

УДК 535 : 572 → 535.338 334

## ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СРЕДЫ НА КОРРЕЛЯЦИОННУЮ ФУНКЦИЮ ПОЛЯ И СПЕКТР ВОЛНЫ

*Н. Г. Кузнецова, Л. А. Чернов*

На основе параболического уравнения рассмотрен вопрос об изменении спектрального состава волн, распространяющихся в среде, случайные неоднородности которой изменяются во времени. Детально исследован тот случай, когда изменение неоднородностей во времени обусловлено их движением (дрейф среды и хаотическое движение неоднородностей). Найдена доплеровская ширина и спектральная интенсивность  $m$ -кратно рассеянных волн. Рассмотрено распространение волн сложного спектрального состава.

Теория многократного рассеяния волн в последние годы успешно развивалась на основе параболического уравнения, приближенно описывающего волновое поле. В реальных условиях неоднородности среды случайным образом изменяются как в пространстве, так и во времени. Рассеянные на таких неоднородностях монохроматические волны становятся немонахроматическими. Происходит уширение спектральных линий. В общем случае распространение волн сложного спектрального состава сопровождается непрерывным изменением спектра.

В частности, если изменение во времени случайных неоднородностей обусловлено их движением, то изменение спектра является следствием эффекта Доплера.

В настоящей работе указан способ, позволяющий учесть явную зависимость случайных неоднородностей от времени, если только эти изменения достаточно медленны. Выяснены условия, при которых задача о рассеянии на движущихся неоднородностях сводится к ранее рассмотренной задаче с разделяющимися переменными.

Если изменения в среде происходят достаточно медленно, то отклонение волны от монохроматической будет невелико, и волну можно рассматривать как квазимонохроматическую. Для квазимонохроматической волны легко получить пространственно-временную корреляционную функцию поля.

Поле волны  $p$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1 + \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$  — малое отклонение диэлектрической проницаемости среды от ее среднего значения — однородная и стационарная случайная функция координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ .

Допустим, что неоднородности содержатся лишь в правом полупространстве ( $x > 0$ ). Из левого полупространства ( $x < 0$ ) падает плоская монохроматическая волна. Решение волнового уравнения для правого полупространства ищем в виде квазиплоской квазимонохроматической волны:

$$p = A(\mathbf{r}, t) \exp \{ -i(\omega t - kx) \}, \quad (2)$$

где  $A(\mathbf{r}, t)$  — медленная функция координат и времени. Заменяя  $p$  в уравнении (1) на основании (2) и отбрасывая члены, содержащие вторые производные по продольной координате и по времени, получим следующее уравнение:

$$2ik \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \Delta_{\perp} A + \varepsilon k^2 A = 0. \quad (3)$$

Это уравнение описывает поле волны в среде с крупномасштабными неоднородностями ( $ka \gg 1$ ), если рассеяние на длине волны мало [1]. Перейдем в уравнении (3) от переменной  $t$  к новой переменной

$$t' = t - \frac{x}{c}.$$

Тогда получим следующее параболическое уравнение:

$$2i \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{t'} + \Delta_{\perp} A + \varepsilon A = 0. \quad (4)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для среды с неоднородностями, не изменяющимися со временем. Его отличие от последнего заключается в том, что амплитуда  $A\left(\mathbf{r}, t' + \frac{x}{c}\right)$  в уравнении (4) зависит от  $t'$ , как от параметра.

Применение локального метода к уравнению (4) дает, так же как и в статическом случае [1], возможность получить для пространственно-временной корреляционной функции поля следующую формулу:

$$R(\mathbf{x}, \eta, \zeta, \tau) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_s(\mathbf{x}, \eta, \zeta, \tau) \right\}, \quad (5)$$

где  $D_s$  — пространственно-временная структурная функция фазы в геометрическом приближении, определяемая формулой

$$D_s(\mathbf{x}, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\bar{a}} k^2 x \int_{-\infty}^{\infty} [N(\xi, 0, 0, 0) - N(\xi, \eta, \zeta, \tau)] d\xi, \quad (6)$$

