимает минимальные значения при определенных геометрических размерах области связи: длине щели связи от 1,2 до 3,3 ширины волновода при различных толщинах общей стенки. Следует отметить, что с увеличением толщины общей стенки увеличивается и длина щели связи, при которой наблюдается уменьшение КСВ.

При исследовании поведения КСВ в полосе частот (рис. 2, зависимости построены при  $d/a = 0,01$ ) видно, что при длинах щели связи от 1,3 до 1,4 ширины волновода полоса частот, в которой наблюдается хорошее КСВ для данной толщины общей стенки, расширяется. При этом в высокочастотной части рабочего диапазона ( $0,743 < a/\lambda < 0,79$ ) в области связи существует распространяющаяся волна  $H_{30}$ , которая в данном случае является рабочей. При других значениях толщины общей стенки характер улучшения КСВ, а следовательно, и расширения рабочей полосы частот ответвителя аналогичен приведенному. Однако при значительном увеличении толщины общей стенки направленные свойства и КСВ ответвителя ухудшаются [7]. Согласно [8] и рис. 3 (зависимость построена при  $l/a = 1,4$ ) толщина общей стенки  $2d$  не должна превышать 0,2 — 0,22 ширины волновода. На рис. 3 приводится также сравнение с известными теоретическими результатами [9] (штрих-пунктирная линия).

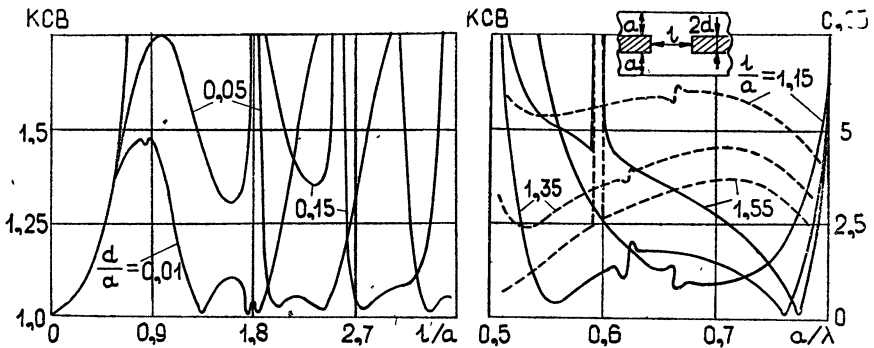


Рис. 1, 2.

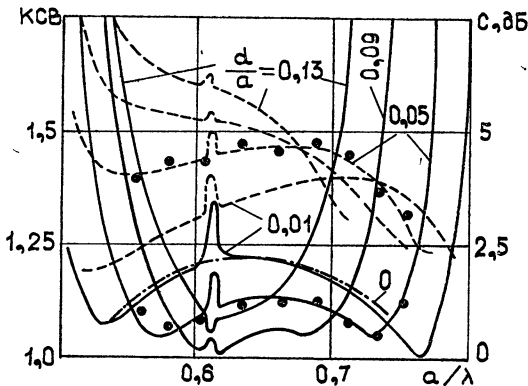


Рис. 3.

Уменьшение КСВ при определенных геометрических размерах области связи  $H$ -плоскостного ШНО можно объяснить следующим образом. При возбуждении ответвителя сторонним полем волны  $H_{10}$  в области связи возникает весь набор волн  $H_{m0}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Рассмотрим случай, когда в области связи, кроме волн  $H_{10}$  и  $H_{20}$ , существует и распространяющаяся волна  $H_{30}$ . При толщине общей стенки, не превышающей указанных значений, отражение от краев щели, а следовательно, и КСВ ответвителя в основном будут определяться волнами  $H_{10}$  и

$H_{30}$ . Эти волны приходят к концу щели связи с некоторым сдвигом фаз друг относительно друга, обусловленным разными фазовыми скоростями волн в волноводе. Суммарный фазовый сдвиг между волнами  $H_{10}$  и  $H_{30}$  при их совместном распространении в области связи будет равен

$$\Delta\varphi = 2\pi l \left( \frac{1}{\lambda_{10}} - \frac{1}{\lambda_{30}} \right) + \varphi_{10} - \varphi_{30}, \quad (1)$$

где  $\lambda_{10}$  и  $\lambda_{30}$ ,  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{30}$  — соответственно длины и дополнительные фазовые набеги волн  $H_{10}$  и  $H_{30}$ . Дополнительные фазовые набеги возникают из-за отражения волн от краев щели связи.

Пусть волны  $H_{10}$  и  $H_{30}$  приходят к концу щели связи в фазе, т. е.

$$\Delta\varphi = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Тогда силовые линии электрического поля этих волн по центру области связи находятся в противофазе. Отраженные волны, возбуждаемые соответственно волнами  $H_{10}$  и  $H_{30}$ , также находятся в противофазе и, следовательно, гасят друг друга, что уменьшает КСВ ответвителя. Полное или частичное гашение отраженных волн будет определяться амплитудами этих волн, зависимыми от толщины общей стенки и частоты возбуждающего поля. Амплитудно-фазовые соотношения для волн в области связи  $H$ -плоскостного ЩНО могут быть определены на основе [7].

Из выражений (1) и (2) следует, что длина щели связи, удовлетворяющая условию уменьшения КСВ, равна

$$l = \frac{\lambda (2\pi k + \varphi_{30} - \varphi_{10})}{2\pi \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр10}} \right)^2} - \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр30}} \right)^2} \right]}. \quad (3)$$

В частности, при  $a/\lambda = 0,75$  и  $d/a = 0$  последнее выражение принимает вид

$$l = \sqrt{2} \left( k + \frac{\varphi_{30} - \varphi_{10}}{2\pi} \right) a. \quad (4)$$

Пренебрегая вторым членом, имеем

$$l \simeq \sqrt{2} ka. \quad (5)$$

Рассмотрим выражение (5) более подробно. Первый минимум КСВ должен наблюдаться при  $k = 0$ , т. е. когда  $l/a = 0$ , что естественно. Второй минимум КСВ должен наблюдаться при  $k = 1$ , т. е. при  $l/a \simeq \sqrt{2}$ , что хорошо согласуется с приведенными результатами (см. рис. 1). Несоответствие минимума КСВ при  $k = 2$ , а также уменьшение КСВ при изменении длины щели связи от 1,7 до 1,9 ширины волновода объясняется зависимостью дополнительных фазовых набегов  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{30}$  от геометрических размеров области связи, что не учтено в (5). Дальнейшее увеличение длины щели связи нецелесообразно, так как это приводит к увеличению размеров устройства и ухудшению его диапазонных свойств. Из (3) и (4) следует, что длина щели связи, при которой обеспечивается уменьшение КСВ, будет также зависеть от толщины общей стенки вследствие зависимости  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{30}$  от геометрии области связи. Это также хорошо согласуется с полученными результатами (см. рис. 1).

Рассмотренная возможность использования волны  $H_{30}$  в области связи для расширения рабочей полосы частот, а также улучшение равномерности деления мощности за счет выбора определенной толщины общей стенки [8], позволили авторам разработать ряд ответвителей с переходным ослаблением от 0 до 5 дБ, рабочая полоса частот которых не менее 20% при равномерности деления мощности  $\pm 0,5$  дБ, КСВ не более 1,2 и направленности не хуже 15—20 дБ без использования согласующих элементов и сужения области связи.

Подтверждением полученных результатов являются экспериментальные исследования, показанные точками на рис. 3.

В заключение следует отметить, что использование волны  $H_{30}$  в области связи возможно и для создания ответвителей, работающих в высокочастотной области рабочего диапазона волновода, т. е. при  $a/\lambda = 0,8 \div 0,95$ .

Результаты работы будут полезны при определении оптимальных размеров разрабатываемых  $H$ -плоскостных ЦНО.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Riblet, Proc. IRE, 40, № 2, 180 (1952).
2. W. Stösser, Frequenz, 14, № 4, 117 (1960).
3. Н. Л. Коган, Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Сложные волноводные системы, Судпромгиз, Л., 1963.
4. В. А. Сосунов, А. А. Шибяев, Направленные ответвители сверхвысоких частот, Приволжское книжное изд-во, Саратов, 1964.
5. Л. Г. Дорфман, В. В. Филатов, Радиотехника и электроника, 11, № 11, 1933 (1966).
6. А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, В. П. Смирнов, Справочник по элементам волноводной техники, изд. Сов. радио, М., 1967.
7. И. Г. Прохода, В. И. Лозьяной, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 8, 1214 (1974).
8. И. Г. Прохода, В. И. Лозьяной, В. А. Карлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 7, 1088 (1976).
9. А. М. Лерер, В. С. Михайлевский, Радиотехника и электроника, 17, № 5, 913 (1972).

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 марта 1976 г.,  
после доработки  
31 августа 1976 г.

#### THE USE OF $H_{30}$ WAVE IN THE REGION OF COUPLING A $H$ -PLANE SLOT DIRECTIVE COUPLER FOR EXTENDING OPERATION FREQUENCY BAND

V. I. Lozjanoy, I. G. Prokhoda

The influence of geometrical sizes of the coupling region on the parameters of a  $H$ -plane slot directive coupler in the case when a propagating exists wave  $H_{30}$  in the coupling region. The possibility of using  $H_{30}$  wave for extending the operation frequency band is shown.



УДК 621.372.414

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕТОК ВОЛНОВОДНОГО ТИПА

А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Л. А. Рудь, Ю. И. Сергиенко

На основе строгого решения задач дифракции проведено аналитическое и численное исследование поляризационных и энергетических характеристик ножевых решеток в широкой области изменения их геометрических размеров. Такие поляризаторы представляют интерес с точки зрения разработки сканирующих антенн круговой и управляемой поляризации.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим поляризатор, представляющий собой периодическую решетку, состоящую из бесконечно тонких и бесконечно длинных идеально проводящих лент (рис. 2а). Плоскость поляризации падающей линейной поляризованной волны расположена под углом  $45^\circ$  относительно плоскостей пластин решетки. Дифракция плоской электромагнитной волны, падающей на структуру под углом  $\varphi$ , описывается двумя скалярными задачами соответственно для случаев  $E$ - и  $H$ -поляризаций. Для определения амплитуд рассеянных полей воспользуемся методом работы [1], где исходная электродинамическая задача сведена к алгебраической системе уравнений второго рода, позволяющей вести эффективный анализ с любой степенью точности.

Ниже при аналитическом анализе поляризационных свойств ограничимся рассмотрением тех случаев, при которых в щелях решетки являются распространяющимися нулевая и первая волноводные волны в случае  $H$ -поляризации и первая волноводная волна в случае  $E$ -поляризации, а волны с индексом больше двух оказывают ничтожно малое влияние на взаимодействие полей над и под решеткой. Кроме того, будем полагать, что над и под решеткой нет высших распространяющихся пространственных гармоник. Следовательно,  $0,5 < \kappa = \frac{l}{\lambda} < \frac{1}{1 \pm \sin \varphi}$ . Относительная простота получаемых при этом приближенных формул позволяет дать достаточно полное описание основных свойств решения задачи.

Прежде чем изучать поляризационные характеристики, опишем основные свойства рассеянных полей в рассматриваемом нами частотном диапазоне для каждой поляризации в отдельности.

### 2. $E$ -ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Из строгого решения можно получить следующее выражение для амплитуды прошедшей основной  $E$ -поляризованной волны [1]:

$$b_0^E = \exp \left\{ 2i \left[ \omega_1 \pi \frac{\delta}{\kappa} + \alpha_2(\omega_1) - \alpha_2(\Gamma_0) \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{1 - C}{1 - C \exp \left\{ 2i \left[ 2\omega_1 \pi \frac{\delta}{x} + \alpha_1(\omega_1) \right] \right\}}, \quad (1)$$

где

$$C = \left( \frac{\Gamma_0 - \omega_1}{\Gamma_0 + \omega_1} \right)^2, \quad \Gamma_n = \sqrt{x^2 - \Phi_n^2}, \quad \Phi_n = n + x \sin \varphi,$$

$$\omega_m = \sqrt{x^2 - \left( \frac{m}{2} \right)^2}, \quad \delta = \frac{2h}{\lambda};$$

$$\alpha_1(\omega) = -4\omega \ln 2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\omega_1|} + \quad (2)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\omega_m|} + \operatorname{arctg} \frac{\Phi_n^2 - x^2 - \omega^2}{2\omega |\Gamma_n|} + \operatorname{arctg} \frac{\Phi_{-n}^2 - x^2 - \omega^2}{2\omega |\Gamma_{-n}|} \right];$$

$$\alpha_2(\omega) = -2\omega \ln 2 - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\omega_1|} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\omega_m|} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\Gamma_n|} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{|\Gamma_{-n}|} \right]. \quad (3)$$

Погрешность решения задачи, определяемая этими выражениями, порядка  $O \left[ \exp \left( -2\pi \frac{\delta}{x} \sqrt{1 - x^2} \right) \right]$ . Общие члены в рядах для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с ростом номера убывают, как  $1/m^2$ .

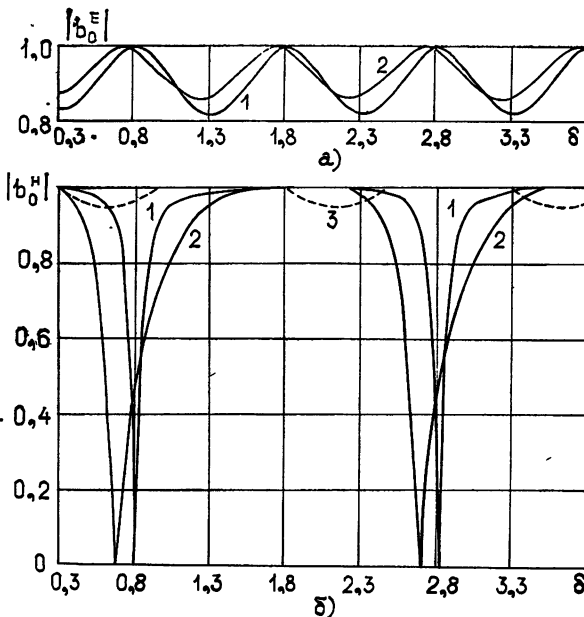


Рис. 1. Зависимость модулей коэффициентов прохождения от глубины решетки для различных периодов решетки и углов падения ( $1 - x = 0,577, \varphi = 20^\circ$ ;  $2 - x = 0,577, \varphi = 30^\circ$ ;  $3 - x = 0,53, \varphi = 30^\circ$ ): а)  $E$ -поляризация, б)  $H$ -поляризация.

Из (1) видно, что с указанной точностью модуль коэффициента прохождения является периодической функцией  $\delta$  с периодом, равным  $\pi/2\omega_1$ . С изменением  $\pi$  в интервале от 0,5 до  $1/(1 \pm \sin \varphi)$  период по  $\delta$  уменьшается от бесконечности до некоторой конечной величины. В точках максимумов падающая волна проходит через решетку без отражения (рис. 1а). Условие полного прохождения имеет вид

$$\delta = \delta_N = \frac{\pi}{2\omega_1\pi} [N\pi - \alpha_1(\omega_1)] \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Минимальные значения коэффициента прохождения достигаются при

$$\delta = \frac{\pi(2N\pi - \pi - 2\alpha_1(\omega_1))}{4\omega_1\pi} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

и равны

$$|b_0^E| = \frac{1 - C}{1 + C} = \frac{2\omega_1\Gamma_0}{\Gamma_0^2 + \omega_1^2}$$

Видно, что амплитуда осцилляций  $|b_0^E|$  по  $\delta$  максимальна при  $\pi = 1/2$  и равна единице. С ростом  $\pi$  минимальные значения  $|b_0^E|$  растут и при  $\pi \rightarrow 1/(1 \pm \sin \varphi)$  максимальные и минимальные значения  $|b_0^E|$  отличаются друг от друга на величину не более 0,01.

### 3. Н-ПОЛЯРИЗАЦИЯ

В этом случае из строгого решения также можно получить аналитические формулы для коэффициентов прохождения и отражения с той же оценкой погрешности, что и для формулы (1). Если поле вдали от решетки определяется только прошедшей или отраженной основной волной, а в щелях между лентами существуют две незатухающие волноводные волны, то получаем

$$a_0^H = \{ |1 + C \exp [i(\theta + \gamma)]|^2 - |A \exp i\theta + B \exp (i\gamma)|^2 \} \times \\ \times \exp [i(\theta + \gamma - 2\alpha_2(\Gamma_0))] \{ [1 + C \exp [i(\theta + \gamma)]]^2 - \\ - (A \exp (i\theta) + B \exp (i\gamma))^2 \}^{-1}; \quad (5)$$

$$b_0^H = -4i \{ [(A - BC) \sin \theta + (B - AC) \sin \gamma] \exp [i(\theta + \gamma - 2\alpha_2(\Gamma_0))] \} \times \\ \times \{ [1 + C \exp (i(\theta + \gamma))]^2 - (A \exp (i\theta) + B \exp (i\gamma))^2 \}^{-1}, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{(\omega_0 - \Gamma_0)(\omega_0 + \omega_1)}{(\omega_0 + \Gamma_0)(\omega_0 - \omega_1)}, \quad B = \frac{(\Gamma_0 - \omega_1)(\omega_0 + \omega_1)}{(\Gamma_0 + \omega_1)(\omega_0 - \omega_1)}, \\ C = \frac{(\omega_0 - \Gamma_0)(\Gamma_0 - \omega_1)}{(\omega_0 + \Gamma_0)(\Gamma_0 + \omega_1)}, \quad \theta = 2\pi\omega_0 \frac{\delta}{\pi} + \alpha_1(\omega_0), \\ \gamma = 2\pi\omega_1 \frac{\delta}{\pi} + \alpha_1(\omega_1),$$

а величины  $\alpha_1(\omega)$ ,  $\alpha_2(\omega)$  вычисляются по формулам (2), (3).

Выясним особенности поля в рассматриваемых случаях. Прежде всего, условие

$$|1 + C \exp [i(\theta + \gamma)]| = |A \exp (i\theta) + B \exp (i\gamma)|$$

определяет те значения параметров  $\kappa$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$ , при которых падающая волна проходит через решетку без отражения. Перепишем это условие в виде

$$\sin \theta \sin \gamma = \frac{2\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 + \omega_1^2} (1 - \cos \theta \cos \gamma). \quad (7)$$

При  $\omega_1\delta \ll 1$  уравнение (7) упрощается:

$$\pi\delta \sin [2\pi\delta + \alpha_1(\kappa)] = 1 - \cos [2\pi\delta + \alpha_1(\kappa)]. \quad (8)$$

В рассматриваемом приближении из (8) находим, что в точках, удовлетворяющих условию

$$2\pi\delta + \alpha_1(\kappa) = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

наступает полное прохождение энергии через решетку, а в точках

$$2\pi\delta + \alpha_1(\kappa) = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

—максимальное отражение энергии от структуры (рис. 16). Величина прошедшей энергии в точках максимума равна

$$|b_0^H| = \frac{1 - \operatorname{tg}^4(\varphi/2)}{1 + \operatorname{tg}^4(\varphi/2)}.$$

Видно, что при  $\varphi \rightarrow 90^\circ$  возможно полное отражение. Для произвольных значений  $\omega_1\delta$  при фиксированных значениях  $\kappa$  и  $\varphi$  существует бесконечное число значений  $\delta$ , которые удовлетворяют уравнению (7).

В отличие от случая  $\omega_1\delta \ll 1$ , когда полное отражение возможно лишь при скользящем падении, в общем случае оказывается (см. (5)), что полное отражение происходит и при условии

$$\frac{\sin [2\pi\delta + \alpha_1(\omega_0)]}{\sin \left[ 2\pi\omega_1 \frac{\delta}{\kappa} + \alpha_1(\omega_1) \right]} = \frac{\omega_0 (\omega_1^2 - \Gamma_0^2)}{\omega_1 (\omega_0^2 - \Gamma_0^2)}. \quad (9)$$

Числитель и знаменатель слева в формуле (9) периодичны по  $\delta$  соответственно с периодом единица и  $\kappa/\omega_1$ . Отношение же синусов будет периодично по  $\delta$  с периодом, равным  $p$ , только в дискретных точках

$$\kappa = \kappa_p = \frac{p}{2\sqrt{p^2 - 1}} \quad (p = 2, 3, 4, \dots). \quad (10)$$

Следовательно, только при  $\kappa = \kappa_p$  будет наблюдаться строгая периодичность по  $\delta$  явления полного отражения падающей  $H$ -поляризованной электромагнитной волны. Из численного анализа этого явления следует, что на плоскости  $\kappa\delta$  при каждом фиксированном  $\varphi$  уравнение (9) удовлетворяется на линиях, которые приближенно имеют вид отрезков прямых линий. Отметим, что от параметра  $\varphi$  в представлениях для  $\theta$  и  $\gamma$  зависят члены, вносящие сравнительно малый вклад в изменение аргумента. Поэтому линии, на которых достигается эффект полного отражения, будут также слабо изменяться в зависимости от изменения  $\varphi$ .

Таким образом, наряду с режимом полного прохождения ножевая решетка при  $H$ -поляризации обладает также режимом полного отражения. Последний возможен благодаря интерференции между незатухающими волноводными волнами в щелях между лентами и тесно связан с собственными режимами рассматриваемой структуры.

## 4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА. НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ

Для вычисления коэффициента эллиптичности по полю  $r$  нам необходимо знать величину разности фаз между ортогональными компонентами  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн на нижнем раскрыве решетки, т. е. величину  $\beta = \arg b_0^E - \arg b_0^H$ . Нормально падающая  $H$ -поляризованная волна полностью проходит через решетку, величина фазы в плоскости  $z = -2h$  при этом равна  $\arg b_0^H = 2\pi\delta$ . Величину же  $\arg b_0^E$  можно определить из (1). Таким образом,

$$\beta = -2\pi\delta + 2\omega_1\pi\frac{\delta}{\kappa} + 2\alpha_2(\omega_1) - 2\alpha_2(\Gamma_0) + \alpha_3(\kappa, \delta), \quad (11)$$

где  $\alpha_3(\kappa, \delta)$  есть величина изменения фазы, обусловленная вторым сомножителем в (1).

