ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1977*

УДК 538.56 : 519.25

ЗАМЕЧАНИЕ О СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

В. И. Кляцкин

Сформулирована общая методика, позволяющая получать замкнутое статистическое описание стохастических краевых задач, на основе использования теории инвариантного погружения.

Рассмотрим динамичекую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = F_i(t, \boldsymbol{x}(t)) \qquad (i=1, 2,\ldots, N), \tag{1}$$

определенную на отрезке времени $[0, T]$, с краевыми условиями

$$g_{ik}x_k(0) + h_{ik}x_k(T) = v_i \tag{2}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Функции $F_i(t, \boldsymbol{x})$ будем считать случайными функциями, а постоянные матрицы g, h и вектор $\boldsymbol{v}$ детерминированными величинами.

Для динамической задачи (1), (2) не выполняется условие причинности, сформированное в [1], т. е. решение $\boldsymbol{x}(t)$ этой задачи в момент времени t функционально зависит от случайных сил $\boldsymbol{F}(\tau, \boldsymbol{x})$ для всех $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Более того, даже краевые значения $\boldsymbol{x}(0)$ и $\boldsymbol{x}(T)$ также являются функционалами поля $\boldsymbol{F}(\tau, \boldsymbol{x})$. Поэтому методы анализа статистических характеристик решения уравнений (1), развитые в [1], к данной задаче не применимы.

Для нахождения статистических характеристик решения задачи (1), (2) можно воспользоваться теорией инвариантного погружения. Для этого заметим, что решение задачи (1), (2) параметрически зависит от T и $\boldsymbol{v}$, т. е. $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t; T, \boldsymbol{v})$. Следуя работе [2], введем функции

$$\boldsymbol{R}(T, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}(T; T, \boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{S}(T, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}(0; T, \boldsymbol{v}). \tag{3}$$

Тогда, как показано в [2], функции $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{x}(t; T, \boldsymbol{v})$, как функции от параметров T, $\boldsymbol{v}$, удовлетворяют задаче Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial R_i}{\partial T} + \frac{\partial R_i}{\partial v_k} h_{kl} F_l(T, \boldsymbol{R}) = F_i(T, \boldsymbol{R}), \\ R_i(0, \boldsymbol{v}) = (g+h)^{-1}_{ik} v_k ;\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial x_i(t; T, \boldsymbol{v})}{\partial T} + \frac{\partial x_i}{\partial v_k} h_{kl} F_l(T, \boldsymbol{R}) = 0, \\ x_i(t; t, \boldsymbol{v}) = R_i(t, \boldsymbol{v}).\end{gathered} \tag{5}$$

В частности, полагая в (5) $t=0$, для функции $S(T, \boldsymbol{v})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial S_l(T, v)}{\partial T} + \frac{\partial S_l}{\partial v_k} h_{kl} F_l(T, \boldsymbol{R}) = 0, \qquad S_l(0, \boldsymbol{v}) = (g+h)^{-1}_{lk} v_k. \tag{6}$$

Уравнение (4) является замкнутым нелинейным уравнением для $\boldsymbol{R}$, а уравнения (5), (6) — линейные уравнения. Следовательно, статистические характеристики решения задачи (1), (2) могут быть выражены через статистические характеристики решений задач (4)—(6).

Стохастические уравнения типа уравнений (4)—(6) изучались в работе [3]. Для нахождения статистических характеристик решений последних следует дополнить систему уравнений (4), (5) уравнениями для функций $\frac{\partial R_l}{\partial v_j}$:

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial R_l}{\partial v_j} + \frac{\partial^2 R_l}{\partial v_k \partial v_j} h_{kl} F_l(T, \boldsymbol{R}) + \frac{\partial R_l}{\partial v_k} h_{kl} \frac{\partial F_l}{\partial R_m}\frac{\partial R_m}{\partial v_j} = \frac{\partial F_l}{\partial R_m}\frac{\partial R_m}{\partial v_j}, \qquad \left.\frac{\partial R_l}{\partial v_j}\right|_{T=0} = (g+h)^{-1}_{lj}. \tag{7}$$