$N(\zeta, \eta, \zeta, \tau)$  — пространственно-временной коэффициент корреляции флуктуации диэлектрической проницаемости. Формула (5) является обобщением известной формулы на тот случай, когда флуктуации диэлектрической проницаемости изменяются во времени, если только эти изменения удовлетворяют условию квазистатичности, т. е. время  $a/c$  распространения волны на расстояние  $a$ , равное масштабу неоднородностей, мало по сравнению с характерным временем изменения неоднородностей ( $a/c \ll T$ )\*. Полагая в формуле (5)  $\eta = \zeta = 0$ , найдем временную корреляционную функцию поля:

$$R(\mathbf{x}, 0, 0, \tau) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_s(\mathbf{x}, 0, 0, \tau) \right\}. \quad (7)$$

Рассмотрим наиболее простой частный случай, когда коэффициент корреляции флуктуаций показателя преломления распадается на два множителя:

$$N(\xi, \eta, \zeta, \tau) = q(\xi, \eta, \zeta) p(\tau), \quad (8)$$

\* Для квазистатического случая формула, эквивалентная (5), приведена в работе [6], но без обоснования.

из которых один зависит только от координат, а другой — только от времени. Тогда формула (7) приобретает вид

$$R(x, \tau) = \exp \{-\alpha x [1 - p(\tau)]\}, \quad (9)$$

где коэффициент рассеяния

$$\alpha = \frac{k^2}{4} \bar{\epsilon}^2 \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, 0, 0, 0) d\xi.$$

Перейдем к спектральной интенсивности огибающей  $g(\Omega)$  с помощью преобразования Фурье:

$$g(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp \{-\alpha x [1 - p(\tau)]\} e^{-i\Omega\tau}. \quad (10)$$

Если воспользоваться разложением экспоненты в ряд, то формула (10) приобретает вид

$$g(\Omega) = e^{-\alpha x} \delta(\Omega) + \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} p^m(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau. \quad (11)$$

Если предположить, что временной коэффициент корреляции имеет гауссов вид  $p(\tau) = \exp(-\tau^2/2T^2)$ , то последняя формула переписется следующим образом:

$$g(\Omega) = e^{-\alpha x} \delta(\Omega) + \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{m \sqrt{m}} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2 T^2}{2m} \right\}. \quad (12)$$

Для частного случая (8) разделяющихся переменных формулы (9) и (12) были получены в работе [2] путем разбиения среды на тонкие слои с применением метода фазового экрана к каждому из слоев.

В реальных условиях изменение неоднородностей во времени обусловлено в основном их движением. Иными словами, в системе координат, связанной с движением среды, неоднородности изменяются очень медленно. Этим изменением в первом приближении можно пренебречь. Таким образом, мы приходим к гипотезе «замороженных» неоднородностей. Предположим, что все неоднородности движутся с одной и той же скоростью  $v$  (дрейф среды). Характерный период изменения неоднородностей в неподвижной системе  $T = a/v$ . Поэтому условие квазистатичности приобретает вид  $a/c \ll a/v$ , или  $v \ll c$ . Во всех реальных случаях условие квазистатичности выполняется с большим запасом, так как скорость движения неоднородностей мала по сравнению со скоростью волны.

В системе координат, связанной со средой, коэффициент корреляции флуктуации диэлектрической проницаемости зависит только от пространственных координат, т. е. имеет вид  $M(x, y, z)$ . Перехода с помощью преобразования Галилея к неподвижной системе координат, для пространственно-временного коэффициента корреляции найдем  $N(\xi - v_x \tau, \eta - v_y \tau, \zeta - v_z \tau)$ . В этом выражении пространственные и временные координаты не разделяются. Тогда не происходит разделения переменных и в пространственно-временной корреляционной функции поля, которая приобретает вид  $R(x, \eta - v_y \tau, \zeta - v_z \tau)$ , как это следует из формул (5) и (6). Заметим лишь попутно, что измерением такой функции на параллельных трассах можно определить поперечную составляющую

щую  $v = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$  скорости переноса неоднородностей, используя способ, предложенный в работе [3].