Легко видеть, что второй сомножитель в (1) является периодической функцией  $\delta$  с периодом  $\kappa/2\omega_1$ , а значит функция  $\alpha_3(\kappa, \delta)$  в представлении (11) будет периодична с периодом  $\kappa/2\omega_1$ . Первые два слагаемых в (11) изменяются на  $2\pi$  при добавлении к  $\delta$  величины  $\kappa/(\omega_1 - \kappa)$ . Поскольку величина  $r$  периодична по  $\beta$  с периодом, равным  $\pi$ , то отсюда следует, что  $r$  будет периодичной по  $\delta$  в тех случаях, когда величина  $\kappa/2\omega_1$  будет равна целому числу  $p$  величин  $\kappa/2(\omega_1 - \kappa)$ , т. е. при выполнении условия (10). Для каждого  $\kappa_p$  ( $\kappa_p = 0,577; 0,53; \dots; 0,5$ ) коэффициент эллиптичности имеет свой период по  $\delta$ , равный  $p$ .

Если при  $\kappa = \kappa_p$  величина  $r$  строго периодична по  $\delta$ , то в области  $\kappa_1 < \kappa < 1$  строгой периодичности не наблюдается. Все же с ростом  $\kappa$  влияние первого сомножителя в (1) на функцию  $r$  становится определяющим (поскольку  $C \rightarrow 0$  при  $\kappa \rightarrow 1$ ), и можно считать, что функция  $r$  при  $\kappa > \kappa_1$  будет по  $\delta$  квазипериодична с периодом, равным  $\kappa/[2(\omega_1 - \kappa)]$ . Если в (1) пренебречь величинами  $\alpha_2(\omega_1)$ ,  $\alpha_2(\Gamma_0)$  и положить  $C = 0$ , то можно получить известную приближенную формулу вычисления  $\kappa$  по заданным  $\delta$ , для которых величина  $r$  максимальна:

$$\kappa = \frac{4\omega_1\delta}{\delta + 2n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

В этом же приближении формула

$$\kappa = \frac{2\omega_1\delta}{2\delta + n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

определяет линию, в точках которой  $r = 0$ .

Переходя к анализу численных данных, отметим, что представленные результаты получены на основе решения на ЭВМ линейных систем уравнений (2.20) и (2.28) работы [1]. При решении усеченных систем порядка  $N$  погрешность, возникшая в определении  $b_0^E$  и  $b_0^H$ , имеет по-

рядок  $O\left\{\exp\left[-2\pi\frac{\delta}{\kappa}\sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 - \kappa^2}\right]\right\}$ . Из этой аналитической оценки и

результатов численного анализа следует, что в рассматриваемых интервалах изменения  $\kappa$  и  $\delta$  для вычисления  $b_0$  с тремя верными значащими цифрами достаточно брать  $N$  равным 7—9.

На рис. 2а представлены на плоскости  $\kappa\delta$  линии максимально возможных значений  $r$ , рассчитанные по (12) (пунктир) и строгим методом. Максимальное расхождение между ними наблюдается в области малых значений  $\kappa$  (порядка 10—15%) и уменьшается при увеличении  $\kappa$ . Хотя линии, определяющие максимальные значения  $r$  на плоскости  $\kappa\delta$  проходят достаточно близко, сами значения  $r$  на этих кривых сущест-

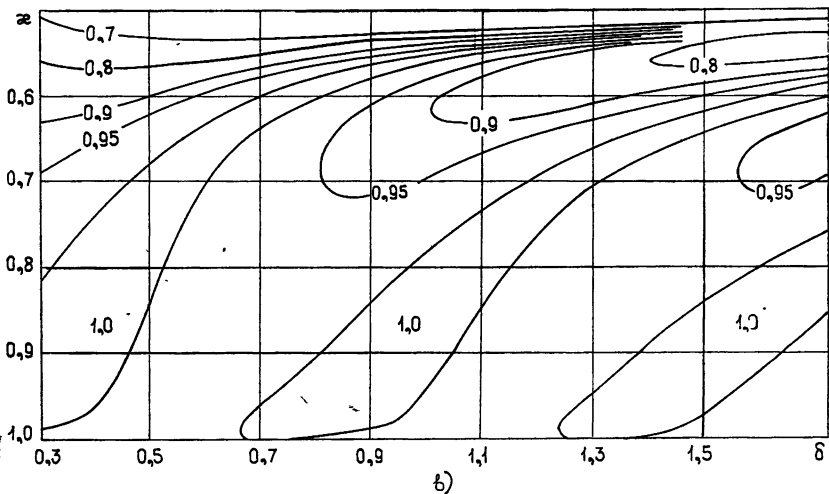
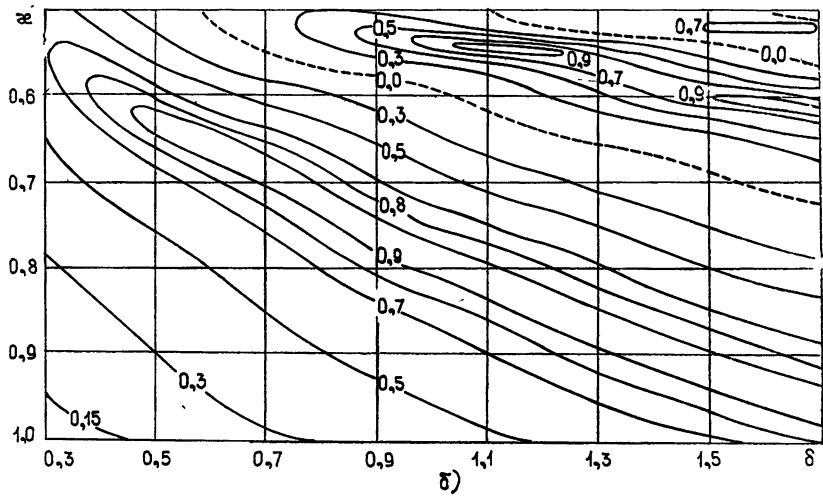
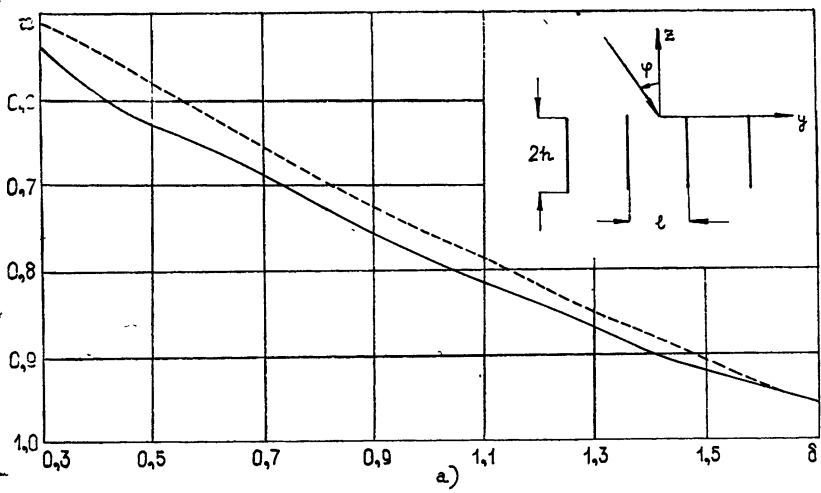


Рис. 2. а) Сравнение строгого и приближенного расчетов размеров решеток, обеспечивающих круговую поляризацию при нормальном падении;  
 б) линии равных значений коэффициента эллиптичности по полю на выходе решеток в координатах  $x, \delta$  при  $\varphi = 0^\circ$ ;  
 в) линии равных значений прошедшей мощности  $\frac{1}{2} (|b_0^E|^2 + |b_0^H|^2)$  при нормальном падении.

венно отличаются друг от друга. Так, для  $\kappa = 0,6; 0,7; 0,9$  при выборе  $\delta$  из строгого решения максимально возможные значения коэффициента эллиптичности равны соответственно  $0,98; 0,96; 0,995$ . Если же  $\delta$  выбирать по приближенной формуле (12), то для тех же  $\kappa$  соответственно имеем  $r = 0,65; 0,8; 0,94$ .

Существенная погрешность формулы (12) при малых  $\kappa$  обусловлена отсутствием учета явления сильного отражения от раскрывов решетки первой волноводной волны, которая при  $\kappa = 0,5$  стала распространяющейся. С ростом  $\kappa$  уменьшаются и отражение и погрешность расчетов. Значения  $r$  на линии (12) при  $n = 1$  будут определяться с еще большей погрешностью из-за сильной зависимости коэффициента эллиптичности от  $\kappa, \delta$  вблизи линии максимума.

Столь же простые (но более точные) формулы расчета размеров решеток, обеспечивающих максимально возможное значение  $r$ , можно получить при анализе численных данных строгого решения:

$$\begin{aligned} 0,30 \leq \delta \leq 0,48, & \quad \kappa = 0,389 \delta + 0,433, \\ 0,48 \leq \delta \leq 0,68, & \quad \kappa = 0,300 \delta + 0,476, \\ 0,68 \leq \delta \leq 0,94, & \quad \kappa = 0,346 \delta + 0,448, \\ 0,94 \leq \delta \leq 1,38, & \quad \kappa = 0,273 \delta + 0,514, \\ 1,38 \leq \delta \leq 1,92, & \quad \kappa = 0,204 \delta + 0,609. \end{aligned} \quad (13)$$

Значения  $r$  на линиях (13) не опускаются ниже  $0,9$ . На рис. 26, в представлены численные результаты расчетов в виде линий постоянных значений величины коэффициента эллиптичности поляризованного эллипса  $r$  и линий равной величины суммарной прошедшей мощности

$\frac{1}{2} (|b_0^E|^2 + |b_0^H|^2)$  на плоскости  $\kappa\delta$ . Эти рисунки представляют собой

номограммы для определения размеров решеток, обеспечивающих получение заданного коэффициента эллиптичности и позволяющих произвести оценку суммарных потерь падающего поля.

Поверхность  $r(\kappa, \delta)$  образована чередующимися вершинами, где коэффициент эллиптичности имеет максимальное значение, и впадинами, где поляризация линейная. Расположение первой слева вершины поверхности  $r(\kappa, \delta)$  определяется формулами (12) при  $n = 0$ . Аналитически установлено, что с уменьшением  $\kappa_p$  в (11) величина периода изменения  $r$  по  $\delta$  возрастает. Наличие строгой периодичности в фиксированных точках и увеличение периода с уменьшением  $\kappa_p$  приводит к своеобразному распределению линий равной величины  $r(\kappa, \delta)$  на рис. 26. Вытянутость линий на этом рисунке вдоль диагонали объясняется ростом периода изменения  $r$  вдоль  $\delta$  с ростом  $\kappa$ .

На рис. 2в при каждом  $\kappa$  вдоль  $\delta$  наблюдается периодическая зависимость суммарной прошедшей мощности с периодом  $\kappa/2\omega_1$ . При  $\kappa = 0,5$  период обращается в бесконечность, поэтому все линии равной величины суммарной прошедшей мощности асимптотически приближаются с ростом  $\delta$  к линии  $\kappa = 0,5$ . Поскольку  $|b_0^E| = 0$  при достаточно больших  $\delta$  и  $\kappa = 0,5$ , то на линии  $\kappa = 0,5$  величина прошедшей мощности равна  $0,5$ . С ростом  $\delta$  первая по  $\kappa$  точка полного прохождения (4)  $E$ -поляризованной волны стремится к  $\kappa = 0,5$ , поэтому чем больше  $\delta$ , тем более осциллирующей по  $\kappa$  будет прошедшая мощность.

## 5. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ

Из соотношений взаимности [2] следует, что в интересующем нас диапазоне длин волн при отклонении  $\varphi$  от нуля на малую величину  $a_0$  и  $|b_0|$  изменяются на величину порядка  $\varphi^2$ , т. е.  $a_0$  и  $|b_0|$  слабо зависят от  $\varphi$  вблизи  $\varphi = 0$ . Эти свойства рассеянных полей приводят к тому, что в диапазоне  $\frac{1}{2} < \kappa < \frac{1}{1 \pm \sin \varphi}$  можно при малых  $\varphi$  ( $\varphi < 2-3^\circ$ ) пользоваться формулами (12), (13) для определения линий, на которых функция  $r$  максимальна.

При  $\omega_1 \delta \ll 1$  уравнение (9) упрощается:

$$\sin(2\pi\delta + \alpha_1(\kappa)) = -2\pi\delta \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Из анализа последнего следует, что в рассматриваемом приближении это уравнение не имеет вещественных корней, а значит, резонансного полного отражения не будет наблюдаться при относительной ширине лент

$$\delta > \frac{1}{2\pi \operatorname{ctg}^2 \varphi}. \quad (14)$$

Таким образом, формулы (13) будут справедливы при выполнении условий  $\omega_1 \delta \ll 1$  и (14). На плоскости  $\kappa\delta$  при каждом фиксированном  $\varphi \neq 0$  условия  $\omega_1 \delta \ll 1$  и (14) ограничивают своеобразную треугольную область со сторонами  $\kappa = 0,5$ ,  $\delta = 1/2\pi \operatorname{ctg}^2 \varphi$  и линией, определяемой условием  $\omega_1 \delta \ll 1$ . При несоблюдении условий  $\omega_1 \delta \ll 1$  и (14) появляются возможности для существования режимов резонансного полного отражения  $H$ -поляризованной волны, что приводит к аномально быстрому стремлению к нулю коэффициента эллиптичности, рис. 3. При этом линии равных значений  $r$  на плоскости  $\kappa\delta$  претерпевают резкие изменения. Довольно плавная волнообразная поверхность  $r(\kappa, \delta)$ , имеющая место в случае  $\varphi = 0$ , нарушается при малых  $\varphi$  крайне узкими разрезами, которые с увеличением  $\varphi$  постепенно становятся шире и несколько смещаются. Точки пересечения линий (13) с линиями появившихся разрезов — это точки с наименее благоприятными условиями для образования поляризованной по кругу волны. С ростом  $\varphi$  сохраняются в ряде мест куполообразные вершины, которые практически остаются стационарными в широких пределах изменения  $\varphi$ . Так, например, в точках  $\kappa = 0,6$ ;  $\delta = 0,4$ ;  $\kappa = 0,54$ ;  $\delta = 0,98$   $r$  не опускается ниже 0,8 в диапазоне  $0 < \varphi < 30^\circ$ .

Своеобразным разделом на плоскости  $\kappa\delta$  является линия  $\kappa = (1 + \sin \varphi)^{-1}$ . При этом наблюдается сильный поверхностный резонанс, связанный с преобразованием гармоники с номером «минус один» рассеянного решеткой поля из нераспространяющейся в распространяющуюся. Наличие этого резонанса как бы снимает все остальные резонансные зависимости, и за точкой скольжения линии  $r(\kappa, \delta) = \operatorname{const}$  снова становятся непрерывными и монотонными. Поскольку часть энергии падающей волны переносится теперь вновь возникшими над и под решеткой плоскими волнами, то за линией скольжения энергия нулевой прошедшей волны и соответственно коэффициент эллиптичности уменьшаются. Линия максимальных  $r$  при малых  $\varphi$  по-прежнему описывается (12).



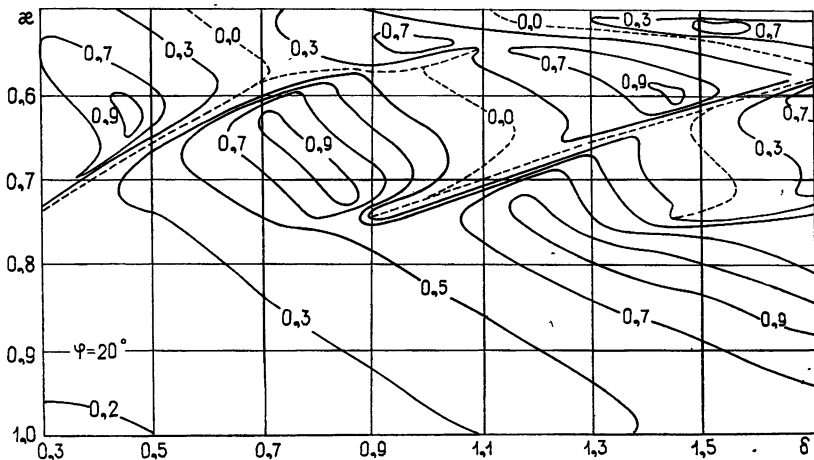


Рис. 3. Линии равных значений коэффициента эллиптичности по полю на выходе решетки при наклонном падении ( $\varphi = 20^\circ$ ).

Случай наклонного падения представляет особый интерес с точки зрения разработки сканирующих антенн круговой и управляемой поляризации. На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов поляризационных и энергетических характеристик решеток для различных углов падения. При наклонном падении от угла  $\varphi$  зависят коэффициенты прохождения по обеим поляризациям, а при некоторых углах падения  $H$ -поляризованная волна полностью отражается от решетки. Этот эффект и определяет то главное, чем отличается наклонное падение от нормального.

Таблица

$\pm \varphi$	$\delta$	$\alpha$	$\frac{1}{2} ( b_0^E ^2 +  b_0^H )$
$20^\circ$	0,32 — 0,50	0,444 $\delta$ + 0,408	0,80 — 0,90
	0,66 — 0,86	0,450 $\delta$ + 0,343	0,85 — 0,90
	1,22 — 1,50	0,214 $\delta$ + 0,289	0,83 — 0,920
	1,66 — 1,96	0,167 $\delta$ + 0,333	0,90 — 0,95
$30^\circ$	0,32 — 0,42	0,500 $\delta$ + 0,390	0,80 — 0,90
	0,68 — 0,78	0,200 $\delta$ + 0,504	0,85 — 0,90
	1,20 — 1,40	0,150 $\delta$ + 0,370	0,84 — 0,90
	1,66 — 1,82	0,188 $\delta$ + 0,299	0,87 — 0,90
$40^\circ$	0,32 — 0,36	0,750 $\delta$ + 0,300	не хуже 0,80
	0,34	0,540 $\delta$ + 0,580	—«—
	1,18 — 1,28	0,200 $\delta$ + 0,304	—«—

В [3] был сделан вывод о том, что густые решетки более предпочтительны для использования в качестве поляризаторов сканирующих антенн. Действительно, густые решетки, которые не обладают оптимальными характеристиками при нормальном падении, обеспечивают эллиптическую поляризацию с  $r \geq 0,7$  в более широком секторе сканирования (например,  $\alpha = 0,55, \delta = 0,35, 0^\circ < \varphi < 45^\circ$ ). Этот случай полностью попадает в исследованный нами выше диапазон  $\omega_1 \delta \ll 1$  и (14).

Из анализа результатов вычислений определены области геометрических размеров решеток, обладающих стабильностью поляризационных характеристик при изменении угла падения (см. таблицу). В таблице приведены уравнения отрезков линий на плоскости  $x\delta$ , для которых сохраняется  $r \geq 0,7$  в секторе сканирования  $\pm \varphi^\circ$ .

Таким образом, проведенный анализ дает полное представление об основных поляризационных и энергетических свойствах ножевых решеток.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопадов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, изд. ХГУ, г. Харьков, 1973.
2. В. П. Шестопадов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Вісник АН УССР, № 3, 8 (1975).
3. Н. Н. Горобец, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. И. Сергиенко, Радиотехника и электроника, 20, № 12, 2609 (1975).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
21 июля 1976 г.

#### POLARIZATION PROPERTIES OF WAVEGUIDE-TYPE ARRAYS

*A. A. Kirilenko, S. A. Masalov, L. A. Rud', Yu. I. Sergienko*

Based upon the strict solution of the diffraction problems the analytical and numerical investigation is made of polarization and energetic characteristics of knife-type arrays in a wide region of their geometry variation. Such polarizators is of interest from the viewpoint of developing scanning antennas of circular and controlled polarization.

---

УДК 621.396.67

## ОБ ОТКЛИКЕ АНТЕННЫ НА ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПОГЛОЩАЮЩЕГО ТЕЛА

В. И. Абрамов

На основании теоремы взаимности получена формула для отклика остронаправленной антенны на тепловое излучение поглощающего тела при их произвольном взаимном расположении. Отклик антенны представляется (так же, как при условии  $r > D^2/\lambda$ ) в виде интеграла антенного сглаживания от некоторой яркостной температуры, являющейся усредненной по трассе луча кинетической температурой тела. Формула получена в предположении, что изменения температуры и коэффициента поглощения тела на размере антенны малы по сравнению с самими величинами.

Задача об отклике антенны на тепловое излучение поглощающего тела рассматривалась в работах [1, 2]. В этих работах получены выражения для отклика антенны в предположении, что поперечные относительно оси антенны градиенты температуры тела малы по сравнению с продольными градиентами. На практике, однако, это условие не всегда выполняется. Например, при низких углах места поперечные градиенты температуры, наоборот, превышают продольные. Кроме того, выражения работ [1, 2] имеют различный вид при расположении тела в зонах геометрической оптики, Френеля и Фраунгофера, что затрудняет использование этих выражений для восстановления яркостной температуры тела из измеренной антенной температуры, поскольку в общем случае тело расположено одновременно во всех зонах. Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес получить более общие формулы для отклика антенны, свободные от указанных ограничений.

