ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 8 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 621.372.8

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННАЯ СТРУКТУРА ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ИМПЕДАНСОМ НА ОДНОЙ ИЗ СТЕНОК

А. А. Пузенко

Впервые рассмотрены пространственные осцилляции вторых статистических моментов поля в волноводе со случайно-нерегулярной стенкой. Расчет выполнен в приближении метода локальных возмущений, позволяющем учесть сильные флуктуации поля вследствие многократного рассеяния.

Показано, что кроме интерференционных частот, возбуждаемых источником в начале волновода, в процессе рассеяния новые пространственные частоты продольных осцилляций вторых моментов поля не возникают Для компонент функции когерентности, соответствующих фиксированной пространственной частоте продольных интерференционных осцилляций, получена замкнутая система дифференциальных уравнений типа уравнения переноса. Показано, что компоненты функции взаимной когерентности, соответствующие всем интерференционным частотам, кроме нулевой, убывают так, что на достаточно больших дистанциях в функции когерентности остаются компоненты только с нулевой пространственной частотой осцилляций. Сформулировано условие применимости уравнения переноса для средних интенсивностей волноводных модов. В качестве иллюстрации в одном частном случае проведен численный расчет средней интенсивности на оси волновода в зависимости от дистанции.

1. Известные расчеты вторых статистических моментов поля в волноводе со статистически нерегулярными стенками в приближении многократного рассеяния сводятся к решению уравнения переноса для средней интенсивности волноводных модов [1, 2]. Как показано в [1], средние интенсивности модов позволяют получить лишь средние по пространству вторые статистические моменты поля и не учитывают их пространственную структуру, которая обусловлена интерференцией модов, возбуждаемых источником поля в волноводе. В ряде практических приложений представляют интерес неусредненные по пространству вторые статистические моменты поля в произвольном сечении волновода. В работе [2] получено интегральное уравнение относительно функции взаимной когерентности с поперечным разнесением точек наблюдения в двумерном волноводе с флуктуирующим импедансом на одной из стенок. Указан также способ учета интерференции волноводных модов. В настоящей работе на основании уравнений, полученных в [2], анализируется интерференционная структура функции взаимной когерентности.

2. Рассмотрим двумерный волновод с границами $x = 0$ и $x = a$ в декартовой системе координат x, z. Считая, что $ka \gg 1$, где k — волновое число возбуждающего волновод поля, и возбуждающее поле не противоречит условиям применимости параболического уравнения, для комплексной амплитуды поля $U(x, z)$ сформулируем динамическую задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$U|_{z=0}=f(x), \quad U|_{x=a}=0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=-ik[\eta_0+\alpha(z)]\,U|_{x=0},$$

где $\eta_0=\mathrm{const}$ — среднее значение, а $\alpha(z)$ — флуктуирующая компонента импеданса, имеющая большой по сравнению с длиной волны падающего поля характерный линейный масштаб Λ, $k\Lambda\gg 1$. Относительно функции взаимной когерентности.

$$F(x_1,\ x_2,\ z)=\langle U(x_1,\ z)\,U^*(x_2,\ z)\rangle$$

в [2] с помощью метода локальных возмущений сформулирован статистический аналог теоремы Грина, согласно которому функция $F(x_1, x_2, z)$ в трехмерной области x_1, x_2, z выражается через свои значения $F(x_1, 0, z)$ и $F^*(x_1,\ 0,\ z)$ на плоскости x_1, z. Для этих значений из теоремы Грина можно получить систему интегральных уравнений второго рода. При условии высокой добротности модов среднего поля в [2] проводится существенное упрощение системы интегральных уравнений. Условие высокой добротности для волновода без диссипативных потерь при $\eta_0=0$ и чисто мнимых флуктуациях импеданса $\alpha=i\alpha'$, где α' — вещественно, имеет вид [2]

$$kb_n\ll 1, \tag{1}$$

где

$$b_n=\sum_{\omega=0}^{\infty}\int_0^{\infty}d\tau\, b(\tau)\exp\left[-\frac{i}{2k}(\lambda_{0\omega}^2-\lambda_{0n}^2)\,\tau\right] \tag{2}$$

