перекрытие спектральных линий, согласно [4], наиболее проявляются в коротковолновой части полосы O_2 $\lambda \sim 5$ *мм*.

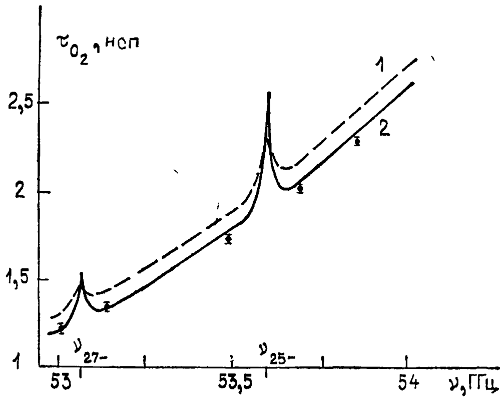

Рис. 1. Сравнение измеренных значений оптической толщины земной атмосферы, обусловленной молекулярным кислородом (точки), с расчетными кривыми, согласно работам [6, 8] (сплошная линия) и [4] (пунктир).

Автор признателен А. П. Наумову за обсуждение полученных результатов, а также М. Б. Зиничевой и А. Н. Минякову за оказанную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, № 7, 413 (1947).
2. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
3. В. И. Алешин, А. П. Наумов, В. М. Плечков, М. И. Сумин, А. В. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. P. W. Rosenkranz, IEEE Trans. on Anten. and Propag., AP-23, № 4, 498 (1975).
5. Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Л. К. Сизьмина, А. В. Троицкий, А. М. Штанюк, Изв. высш. уч зав. — Радиофизика, 19, № 1, 25 (1976).
6. E. E. Reber, J. Geophys. Res., 77, № 21, 3831 (1972).
7. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
8. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
9. А. В. Троицкий, Тезисы докладов и сообщений Всесоюзного симпозиума по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере, М., 1976, стр. 265.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
5 июня 1976 г.

УДК 538.56 : 519.25

ТОЧНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

С. Ю. Медведев

1. Вопрос о поведении корреляционной функции марковского случайного процесса вызывает значительный интерес. Обычно удается получить вид этой функции лишь в некоторых приближениях. В настоящей работе получено точное выражение для функции корреляции произвольного стационарного марковского процесса. Найденное выражение на конкретном примере сравнивается с выражением для корреляционной функции в гауссовом и эксцессном приближениях.

2. Стационарный марковский процесс полностью описывается двумерной плотностью вероятностей $W(x, x_\tau; \tau)$, которая подчиняется прямому кинетическому уравнению

$$\frac{\partial W(x, x_\tau; \tau)}{\partial \tau} = \hat{L}(x_\tau)\, W(x, x_\tau; \tau) \qquad (\tau \geqslant 0). \tag{1}$$

Здесь $\hat{L}(x)$ — кинетический оператор,

$$\hat{L}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x),$$

$K_n(x)$ — кинетические коэффициенты. Решение уравнения (1) можно записать в символической операторной форме:

$$W(x, x_\tau; \tau) = \exp[\hat{L}(x_\tau)\tau]\, W(x, x_\tau; 0) = \exp[\hat{L}(x_\tau)\tau]\, W(x)\,\delta(x_\tau - x) = \\ = W(x)\exp[\hat{L}(x_\tau)\tau]\,\delta(x_\tau - x), \tag{2}$$

где $W(x)$ — одномерная плотность вероятностей стационарного марковского процесса, определяемая уравнением

$$\hat{L}(x)\, W(x) = 0. \tag{3}$$

Корреляционная функция процесса $x(t)$ равна

$$K_x(\tau) = \langle x x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1 x_2\, W(x_1, x_2; \tau)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1 x_2 W(x_1) \exp[\hat{L}(x_2)\tau]\,\delta(x_2 - x_1)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1 x_2 W(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{L}^n(x_2)\,\delta(x_2 - x_1)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int x_1\, W(x_1)\,\delta(x_2 - x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} [\hat{L}^+(x_2)]^n\, x_2 dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) \exp[\hat{L}^+(x)\tau]\, x dx = \langle x \exp[\hat{L}^+(x)\tau]\, x \rangle,$$

где

$$\hat{L}^+(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m(x)}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m}.$$

