ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 8 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИКА ЛУЧЕЙ В МНОГОМОДОВЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

А. Д. Шатров

Изучается распространение лучей в статистически нерегулярных волокнах. Получены уравнения, которым подчиняются распределения вероятностей пространственных и временных характеристик лучей. Основным результатом работы являются диффузионные уравнения (9) и (36), позволяющие рассчитывать плотность распределения лучей, а тем самым находить потери мощности, лучевую структуру поля на выходе волокна, распределение оптических длин лучей (т. е. форму выходного импульсного сигнала).

Нерегулярности, присутствующие в реальных волокнах, приводят к дополнительным потерям и искажениям сигнала. Волновые методы расчета многомодовых статистически нерегулярных волноводов громоздки и малоэффективны. В многомодовом случае предпочтительнее использовать лучевую оптику [1–3].

В настоящей работе рассматривается волноведущая вдоль z двумерная среда с показателем преломления $n(x, z)$, но метод без принципиальных усложнений переносится и на трехмерную задачу $n(x, y, z)$. Луч характеризуется координатами и импульсами. Импульс p определяется как вектор, касательный к траектории луча, причем $|p| = n$. Для нахождения траектории луча используется система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих гамильтонову форму [4]:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = p_x, \qquad H(p, x; z) = -p_z. \tag{1}$$

Очевидно, что p_z выражается через n и p по формуле

$$p_z(p, x; z) = \sqrt{n^2(x, z) - p^2}\,. \tag{2}$$

1. В регулярном волокне ($n = n(x)$) гамильтониан $H(p, x)$ не зависит явно от z и величины p и x на траектории луча являются периодическими функциями z. С помощью канонического преобразования (см. далее п.4), т. е. преобразования, сохраняющего гамильтонову форму уравнений, перейдем от p и x к переменным действие — угол $(I, w): p = p(I, w)$, $x = x(I, w)$ [5]. Эти переменные обладают следующими свойствами. а) Новый гамильтониан не зависит от $w: H[p(I, w), x(I, w)] = E(I)$. б) Функции $p(I, w)$ и $x(I, w)$ периодичны по w с периодом 2π*.

Из уравнений Гамильтона для I, w следует, что на траектории луча действие сохраняется, а «угловая» переменная линейно зависит от

* В аналитической механике переменная w называется углом. Чтобы отличить w от угла скольжения луча, термин угол, если он относится к w, будем заключать в кавычки.

$z: I(z) = I_0$, $w(z) = w_0 + (z - z_0)\varkappa(I_0)$, где $\varkappa(I) = E'(I)$. В результате величина $\Lambda = 2\pi/\varkappa$ оказывается равной периоду функций $p(z)$ и $x(z)$. Как будет показано далее на конкретных примерах, действие I определенным образом связано не только с длиной цикла Λ, но и с другими параметрами траектории, например, с амплитудами колебаний p и x. Значение I полностью определяет форму траектории, оставляя произвол лишь в параллельном сдвиге ее вдоль оси z, который определяется переменной w.

2. Перейдем к рассмотрению нерегулярного волокна. Будем предполагать, что гамильтониан H зависит от какого-либо параметра γ (например, диаметра волокна или отклонения оси от прямой линии или т. п.), который стационарным случайным образом изменяется вдоль z около своего среднего значения γ_0. Считая отклонения $f(z) = \gamma(z) - \gamma_0$ малыми, имеем

$$H[p, x; \gamma(z)] = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(p, x) f^m(z), \quad H_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m H}{\partial \gamma^m}\bigg|_{\gamma=\gamma_0}. \tag{3}$$

Система (1) в переменных I, w, найденных из невозмущенного гамильтониана H_0, принимает вид

$$\frac{dI}{dz} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{H}_m}{\partial w} f^m, \qquad \frac{dw}{dz} = \varkappa + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{H}_m}{\partial I} f^m, \tag{4}$$

где $\tilde{H}_m(I, w) = H_m[p(I, w), x(I, w)]$.

