УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОНИКНОВЕНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ

В. Ф. Дряхлушин, Ю. А. Романов

Исследовано нелинейное проникновение продольного электрического поля в плазменный слой при условии зеркального отражения плазменных частиц от его границ. Показано, что в случае достаточно сильной локализации вблизи границ слоя электрических полей с частотами ω_1 и ω_2, создаваемых внешними источниками, внутри плазменного слоя возникают эховые колебания с разностной частотой $\omega_2 - \omega_1$. При произвольном соотношении между ω_1 и ω_2 эховые колебания существуют в бесконечном счетном множестве точек, заполняющих весь слой. При $\alpha\,\omega_1 = \beta\omega_2$ (α и β — целые числа) это множество вырождается в небольшое конечное число бесконечно вырожденных точек, в которых возникает плазменный эховый резонанс Амплитуда эхового поля пропорциональна квадрату отношения длины свободного пробега плазменных частиц к толщине слоя.

В работе [1] исследовано нелинейное проникновение поперечных электромагнитных волн в изотропный плазменный слой. Как и эхо на поперечных волнах [2], этот эффект существует лишь в третьем порядке по полю внешней падающей волны. Цель настоящей работы — исследование нелинейного проникновения продольного электрического поля в плазменный слой с толщиной, значительно превышающей длину затухания Ландау. В отличие от поперечных волн нелинейное проникновение продольных волн существует уже во втором порядке по внешнему полю.

Пусть плазменный слой помещен в продольное внешнее поле с двумя временными гармониками ω_1 и ω_2. Будем считать, что значения ω_1 и ω_2 отличаются от плазменной частоты, так что соответствующие поля существуют лишь в непосредственной близости от границ слоя. В этом случае нелинейное проникновение поля аналогично плазменному эху, возникающему под действием источников, расположенных на границах слоя. Оба эти явления обладают рядом специфических свойств, характерных для плазменных слоев конечной толщины.

1. Вследствие многократного отражения электронных волн Ван-Кампена от границ слоя (отражение электронов предполагается зеркальным) плазменное эхо на комбинационной частоте $\omega_2-\omega_1$ может возникать не в одной точке пространства, что характерно для неограниченной и полуограниченной плазмы, а в бесконечном счетном множестве точек. Из условия отсутствия фазового смешения модулированных электронных волн с различными скоростями [3] следует, что плазменное эхо на комбинационной частоте $\omega_2 - \omega_1$ возникает в симметричных точках слоя (для определенности считаем $\omega_2 > \omega_1$)

$$l' = \frac{\mu\,\omega_1 d}{\omega_2 - \omega_1} - \nu\, d, \qquad 0 \leqslant l' \leqslant d, \qquad \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

где $(0, d)$ — координаты границ слоя. Если μ, $\nu \geqslant 0$ — волна дает эхо при движении в положительном направлении при подходе к точке эха. При этом μ — число отражений электронной волны с частотой ω_1 от обеих границ слоя до того, как она промодулируется источником с частотой ω_2, ν — число отражений электронной волны с комбинационной частотой $\omega_2 - \omega_1$ от обеих границ слоя до того, как эта волна даст всплеск заряда и, следовательно, эховое поле. Случай μ, $\nu < 0$ отличается от предыдущего зеркальным отражением относительно середины слоя всех величин и направлений движений. В частности, координаты эха в этих двух случаях связаны соотношением $l_1' = d - l_2'$. Других возможностей эха не существует.

2. При $\alpha\omega_1 = \beta\omega_2$ (α и β — целые числа) происходит наложение бесконечного счетного числа эховых колебаний в одной или нескольких точках и возникает своеобразный эховый резонанс. Поскольку число допустимых отражений от границ слоя первичных и модулированных электронных волн (с частотами $\omega_{1,2}$ и $\omega_2-\omega_1$ соответственно), дающих вклад в эхо, порядка отношения длины свободного пробега частиц λ к толщине слоя, амплитуда эховых колебаний в резонансной точке пропорциональна $(\lambda/d)^2$ (при $\lambda/d \gg 1$).