Таким образом, задачу о рассеянии на движущихся неоднородностях нельзя свести к задаче с разделяющимися переменными. Однако задача нахождения временного спектра волны может быть сведена к этому частному случаю, если пространственный коэффициент корреляции в движущейся системе распадается на два множителя, из которых один зависит только от продольной координаты, а другой — от поперечных координат, т. е.

$$N(x, y, z) = N_1(x)N_2(y, z). \quad (13)$$

В этом случае из формулы (7) для временной корреляционной функции поля легко получить следующую формулу:

$$R(x, \tau) = \exp \{-\alpha x [1 - N_2(-v_y \tau, -v_z \tau)]\}, \quad (14)$$

совпадающую с формулой (9), если положить

$$N_2(-v_y \tau, -v_z \tau) \equiv p(\tau). \quad (15)$$

Условие (13) выполняется, например, для гауссова коэффициента корреляции  $N(x, y, z) = \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} \right\}$ . В этом случае  $p(\tau) = \exp \left\{ -\frac{v^2 \tau^2}{a^2} \right\}$  и формула (14) приобретает вид

$$R(x, \tau) = \exp \left\{ -\alpha x \left[ 1 - \exp \left( -\frac{v^2 \tau^2}{a^2} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

Для спектральной интенсивности имеем

$$g_a(\Omega) = e^{-\alpha x} \delta(\Omega) + \frac{a}{2\sqrt{\pi}v} e^{-\alpha x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{m! \sqrt{m}} \exp \left( -\frac{a^2 \Omega^2}{4m v^2} \right). \quad (17)$$

Первый член в формуле (17) дает ослабленную из-за рассеяния спектральную интенсивность монохроматической волны. Все последующие члены описывают рассеянные волны. Первый член в сумме ( $m=1$ ) определяет эффективную ширину  $\gamma_1 = 2v/a$  спектральной линии однократно рассеянной волны. Действительно, при однократном рассеянии угол рассеяния  $\vartheta \sim 1/ka \ll 1$ . Допплеровское изменение частоты определяется формулой  $\omega' = \omega (1 - v_r/c)$ , где  $v_r$  — радиальная составляющая скорости. Из простых геометрических соображений легко найти, что  $v_r = v \sin \vartheta \approx v\vartheta$ . Отсюда следует, что доплеровский сдвиг частоты  $\Omega = \omega - \omega' = \omega \frac{v}{cka} = \frac{v}{a}$ .

Следующий член суммы ( $m=2$ ) определяет эффективную ширину  $\gamma_2 = \frac{2\sqrt{2}v}{a}$  спектральной линии двукратно рассеянной волны. Для  $m$ -кратно рассеянной волны доплеровское уширение  $\gamma_m = \frac{2\sqrt{m}v}{a}$ .

Таким образом, с ростом кратности рассеяния доплеровская ширина будет увеличиваться.

Теперь оценим соотношения спектральных интенсивностей рассеянных волн разной кратности. С этой целью составим отношение максимальных значений спектральных интенсивностей рассеянных волн  $m+1$ -й и  $m$ -й кратности. Тогда получим

$$M = \frac{\alpha x m! \sqrt{m}}{(m+1)! \sqrt{m+1}} = \frac{\alpha x \sqrt{m}}{(m+1)^{3/2}}$$

Исследуя это выражение, найдем, что при  $\alpha x = 1$  отношение  $M < 1$ , начиная со второго члена. Если  $\alpha x = 3$ , то убывание максимального значения спектральной интенсивности начинается с третьего члена суммы ( $m = 3$ ). Если ряд (17) оборвать на последнем члене, который на порядок меньше максимального, то при  $\alpha x = 1$  нужно учесть в сумме первые три члена, при  $\alpha x = 3$  — пять членов.