Будем рассматривать случайный процесс $I(z)$ через интервалы Δz, значительно превышающие как радиус корреляции функции f, так и длину цикла Λ. Функцию f предполагаем достаточно малой, чтобы величины I и w на интервале $(z_0, z_0 + \Delta z)$ были бы близки к своим невозмущенным значениям $I = I_0$, $w = w_0 + (z - z_0)\varkappa(I_0)$. Вычисляя $\Delta I = I(z_0 + \Delta z) - I(z_0)$ с точностью до f^2 включительно, находим, что $\overline{\Delta I} = A(I_0)\Delta z$, $\overline{(\Delta I)^2} = B(I_0)\Delta z$*, причем коэффициенты A и B связаны важной формулой:

$$A(I) = \frac{1}{2} \frac{d}{dI} B(I). \tag{5}$$

Заметим, что для нахождения B достаточно знать ΔI с точностью до f, в то время как для нахождения A требуется точность f^2. Формула (5), выражающая A через B, позволяет обойтись без громоздкого расчета поправки второго порядка, что значительно упрощает решение конкретных задач. В этом одно из достоинств нумерации лучей с помощью переменной I.

Для $B(I)$ получаем

$$B(I) = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 |c_m|^2 g(m\varkappa), \tag{6}$$

где g — спектральная плотность случайной функции f, а коэффициенты c_m находятся из разложения

$$\tilde{H}_1(I, w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(I) e^{imw} \quad (c_{-m} = c_m^*). \tag{7}$$

Спектральная плотность g является фурье-преобразованием функции корреляции R стационарного процесса f:

---

* Обращаем внимание на то, что величины $\overline{\Delta I}$ и $\overline{(\Delta I)^2}$ оказались не зависящими от w_0.

$$g(\varkappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(z) e^{-i\varkappa z} dz. \tag{8}$$

Таким образом, при $z \gg \Delta z$ процесс $I(z)$ может быть аппроксимирован диффузионным процессом с коэффициентами сноса и диффузии, равными соответственно A и B. Плотность вероятности $P(I, z)$ для такого процесса удовлетворяет уравнению Эйнштейна—Фоккера [6], которое с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I}\left(B \frac{\partial P}{\partial I}\right). \tag{9}$$

В [16] для ионосферного волнового канала уравнение типа (9) было получено из уравнения переноса излучения.

Параметры луча, распространяющегося в нерегулярном волокне (например, угол падения на границу с оболочкой в случае двухслойного волокна, амплитуда отклонения луча от оси в случае фокусирующего волокна), могут достигнуть таких критических значений, что луч либо высветится в оболочку, окружающую световедущую жилу, либо поглотится в ней. Таким образом, процесс $I(z)$ развивается в области с поглощающим экраном в точке $I = I_{\text{кр}}$, и плотность вероятности P должна удовлетворять граничному условию

$$P\big|_{I=I_{\text{кр}}} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (9) необходимо также дополнить условием отсутствия потока вероятности через границу $I = 0$

$$B \frac{\partial P}{\partial I}\bigg|_{I=0} = 0. \tag{11}$$

Начальное условие для P имеет вид

$$P\big|_{z=0} = F(I), \tag{12}$$

где функция F характеризует диаграмму излучения источника.

Решение задачи (9)—(12) представим в виде разложения

$$P(I, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m U_m(I) e^{-\sigma_m z}, \tag{13}$$

где U_m — собственные функции краевой задачи

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dI}\left(B \frac{dU_m}{dI}\right) + \sigma_m U_m = 0; \tag{14а}$$

$$B \frac{dU_m}{dI}\bigg|_{I=0} = 0; \tag{14б}$$

$$U_m\big|_{I=I_{\text{кр}}} = 0. \tag{14в}$$

Для U_m предполагаем нормировку

$$\int_0^{I_{\text{кр}}} U_n(I) U_m(I)\, dI = \delta_{nm}. \tag{15}$$

Коэффициенты A_m выражаются через заданную функцию $F(I)$:

$$A_m = \int\limits_0^{I_{\text{кр}}} F(I)\, U_m(I)\, dI. \tag{16}$$

Собственные числа σ_m будем предполагать перенумерованными в порядке их возрастания: $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \ldots$ Из (13) следует, что при $z \to \infty$ имеет место асимптотика

$$P(I, z) \sim A_1 U_1(I)\, e^{-\sigma_1 z}. \tag{17}$$

Практически представление (17) применимо при $z > L$, где расстояние L качественно оценивается формулой $L \approx 1/(\sigma_2 - \sigma_1)$. Таким образом, функция $U_1(I)$ описывает устанавливающееся при $z > L$ распределение, а величина σ_1 характеризует потери этого распределения.