После этого можно написать замкнутое линейное стохастическое уравнение Лиувилля для функции

$$\varphi_{T,\boldsymbol{v}}(R_l, x_l, u_{lj}) = \prod_{l,\,j=1}^{N} \delta(R_l(T, \boldsymbol{v}) - R_l)\,\delta(x_l(t; T, \boldsymbol{v}) - x_l)\,\delta\left(\frac{\partial S_l}{\partial v_j} - u_{lj}\right), \tag{8}$$

которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial T}\varphi_{T,\boldsymbol{v}} + h_{kl}\left\{F_l(T, \boldsymbol{R})\frac{\partial}{\partial v_k} - u_{lk}\frac{\partial F_l}{\partial R_l} - \frac{\partial}{\partial u_{lj}} u_{lk} u_{mj}\frac{\partial F_l}{\partial R_m}\right\}\varphi = -\frac{\partial}{\partial R_l}\{F_l(T, \boldsymbol{R})\,\varphi\} - \frac{\partial}{\partial u_{lj}}\left\{\frac{\partial F_l}{\partial R_m} u_{mj}\varphi\right\}. \tag{9}$$

Уравнение (9) следует решать с начальным значением

$$\varphi_{t,\boldsymbol{v}}(R_l, x_l, u_{lj}) = \delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{x})\,\tilde{\varphi}_{t,\boldsymbol{v}}(R_l, u_{lj}), \tag{10}$$

где функция

$$\tilde{\varphi}_{T,\boldsymbol{v}}(R_l, u_{lj}) = \prod_{l,\,j=1}^{N} \delta(R_l(T, \boldsymbol{v}) - R_l)\,\delta\left(\frac{\partial R_l(T, \boldsymbol{v})}{\partial v_j} - u_{lj}\right). \tag{11}$$

Отметим, что уравнение (9) содержит переменные x_l только в параметрическом виде. Поэтому функция $\tilde{\varphi}_{T,\boldsymbol{v}}$ также удовлетворяет уравнению (9) с начальным условием при $T=0$, вытекающим из начальных условий (4), (7).

Для уравнения (9) уже можно использовать непосредственно результаты [1]. Так, если флуктуирующая часть поля $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$ является дельта-коррелированным по t полем, то можно выполнить усреднение в уравнении (9) и получить замкнутое уравнение для соответствующей плотности вероятностей $P_{T,v} = \langle \varphi_{T,v} \rangle$. Аналогичным образом можно получить замкнутые уравнения и в случаях, когда флуктуирующие части функций $F_i(t,\boldsymbol{x})$ имеют структуру $z(t)\tilde{F}_i(t,\boldsymbol{x})$, где $z(t)$ — телеграфный или обобщенный телеграфный процессы, а $\tilde{F}_i(t,\boldsymbol{x})$ — детерминированные функции [4].

Отметим, что если функции $F_i(t,\boldsymbol{x})$ в правой части (1) являются линейными функциями по $\boldsymbol{x}$, то и решение уравнений (4)—(6) можно искать на классе линейных функций по $\boldsymbol{v}$. При этом мы приходим к матричным уравнениям Рикатти с квадратичной нелинейностью.

Отметим также, что изложенная методика очевидным образом обобщается и на случай уравнений (1) с краевыми условиями

$$g_l(\boldsymbol{x}(0)) + h_l(\boldsymbol{x}(T)) + \int_0^T d\tau\, k_l(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) = v_l, \tag{2'}$$

где функции $g_i(\boldsymbol{x})$, $h_l(\boldsymbol{x})$ и $k_i(t,\boldsymbol{x})$ — произвольные детерминированные функции. Для этого следует воспользоваться уравнениями, обобщающими уравнения (4)—(6) на данные краевые условия. Эти уравнения приведены в [2].