Будем исходить из общего выражения для отклика антенны на тепловое излучение, полученного в работах [1, 2] из теоремы взаимности:

$$T_a = -\frac{1}{P_0} \int_{V_T} T \operatorname{div} \mathbf{S} dV = \frac{1}{P_0} \left[ \oint_{f_T} T (\mathbf{S}n) df + \int_{V_T} \mathbf{S} \operatorname{grad} T dV \right], \quad (1)$$

где  $T_a$  — температура антенны,  $P_0$  — полная излучаемая антенной мощность,  $\mathbf{S}$  — распределение вектора Пойнтинга антенного поля,  $T$  — распределение кинетической температуры тела,  $V_T$ ,  $f_T$  — объем и поверхность излучающего тела.

Строгое вычисление интеграла (1) затруднительно, поскольку в общем случае неизвестны функции  $\mathbf{S}(x, y, z)$  и  $T(x, y, z)$ . Поэтому будем так же, как в [1, 2], проводить приближенное интегрирование, задаваясь определенными моделями поглощающего тела и распределения вектора Пойнтинга.

Рассматривая в дальнейшем остронаправленные антенны и используя результаты работ [3, 4], разобьем пространство, окружающее антенну, на три области (рис. 1, 2);

- 1) ближнюю зону  $V_6$ —область, ограниченную поверхностью параллелепипеда с размером основания  $2x_1 \sim 2y_1 = \pi D$  и длиной  $z_1 = \frac{\pi}{2} D^2/\lambda$ , в которой происходит формирование диаграммы направленности (ДН) антенны и поле имеет очень сложную структуру ( $D$ —размер антенны);
- 2) дальнюю зону  $V_d$ —переднее полупространство вне параллелепипеда, в которой распределение вектора Пойнтинга описывается диаграммой направленности\*;
- 3) область задних лепестков  $V_3$ .

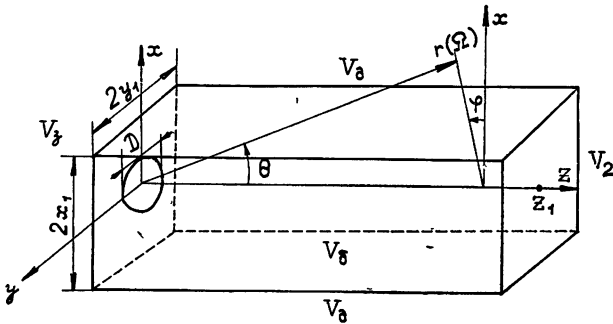


Рис. 1.

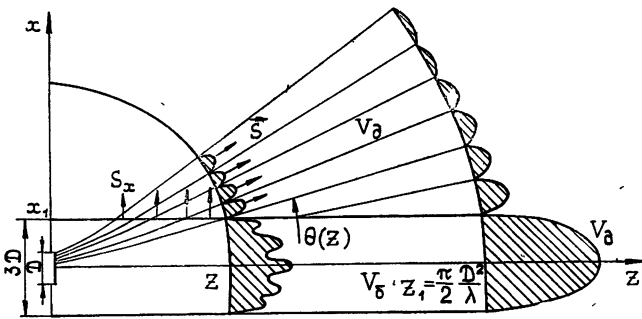


Рис. 2.

При этом каждый интеграл выражения (1) разобьется на три интеграла, соответствующие перечисленным выше областям.

Сначала вычислим отклик антенны  $T_a^6$  на излучение тела из ближней зоны  $V_6$ . Предположим, что кинетическая температура и коэффициент поглощения тела  $\kappa$  являются медленными функциями координат, такими, что их изменения на поперечном сечении параллелепипеда малы по сравнению с самими величинами\*\*. В этом случае, как показывают оценки, характер зависимости вектора Пойнтинга от поперечных координат  $x, y$  оказывает пренебрежимо малое влияние на  $T_a^6$ , которое фактически сводится лишь к некоторому усреднению кинетической тем-

\* Обычное определение дальней зоны как области вне окружности радиуса  $r = \frac{\pi}{2} \frac{D^2}{\lambda}$  отличается от используемого в настоящей работе, которое представляется нам более корректным, поскольку ДН можно считать сформированной уже за пределами области  $V_6$  [3, 4].

\*\* Эти условия справедливы для тропосферы,

пературы тела по сечению параллелепипеда. Учитывая это, из (1) можно получить

$$T_a^6 = \frac{1}{P_0} \int_0^{z_1} T_{cp}(z) \left\{ \frac{\partial S_z^f(z)}{\partial z} + \int_{-y_1}^{y_1} [S_x(x_1, y, z) - S_x(-x_1, y, z)] dy + \right. \\ \left. + \int_{-x_1}^{x_1} [S_y(x, y_1, z) - S_y(x, -y_1, z)] dx \right\} dz, \quad (2)$$

где  $T_{cp}(z)$  — кинетическая температура тела, усредненная по сечению параллелепипеда в плоскости  $z$ ;  $S_z^f$  — полный поток мощности через поперечное сечение параллелепипеда;  $S_{x,y}$  — декартовы компоненты вектора Пойнтинга.

Принимая во внимание баланс мощности для элементарного поглощающего объема  $2x_1 \cdot 2y_1 \cdot dz$  при условии медленности функций  $T(x, y)$ ,  $x(x, y)$  и малости отражений внутри объема, преобразуем выражение (2) к виду

$$T_a^6 = (1 - \beta_3) \int_0^{z_1} [1 - \beta(z)] T_{cp}(z) \exp\left(-\int_0^z \kappa_{cp}(z') dz'\right) \kappa_{cp}(z) dz. \quad (3)$$

Здесь  $\beta(z)$  — зависимость мощности, рассеянной через поверхность параллелепипеда от  $z$  в отсутствие поглощения,  $\beta_3$  — коэффициент рассеяния в область задних лепестков  $V_3$ ,  $\kappa_{cp}$  — коэффициент поглощения, усредненный по сечению параллелепипеда. Легко видеть, что из выражения (3) по теореме о среднем сразу следуют соответствующие формулы работ [1, 2] как частные случаи (3).

Оказывается, что  $\beta(z)$  можно приближенно выразить через диаграмму направленности антенны  $F(\Omega)$ . Покажем это, используя вывод работы [3] о том, что под зоной Фраунгофера для бокового излучения двумерной антенны можно понимать область вне полосы шириной, равной трем размерам антенны. В этой области (с погрешностью 30%\*) поле описывается диаграммой направленности, измеренной на бесконечности, и перераспределения мощности по углам практически не происходит. Тогда, обобщая сказанное на трехмерный случай, из закона сохранения энергии можно записать (рис. 1, 2):

$$\beta(z) = 1 - \frac{\int \Omega_1(z) F(\Omega) d\Omega}{\int_{2\pi} F(\Omega) d\Omega}, \quad (4)$$

где  $\Omega_1(z)$  — зависимость телесного угла, стягивающего поперечное сечение параллелепипеда, от  $z$ ; интегрирование ведется в сферической системе координат  $r, \Omega$  с центром в апертуре антенны (рис. 1).

Подставляя (4) в (3), после несложных преобразований получим приближенную формулу для отклика антенны на излучение тела из ближней зоны, выраженного через ДН антенны:

$$T_a^6 = (1 - \beta_3) \frac{\int_{2\pi} F(\Omega) \left\{ \int_0^{r(\Omega)} T_{cp}(z) \kappa_{cp}(z) \exp\left(-\int_0^z \kappa_{cp}(z') dz'\right) dz \right\} d\Omega}{\int_{2\pi} F(\Omega) d\Omega}, \quad (5)$$

\* Для повышения точности нужно увеличивать ширину полосы [3].

где  $r(\Omega)$  — уравнение поверхности параллелепипеда в сферической системе координат.

Для дальнейшей зоны  $V_d$  прямым интегрированием выражения (1) с учетом баланса мощности легко получить

$$T_a^L = (1 - \beta_3) \frac{\int_{2\pi} F(\Omega) \left[ \int_{r(\Omega)}^{\infty} T(r, \Omega) \chi(r, \Omega) \exp\left(-\int_0^r \chi(r', \Omega) dr'\right) \right] d\Omega}{\int_{2\pi} F(\Omega) d\Omega}. \quad (6)$$

Комбинируя (5) и (6) и учитывая излучение  $T_{a,3}$  из области задних лепестков  $V_3$ , можно записать окончательное выражение для отклика антенны:

$$T_a = (1 - \beta_3) \frac{\int_{2\pi} F(\Omega) T_\pi(\Omega) d\Omega}{\int_{2\pi} F(\Omega) d\Omega} + T_{a,3}, \quad (7)$$

где

$$T_\pi(\Omega) = \int_0^{\infty} T(r, \Omega) \chi(r, \Omega) \exp\left(-\int_0^r \chi(r', \Omega) dr'\right) dr \quad (8)$$

— яркостная температура тела. Заметим, что формулы (7) и (8) общеизвестны, но они обычно считаются справедливыми лишь при  $z > \frac{\pi D^2}{2\lambda}$ .

Таким образом, мы показали, что отклик антенны на тепловое излучение тела при произвольном расположении тела относительно антенны представляется в виде интеграла антенного сглаживания, совпадающего в случае симметричной ДН со сверткой ДН антенны с некоторой яркостной температурой, являющейся усредненной по трассе луча кинетической температурой тела. Естественно, из (7) и (8) при принятых выше приближениях следуют соответствующие выражения работ [1, 2], но без ограничения на малость поперечных градиентов по сравнению с продольными. (Достаточно, чтобы измерения температуры и коэффициента поглощения на поперечном размере антенны были малы по сравнению с самими величинами.) Кроме того, эти общие формулы позволяют более точно учитывать влияние ДН антенны на измеряемое излучение антенны. Например, для повышения точности измерения яркостной температуры атмосферы методом угломестного сканирования можно решать задачу восстановления  $T_\pi$  по измеренной  $T_a$ .

Физический смысл формул (7) и (8) становится понятным, если излучение антенны представлять в виде суперпозиции непрерывного углового спектра плоских волн, угловая зависимость которого пропорциональна диаграмме направленности  $F(\Omega)$ . Каждая плоская волна независимо от других волн дает вклад в температуру антенны, пропорциональный мощности волны  $F(\Omega)$  и яркостной температуре тела (8), а общий отклик антенны в силу ортогональности плоских волн равен сумме откликов всех плоских волн.

В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность И. Ф. Белову и Н. М. Цейтлину за дискуссию и ценные советы при написании статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 1, 21 (1962).
2. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.

3. Б. Е. Кинбер, В. Б. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 9, № 9, 1581 (1964).
4. Б. Е. Кинбер, М. Д. Бронтвейн, Радиотехника и электроника, 15, № 5, 905 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
25 октября 1976 г.

## ON ANTENNA RESPONSE TO THERMAL RADIATION OF AN ABSORBING BODY

*V. I. Abramov*

Based upon the reciprocity theorem the formula is obtained for the pencil-antenna response to thermal radiation of an absorbing body at their arbitrary mutual locations. The antenna response is represented (as in the case of  $r > D^2/\lambda$ ) as the antenna smoothing integral of some brightness temperature averaged over the ray path of the body kinetic temperature. The formula is obtained under the assumption that the variation of temperature and the body absorption coefficient per the antenna size are small as compared with the values themselves.

---

УДК 621.372.414

## О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С КООКСИАЛЬНЫМ КОЛЬЦЕВЫМ ВЫСТУПОМ

*А. А. Кириленко, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов,  
В. Ф. Шинкаренко*

Получено строгое решение задачи о собственных колебаниях цилиндрического резонатора с коаксиальным кольцевым выступом, пригодное для изучения резонансных свойств при произвольных соотношениях между параметрами и длиной волны.

### ВВЕДЕНИЕ

Коаксиальные резонаторы широко применяются в технике сверхвысоких частот, причем изменение величины внутреннего проводника позволяет перестраивать в значительных пределах их собственные частоты. Однако методы расчета указанных выше структур еще не получили достаточного развития. Чаще всего в методах расчета подобных систем делают ряд допущений: одномодовый режим, малость параметров, не всегда обоснованная замена неоднородностей сосредоточенными реактивными нагрузками. Такой подход ограничивает возможности приближенных методов в выяснении электродинамических свойств устройств СВЧ [1-3].

Из сказанного выше вытекает настоятельная необходимость использования новых, более эффективных математических методов при решении краевых задач теории резонаторов. Одним из наиболее перспективных в этом смысле методов является метод, в основе которого лежит идея частичного обращения исходного оператора задачи и сведения на этой основе поставленной задачи к отысканию решения уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. В последнее время использование метода полуобращения привело к появлению строго обоснованных решений нового класса задач электродинамики [4]. Примечательно, что для получения решения задачи (при  $L \approx \lambda$ ) с точностью порядка 1% достаточно найти решение системы линейных алгебраических уравнений всего лишь второго или третьего порядка с простейшими матричными элементами. Оказывается, метод полуобращения может быть с успехом применен также при построении теории некоторых типов резонаторов.

Целью данной работы является получение строго обоснованного решения задачи определения симметричных собственных колебаний магнитного типа в коаксиальном резонаторе определенного вида и установление зависимости собственных частот от геометрических размеров структуры. В качестве модели перестраиваемого резонатора используется закрытый цилиндрический резонатор с коаксиально расположенным кольцевым выступом на одном из торцов (рис. 1). Внутри резонатора коаксиально расположены диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ .



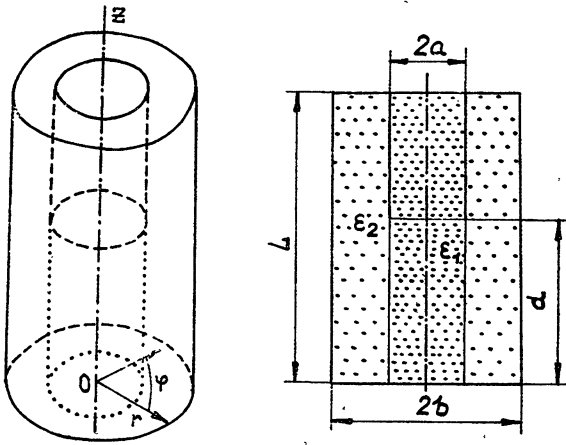


Рис. 1. Цилиндрический резонатор с коаксиальным выступом.

### 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Исходная задача сводится к нахождению собственных функций следующей краевой задачи:

$$\Delta U + k^2 \varepsilon(r) U = 0,$$

$$U|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial U_1}{\partial r} \right|_{\Gamma_3} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{\Gamma_3},$$

$$\left. \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_1 U_1 \right|_{\Gamma_3} = \left. \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon_2 U_2 \right|_{\Gamma_3}.$$

Здесь  $\Gamma_1$  — поверхность торцовых стенок,  $\Gamma_2$  — боковая поверхность кольца и экрана,  $\Gamma_3$  — граница раздела диэлектриков,  $U_1$  и  $U_2$  — значения потенциальных функций  $U$  в области  $0 < r < a$  и в области  $a < r < b$ . Продольные и поперечные компоненты собственных полей определяются через собственные функции  $U$  по формулам [5].

Подчинение искомого поля граничным условиям приводит к следующей системе функциональных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\beta_p$  в разложении  $U$  в области  $0 < r < a$ :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p g_{1p} J_0'(g_{1p} a) \sin h_p z = 0 \quad (d < z < L),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \beta_p g_{1p} F_p \sin h_p z = 0 \quad (0 < z < d),$$
(1)

где

$$F_p = J_0(g_{1p} a) - \frac{g_{2p} Q}{g_{1p} G} J_0'(g_{1p} a),$$

$$G = H_0^{(1)'}(g_{2p} a) - \frac{H_0^{(1)'}(g_{2p} b)}{J_0'(g_{2p} b)} J_0'(g_{2p} a),$$

$$Q = H_0^{(1)}(g_{2p} a) - \frac{H_0^{(1)}(g_{2p} b)}{J_0(g_{2p} b)} J_0(g_{2p} a),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad g_{1p} = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - h_p^2}, \quad g_{2p} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 - h_p^2}, \quad h_p = \frac{p\pi}{L},$$

$J_0(x), J'_0(x), H_0^{(1)}(x), H_0^{(1)'}(x)$  — цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля и их производные по аргументу.

В первоначальном виде система уравнений (1) мало пригодна для решения. Привлекая основные идеи метода решения подобных задач в теории дифракции и распространения электромагнитных волн [4], осуществляем регуляризацию системы функциональных уравнений в нашем случае и сводим задачу к отысканию решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмового типа относительно неизвестных величин  $b_p$ :

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p [\omega_s^p \delta_p + (1 - \delta_p) \delta_{sp}] = 0 \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$\omega_s^p = [V_s^p(u) - V_s^{-p}(u)] - [V_0^p(u) - V_0^{-p}(u)] P_s(u),$$

$$b_p = -\beta_p g_{1p}^2 F_p,$$

$$\delta_p = 1 + \frac{2_p J'_0(g_{1p} a)}{g_{1p} \Delta_1 a F_p} \frac{|p|}{p},$$

$$x = \frac{kL}{\pi}, \quad \Delta_1 = \frac{L}{\pi a}, \quad \theta = \frac{d}{L}, \quad u = \cos \pi \theta, \quad \delta_{sp} = \begin{cases} 1, & s = p \\ 0, & s \neq p \end{cases}.$$

Заметим, что величины  $\delta_p$  стремятся к нулю при  $p \rightarrow \infty$ , как  $O(1/p^2)$ .

Выражения для коэффициентов  $V_s^p(u)$  получены в работе [4], они определяются через полиномы Лежандра  $P_s(u)$ .

Собственными значениями рассматриваемой задачи являются те значения  $x = \frac{kL}{\pi}$ , при которых определитель системы (2) обращается

в нуль:

$$\det \{ \omega_s^p \delta_p + (1 - \delta_p) \delta_{sp} \} = 0. \quad (3)$$

Элементы определителя являются функциями волновых чисел и параметров структуры. Фиксируя параметры, можно найти те значения  $x$ , при которых равенство (3) удовлетворяется. Используя асимптотические оценки матричных элементов системы (2), можно показать, что собственные поля, построенные на основе решения (2), удовлетворяют условию Мейкснера вблизи ребра.

В предельных случаях  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow 1$  из полученного нами решения следуют известные дисперсионные уравнения коаксиального и цилиндрического резонаторов [5, 6].

При нахождении собственных чисел  $x$  существенно то, что матричный оператор системы (2) имеет быстроубывающие коэффициенты, а к самой системе применим метод редукции. Корни усеченных определителей находились с помощью метода Ньютона. При этом в качестве начальных приближений брались решения в тривиальных случаях  $\theta = 0$  или  $\theta = 1$ .

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ Н-ТИПОВ

Нами была поставлена задача изучения собственных частот симметричных колебаний в широком диапазоне длин волн, в том числе сравнимых с характерными размерами резонатора. Для численных

расчетов на ЭВМ были выбраны конструкции с относительной шириной  $b/L = 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,5$ . При этих параметрах проводилось изучение поведения нескольких первых корней дисперсионного уравнения (3) при изменении относительной ширины щели  $\theta$  и параметра  $a/b$ . Вопрос о целесообразности использования резонатора той или иной формы не имеет однозначного решения и должен рассматриваться в соответствии с конкретным назначением устройства.

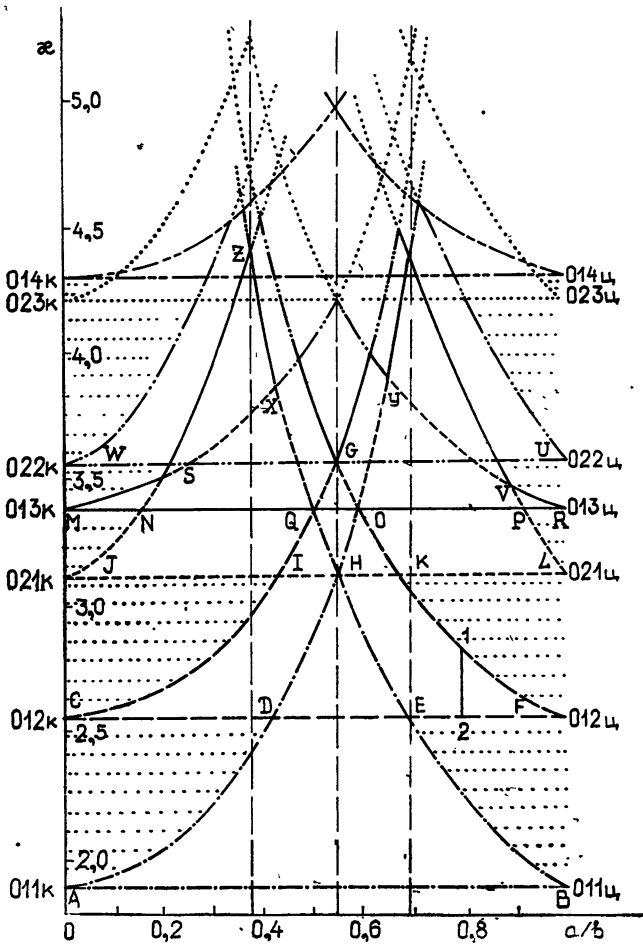


Рис. 2. Зависимости собственных частот коаксиального  $\chi_{0\text{пр}к}$  и цилиндрического  $\chi_{0\text{пр}ц}$  резонаторов от  $a/b$  при  $b = 0,75 L$ .

