

УДК 621.371.25

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ НА ЧАСТОТАХ НИЖЕ ВЕРХНЕЙ ГИБРИДНОЙ

Н. С. Беллюстин

Получены выражения для полей излучения, диаграммы направленности и потерь на излучение произвольного распределения сторонних токов на частотах, близких к верхней гибридной. Результаты сравниваются с известными формулами приближения «одноосного кристалла». Рассматривается переход к квазистатическому приближению и обсуждаются условия его применимости. В качестве примера взяты электрический и магнитный диполи конечных размеров. Рассмотрена задача о рассеянии обыкновенной волны в необыкновенную на ионосферных неоднородностях. Получены формулы, определяющие рассеяние на сильно вытянутых вдоль магнитного поля и на мелкомасштабных «изотропных» неоднородностях.

1. Известно, что показатель преломления одной из нормальных волн в магнитоактивной плазме может обращаться в бесконечность при некотором резонансном значении угла между волновым вектором и магнитным полем [1]. Излучение и распространение электромагнитных волн в этом случае имеют ряд особенностей, связанных с наличием резонанса. В диапазоне частот

$$\max(\omega_0, \omega_H) < \omega < \omega_g = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_0 = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ ,  $\omega_H = eH_0/mc$ ,  $\omega_g$  — верхняя гибридная частота, существует резонансный угол для необыкновенной волны. В последнее время интерес к распространению волн в этом диапазоне заметно возрос в связи с экспериментами по воздействию на *F*-слой ионосферы мощным радиоизлучением [2, 3]. Обнаруженное аномальное поглощение обыкновенной волны при отражении от возмущенной области может быть связано с резонансным рассеянием обыкновенной волны в необыкновенную на искусственных неоднородностях [4, 5].

В настоящей работе рассматривается излучение необыкновенной волны произвольным заданным источником на частоте, близкой к верхней гибридной. В качестве одного из примеров рассмотрено рассеяние обыкновенной волны в необыкновенную на ионосферной неоднородности, представляющее интерес для интерпретации экспериментов [2, 3].

2. Гармонические ( $e^{-i\omega t}$ ) поля в магнитоактивной плазме описываются уравнениями

$$\Delta E - \text{grad div } E + k_0^2 \overset{\wedge}{\epsilon} E = -\frac{4\pi ik_0}{c} j, \quad (2)$$

$$H = -\frac{i}{k_0} \text{rot } E, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

где  $\overset{\wedge}{\epsilon}_{ij}(\omega)$  — тензор диэлектрической проницаемости,

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad g = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Решение уравнения (2) в однородной среде удобно искать в виде разложения по плоским волнам. Используя преобразование Фурье

$$a^f(\mathbf{k}) = \int a(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{R}, \quad a(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a^f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{k}, \quad (4)$$

где  $a = E_i, H_i, j_i$ ,  $\rho = \text{div } \mathbf{j}/i\omega$ , получим

$$E_i^f(\mathbf{k}) = - \frac{\Delta E_i^f(\mathbf{k})}{k_0^2 \varepsilon (k_{\perp 1}^2 - k_{\perp 2}^2) (k_{\perp}^2 - k_{\perp 1}^2)} + \frac{\Delta E_i^f(\mathbf{k})}{k_0^2 \varepsilon (k_{\perp 1}^2 - k_{\perp 2}^2) (k_{\perp}^2 - k_{\perp 2}^2)}. \quad (5)$$

Здесь  $\Delta E_i^f(\mathbf{k})$  — соответствующие алгебраические дополнения линейной системы уравнений для  $E_i^f(\mathbf{k})$ , а  $k_{\perp 1}^2$  и  $k_{\perp 2}^2$  — решения дисперсионного уравнения, соответствующие двум нормальным волнам:

$$k_{\perp 1,2}^2 = - \frac{1}{2\varepsilon} [k_0^2(g^2 - \varepsilon^2 - \varepsilon\eta) + k_z^2(\varepsilon + \eta)] \pm \left\{ \frac{1}{4\varepsilon^2} [k_0^2(g^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon\eta) + k_z^2(\varepsilon - \eta)]^2 + k_0^2 k_z^2 \frac{\eta g^2}{\varepsilon^2} \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Это выражение может быть упрощено вблизи верхней гибридной частоты, поскольку  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \omega_g$ . Полагая выполненными условия

$$\varepsilon^2 \ll g^2, \quad |\varepsilon| \ll \frac{g^2}{\eta}, \quad |\varepsilon| \ll \eta, \quad (7)$$