Проиллюстрируем изложенную методику на простейших задачах (простейших по постановке, но не по возможностям решения ее непосредственно «в лоб»).

В качестве первого примера рассмотрим задачу о взаимодействии двух встречных мод в случайно-неоднородной среде. Задача описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega_1 x_1 + iz(t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= -i\omega_2 x_2 - iz(t)x_1 \end{aligned} \tag{12}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) - \beta x_2(0) = v_1, \qquad x_2(T) = v_2. \tag{13}$$

В разных частных случаях краевые условия (13) соответствуют либо взаимодействию мод с заданными значениями на границах среды ($\beta = 0$), либо взаимодействию мод с условием отражения при $t = 0$ ($v_1 = 0$).

Задачу (12), (13) можно переписать в форме задачи (1), (2) с

$$F(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} i\omega_1 x_1 + iz(t)x_2 \\ -i\omega_2 x_2 - iz(t)x_1 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этом случае очевидно, что $R_2(T,\boldsymbol{v}) \equiv v_2$ (в силу (13)), и, следовательно, из (4), (5) получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial T} R_1(T,\boldsymbol{v}) - i(\omega_2 v_2 + z(T)R_1)\frac{\partial R_1}{\partial v_2} = i\omega_1 R_1 + iz(T)v_2, \\ &\frac{\partial}{\partial T} x_l(t; T,\boldsymbol{v}) - i(\omega_2 v_2 + z(T)R_1)\frac{\partial x_l}{\partial v_2} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} R_1(0,\boldsymbol{v}) &= v_1 + \beta v_2, \\ x_l(t; t,\boldsymbol{v}) &= R_l(t,\boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{16}$$

В силу линейности исходной задачи, решение уравнений (15) можно искать в виде

$$
\begin{aligned}
R_1(T, v) &= A(T)\, v_2 + B(T)\, v_1, \\
x_l(t;\, T, v) &= C_l(t, T)\, v_2 + D_l(t, T)\, v_1 .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Тогда для функций A, B, C_i и D_i получаем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dA}{dT} = i(\omega_1 + \omega_2) A + iz(T)(1 + A^2), \qquad \frac{dB}{dT} = i\omega_1 B + iz(T) AB, \\
&\frac{dC_l}{dT} = i\,\omega_2 C_l + iz(T) AC_l, \qquad \frac{dD_l}{dT} = iz(T) BC_l
\end{aligned}
\tag{18}
$$

с начальными условиями

$$
\begin{aligned}
&A(0) = \beta, \quad B(0) = 1, \quad C_1(t, t) = A(t), \quad D_1(t, t) = B(t), \\
&C_2(t, t) = 1, \quad D_2(t, t) = 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Далее задача решается стандратным путем. Найдем, например, среднее значение величин $\langle x_l \rangle$. Для этого, исключая в (18) линейные члены, мы переходим к уравнениям, решение которых обусловлено только флуктуациями процесса $z(T)$ ($\langle z(T) \rangle = 0$). Предполагая гауссовость и дельта-коррелированность по T для процесса $z(T)$, т. е. $\langle z(T) z(T') \rangle = 2\sigma^2 \delta(T - T')$, можно выполнить усреднение и получить уравнения для средних величин, содержащие моментные функции более высокого порядка. Для получения медленных изменений средних характеристик (на фоне быстро осциллирующих процессов с частотой $\Omega = \omega_1 + \omega_2$) при достаточно малой величине σ^2 можно усреднить эти уравнения по периоду быстрых движений, в результате чего придем к замкнутой системе линейных уравнений. Решая эти уравнения с соответствующими начальными условиями, получаем решение задачи в виде

$$
\begin{aligned}
\langle x_1(t) \rangle &= \exp(i\omega_1 t - \sigma^2 t)\,(v_1 + \beta v_2 \exp(i\omega_2 T - \sigma^2 T)), \\
\langle x_2(t) \rangle &= v_2 \exp[\, i\omega_2 (T - t) - \sigma^2 (T - t)] .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Отметим, что для нахождения высших моментных функций решения задачи (12) следует либо выделить действительные и мнимые части решения, либо перейти к их амплитудам и фазам.