Укажем теперь на некоторые общие свойства спектра резонатора. Исследование предельных переходов позволяет определить понятие типов колебаний исследуемого резонатора и установить области существования собственных частот каждого из типов в изучаемых структурах. На рис. 2 представлена своеобразная диаграмма настройки простого цилиндрического резонатора радиуса  $a$  и коаксиального резонатора в случае  $b = 0,75 L$ . По оси ординат отложены значения приведенных собственных частот  $\chi$  (индексы колебания поставлены у начала каждой кривой), а по оси абсцисс — параметр  $a/b$ . Так, кривая  $ADHOU$  определяет закон изменения собственных частот волн типа  $H_{011}$  в коаксиальных резонаторах при изменении отношения  $a/b$ . С ростом  $a/b$  зна-

чения собственной частоты коаксиального резонатора увеличиваются, а цилиндрического радиуса  $a$  — уменьшаются. При этом нижними предельными значениями и тех и других являются собственные частоты цилиндра радиуса  $b$ :

$$x_{npk} = x_{npц} = x_{np}.$$

Верхней границей частот первого колебания резонатора с кольцом является кривая  $AHB$  (рис. 2), второго —  $CQHOF$ , третьего —  $JSXQG0YVL$  и т. д. Таким образом, при всех возможных наборах параметров  $\theta$  и  $a/b$  частоты каждого вида колебаний лежат между верхней и нижней границами. Так, частоты второго колебания будут находиться внутри области, ограниченной сверху кривой  $CQHOF$ , а снизу — прямой  $CF$ . Это значит, что если зафиксировать  $a/b$ , к примеру  $a/b = 0,8$ , то, изменяя  $\theta$  в интервале  $0 < \theta < 1$ , мы сможем изменять частоты второго колебания только в пределах, ограниченных точками 1 и 2 на рис. 2, т. е. между  $x_{12} = 2,85$  при  $\theta = 0$  и  $x_{12} = 2,58$  при  $\theta = 1$ .

В связи с жестко определенной нижней границей собственной частоты каждого вида колебаний есть смысл обозначить колебания цилиндрического резонатора с коаксиальным выступом теми же индексами, что и колебания внешнего цилиндра с радиусом  $r = b$ , собственные частоты которого являются нижней границей. Условимся в дальнейшем обозначать первое колебание при  $b = 0,75 L$  колебанием  $TE_{011} (H_{011})$ , второе — колебанием  $TE_{012} (H_{012})$ , третье —  $TE_{021} (H_{021})$  и т. д. Аналогичные обозначения колебаний введем и для других значений  $b/L$ . Однако следует заметить, что порядковые номера колебаний и их индексация могут быть различными для различных  $b/L$ , а области существования каждого из них определяются из аналогичных рисунков. Из рис. 2 видно, что для исследуемого резонатора есть области, существование собственных частот в которых невозможно, например, области  $ADC$ ,  $BEF$ ,  $CIJ$ ,  $FKL$  и т. д., на рис. 2 они затенены точками. Эти области можно назвать зонами молчания, так как никаким подбором  $\theta$  при фиксированном  $a/b$  нельзя найти ни одной резонансной точки, лежащей в этой области.

При небольших выступах ( $\theta \approx 1$ ) смещение собственной частоты резонатора, с одной стороны, пропорционально квадрату амплитуды невозмущенного поля в месте расположения неоднородности, а с другой стороны, — размерам этой неоднородности (см., например, [7]). Так как в месте расположения неоднородности преобладающей компонентой поля является  $H_r$ -составляющая магнитного поля, то с увеличением этой неоднородности (введением кольцевого выпуска) частота будет увеличиваться, подчиняясь приближенно следующему закону:

$$x_{np} = x_{npц} \left[ 1 + \alpha(n, p) J_1^2 \left( \frac{a}{b} \mu_n \right) \frac{a}{b} (1 - \theta) \right], \quad (4)$$

где  $\alpha(n, p)$  — некоторый коэффициент, не зависящий от  $a/b$  и  $\theta$ . Таким образом, зависимость  $x_{np}(a/b)$  при малых выступах с большой точностью повторяет функцию  $J_1^2(x)x$ . Отсюда, например, следует, что графики зависимостей собственных частот  $x_{np}$  от  $a/b$  при  $(1 - \theta) \ll 1$  будут иметь  $n$  вариаций на интервале  $0 \leq a/b \leq 1$ . Отметим, что в силу (4) более сильная зависимость смещения частоты от  $a/b$  наблюдается при значениях  $a/b$ , близких к единице, чем при значениях  $a/b$ , столь же близких к нулю. Это является следствием того, что сам размер неоднородности, а следовательно, и его возмущающее действие, пропорционален радиусу. Как видно из рис. 2, численные расчеты подтверждают

эти закономерности, т. е. наблюдается линейная зависимость поправки к частоте  $\chi_{np}$  от  $1 - \theta$ .

В другом предельном случае  $\theta \approx 0$ , т. е. при малых щелях, мы также сможем аналитически оценить степень влияния этих щелей на собственные частоты колебаний изолированных областей, имеющих место при  $\theta = 0$ . Если рассматривать низшие типы колебаний, то для нахождения собственных частот этих типов из бесконечного определителя системы (2) получаем

$$\chi_{np}(\theta) = \chi_{np} + C\theta^4, \quad (5)$$

где константа  $C$  зависит от параметров задачи  $a$  и  $b$  и номера корня. Коэффициенты фурье-разложений искомых собственных электромагнитных полей будут иметь такой же порядок малости по  $\theta$ . Это значит, что при малых  $\theta$  не только собственные частоты слабо зависят от  $\theta$ , но и структура собственных электромагнитных полей магнитных типов колебаний в резонаторе со щелью практически остается неизменной в сравнении с резонатором без щели.

Необходимо также указать на тот факт, что внутреннее кольцо оказывает сильное экранирующее влияние при  $\theta \approx 0$ . Это происходит вследствие того, что в электрическом поле  $TE_{0np}(H_{0np})$ -волн существует только  $E_\varphi$ -составляющая поля. Известно, что в длинноволновой области при дифракции  $E$ -поляризованной волны на щели на экране практически все поле отражается от экрана. Поскольку  $E_\varphi$ -компонента поля «параллельна» щели, то в нашем случае при  $\theta \ll 1$  влияние одной области резонатора на резонансные свойства другой будет крайне малым.

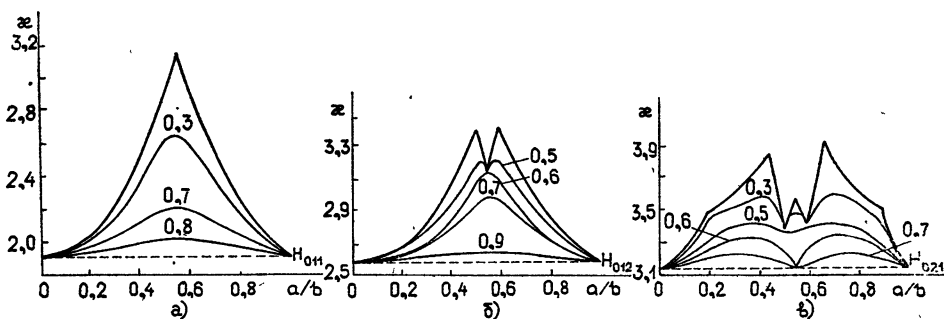


Рис. 3. Зависимости  $\chi(a/b)$  первых трех типов колебаний для различных  $\theta$  и  $b = 0,75 L$ .

Графики, представленные на рис. 3, иллюстрируют зависимости первых трех типов магнитных колебаний от  $a/b$  для резонатора с  $b = 0,75 L$  при некоторых фиксированных значениях  $\theta$ . Для колебаний  $H_{011}$  максимум сдвига частоты резонатора с выступом относительно резонатора без выступа ( $\theta = 1$ ) находится в точке  $a/b = 0,546$ , т. е. вблизи той точки, где коаксиальный выступ попадает в узел электрического поля волны  $H_{011}$  полого цилиндра. Более сложный характер имеют зависимости собственных частот второго и третьего колебаний (рис. 3б, в). Своеобразную форму кривых рис. 3, в частности наличие точек сгущения, можно объяснить, используя рис. 2.

Практически важным для техники СВЧ является вопрос о перестройке частоты. Поскольку управление частотной характеристикой удобно осуществлять изменением высоты кольцевого выступа, т. е. варьированием параметра  $\theta$ , то изучение зависимостей  $\chi(\theta)$  представляет особый интерес.

На рис. 4 представлены расчетные зависимости собственных частот  $\chi_{np}$  от относительной высоты щели  $\theta$  для первых четырех типов колебаний. Оказывается, что с уменьшением высоты внутреннего цилиндрического выступа (увеличением  $\theta$ ) частоты колебаний плавно и монотонно убывают, стремясь в пределе к частотам соответствующих типов полого цилиндрического резонатора радиуса  $b$ . Из графиков видно, что для первых трех типов колебаний в диапазоне  $0,8 < \theta < 1,0$  частота весьма слабо зависит от параметра  $\theta$ . Это объясняется тем, что  $H_{0np}$ -волны имеют лишь  $E_\varphi$ -составляющую электрического поля. Эта составляющая возбуждает азимутальные токи в кольце и при малой высоте кольца не оказывает существенного влияния на поле волны цилиндрического резонатора с  $r = b$ . С увеличением высоты кольца возрастает и возмущение волны, а значения собственных частот монотонно увеличиваются.

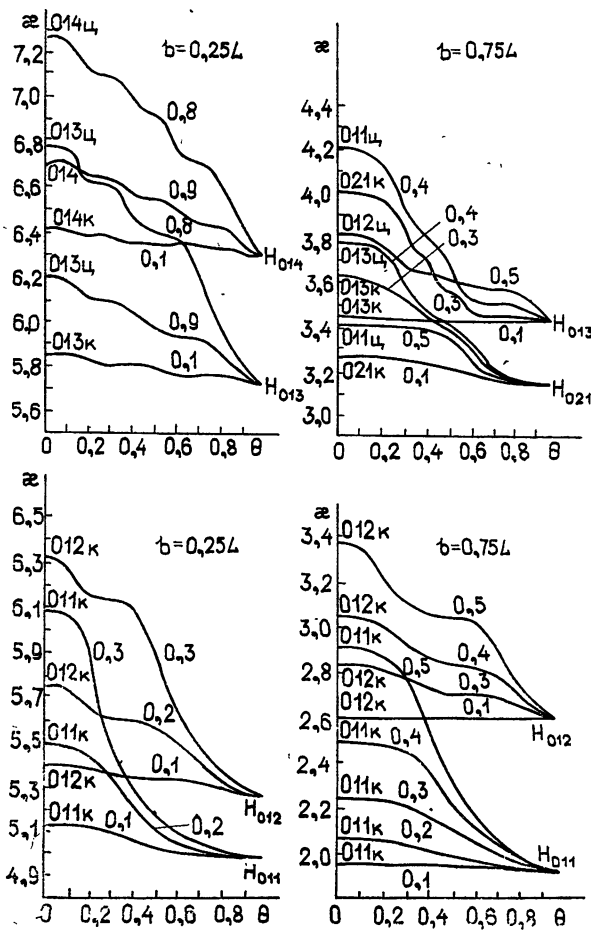


Рис. 4. Зависимости  $\chi(\theta)$  первых четырех типов колебаний для различных  $a/b$  и  $b/L = 0,25; 0,75$ .

При  $\theta \ll 1$  частоты колебаний близки к некоторым частотам коаксиального или внутреннего цилиндрического резонатора, что полностью согласуется с исследованиями, результаты которых приведены выше. В связи с этим необходимо заметить, что в зависимости от величины  $a/b$  частота определенного типа колебаний при  $\theta = 1,0$  может стремиться

с уменьшением  $\theta$  к частотам различных видов колебаний коаксиального или цилиндрического резонатора. Например, из рис. 2 видно, что частота колебания  $H_{021}$  стремится с появлением и ростом коаксиального выступа при  $0 < a/b < 0,156$  к частоте колебания  $H_{021к}$ ; при  $0,156 < a/b < 0,430$  — к  $H_{013к}$ ; при  $0,650 < a/b < 0,870$  — к  $H_{013ц}$ . Причины такого разделения волн по областям были выяснены выше.

Наряду с хорошим согласованием хода расчетных кривых с аналитическими оценками при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta \rightarrow 1$  отметим еще несколько обстоятельств. Во-первых, наиболее широкий диапазон перестройки по  $\theta$  наблюдается вблизи тех значений  $a/b$ , где имеется наибольшая разность частот между верхней и нижней границами собственной частоты колебания. Во-вторых, при  $p \neq 1$  графики  $\chi_{np}(\theta)$  совершают колебания вокруг средней линии, причем число вариаций равно индексу  $p$ . Поэтому при необходимости линейной перестройки резонатора удобнее всего использовать тип колебаний с индексом  $p = 1$ .

После того как изучены основные закономерности поведения зависимости собственных частот исследуемого резонатора как функций параметров  $a/b$  и  $\theta$  в отдельности, определенный интерес представляет рассмотрение зависимости собственных частот как функций одновременно двух аргументов  $a/b$  и  $\theta$ . На рис. 5, 6 представлены линии постоянного значения собственных частот (линии уровня поверхности  $\chi$ ) в координатах  $a/b, \theta$  для первых типов колебаний  $\chi_{11}$  в резонаторах с  $b/L = 0,5$  и  $b = 0,25 L$ . По оси абсцисс отложены значения  $\theta$ , а по оси ординат — параметр  $a/b$ . Заметим, что на линиях  $\theta = 1, a/b = 1$  и  $a/b = 0$  значения собственных частот изучаемых структур равны собственным частотам волны  $H_{011}$  резонатора с  $r = b$ , например, для резонатора с  $b = 0,5 L$   $\chi_{11} = 2,64$  (рис. 5). Значения собственных частот на линии  $\theta = 0$  те же, что и на графиках типа рис. 2, т. е. на интервале  $0 < a/b < 0,546$  это собственные частоты  $\chi_{11}$  коаксиальных резонаторов, а на интервале  $0,546 < a/b \leq 1$  — цилиндрических с  $r = a$ .

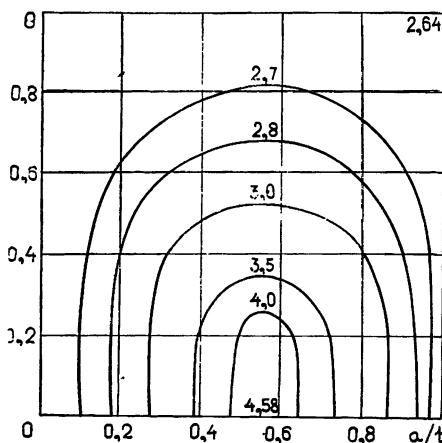


Рис. 5.

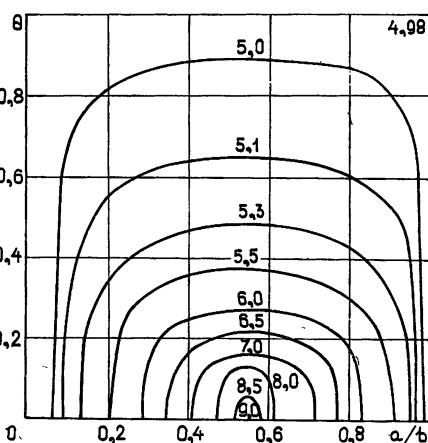


Рис. 6.

Рис. 5. Линии равных значений  $\chi_{011}$  в координатах  $a/b, \theta$  для  $b = 0,5 L$ .

Рис. 6. Зависимости  $\chi_{011}(a/b, \theta)$  для  $b = 0,25 L$ ,

Тот факт, что все «эквипотенциалы» имеют экстремум по параметру в точке  $a/b = 0,546$ , еще раз подтверждает, что максимальная перестройка частоты колебания  $H_{011}$  в исследуемых резонаторах возможна в случае  $a/b = 0,546$ . Нетрудно также заметить, что кривые «эквипотенци-

циалей» входят в линию  $\theta = 0$  почти под прямым углом, что вполне согласуется с исследованиями, проведенными выше: при малых  $\theta$  приращение собственных частот пропорционально  $\theta^4$  (см. (5)). На рис. 5, 6 также ясно видны области слабой зависимости  $\kappa(\theta)$ . Так, при больших значениях  $\theta$  и  $a/b$ , близких к нулю или единице, линии «эквивалентных потенциалов» весьма разрежены. Значение картин  $\kappa(a/b, \theta)$  состоит в том, что они позволяют быстро найти размеры резонаторов по заданной рабочей частоте. Можно, наоборот, задавшись геометрическими размерами, определить частоту.

Численно установлено также, что наличие диэлектриков внутри полости резонатора ( $\epsilon_1 \approx 2$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ) может приводить к значительному разделению частоты рабочего колебания от частоты других типов. Анализ распределения резонансных частот позволил показать, как можно управлять частотными характеристиками, изменяя параметры исследуемых резонаторов, а также подойти к решению вопроса о подборе колец, поддерживающих заданный тип колебаний.

В данной работе расширена область применения точного метода задачи Римана — Гильберта для решения нового класса задач электродинамики. На этой основе выполнено теоретическое исследование симметричных магнитных типов колебаний в цилиндрическом резонаторе с коаксиальным кольцевым выступом, получено дисперсионное уравнение в виде хорошо сходящегося бесконечного определителя. Изучены зависимости собственных частот первых четырех типов симметричных магнитных колебаний от геометрических параметров резонаторов.

Метод решения, использованный выше, может быть распространен на случай электрических колебаний и на случай нескольких колец, расположенных последовательно вдоль оси цилиндра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, А. Б. Маненков, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1777 (1973).
2. А. Е. Елисеев, Н. А. Хижняк, в сб. Материалы пятого всесоюзного семинара по численным методам решения внутренних краевых задач электродинамики, изд. МРТИ, Минск, 1975, стр. 53
3. Л. А. Вайнштейн, А. Б. Маненков, в сб. Материалы пятого всесоюзного семинара по численным методам решения внутренних краевых задач электродинамики, изд. МРТИ, Минск, 1975, стр. 58.
4. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971, стр. 400.
5. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 581.
6. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, Л., 1949, стр. 425.
7. В. Б. Штейншлейгер, Явление взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах, Оборониздат, М., 1955, стр. 114.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
24 июня 1976 г.

#### INHERENT OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL RESONATOR WITH COAXIAL RING FLANGE

A. A. Kirilenko, S. A. Masalov, V. P. Shestopalov, V. F. Shinkarenko

A strict solution of the problem of inherent oscillations of a cylindrical resonator with coaxial ring flange is obtained which is used for studying resonance properties at arbitrary relations between the parameters and the wavelength.



УДК 538.56

## О ЗАВИСИМОСТИ ПОТЕРЬ НА СВЧ ОТ СТЕПЕНИ КОНВЕРСИИ ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТА

*В. Н. Генкин, М. С. Китай*

Исследована зависимость поглощения в диапазоне 52—79 ГГц от количества остаточного мономера, находящегося в полимерной матрице. Она характеризуется прямой с коэффициентом пропорциональности  $K = (2,1 \pm 0,34) \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1} (\%)^{-1}$  ММА. На основании модели Дебая определено время релаксации вращения молекул полярного мономера  $\tau = 3 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ .

1. Известно, что полимерные материалы, синтезированные из полярных молекул мономера, обладают относительно высокими потерями в миллиметровом диапазоне длин волн (см., например, [1]). Эти потери обусловлены как полимерной матрицей [2], так и молекулами мономера, всегда присутствующими в тех или иных количествах в полимере [3].

Целью настоящей работы является исследование диэлектрических потерь полиметилметакрилата (ПММА) в зависимости от концентрации. в нем мономера и оценка параметров релаксационного механизма, связанного с молекулярным мономером в диапазоне частот 52—79 ГГц.

2. Относительно высокие потери в исследуемых образцах позволяли фиксировать ослабление волны при ее однократном прохождении через образец. Для измерений использовалась квазиоптическая система\*, блок-схема которой приведена на рис. 1. Фланцы, которыми оканчиваются сверхразмерные волноводы, образуют низкодобротный открытый резонатор. Расчет потерь в этой системе при наличии поглощающего диэлектрика очень сложен\*\*. Поэтому решено было ввести объемный аттенюатор 6, величина потерь на толщине которого была бы достаточна для подавления резонансных свойств полости. В то же время надо было избежать отражения от границы между аттенюатором и исследуемым образцом 5. Этим требованиям можно удовлетворить, выбрав в качестве аттенюатора пластину достаточно большой толщины (в нашем случае потери на толщине пластины должны быть не менее 7 дБ) из того же материала, что и исследуемый образец. Нам пришлось ограничиться лишь измерениями разности коэффициентов поглощения в различных образцах, поскольку из-за большой толщины пластины 6 воспользоваться модельным расчетом [5] для описания дифракционных потерь [6] невозможно.

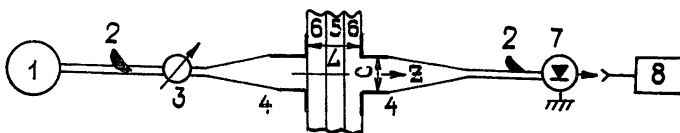


Рис. 1.

\* Размеры образцов не соответствовали сечению волноводов, а их механическая обработка была нежелательна из-за явления механодеструкции. Это исключало возможность измерения потерь при помещении образцов непосредственно в волновод.

\*\* Даже без диэлектрика эту задачу удастся решить с большим трудом [4].

Образцы ПММА, имевшиеся в нашем распоряжении, содержали, согласно данным полярографического анализа, от 0,9 до 13 весовых процентов метилметакрилата (ММА). В качестве эталонного образца, относительно которого измерялись диэлектрические потери, использовался образец с содержанием мономера 0,8%. С помощью несколько видоизмененной методики нами также было измерено поглощение в чистом ММА.

Основные измерения были проведены на частоте  $f = 70,8$  ГГц. Для образцов с высокой степенью конверсии были проведены частотные измерения в интервале 52—79 ГГц.

