Сравнивая (7), (9) и (12), видим, что коэффициенты b_n и $\approx{b}_n$ почти совпадают, и, следовательно, эксцессное приближение при малых τ достаточно хорошо описывает поведение функции корреляции марковского процесса. Гауссово приближение дает, как и следовало ожидать, менее точный результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 864 (1974).
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 214 (1976).
4 А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 71 (1976).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июля 1976 г.

УДК 538.56 : 519.25

К ВОПРОСУ О ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ВОЛН В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

С. Н. Молодцов, А. И. Саичев

1. Теоретическому исследованию частотной корреляции волн посвящен целый ряд работ (см., например, [3–5]). В работе [3] найдена частотная корреляция мерцаний в области насыщенных флуктуаций интенсивности. Теоретический анализ, проведенный в [3], основан на использовании параболического уравнения для комплексной амплитуды поля, описывающего распространение световых волн в средах с крупномасштабными случайными неоднородностями.

В настоящей работе в приближении геометрической оптики определена частотная корреляция комплексных амплитуд волн, распространяющихся в случайно-неоднородной среде. Показано, что наличие дифракционных эффектов не сказывается на частотной корреляции волн. В рамках геометрической оптики получены дополнительные статистические характеристики, характеризующие частотную корреляцию волн, в частности, частотная корреляция обратных комплексных амплитуд.

2. Пусть на полупространство $x > 0$, заполненное случайно-неоднородной средой, нормально к границе среды падают две плоские волны единичной амплитуды с волновыми числами k_1 и k_2. Как обычно (см., например, [2]), считаем флуктуации диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(x, \rho)$ гауссовым дельта-коррелированным по продольной координате x полем с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1)\, \varepsilon(x_2, \rho_1 + \rho) \rangle = A(\rho)\, \delta(x_2 - x_1),$$

где

$$A(\rho) = A - D\rho^2 + \frac{B}{4}\rho^4 - \dots$$

В приближении геометрической оптики комплексные амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_1 = k_1 c$, $\omega_2 = k_2 c$) в произвольной точке среды (x, ρ) равны

$$E_1(x, \rho) = A(x, \rho) \exp[ik_1 S(x, \rho)], \quad E_2(x, \rho) = A(x, \rho) \exp[ik_2 S(x, \rho)] \tag{1}$$

(A — амплитуда волны, S — эйконал). Как легко видеть из (1), частотная корреляция комплексных амплитуд в точке (x, ρ) равна

$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \langle I e^{i\Omega S} \rangle \tag{2}$$

(I — интенсивность волны, $\Omega \equiv k_1 - k_2$). В [1, 2] показано, что среднее (2) в фиксированной точке среды совпадает с характеристической функцией фазы вдоль фиксированного луча $\langle e^{i\Omega S} \rangle_л$. Таким образом, определение частотной корреляции комплексного светового поля тесно связано со статистикой фазы вдоль фиксированного луча. Используя результаты работы [2], можно найти характеристическую функцию фазы вдоль луча. Она определяется следующим выражением:

$$\langle e^{i\Omega S}\rangle_{л} = \exp\left(-\frac{A}{8}\Omega^2 x\right)\times$$
$$\times\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\cos\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x + i\operatorname{sh}\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\sin\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\right]^{-1}. \tag{3}$$

Обычно (см., например, [3]) интересуются не функцией частотной корреляции комплексных амплитуд, а квадратом модуля этой величины. Для нее из (2) и (3) получаем

$$|\langle E_1 E_2^*\rangle|^2 = 2\exp\left(-\frac{A}{4}\Omega^2 x\right)\left[\operatorname{ch}\sqrt{D\Omega}\,x + \cos\sqrt{D\Omega}\,x\right]^{-1}. \tag{4}$$

Определенная выше связь частотной корреляции волн со статистикой фазы вдоль луча позволяет, в отличие от подхода, развитого в [3], обсудить вопрос о механизмах флуктуаций, влияющих на частотную корреляцию волн. В области слабых мерцаний статистика фазы, а следовательно, и частотная корреляция волн, определяются флуктуациями оптической длины луча [2], что приводит к следующему виду функции частотной корреляции:

$$|\langle E_1 E_2^*\rangle|^2 = \exp\left(-\frac{A}{4}\Omega^2 x\right). \tag{4а}$$

В области насыщенных флуктуаций интенсивности флуктуации фазы обязаны, в основном, флуктуациям геометрической длины луча [2], т. е. на частотную корреляцию существенное влияние оказывает искривленность лучей. В этой области частотная корреляция ведет себя следующим образом:

$$|\langle E_1 E_2^*\rangle|^2 = 2\left[\operatorname{ch}\sqrt{D\Omega}\,x + \cos\sqrt{D\Omega}\,x\right]^{-1}. \tag{4б}$$

Выражение (4 б) в точности совпадает с соответствующим результатом работы [3], в которой в рамках параболического уравнения для комплексной амплитуды поля учтены дифракционные эффекты. Это доказывает, что дифракционные эффекты не оказывают влияния на частотную корреляцию волн.