В качестве примера нелинейной задачи рассмотрим задачу о движении частицы в поле случайных сил:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2, \qquad x_2(0) = v_2, \\
&\dot{x}_2 = f(t, x_1(t)), \qquad x_1(T) = v_1 .
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Отметим, что динамическая система (21) описывает также задачу о диффузии лучей в случайно-неоднородной среде, приходящих в заданную точку, в малоугловом приближении (см., например, [1]).

Для этой задачи очевидно, что $R_1(T) \equiv v_1$, а уравнения для R_2 и x принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial T} R_2 + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial v_1} = f(T, v_1), \qquad R_2(0, v) = v_2, \\
&\frac{\partial}{\partial T} x_l + R_2 \frac{\partial x_l}{\partial v_1} = 0, \qquad x_l(t;\, t, v) = R_l(t, v) .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Дополняя систему уравнений (22) уравнением для функции $\dfrac{\partial R_2}{\partial v_1}$,

$$\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial R_2}{\partial v_1}+\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_1}\right)^2+\frac{\partial^2 R_2}{\partial v_1^2}R_2=\frac{\partial f(T,\ v_1)}{\partial v_1},\qquad \frac{\partial R_2(0,\ \mathbf{v})}{\partial v_1}=0, \tag{23}$$

и предполагая, что поле случайных сил $f(T, \boldsymbol{x})$ гауссово и дельта-коррелированно по T, т. е.

$$\langle f(T,\ \mathbf{v})\rangle=0,\qquad \langle f(T,\ \boldsymbol{x})\, f(T+\tau,\ \boldsymbol{x}+\mathbf{s})\rangle=2F(\mathbf{s})\,\delta(\tau),$$

легко написать замкнутое уравнение для совместной плотности вероятностей решений уравнений (22) и (23),

$$P_{T,\,\mathbf{v}}(R,\ u,\ \boldsymbol{x})=\left\langle \delta\,(R_2(T,\ \mathbf{v})-R)\,\delta\left(\frac{\partial R_2}{\partial v_1}-u\right)\delta(\boldsymbol{x}(t;\ T,\ \mathbf{v})-\boldsymbol{x})\right\rangle,$$

которое имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial T}P_{T,\,\mathbf{v}}+R\frac{\partial P_{T,\,\mathbf{v}}}{\partial v_1}-uP_{T,\,\mathbf{v}}-\frac{\partial}{\partial u}u^2P_{T,\,\mathbf{v}}=D\frac{\partial^2 P_{T,\,\mathbf{v}}}{\partial R^2}+B\frac{\partial^2 P_{T,\,\mathbf{v}}}{\partial u^2}, \tag{24}$$

где постоянные $D=F(0)$, $B=-\dfrac{\partial^2 F(0)}{\partial s^2}$. Уравнение (24) следует решать с начальным значением

$$P_{t,\,\mathbf{v}}(R,\ u,\ \boldsymbol{x})=\widetilde{P}_{t,\,v}(R,\ u)\,\delta\,(R-x_2)\,\delta\,(v_1-x_1), \tag{25}$$

где функция $\widetilde{P}_{T,\,v}(R,\ u)$ также удовлетворяет уравнению (24) с начальным значением

$$\widetilde{P}_{0,\,\mathbf{v}}(R,\ u)=\delta\,(R-v_2)\,\delta\,(u). \tag{26}$$

Отметим, что переменная u является «лишней» переменной в задаче. Она была необходима для получения замкнутого статистического описания системы (22). Теперь мы можем ее исключить, интегрируя (24), (25) и (26) по u. В результате получаем уравнение для функции $P_{T,\,v}(R,\ \boldsymbol{x})$ вида

$$\frac{\partial}{\partial T}P_{T,\,\mathbf{v}}(R,\ x)+R\frac{\partial P_{T,\,v}}{\partial v_1}=D\frac{\partial^2 P_{T,\,\mathbf{v}}}{\partial R^2} \tag{27}$$