На рис. 2 приведена зависимость разности коэффициентов поглощения  $\alpha - \alpha_{\text{эт}}$  на частоте  $f = 70,8$  ГГц от разности содержания мономера  $\rho - \rho_{\text{эт}}$  (в процентах). Индекс «эт» соответствует эталонному образцу. Эта зависимость может быть описана прямой с коэффициентом пропорциональности

$$K = (2,1 \pm 0,34) \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1} (\%)^{-1} \text{ ММА.}$$

Частотные измерения показали, что при увеличении частоты от 52 до 79 ГГц величина  $\alpha - \alpha_{\text{эт}}$  плавно уменьшается примерно в 1,5 раза.

Относительно результатов промера чистого ММА будет сказано ниже.

Относительная точность определения концентрации ММА по прямой 2 равна 0,16 при степени конверсии полимера 90%. Согласно [2] поглощение полимера на частоте 70 ГГц равно  $0,13 \text{ см}^{-1}$ . Таким образом, поглощение матрицы сравнимо с поглощением мономера при концентрации последнего 6%. Отметим, что линейная экстраполяция прямой рис. 2 на область 100-процентной концентрации мономера дает коэффициент поглощения в 3,3—4 раза меньший, чем определяемый нами экспериментально.

Отметим, что это не соответствует результатам работы [3], указывающим на линейную зависимость потерь на частоте  $f = 10$  ГГц от концентрации ММА вплоть до 100% концентрации. Изменение величины релаксационных потерь в пересчете на одну молекулу мономера при переходе от твердой матрицы к жидкости представляется вполне естественным из-за различного взаимодействия молекулы ММА с ее окружением в том и в другом случае.

3. Величина  $\alpha$  является макроскопической характеристикой. Определение макроскопических характеристик требует привлечения тех или иных модельных представлений. Общепринятой является релаксационная модель [7], характеризующаяся  $\tau$  — временем релаксации.

Образцы ПММА со степенью конверсии, меньшей 100%, представляют из себя бинарную систему, следовательно,

$$\epsilon'(\omega) - 1 = (\mathcal{E}'_1(\omega) - 1) \rho_1 + (\mathcal{E}'_2(\omega) - 1) \rho_2,$$

$$\epsilon''(\omega) = \mathcal{E}''(\omega) \rho_1 + \mathcal{E}''_2(\omega) \rho_2 = \frac{\alpha \lambda}{2\pi \sqrt{\epsilon'(\omega)}}. \quad (1)$$

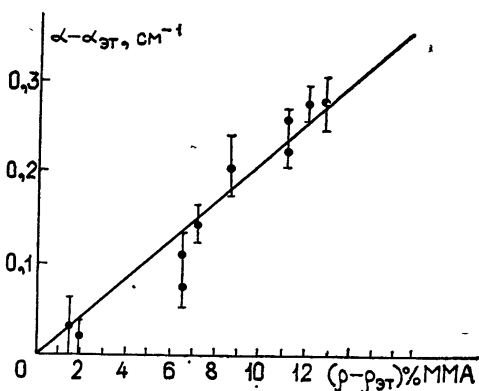


Рис. 2.

Здесь  $\mathcal{E}_i$  — комплексная парциальная диэлектрическая проницаемость,  $\rho_i$  — концентрация вещества ( $i = 1$  соответствует мономеру,  $i = 2$  — полимеру),  $\omega$  — частота,  $\lambda$  — длина волны.

Дисперсия  $\mathcal{E}_2(\omega)$  в исследуемом диапазоне несущественна [7], поскольку в этом диапазоне  $\mathcal{E}_2 \rho_2 \ll 1$  [2]. Если учесть еще, что  $\rho_1 \ll \rho_2$ , то при анализе эксперимента можно опустить первое слагаемое в верхнем равенстве (1) и считать при этом  $\epsilon'$  константой, не зависящей ни от частоты, ни от степени конверсии полимера\*. По измерениям [8], величина  $\epsilon' = 2,61$ .

При переходе от образца к образцу относительное изменение плотности полимерной матрицы существенно меньше, чем точность определения коэффициента поглощения, поэтому член, связанный с потерями матрицы, в нижнем равенстве (1) можно считать постоянным и, следовательно,

$$\mathcal{E}_1''(\omega) (\rho_1 - \rho_{\text{ст}}) = \sqrt{\epsilon'} \frac{c}{\omega} (\alpha - \alpha_{\text{ст}}). \quad (2)$$

Используя соотношение (2), можно установить, вообще говоря, зависимость  $\epsilon''(\omega)$  от частоты. Но определить время релаксации мономера в полимерной матрице по частотному ходу  $\epsilon''(\omega)$  невозможно из-за недостаточной точности измерений. По кривой частотного хода можно сказать только, что  $\tau > 2 \cdot 10^{-11}$  с (в предположении дебаевской формы линии поглощения).

Однако, используя абсолютную величину коэффициента поглощения, все-таки возможно получить оценку времени релаксации. Для простоты молекулу ММА будем считать сферической\*\* с постоянным дипольным моментом 1,6 Дебая\*\*\*. В соответствии с [7] в этом случае

$$\left( \frac{3\epsilon_s}{2\epsilon_s + n^2} \right) \left( \frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{4\pi}{3kT} (N_1 - N_{\text{ст}}) \mu_2 g \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \mathcal{E}_1''(\omega) (\rho_1 - \rho_{\text{ст}}). \quad (3)$$

Мнимая часть диэлектрической проницаемости записана с учетом влияния окружающей среды в предположении дебаевской формы линии поглощения. В формуле (3)  $\epsilon_s$  — действительная часть диэлектрической проницаемости среды на частоте  $\omega$ ,  $n^2$  — то же на частоте, много большей, чем  $\tau^{-1}$ ,  $N_1$  и  $N_{\text{ст}}$  — плотность молекул мономера в сравниваемых образцах,  $g$  — так называемый «структурный» фактор\*\*\*\*.

Непосредственное вычисление величины  $g$  невозможно. Однако оценить ее можно, приняв два предположения: во-первых, будем считать, что структурный фактор, определяемый близкодествующим взаимодействием молекул, не зависит от степени конверсии, во-вторых, будем

\* Поэтому в качестве аттенюатора решено было выбрать образцы с минимальной — из имевшихся — степенью конверсии (о требованиях, предъявлявшихся к аттенюатору б, см. выше).

\*\* Объем, занимаемый молекулой ММА, по форме близок к эллипсоиду вращения с полуосями 2,5 Å и 1 Å. Форма соответствующей полости в массе полимера не позволяет получить достаточно надежных соотношений между действующим и макроскопическим полем. Естественно, полученное ниже значение  $\tau$  имеет лишь смысл оценки по порядку величины.

\*\*\* Методика, изложенная в [9], позволяет оценить разницу между величинами дипольных моментов молекул металакрилата (МА) и ММА. Она равна 0,1 Дебая. Дипольный момент молекулы МА известен — 1,67 Дебая [10], таким образом, для молекулы ММА мы получаем  $\mu = 1,6$  Дебая ( $\mu$  — обозначение дипольного момента).

\*\*\*\* Впервые «структурный» фактор  $g = 1 + z \cos \gamma$ , где  $z$  — число соседей у рассматриваемой молекулы,  $\gamma$  — угол между дипольными моментами соседних молекул, черта соответствует усреднению по статистическому ансамблю, был введен Кирквудом для того, чтобы учесть недипольные силы взаимодействия молекул (см., например, [11]).

предполагать, что величина  $g$  примерно одинакова для близких по структуре молекул.

Фактор  $g$  может быть определен для жидкого МА. Для этого вещества экспериментально найдены значения  $\epsilon_s = 6,58$ ,  $\epsilon_\infty \approx n^2 \approx 2,40$  [12], с другой стороны, для него известен дипольный момент [10] и плотность  $\rho = 0,956 \text{ г/см}^3$  [13]. Тогда в соответствии с соотношениями [7]

$$g = \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{3\epsilon_s} (2\epsilon_s + \epsilon_\infty) \left( \frac{3}{\epsilon_\infty + 2} \right)^2 \frac{3kT}{4\pi N\mu^2} \quad (4)$$

получаем  $g = 0,8$ . Подставляя в (3) соответствующие численные значения, находим  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ .

Авторы благодарят В. С. Авербаха, С. Н. Власова, А. М. Леонова за полезные дискуссии, а также Л. И. Ефимова и А. Я. Лазариса за представление образцов полимера с различной концентрацией ММА.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. Culshou and M. V. Anderson, Proc. IEEE, 109, 820 (1962).
2. U. Strom, I. R. Hendrickson, R. I. Wagner and P. C. Taylor, Solid State Commun., 15, 1871 (1974).
3. С. Е. Бреслер, Э. Н. Казбеков, Е. М. Саминский, Высокомолекулярные соединения, 1, 132 (1959).
4. V. A. Bogovkov and B. Ye. Kinber, Proc. IEEE, 62, 1416 (1974).
5. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 8, 1111 (1963).
6. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 8, 1264 (1963).
7. Г. Фрелих, Теория диэлектриков, ИЛ, М., 1960.
8. М. П. Носырев, Вопросы радиоэлектроники, серия РТ, вып. 4, 38 (1974).
9. Т. И. Темникова, Курс теоретических основ органической химии, изд. Химия, Л., 1968.
10. О. А. Осипов, В. И. Минкин, А. Д. Гарновский, Справочник по дипольным моментам, Высшая школа, М., 1971.
11. Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, изд. АН СССР, М.—Л., 1945.
12. Я. Ю. Ахадов, Диэлектрические свойства чистых жидкостей, изд. Госстандарта СССР, М., 1972.
13. Справочник химика, т. 2, ГХИ, М.—Л., 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 мая 1976 г.

#### THE DEPENDENCE OF UHF LOSSES ON POLYMETIL METACRILATE CONVERSION DEGREE

V. N. Genkin, M. S. Kitay

The dependence of absorption within the range 52—79 GHz on the content of the remainder monomer being in polymernomatrix is investigated. It is characterized by a straight line with the proportionality coefficient  $K = (2.1 \pm 0.34) \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1} (\%)^{-1}$  MMA. The relaxation time of rotation of polar monomer molecules  $\tau = 3 \cdot 10^{-11} \text{ с}$  is determined on the basis of Debye model.

УДК 621.382

## АБСОЛЮТНАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

А. А. Игнатов, Ю. А. Романов

Исследована абсолютная отрицательная проводимость (АОП) в полупроводниках со сверхрешеткой (СР), возникающая под действием интенсивного высокочастотного поля. Показана возможность существования АОП как вблизи нулевой точки ( $j_c = 0$ ,  $E_c = 0$ ) вольт-амперной характеристики СР, так и в интервалах конечных постоянных полей, не включающих нулевую точку. Области существования АОП в зависимости от частоты и амплитуды высокочастотного поля носят зонный характер.

1. В настоящее время известно несколько механизмов абсолютной отрицательной проводимости в полупроводниках, возникающей при воздействии на полупроводник достаточно интенсивного источника энергии. В интервале электрических полей, где существует АОП, электрический ток направлен против поля. В многодолинных полупроводниках (типа Ge, Si) под воздействием греющего постоянного электрического поля, направленного симметрично относительно расположения долин, возможно появление АОП в поперечном по отношению к этому полю направлении (эффект Эрлбаха [1]). Этот эффект обусловлен различным разогревом электронов в неэквивалентно ориентированных по отношению к полному полю долинах и является частным случаем эффекта Сасаки. В работе [2] проведено экспериментальное исследование эффекта Эрлбаха и выявлены условия его существования в *n*-Ge.

В работах [3, 4] рассмотрен механизм АОП, обусловленный неравновесными носителями, возбуждаемыми в полупроводниках оптической накачкой в состоянии с энергиями, близкими к энергии оптического фотона.

Другой тип АОП, предсказанный и экспериментально исследованный в [5, 7], реализуется в полупроводниках с *N*-образной вольт-амперной характеристикой (ВАХ) под воздействием сильного переменного поля частоты  $\omega \ll \tau_N^{-1}$  ( $\tau_N$  — время установления *N*-образной ВАХ). В этом случае АОП возникает в направлении поляризации переменного поля и обусловлена тем, что при положительном постоянном смещении средняя за период переменного поля плотность тока

$$\langle j \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T j(t) dt, \quad (1)$$

где  $j(t)$  — мгновенное значение тока, определяемое суммарным полем:

$$E(t) = E_c + E_\omega \cos \omega t, \quad (2)$$

в тот же момент времени может стать отрицательной. Для этого необходимо, чтобы отрицательная дифференциальная проводимость квазистатической ВАХ была отрицательной и достаточно большой. В рабо-

тах [5-7] исследовано также влияние доменизации СВЧ-поля на возникновение абсолютного отрицательного интегрального сопротивления.

В настоящей работе исследован отмеченный ранее авторами в [8] новый тип АОП, который может существовать в полупроводниках с узкой зоной проводимости (например, SiC, ZnS) и в периодических твердотельных структурах — сверхрешетках (см., например, обзор [9]) — при воздействии на них интенсивного высокочастотного (не квазистатического) поля. Рассмотрение проводится на примере закона дисперсии носителей, характерного для СР. В отличие от [8] постоянное поле  $E_c$  считается не малым. Найдены области отрицательной проводимости в зависимости от параметров полей и системы. Приведены результаты численных расчетов.

Наличие СР в полупроводнике приводит к разбиению энергетических зон электрона на совокупность узких (обычно менее 0,1 эВ) разрешенных и запрещенных минизон. При этом, так как период СР обычно в десятки и даже сотни раз превышает период основного кристаллического потенциала, даже в сравнительно слабых переменных полях

$$E_{\omega_{\pm}} \approx E_* = \frac{\hbar}{ed} |\omega + i\tau^{-1}| \quad (d — \text{период СР, } \tau^{-1} — \text{обратное время релаксации электроннй функции распределения)}$$

электронны распределяются по всей минизоне Бриллюэна со сравнимой плотностью.

Обозначим через  $\bar{f}_\omega$  среднюю по времени функцию распределения электронов в присутствии переменного поля, а через  $f'_\omega$  — отклонение от нее. Возникающий при дополнительном наложении постоянного поля  $E_c$  постоянный ток  $j_c$  можно представить из двух слагаемых. Первое слагаемое  $j_{c1}$  обусловлено воздействием  $E_c$  на  $\bar{f}_\omega$  и описывается обычным выражением, в котором равновесная функция распределения заменена на  $\bar{f}_\omega$ . Соответствующая часть проводимости в рассматриваемой нами модели всегда положительна. Второе слагаемое  $j_{c2}$  обусловлено модуляцией (демодуляцией) переменным полем возникающего под дополнительным воздействием постоянного поля изменения переменной части функции распределения. Знак этого тока (тока детектирования) определяется инерционными свойствами электрона и при не малых  $\omega\tau$  отрицателен. В случае, если  $|j_{c2}| > |j_{c1}|$ , полная проводимость сверхрешетки по постоянному полю отрицательна, т. е. возникает АОП. В зависимости от параметров системы и переменного поля АОП может возникать вблизи  $E_c = 0$  при конечных  $E_c$  либо вообще отсутствовать (АОП вблизи  $E_c = 0$  исследована в [8]).

2. Перейдем к количественному рассмотрению вопроса. Как и в [8], энергетический спектр электронов будем описывать соотношением

$$\varepsilon(p) = \frac{p_{\perp}^2}{2m_*} + \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \cos \frac{p_z d}{\hbar} \right), \quad (3)$$

где  $p_{\perp}$ ,  $m_*$  — импульс и эффективная масса, связанные с движением частиц поперек периода СР,  $p_z$  — компонента импульса вдоль периода,  $d$  — период СР,  $\Delta$  — ширина разрешенной минизоны.

Будем считать выполненными следующие неравенства:

$$\Delta \gg \hbar\tau^{-1}; \quad (4)$$

$$\Delta_g \gg \hbar\omega, eEd; \quad (5)$$

$$\Delta \gg eEd. \quad (6)$$

Здесь  $\Delta_g$  — характерная ширина соседних запрещенных минизон.

Неравенство (4) является необходимым условием существования определенного закона дисперсии в минизоне, (5) позволяет ограничиться одноминизонным приближением, (6) дает возможность квазиклассического описания движения частиц. При этих условиях поведение частиц можно описывать классическим кинетическим уравнением. Используя общее решение кинетического уравнения, приведенное в [10], получим для постоянной составляющей тока, возбуждаемого полем (2),

$$j_c = j \int_0^{\infty} \frac{dt_1}{\tau} \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \sin\left(\frac{edE_c}{\hbar} t_1\right) J_0\left(2 \frac{edE_{\omega}}{\hbar \omega} \sin \frac{\omega t_1}{2}\right), \quad (7)$$

$J_0$  — функция Бесселя,  $j_0 = \text{const}$ . Выражение (7) справедливо при любой симметричной равновесной функции распределения. В случае максвелловской функции распределения  $j_0 = \frac{ed \Delta n I_1(\Delta/2kT)}{2\hbar I_0(\Delta/2kT)}$ , где  $n$ ,  $T$  — концентрация и температура носителей,  $I_0$ ,  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя. Для ферми-статистики величина  $j_0$  вычислена в [12, 13].

Используя разложение функции  $J_0(Z \sin \alpha)$  в ряд Фурье, выражение для  $j_c$  можно привести к виду

$$j_c = j_0 \left\{ J_0^2(Z_{\omega}) \frac{Z_c}{1 + Z_c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(Z_{\omega}) \frac{Z_c (1 + Z_c^2 - k^2 \alpha^2)}{[1 + (Z_c - k \alpha)^2] [1 + (Z_c + k \alpha)^2]} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \omega \tau, \quad Z_{\omega} = \frac{eE_{\omega} d}{\hbar \omega}, \quad Z_c = \frac{eE_c d}{\hbar} \tau.$$

При  $E_{\omega} \rightarrow 0$   $J_0 \rightarrow 1$ ,  $J_k \rightarrow 0$  ( $k \neq 0$ ) и из (8) следует известная ВАХ СР [11, 12]:

$$j_c = j_0 \frac{Z_c}{1 + Z_c^2}. \quad (9)$$

Падающий участок на статической ВАХ (9) связан с эффектом брэгговского отражения электронов от краев минизон и экспериментально исследовался в работах [15, 16]. Влияние брэгговских отражений на высокочастотную линейную проводимость электронной плазмы твердого тела, помещенной в интенсивное постоянное поле, теоретически исследовалось в [17].

3. В квазистатическом случае,  $\alpha \ll 1$ , интеграл (7) легко вычисляется:

$$j_c = \frac{j_0}{2^{1/2}} \left\{ \frac{[(1 - Z_c^2 + Z_{\tau}^2)^2 + 4Z_c^2]^{1/2} - (1 - Z_c^2 + Z_{\tau}^2)}{(1 - Z_c^2 + Z_{\tau}^2)^2 + 4Z_c^2} \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

где  $Z_{\tau} = \frac{eE_{\omega} d \tau}{\hbar}$ , остальные обозначения прежние. Как видно из (10),

в квазистатическом случае ни при каких значениях  $Z_{\tau}$  АОП не возникает, т. е.  $j_c Z_c > 0$ . Однако область существования отрицательной дифференциальной проводимости (ОДП) и ее величина зависят от амплитуды переменного поля. С ростом величины переменного поля ОДП возникает при более сильных постоянных полях. На рис. 1 представлена граница, разделяющая области положительной и отрицательной дифференциальной проводимости на плоскости  $Z_c Z_{\tau}$ .

В обратном предельном случае,  $\alpha \gg 1$ ,  $j_c$  имеет резонансы при  $\Omega_c = k\omega \pm \tau^{-1} \left( \Omega_c = \frac{ed}{\hbar} E_c - \text{штарковская частота} \right)$ . Вблизи этих резонансов

$$j_c = j_0 \left[ \frac{Z_c}{1 + Z_c^2} J_0^2(Z_\omega) \pm \frac{J_k^2(Z_\omega)}{1 + (Z_c - k\alpha)^2} \right]. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при штарковской частоте, приблизительно кратной частоте переменного поля, постоянное поле может быть неустойчивым. Очевидно, что указанные резонансы не проявляются при  $Z_\omega \ll 1$ .

В области  $1 \ll \alpha \gg Z_c$  из (8) имеем

$$j_c = j_0 \left[ J_0^2(Z_\omega) \frac{Z_c}{1 + Z_c^2} - 2 \frac{Z_c}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k^2(Z_\omega)}{k^2} \right], \quad (12)$$

т. е. вблизи  $J_0(Z_\omega) \rightarrow 0$  поле  $E_c$  также неустойчиво. В области  $1 \ll \alpha \ll Z_c$

$$j_c = j_0/Z_c, \quad (13)$$

поле  $E_c$  устойчиво.

Рассмотрим теперь случай конечных значений  $\alpha$ . В пределе достаточно слабого постоянного поля,  $Z_c \rightarrow 0$  ( $Z_c \ll 1$ ), из (8) получаем результат работы [8]:

$$j_c = \sigma(Z_\omega, \alpha) E_c = \sigma_0 \left[ J_0^2(Z_\omega) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(Z_\omega) \frac{1 - k^2 \alpha^2}{(1 + k^2 \alpha^2)^2} \right] E_c, \quad (14)$$

где  $\sigma_0 = j_0 \frac{ed\tau}{\hbar}$ .

Из (14) нетрудно видеть, что при не очень малых  $\alpha$  в областях вблизи нулей функции Бесселя  $J_0(Z_\omega) \rightarrow 0$ ,  $\sigma(Z_\omega, \alpha) < 0$  и основное состояние системы  $E_c = 0$ ,  $j_c = 0$  становится неустойчивым. Области неустойчивости в плоскости параметров  $Z_\omega$  и  $\alpha$ , полученные с помощью численного анализа выражения (14), приведены на рис. 2.

Таким образом, существенным фактором, необходимым для возникновения АОП в СР, является наличие временной дисперсии. Этот факт указывает на принципиальное отличие рассматриваемого здесь эффекта от описанного в [5-7], где АОП связана непосредственно с квазистатической ВАХ и существует при  $\omega \tau_N \rightarrow 0$ .