— комплексный сдвиг продольного собственного числа $\lambda_{0n}^2/2k$ n-го мода регулярного волновода за счет рассеяния, $\lambda_{0n}=\pi(n+1/2)/a$ — поперечное собственное число n-го мода регулярного волновода, $b(\tau)=\langle\alpha'(0)\,\alpha'(\tau)\rangle$ — корреляционная функция флуктуаций импеданса. Условие (1) позволило в [2] представить $F(x_1,\ 0,\ z)$ в виде

$$F(x_1,\ 0,\ z)=\sum_q A_q(x_1,\ 0,\ z)\,e^{-iSqz}, \tag{3}$$

где $\quad S=\dfrac{\pi^2}{2ka^2},$

$$q=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{4}$$

— безразмерная пространственная частота продольных осцилляций за счет интерференции модов регулярного волновода с индексами n и m, а $A_q(x_1,\ 0,\ z)$ — медленная по сравнению с осциллирующей экспонентой функция продольной координаты z. С учетом пространственной фильтрации для функций A_q и A_{-q}^* в [2] получено следующее интегральное соотношение:

$$\begin{gathered}A_q(x_1,\ 0,\ z)=A_q^0(x_1,\ 0,\ z)+\frac{1}{4}\int_0^z ds\int_0^a d\xi_1 B_q(\xi_1,\ 0/x_1,\ 0,\ z-s)\times\\ \times\int_0^a d\xi_1'\,R^*(\xi_1',\ \xi_1)\,A_q(\xi_1',\ 0,\ s)+\frac{1}{4}\int_0^z ds\int_0^a d\xi_2\times\\ \times B_q(0,\ \xi_2/x_1, 0,\ z-s)\int_0^a d\xi_2'\,R(\xi_2',\ \xi_2)\,A_{-q}^*(\xi_2',\ 0,\ s),\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$A_q^0(x_1,\ 0,\ z) = \sum_{n,\ m=0}^{\infty} f_n f_m^* (-1)^{m+1} \sin\lambda_{0n}(x_1 - a) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{b_n + b_m^*}{a^2} z\right) \delta_{q,\ (n-m)(n+m+1)}$$

— известная медленная функция z при q-й частоте продольных осцилляций в произведении средних полей:

$$\langle U(x_1,\ z)\rangle \langle U^*(0,\ z)\rangle = \sum_q A_q^0(x_1,\ 0,\ z)\, e^{-iSqz},$$

$$f_n = \int_0^a d\,\xi\, f(\xi) \sin\lambda_{0n}(\xi - a)$$

— коэффициент возбуждения n-го волноводного мода начальным распределением $f(\xi)$. Функции B_q и R, образующие ядра интегральных операторов в (5), имеют вид

$$B_q(\xi_1,\ \xi_2/x_1,\ x_2,\ z) = \frac{4}{a^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin\lambda_{0n}(x_1 - a) \sin\lambda_{0n}(\xi_1 - a) \sin\lambda_{0m}(x_2 - a) \times$$

$$\times \sin\lambda_{0m}(\xi_2 - a) \exp\left(-\frac{b_n + b_m^*}{a^2} z\right) \delta_{q,\ (m-n)(m+n+1)},$$

$$R(x,\ y) = \int_0^{\infty} d\,\tau\, b(\tau)\, g_0(x/0,\ \tau)\, g_0^*(0/y,\ \tau),$$

где

$$g_0(\xi/x,\ z) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\lambda_{0n}(\xi - a) \sin\lambda_{0n}(x - a) \exp\left(-\frac{i}{2k} \lambda_{0n}^2 z\right)$$

— функция Грина регулярного волновода.

При многомодовом возбуждении решения уравнения (5), соответствующие всем возможным значениям q, позволяют исследовать интерференционную структуру функции взаимной когерентности.