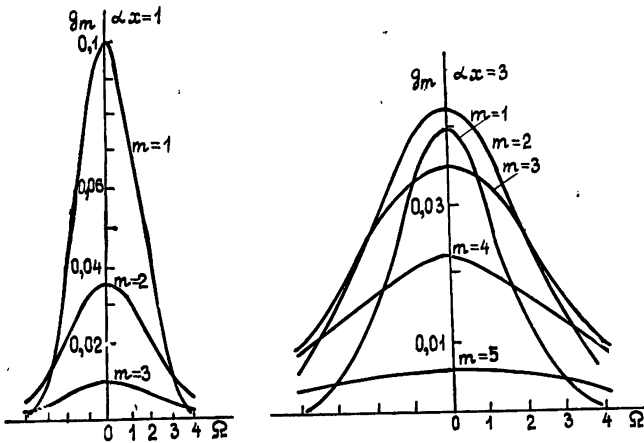


Рис. 1.

На рис. 1 изображены спектры  $m = 1, 2, 3$  при  $\alpha x = 1$  и кратности  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  при  $\alpha x = 3$ . На рис. 2 приведены суммарные спектральные интенсивности рассеянных волн для  $\alpha x = 1$  и  $\alpha x = 3$ .

рассеянных волн кратности

С ростом  $\alpha x$  возрастает общая интенсивность рассеянных волн и соответственно убывает интенсивность спектральной линии излучаемой монохроматической волны. Кроме того, видно, что с возрастанием  $\alpha x$  все большую роль играет многократное рассеяние.

В предельном случае достаточно больших значений  $\alpha x$  для спектральной интенсивности можно получить замкнутое асимптотическое выражение. Если ввести новую переменную интегрирования  $y = v\tau/a$ , то формула (17) переписется следующим образом:

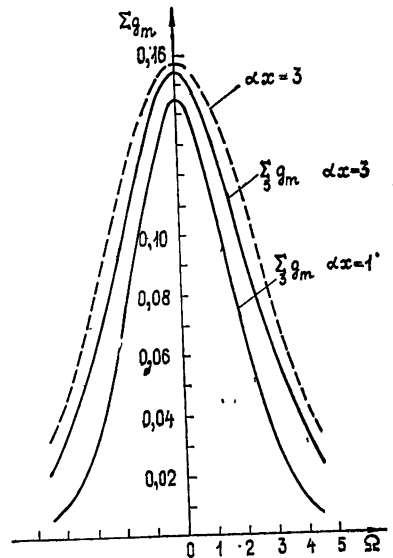


Рис. 2.

$$g_d(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha x[1 - e^{-y^2}]\} \exp\left(-i\Omega \frac{a}{v} y\right) dy.$$

Отсюда видно, что при больших  $\alpha x$  область существенных значений  $y \sim 1/\sqrt{\alpha x}$ . Разлагая  $\exp(-y^2)$  в ряд, в этой области можем ограничиться старшими членами. Тогда получим табличный интеграл:

$$g_d(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha xy^2 - i\frac{a\Omega}{v}y\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha x}} \frac{a}{v} \exp\left(-\frac{a^2\Omega^2}{4v^2\alpha x}\right). \quad (18)$$

На рис. 2 приведен график  $g_d(\Omega)$ , построенный по этой асимптотической формуле при  $\alpha x = 3$  (пунктир). Видно, что уже при  $\alpha x = 3$  асимптотическая формула хорошо описывает суммарную спектральную интенсивность.

До настоящего момента мы рассматривали вопрос о распространении монохроматической волны. Теперь же предположим, что излучается стационарный сигнал сложного спектрального состава, характеризуемый спектральной плотностью  $g_0(\omega)$ . Для спектральной интенсивности  $g(\omega)$  волны, прошедшей через неоднородную среду, справедливо следующее выражение:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \Omega) g_d(\Omega) d\Omega, \quad (19)$$

где  $g_0(\omega - \Omega)$  — спектральная интенсивность излучаемого сигнала,  $g_d(\Omega)$  — доплеровская спектральная интенсивность прошедшей через среду монохроматической волны. Пусть исходный сигнал описывается гауссовым спектром

$$g_0(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right] \right\}, \quad (20)$$

где  $\beta$  — эффективная ширина спектра излучаемого сигнала. Пользуясь соотношением (19), получим

$$g(\omega) = e^{-\alpha x} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right] \right\} +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha x}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{\gamma_m^2 + \beta^2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_m^2 + \beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\gamma_m^2 + \beta^2}\right] \right\}. \quad (21)$$

Первый член в этом выражении описывает спектральную интенсивность излучаемого сигнала, ослабленного из-за рассеяния;  $m$ -й член суммы — спектральную плотность  $m$ -кратно рассеянных волн.