В общем случае конечных  $Z_c$  и  $\alpha$  выражения (7), (8) упростить не удастся. В связи с этим был проведен численный анализ интеграла (7) на плоскости  $Z_c Z_\omega$ . Области АОП при  $\alpha = 1$  представлены на рис. 3. При  $Z_c \rightarrow 0$  ширина областей неустойчивости на плоскости  $Z_\omega Z_c$  соответствует ширине найденных выше областей неустойчивости на плоскости  $Z_\omega \alpha$ . Построенные области неустойчивости позволяют судить о характере ВАХ СР при различных значениях параметра  $Z_\omega$ . Так, например, при  $\alpha = 1$ ,  $Z_\omega = 2,5$  область АОП на вольт-амперной характеристике сосредоточена только вблизи начала координат  $j_c = 0$ ,  $Z_c = 0$  и при  $Z_c = 0,6$  проводимость СР становится снова положительной. С ростом интенсивности высокочастотного поля вид ВАХ изменяется. При  $Z_\omega \approx 3,8$  область АОП уже не включает нулевую точку и расположена вблизи  $Z_c \approx 1,5$ . При дальнейшем изменении  $Z_\omega$  на ВАХ появляются несколько участков АОП.



В качестве примера на рис. 4 представлены вольт-амперные характеристики при нескольких значениях параметра  $Z_\omega$ . Осцилляции ВАХ и наличие нескольких (в частности, смыкающихся) областей АОП при фиксированных  $Z_\omega$  связаны с указанными выше резонансами. В приведенных примерах эти резонансы выражены слабо из-за малости  $\alpha$ .

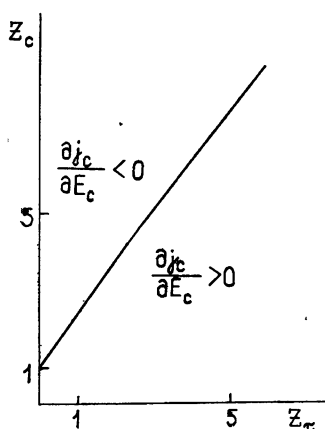


Рис. 1.

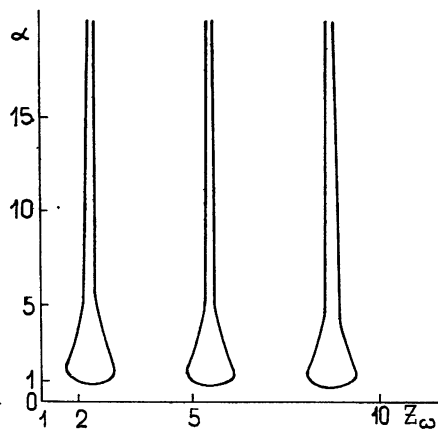


Рис. 2.

Рис. 1. Граница областей положительной ( $\frac{\partial j_c}{\partial E_c} > 0$ ) и отрицательной ( $\frac{\partial j_c}{\partial E_c} < 0$ ) дифференциальной проводимости в плоскости параметров  $Z_c = \frac{edE_c}{\hbar} \tau$ ,  $Z_\tau = \frac{edE_\omega \tau}{\hbar}$ .

Рис. 2. Граница областей абсолютной отрицательной проводимости в плоскости параметров  $\alpha = \omega \tau$ ,  $Z_\omega = \frac{eE_\omega d}{\hbar \omega}$ .

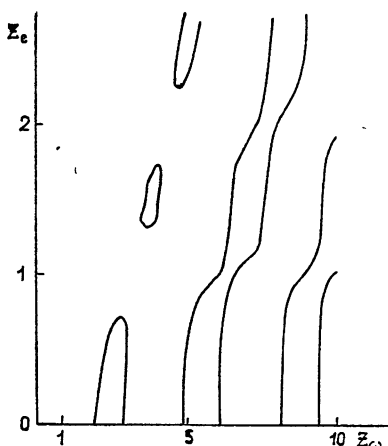


Рис. 3.

Рис. 3. Области абсолютной отрицательной проводимости на плоскости  $Z_c = \frac{edE_c \tau}{\hbar}$ ,  $Z_\omega = \frac{edE_\omega}{\hbar \omega}$  ( $\alpha = \omega \tau = 1$ ).

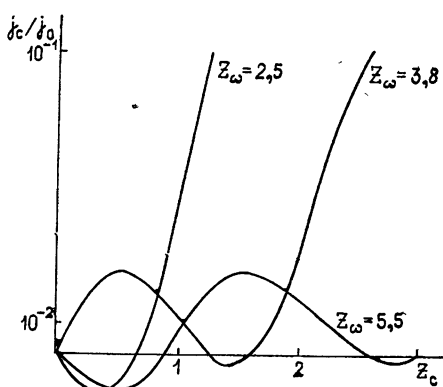


Рис. 4.

Рис. 4. Вольт-амперные характеристики сверхрешетки при  $\alpha = \omega \tau = 1$  и различных значениях параметра  $Z_\omega = \frac{edE_\omega}{\hbar \omega}$ .

4. Пусть образец в состоянии АОП подключен к внешней цепи через конденсатор. В приближении однородного поля в образце такая система легко может быть исследована. При достаточно малых омических потерях во внешней цепи система будет находиться в состоянии равновесия при значениях полей в образце  $E_c^n$ , соответствующих  $j_c(E_c^n) = 0$ , причем значение  $E_c^n$  при заданном параметре  $Z_\omega$  определяется из рис. 3. Устойчивыми состояниями равновесия будут те, для которых  $\frac{\partial j_c}{\partial E_c} > 0$ , и неустойчивыми — с  $\frac{\partial j_c}{\partial E_c} < 0$ . Так, например, для  $\alpha = 1$ ,

$Z_\omega = 2,5$  неустойчивым оказывается уже начальное состояние  $Z_c = 0$ , и система переходит в устойчивое состояние с  $Z_c = 0,6$ . При этом на обкладках конденсатора возникает разность потенциалов  $U_c = LE_c$ , где  $L$  — длина СР. Полярность  $U_c$  случайна и определяется полярностью начальной флуктуации. Этот режим возникновения напряжения можно назвать «мягким».

Для  $\alpha = 1$  и  $Z_\omega = 3,8$  начальное состояние устойчиво. В этом случае система может быть переведена в другое устойчивое возбужденное состояние равновесия  $Z_c \approx 1,5$  внешним источником напряжения. Эта ситуация соответствует «жесткому» режиму.

5. Основным приближением, использованным в данной работе, является  $\tau$ -аппроксимация интеграла столкновений. Корректность этой аппроксимации для случая статических полей обсуждалась в [9, 12, 14]. В работе [14] проведено сравнение ВАХ (9) с ВАХ, рассчитанными по методу Монте-Карло при учете рассеяния частиц на оптических и акустических колебаниях решетки. Как показывает сравнение, выражение (9) дает хорошее совпадение с этими расчетами и верно отражает изменение ВАХ с изменением параметров СР. С ростом параметра  $kT/\Delta$  совпадение улучшается. Это связано с тем, что при  $kT/\Delta \gg 1$  средняя энергия продольного движения частиц даже при полях  $E \gtrsim E_*$  слабо отличается от своего равновесного значения. Поэтому разогревный механизм нелинейности (не учитываемый в настоящей работе) оказывается несущественным\*.

Приведем в заключение некоторые численные оценки. Для характерных значений периода СР  $d \approx 100 \text{ \AA}$  и при  $\omega \sim \tau^{-1} = 10^{12} \text{ с}^{-1}$   $E_* \approx 2$  ед. CGSE. Наиболее сильным неравенством, ограничивающим величину поля сверху, является неравенство (6), откуда  $Z_\omega < 40$  для характерных значений  $\Delta \approx 25 \text{ мэВ}$ . Таким образом, не нарушая этого неравенства, можно рассматривать достаточно большое число зон неустойчивости.

Рассмотренный в настоящей работе эффект абсолютной отрицательной проводимости представляет определенный интерес для частотного преобразования микроволнового излучения и диагностики зонной структуры сверхрешеток.

Авторы благодарны А. А. Андронову и А. М. Белянцеву за полезные дискуссии и В. П. Бовину за помощь в проведении численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. Erlbach, Phys. Rev., 132, 1976 (1963).
2. Ю. А. Астров, А. А. Кастальский, ФТП, 6, 323 (1972).
3. В. Ф. Елесин, Э. Н. Манькин, Письма в ЖЭТФ, 3, № 1, 26 (1966); В. Ф. Елесин, Э. Н. Манькин, ЖЭТФ, 50, 5 (1966).

\* В случае вырождения роль  $kT$  играет фермиевская энергия электронов  $\varepsilon_F$ .

4. А. Ф. Александров, Ю. А. Быковский, В. Ф. Елесин, Е. А. Протасов, А. Г. Родионов, ЖЭТФ, 64, 231 (1973).
5. Т. Л. Банис, И. В. Паршелюнас, Ю. К. Пожела, Литовский физ. сборник, 11, 1013 (1971).
6. Т. Л. Банис, И. В. Паршелюнас, Ю. К. Пожела, ФТП, 5, 1990 (1971).
7. И. В. Паршелюнас, Диссертация, Вильнюс, 1975.
8. A. A. Ignatov and Yu. A. Romanov, Phys. St. Sol., 78, 327 (1976); A. A. Игнатов, Ю. А. Романов, ФТТ, 17, 3388 (1975).
9. А. А. Шик, ФТП, 8, 1841 (1974).
10. Ю. А. Романов, Оптика и спектроскопия, 33, 917 (1972).
11. L. Esaki and R. Tsu, IBM J. Res. Dev., 14, 61 (1970).
12. P. A. Lebowhl and R. Tsu, J. Appl. Phys., 41, 2664 (1970).
13. R. Tsu and L. Esaki, Appl. Phys. Lett., 19, 246 (1971).
14. P. J. Price, IBM J. Res. Dev., 17, 39 (1973).
15. L. L. Chang, L. Esaki, W. E. Howard, R. Ludeke, J. Vacuum Sci. Techn., 10, 11 (1973).
16. А. А. Кастальский, И. С. Лискер, В. М. Ягодкин, ФТТ, 16, 3614 (1974).
17. С. А. Ктиторов, Г. С. Симин, В. Я. Синдаловский, ФТТ, 13, 2230 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
3 мая 1976 г.

### ABSOLUTE NEGATIVE CONDUCTIVITY IN SEMICONDUCTORS WITH A SUPERLATTICE

*A. A. Ignatov, Yu. A. Romanov*

The absolute negative conductivity (ANC) in semiconductors with a superlattice (SL) occurring under the action of intense high-frequency field is investigated. The possibility of existence of ANC both near the zero point ( $J_c = 0$ ,  $E_c = 0$ ) of the volt-ampere characteristics of SL and within the interval of finite constant field which do not contain the zero point is shown. The region of ANC existence depending on the frequency and amplitude of HF field is of the zone character.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.07 : 523.164 : 621.396.946

### ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИВЯЗКИ ПОЗЫВНЫХ ВНЕЗЕМНЫХ ЦИВИЛИЗАЦИЙ К ЕСТЕСТВЕННЫМ ЯВЛЕНИЯМ

П. В. Маковецкий

Оптимальный обнаружитель, как известно, тем эффективнее, чем больше параметров сигнала учитывает его структура. Если эти параметры неизвестны, то задача обнаружения не может быть даже поставлена. Именно такова исходная ситуация при поиске позывных внеземных цивилизаций (ВЦ). Неизвестны частота связи  $f$ , вид модуляции  $m$ , ширина спектра  $\Delta f$ , скорость передачи  $r$ , код  $c$ , семантика позывных  $s$  (критерий искусственности), координаты  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $R$  и момент передачи  $t$ .

Все, что имеется у обеих сторон — это лишь косвенная априорная информация друг о друге: обе Ц живут в единой Вселенной, с едиными законами, познаваемыми и уже частично познанными; обе стороны стремятся к контакту, понимают упомянутую выше априорную трудность и необходимость ее преодоления. Средством преодоления может оказаться конвергенция двух мышлений, опирающаяся на эту дефицитную и поэтому особо ценную априорную информацию: обоюдная привязка параметров линии связи к наиболее заметным для обеих сторон параметрам обоюдно наблюдаемых явлений. Так, Коккони и Моррисон [1] предположили, что передачи ВЦ могут быть привязаны к наиболее заметной для всех частоте  $f_H$  нейтрального водорода. В дальнейшем делались попытки аналогичного предсказания  $m$ ,  $\Delta f$ ,  $r$ ,  $c$  и  $s$  (см., например, [2]), однако недостаточно убедительные.

Автором предложен более диалектичный, системный подход, при котором оптимизация подвергается не каждая из переменных в отдельности, а вся их система совместно [3]. Результатом оптимизации оказывается полное исключение наиболее антропоморфных переменных  $m$ ,  $\Delta f$ ,  $r$  и  $c$  и переход к безмодуляционным позывным, у которых критерием искусственности является число верных знаков в частоте  $\pi f_H$ . Такие позывные дают много преимуществ.

1) Отсутствие модуляции и кодов понижает мерность пространства поиска позывных с 6 до 2.

2) Двумерное пространство частота — семантика выбором частоты  $f_H$  и семантики в виде сомножителя  $\pi$  (или  $2\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $1/\pi$ , ...), сводится к нескольким фиксированным точкам.

3) Операция расшифровки смысла позывных заменяется операцией измерения — существенно более универсальной.

4) Измерению подлежит единственный параметр — частота.

5) Прием и расшифровку позывных можно начинать с любого места передачи (при модуляции — только с начала).

6) Позывные инвариантны к системе счисления отправителя. Мы можем расшифровывать их в любой своей системе.

7) Отсутствие модуляции устраняет необходимость в детектировании, ухудшающем отношение сигнал — шум.

8) Строгая монохроматичность позволяет применить сверхузкополосный фильтр и увеличить радиус действия.

9) Строго монохроматичный сигнал не искажается в межзвездной среде, модулированный — искажается.

10) Умножение  $f_H$  на  $\pi$  (или  $\sqrt{2}$ ) смещает частоту в свободный от помех со стороны водорода диапазон.

11) Позывные перестают мешать использованию  $f_H$  как источника астрофизических знаний.

Таким образом, привязка позывных к естественным константам  $f_H$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  оказывается весьма эффективной.

Не менее эффективна и привязка на оси времени к импульсному событию, заметному для многих. Если, например, все ВЦ в момент наблюдения  $t_0$  максимума вспышки Новой Лебеда (на Земле  $t_0 = 29.08.75$ ), включают свои передатчики позывных, то

каждая звезда может рассчитать для себя расписание приема от каждой звезды [4]. В табл. 1 приводится часть расписания  $t$  для Земли, полученного решением треугольника Новая—ВЦ—Земля и дополняющего опубликованное в [4]. Достоинства расписания общеизвестны и бесспорны. Неизбежность конвергенции мышления всех ВЦ к синхронизации вспышками Сверхновых и Новых обосновывается автором в [4].

Таблица 1

Звезда	$R$ , св. лет.	$t$	$\pm \Delta t$ , сутки
9723 [7]	80	5.09.75	2
9717 [7]	68	30.09.75	5
806 [7]	38	15.11.75	5
Грумбридж 34	11,5	1.12.75	2
$\sigma$ Дга	18,5	10.05.77	15
809 [7]	23,5	10.06.77	20
Росс 775	21,8	25.08.78	30
Барнарда	5,98	2.09.78	5
Вольф 12	25,5	25.08.80	40
ван Маанена	13,6	5.01.83	35
Процион	11,33	25.02.93	90

Факт соблюдения расписания, подобно факту соблюдения точности в частоте  $\pi/f_n$ , оказывается дополнительным критерием искусственности. Комбинированный критерий состоит из нескольких слагаемых: числа  $\pi$ , монохроматичности и синхронизма. Его мощность

$$P = P_{\pi} + P_{\text{моно}} + P_{\text{синхро}} \quad (1)$$

Мощность каждого слагаемого оценивается числом верных десятичных знаков. В зависимости от качества компенсации эффекта Доплера [3]  $P_{\pi} = 4 \div 17$ . Монохроматичность как критерий искусственности [5] тоже поддается количественной оценке. Полагая самый узкополосный из естественных процессов (мазерное излучение гидроксилы,  $\Delta f \approx 1000$  Гц) за нуль отсчета, для позывных с полосой 1 Гц получаем три верных знака ( $P_{\text{моно}} = 3$ ).

Для звезд, сильно удаленных от прямой Новая—Земля, запаздывание позывных относительно  $t_0$  будет измеряться тысячами лет, что непрактично. Поэтому для направлений, далеких от Новой Лебеда, практичнее подождать другой, более подходящей, вспышки Новой\*. С учетом этого средний интервал между подходящими по яркости и направлению «синхронимпульсами»  $T \approx 50$  лет. При точности синхронизации  $\Delta t \approx 20$  суток  $P_{\text{синхро}} = \lg(T/\Delta t) \approx 3$ . В итоге даже при отсутствии доплеровской компенсации  $P = 4 + 3 + 3 = 10$ , что достаточно для практически достоверного решения о наличии контакта с ВЦ. Заметим, что точность расписания и все слагаемые формулы (1) по мере прогресса земной астрометрии будут расти.

Использование синхронизации как критерия искусственности напоминает кибернетический метод «черного ящика», примененный к звезде, испытываемой на наличие ВЦ. На вход «черного ящика» подается сигнал вспышки Новой, а по выходной реакции выносится суждение о его устройстве: при любой реакции, отличной от нуля, «черный ящик» является цивилизацией (нулевая реакция оставляет вопрос открытым). Правда, мы не можем управлять входным воздействием, однако главное для метода — знание этого воздействия.

Подобно привязке к  $f_n$ ,  $\pi$ ,  $t_0$ , имеет смысл обоюдная привязка и к направлениям, отмеченным естественными «маяками» (пульсарами, звездами-сверхгигантами, шаровыми и рассеянными скоплениями, ближайшими галактиками), и к их антиподам. Эффективность появится как следствие не того, что на прямой Земля — маяк цивилизаций почему-либо больше, а того, что ВЦ, рассуждающие аналогично, чаще смотрят своими телескопами в сторону маяков и, следовательно, попутно на Землю [6].

Автор признателен Н. Т. Петровичу, М. А. Соколову и В. С. Троицкому за интерес к идеям и их поддержку, В. С. Маковецкой — за помощь в расчетах.

\* Отсюда следует, что оптимальной диаграммой направленности передающей антенны по напряженности поля является эллипсоид вращения с фокусом у антенны и большой осью, ориентированной «антиподально» Новой. Эксцентриситет его определяется продолжительностью эффективного расписания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Cossoni and P. Morrison, Nature, 184, 844 (1959).
  2. R. S. Dixon, Icarus, 20, № 2, 187 (1973).
  3. П. В. Маковецкий, Астрон. ж., 53, № 1, 221 (1976).
  4. П. В. Маковецкий, Астрон. ж., 54, № 2, 449 (1977).
  5. В. С. Троицкий, в сб. Внеземные цивилизации, изд. АН Арм. ССР, 97 (1965).
  6. П. В. Маковецкий, Астрон. ж., (в печати).
- R. Woolley, E. A. Epps, M. J. Penston and S. B. Roscock, Royal Observatory Annals, № 5 (1970).

Ленинградский институт  
авиационного приборостроения

Поступила в редакцию  
21 ноября 1976 г.

УДК 533.951

### О СТАБИЛИЗАЦИИ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И БЫСТРЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ СОЛИТОНАХ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович

Хотя в ряде лабораторных экспериментов [1], по-видимому, наблюдались быстрые ( $v > v_s = \sqrt{T_e/m_i}$ ) ленгмюровские солитоны (спайконы [2]), с теоретической точки зрения не существовало каких-либо разумных теоретических представлений для их объяснения, так как в обычно развиваемых теориях солитоны могут быть только дозвуковыми,  $v < v_s$  [3]. Однако такие представления базируются на предположении о максвелловском распределении частиц. Цель настоящей заметки — обратить внимание на то, что ситуация коренным образом изменяется для неравновесных распределений. Оказывается при этом, что нелинейные эффекты весьма чувствительны к деталям распределения частиц при малых скоростях. В модуляционно неустойчивой плазме такое изменение действительно возникает, так как модуляционные возмущения согласно [4] (помимо изменения распределения «хвостовых» частиц) приводят к «квазилинейной» диффузии медленных частиц. В кинетической теории [5] нелинейных процессов, связанных с модуляционной неустойчивостью, может быть найдено следующее уравнение для амплитуды  $E$  ленгмюровского поля солитона (частота  $\omega_{pe}$ , как обычно, отделена):

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} = \hat{\alpha} |\varepsilon|^2 \varepsilon - \hat{\beta} |\varepsilon|^4 \varepsilon; \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{E}{\sqrt{4\pi n T_e}}, \quad \tau = \frac{\omega_{pe} t}{2}, \quad \xi = \frac{\omega_{pe} x}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{m_e}{T_e}}, \quad (2)$$

$$T_{\varepsilon\Phi}^{-1} = -\frac{1}{m_e} \int \frac{1}{(v_0 - v)} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv, \quad T_e = m_e \int v^2 \Phi dv, \quad \int \Phi dv = 1,$$

$\Phi$  — функция распределения электронов.

Операторы  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  в дальнейшем учитывают электронные нелинейности. В случае солитона, модуль амплитуды поля которого перемещается с постоянной скоростью  $v_0$ , а фаза изменяется в пространстве и времени, существенно быстрее амплитуды\*,

$$\varepsilon = a (\xi - u \tau) \exp \left[ -i \Omega \tau + i \frac{u}{2} (\xi - u \tau) \right], \quad (3)$$

$$u = 2 v_0 / \sqrt{3} v_{Te}, \quad v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e},$$

\* В принятых переменных линейной дисперсии  $\omega_{pe} + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{pe}}$  соответствует  $\Omega = -u^2/4$ .