с условием $P_{t,\,\mathbf{v}}(R,\ x)=\widetilde{P}_{t,\,v}(R)\,\delta(R-x_2)\,\delta(v_1-x_1)$, где функция $\widetilde{P}_{T,\,\mathbf{v}}(R)$ удовлетворяет уравнению (27) с условием $\widetilde{P}_{0,\,\mathbf{v}}(R)=\delta\,(R-v_2)$.

Введем характеристическую функцию

$$\Phi_{T,\,\mathbf{v}}(\varkappa,\ \omega_1,\ \omega_2)=\langle \exp\{i\varkappa R+i\omega_1 x_1+i\omega_2 x_2\}\rangle. \tag{28}$$

Тогда она, согласно (27), будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \Phi_{T,\,\mathbf{v}}}{\partial T}=i\frac{\partial^2}{\partial\varkappa\,\partial v_1}\Phi_{T,\,\mathbf{v}}-D\varkappa^2\,\Phi_{T,\,\mathbf{v}} \tag{29}$$

с начальным условием

$$\Phi_{t,\,\mathbf{v}}(\varkappa,\ \omega_1,\ \omega_2)=\exp\,(i\omega_1 v_1)\,\varphi_{t,\,\mathbf{v}}(\varkappa+\omega_2), \tag{30}$$

где функция $\varphi_{t,v}(\varkappa)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi_{t,v}}{\partial t}=i\frac{\partial^2}{\partial \varkappa\, \partial v_1}\varphi_{t,v}-D\varkappa^2\varphi_{t,v}, \qquad \varphi_{0,v}=\exp(i\varkappa v_2). \tag{31}$$

Решение уравнения (29) с условием (30) имеет вид

$$\Phi_{T,v}(\varkappa,\omega_1,\omega_2)=\exp\left\{i\omega_1 v_1-D\left[\varkappa^2(T-t)-\varkappa\omega_1(T-t)^2+\frac{\omega_1^2}{3}(T-t)^3\right]\right\}\times$$
$$\times\varphi_{t,v}[\varkappa+\omega_2-\omega_1(T-t)], \tag{32}$$

где функция $\varphi_{t,v}(\varkappa)$, являющаяся решением уравнения (31), имеет вид

$$\varphi_{t,v}(\varkappa)=\exp(i\varkappa v_2-D\varkappa^2 t).$$

Полагая теперь в (32) $\varkappa=0$, получаем для совместной характеристической функции решения задачи (21) выражение

$$\Phi_T(\omega_1,\omega_2)=\langle\exp[i\omega_1 x_1(t)+i\omega_2 x_2(t)]\rangle=$$
$$=\exp\left\{i\omega_1[v_1-v_2(T-t)]+i\omega_2 v_2-\frac{D\omega_1^2}{3}(T-t)^3-Dt[\omega_2-\omega_1(T-t)]^2\right\}. \tag{33}$$

Таким образом, совместное одноточечное распределение вероятностей для величин $x_1(t)$ и $x_2(t)$ оказывается гауссовым распределением. При этом отметим, что это же распределение вероятностей имеет также статистическая задача

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=f(t,0); \qquad x_2(0)=v_2, \qquad x_1(T)=v_1. \tag{34}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. M. A. Golberg, Appl. Math. and Com., 1, 1 (1975).
3. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, 940 (1974).
4. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 4, 562 (1977).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
15 октября 1976 г.

REMARK ON STOCHASTIC BOUNDARY PROBLEMS

V. I. Klyatskin

The general methods are formulated which permits to obtain a closed statistic description of the boundary problems based upon the use of the invariant submersion theory.