на частотах ниже гибридной из (6) получим

$$k_{\perp 1}^2 = k_0^2 \frac{g^2}{|\varepsilon|} + k_z^2 \frac{\eta}{|\varepsilon|}; \quad (8)$$

$$k_{\perp 2}^2 = \frac{k_0^4 g^2 - k_z^4}{k_z^2 + k_0^2 g^2 / \eta}. \quad (9)$$

Выражение (8), определяющее дисперсионное уравнение необыкновенной волны, имеет некоторую аналогию с приближением одноосного кристалла ( $g = 0$ ). Действительно, в этом случае при  $\varepsilon < 0$ ,  $\eta > 0$  получим из (6) для обыкновенной волны формулу

$$k_{\perp}^2 = k_0^2 \eta + k_z^2 \frac{\eta}{|\varepsilon|}, \quad (10)$$

совпадающую с (8) при замене  $k_0^2$  на  $k_0^2 g^2 / |\varepsilon| \eta$ . Излучение в приближении одноосного кристалла рассмотрено в работе [6].

Если перейти к пределу  $c \rightarrow \infty$  в исходных уравнениях (2), то получим квазистатическое приближение [7]. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$k_{\perp}^2 = \frac{\eta}{|\varepsilon|} k_z^2. \quad (11)$$

Столь простая формула пригодна, если значительная часть пространственного спектра источника находится в той области пространства  $\mathbf{k}$ , где отличие (11) от более точного дисперсионного уравнения (8) несущественно. Это условие выполняется для источника достаточно малых размеров.

3. Рассмотрим излучение необыкновенной волны (8), определяемое первым слагаемым в (5). На достаточно большом расстоянии от источника интегралы (4) могут быть вычислены одним из стандартных способов, например, методом стационарной фазы. Условия дальней зоны для необыкновенной волны имеют вид

$$R|\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta| \gg a \eta |\sin \vartheta| + b |\varepsilon \cos \vartheta|,$$

$$k_0 R |\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta|^{1/2} \gg 1,$$

$$R |\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta|^{1/2} \gg \frac{k_0^2 g^2}{|\varepsilon| \eta} (\eta a^2 + |\varepsilon| b^2),$$

$$R |\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta|^{3/2} \gg \frac{k_0^2 g^2}{|\varepsilon| \eta} (a \eta |\sin \vartheta| + b |\varepsilon \cos \vartheta|)^2,$$

где  $a$  и  $b$  — характерные размеры источника поперек и вдоль магнитного поля,  $R$  — расстояние от источника,  $\vartheta$  — полярный угол сферической системы координат  $R, \vartheta, \varphi$ .

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения полей излучения в области углов  $\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$ ,  $\vartheta_0 = \arctg \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{\eta}}$ :

$$E_{eR} = - \frac{Ag}{c |\varepsilon| \eta^{1/2}} B(\mathbf{k}_s),$$

$$E_{e\vartheta} = - \frac{Ag \eta^{1/2} \sin \vartheta \cos \vartheta}{c |\varepsilon| (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)} B(\mathbf{k}_s),$$

$$E_{e\varphi} = \frac{Ai}{c \eta^{1/2} \sin \vartheta} B(\mathbf{k}_s),$$

$$H_{eR} = \frac{Aig \cos \vartheta}{c |\varepsilon|^{1/2} (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}} B(\mathbf{k}_s),$$

$$H_{e\vartheta} = - \frac{Aig (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}}{c |\varepsilon|^{1/2} \eta \sin \vartheta} B(\mathbf{k}_s),$$

$$H_{e\varphi} = - \frac{A |\varepsilon|^{1/2} \cos \vartheta}{c \sin \vartheta (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}} B(\mathbf{k}_s),$$

(12)

где

$$A = \frac{\exp[ik_0 R (g/|\varepsilon|^{1/2} \eta^{1/2}) (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}]}{R}, \quad (13)$$

$$B(\mathbf{k}) = \omega \rho^f(\mathbf{k}) + \frac{i k_0^2 g}{k_{\perp}^2} [\mathbf{k}_{\perp} J'_{\perp}];$$

$$k_{sx} = \frac{k_0 g \eta^{1/2} \sin \vartheta \cos \varphi}{|\varepsilon|^{1/2} (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}},$$

$$k_{sy} = \frac{k_0 g \eta^{1/2} \sin \vartheta \sin \varphi}{|\varepsilon|^{1/2} (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}}, \quad (14)$$

$$k_{sz} = - \frac{k_0 g |\varepsilon|^{1/2} \cos \vartheta}{\eta^{1/2} (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}}.$$