Рассмотрим два предельных случая.

1) Спектральная ширина излучаемого сигнала мала по сравнению с доплеровской шириной  $m$ -кратно рассеянных волн, т. е.

$$\beta \ll \gamma_m.$$

Тогда  $m$ -й член в (21) запишется следующим образом:

$$g_m(\omega) = e^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^m}{m!} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\gamma_m} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma_m^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\gamma_m^2}\right] \right\}.$$

Таким образом, в случае узкополосного излучаемого сигнала с гауссовой спектральной плотностью  $m$ -кратно рассеянный сигнал тоже будет иметь гауссово спектральное распределение, но с доплеровской шириной  $\gamma_m$ .

2) Спектральная ширина излучаемого сигнала велика по сравнению с доплеровской шириной  $m$ -кратно рассеянных волн:

$$\beta \gg \gamma_m.$$

Для  $m$ -го члена в сумме, описывающего  $m$ -кратное рассеяние, получим

$$g_m(\omega) = e^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^m}{m!} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right] \right\}.$$

Спектр  $m$ -кратно рассеянных волн будет совпадать со спектром излучаемого сигнала, т. е. в случае широкополосного сигнала доплеровским уширением можно пренебречь.

Развитая в настоящей работе теория эффекта Доплера относится к однопараметрической модели среды. Однако легко видеть, что качественно все выводы остаются в силе и для турбулентной среды, характеризваемой двумя параметрами — внутренним и внешним масштабом неоднородностей.

Если коэффициент корреляции показателя преломления среды гауссов, то структурная функция фазы  $D_s(\rho)$  имеет вид

$$D_s(\rho) = 2\alpha x \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho^2}{a^2}\right) \right]. \quad (22)$$

В случае турбулентной среды структурную функцию фазы можно представить в виде

$$D_s(\rho) = 2,91 C_n^2 k^2 L_0^{5/3} x \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho}{L_0}\right)^{5/3} \right], \quad (23)$$

где  $L_0$  — внешний масштаб турбулентности,  $C_n$  — структурная постоянная показателя преломления среды. Действительно, внутри инерционного интервала турбулентности формула (23) приобретает необходимый вид [4]:

$$D_s(\rho) = 2,91 C_n^2 k^2 \rho^{5/3} x.$$

При больших  $\rho$  ( $\rho \gg L_0$ ) структурная функция, определяемая формулой (23), стремится к постоянному пределу (насыщается).

Выражение (23) реализует один из множества возможных способов учета внешнего масштаба турбулентности. Отличие формулы (22) от формулы (23) в том, что первая из них содержит отношение  $\rho/a$  во второй степени, а вторая — отношение  $\rho/L_0$  в степени  $5/3$ . Это небольшое различие в структурных функциях фазы не может сколько-нибудь существенно изменить выводы при переходе от однопараметрической к двухпараметрической модели среды.

Несмотря на небольшое различие формул (22) и (23) провести аналитическое исследование доплеровских спектров с помощью последней формулы не удастся. Однако при желании в этом случае можно применить численный метод для нахождения спектральной интенсивности.

Предположим теперь, что случайные неоднородности среды совершают хаотическое движение. Скорость переноса изменяется вдоль трассы случайным образом. Разобьем всю дистанцию  $x$  на  $N$  отрезков  $\Delta x$ , размеры которых велики по сравнению с радиусом корреляции скоростей. Будем считать скорость  $v_n$  на участке  $\Delta x_n$  постоянной вдоль всего

участка. Тогда, согласно формуле (16), временная корреляционная функция на выходе участка будет отличаться от временной корреляционной функции на входе множителем  $\exp\left\{-\alpha\Delta x_n\left[1 - \exp\left(-\frac{v_n^2\tau^2}{a^2}\right)\right]\right\}$ . Полное изменение корреляционной функции будет определяться произведением таких множителей. Следовательно, временная корреляционная функция поля, создаваемого падающей плоской волной, на дистанции  $x$  будет иметь следующий вид:

$$R(x, \tau) = \prod_{n=1}^N \exp\left\{-\alpha\Delta x_n\left[1 - \exp\left(-\frac{v_n^2\tau^2}{a^2}\right)\right]\right\}.$$

Скорости на различных участках — статистически независимы. Поэтому усреднение по скоростям можно произвести в каждом сомножителе произведения независимо от остальных.