3. Вследствие многократной модуляции электронных волн при их отражении от границ слоя и памяти этой модуляции отклонение функции распределения от равновесного значения при отсутствии столкновений частиц не мало. Функция распределения при этом содержит все временные гармоники $\mu\omega_1 + \nu\omega_2$ (μ, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$). Через достаточно длительное время, подобно тому, как это происходит при нелинейном затухании Ландау, на функции распределения возникнут участки плато вблизи скоростей $v \sim \dfrac{\omega_{1,2} d}{n\pi}$. Появление нескольких участков плато связано с наличием в слое пространственных гармоник поля с волновыми векторами $k = \dfrac{n\pi}{d}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$). Поэтому в общем случае теория возмущений неприменима к исследованию эха в плазменном слое. Однако при наличии столкновений теорию возмущений использовать можно, если отклонение функции распределения от равновесного значения «размывается» еще до того, как оно становится не малым. К этому же приводит и неидеальность зеркального отражения частиц от границ слоя.

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ

Пусть плазменный слой толщины d находится во внешнем поле

$$E_0 = E_{01}e^{i\omega_1 t} + E_{02}e^{-i\omega_2 t} + \text{к. с.} \tag{2}$$

(В дальнейшем комплексно сопряженные слагаемые для краткости будем опускать.) Будем считать, что для обеих гармоник поля выполнены условия

$$\delta_{1,2} \ll d \ll \lambda, \tag{3}$$

где $\delta_{1,2}$ — глубины проникновения продольного поля. Условие $\delta_{1,2} \ll d$ означает, что поля внутри плазменного слоя существенны лишь вблизи границ слоя; условие $d \ll \lambda$ необходимо для того, чтобы электронная волна Ван-Кампена не исчезала после достаточно большого числа отражений от границ слоя.

Исходными уравнениями, описывающими проникновение продольного электрического поля в плазменный слой, являются кинетическое уравнение и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m}\frac{\partial}{\partial v}(f_0 + f) = -\nu f; \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \int f dv, \quad (5)$$

где f_0 и f — соответственно равновесная функция распределения и отклонение от нее, ν — частота столкновений плазменных частиц. На границах слоя наложим условие зеркального отражения плазменных частиц:

$$f(v)\,|_{x=0,\,d} = f(-v)\,|_{x=0,\,d}. \quad (6)$$

Удобно перейти к рассмотрению безграничной задачи, зеркально отражая электрические поля и скорости частиц в стенках слоя. Разлагая после этого все величины в ряд Фурье по x с периодом $2d$ и в интеграл Фурье по времени, получим следующее выражение для поля E во втором порядке по E_0:

$$E^{(2)}(x, t) = -\frac{ie^3}{\pi m^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_l \frac{e^{i(lkx-\omega t)}}{\varepsilon(\omega, kl)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\partial f_0}{\partial v} \times$$
$$\times \sum_p \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' E^{(1)}_{l-p,\,\omega-\omega'} E^{(1)}_{p,\,\omega'}}{(\omega + i\nu - klv)^2 (\omega' + i\nu - kpv)}; \quad (7)$$

$$E^{(1)}_{l,\,\omega} = \frac{E_{0,\,l,\,\omega}}{\varepsilon(\omega, kl)}, \quad (8)$$

где $\varepsilon(\omega, kl)$ — продольная диэлектрическая проницаемость неограниченной плазмы, $k = \pi/d$, $l, p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$E_{0,\,l,\,\omega} = \frac{2(1-(-1)^l)}{il}[E_{01}\delta(\omega + \omega_1) + E_{02}\delta(\omega - \omega_2)]. \quad (9)$$

Ограничиваясь лишь слагаемыми, дающими вклад в поле на комбинационной частоте $\omega_2 - \omega_1$, после несложных преобразований из (7) получим

$$E^{(2)}(x, t) \approx \frac{4ie^3 E_{01} E_{02}}{\pi m^2} \exp[-i(\omega_2 - \omega_1)t] \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\partial f_0}{\partial v}$$
$$\times \sum_l \sum_p \frac{(1-(-1)^p)(1+(-1)^l)e^{ilkx}}{p(l-p)(\omega_2 - \omega_1 + i\nu - klv)^2\, \varepsilon(\omega_2 - \omega_1, kl)} \times$$
$$\times \{[(\omega_2 + i\nu - kpv)\,\varepsilon(-\omega_1, k(l-p))\,\varepsilon(\omega_2, kp)]^{-1} -$$
$$-[(\omega_1 - i\nu + kpv)\,\varepsilon(-\omega_1, kp)\,\varepsilon(\omega_2, k(l-p))]^{-1}\}. \quad (10)$$