В областях углов  $\vartheta < \vartheta_0$  и  $\vartheta > \pi - \vartheta_0$  полей излучения необыкновенной волны нет. Диаграмма направленности имеет вид

$$F_s(\vartheta, \varphi) = \frac{g \eta^{1/2}}{8\pi c |\varepsilon|^{1/2}} \frac{|B(\mathbf{k}_s)|^2}{(\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (15)$$

Используя формулу

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (jE^*) dR, \quad (16)$$

найдем потери на излучение необыкновенной волны\*

$$I_e = \frac{1}{4\pi^2 \omega} \operatorname{Im} \int \frac{|B(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}}{|\varepsilon| k_{\perp}^2 - \eta k_z^2 - k_0^2 g^2}. \quad (17)$$

Такое же выражение можно получить, интегрируя (15) по телесному углу. При переходе к квазистатистике потери остаются конечными:

$$I_{es} = \frac{\omega}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int \frac{|\rho^f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}}{|\varepsilon| k_{\perp}^2 - \eta k_z^2}.$$

Диаграммы направленности как таковой в квазистатистике нет, но если назвать предел (14) при  $c \rightarrow \infty$  квазистатистической диаграммой, то

$$F_{es}(\vartheta; \varphi) = \frac{\omega}{8\pi |\varepsilon|} \left[ \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_0)}{\sin \vartheta} \times \int_{-\infty}^0 \left| \rho^f \left( -k_z \frac{\eta}{|\varepsilon|} \cos \varphi; -k_z \frac{\eta}{|\varepsilon|} \sin \varphi; k_z \right) \right|^2 dk_z + \frac{\delta(\vartheta + \vartheta_0 - \pi)}{\sin \vartheta} \times \int_0^{\infty} \left| \rho^f \left( -k_z \frac{\eta}{|\varepsilon|} \cos \varphi; -k_z \frac{\eta}{|\varepsilon|} \sin \varphi; k_z \right) \right|^2 dk_z \right]. \quad (18)$$

Сингулярность диаграммы отражает тот факт, что квазистатистические поля спадают медленнее, чем  $R^{-1}$ . Предельный переход диаграммы

\* Несмотря на сходство дисперсионных уравнений (8) и (10), функция  $B(\mathbf{k})$  в этих случаях существенно различна, что связано с поляризацией нормальных волн.

к выражению (18) в известной степени аналогичен переходу в диапазоне предельно низких частот к магнитной гидродинамике [6]. Сингулярность магнитогидродинамической диаграммы связана с тем, что поля альвеновской волны не спадают с расстоянием. Диаграмма (18) сингулярна лишь по одной из угловых переменных и дает распределение потока энергии по углу  $\varphi$ . Это определяется спаданием полей в квазистатике по закону  $R^{-1/2}$ .

В качестве примера возьмем распределение электрического тока

$$j(R) = \frac{J \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)}{\pi^{3/2} a^2 b}, \quad j^f(k) = J \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 a^2 + k_z^2 b^2}{4}\right), \quad (19)$$

переходящее при  $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$  в произвольно ориентированный элементарный электрический диполь. Такое распределение будем называть диполем конечных размеров. Выбирая систему координат так, что  $J_y = 0$ , получим

$$F_e(\vartheta; \varphi) = \frac{\omega^2 g^3}{8\pi c^3 |\varepsilon|^{3/2} \eta^{1/2}} \left[ \frac{(\eta J_x \sin \vartheta \cos \varphi - |\varepsilon| J_z \cos \vartheta)^2}{(\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{5/2}} + \frac{|\varepsilon|^2 J_x^2 \sin^2 \varphi}{g^2 \sin^2 \vartheta (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)} \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{k_0^2 g^2}{2|\varepsilon|\eta} \frac{a^2 \eta^2 \sin^2 \vartheta + b^2 |\varepsilon|^2 \cos^2 \vartheta}{\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta}\right), \\ I_e = \frac{\pi^{1/2}}{2\sqrt{2} \omega |\varepsilon|^{1/2}} \left[ \frac{|\varepsilon| J_z^2 + (\eta/2) J_x^2}{(a^2 \eta + b^2 |\varepsilon|)^{3/2}} + \frac{k_0^2 g^2}{2|\varepsilon|} \frac{J_x^2}{(a^2 \eta + b^2 |\varepsilon|)^{1/2}} \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{-k_0^2 a^2 g^2}{2|\varepsilon|}\right).$$