операторы  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  приближенно сводятся к константам.

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{u^2/\mu - T_{эфф}/T_e} + \left( \frac{14 u^2}{48} \Omega + \frac{13 u^4}{48} \right) \quad (4)$$

$$\left( \mu = \frac{2}{3} \frac{m_e}{m_i} \right);$$

$$\hat{\beta} = \frac{T_{эфф}^3}{2 m_e^2 T_e} \int \frac{1}{(v_0 - v)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(v_0 - v)} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \left( \frac{u^2}{\mu} - \frac{T_{эфф}}{T_e} \right)^{-3} \quad (5)$$

Отметим, что в равновесной плазме  $T_{эфф} = T_e$ .

В работе [5] в выражениях для электронных нелинейностей (второй член (4)) были получены члены порядка  $\Omega^2$ . Более точный расчет показывает, что нелинейный сдвиг частоты входит в кубические электронные нелинейности только при учете теплового движения, т. е. в виде  $\Omega u^2$ , а линейные по  $\Omega$  и  $u^2$  члены в электронных нелинейностях пятой степени по полю отсутствуют. Кроме того, при сверхзвуковых движениях,  $u^2 > \mu$ , в нелинейностях пятого порядка возникает существенно более сильная компенсация ( $\mu^3$ , а не  $\mu^2$ , как в [5]).

На этой системе упрощенных уравнений видим основные черты предлагаемого нового механизма стабилизации модуляционной неустойчивости, на конечной стадии которой появляются спайконы. Суть этого механизма состоит в том, что при развитии модуляционной неустойчивости возникают распределения частиц при малых скоростях таким образом, что знаки нелинейных коэффициентов изменяются и тем самым стабилизируется модуляционная неустойчивость. Действительно, при описании модуляционной неустойчивости необходимо  $\alpha < 0$  (критерий Лайтхилла), при этом обычно пренебрегается электронными нелинейностями и нелинейностями пятой степени по полю. Используя (4), легко установить, что изменения распределения частиц могут изменить знак первого члена (4) при  $T_{эфф} < 0$ , когда  $\alpha$  всегда положительно. Электронные нелинейности (второй член (4)) практически всегда дают положительный вклад, так как  $\Omega = -u^2/4$  при  $u \ll 1$ ,  $\epsilon \ll 1$ .

Речь идет фактически о таком изменении распределения частиц, которое уменьшает  $T_{эфф}^{-1}$ , приближая эту величину к значению, при котором модуляционная неустойчивость исчезает, т. е. к  $T_{эфф}^{-1} \rightarrow 0$ . При больших значениях  $T_{эфф}$  роль кубических нелинейностей падает. Существенно, что достаточно относительно небольшого изменения распределения частиц при малых скоростях для увеличения  $T_{эфф}$ , так как значение интеграла (2), определяющего  $T_{эфф}^{-1}$ , весьма чувствительно именно к характеру распределения частиц при малых скоростях. При исследовании модуляционной неустойчивости при помощи (1) нужно  $v_0$  заменить на  $\omega/k$ . Группа неравновесных частиц малых скоростей, много меньших  $\omega/k$ , вносит отрицательный вклад в интеграл (2) для  $T_{эфф}^{-1}$ , т. е. в первую очередь стабилизируются максимальные инкременты. При больших значениях  $T_{эфф}$  ( $T_{эфф} \gg T_e$ ) нелинейности пятой степени по полю становятся основными. Учитывая, что величина коэффициента  $\beta$  определяется в основном частицами малых скоростей, можно найти, что в широком классе распределений при  $T_{эфф} \gg T_e$  нелинейности выше пятой степени так же, как и кубическая, малы.

Быстрые солитоны могут быть получены из уравнения, учитывающего только нелинейности пятой степени. Необходимым критерием будет положительность  $\beta$ , т. е.

$$u^2 > \mu \frac{T_{эфф}}{T_e} \quad (6)$$

Полученные результаты (4) и (5) верны при  $u^2 < 1$ . Структура быстрого солитона (спайкона) дается формулой

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0 \exp[-i \Omega \tau + i(u/2)(\xi - u\tau)]}{\left\{ \text{ch} \left[ \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} (\xi - u\tau) \epsilon_0^2 \right] \right\}^{1/2}} \quad \left( \Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\epsilon_0^4 \beta}{3} \right) \quad (7)$$

Нелинейное затухание Ландау сохраняет полное число квантов,

$$N = \int |\epsilon|^2 d\xi = \frac{\pi \sqrt{3}}{2\sqrt{\beta}(u)} \quad (8)$$

и, следовательно, оставляет неизменной скорость спайкона, т. е., в отличие от обычных

дозвуковых солитонов, нелинейное затухание Ландау сводится к уменьшению его амплитуды  $\epsilon_0$ . Как только нелинейности пятой степени по полю сравниваются с кубическими, спайкон распадается. Эта качественная картина соответствует результатам численного моделирования [2]. Таким образом, процесс стабилизации модуляционной неустойчивости должен сопровождаться появлением короткоживущих быстрых ленгмюровских солитонов (спайконов).

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Stezel, A. Y. Wong and H. C. Kim, Phys. Rev. Lett., **32**, 654 (1974); H. Ikezi, K. Nishikawa and K. Mima, Phys. Soc. Japan, **37**, 766 (1974).
2. G. J. Morales and Y. C. Lee, Bull. Am. Phys. Soc. II, **19**, 861 (1974).
3. Л. И. Рудаков, ДАН СССР, **207**, № 4, 821 (1972).
4. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **64**, № 4, 1261 (1973).
5. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **70**, № 5, 1785 (1976).

Таджикский государственный университет

Поступила в редакцию  
26 ноября 1976 г.

УДК 538.574.2

### К ОТРАЖЕНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СИГНАЛА ИОНИЗОВАННОЙ ОБЛАСТЬЮ ПРИ ВОЗРАСТАНИИ ПЛОТНОСТИ ЧАСТИЦ СО ВРЕМЕНЕМ

В. В. Борисов

В настоящем сообщении рассмотрим задачу об отражении (преломлении) электромагнитного сигнала от ионизованной области, полагая, что плотность заряженных частиц в ней растет со временем экспоненциально. Особенности распространения волн в средах, свойства которых меняются со временем, обсуждались в [1-4].

1. Пусть граница раздела совпадает с плоскостью  $x = 0$ , при  $x > 0$  — вакуум. Скорость электронов много меньше скорости света и до прихода фронта сигнала в точку  $x < 0$  равна нулю, ионы неподвижны. Столкновения и процессы, приводящие к исчезновению электронов (рекомбинация, прилипание), не учитываем. Плотность электронов равна плотности ионов.

Падающая нормально на границу плоская электромагнитная волна  $E_y = -B_z = h(\tau + x)u\left(\frac{\tau + x}{c}\right)$ ,  $\tau = ct$ . За начало отсчета времени  $\tau = 0$  принят момент встречи фронта падающего сигнала и границы,  $h(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$ ,  $u\left(\frac{\tau + x}{c}\right)$  — дифференцируемая функция.

Уравнения для составляющих вектора напряженности электрического и индукции магнитного полей  $E_y$ ,  $B_z$  следуют из системы уравнений Максвелла и уравнения движения электронов:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi e^2}{mc^2} \int_{-x}^{\tau} ds n(s, x) E_y(s, x). \quad (1)$$

Система единиц Гаусса;  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $n(\tau, x)$  — плотность электронов.

Из системы (1) получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} E_y + \frac{1}{4} \frac{\Delta}{n(\xi_1, \xi_2)} E_y = 0, \quad \frac{\Delta}{n(\xi_1, \xi_2)} = \frac{n(\xi_1, \xi_2)}{n|_{\tau=0, x=0}}. \quad (2)$$

Переменные  $\xi_1 = \frac{\omega_0}{c}(\tau - x)$ ,  $\xi_2 = \frac{\omega_0}{c}(\tau + x)$ ,  $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m} n|_{\tau=0, x=0} \neq 0$ .

2. Рассмотрим уравнение (2), предполагая, что  $\frac{\Delta}{n(\xi_1, \xi_2)} = n_1(\xi_1) n_2(\xi_2)$ . Замена переменных



$$\varphi_1(\xi_1) = \int_a^{\xi_1} ds n_1 \left( \frac{c}{\omega_0} s \right), \quad \varphi_2(\xi_2) = \int_b^{\xi_2} ds n_2 \left( \frac{c}{\omega_0} s \right), \quad (3)$$

где  $a, b$  — произвольные постоянные, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} E_y + \frac{1}{4} E_y = 0 \quad (4)$$

и — в некоторых случаях — к более простой задаче (см. [5]). Отметим, что граница раздела ограничивает зависимости  $n_1(\xi_1), n_2(\xi_2)$ , при которых возможно упростить построение решения с помощью преобразования (3).

3. Рассмотрим задачу в постановке п. 1, полагая, что концентрация заряженных частиц экспоненциально возрастает: при  $\tau > 0$   $n = n_0 \exp\left(\frac{\alpha}{c} \tau\right)$ ,  $\alpha > 0$  (для безграничной среды см. [1]). В переменных  $\varphi_1(\xi_1) = \frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_1) - 1) > 0$ ,  $\varphi_2(\xi_2) = \frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_2) - 1) > 0$  ( $\beta = \frac{\alpha}{2\omega_0}$ ) поперечная составляющая  $E$  при  $x < 0$  удовлетворяет уравнению (4), при  $x > 0$  — волновому. Падающая на границу электромагнитная волна в новых переменных

$$E_y = h(\varphi_2) u \left( \frac{1}{\omega_0 \beta} \ln(1 + \beta \varphi_2) \right). \quad (5)$$

Точка  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  перейдет в  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , прямая  $x = 0$  — в  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\tau = 0$  — в линию  $(1 + \beta \varphi_1)(1 + \beta \varphi_2) = 1$ . В переменных  $\hat{x} = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ ,  $\hat{\tau} = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$ ,  $x = 0$  перейдет в  $\hat{x} = 0$  ( $x > 0$  в  $\hat{x} > 0$ ).

Решение задачи, удовлетворяющее в области  $\hat{x} < 0$  уравнению (4), в области  $\hat{x} > 0$  — волновому уравнению, соотношению (5) и условиям непрерывности  $E_y(x, \tau)$  и  $\frac{\partial}{\partial x} E_y(x, \tau)$  при  $\hat{x} = 0$ , получим, используя результаты работы [6]:

$$\begin{aligned} E_{y_{x>0}}^r &= -u \left( \frac{\xi_1}{\omega_0} \right) + 2 \int_{0^-}^{\frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_1) - 1)} d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ h(\eta) u \left( \frac{\ln(1 + \beta \eta)}{\omega_0 \beta} \right) \right\} \times \\ &\times \frac{J_1 \left[ \frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_1) - 1) - \eta \right]}{\frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_1) - 1) - \eta}, \\ E_{y_{x<0}} &= 2 \int_{0^-}^{\frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_2) - 1)} d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ h(\eta) u \left( \frac{\ln(1 + \beta \eta)}{\omega_0 \beta} \right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{J_1 \left[ \sqrt{\left( \frac{\exp(\beta \xi_1) - 1}{\beta} - \eta \right) \left( \frac{\exp(\beta \xi_2) - 1}{\beta} - \eta \right)} \right]}{\sqrt{\left( \frac{\exp(\beta \xi_1) - 1}{\beta} - \eta \right) \left( \frac{\exp(\beta \xi_2) - 1}{\beta} - \eta \right)}} + \frac{1}{\beta} \exp\left(\beta \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \times \right. \\ &\left. \times \operatorname{sh} \frac{\beta(\xi_2 - \xi_1)}{2} \frac{J_2 \left[ \sqrt{\left( \frac{\exp(\beta \xi_1) - 1}{\beta} - \eta \right) \left( \frac{\exp(\beta \xi_2) - 1}{\beta} - \eta \right)} \right]}{\frac{1}{\beta} (\exp(\beta \xi_1) - 1) - \eta} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$E_{y_{x>0}}^r$  — отраженная волна,  $J_n(z)$  — функция Бесселя.

Формулы (6) удовлетворяют условиям непрерывности  $E_y(x, \tau)$  и  $\frac{\partial}{\partial x} E_y(x, \tau)$  при  $x = 0$ , в чем можно убедиться непосредственно, и, следовательно, являются решением рассматриваемой задачи.

4. Рассмотрим особенности электромагнитных сигналов. Допустим, падающая на границу волна — функция включения:  $u\left(\frac{\tau+x}{c}\right) = u_0 = \text{const}$ . Тогда

$E_{y_{x>0}}^r = u_0 \left[ -1 + 2J_1\left(\frac{\exp(\beta\xi_1) - 1}{\beta}\right) \frac{\beta}{\exp(\beta\xi_1) - 1} \right]$ . При малых значениях времени, отсчитываемого с момента прихода фронта волны в точку  $x > 0$ , когда  $\xi_1 \ll \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta)$ ,

$E_{y_{x>0}}^r \approx u_0 \frac{1}{8\beta^2} (\exp(\beta\xi_1) - 1)^2$ , на фронте  $E_{y_{x>0}}^r = 0$ . При больших значениях  $\xi_1 \gg \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta)$   $E_{y_{x>0}}^r \approx u_0 \left\{ -1 + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} \beta\xi_1\right) \cos\left[\frac{1}{\beta} \exp(\beta\xi_1) - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{3}{4}\pi\right)\right] \right\}$  — суперпозиция единичного толчка и убывающих по амплитуде колебаний с экспоненциально растущей частотой.

Для произвольной временной зависимости электромагнитной волны при  $\xi_1 \ll \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta)$  согласно (6)

$$E_{y_{x>0}}^r \approx \frac{1}{4\beta} \exp(2\beta\xi_1) \int_0^{\xi_1} d\psi u\left(\frac{\xi_1 - \psi}{\omega_0}\right) e^{-\beta\psi} (1 - e^{-\beta\psi}), \quad (7)$$

$$u(0) = 0.$$

В пределе  $\tau \rightarrow \infty$  приходим к полному отражению сигнала. Если  $u(\xi_2/\omega_0)$  — непрерывно дифференцируемая функция, причем  $u(0) = 0$ , то при  $\xi_1 \gg \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta)$

$$E_{y_{x>0}}^r \approx -u\left(\frac{\xi_1}{\omega_0}\right) \left\{ 1 - (2\beta)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{3}{2} \beta\xi_1\right) \cos\left[\frac{1}{\beta} e^{\beta\xi_1} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{3}{4}\pi\right)\right] + O\left[\beta^{5/2} \exp\left(-\frac{5}{2} \beta\xi_1\right)\right] \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} u\left(\frac{\xi_1}{\omega_0}\right) \times$$

$$\times \left\{ \xi_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} \beta\xi_1\right) \cos\left[\frac{1}{\beta} e^{\beta\xi_1} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{3}{4}\pi\right)\right] + O\left(\frac{1}{\beta} e^{-\beta\xi_1}\right) \right\}. \quad (8)$$

Приведенное соотношение позволяет оценить область  $\xi_1$ , где падающий сигнал отражается без искажения.

Условие применимости приближенных формул (7), (8) определяется одним параметром  $\beta$  — отношением постоянной  $\alpha$ , характеризующей скорость возрастания плотности электронов, и  $\omega_0$  — частоты плазменных колебаний в начальный момент времени и, таким образом, определяется только свойствами среды (в частном случае синусоидальных колебаний не зависит от их частоты).

Внутри ионизованной области для временной зависимости в виде функции включения из (6) следует  $\left(\tau_0 = \frac{\omega_0}{c} \tau, \quad x_0 = \frac{\omega_0}{c} x\right)$

$$E_{y_{x<0}} = 2u_0 \left\{ \frac{J_1\left[\frac{1}{\beta} \sqrt{(\exp(\beta\xi_1) - 1)(\exp(\beta\xi_2) - 1)}\right]}{\frac{1}{\beta} \sqrt{(\exp(\beta\xi_1) - 1)(\exp(\beta\xi_2) - 1)}} + \right.$$

$$\left. + e^{\beta\tau_0} \text{sh } \beta x_0 \frac{J_2\left[\frac{1}{\beta} \sqrt{(\exp(\beta\xi_1) - 1)(\exp(\beta\xi_2) - 1)}\right]}{\exp(\beta\xi_1) - 1} \right\}.$$

При больших значениях,  $\xi_2 \gg \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta)$ ,

$$E_{y_{x < 0}} \approx 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 \beta^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \beta \tau_0\right) \left\{ \beta e^{-\beta \tau_0} \cos\left[\Psi(\xi_1, \xi_2) - \frac{3}{4} \pi\right] + \right. \\ \left. + (e^{2\beta x_0} - 1) \cos\left[\Psi(\xi_1, \xi_2) - \frac{5}{4} \pi\right] \right\},$$

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\beta} \sqrt{(\exp(\beta \xi_1) - 1)(\exp(\beta \xi_2) - 1)},$$

т. е. поперечная составляющая вектора  $E$  — экспоненциально убывающие осцилляции с частотой  $\omega \approx \omega_0 (\exp(\beta \tau_0) - \operatorname{ch} \beta x_0)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. V. Felsen and M. Whithman, Proc. IEEE, AP-18, № 2, 242 (1970).
2. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
3. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 512 (1973).
4. С. Н. Столяров, Б. М. Болотовский, А. И. Плис, В. Рок, А. Чигирев, IV Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Тезисы докладов, т. 2, 1973, стр. 417.
5. А. В. Мананкова, В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 189 (1975).
6. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1376 (1970).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 апреля 1976 г.,  
после доработки  
18 апреля 1977 г.

УДК 621.375.7

### К ВОПРОСУ О ПОТЕРЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

А. М. Кузнецов, В. Г. Кузьмин, И. Я. Орлов

При анализе параметрических усилителей (ПУ) СВЧ-диапазона обычно пренебрегают проводимостью параметрического диода, полагая ее пренебрежимо малой. Однако такое предположение справедливо только при так называемом «бестоковом» режиме работы усилителя [1]. Воздействие сигналов большого уровня, а также выбор начальной рабочей точки вблизи области прямой или обратной проводимостей параметрического диода может привести к появлению значительных токов и должно вызвать существенное изменение режима работы ПУ. Мы провели экспериментальное исследование особенностей токового режима работы двухконтурного регенеративного ПУ, выполненного на диоде 1А404 и имеющего следующие характеристики: частота настройки  $f_0 = 3 \text{ ГГц}$ , полоса пропускания  $\Delta f = 50 \text{ МГц}$ , коэффициент усиления  $20 \text{ дБ}$ , частота накачки  $f_n \approx 9 \text{ ГГц}$ , мощность накачки  $P_n \approx 5 \div 10 \text{ МВт}$ . На рис. 1 и 2 приведены соответственно эквивалентная схема ПУ и экспериментально полученные зависимости  $C(U)$  и  $I(U)$  диода 1А404.

Вследствие нелинейной проводимости параметрического диода в зависимости от приложенного напряжения, в токовом режиме наряду с усилением сигнала имеет место эффект детектирования, причем в зависимости от начального смещения амплитуды сигнала и уровня накачки возможно «прямое», «обратное» и «двухполярное» детектирование. Такие режимы будут соответственно, если проявляются прямая, обратная проводимости или имеет место как прямая, так и обратная проводимости диода.

Появляющееся в результате детектирования напряжение смещения зависит от вида вольт-амперной характеристики (ВАХ), амплитуды импульса, положения начальной рабочей точки, а также соотношения длительности импульса  $\tau_n$  и постоянной времени нагрузки ПУ по постоянному току  $\tau_{дс}$ . При проведении экспериментов были

использованы сравнительно длительные ВЧ-импульсы ( $\tau_{и} \gg \tau_{RC} \gg \frac{1}{f_0}$ ), следовательно, сдвиг рабочей точки будет пропорционален амплитуде импульса. Уход рабочей точки при этом достигал единиц вольт.

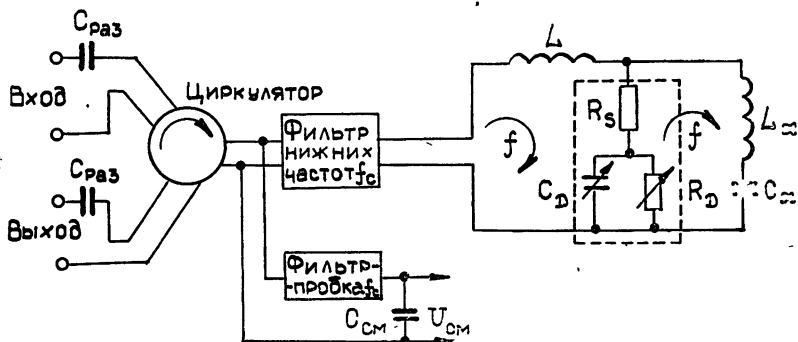


Рис. 1. Эквивалентная схема параметрического усилителя ( $L_x, C_x$ —элементы контура холостой частоты  $f_x$ ).

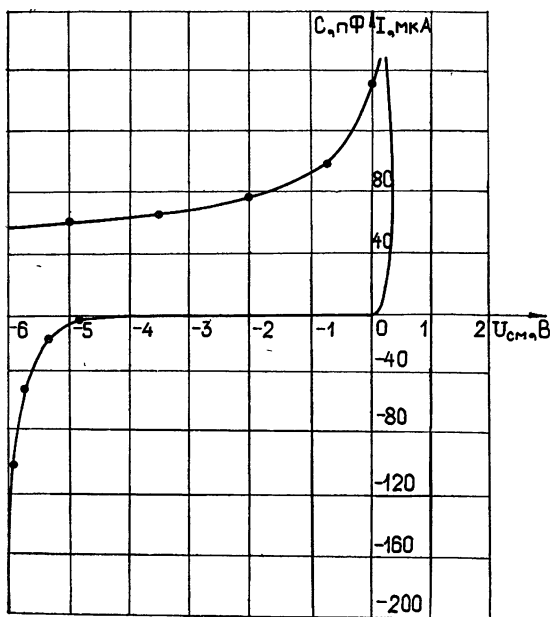


Рис. 2. Зависимость ёмкости и тока через параметрический диод 1A404 от напряжения.