Предположим, что закон распределения скоростей движения неоднородностей на каждом участке  $\Delta x_n$  является нормальным:

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}v_0^3} \exp\left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2v_0^2}\right].$$

Тогда усреднение сводится к вычислению следующего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\alpha\Delta x\left[1 - \exp\left(-\frac{(v_y^2 + v_z^2)\tau^2}{a^2}\right)\right]\right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2v_0^2}\right] dv_x dv_y dv_z.$$

Пользуясь табличным интегралом [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\beta e^{-y} - \mu y\} dy = \frac{1}{\mu} \Phi(\mu, 1 + \mu, -\beta),$$

для усредненной по скоростям временной корреляционной функции  $\bar{R}$  найдем

$$\bar{R} = \exp(-\alpha\Delta x N) \Phi^N\left(\frac{a^2}{2v_0^2\tau^2}, 1 + \frac{a^2}{2v_0^2\tau^2}, \alpha\Delta x\right),$$

где  $\Phi(\mu, 1 + \mu, \alpha\Delta x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

Предположим, что число отрезков неограниченно возрастает ( $N \rightarrow \infty$ ), а их размеры уменьшаются ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) так, что произведение  $N\Delta x = x$  остается постоянным. Пользуясь формулой

$$\Phi^N = [1 + (\Phi - 1)]^N = \left\{ [1 + (\Phi - 1)]^{\frac{1}{\Phi - 1}} \right\}^{(\Phi - 1)N} = e^{(\Phi - 1)N}$$

и разлагая  $\Phi(\mu, 1 + \mu, \alpha\Delta x)$  в ряд [4]

$$\Phi(\mu, 1 + \mu, \alpha\Delta x) = 1 + \frac{\mu}{\mu + 1} \frac{\alpha\Delta x}{1!} + \dots + \frac{\mu}{\mu + m} \frac{(\alpha\Delta x)^m}{m!},$$



после предельного перехода окончательно получим

$$\bar{R} = \exp \left[ -\alpha x \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{2v_0^2 \tau^2}{a^2}} \right) \right]. \quad (24)$$

Из последней формулы видно, что задача о рассеянии на хаотически движущихся неоднородностях сводится к задаче с разделяющимися

переменными, если положить  $p(\tau) \equiv \frac{1}{1 + \frac{2v_0^2 \tau^2}{a^2}}$ . Если вести новую пере-

менную  $y = \frac{\sqrt{2} v_0 \tau}{a}$ , то формула (11) для спектральной интенсивности запишется следующим образом:

$$g_d(\Omega) = e^{-\alpha x} \delta(\Omega) + \frac{e^{-\alpha x}}{2\pi} \frac{a}{\sqrt{2} v_0} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left( -i \frac{a \Omega}{\sqrt{2} v_0} y \right) (\alpha x)^m}{m! (1 + y^2)^m} dy.$$

Каждый интеграл в этой сумме можно свести к табличному интегралу [5]. Тогда для спектральной интенсивности найдем следующее окончательное выражение:

$$g_d(\Omega) = e^{-\alpha x} \delta(\Omega) + e^{-\alpha x} \frac{e^{-|\Omega|/\gamma}}{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m-1} \frac{(\alpha x)^m}{m! (m-1)!} \times \\ \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!}{k! (m-k-1)!} \left( 2 \frac{|\Omega|}{\gamma} \right)^k, \quad (25)$$

где  $\gamma = \sqrt{2} v_0 / a$ . Сравним максимальные значения спектральных интенсивностей рассеянных волн различной кратности. Обозначая через  $M$  отношение  $m+1$ -го к  $m$ -му члену (при  $\Omega = 0$ ), найдем

$$M = \frac{2(2m-1)}{m(m+1)} \alpha x.$$

Если  $\alpha x = 1$ , то отношение  $M < 1$ , начиная с четвертого члена ( $m = 4$ ), если  $\alpha x = 3$ , то—начиная с двенадцатого члена. В первом случае в сумме (25) достаточно учесть восемь членов, а во втором—двадцать четыре члена.