Таким образом, окончательно получаем*

$$K_x(\tau) = \langle x \exp[\hat{L}^+(x)\,|\tau|\,]\, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\tau|^n}{n!} \langle x (\hat{L}^+)^n x \rangle. \tag{4}$$

Соотношение (4) представляет собой разложение функции корреляции произвольного стационарного марковского процесса в ряд Тейлора в окрестности $\tau = 0$, причем коэффициенты этого ряда являются характеристиками только одномерного распределения исходного процесса. Коэффициенты ряда (4) можно точно подсчитать, если удастся решить уравнение (3) для стационарной плотности вероятностей $W(x)$, т. е. если удастся получить распределение, по которому ведется усреднение в (4). Для непрерывного марковского процесса ($K_n(x) = 0$, $n \geqslant 3$), как известно [2],

$$W(x) = \frac{\text{const}}{K_2(x)} \exp\left[-\int \frac{K_1(x)}{K_2(x)}\, dx\right].$$

3. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\dot{x} = -ax^3 + \xi(t), \tag{5}$$

---

* В силу симметрии функции корреляции $K_x(\tau)$ в формуле (4) τ можно заменить на $|\tau|$. Из (4) можно получить ранее найденное в [1] асимптотическое разложение спектра мощности $S_x(\omega)$ стационарного марковского процесса $x(t)$ по степеням $1/\omega$.

где $\xi(t)$ — гауссов белый шум с нулевым средним значением $\langle \xi \rangle = 0$ и корреляционной функцией $\langle \xi \xi_\tau \rangle = D\delta(\tau)$. Стационарное распределение $W(x)$ для системы (5) легко найти из уравнения ЭФП (2), учитывая, что $K_1(x) = -ax^3$, $K_2(x) = D$:

$$W(x) = C \exp\left(-\frac{ax^4}{2D}\right), \tag{6}$$

где $C = 2(a/2D)^{1/4}/\Gamma(1/4)$ — константа нормировки, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Вычислим несколько первых коэффициентов разложения корреляционной функции процесса $x(t)$, описываемого уравнением (5). Формулу (4) запишем в виде

$$K_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\tau^n, \qquad b_n = \langle x (\hat{L}+)^n x \rangle. \tag{4'}$$

Из (4′) и (6) легко получить

$$\begin{aligned} b_1 &= -0{,}5D, \quad b_2 = 0{,}714a^{0,5}D^{1,5}, \quad b_3 = -2{,}25aD^2, \\ b_4 &= 55{,}8a^{1,5}D^{2,5}, \quad b_5 = -122{,}125a^2D^3. \end{aligned} \tag{7}$$

Найдем теперь разложение функции корреляции процесса $x(t)$ в ряд по τ в гауссовом и эксцессном приближениях. Кумулянтные функции $\varkappa_2(0, \tau)$ и $\varkappa_4(0, \tau, \tau, \tau)$ процесса $x(t)$ подчиняются системе уравнений [3]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\varkappa_2(0, \tau) &= -3a\,\varkappa_2\varkappa_2(0, \tau) - a\,\varkappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \\ \frac{d}{d\tau}\varkappa_4(0, \tau, \tau, \tau) &= -9a(\varkappa_4 + 2\varkappa_2^2)\,\varkappa_2(0, \tau) - 27a\,\varkappa_2\,\varkappa_4(0, \tau, \tau, \tau), \end{aligned} \tag{8}$$

$\varkappa_2$ и $\varkappa_4$ — кумулянты процесса $x(t)$.

В гауссовом приближении сразу получаем решение

$$\varkappa_2(0, \tau) = \varkappa_2 \exp(-3a\,\varkappa_2\,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3a)^n}{n!}\varkappa_2^{n+1}\tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}_n}{n!}\tau^n.$$

Для рассматриваемой системы, согласно [4], $\varkappa_2^{\text{гаусс}} = (D/6a)^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= -0{,}5D, \quad \tilde{b}_2 = 0{,}61a^{0,5}D^{1,5}, \quad \tilde{b}_3 = -0{,}75\,aD^2, \\ \tilde{b}_4 &= 0{,}917a^{1,5}D^{2,5}, \quad \tilde{b}_5 = 1{,}125a^2D^3. \end{aligned} \tag{9}$$