3. Фиксированная частота продольных осцилляций в представлении (3) может быть получена за счет интерференции модов с различными номерами n и m. Поэтому решение $A_q(x_1,\ 0,\ z)$ будем искать в виде

$$A_q(x_1,\ 0,\ z) = \sum_{n,\ m=0}^{\infty} a_{nm}(z)(-1)^{m+1} \sin\lambda_{0n}(x_1 - a)\, \delta_{q,\ (n-m)(n+m+1)}, \tag{6}$$

где $a_{nm}(z)$ — коэффициенты разложения функции $A_q(x_1,\ 0,\ z)$ по поперечным собственным функциям волновода, образующим подсистему в полной системе собственных функций. Номера n и m функций подсистемы удовлетворяют условию (4). Подставляя (6) в (5) и выполняя поперечные интегрирования с учетом ортогональности собственных функций, можно получить систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $a_{nm}(z)$:

$$\frac{d}{dz} a_{nm} = -\frac{b_n + b_m^*}{a^2} a_{nm} + \frac{(-1)^{n+m}}{a^2} \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+\mu} \times$$

$$\times (\Delta_{n\mu} + \Delta_{\nu m})\, a_{\mu\nu}\, \delta_{q,\ (\mu-\nu)(\mu+\nu+1)}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_{n\mu} = \int_0^\infty d\tau\, b(\tau) \exp\left[-\frac{i}{2k}\left(\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0\mu}^2\right)\tau\right].$$

При выводе системы (7) учтено свойство коэффициентов a_{nm}:

$$a_{nm}(z) = a_{mn}^*(z).$$

Начальные условия системы (7) имеют вид

$$a_{nm}(0) = f_n f_m^*. \tag{8}$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет смысл уравнения переноса в пространстве коэффициентов a_{nm}, индексы которых удовлетворяют условию (4). При $q = 0$, что соответствует $n = m$, из (7) получаем уравнение переноса для интенсивностей модов $D_n = a_{nn}$, которое рассматривалось в [1, 2]:

$$\frac{d}{dz} D_n = -\frac{2\,\mathrm{Re}\, b_n}{a^2} D_n + \sum_{\mu=0}^{\infty} \Gamma_{n\mu} D_\mu, \tag{9}$$

где

$$\Gamma_{n\mu} = \Delta_{n\mu} + \Delta_{\mu n} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, b(\tau) \exp\left[-\frac{i}{2k}(\lambda_{0n}^2 - \lambda_{0\mu}^2)\tau\right].$$

В этом случае в (6) остаются только элементы с $m = n$, а число уравнений в (7) бесконечно. При других возможных значениях $q \neq 0$ число уравнений в системе (7) ограничено. Так, если в начале волновода возбуждается 10 модов $(0 \leqslant n, m \leqslant 10)$, то частоте $q = (n-m)(n+m+1) = 6$, соответствуют две комбинации: $n = 2$, $m = 0$; $n = 3$, $m = 2$. Частота $q = 8$ дается одной парой индексов: $n = 4$, $m = 3$. Для $q = 18$ имеем три возможные комбинации: $n=4$, $m=1$; $n=5$, $m=3$; $n=9$, $m=8$. Таким образом, для интерференционных частот $q \neq 0$ возможно своеобразное «вырождение», и в общем случае можно показать, что кратность «вырождения» ограничена. Для анализа системы (7) введем обозначение

$$a_{n_i m_i}(z) = C_i(z), \tag{10}$$

где индекс i фиксирует одно из возможных значений n_i, m_i индексов n, m, удовлетворяющих условию (4) так, что $i = 1, 2, 3, \ldots, l$, где l—кратность «вырождения». Систему (7) можно переписать теперь в следующем виде:

$$\frac{d}{dz} C_i(z) = -p_i C_i(z) + \sum_{j=1}^{l} Q_{ij} C_j(z), \tag{11}$$

где

$$p_i = \frac{b_{n_i} + b_{m_i}^*}{a^2},$$

$$Q_{ij} = \frac{1}{a^2}(-1)^{n_i + m_i + \mu_j + \nu_j}(\Delta_{n_i \mu_j} + \Delta_{\nu_j m_i}), \tag{12}$$