3. Для некоторых наиболее распространенных типов нерегулярностей преобразуем выражение (6) к виду, который позволит находить коэффициент диффузии $B(I)$ по функциям $p(z)$ и $x(z)$, соответствующим невозмущенному движению с действием I.

а) Изгибы волокна: $n(x, z) \equiv n(x - \gamma)$, где $\gamma = f(z)$ — отклонение оси волокна от идеальной прямой. Имеем очевидную цепочку равенств:

$$H_1 = \left.\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0} = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\gamma=0} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{dp}{dz}, \tag{18}$$

откуда следует, что коэффициенты c_m, входящие в формулу (6), можно находить из разложения

$$\frac{dp}{dz} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(I)\, e^{im\varkappa z}. \tag{19}$$

б) Флуктуации сечения волокна: $n(x, z) \equiv n(x/(a + \gamma))$, где $\gamma = f(z)$ — отклонение радиуса волокна от среднего значения a. Имеем

$$H_1 = \left.\frac{\partial H}{\partial \gamma}\right|_{\gamma=0} = -\frac{x}{a}\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\gamma=0} = -\frac{x}{a}\frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{x}{a}\frac{dp}{dz}. \tag{20}$$

Коэффициенты c_m находим из разложения

$$\frac{x}{a}\frac{dp}{dz} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(I)\, e^{im\varkappa z}. \tag{21}$$

4. Напомним известную из аналитической механики методику нахождения для гамильтониана $H(p, x)$ переменных действие—«угол».

Искомое каноническое преобразование порождается функцией $S(x, I)$. Связь между старыми (p, x) и новыми (I, w) переменными осуществляется уравнениями $p = \dfrac{\partial S}{\partial x}$, $w = \dfrac{\partial S}{\partial I}$. Функция $S(x, I)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби $H\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}, x\right) = E(I)$, в котором переменная I рассматривается как параметр, а $E(I)$ является пока неизвестной функцией этого параметра. После того как главный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби найден, функция $E(I)$ определяется из соотношения $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint \dfrac{\partial S}{\partial x} dx$, где интегрирование проводится по циклу, т. е. от одной точки поворота до другой и обратно. Последняя формула означает, что $I = \frac{1}{2\pi}\oint p dx$, т. е. действие равно деленной на 2π площади цикла в фазовом пространстве p, x.

В нашей задаче ($H = -\sqrt{n^2 - p^2}$) решение уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид

$$S = \int_0^x \sqrt{n^2(x) - E^2}\, dx, \tag{22}$$

а действие I связано с гамильтонианом E формулой

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{n^2(x) - E^2}\, dx. \tag{23}$$

5. В качестве примера рассмотрим фокусирующее волокно

$$n^2(x) = n_0^2\left(1 - 2\Delta\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad (|x| < a,\ \Delta \ll 1). \tag{24}$$

Его гамильтониан в параксиальном приближении имеет вид

$$H(p, x) = -n_0 + \frac{1}{2n_0}p^2 + \frac{\Delta n_0}{a^2}x^2. \tag{25}$$

Решая соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби, находим

$$S = \frac{n_0\sqrt{2\Delta}}{a}\int_0^x \sqrt{\frac{a^2(E + n_0)}{\Delta n_0} - x^2}\, dx. \tag{26}$$

Отсюда нетрудно получить искомую связь между старыми (p, x) и новыми (I, w) каноническими переменными и новый гамильтониан $E(I)$:

$$p = \left(\frac{2In_0\sqrt{2\Delta}}{a}\right)^{1/2}\cos w; \tag{27}$$

$$x = \left(\frac{2aI}{n_0\sqrt{2\Delta}}\right)^{1/2}\sin w; \tag{28}$$

$$E = -n_0 + \frac{\sqrt{2\Delta}}{a}I. \tag{29}$$

Из (28) заключаем, что критическое значение ($\sin w = 1$, $x = a$) переменной I определяется выражением

$$I_{\text{кр}} = \frac{an_0\sqrt{2\Delta}}{2}. \tag{30}$$

Заметим, что строгое выражение для $E(I)$, полученное из (23), (24), имеет вид

$$E = -n_0\left(1 - 2I\frac{\sqrt{2\Delta}}{an_0}\right)^{1/2}. \tag{31}$$

6. В теории волноводов между лучевым и модовым подходами существует определенная связь. В частности, ВКБ-метод нахождения

собственных мод также приводит к интегралу (23), причем в нем величина $-E$ имеет смысл замедления моды ($-E = h/k$, h — постоянная распространения моды, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны в свободном пространстве), а $\pi k I$ представляет собой набег фазы волновой функции от одной точки поворота до другой. В методе ВКБ соотношение (23), в котором $I = (m - 1/2)\,\lambda/2\pi$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, служит для нахождения постоянных распространения h_m. Таким образом, в волновой оптике световодов так же, как и в квантовой механике, действие квантуется, причем его квантом является величина $\lambda/2\pi$. В результате геометрическая характеристика луча I оказывается пропорциональной номеру моды, к которой следует отнести данный луч.