3. В рамках геометрооптического приближения удается также рассмотреть вопрос о влиянии статистической связи между интенсивностью I и фазой S волны на частотную корреляцию. Если бы I и S были статистически независимы, то среднее в (2) распалось бы на произведение средних $\langle Ie^{i\Omega S}\rangle = \langle I\rangle\langle e^{i\Omega S}\rangle$, т. е. в случае независимых I и S частотная корреляция определяется характеристической функцией фазы в фиксированной точке среды, которая определена выражением [2]

$$\langle e^{i\Omega S}\rangle = \exp\left(-\frac{A}{8}\Omega^2 x\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\cos\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x + i\operatorname{sh}\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\sin\frac{\sqrt{D\Omega}}{2}x\right). \tag{5}$$

Однако в действительности статистические связи $\varkappa_{1,\,n}^{I,\,S}$ растут с ростом x по закону $\sim x^{2n}$ [2], т. е. в области сильных флуктуаций интенсивности формула (5) неправильно описывает частотную корреляцию комплексных амплитуд. Величину $\langle\delta Ie^{i\Omega S}\rangle = \langle Ie^{i\Omega S}\rangle - \langle I\rangle\langle e^{i\Omega S}\rangle = \langle e^{i\Omega S}\rangle_{л} - \langle e^{i\Omega S}\rangle$ можно принять в качестве количественной характеристики статистической зависимости между интенсивностью и фазой волны.

4. Кроме найденной выше функции частотной корреляции комплексных амплитуд, в приближении геометрической оптики можно определить целый ряд других корреляционных характеристик, в частности, частотную корреляцию обратных комплексных амплитуд $\left\langle\frac{1}{E_1 E_2^*}\right\rangle$. Для простоты найдем $\left\langle\frac{1}{E_1 E_2^*}\right\rangle$ в двумерном случае, когда неоднородности среды и все параметры волны зависят только от продольной и одной поперечной координаты y. Двумерные уравнения геометрической оптики для параметров фиксированной лучевой трубки имеют следующий вид [1]:

$$\frac{dJ}{dx} + L = 0,\qquad \frac{dS}{dx} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon(x,y),\qquad \frac{d\theta}{dx} = v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y},$$
$$\frac{dL}{dx} + \frac{1}{2}J\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial y^2} = 0,\qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y},\qquad \frac{dy}{dx} = v, \tag{6}$$

где J — расходимость лучевой трубки ($J = 1/I$), S — эйконал вдоль фиксированного луча, $v \equiv \dfrac{\partial S}{\partial y}$ — угол прихода луча в точку наблюдения (x, y), $\theta \equiv v^2$, $L \equiv -J\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}$. Применяя стандартную процедуру получения уравнений для средних [1, 2], находим следующее уравнение для произвольной функции $\varphi(S, \theta, J, L)$ параметров лучевой трубки:

$$\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial x} + \left\langle L\frac{\partial\varphi}{\partial J}\right\rangle - 2D\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\theta\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right\rangle = \tag{7}$$

$$= \frac{A}{8}\left\langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial S^2}\right\rangle + 8D\left\langle\theta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right\rangle + D\left\langle J\frac{\partial^2\varphi}{\partial S\partial L}\right\rangle + B\left\langle J^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial L^2}\right\rangle,$$

где

$$A \equiv A(0), \qquad D \equiv -\frac{1}{4}\left.\frac{\partial^2 A(s)}{\partial s^2}\right|_{s=0}, \qquad B \equiv \frac{1}{8}\left.\frac{\partial^4 A(s)}{\partial s^4}\right|_{s=0},$$

$$\langle\varepsilon(x_1, y_1)\,\varepsilon(x_1 + x, y_1 + s)\rangle = A(s)\,\delta(x).$$

Используя уравнение (7), после нетрудных, но громоздких выкладок для $\left\langle\dfrac{1}{E_1 E_2^*}\right\rangle$ получаем следующее выражение:

$$\left\langle\frac{1}{E_1 E_2^*}\right\rangle = \frac{\exp\left(-\dfrac{A}{8}\Omega^2 x\right)\sum\limits_{l=1}^{3}\varkappa_l e^{\lambda_l x}}{\sqrt[4]{\operatorname{ch}\sqrt{2D}\,\Omega x\cos\sqrt{2D}\,\Omega x + i\operatorname{sh}\sqrt{2D}\,\Omega x\sin\sqrt{2D}\,\Omega x}}, \tag{8}$$

где λ_p — корни характеристического уравнения: $\lambda^3 - 4\Omega Di\lambda = 4B$, $\varkappa_p = \Delta^{-1}(\lambda_j - \lambda_k)\times$ $\times(\lambda_j\lambda_k + 2\Omega Di)$,

$$\begin{Bmatrix} p \\ j \\ k \end{Bmatrix} = 1, 2, 3, \quad \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix} \neq p, \quad \begin{Bmatrix} j > k, & p \neq 2 \\ j < k, & p = 2 \end{Bmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}.$$

При $\Omega = 0$ (8) переходит в обратный момент интенсивности $\langle J\rangle$, полученный в работе [6].

Заметим, что вычисление средних типа $\left\langle\dfrac{1}{(E_1 E_2^*)^n}\right\rangle$ $(n = -1, 1, 2, \ldots)$ не вызывает принципиальных затруднений и их можно использовать для построения кумулянтных приближений для комплексной фазы волны подобно тому, как это сделано в [6] для уровня на основе обратных моментов интенсивности, однако это выходит за пределы данной статьи.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).
2. С. Н. Молодцов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 5, 726 (1977).
3. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 423 (1973).
4. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).
5. E. E. Salpeter, Astroph. J., 147, № 2 (1967).
6. А. Н. Малахов, С. Н. Молодцов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 2, 250 (1977).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 ноября 1976 г.