а индексы μ_j, ν_j удовлетворяют условию

$$q = (\mu_j - \nu_j)(\mu_j + \nu_j + 1). \tag{13}$$

Линейно-независимые решения системы (11), как известно, имеют вид

$$C_i(z) = \beta_i e^{\lambda z}, \tag{14}$$

где λ — одно из решений уравнения

$$\det\left[Q_{jk} - \delta_{jk}(p_k - \lambda)\right] = 0 . \tag{15}$$

4. Уравнение (15) представляет собой характеристическое уравнение относительно собственных чисел λ линейного оператора, определяемого матрицей

$$e_{ij} = \begin{cases} Q_{ij} & (j \neq i), \\ O_{ii} - p_i & (j = i) . \end{cases} \tag{16}$$

Используя соотношения (4), (12) и (13), можно показать, что недиагональные элементы Q_{ij} матрицы (16) вещественны. По аналогии с уравнением переноса (9) энергии в пространстве модов элементы Q_{ij} можно рассматривать как вероятности переходов из «состояния» $a_{n_i m_i}$ в «состояние» $a_{n_j m_j}$ в пространстве коэффициентов, соответствующих данной интерференционной частоте q. Диагональные элементы матрицы (16) благодаря слагаемому p_i не являются вещественными. Это слагаемое описывает изменение $a_{n_i m_i}$ с дистанцией за счет рассеяния во все возможные моды.

Покажем, что в результате рассеяния $a_{n_i m_i}$ в коэффициенты, не связанные с частотой q, все линейно-независимые решения (14) экспоненциально затухают вдоль волновода, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda < 0. \tag{17}$$

Согласно теореме о границах собственных чисел линейного оператора, имеем [3]

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant \max_{1<i\leqslant l}\{\operatorname{Re} e_{ii} + E_i\}, \tag{18}$$

где

$$E_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l} |e_{ij}| .$$

Учитывая вещественность Q_{ij}, из (12) получаем

$$|e_{ij}| = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty d\tau\, b(\tau)\left(\cos\frac{\lambda_{0n_i}^2 - \lambda_{0\mu_j}^2}{2k}\tau + \cos\frac{\lambda_{0\nu_j}^2 - \lambda_{0m_i}^2}{2k}\tau\right); \tag{19}$$

$$Q_{ii} = |Q_{ii}|. \tag{20}$$

Принимая во внимание (20) и (16), неравенство (18) перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant \max_{1<i\leqslant l}\left\{\sum_{j=1}^{l}|Q_{ij}| - \operatorname{Re} p_i\right\}, \tag{21}$$

где

$$\operatorname{Re} p_i = \frac{1}{a^2}\sum_{\omega=0}^{\infty}{}'\int_0^\infty d\tau\, b(\tau)\left(\cos\frac{\lambda_{0\omega}^2 - \lambda_{0n_i}^2}{2k}\tau + \cos\frac{\lambda_{0\omega}^2 - \lambda_{0m_i}^2}{2k}\tau\right). \tag{22}$$

Легко показать, что

$$\sum_{j=1}^{l}|e_{ij}| - \operatorname{Re} p_i < 0 .$$

Действительно, так как все члены бесконечной суммы (22) положительно определены и ряд (22) содержит в себе подпоследовательность, дающую $\sum_{j=1}^{l} |e_{ij}|$, получаем

$$\sum_{j=1}^{l} |e_{ij}| - \mathrm{Re}\, p_l = -\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\substack{\omega=0\\ \omega\neq\mu_j}}^{\infty}\int_0^{\infty} d\tau\, b(\tau)\cos\frac{\lambda_{0\omega}^2-\lambda_{0n_l}^2}{2k}\tau -$$

$$-\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\substack{\omega=0\\ \omega\neq\nu_j}}^{\infty}\int_0^{\infty} d\tau\, b(\tau)\cos\frac{\lambda_{0\omega}^2-\lambda_{0m_l}^2}{2k}\tau < 0,$$

и неравенство (17) доказано.