В отличие от одноосного кристалла [6] и изотропной среды диполь может излучать вдоль своей оси. На рис. 1 изображены зависимости  $F_e(\vartheta; \varphi = 0)$  для продольной (а) и поперечной (б) ориентации диполя относительно магнитного поля при следующих параметрах:  $|\varepsilon|/\eta = 0,1$ ;  $a = b$ ;  $k_0^2 a^2 g^2 / 2|\varepsilon|\eta = 1$ . Дипольный момент в случае (а) взят в три раза больше, чем в случае (б). Для источника достаточно малых размеров, когда

$$\frac{k_0^2 a^2 g^2}{|\varepsilon|} \ll 1, \quad \frac{k_0^2 b^2 g^2}{\eta} \ll 1, \quad (20)$$

потери на излучение не зависят от  $k_0$  и  $g$  —

$$I_e = \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/2} \omega |\varepsilon|^{1/2}} \frac{|\varepsilon| J_z^2 + (\eta/2) J_x^2}{(\eta a^2 + |\varepsilon| b^2)^{3/2}}$$

— и могут быть верно определены в квазистатическом приближении (11). Следовательно, (20) нужно рассматривать как условия применимости квазистатики для вычисления излучаемой энергии. Диаграмма направленности при этом сосредоточена вблизи биконической поверхности, определяемой углом  $\vartheta_0$ , и имеет  $\delta$ -образный вид. Если нас

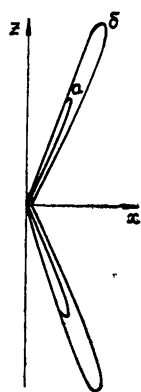


Рис. 1.

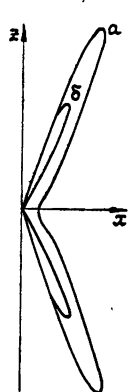


Рис. 2.

не интересует отклонение максимума диаграммы от  $\vartheta_0$  на малый угол  $\Delta\vartheta_1$  и ее малая угловая ширина по  $\vartheta$ ,  $\Delta\vartheta_2$  удовлетворяет условию

$$\Delta\vartheta_1 \sim \Delta\vartheta_2 \sim \frac{k_0^2 g^2 \tilde{L}^2}{4 |\varepsilon| \eta}$$

( $\tilde{L} = \left( \frac{\eta a^2 + |\varepsilon| b^2}{\eta + |\varepsilon|} \right)^{1/2}$  — эффективный размер источника), то можно пользоваться квазистатической диаграммой (18):

$$F_{es}(\vartheta; \varphi) = \frac{1}{8 \sqrt{2\pi} |\varepsilon| \omega} \frac{(\eta^{1/2} J_x \cos \varphi - |\varepsilon|^{1/2} J_z)^2}{(\eta a^2 + |\varepsilon| b^2)^{3/2}} \left[ \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_0)}{\sin \vartheta} + \frac{\delta(\vartheta + \vartheta_0 - \pi)}{\sin \vartheta} \right].$$

В случае возбуждения волны магнитными токами поля необыкновенной волны в дальней зоне, диаграмма направленности и потери на излучение будут определяться формулами (12), (15) и (17), где

$$B(\mathbf{k}) = ik_0 g \left[ j_{mz}'(\mathbf{k}) - \frac{k_z (k j_{m\perp}')}{k_{\perp}^2} \right], \quad (21)$$

а  $k_s$  — (14). Для магнитного диполя конечных размеров с

$$j_m = J_m \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)}{\pi^{3/2} a^2 b}, \quad j_m'(\mathbf{k}) = J_m \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 a^2 + k_z^2 b^2}{4}\right), \quad (22)$$

