ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1977*

УДК 621.371.25

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ВЫСОТЫ ИОНОСФЕРЫ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ ФАЗЫ СДВ-СИГНАЛОВ

В. Ф. Кравченко, В. И. Пономарев, И. С. Фалькович

Рассмотрена задача восстановления флуктуаций высоты ионосферы. В качестве исходных данных используются флуктуации фазы принимаемых СДВ-сигналов. Получено решение в виде разложения искомой функции в ряд по известным функциям с коэффициентами, определяемыми по наблюдаемым флуктуациям фазы. Оценена точность решения.

Определение различных характеристик флуктуаций $\varphi(x, y, t)$ высоты ионосферы играет важную роль как для изучения собственно ионосферы, так и для исследования распространения радиоволн в волноводе Земля—ионосфера.

В работе решается задача восстановления реализации флуктуаций высоты (неоднородной структуры) нижней границы ионосферы с использованием в качестве исходных данных флуктуаций фазы принимаемых электромагнитных полей СДВ-диапазона. Выбор диапазона определяется предположением об одномодовости волновода Земля—ионосфера, что несправедливо для более коротких длин волн. Знание реализации $\varphi(x, y, t)$ при использовании гипотезы об эргодичности поля или набора реализаций при отказе от этой гипотезы позволяет определять любые статистические характеристики и функции распределения поля $\varphi(x, y, t)$.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим в качестве модели волноводного канала Земля—ионосфера волновод, образованный двумя бесконечными поверхностями, нижняя из которых является плоской, верхняя — статистически неровной. Уравнение верхней границы $z = h + \varphi(x, y, t)$, где h — средняя высота ионосферы, $\varphi(x, y, t)$ — случайное поле, статистически однородное и стационарное с нулевым математическим ожиданием $(\langle (x, y, t) \rangle = 0)$. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций.

Передатчик, расположенный в точке $\boldsymbol{R}_0\,(0, 0, 0)$, излучает электромагнитные колебания СДВ-диапазона, которые принимаются в фиксированной точке $\boldsymbol{R}\,(x_0, 0, 0)$.

Флуктуации фазы $\psi(t, \varkappa)$ принимаемого поля в случае одномодового распространения, согласно [1], представим в виде

$$\psi(t, \varkappa) = \sqrt{\frac{x_0 \varkappa}{2\pi}} \frac{d\varkappa}{dh} \int_0^\infty \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(x_0 - x_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\varkappa x_0 y_1^2}{2x_1(x_0 - x_1)} + \frac{\pi}{4}\right) \varphi_1(x_1, y_1, t)\, dy_1, \tag{1}$$

где x_0 — дистанция, $\varkappa$ — продольная составляющая волнового вектора,

$$\varphi_1(x_1, y_1, t) = \begin{cases} \varphi(x_1, y_1, t) & (x_1 \in (0, x_0)) \\ 0 & (x_1 \overline{\in} (0, x_0)) \end{cases}.$$

Будем предполагать, что имеет место поперечный перенос неоднородностей, т. е. выполняется соотношение $\varphi(x_1, y_1, t) \equiv \varphi(x_1, y_1 - vt)$, где v — эффективная скорость поперечного переноса. Произведем в правой части (1) замену переменных $y_2 = y_1 - vt$, $u = x_1 - x_0/2$ и найдем посредством преобразования Фурье по времени полученного равенства спектр флуктуаций фазы $\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa)$:

$$\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa) = \frac{1}{v} \frac{d\varkappa}{dh} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left[\frac{\Omega^2(x_0+2u)^2}{8\varkappa x_0} - \frac{\Omega^2(x_0+2u)}{4\varkappa}\right] \tilde{\varphi}_1^*(u, \Omega) du. \quad (2)$$

Здесь $\Omega = \omega/v$, $[\omega] = рад/с$, $[\Omega] = рад/м$. При выводе соотношения (2) использовался табличный интеграл вида [2]

$$\int_0^{\infty} \sin ax^2 \cos 2bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \cos\left(\frac{b^2}{a} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Применяя равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(u) f_2(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1^*(\omega_u) \tilde{f}_2(\omega_u) d\omega_u$$

к правой части (2), получим

$$\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa) = \frac{\sqrt{\varkappa x_0}}{\Omega v} \frac{d\varkappa}{dh} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\varkappa x_0}{2\Omega^2}\omega_u^2 - \frac{\Omega^2 x_0}{8\varkappa}\right) \tilde{\tilde{\varphi}}_1^*(\omega_u, \Omega) d\omega_u, \quad (3)$$

где $\tilde{\tilde{\varphi}}_1(\omega_u, \Omega)$ — двойное преобразование Фурье по u и y_2 функции $\varphi_1(u, y_2)$.

Учитывая, что $\tilde{\varphi}_1(u, \Omega) = 0$ при $|u| > x_0/2$, разложим $\tilde{\tilde{\varphi}}_1^*(\omega_u, \Omega)$ в ряд Котельникова и ограничимся $2n+1$ членом этого ряда. Возможность и целесообразность такого ограничения будет показана ниже при определении точности восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$. Усеченный ряд Котельникова для функции $\tilde{\tilde{\varphi}}_1^*(\omega_u, \Omega)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_1^*(\omega_u, \Omega) = \sum_{j=-n}^{n} \tilde{\tilde{\varphi}}_1^*\left(\frac{2\pi}{x_0} j, \Omega\right) \frac{\sin \frac{1}{2}(x_0\omega_u - 2\pi j)}{\frac{1}{2}(x_0\omega_u - 2\pi j)}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3) и выполнив необходимые преобразования, получим

$$\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa) = \frac{2\pi}{\Omega v} \sqrt{\frac{\varkappa}{x_0}} \frac{d\varkappa}{dh} \sum_{j=-n}^{n} \tilde{\tilde{\varphi}}_1^*\left(\frac{2\pi}{x_0} j, \Omega\right) \cos\left(\frac{2\pi^2 \varkappa j^2}{x_0 \Omega^2} + \frac{\Omega^2 x_0}{8\varkappa} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5)$$

Для определения из (5) $2n+1$ значений функции $\tilde{\tilde{\varphi}}_1^*[(2\pi/x_0)j, \Omega]$ необходимо иметь $2M+1$ значений спектра флуктуаций фазы

$\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa)$ при различных $\varkappa_k$ $(k = \overrightarrow{-M, M})$. При непосредственном использовании (5) для составления системы уравнений M должно быть равно n. Однако при использовании методики отыскания $\tilde{\varphi}_1^*[(2\pi/x_0)j, \Omega]$, описанной ниже, справедливы также случаи $M < n$, $M \geqslant n$.

Домножив обе части (5) на $B^*_{kl}(\Omega)$,

$$\text{где } B_{kl}(\Omega) = \frac{2\pi\sqrt{\varkappa_k}}{\Omega v}\frac{d\varkappa_k}{dh}\cos\left(\frac{2\pi^2\varkappa_k}{x_0\Omega^2}l^2 + \frac{\Omega^2 x_0}{8\varkappa_k} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{6}$$

и просуммировав по k, с учетом обозначений

$$\Phi_{lj}(\Omega) = \sum_{k=-M}^{M} B^*_{kl}(\Omega)B_{kj}(\Omega),$$
$$V_l(\Omega) = \sum_{k=-M}^{M}\tilde{\psi}(\Omega v, \varkappa_k)B^*_{kl}(\Omega) \tag{7}$$

получим систему уравнений для спектральных компонент искомой функции $\varphi_1(u, y_2)$:

$$\sum_{j=-n}^{n}\Phi_{lj}(\Omega)\tilde{\varphi}_1^*\left(\frac{2\pi}{x_0}j, \Omega\right) = V_l(\Omega) \quad (l = \overrightarrow{-n, n}). \tag{8}$$

Решение системы уравнений (8) выражается через обратную матрицу $\{\Phi^{-1}_{jl}(\Omega)\}$:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_1\left(\frac{2\pi}{x_0}j, \Omega\right) = \sum_{l=-n}^{n}[\Phi^{-1}_{jl}(\Omega)]^* V^*_l(\Omega) \quad (j = \overrightarrow{-n, n}). \tag{9}$$

Функция $\varphi_1(u, y_2)$ — реализация поля неоднородностей верхней границы волновода—находится из (9) с использованием (4) и обратных преобразований Фурье по ω_u и Ω. В эксперименте поле $\psi(t, \varkappa)$ наблюдается во времени на конечном интервале $t \in (-T/2, T/2)$, что позволяет перейти в выражении для $\varphi_1(u, y_2)$ к дискретному преобразованию Фурье:

$$\varphi_1(u, y_2) = \frac{2\pi}{x_0 vT}\sum_{j=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}\exp\left(i\frac{2\pi u}{x_0}j\right)\times$$
$$\times\sum_{p=-P}^{P}\left[\Phi^{-1}_{jl}\left(\frac{2\pi}{vT}p\right)\right]^* V^*_l\left(\frac{2\pi}{vT}p\right)\exp\left(i\frac{2\pi}{vT}py_2\right). \tag{10}$$

Здесь $P = [FT]$, F — полоса пропускания приемного тракта. Заметим, что для нахождения $\varphi_1(u, y_2)$ можно также использовать выражение (9) с учетом (4) и с применением стандартных программ быстрого преобразования Фурье.

Полученное соотношение (10) представляет собой алгоритм восстановления реализации флуктуаций высоты ионосферы $\varphi_1(u, y_2)$. Необходимый для использования алгоритма экспериментальный материал— спектр флуктуаций фазы $\tilde{\psi}(\omega, \varkappa_k)$, полученный на интервале времени $(-T/2, T/2)$. При этом измерения $\tilde{\psi}(\omega, \varkappa_k)$ требуется проводить на $2M+1$ различных несущих частотах (при различных $\varkappa_k$). Выбор минимально необходимого для процедуры восстановления количества частот и степень их разнесения определяются из анализа точности полученного решения.

2. ТОЧНОСТЬ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ

На практике сигнал $\psi(t, \varkappa_k)$ наблюдается не в чистом виде, а в смеси с шумом $N_k(t)$, обусловленным внешними шумами, а также внутренними шумами измерителя. Наличие этих шумов приводит к ошибкам при восстановлении функции $\varphi_1(u, y_2)$, а их неучет — к неустойчивости получаемого решения из-за некорректности обратной задачи [3]. Одним из способов построения устойчивого решения обратной задачи является ее регуляризация. В данном случае регуляризация осуществляется выбором оптимального числа членов ряда (4) по критерию минимума суммарной ошибки восстановления поля $\varphi_1(u, y_2)$ [4].

По мере увеличения числа $2n+1$ членов ряда (4) уменьшается «динамическая» ошибка определения $\varphi_1(u, y_2)$, вызванная конечностью числа n. Однако увеличение числа членов ряда приводит к возрастанию флуктуационной ошибки восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$ из-за наличия шума $N_k(t)$. Эти два обстоятельства и определяют существование оптимального по указанному выше критерию числа n.

Наблюдаемый в смеси с сигналом $\psi(t, \varkappa_k)$ шум $N_k(t)$ моделируется ниже центрированным нормальным стационарным шумом, для которого выполняется соотношение

$$\langle \widetilde{N}_k(\Omega_1)\widetilde{N}_p(\Omega_2) \rangle = N_0(\Omega_1)\,\delta(\Omega_1 - \Omega_2)\,\delta_{kp},$$

где $\widetilde{N}_k(\Omega)$ — преобразование Фурье по времени $N_k(t)$, $N_0(\Omega)$ — спектральная плотность мощности $N_k(t)$, $k = \overrightarrow{-M, M}$, $p = \overrightarrow{-M, M}$.

Флуктуационная ошибка σ_φ^2 восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$ определяется средним квадратом $\langle |\delta\varphi_1(u, y_2)|^2 \rangle$, вычисляемых с учетом представления $\delta\varphi_1(u, y_2)$ через $\delta\overset{\approx}{\varphi}_1[(2\pi/x_0)j, \Omega] = \sum\limits_{l=-n}^{n} \sum\limits_{k=-M}^{M} [\Phi_{jl}^{-1}(\Omega)]^* \times \times \widetilde{N}_k^*(\Omega v) B_{kl}(\Omega)$, и равна

$$\begin{gathered}\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{v x_0^2} \sum_{j=-n}^{n} \sum_{m=-n}^{n} \exp\left[i\,\frac{2\pi u}{x_0}(j-m)\right] \times \\ \times \int_{-G}^{G} \Phi_{mj}^{-1}(\Omega) N_0(\Omega v)\, d\Omega \qquad \left(G = \frac{2\pi F}{v}\right).\end{gathered} \tag{11}$$

«Динамическая» ошибка восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$ характеризуется соотношением

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_1(u, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{|j|>n} \tilde{\varphi}_1\left(\frac{2\pi}{x_0} j, \Omega\right) \exp[i(\omega_u u + \Omega y_2)] \times \\ \times \frac{\sin \frac{1}{2}(x_0\omega_u - 2\pi j)}{\frac{1}{2}(x_0\omega_u - 2\pi j)}\, d\omega_u\, d\Omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{x_0} \sum_{|j|>n} \widetilde{\varphi}_1\left(\frac{2\pi}{x_0} j,\ y_2\right) \exp\left(i\,\frac{2\pi u}{x_0} j\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Суммарная погрешность определения $\varphi_1(u, y_2)$ представляется в виде суммы σ_φ^2 и $\langle |\Delta\varphi_1(u, y_2)|^2 \rangle$, в которой первое слагаемое является возрастающей, а второе — убывающей функциями n.

Можно показать (см. Приложение), что выражение для оценки сверху n_0 числа n, минимизирующего суммарную ошибку восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$, имеет вид

$$n_0 = \left\{ \frac{\sum\limits_{k=-M}^{M} \int\limits_{-G}^{G} [S_k(\Omega v)/\Phi_{\mu\mu}(\Omega)] d\Omega}{\int\limits_{-G}^{G} [N_0(\Omega v)/\Phi_{\mu\mu}(\Omega)] d\Omega} \right\}^{1/2}, \qquad (13)$$

где $S_k(\Omega v)$ — спектральная плотность мощности наблюдаемого поля $\psi(t, \varkappa_k)$ на k-й несущей частоте.

В случае достаточно гладких по Ω функций $\Phi_{\mu\mu}(\Omega)$ выражение (13) можно упростить:

$$n_0 \approx \left[\sum_{k=-M}^{M} \gamma_k \right]^{1/2}. \qquad (14)$$

Здесь γ_k — отношение сигнала к шуму по мощности на k-й несущей частоте.

Согласно полученному соотношению (13) или (14) число n в алгоритме восстановления функции $\varphi_1(u, y_2)$ (10) не превосходит числа n_0, оценивающего сверху оптимальное количество восстанавливаемых спектральных компонент искомой функции. Из (14) также следует, что с увеличением числа $2M+1$ используемых частот необходимо увеличивать число $2n+1$ решаемых уравнений (8). При этом одновременно уменьшаются и флуктуационная, и «динамическая» ошибки определения $\varphi_1(u, y_2)$.

Рассмотрим вопрос о возможности практического использования полученной выше методики восстановления реализации флуктуаций высоты ионосферы. Как показано в [1], при выполнении условия

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_k} \approx \left(\frac{l}{\Lambda}\right)^2 < 0{,}1, \qquad k = -\overrightarrow{M, M}, \qquad (15)$$

где l — характерный размер неоднородностей, Λ — размер зоны Френеля, $\Delta\omega$ — интервал межчастотной корреляции, флуктуации фазы на используемых несущих частотах ω_k оказываются некоррелированными. Ограничив диапазон СДВ областью частот $\omega/2\pi = 10 \div 20$ *кГц*, в которой справедливо предположение об одномодовости волновода Земля—ионосфера, из (15) получим, что количество $2M+1$ независимых несущих частот в выбранном диапазоне

$$2M + 1 = \frac{\omega_M - \omega_{-M}}{\Delta\omega} \geqslant 10.$$

Соотношение (15) дает возможность также оценить максимальный из учитываемых размеров неоднородностей: $l_{\max} \approx 0{,}3\Lambda$. Для рассматриваемого диапазона частот и дистанции $x_0 = 10^6$ *м* $\Lambda \approx 10^5$ *м*, следовательно, $l_{\max} \approx 3 \cdot 10^4$ *м*. Таким образом, спектр принимаемого сигнала необходимо ограничить снизу частотой $\Omega_H = 2\pi/l_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ *рад/м*, что соответствует $\omega_H = 10^{-2}$*рад/с* (при $v = 50$ *м/с* [5]). Последняя оценка позволяет определить максимальную длину анализируемой реализации $T_{\max} = 2\pi/\omega_H \approx 10^3$ *с*, что оправдывает предположение о стационарности поля $\psi(t, \varkappa)$ на исследуемом интервале T.

На основании приведенных выше оценок проводился расчет на ЭВМ n_0 по формуле (13) с предварительным вычислением $\Phi_{\mu\mu}(\Omega)$, используя соотношения (6) и (7). Исходные данные для расчета n_0: $x_0 = 10^6$ *м*, $T = 10^3$ *с*, $G = 10^{-2}$ *рад·м*, $M = 5$, $\gamma_k = 1$, $S_k(\Omega) \sim \Omega^{-2}$ [5]. В результате расчета получено значение $n_0 \approx 7$. Следовательно, для описанной реальной ситуации число уравнений $2n + 1$ для определения функции $\varphi_1(u, y_2)$ равно 15—20 ($n < n_0$), что позволяет использовать стандартные программы решения системы линейных алгебраических уравнений (8).

Точность определения реализации флуктуаций высоты ионосферы при заданных M и γ_k и с выбранным числом $n = 15—20$ определяется по формулам (11) и (12) в виде суммы σ_φ^2 и $\langle |\Delta\varphi_1(u, y_2)|^2\rangle$; точность может быть повышена лишь увеличением числа частот $2M + 1$ или увеличением отношения сигнала к шуму γ_k на каждой несущей частоте. При этом, естественно, увеличивается необходимое число $2n + 1$ оцениваемых спектральных компонент функции $\varphi_1(u, y_2)$. В то же время, при заданных M и γ_k увеличение числа оцениваемых компонент больше n_0 приводит к уменьшению точности восстановления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства формулы (13) проведем некоторые преобразования. Заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\sigma_\varphi^2 \geqslant \frac{1}{vx_0^2}\int\limits_{-G}^{G}\sum_{j=-n}^{n}\Phi_{jj}^{-1}(\Omega)N_0(\Omega v)d\Omega \geqslant \frac{2n+1}{vx_0^2}\int\limits_{-G}^{G}\min_j \Phi_{jj}^{-1}(\Omega)N_0(\Omega v)d\Omega. \quad (16)$$

Для класса функций, являющихся реализациями однородного поля, выполняется соотношение

$$\left\langle \tilde{\varphi}_1\left(\frac{2\pi}{x_0}j,\ \Omega_1\right)\tilde{\varphi}_1\left(\frac{2\pi}{x_0}m,\ \Omega_2\right)\right\rangle = \frac{x_0}{2\pi}S_0\left(\frac{2\pi}{x_0}j,\ \Omega_1\right)\delta(\Omega_1-\Omega_2)\,\delta_{jm}, \quad (17)$$

где $S_0[(2\pi/x_0)j,\ \Omega]$ — спектральная плотность мощности поля $\varphi_1(u, y_2)$. Учитывая (16) и (17), задача определения оценки сверху n_0 числа n сводится к отысканию минимума по n выражения

$$\int\limits_{-G}^{G}\left[(2n+1)\min_j \Phi_{jj}^{-1}(\Omega)N_0(\Omega v) + v\frac{x_0}{2\pi}\sum_{|j|>n}S_0\left(\frac{2\pi}{x_0}j,\ \Omega\right)\right]d\Omega. \quad (18)$$

Так как матрица $\{\Phi_{mj}(\Omega)\}$ является положительно-определенной, т. е. выполняется неравенство

$$\min_j \Phi_{jj}^{-1}(\Omega) = \Phi_{ll}^{-1}(\Omega) \geqslant \frac{1}{\max\limits_j \Phi_{jj}(\Omega)} = \frac{1}{\Phi_{\mu\mu}(\Omega)},$$

то, используя выражение

$$\Phi_{\mu\mu}(\Omega) = \sum_{k=-M}^{M}|B_{k\mu}(\Omega)|^2,$$

получим следующее соотношение для определения n_0:

$$\frac{d}{dn}\left\{\int\limits_{-G}^{G}\left\{\left[(2n+1)N_0(\Omega v) + \frac{x_0}{2\pi}v\sum_{k=-M}^{M}\sum_{|j|>n}S_0\left(\frac{2\pi}{x_0}j,\ \Omega\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times|B_{k\mu}(\Omega)|^2\right]\left[\sum_{k=-M}^{M}|B_{k\mu}(\Omega)|^2\right]^{-1}\right\}d\Omega\right\} = 0. \quad (19)$$

Для интегрируемых в среднеквадратичном по u полей $\varphi_1(u, y_2)$ при больших j $S_0[(2\pi/x_0)j, \Omega]$ может считаться убывающей по j функцией. Последнее позволяет привести (19) к виду

$$\frac{d}{dn}\left\{\int\limits_{-G}^{G} \frac{(2n+1)N_0(\Omega v) + (2/n)\sum\limits_{k=-M}^{M} S_k(\Omega)}{\Phi_{\mu\mu}(\Omega)}\, d\Omega\right\} = 0, \tag{20}$$

где $S_k(\Omega) = \frac{x_0 v}{2\pi}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} S_0[(2\pi/x_0)l, \Omega]\,|B_{kl}(\Omega)|^2$ — спектральная плотность мощности наблюдаемого поля $\psi(t, \varkappa_k)$ на k-й несущей частоте.

Решая уравнение (20) относительно n, окончательно получаем

$$n_0 = \left\{\frac{\sum\limits_{k=-M}^{M}\int\limits_{-G}^{G}[S_k(\Omega v)/\Phi_{\mu\mu}(\Omega)]\,d\Omega}{\int\limits_{-G}^{G}[N_0(\Omega v)/\Phi_{\mu\mu}(\Omega)]\,d\Omega}\right\}^{1/2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенность рассмотренной задачи восстановления флуктуаций высоты ионосферы состоит в том, что получаемые в фиксированной точке приема экспериментальные данные $\psi(t, \varkappa_k)$ являются функциями времени, тогда как восстанавливаемая функция $\varphi_1(u, y_2)$ является функцией координат. Используя предположение о поперечном переносе неоднородностей, координату y_2 удается «обменять» на время t. Восстановление по второй координате $u = x_1 - x_0/2$ получается фактически за счет использования данных $\psi(t, \varkappa_k)$ на некотором наборе несущих частот.

Полученное решение задачи восстановления представляется в виде разложения $\varphi_1(u, y_2)$ по известным функциям, определяемым по наблюдаемым данным $\psi(t, \varkappa_k)$. Оценена точность решения задачи, зависящая от суммарного отношения сигнала к шуму по мощности на всех используемых частотах. Показано, что в алгоритме восстановления существует оптимальное по точности число оцениваемых коэффициентов.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить П. В. Блиоха и В. Г. Безродного за полезные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 12, 1875 (1972).
2. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, издание 4, 1963, стр. 409.
3. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, изд. Наука, М., 1974.
4. В. И. Пономарев, С. Е. Фалькович, Тезисы докладов IV Международного симпозиума по теории информации, АН СССР, Ленинград, 1976.
5. С. Н. Синявский, Р. С. Шубова, Ю. М. Ямпольский, Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Казань, 1975.

Харьковский авиационный институт

Поступила в редакцию
15 марта 1976 г.,
после доработки
25 января 1977 г.

DETERMINATION OF RANDOM CHANGES OF THE IONOSPHERE HEIGHT FROM PHASE FLUCTUATIONS OF VLF SIGNALS

V. F. Kravchenko, V. I. Ponomarev, I. S. Fal'kovich

The problem of restoration of the ionosphere height fluctuations is considered. Phase fluctuations of VLF signals received are used as the initial data. The solution is obtained as the series expansion of the function to be desired over the known function with the coefficients determined from observations. The solution accuracy is estimated.