Суммируя по p и l в пренебрежении вкладом в поле полюсных слагаемых и линий разреза, обусловленных нулями и точками ветвления ε, в силу предполагаемого быстрого затухания этих слагаемых и пренебрегая частотой столкновений в диэлектрической проницаемости, получим

$$E^{(2)}(x,t) \approx \frac{8\pi e^3 E_{01} E_{02}}{m^2 \omega_1 \omega_2} \exp\left[-i(\omega_2-\omega_1)t\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp\left(i\frac{\omega_2-\omega_1}{v}x\right)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\operatorname{sign} v\right)}{\varepsilon\left(\omega_2-\omega_1, \frac{\omega_2-\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(-\omega_1, -\frac{\omega_1}{v}\right)\varepsilon\left(\omega_2, \frac{\omega_2}{v}\right)\left[1-a^-\exp\left(i\frac{\omega_2-\omega_1}{v}d\right)\right]} \times$$

$$\times\left(x-d+\frac{d}{1-a^-\exp\left(i\frac{\omega_2-\omega_1}{v}d\right)}\right)\times \tag{11}$$

$$\times\left[\frac{1-a^-\exp\left(-i\frac{\omega_1}{v}d\right)}{1+a^-\exp\left(-i\frac{\omega_1}{v}d\right)} - \frac{1-a^+\exp\left(-i\frac{\omega_2}{v}d\right)}{1+a^+\exp\left(-i\frac{\omega_2}{v}d\right)}\right],$$

$$a^{\pm} = \exp\left(\pm\frac{d}{\lambda}\operatorname{sign} v\right), \qquad \lambda = \frac{|v|}{\nu}.$$

Из (11) видно, что при условии $\alpha\omega_1 = \beta\omega_2$ и $\lambda \gg d$ основной вклад в интеграл дают области, где полюса выражений

$$\left[1-a^-\exp\left(i\frac{\omega_2-\omega_1}{v}d\right)\right]^{-2} \quad \text{и} \quad \left[1+a^-\exp\left(-i\frac{\omega_1}{v}d\right)\right]^{-1}$$

близки друг к другу. Пусть, например, $\omega_2 = 3\omega_1$. Из (1) следует, что в этом случае возникает плазменный эховый резонанс на частоте $2\omega_1$ вблизи обеих границ и в середине плазменного слоя. Оставляя лишь слагаемые $\sim (\lambda/d)^2$, получим

$$E^{(2)}(x,t) \approx -\frac{16\pi e^3 \lambda^2 E_{01} E_{02}}{27 m^2 \omega_1 d} \exp(-2i\omega_1 t) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\left[\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right]_{v=\omega_1/\xi} e^{2i\xi x}\left(1-e^{-i\xi d}+e^{-2i\xi d}\right)\operatorname{sign}\xi}{\xi^2 \varepsilon(3\omega_1, 3\xi)\,\varepsilon(2\omega_1, 2\xi)\,\varepsilon(-\omega_1, -\xi)}. \tag{12}$$

Интегрируя (12) по ξ в пренебрежении полюсами ε (что возможно, если ω_1, $2\omega_1$ и $3\omega_1$ отличны от ω_0), для фермиевской функции распределения при $T = 0$ находим

$$E^{(2)}(x,t) \approx \frac{2e\,\omega_0^2 \lambda^2 E_{01} E_{02}}{9m\,\omega_1^2 d v_F^2} e^{-2i\omega_1 t} \sum_{j=1}^{3} \theta_j \times$$

$$\times\left\{\frac{e^{i\alpha_j} - i\alpha_j\left[\operatorname{ci}(\alpha_j) + i\operatorname{si}(\alpha_j)\right]}{\varepsilon\left(3\omega_1, \frac{3\omega_1}{v_F}\right)\varepsilon\left(2\omega_1, \frac{2\omega_1}{v_F}\right)\varepsilon\left(-\omega_1, -\frac{\omega_1}{v_F}\right)} - \right. \tag{13}$$

$$
- \frac{e^{-i\alpha_j} + i\,\alpha_j\,[\mathrm{ci}\,(\alpha_j) - i\,\mathrm{si}\,(\alpha_j)\,]}{\varepsilon\left(3\omega_1, -\dfrac{3\omega_1}{v_F}\right)\varepsilon\left(2\omega_1, -\dfrac{2\omega_1}{v_F}\right)\varepsilon\left(-\omega_1, \dfrac{\omega_1}{v_F}\right)}\Bigg\},
$$

где

$$
\theta_1 = \theta_3 = 1\,, \qquad \theta_2 = -1,
$$

$$
\alpha_1 = \frac{2\omega_1}{v_F}\,x, \qquad \alpha_2 = \frac{2\omega_1}{v_F}\left(x - \frac{d}{2}\right), \qquad \alpha_3 = \frac{2\omega_1}{v_F}\,(x - d),
$$

$$
\omega_0^2 = \frac{4\pi\,e^2 n}{m}, \qquad v_F = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\,\hbar\,n^{1/3}}{m},
$$

$\mathrm{ci}\,(\alpha_j)$ и $\mathrm{si}\,(\alpha_j)$ — интегральные косинус и синус соответственно.