В эксцессном приближении решение системы уравнений (8) ищем в виде

$$\varkappa_2(0, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\approx\atop{b_n}}{n!}\tau^n, \qquad \varkappa_4(0, \tau, \tau, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\tau^n. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ, приходим к рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{b}_{n+1} &= -3a\,\varkappa_2\,\overset{\approx}{b}_n - ac_n, \\ c_{n+1} &= -9a(\varkappa_4 + 2\varkappa_2^2)\,\overset{\approx}{b}_n - 27a\,\varkappa_2\,c_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Для системы с кубичной нелинейностью, согласно [4],

$$\overset{\approx}{b}_0 = \varkappa_2^{\text{эксц}} = (D/5a)^{1/2}, \qquad c_0 = \varkappa_4^{\text{эксц}} = -D/10a.$$

Пользуясь формулой (11), подсчитаем значения первых коэффициентов рядов (10):

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{b}_1 &= -0{,}5D, \quad \overset{\approx}{b}_2 = 0{,}67a^{0,5}D^{1,5}, \quad \overset{\approx}{b}_3 = -2{,}25aD^2, \\ \overset{\approx}{b}_4 &= 21{,}1a^{1,5}D^{2,5}, \quad \overset{\approx}{b}_5 = -253a^2D^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Сравнивая (7), (9) и (12), видим, что коэффициенты b_n и $\approx b_n$ почти совпадают, и, следовательно, эксцессное приближение при малых τ достаточно хорошо описывает поведение функции корреляции марковского процесса. Гауссово приближение дает, как и следовало ожидать, менее точный результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 864 (1974).
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 214 (1976).
4 А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 71 (1976).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июля 1976 г.

УДК 538.56 : 519.25

К ВОПРОСУ О ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ВОЛН В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

С. Н. Молодцов, А. И. Саичев

1. Теоретическому исследованию частотной корреляции волн посвящен целый ряд работ (см., например, [3–5]). В работе [3] найдена частотная корреляция мерцаний в области насыщенных флуктуаций интенсивности. Теоретический анализ, проведенный в [3], основан на использовании параболического уравнения для комплексной амплитуды поля, описывающего распространение световых волн в средах с крупномасштабными случайными неоднородностями.

В настоящей работе в приближении геометрической оптики определена частотная корреляция комплексных амплитуд волн, распространяющихся в случайно-неоднородной среде. Показано, что наличие дифракционных эффектов не сказывается на частотной корреляции волн. В рамках геометрической оптики получены дополнительные статистические характеристики, характеризующие частотную корреляцию волн, в частности, частотная корреляция обратных комплексных амплитуд.

2. Пусть на полупространство $x > 0$, заполненное случайно-неоднородной средой, нормально к границе среды падают две плоские волны единичной амплитуды с волновыми числами k_1 и k_2. Как обычно (см., например, [2]), считаем флуктуации диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(x, \rho)$ гауссовым дельта-коррелированным по продольной координате x полем с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1)\, \varepsilon(x_2, \rho_1 + \rho) \rangle = A(\rho)\, \delta(x_2 - x_1),$$

где

$$A(\rho) = A - D\rho^2 + \frac{B}{4}\rho^4 - \ldots$$

В приближении геометрической оптики комплексные амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_1 = k_1 c$, $\omega_2 = k_2 c$) в произвольной точке среды (x, ρ) равны

$$E_1(x, \rho) = A(x, \rho) \exp[ik_1 S(x, \rho)], \\ E_2(x, \rho) = A(x, \rho) \exp[ik_2 S(x, \rho)] \tag{1}$$

(A — амплитуда волны, S — эйконал). Как легко видеть из (1), частотная корреляция комплексных амплитуд в точке (x, ρ) равна

$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \langle I e^{i \Omega S} \rangle \tag{2}$$

(I — интенсивность волны, $\Omega \equiv k_1 - k_2$). В [1, 2] показано, что среднее (2) в фиксированной точке среды совпадает с характеристической функцией фазы вдоль фиксированного луча $\langle e^{i\Omega S} \rangle_л$. Таким образом, определение частотной корреляции комплексного светового поля тесно связано со статистикой фазы вдоль фиксированного луча. Используя результаты работы [2], можно найти характеристическую функцию фазы вдоль луча. Она определяется следующим выражением: