ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 8 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

О ВОЗМОЖНОСТИ ТОЧНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Б. С. Абрамович

С помощью уравнения Дайсона для среднего поля вычисляется квазистатический предел тензора эффективной диэлектрической проницаемости статистически однородной и изотропной среды с двумерными неоднородностями На основе анализа всего ряда массового оператора найдены условия, достаточные для точного решения задачи. Устанавливается связь данного рассмотрения с методом самосогласованного (эффективного) поля и модельными результатами Дыхне. Полученные результаты применяются для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости нерегулярной плазмы, помещенной в однородное поле с частотой, близкой к плазменной.

1. ВВЕДЕНИЕ

В электродинамике хаотически неоднородной среды важную роль играет тензор эффективной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}^{\text{eff}}$, связывающий средние (по ансамблю неоднородностей) индукцию и электрическое поле в нерегулярной среде [1]:

$$\langle \boldsymbol{D} \rangle = \hat{\varepsilon}^{\text{eff}} \langle \boldsymbol{E} \rangle. \tag{1}$$

В статистически однородной среде оператор $\hat{\varepsilon}^{\text{eff}}$ является интегральным оператором с разностным ядром. Знание такой характеристики среды, как $\hat{\varepsilon}^{\text{eff}}$, позволяет свести задачу о среднем поле к соответствующей задаче в однородной поглощающей среде, вычислить потери на излучение заданными токами (например, излучение заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью в неоднородной среде [2]), и сопротивление излучения, интенсивность теплового флуктуационного поля [3] в неоднородной среде и т. п.

За последние годы появилось значительное количество работ по теории многократного рассеяния волн, в которых для решения общих и конкретных вопросов используются уравнения типа Дайсона и Бете—Солпитера [4]. В этих работах наряду с исследованием основного вопроса об асимптотике ядер уравнений приводятся решения уравнения Дайсона для среднего поля в статистически однородной и изотропной среде. При этом $\hat{\varepsilon}^{\text{eff}}$ по существу совпадает с массовым оператором уравнения Дайсона. Однако при конкретных вычислениях ограничиваются тем или иным приближением массового оператора (приближение Фолди [5], приближение Бурре [6], приближение Финкельберга [7]), поскольку суммирование топологически сложных рядов теории возущений и получение точного значения массового оператора (а с ним и ε^{eff}) практически невозможно даже в случае однородных полей.

Наряду с этим в статической задаче часто используется «физическое» решение методом самосогласованного поля, при котором эффективная диэлектрическая проницаемость (или эффективная проводимость) изотропной среды определяется решением уравнения Максвелла—Оделевского [8–10]:

$$\left\langle \frac{\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{eff}}}{\varepsilon + (n-1)\varepsilon^{\mathrm{eff}}} \right\rangle = 0. \tag{2}$$

Здесь n — размерность задачи ($n = 1, 2, 3$), а усреднение ведется по реализациям случайного процесса $\varepsilon(\boldsymbol{r}, \omega)$ — локальной диэлектрической проницаемости среды. Результаты, полученные этим методом, наглядны и в ряде случаев (особенно для двумерных систем) прекрасно подтверждаются экспериментально [8, 11]. Однако известные выводы уравнения (2) в теории перколяции (см., например, обзор [8]) и в теории многократного рассеяния, где решение уравнения Максвелла—Оделевского является основным приближением для $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ среды с мелкомасштабными неоднородностями, в значительной мере интуитивны и мало обоснованны. Оценки поправок к формуле (2), полученные для среды с трехмерными неоднородностями ($n = 3$) в приближении случайных фаз, указывают на значительную ограниченность этого результата [10].

Методом, отличным от диаграммного и перколяционного, Дыхне удалось найти точное значение статической проводимости двумерной двухфазной среды с равными концентрациями фаз, благодаря некоторой симметрии в уравнениях токовой статики, описывающих данную систему [12]. Отмеченная симметрия, характерная для двумерных систем, позволяет получить точное решение и при менее жестких предположениях о характере флуктуаций. В то же время результаты Дыхне получаются методом самосогласования (2), применение которого при этом ничем не оправдано.

В настоящей работе вычисляется квазистатический предел ($c = \infty$) $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ для статистически однородной и изотропной среды с двумерными неоднородностями в однородном поле ($\boldsymbol{k} = 0$). На основе анализа всего ряда массового оператора показано, что для точного решения задачи достаточно, чтобы все нечетные моментные функции случайного процесса

$$\xi(\omega, \boldsymbol{r}) = 2\,\frac{\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r}) - \varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega)}{\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r}) + \varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega)} \tag{3}$$

равнялись нулю:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2m+1} \xi(\omega, \boldsymbol{r}) \right\rangle = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

При этом уравнение Максвелла—Оделевского является первым из бесконечной системы уравнений (4), а результаты Дыхне соответствуют одному из способов задания процесса $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$. В качестве еще одного интересного примера точного решения квазистатической задачи рассматривается нерегулярная холодная изотропная плазма со случайными неоднородностями электронной плотности $N(\boldsymbol{r})$ в случае, когда частота электрического поля близка к средней ленгмюровской частоте плазмы. В этом случае точное решение удается получить благодаря общим свойствам преобразования (3) $\xi(\varepsilon)$, специфичным для двумерной задачи.

В основу исследования положено уравнение Дайсона для среднего поля в форме, предложенной в [13] для волнового уравнения.

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ $\hat{\varepsilon}_{\text{eff}}$ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим поведение электрического поля в изотропной среде, в каждой точке которой задана нерегулярная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$, связывающая локальные индукцию $\boldsymbol{D}(\omega, \boldsymbol{r})$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{r})$ в двумерном случае ($\boldsymbol{r} = \{x, y\}$):

$$\boldsymbol{D}(\omega, \boldsymbol{r}) = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{r}). \tag{5}$$

Связь (5) справедлива, если характерные пространственные масштабы, связанные с тепловым движением носителей в среде, малы по сравнению с размером неоднородностей (диэлектрики, холодная плазма и т. д.). Исходными являются уравнения квазиэлектростатики

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{6}$$

Считая флуктуации диэлектрической проницаемости статистически однородными и изотропными, запишем первое из уравнений (6) в виде

$$\varepsilon_0(\omega) \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} [\varepsilon_0(\omega) - \varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})]\, E_i \quad (i = 1, 2), \tag{7}$$

где $\varepsilon_0(\omega)$ — пока не определенная диэлектрическая проницаемость, не зависящая от координат*. Уравнению (7) соответствует интегральное стохастическое уравнение

$$E_i(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' [\varepsilon(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0] \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{\partial x_i \partial x_j} E_j(\boldsymbol{r}'), \tag{8}$$

в котором $G(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \ln r$ — функция Грина двумерного уравнения Пуассона. Дифференцирование в (8) следует понимать в обобщенном смысле, поэтому сингулярную функцию $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}$ целесообразно представить в регуляризованном виде:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = g_{ij}(\boldsymbol{r}) - \frac{\delta_{ij}}{2} \delta(\boldsymbol{r}). \tag{9}$$

Здесь $g_{ij}(\boldsymbol{r}) = -P \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \dfrac{1}{2\pi} \ln r$ (символ P означает, что интегрирование с $g_{ij}(\boldsymbol{r})$ выполняется в смысле главного значения), или в фурье-представлении

$$g_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{\delta_{ij}}{2} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \tag{10}$$

Используя (9), уравнение (8) легко привести к виду

$$F_i(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' g_{ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \xi(\boldsymbol{r}')\, F_j(\boldsymbol{r}'), \tag{11}$$

где введены новые переменные

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tag{12}$$

---

* В случае неизотропных флуктуаций $\varepsilon_0(\omega)$ — тензор.

$$\xi(\boldsymbol{r}) = 2\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r}) - \varepsilon_0}{\varepsilon(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_0}.$$

Обозначим $\langle \xi(\boldsymbol{r}) F_i(\boldsymbol{r}) \rangle = T_i(\boldsymbol{r})$. Тогда по определению

$$T_i(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{\rho}\, \xi^{\text{eff}}_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}) \langle F_j(\boldsymbol{\rho}) \rangle. \tag{13}$$

Решая уравнение (11) последовательными итерациями и усредняя полученный ряд в предположении статистической однородности и изотропности процесса $\xi(\omega, \boldsymbol{r})$, получим для фурье-трансформант полей $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})$ следующие выражения:

$$\begin{gathered} \langle F_i(\boldsymbol{k}) \rangle = [\delta_{ij} + \Gamma_{ij}(\boldsymbol{k})]\, F^{(0)}_j(\boldsymbol{k}), \\ T_i(\boldsymbol{k}) = \alpha_{ij}(\boldsymbol{k})\, F^{(0)}_j(\boldsymbol{k}). \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь $\boldsymbol{F}^{(0)}(\boldsymbol{r})$ — пробное поле ($\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{(0)}$ при $\xi = 0$), Γ_{ij} и α_{ij} представляются в виде рядов по многомерным корреляционным функциям процесса $\xi(\boldsymbol{r})$:

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{k}) = g_{il}(\boldsymbol{k})\, \alpha_{lj}(\boldsymbol{k}), \quad \alpha_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)}_{ij},$$

$$\alpha^{(n)}_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d\boldsymbol{\varkappa}_1 \ldots d\boldsymbol{\varkappa}_n\, g_{il}(\boldsymbol{\varkappa}_1)\, g_{lt}(\boldsymbol{\varkappa}_2) \ldots \tag{15}$$

$$\ldots g_{pj}(\boldsymbol{\varkappa}_n) \Phi_\xi(|\boldsymbol{\varkappa}_1 - \boldsymbol{\varkappa}_2|, \ldots, |\boldsymbol{\varkappa}_n - \boldsymbol{k}|),$$

где $\Phi_\xi(\boldsymbol{k}_\alpha)$ связана со спектром N-мерной моментной функции процесса $\xi(\boldsymbol{r})$:

$$B(\boldsymbol{k}_\alpha) = (2\pi)^2 \delta\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{k}_\alpha\right) \Phi_\xi(\boldsymbol{k}_\beta),$$

$$B(\boldsymbol{r}_\alpha) = \left\langle \prod_{\alpha=1}^{N} \xi(\boldsymbol{r}_\alpha) \right\rangle$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, N, \quad \beta = 2, 3, \ldots, N).$$

Разрешая систему уравнений (14), (15) относительно $\boldsymbol{F}^{(0)}$, получим*

$$[\xi^{\text{eff}}_{ij}(\boldsymbol{k})]^{-1} = \alpha^{-1}_{ij}(\boldsymbol{k}) + g_{ij}(\boldsymbol{k}). \tag{16}$$

В силу изотропности флуктуаций из соотношений (12) и (16) следует

$$\varepsilon^{\text{tr}}_{\text{eff}}(\omega, k) = \varepsilon_0(\omega)\,[1 + \alpha^{\text{tr}}(k)], \quad \varepsilon^{l}_{\text{eff}}(\omega, k) = \frac{\varepsilon_0(\omega)}{1 - \alpha^{l}(k)}. \tag{17}$$

Здесь $\varepsilon^{\text{tr}}_{\text{eff}}$ и $\varepsilon^{l}_{\text{eff}}$ — поперечная и продольная эффективные диэлектрические проницаемости неоднородной среды, α^{tr} и α^{l} — соответственно поперечная и продольная составляющие тензора α_{ij}. При выводе (17) учтено, что согласно (10) $g^{\text{tr}} = -g^{l} = 1/2$.

---

* Легко видеть, что $\xi^{\text{eff}}_{ij}(\ )$ совпадает с ядром массового оператора уравнения Дайсона для поля $\langle F \rangle$.

Обратимся к анализу итерационного ряда $\alpha_{ij}(\boldsymbol{k})$. Выделим в (15) две группы членов

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{k}) = \alpha_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{k}) + \alpha_{ij}^{(2)}(\boldsymbol{k}), \tag{18}$$

где

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(2n)}, \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{ij}^{(2n+1)}.$$

По индукции легко доказать следующие свойства симметрии тензоров $\alpha_{ij}^{(p)}$ $(p = 1, 2)$:

$$\alpha_{11}^{(p)} = (-1)^{p+1} \alpha_{22}^{(p)}, \quad \alpha_{12}^{(p)} = (-1)^{p} \alpha_{21}^{(p)}, \tag{19}$$

или иначе

$$\alpha^{(p)\mathrm{tr}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^{p+1} \alpha^{(p)\,l}(\boldsymbol{k}). \tag{20}$$

Используя соотношения (20), можно преобразовать (17) к виду

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{tr}}(\omega, \boldsymbol{k})\, \varepsilon_{\mathrm{eff}}^{l}(\omega, \boldsymbol{k})}{\varepsilon_0^2(\omega)} = 1 + \frac{\mathrm{Sp}\, \alpha_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{k})}{1 - \alpha^{l}(\boldsymbol{k})}. \tag{21}$$

В однородном поле ($\boldsymbol{k} = 0$) пространственная дисперсия, связанная с неоднородностями среды [1], отсутствует, среднее поле коллинеарно средней индукции и, следовательно,

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{eff}}(\omega, \boldsymbol{k} = 0) = \varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega)\, \delta_{ij}. \tag{22}$$

Тогда подставляя (22) в (21), окончательно получаем

$$\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega) = \varepsilon_0(\omega) \left[1 + \frac{\mathrm{Sp}\, \alpha_{ij}^{(1)}(0)}{1 - \alpha^{l}(0)} \right]^{1/2}. \tag{23}$$

Таким образом, в диспергирующей среде с двумерными неоднородностями в однородном поле квазистатическая часть массового оператора уравнения Дайсона для среднего электрического поля представима в виде ряда лишь по нечетным моментным функциям процесса $\xi(\omega, \boldsymbol{r})$.

3. ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из выражения (23) следует: если $\mathrm{Sp}\, \alpha_{ij}^{(1)}(0) = 0$, то $\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega) = \varepsilon_0(\omega)$. Достаточным условием последнего является обращение в нуль всех нечетных моментных функций процесса:

$$\langle \xi(\omega, \boldsymbol{r}) \rangle = 0,$$

$$\left\langle \prod_{l=1}^{2m+1} \xi(\omega, \boldsymbol{r}_l) \right\rangle = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Следовательно, в этом случае квазистатический предел $\varepsilon^{\mathrm{eff}} = \varepsilon_0$ определяется системой уравнений (24), а не одним уравнением Максвелла—Оделевского $\langle \xi \rangle = 0$. Иными словами, условия (24) определяют класс случайных процессов $\xi(\boldsymbol{r})$ и $\varepsilon(\boldsymbol{r})$, для которых $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{eff}}(\omega, \boldsymbol{k} = 0)$ определяются точно.

В качестве примера хаотически неоднородной среды, удовлетворяющей условиям (24), рассмотрим среду, в которой диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$ может принимать значения только одного знака (например, $W(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon \leqslant 0$, где $W(\varepsilon)$ — функция распределения диэлектрической проницаемости). В этом случае уравнение $\langle \xi \rangle = 0$ имеет одно действительное решение $\varepsilon_0 > 0$ [14]*. Далее, пусть действительный процесс $\xi(\omega, \boldsymbol{r})$ является нечетной функцией случайного процесса $\zeta(\omega, \boldsymbol{r})$, у которого многомерные функции плотности вероятности суть четные по всем переменным ζ. Тогда, если величина ζ изменяется в симметричных пределах, то все нечетные моментные функции процесса $\xi(\omega, \boldsymbol{r})$ равны нулю и условия (24) удовлетворяются. Для нерегулярной диэлектрической проницаемости последние приводят к соотношению

$$\varepsilon(\zeta)\,\varepsilon(-\zeta) = (\varepsilon^{\mathrm{eff}})^2,$$

которое может служить для определения $\varepsilon^{\mathrm{eff}}$:

$$\varepsilon^{\mathrm{eff}} = \exp(\langle \ln \varepsilon \rangle). \tag{25}$$

В частности, для двухфазной среды с равновероятными значениями фаз $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, выбирая $\varepsilon(\zeta) = \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\vartheta(\zeta)$, $\vartheta(\zeta)$ — функция Хевисайда, получаем хорошо известное $\varepsilon^{\mathrm{eff}} = (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^{1/2}$. К этим же результатам иным способом приходит Дыхне при определении эффективной проводимости неоднородной двумерной системы [13]. Таким образом, результаты Дыхне совпадают с решением уравнения Максвелла—Оделевского ($n = 2$), которое при сделанных предположениях точно решает задачу.

В качестве другого примера, позволяющего на основе соотношений (24) вычислить точное значение $\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\omega)$, рассмотрим нерегулярную плазму, помещенную в однородное электрическое поле, с частотой, близкой к средней ленгмюровской частоте плазмы $\langle \omega_L \rangle = (4\pi e^2 \langle N \rangle / m)^{1/2}$ $\left(\text{точнее, } \dfrac{\omega - \langle \omega_L \rangle}{\langle \omega_L \rangle} \ll \dfrac{\sigma_N}{\langle N \rangle}\right.$, где $\langle N \rangle$ и σ_N — соответственно средняя электронная концентрация и дисперсия флуктуаций электронной плотности $\left. N(\boldsymbol{r}) \right)$. В этом случае $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$ может обращаться в нуль, $\langle \varepsilon \rangle \approx 0$ и среда является сильно неоднородной.

В Приложении произведен анализ преобразования $\xi(\varepsilon)$, где, в частности, показано, что если $\langle \varepsilon \rangle = 0$, то уравнение $\langle \xi \rangle = 0$ имеет мнимые корни, из которых мы должны выбрать соответствующий затуханию среднего поля ($\operatorname{Im} \varepsilon_0 > 0$). Таким образом, при $\omega = \langle \omega_L \rangle$, согласно свойствам отображения (3), мы имеем

$$\varepsilon_0\, i\,|\varepsilon_0|, \quad \xi = 2e^{i\varphi(r)}; \tag{26}$$

$$\varepsilon = |\varepsilon_0| \operatorname{ctg} \varphi(\boldsymbol{r})/2. \tag{27}$$

Естественно считать относительные флуктуации электронной концентрации малыми, $\sigma_N/\langle N \rangle \ll 1$. Тогда мала дисперсия диэлектрической проницаемости $\sigma_\varepsilon = \sigma_N/\langle N \rangle$, что позволяет описывать флуктуации диэлектрической проницаемости функцией распределения, допускающей большие значения $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$. При этом из (27) следует, что для больших вариаций отношения $\varepsilon/|\varepsilon_0|$ ($\varepsilon/|\varepsilon_0| \in (-\infty, \infty)$) случайная фаза $\varphi(\boldsymbol{r})$ процесса $\xi(\boldsymbol{r})$ принимает значения $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Последнее позволяет предположить равномерное распределение фазы на интервале $|\varphi| \leqslant \pi$. Тогда из (26) получаем, что все моменты $\langle \xi^m(\boldsymbol{r}) \rangle = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$), следовательно, $\alpha^{(1)}(0) = 0$ и $\varepsilon^{\mathrm{eff}} = \varepsilon_0$. Далее, если процесс $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$ распределен по закону Коши

* В работе [14] доказательство этого утверждения проведено для среды с трехмерными неоднородностями ($n = 3$), что в данном месте не принципиально.

$$W(\varepsilon) = \frac{\sigma_\varepsilon}{\pi(\sigma_\varepsilon^2 + \varepsilon^2)},$$

то из (27) получаем следующую одночастотную функцию распределения процесса $\varphi(\boldsymbol{r})$:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vartheta(\varphi + \pi) - \vartheta(\varphi - \pi)}{(\sigma_\varepsilon/|\varepsilon_0|)\sin^2\varphi/2 + (|\varepsilon_0|/\sigma_\varepsilon)\cos^2\varphi/2}.$$

Отсюда следует, что случайная фаза $\varphi(\boldsymbol{r})$ распределена равномерно, если $|\varepsilon_0| = \sigma_\varepsilon$. Таким образом, эффективная диэлектрическая проницаемость плазмы с двумерными неоднородностями, распределенными по закону Коши, равна*

$$\varepsilon^{\text{eff}} = i\sigma_\varepsilon. \tag{28}$$

Мнимость величины $\varepsilon^{\text{eff}}(\langle\omega_L\rangle)$ в (28) связана с тем, что в неоднородной плазме на частотах, близких к резонансной, происходит перекачка энергии среднего поля в энергию флуктуационных плазменных колебаний.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено выражение для квазистатической части тензора эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной двумерной системы. На основе анализа всего ряда массового оператора уравнения Дайсона для среднего поля сформулированы условия, при которых задача имеет точное решение. Особенно интересно применение вышеизложенного описания к нерегулярным средам типа плазмы в условиях, когда возможна трансформация среднего поля в стохастические собственные колебания среды.

Отметим также, что хотя для сред с трехмерными неоднородностями справедливы те же общие выражения (15) и (16), однако соотношений, подобных (19), (20), там не существует, что не позволяет обобщить приведенное рассмотрение на трехмерные системы. Последнее, по-видимому, связано с тем, что для трехмерных нерегулярных сред и метод самосогласованного поля дает неудовлетворительные результаты [8].

Автор признателен Н. Г. Денисову, Ю. А. Рыжову и В. В. Тамойкину за обсуждение работы и замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обратимся к соотношению (3) $\xi = 2\dfrac{\eta - 1}{\eta + 1}$. Последнее является дробно-линейной функцией и осуществляет конформное отображение комплексной плоскости $\eta = \varepsilon/\varepsilon_0$ в плоскость ξ.

Правая полуплоскость $\operatorname{Re}\eta > 0$ отображается во внутренность круга $|\xi| < 2$. Граница этого круга $|\xi| = 2$ является отображением мнимой оси $\operatorname{Re}\eta = 0$. Верхняя полуплоскость η отображается в верхнюю полуплоскость ξ.

Далее докажем, что при $\langle\varepsilon\rangle = 0$ (например, $W(\varepsilon) = W(-\varepsilon)$) корни уравнения $\langle\xi\rangle = 0$ мнимые. Обозначим через $w^s(p)$ изображение Лапласа производной характеристической функции процесса $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r})$. Тогда несложными преобразованиями уравнение можно привести к виду

* Для плазмы с трехмерными неоднородностями, распределенными по нормальному закону, решением уравнения (2) ($n = 3$) в [1] был получен аналогичный, но приближенный результат $\varepsilon^{\text{eff}} \approx 0{,}52\, i\sigma_\varepsilon$.

$$2 w^s(z) + 1 = 0, \tag{П.1}$$

где $z = -i\,\varepsilon_0$. Отделяя в (П.1) действительную и мнимую части, легко получить

$$\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dp \int\limits_0^\infty dt\, w^s(p)\, e^{(p-\mathrm{Re}\,z)t} \sin \mathrm{Im}\, zt = 0. \tag{П.2}$$

Из равенства (П.2) следует $\mathrm{Im} z = 0$, что и доказывает сделанное утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, **48**, 656 (1965); Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 3, 356 (1970).
2. V. V. Tamoykin, Astrophys. Space Sci., **16**, 120 (1972).
3. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, **59**, 218 (1970).
4. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, 3 (1970).
5. L. L. Foldy, Phys. Rev., **67**, 107 (1945).
6. R. C. Bourret, Canadian J. Phys., **40**, 782 (1962).
7. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, **46**, 725 (1964); **53**, 401 (1967).
8. S. Kirpatrick, Rev. Mod. Phys., **45**, 574 (1973); V. K. S. Shante and S. Kirpatrick, Adv. Phys., **20**, 325 (1971).
9. H. Stachowiak, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Math., **15**, 631 (1967).
10. В. М. Финкельберг, ЖТФ, **34**, 509 (1964).
11. Phys. Rev. Lett., **27**, 1719 (1971).
12. А. М. Дыхне, ЖЭТФ, **59**, 110 (1970).
13. Ю. А. Рыжов, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970.
14. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, **55**, 567 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 4 марта 1976 г.

ON THE POSSIBILITY OF PRECISE DETERMINATION OF THE EFFECTIVE DIELECTRIC PERMITTIVITY OF STRONGLY INHOMOGENEOUS MEDIA

B. S. Abramovich

Using the Dyson equation for the mean field, the quasi-static limit of the effective dielectric tensor of a statistically uniform and isotropic medium with two dimensional inhomogeneities is calculated. Based upon the analysis of the whole series of the mass operator, the conditions are found which are sufficient for an exact solution of the problem. The connection of the given consideration with the self-consistent (effective) field method and with the Dykhne model results is established. The results obtained are used to calculate the effective dielectric permittivity of irregular plasma immessed in the homogeneous field with the frequency close to the plasma one.