При вычислении поля в случае максвелловской функции распределения интегрирование по ξ выполняется путем перехода в комплексную плоскость ξ. Значение интеграла определяется вкладом от точек перевала:

$$
E^{(2)}(x,\ t) \approx \frac{4e\lambda^3 E_{01}E_{02}\exp\,(-2i\,\omega_1\,t)}{27\sqrt{3}\,md\,a_0^2\,\omega_1^2}\sum_{j=1}^{3}\theta_j\exp\left(-\frac{3}{2}\,\beta_j^{2/3}\right)\times
$$

$$
\times\left[\frac{\exp\left(i\,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\beta_j^{2/3}\,\mathrm{sign}\,\beta_j\right)}{\varepsilon\,(3\omega_1,\ 3\xi_j^+)\,\varepsilon\,(2\omega_1,\ 2\xi_j^+)\,\varepsilon\,(-\omega_1,\ -\xi_j^+)} - \right. \tag{14}
$$

$$
\left. - \frac{\exp\left(-\,i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\beta_j^{2/3}\,\mathrm{sign}\,\beta_j\right)}{\varepsilon\,(3\omega_1,\ -3\xi_j^-)\,\varepsilon\,(2\omega_1,\ -2\xi_j^-)\,\varepsilon\,(-\omega_1,\ \xi_j^-)}\right],
$$

где

$$
\beta_1 = \frac{x\,\omega_1}{v_T}, \qquad \beta_2 = \frac{(\,x - d/2\,)\,\omega_1}{v_T}, \qquad \beta_3 = \frac{(\,x - d\,)\,\omega_1}{v_T},
$$

$$
\xi_1^{\pm} = \left[\frac{\omega_1^2}{x v_T^2}\right]^{1/3}\exp\left(\pm\,i\,\frac{\pi}{6}\right), \quad \xi_2^{\pm} = \left[\frac{\omega_1^2}{\left|x - \dfrac{d}{2}\right| v_T^2}\right]^{1/3}\exp\left(\pm i\,\frac{\pi}{6}\mathrm{sign}\left(x - \frac{d}{2}\right)\right),
$$

$$
\xi_3^{\pm} = \left[\frac{\omega_1^2}{(d - x)\,v_T^2}\right]^{1/3}\exp\left(\mp\,i\,\frac{\pi}{6}\right), \qquad a_0^2 = \frac{T}{4\pi\,e^2 n}, \qquad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}.
$$

Аналогично находится поле и в других случаях, когда выполняется соотношение $\alpha\omega_1 = \beta\omega_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Кемоклидзе, Л. П. Питаевский, Письма в ЖЭТФ, **11**, 508 (1970).
2. М. П. Кемоклидзе, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 58, 1853 (1970).
3. Б. Б. Кадомцев, УФН, **95**, 111 (1968).

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 12 августа 1976 г.

NONLINEAR PENETRATION OF A LONGITUDINAL ELECTRIC FIELD IN A PLASMA LAYER

V. F. Dryakhlushin, Yu. A. Romanov

The nonlinear penetration of longitudinal electric field in a plasma layer under the condition of mirror reflection of plasma particles from its boundaries is investigated. It is shown that in the case of a sufficiently strong localization near the layer boundaries of the electric fields with the frequencies ω_1 and ω_2 produced by the external sources echo oscillations with the difference frequency $\omega_2-\omega_1$ occur inside the plasma layer. For the arbitrary relation between ω_1 and ω_2, echo oscillations exist in the infinite enumerable set of points filling the whole layer. For $\alpha\omega_1 = \beta\omega_2$ (α and β are the integers) this set is degenerated into a small finite number of infinite degenerated points which the plasma echo resonance occurs at. The amplitude of the echo field is proportional to the square of the ratio of the free path of plasma particles to the layer thickness.