5. В качестве иллюстрации рассмотрим решение уравнения (3) при $q = 2$. Для этой частоты «вырождение» отсутствует, так как она может образоваться за счет интерференции только одной пары модов с индексами $n = 1$, $m = 0$. При $q = 2$ вместо системы (11) имеем одно уравнение относительно $C_1 = a_{10}$:

$$\frac{d}{dz} C_1(z) = -p_1 C_1(z) + Q_{11} C_1(z),$$

с начальным условием

$$C_1(0) = f_1 f_0^*.$$

Решая его, получим

$$C_1(z) = a_{10}(z) = f_1 f_0^* \exp\left[-\frac{b_1 + b_0^*}{a^2} z + \frac{\tilde{b}(0)}{a^2} z\right], \tag{23}$$

где

$$\tilde{b}(\varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, b(\tau)\, e^{-i\varkappa\tau}.$$

Как видно из (23), интервал затухания компоненты $a_{10}(z)$ функции взаимной когерентности отличен от интервала затухания соответствующей компоненты в произведении средних полей, равной

$$f_1 f_0^* \exp\left(-\frac{b_1 + b_0^*}{a^2} z\right).$$

Соотношение между этими интервалами определяется геометрией задачи. При $\Lambda/ka^2 \gg 1$ получаем

$$b_1 + b_0^* \approx \tilde{b}(0)\left(1 + O\left(\frac{ka^2}{\Lambda}\right)\right],$$

и интервал затухания компоненты $a_{10}(z)$ функции взаимной когерентности много больше интервала затухания соответствующей компоненты в произведении средних полей. Этот результат согласуется с асимптотическим решением для $F(x_1, x_2, z)$, полученным в [4]. При $\Lambda/ka^2 \ll 1$ имеем

$$\tilde{b}(0) \ll b_1 + b_0^*,$$

и рассматриваемые интервалы затухания мало отличаются. Решения, аналогичные (23), имеют место для всех коэффициентов $a_{nm}(z)$, соответствующих «невырожденным» интерференционным частотам q.

В случае двухмодового возбуждения ($n = 0,1$) для средней интенсивности $I(x, z) = F(x, x, z)$ в соответствии с (3), (6), (9) и (23) получаем

$$I(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z) \sin^2 \lambda_{0n}(x - a) + 2\mathrm{Re}\,\{a_{10}(z)\, e^{-iS2z}\} \times \times \sin \lambda_{01}(x - a) \sin \lambda_{00}(x - a). \tag{24}$$

На рис. 1 представлен график нормированной к полной энергии средней интенсивности на оси волновода ($x = a/2$) в зависимости от безразмерной продольной координаты $\bar{z} = z/a$ при двухмодовом возбуждении. Как отмечено в [2], на оси волновода бесконечную сумму в (24), соответствующую компонентам второго момента с нулевой частотой пространственных биений, можно вычислить, не решая уравнения переноса (9). Коэффициенты возбуждения f_0 и f_1 при расчете предполагаются вещественными и равными между собой. Корреляционная функция флуктуаций импеданса выбрана в виде

$$b(\tau) = \langle \alpha^2 \rangle \exp\left(-\frac{|\tau|}{\Lambda}\right).$$

Расчет проведен при следующих значениях параметров:

$$ka = 10, \qquad \frac{\Lambda}{ka^2} = 10^{-2}, \qquad \langle \alpha^2 \rangle k\Lambda = 10^{-1}.$$

На этом же рисунке пунктиром изображена зависимость интенсивности от $\bar{z}$ вдоль оси $x = a/2$ регулярного волновода (при $\alpha = 0$).