Таким образом, в случае хаотического движения неоднородностей многократное рассеяние играет большую роль, чем при дрейфе.

Допплеровское уширение спектральных линий в случае хаотического движения имеет более сложный характер. Так, например, контуры спектральных линий, соответствующих однократному, двукратному и трехкратному рассеянию, описываются соответственно следующими функциями:

$$\begin{aligned}
 m = 1 & \quad \exp\left(-\frac{|\Omega|}{\gamma}\right), \\
 m = 2 & \quad \exp\left(-\frac{|\Omega|}{\gamma}\right)\left[1 + \frac{|\Omega|}{\gamma}\right], \\
 m = 3 & \quad \exp\left(-\frac{|\Omega|}{\gamma}\right)\left[1 + \frac{|\Omega|}{\gamma} + \frac{1}{3}\left(\frac{|\Omega|}{\gamma}\right)^2\right],
 \end{aligned}$$

графики которых изображены на рис. 3. Из графиков видно, что с ростом кратности рассеяния доплеровская ширина спектральной линии увеличивается.

В предельном случае достаточно больших значений  $\alpha x$  для спектральной интенсивности также можно получить замкнутое асимптотическое выражение. Оно совпадает с выражением, даваемым формулой (18), после замены в последней скорости  $v$  на  $\sqrt{2}v_0$ . Это значит, что графики для спектральной интенсивности при дрейфе и хаотическом движении будут асимптотически совпадать, если выполняется условие  $v = \sqrt{2}v_0$ .

Представление спектральной интенсивности в виде рядов (17) и (25) очень удобно с точки зрения физической интерпретации результатов: каждый член ряда соответствует определенной кратности рассеяния. Однако вряд ли можно поставить эксперимент так, чтобы регистрировать каждый член ряда в отдельности. Опыт будет давать суммарный эффект.

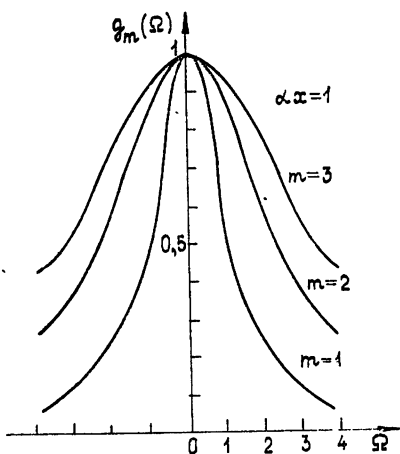


Рис. 3.

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Гельфгату за плодотворное обсуждение работы и полезные советы при ее выполнении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
2. I. Feinstein, Trans. IRE, AP-2, 63 (1954).
3. А. В. Мень, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 1, 70 (1962).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
6. Э. П. Гулин, Тезисы докладов третьей Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике, М., 1972.

Акустический институт

Поступила в редакцию  
1 июля 1976 г.,  
после доработки  
21 февраля 1977 г.

#### THE INFLUENCE OF TIME VARIABILITY OF RANDOM MEDIUM INHOMOGENEITIES ON THE FIELD CORRELATION FUNCTION AND THE WAVE SPECTRUM

*N. G. Kuznetsova, L. A. Chernov*

Based upon the parabolic equation, the problem is considered of the change in the spectral composition of waves propagating in the medium with time-varying random inhomogeneities. The time-varying due to the inhomogeneity motion (the medium drift and chaotic motion of inhomogeneities) is investigated in detail. The Doppler width and the spectral intensity of  $m$ -multiple scattered waves are found. The wave propagation of a complicated spectral composition has been considered.