Возникающие в результате детектирования радиоимпульса переходные процессы могут привести к искажению огибающей последующего радиоимпульса, более того, к усилению или подавлению его. Это связано с тем, что величиной и характером переходного процесса определяется дополнительное смещение рабочей точки на совокупности характеристик  $C(U)$  и  $I(U)$ . Таким образом, по окончании мощности импульса в результате переходных процессов на временной оси появляются участки уменьшения и увеличения КУ. Это явление прослежено на осциллограммах рис. 3, отражающих изменение формы прямоугольного радиоимпульса, следующего за мощным радиоимпульсом. Здесь частоты несущих колебаний радиоимпульсов совпадают с частотой настройки:  $f_1 = f_2 = f_0$ , длительности импульсов равны:  $\tau_1 = \tau_2 = 10$  мкс. Длительность переходного процесса, определяющая временной участок возможного изменения КУ (характерные времена ухода рабочей точки), зависит от режима работы ПУ и посторо-

янной времени нагрузки диода по постоянному току. Характерное время ухода рабочей точки, приводящего к увеличению КУ, мало по сравнению с временным участком уменьшения КУ и составляет единицы микросекунд (интервал  $\Delta t$  уменьшения КУ достигает 10 и более микросекунд). Эксперименты показали, что в режиме «двухполярного» детектирования переходные процессы, возникающие в результате детектирования на «прямой» и «обратной» проводимостях диода могут взаимно компенсироваться.

Режим детектирования является преобладающим при сравнительно малых выпрямленных токах через диод ( $I_{\text{пр}} < 20 \text{ мкА}$  — слабый токовый режим). Наличие больших выпрямленных токов ( $I_{\text{пр}} > 20 \text{ мкА}$  — сильный токовый режим) указывает на появление пробойных явлений в диоде. В результате этих явлений происходит существенное шунтирование емкости  $p-n$ -перехода малым сопротивлением диода, что приводит к резкому уменьшению коэффициента усиления ПУ (рис. 4). Наиболее сильно это проявляется при усилении импульсов большой амплитуды (из осциллограммы рис. 3 в видно, что возможно даже уменьшение амплитуды мощного импульса на выходе ПУ по сравнению с его амплитудой на входе ПУ). Из сравнения рис. 2 и 4 видно, что в области малых смещений  $U_{\text{см}} \in -0,3 \div 0,2 \text{ В}$  уменьшение КУ обусловлено шунтирующим действием прямой проводимости. При больших отрицательных

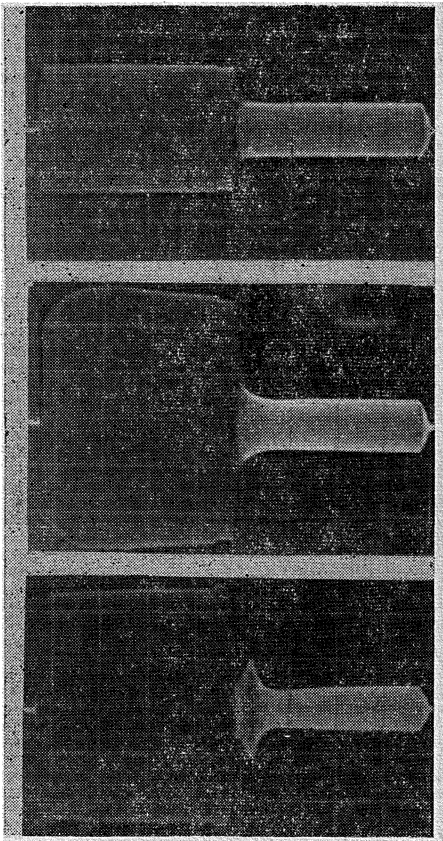


Рис. 3. Осциллограммы радиоимпульсов на выходе ПУ. На вход ПУ поступают прямоугольные радиоимпульсы ( $f_1 = f_2 = f_0$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 10 \text{ мкс}$ ,  $P_2 = 80 \text{ мкВт}$ ,  $U_{\text{см}} = -2 \text{ В}$ )  
 а)  $P_1 = 160 \text{ мкВт}$ , б)  $P_1 = 300 \text{ мкВт}$ ,  
 в)  $P_1 = 3,5 \text{ мВт}$ .

смещениях,  $U_{\text{см}} < -1,7 \text{ В}$ , уменьшение КУ обусловлено как шунтирующим действием проводимости диода, так и уменьшением крутизны функции  $C(U)$ . Из приведенных результатов видно, что проводимость параметрического диода может привести к существенным изменениям качественных характеристик ПУ.

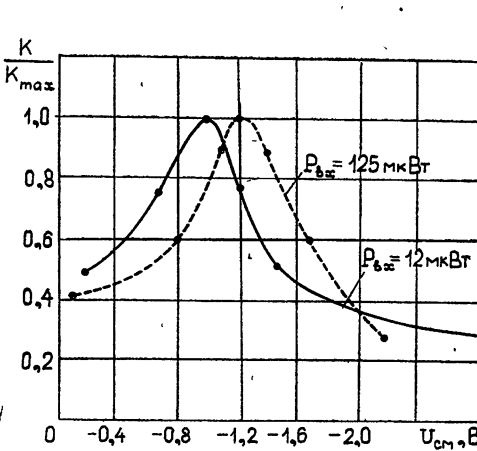


Рис. 4.

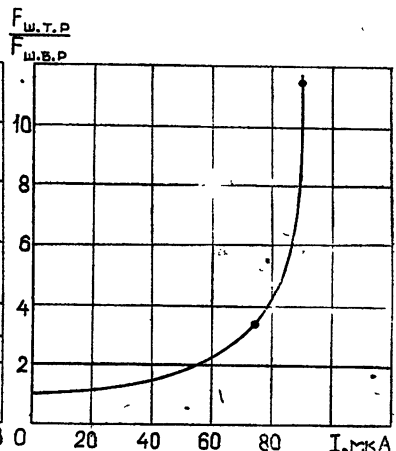


Рис. 5.

Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления ПУ от напряжения смещения.  
 Рис. 5. Зависимость относительного изменения коэффициента шума ПУ от тока через диод.

В целях восстановления чувствительности ПУ при воздействии сильных сигналов целесообразно автоматически с увеличением уровня сигнала переходить в бестоковый режим работы ПУ. Необходимо отметить, что такая возможность ограничена уменьшением крутизны функции  $C(U)$  при больших смещениях и возможностью обратного пробоя. Вместе с тем, наличие детекторных эффектов показывает возможность комплексного использования параметрической системы в качестве усилителя, преобразователя частоты и детектора. Однако при этом необходимо иметь в виду возможность увеличения шума ПУ из-за появления токов (см. рис. 5, где  $F_{ш. б. р.}$  и  $F_{ш. т. р.}$  соответственно коэффициент шума ПУ в «бестоковом» и «токовом» режимах).

Обнаруженные особенности работы ПУ в токовом режиме справедливы в принципе для любой параметрической системы, обладающей нелинейным активным сопротивлением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Манохин, И. А. Строков, В. С. Эткин, Радиотехника и электроника, № 5 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
9 ноября 1976 г.

УДК 538.221

### О ВОЛНАХ НАМАГНИЧЕННОСТИ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Н. Н. Насонов

Проведенные до настоящего времени теоретические исследования сильнонелинейных волн намагничности сводятся к рассмотрению ударных волн [1] и нахождению волн стационарного профиля [2-4]. В настоящей работе исследуется распространение плоской электромагнитной волны конечной амплитуды в поперечно-намагниченном феррите.

Исходную систему уравнений получаем из уравнения движения намагничности

$\frac{\partial}{\partial t} M = \gamma_e [H, M]$  и уравнений Максвелла:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) h_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} m_{\perp}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \theta = h_y \cos \varphi - h_z \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi = \sin \theta + \operatorname{tg} \theta (h_y \sin \varphi + h_z \cos \varphi).$$

Здесь  $\tau = 4\pi\gamma_e M_0 t$ ,  $\xi = 4\pi\gamma_e M_0 \sqrt{\epsilon} \frac{x}{c}$ ,  $h_{\perp} = h_y + h_z = e_y \frac{H_y}{4\pi M_0} + e_z \frac{H_z}{4\pi M_0}$ ,  $M = M_0 m$ ,  $m_x = \sin \theta$ ,  $m_{\perp} = e_y \cos \theta \sin \varphi + e_z \cos \theta \cos \varphi$ ,  $\gamma_e$  — гиромагнитное отношение,  $M_0$  — момент насыщения. При выводе (1) был использован интеграл уравнения Ландау — Лифшица  $|M|^2 = \text{const} = M_0^2$ , что позволило ввести  $\theta(\xi, \tau)$  и  $\varphi(\xi, \tau)$ .

Магнитный момент насыщения ферромагнетиков весьма велик; для ферритов обычно  $4\pi M_0 \sim 10^4$  Э, поэтому магнитное поле волны  $H$  практически всегда много меньше  $4\pi M_0$ , т. е.  $h \ll 1$ . Вследствие этого колебания  $M$  в условиях рассматриваемой задачи происходят в основном в плоскости  $YZ$ , поскольку выходу  $M$  из плоскости препятствует появление (согласно уравнению  $\operatorname{div}(H + 4\pi M) = 0$ ) сильного размагничивающего поля  $H_x = -4\pi M_x$ . В этом смысле ситуация полностью аналогична возникающей при импульсном перемагничивании тонких магнитных пленок [5]. При этом функция  $\theta(\xi, \tau)$  мала и ее легко исключить из системы (1). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h_y &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (h_y + \sin \varphi), & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h_z &= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (h_z + \cos \varphi), \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi &\equiv h_y \cos \varphi - h_z \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Стационарное решение (2) имеет вид

$$\sin f - \sin f_0 = \frac{\cos^2 f_0 \operatorname{sn}^2 [\delta (\tau - \xi/\beta), p]}{2 \operatorname{dn}^2 [\delta (\tau - \xi/\beta), p]}, \quad (3)$$

где

$$f = \varphi + \arctg \frac{h_{z0} - x \cos \varphi_0}{h_{y0} - x \sin \varphi_0}, \quad x = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \quad p^2 = \frac{1 - \sin f_0}{2},$$

$$\delta = [(h_{z0} - x \cos \varphi_0)^2 + (h_{y0} - x \sin \varphi_0)^2]^{1/4}.$$

Замечаем, что функции  $h_y$  и  $h_z$  в (2) должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) h_y = \psi \sin \varphi, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) h_z = \psi \cos \varphi, \quad (4)$$

где  $\psi$  — некоторая функция. При этом третье уравнение системы (2) становится следствием первых двух, что дает возможность свести (2) к системе двух уравнений для функций  $\varphi(\xi, \tau)$  и  $\psi(\xi, \tau)$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \psi \right] m_+ = 0, \quad (5)$$

где  $m_+ = e_y \sin \varphi + e_z \cos \varphi$ .

Выполнив дифференцирование в (5), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) - \omega (k^2 - \omega^2 + 1) \right] - \omega \left[ \omega \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} (k^2 - \omega^2) \right] - 2 \left( k \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \omega \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right) - \psi \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \omega \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} (k^2 - \omega^2) \right] + \omega \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) - \right. \\ & \left. - \omega (k^2 - \omega^2 + 1) \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \psi (k^2 - \omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ ,  $k = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ .

Легко видеть, что система (6) имеет стационарное решение вида

$$\varphi = \omega \tau + k \xi, \quad k = \pm \omega \sqrt{\frac{\omega^2 + \psi - 1}{\omega^2 + \psi}} \quad (7)$$

с постоянными  $\omega$ ,  $k$  и  $\psi$ . Положим  $\omega = \text{const}$  и определим  $k$  и  $\psi$  из (6); при этом получаем более общее решение:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega \tau + a \int \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{2\omega^2 \lambda^3 + b\lambda^2 - a^2 - \omega^2 \lambda^4}}, \\ \xi &= \pm \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{2\omega^2 \lambda^3 + b\lambda^2 - a^2 - \omega^2 \lambda^4}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Отметим, что  $\lambda(\xi)$  — периодическая функция, т. е. (8) описывает волну с периодически меняющимся профилем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 10, № 9—10, 1376 (1967).
2. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 3, № 1, 79 (1960).

3. Ю. Ф. Филиппов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 2, 292 (1965).  
 4. И. А. Ахизер, А. Е. Боровик, ЖЭТФ, 52, 508 (1967); 1332 (1967).  
 5. О. С. Колотов, В. А. Погожев, Р. В. Телеснин, УФН, 113, 569 (1974).

Поступила в редакцию  
23 августа 1976 г.

УДК 621.372.855 (088.8)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ РЕЗИСТИВНЫХ ПЛЕНОК, РАСПОЛОЖЕННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ОСИ ВОЛНОВОДА

А. И. Нагорнов, А. И. Постников, В. П. Васильев, В. А. Гордеев

В работе [1] описана согласованная нагрузка с использованием многослойных поглощающих элементов из резистивной пленки, расположенных вдоль продольной оси волновода. Продолжением этого направления является настоящее сообщение об исследовании поглощающих свойств пленки, расположенной нормально направлению падающей волны в волноводе.

Конструктивно поглощающая нагрузка выполнена в виде короткозамкнутого отрезка прямоугольного волновода длиной 6—8 мм, в который помещен поглощающий элемент, представляющий собой чередующиеся два слоя диэлектрика с  $\epsilon \geq 1$ , на которые наклеена пленка из нихрома на слюдяной подложке. Схематическое изображение элемента и его расположение относительно осей волновода  $x$ ,  $y$ ,  $z$  показано на рис. 1, где обозначено: 1 — согласующий трансформатор, 2 — поглощающая пленка, 3 — диэлектрические пластины.

Из массы исследованных пленок выделен ряд с поверхностным сопротивлением слоя  $R_{\square}$  в пределах  $R_{\square} = 150 \div 350 \text{ Ом}/\square$ , наиболее приближенных к эквивалентному волновому сопротивлению регулярного волновода.

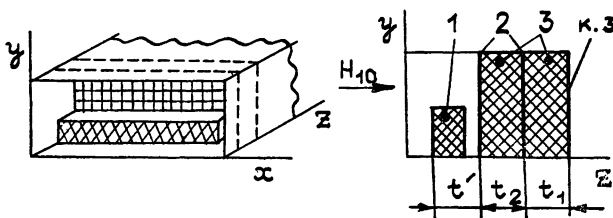


Рис. 1. Схематическое изображение нагрузки.

Толщина диэлектрических пленок  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 1), была определена экспериментально и довольно точно рассчитывается по эмпирическому выражению, которое может быть использовано для инженерного расчета элементов нагрузки:

$$t_1 = t_2 = \frac{\lambda K}{8 \sqrt{\epsilon + \lambda/\lambda_B}} \quad \text{при } \epsilon \geq 1, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве,  $\lambda_B$  — длина волны в волноводе,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость материала пластин,  $K$  — коэффициент, учитывающий взаимное влияние диэлектрических постоянных подложки пленки и заполняющих пластин, равный 0,8—0,9.

Зависимость минимального значения коэффициента стоячей волны от поверхностного сопротивления пленки, диэлектрической проницаемости заполнителя и поглощающих пластин в волноводе показана на рис. 2 для пленки с  $R_{\square} = 150$  и  $350 \text{ Ом}/\square$  и  $\epsilon_{\text{пл}} = 1, 2, 5$ . Линии 1, 2, 3 соответствуют минимальным величинам КСВ-системы.



Из рис. 2 следует, что суммарное значение  $t_{\text{общ}} = t_1 + t_2$  практически остается постоянным при различном их соотношении. Область, выделенная на графике, соответствует наиболее благоприятным соотношениям  $t_1/t_2$ , когда легче достичь дальнейшего согласования системы. В этой области значение  $t_1$  приближается к  $t_2$ , т. е.  $t_1 = t_2$ . Характер эквивалентного сопротивления пленки является функцией ее геометрических и электрических параметров [2, 3]. На рис. 3 показана зависимость степени согласования пленки от относительных размеров для разного сопротивления поверхностного слоя. Явно выраженные максимумы соответствуют точкам, где реактивная составляющая сопротивления пленки близка к нулю. Влево и вправо от максимума преобладают соответственно емкостная и индуктивная составляющие реактивности. В этом случае нагрузка не согласована с линией передачи. Таким образом, при определенном значении  $d/a$  (рис. 3) доминирует активная составляющая импеданса пленки, эта точка соответствует наилучшему согласованию и, как следствие, наибольшему поглощению мощности.

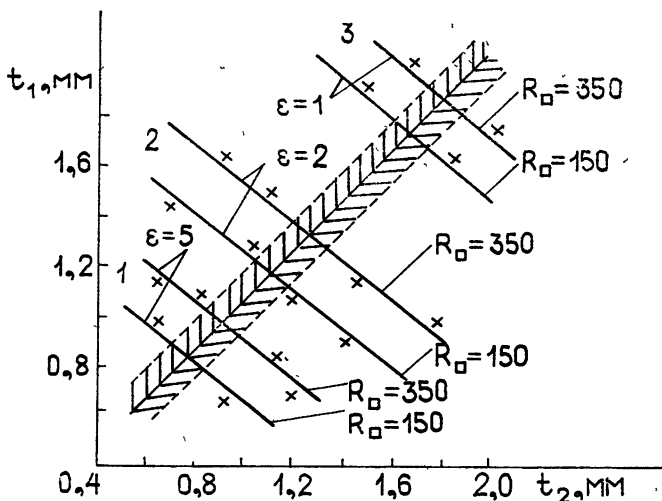


Рис. 2. Зависимость пиков поглощения СВЧ-мощности от расстояния между пластинами при различном заполнении волновода.

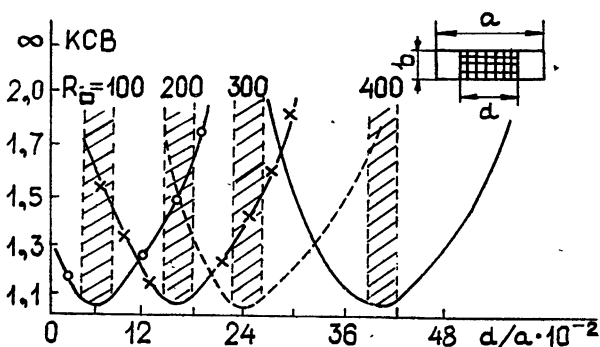


Рис. 3. Зависимость степени согласования от относительных размеров пленки для разных значений поверхностного сопротивления.

Величина КСВ системы находится в пределах 1,25 — 1,35 и ограничена снизу наличием остаточной реактивности, для компенсации которой необходимо ввести между линией передачи и поглотителем дополнительный элемент, выполняющий роль согласующего трансформатора (рис. 1, позиция 1). Согласующий трансформатор выполнен в виде пластины из того же материала, что и пластины поглощающего элемента. Расстояние от поглощающего элемента до трансформатора лежит в пределах 1—1,5 мм и уточняется в процессе настройки по наименьшему значению КСВ.

Таким образом, система, состоящая из поглощающего элемента и согласующего трансформатора, представляет собой согласованную волноводную нагрузку. Длина ее

в целом не превышает 8 мм для волновода  $17 \times 8$  мм<sup>2</sup>, величина КСВ — 1,07 в полосе частот до 20%. С уменьшением сечения волновода длина нагрузки уменьшается (для волновода  $7,2 \times 3,4$  мм<sup>2</sup> длина ее 5 мм). На рис. 4б показан общий вид нагрузок на волноводах сечением  $17 \times 8$  мм<sup>2</sup> и  $11 \times 5,5$  мм<sup>2</sup>.

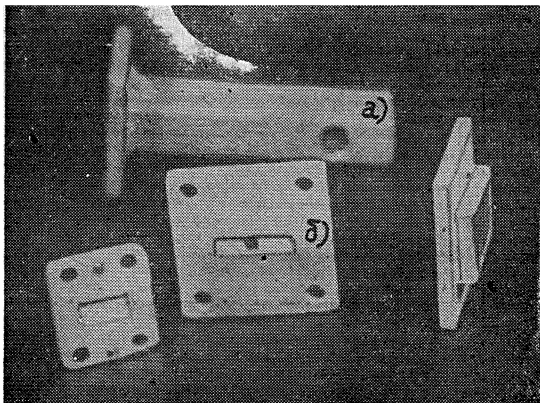


Рис. 4. Общий вид нагрузок на резистивных пленках.

Поглощающие нагрузки подобной конструкции рассчитаны на низкий и средний уровень мощности СВЧ в зависимости от типа применяемого диэлектрика, сечения волновода и условий теплоотвода.

Малогабаритные нагрузки с использованием резистивных пленок применены авторами в вентилях на базе *T*-циркуляров и как отдельная согласованная нагрузка в других СВЧ-узлах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Васильев, В. А. Гордеев, А. И. Нагорнов, В сб. Физика прочности и пластичности металлов и электродинамических явлений в ферритах, Куйбышев, КПИ, вып. 3, 1975.
2. А. А. Бокринская, Е. Т. Скорик, Методы измерения мощности СВЧ, Гостехиздат, УССР, Киев, 1962.
3. В. В. Слуцкая, Тонкие пленки в технике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1967.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
10 мая 1976 г.