Если в уравнении Эйнштейна—Фоккера (9) изменить масштаб переменной I в $\lambda/2\pi$ раз, то получившееся уравнение совпадет с диффузионным уравнением для средних мощностей мод [7–9]. Заметим, что для нахождения коэффициента диффузии волновым методом необходимо знать структуру мод, их фазовые скорости, коэффициенты связи на рассматриваемых нерегулярностях. Для лучевого вывода диффузионного уравнения достаточно знать только траектории лучей в регулярном волокне.

7. Форма прошедшего через волокно импульсного сигнала искажается вследствие того, что траектории лучей имеют различные оптические длины. Ниже будет получено уравнение, позволяющее исследовать процесс изменения формы сигнала при распространении его в статистически нерегулярном волокне.

Дифференциал dl оптической длины траектории связан с dz очевидным соотношением $dl = (n^2/p_z)\,dz = -(n^2/E)\,dz$. Время dt, затрачиваемое сигналом на прохождение участка траектории dz, определяется выражением $dt = dl/c = -(n^2/cE)\,dz$, где c — скорость света. Задержка сигнала на длине цикла выражается формулой

$$T = -\frac{1}{cE}\int_0^{\Lambda} n^2(x)\,dz. \tag{32}$$

Подставляя в (32) $n^2 = E^2 + p^2$, $dz = -(E/p)\,dx$ (см. (1)) и используя формулы $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint p\,dx$, $\Lambda = 2\pi/E'$, получим

$$T = (IE' - E)\,\Lambda/c. \tag{33}$$

Отсюда для скорости v распространения сигнала по лучу, характеризующемуся действием I, имеем

$$v(I) = c/[IE'(I) - E(I)]. \tag{34}$$

Если гамильтониан E является линейной функцией действия I, то, как следует из (34), скорость v не зависит от траектории. Это имеет место в сельфоке, рассматриваемом в параксиальном приближении (см. (29)). Учет квадратичного члена в разложении (31) приводит к формуле

$$\frac{1}{v(I)} = \frac{n_0}{c} + \frac{\Delta}{ca^2 n_0} I^2. \tag{35}$$

Выражение (34) согласуется с формулой $v = c\Big/\left(\dfrac{dh}{dk}\right)$, определяющей групповую скорость моды. Это вытекает из предыдущего пункта, где показано, что $h = -Ek$ и что величина I для фиксированной моды обратно пропорциональна k, т. е. $\frac{dI}{dk} = -I/k$.

Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{I(z), t(z)\}$, где $t(z) = \int_0^z dz/v[I(z)]$ — время задержки сигнала на реализации $I(z)$. Обозначим через $P(I, t, z)\,dIdt$ вероятность того, что в сечении z параметры луча I, t принадлежат соответственно интервалам $(I, I+dI)$ и $(t, t+dt)$. Поскольку между приращениями Δt и Δz существует детерминированная связь $\Delta t = \Delta z/v$, то уравнение Эйнштейна—Фоккера для двумерной плотности вероятности $P(I, t, z)$ принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\left(B\frac{\partial P}{\partial I}\right). \tag{36}$$

В случае, если входной сигнал является дельта-импульсом, возбуждение задается условием

$$P\big|_{z=0} = F(I)\,\delta(t). \tag{37}$$

Распределение $G(t, z)$ времен задержки определяет форму сигнала в сечении z и находится интегрированием P по I:

$$G(t, z) = \int_0^{I_{\text{кр}}} P(I, t, z)\,dI. \tag{38}$$

Уравнение (36) совпадает с нестационарным диффузионным уравнением для средних мощностей мод [9]. Таким образом, и это уравнение получает простую интерпретацию в рамках лучевой оптики.

Уравнение (36) с граничными условиями (10), (11), (37) исследовано в работах [9—12], где показано, что на расстояниях z, превышающих длину установления L, решение имеет вид

$$P(I, t, z) \sim \frac{A_1 U_1(I)}{\sqrt{2\pi}\,T(z)} \exp\left[-\sigma_1 z - (t - z/\bar{v})^2/2T^2(z)\right], \tag{39}$$

где

$$1/\bar{v} = M_{11}; \tag{40}$$

$$T^2 = 2z\sum_{m=2}^{\infty}\frac{M_{1m}^2}{\sigma_m - \sigma_1}; \tag{41}$$

$$M_{nm} = \int_0^{I_{\text{кр}}} \frac{1}{v(I)}\,U_n(I)\,U_m(I)\,dI. \tag{42}$$

Как мы видим, при $z \to \infty$ импульсный сигнал приобретает гауссову форму, его длительность возрастает, как $\sqrt{z}$, а потери определяются коэффициентом σ_1.

Плотность вероятностей $P(I, t, z)$, рассматриваемая как функция переменной t, обращается в нуль вне интервала $\left(\frac{z}{v_{\max}}, \frac{z}{v_{\min}}\right)$. Другими словами, длительность импульсного сигнала в любом сечении z не может превышать величины

$$T = \left(\frac{1}{v_{\min}} - \frac{1}{v_{\max}}\right) z. \tag{43}$$

Предельный закон (43) описывает расширение импульса на начальном участке при условии, если на входе волокна имелись лучи со всевозможными значениями I из области $(0, I_{кр})$.

Найдем асимптотический $(z \to 0)$ закон изменения ширины импульса при одномодовом возбуждении: $F(I) = \delta(I - I_0)$. В этом случае распределение P на начальном участке сосредоточено в окрестности $I = I_0$, что дает возможность представить коэффициенты сноса $(A, 1/v)$ и диффузии (B) в уравнении Эйнштейна—Фоккера в следующим виде:

$$A(I) = \frac{1}{2} \frac{d}{dI} B(I) \approx A(I_0); \tag{44}$$

$$\frac{1}{v(I)} \approx \frac{1}{v(I_0)} - \frac{v'(I_0)}{v^2(I_0)} (I - I_0); \tag{45}$$

$$B(I) \approx B(I_0). \tag{46}$$

Как известно, решением многомерного диффузионного уравнения с линейными коэффициентами сноса и с постоянными коэффициентами диффузии является нормальное распределение. Пользуясь стандартным методом определения параметров этого распределения [13], получим

$$P(I, t, z) = \frac{1}{2\pi J T \sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left[\frac{(I - \bar{I})^2}{J^2} - 2\rho \frac{(I - \bar{I})(t - \bar{t})}{JT} + \frac{(t - \bar{t})^2}{T^2}\right]\right\}, \tag{47}$$

где

$$\rho = \sqrt{3}/2; \tag{48}$$

$$\bar{I} = I_0 + A(I_0) z; \tag{49}$$

$$\bar{t} = \frac{z}{v(I_0)} - \frac{1}{2} A(I_0) \frac{v'(I_0)}{v^2(I_0)} z^2; \tag{50}$$

$$J^2 = B(I_0) z; \tag{51}$$

$$T^2 = \frac{1}{3} B(I_0) \frac{v'^2(I_0)}{v^4(I_0)} z^3. \tag{52}$$

Форма сигнала определяется выражением

$$G(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, T} \exp\left[-\frac{(t - \bar{t})^2}{2T^2}\right]. \tag{53}$$

Итак, при одномодовом возбуждении увеличение ширины импульса на начальном участке подчиняется закону $z^{3/2}$. Этот закон был получен Б. З. Каценеленбаумом из простых геометрических рассуждений. Уточняя их, можно найти формулу (52).

8. Для иллюстрации развитой выше теории рассмотрим: а) сельфок со случайными изгибами оси, б) двухслойное волокно со случайными деформациями границы.

а) Из (19) и (27) следует, что только коэффициенты $c_{\pm 1}$ отличны от нуля, причем $|c_{\pm 1}|^2 = n_0(2\Delta)^{3/2} I/2a^3$. Поэтому для $B(I)$ имеем

$$B(I) = \frac{2\pi n_0 (2\Delta)^{3/2}}{a^3} I g\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\right). \tag{54}$$

Собственные элементы краевой задачи (14), где B и $I_{\text{кр}}$ определены согласно (54) и (30), выражаются в виде

$$U_m(I) = J_0\left(\nu_m \sqrt{\frac{I}{I_{\text{кр}}}}\right) \Bigg/ \sqrt{I_{\text{кр}}}\, J_1(\nu_m); \tag{55}$$

$$\sigma_m = \frac{\pi \nu_m^2 \Delta}{a^4} g\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\right), \tag{56}$$

где ν_m — корни уравнения $J_0(\nu) = 0$. Коэффициент потерь σ_1 определяется формулой

$$\sigma_1 = \frac{(2{,}4)^2 \pi\Delta}{a^4} g\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\right). \tag{57}$$

Выражение (57) совпадает с результатом, полученным в [10] волновым путем. Подставляя (55), (56), (35) в (41), получим

$$T^2 = \frac{128\, n_0^2 \Delta^3 a^4 z}{\pi c^2 g\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\right)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\nu_m^2 \nu_1^2}{(\nu_m^2 - \nu_1^2)^5} \left[1 - \frac{12(\nu_m^2 + \nu_1^2)}{(\nu_m^2 - \nu_1^2)^2}\right]^2. \tag{58}$$

Формула (58) также согласуется с волновыми расчетами [10]. Сумма ряда (58) вычислена в [10]:

$$T^2 = 0{,}72 \cdot 10^{-4} \frac{n_0^2 \Delta^3 a^4}{c^2 g\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a}\right)} z. \tag{59}$$

Напомним, что g — спектральная плотность случайных отклонений оси волокна от прямой линии.

б) Рассмотрим двухслойное волокно, световедущая жила которого имеет диаметр $2a$ и показатель преломления n_0. Внешняя оболочка волокна характеризуется показателем преломления $n_0(1-\Delta)$, где $\Delta \ll 1$. Обозначим через φ угол между лучом и осью z. Тогда $p = n_0 \sin\varphi$ и действие I связано с φ формулой $I = 2an_0|\sin\varphi|/\pi$, полученной вычислением фазовой площади цикла. Углу полного внутреннего отражения $\varphi_{\text{кр}}$ соответствует значение действия $I_{\text{кр}}$:

$$I_{\text{кр}} = \frac{2an_0}{\pi}\sqrt{2\Delta - \Delta^2} \approx \frac{2an_0}{\pi}\sqrt{2\Delta}. \tag{60}$$

Поскольку $E = -n_0\cos\varphi$, то гамильтониан выражается через действие следующим образом:

$$E(I) = -n_0\sqrt{1 - \left(\frac{\pi I}{2an_0}\right)^2} \approx -n_0 + \frac{\pi^2 I^2}{8a^2 n_0}. \tag{61}$$

Из (34) и (61) находим

$$\frac{1}{v(I)} \approx \frac{n_0}{c} + \frac{\pi^2 I^2}{8 c a^2 n_0}. \tag{62}$$

Импульс $p(z)$ — это функция с постоянным модулем, равным $\pi I/2a$, причем $p(z)$ меняет знак через $\Lambda/2$. Координата $x(z)$ представляет собой пилообразную функцию с амплитудой колебаний a и периодом Λ. Имеет место разложение

$$\frac{x}{a}\frac{dp}{dz} = -\frac{I\varkappa}{a}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2im\varkappa z}. \tag{63}$$

Перепишем формулу (6) для коэффициента диффузии в виде

$$B(I) = \frac{2\pi}{\varkappa^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 g_{f'}(m\varkappa), \tag{64}$$

где $g_{f'}$ — спектральная плотность случайной функции f'. Пусть функция f описывает флуктуации радиуса волокна. Тогда коэффициенты c_m, как следует из (21) и (63), отличны от нуля только для четных индексов, причем $|c_{2m}|^2 = I^2\varkappa^2/a^2$. В результате

$$B(I) = \frac{2\pi I^2}{a^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{f'}(2m\varkappa). \tag{65}$$

Воспользовавшись формулой суммирования Пуассона [14], выразим B через функцию корреляции $R_{f'}$ случайного процесса f':

$$B(I) = \frac{\Lambda}{2}\frac{I^2}{a^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{f'}\left(\frac{m\Lambda}{2}\right). \tag{66}$$

Если минимальное расстояние между последовательными отражениями луча $\Lambda_{кр}/2 \approx 2a/\sqrt{2\Delta}$ значительно превышает радиус корреляции f', то в последней формуле можно ограничиться одним слагаемым:

$$B(I) = \frac{\Lambda}{2}\frac{I^2}{a^2}\overline{f'^2} \approx \frac{4 n_0 \overline{f'^2}}{\pi} I, \tag{67}$$

где $\overline{f'^2} = R_{f'}(0)$ — средний квадрат углов деформации отражающей границы.

Обратим внимание на то, что характер функциональных зависимостей $1/v(I)$ и $B(I)$ оказался таким же, как и в случае сельфока со случайными изгибами оси (ср. (62) с (35), (67) с (54)). Используя результаты решения предыдущей задачи, получим

$$\sigma_1 = \frac{(2{,}4)^2\overline{f'^2}}{4a\sqrt{2\Delta}}; \tag{68}$$

$$T^2 = 9{,}04\cdot 10^{-4}\,\frac{n_0^2(2\Delta)^{5/2}a}{c^2\,\overline{f'^2}}\,z. \tag{69}$$

9. Выше предполагалось, что в регулярном волокне потери луча с действием I изменяются скачком от нуля ($I < I_{кр}$) до бесконечности ($I \geqslant I_{кр}$). Рассмотрим случай плавного изменения потерь. Пусть $\alpha(I)$ — погонный коэффициент затухания (по мощности) луча в регулярном волокне. Тогда имеем диффузионный процесс с поглощением, и в правые части уравнений (9), (36) необходимо добавить слагаемое — αP. Например, уравнение (36) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial P}{\partial t} = -\alpha P + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\left(B\frac{\partial P}{\partial I}\right). \tag{70}$$

Если с ростом I потери $\alpha(I)$ неограниченно возрастают, то все изложенное ранее полностью переносится на эти более сложные уравнения.

Уравнение (70) можно применять и к регулярному волокну ($B \equiv 0$). В этом случае решением (70) является функция

$$P(I, t, z) = F(I)e^{-\alpha(I)z}\,\delta[t - z/v(I)]. \tag{71}$$

Интегрируя (71) по I, получим следующее выражение для импульсного отклика:

$$G(t, z) = \frac{v^2(I_0)}{z\,|\,v'(I_0)\,|}F(I_0)\,e^{-\alpha(I_0)z}, \tag{72}$$

где $I_0(t, z)$ — корень уравнения $t - z/v(I_0) = 0$. Если корней несколько, то в (72) будет сумма по всем корням. Лучевая методика расчета искажения формы импульса в регулярном волокне изложена, например, в [15].

Автор выражает глубокую благодарность Б. З. Каценеленбауму и Р. Ф. Матвееву за многочисленные полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Горшкова, А. А. Дяченко, В. А. Зятицкий, Б. З. Каценеленбаум, Н. А. Колесникова, Радиотехника и электроника, 11, № 1, 42 (1966).
2. С. А. Гинзбург, А. Г. Мурадян, Радиотехника, 30, № 5, 34 (1975).
3. С. А. Гинзбург, А. Г. Мурадян, И. И. Теумин, Квантовая электроника, 3, № 2, 304 (1976).
4. Д. Маркузе, Оптические волноводы, изд. Мир, М., 1974.
5. Г. Голдстейн, Классическая механика, изд. Наука, М., 1975.
6. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
7. D. Gloge, BSTJ, 51, № 8, 1767 (1972).
8. В. Н. Тутубалин, Радиотехника и электроника, 20, № 5, 914 (1975).
9. D. Marcuse, Theory of dielectric optical waveguides, Academic Press, N Y, 1974.
10. D. Marcuse, BSTJ, 52, № 8, 1423 (1973).
11. D. Marcuse, BSTJ, 53, № 2, 195 (1974).
12. R. Olshansky, Appl. Optics, 14, № 4, 935 (1975).
13. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, изд. Наука, М., 1968.
14. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1967.
15. M. Treheux, R. Bouillie, K. Steiner, Annales des Telecommunications 29, № 5—6, 209 (1974).
16. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 43 (1976).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
21 мая 1976 г.

RAY STATISTICS IN MULTIMODE IRREGULAR OPTICAL FIBERS

A. D. Shatrov

The ray propagation in statistically irregular fibers is studied. Equations are derived which the probability distribution of spatial and time ray characteristics are satisfied to. The basic result of the paper is the diffusion equations (9) and (36) which permit to calculate the ray density function and, thus, power losses, ray field structure at the fiber output, optical ray length distribution (i. e. the form of the output pulse).