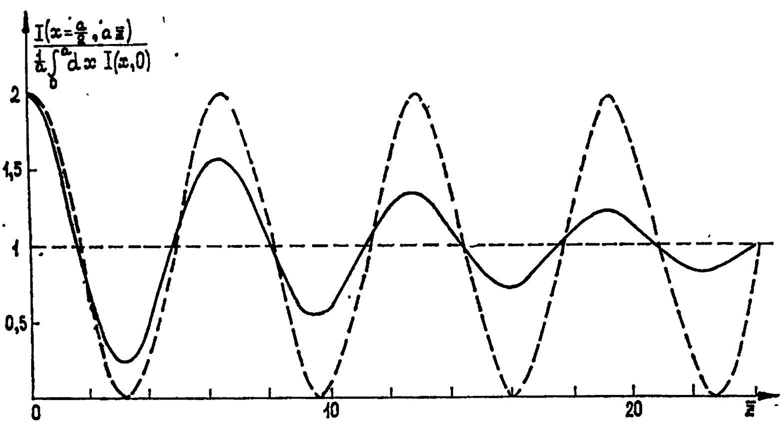

Рис. 1.

Как видно из рис. 1, на начальном отрезке дистанции имеют место сильные пространственные осцилляции средней интенсивности. Период этих осцилляций мало отличается от периода осцилляций регулярного волновода. С ростом дистанции амплитуда пространственных осцилляций уменьшается по экспоненциальному закону и средняя интенсивность стремится к своему значению, определяемому из уравнения переноса для компонент с нулевой пространственной частотой биений. Чтобы получить аналогичную зависимость средней интенсивности от дистанции в смещенных относительно оси волновода точках ($x \neq a/2$), необходимо численными методами решить уравнение переноса (9).

В заключение заметим, что неравенство (21) дает оценку области применимости уравнения переноса (9) для средних интенсивностей модов. Если в начале волновода возбуждается конечное число модов, то имеется конечное число интерференционных частот q. На достаточно больших дистанциях компоненты $a_{nm}(z)$ функции когерентности, соответствующие всем возбужденным интерференционным частотам q, кроме $q = 0$, экспоненциально малы. Оценка сверху дистанции z_n, начиная с которой справедливо уравнение переноса (9), при многомодовом возбуждении волновода определяется из соотношения

$$z_n \max_{q \neq 0} \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} \left[\sum_{j=1}^{l} |Q_{ij}| - \mathrm{Re}\, p_i \right] \right\} \sim 1 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М, 1972
2. А. А Пузенко, Изв высш. уч. зав — Радиофизика (в печати)
3. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М, 1968.
4. А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский, Изв высш. уч. зав — Радиофизика (в печати)

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию 24 июня 1976 г.

INTERFERENCE STRUCTURE OF MUTUAL COHERENCE FUNCTION OF THE FIELD IN A WAVEGUIDE WITH FLUCTUATING IMPEDANCE ON ONE OF THE WALLS

A. A. Puzenko

Spatial oscillations of the second statistical moments of the field in a waveguide with a randomly-irregular wall have been considered for the first time. Calculation is made under the approximation of the local perturbation method permitting to take into account strong field fluctuations due to multiple scattering.

It is shown that in addition to the interference frequencies excited by the source in primary of the waveguide, new spatial frequencies of longitudinal oscillations of the second moments of the field do not occur in the process of scattering. For the components of the coherence function, corresponding to the fixed spatial frequency of longitudinal interference oscillations, a closed system of differential equations of the transfer equation type is obtained. The components of mutual coherence, corresponding to all interference frequencies but zero are shown to decrease exponentially so that at large enough distances the components only with the zero spatial frequency of oscillations are remained in the coherence function. The applicability condition of the transfer equation has been formulated for the mean intensities of wave modes. For illustration, the numerical calculation of the mean intensity on the waveguide axis has been made as a function of distance in one particular case.