выбрав систему координат так, что  $J_{my} = 0$ , получим

$$F_e(\vartheta; \varphi) = \frac{\omega^2 g^3 (J_{mx} |\varepsilon| \cos \vartheta \cos \varphi + J_{mz} \sin \vartheta)^2}{8\pi c^3 |\varepsilon|^{1/2} \eta^{3/2} \sin^2 \vartheta (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{3/2}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{k_0^2 g^2}{2 |\varepsilon| \eta} \frac{a^2 \eta^2 \sin^2 \vartheta + b^2 |\varepsilon|^2 \cos^2 \vartheta}{\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta}\right); \quad (23)$$

$$I_e = \frac{\pi^{1/2} \omega g^2 \exp(k_0^2 g^2 b^2 / \eta)}{2^{3/2} |\varepsilon|^{1/2} c^2 (\eta a^2 + |\varepsilon| b^2)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ J_{mz}^2 + \frac{|\varepsilon|}{2\eta} J_{mx}^2 \left[ 1 - k_0 g \sqrt{\frac{\eta a^2 + |\varepsilon| b^2}{2 |\varepsilon| \eta}} \left( 1 - \Phi\left( k_0 g \sqrt{\frac{\eta a^2 + |\varepsilon| b^2}{2 |\varepsilon| \eta}} \right) \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

где  $\Phi(\xi)$  — интеграл вероятности [8]. При условиях (20) выражение (24) упрощается:

$$I_e = \frac{\pi^{1/2} \omega g^2 (\eta J_{mz}^2 + (|\varepsilon|/2) J_{mx}^2)}{2^{3/2} c^2 \eta |\varepsilon|^{1/2} (\eta a^2 + |\varepsilon| b^2)^{1/2}}.$$

Зависимость (23) при  $\varphi = 0$  в двух простейших случаях: а)  $J_{mx} = 0$  и б)  $J_{mz} = 0$  изображена на рис. 2 при  $|\epsilon|/\eta = 0,1$ ,  $a=b$ ,  $k_0^2 g^2 a^2/2|\epsilon| = 1$ . Момент поперечного диполя взят в три раза больше, чем момент продольного. Видно, что при  $\varphi = 0$  диаграмма продольного магнитного диполя похожа на диаграмму поперечного электрического и наоборот. При уменьшении размеров источника диаграмма электрического диполя сильнее вытягивается вблизи биконической поверхности, определяемой резонансом. Излучение магнитного тока также носит резонансный характер, и потери на излучение неограниченно возрастают с уменьшением размеров источника.

4. Показатель преломления обыкновенной волны конечен по всем направлениям, и излучение этой волны не обладает резонансными свойствами. Используя формулу (16) и дисперсионное уравнение (9), потери на излучение обыкновенной волны можно записать в виде

$$I_0 = \frac{1}{4\pi^2 \omega k_0^2 g} \text{Im} \int \frac{|G(k)|^2 dk}{k^2 k_z^2 + k_\perp^2 k_0^2 (g^2/\eta) - k_0^4 g^2}, \quad (25)$$

где

$$k^2 = k_\perp^2 + k_z^2, \quad G(k) = k_z k^2 \left( \frac{k_\perp}{k_\perp} j_{\perp 1}^f \right) + ik_z k_0^2 g \left[ \frac{k_\perp}{k_\perp} j_{\perp 1}^f \right] - k_\perp k_0^2 \frac{g^2}{\eta} j_z^f.$$

Для электрического диполя (19), размеры которого меньше длины волны,

$$k_0^2 \eta a^2 \ll 1, \quad k_0^2 g b^2 \ll 1, \quad (26)$$

получим

$$I_0 = \frac{\omega^2 g^3}{4c^3 \eta^{5/2}} \left\{ \frac{J_x^2}{8} \left[ \frac{\eta^{1/2}}{g^{1/2}} \left( 15 - \frac{5\eta}{g} + \frac{5\eta^2}{g^2} + \frac{\eta^3}{g^3} \right) - \left( 15 + \frac{2\eta}{g} - \frac{\eta^2}{g^2} \right) \arctg \frac{\eta^{1/2}}{g^{1/2}} \right] + \right. \\ \left. + J_z^2 \left[ \frac{\eta^{1/2}}{g^{1/2}} \left( -3 + \frac{\eta}{g} \right) + \left( 3 + \frac{\eta^2}{g^2} \right) \arctg \frac{\eta^{1/2}}{g^{1/2}} \right] \right\}.$$

Это выражение может быть упрощено, если плазменная и гирочастота электронов сильно различаются:

$$1) \omega_H \ll \omega_0, \quad \eta \ll g -$$

$$I_0 = \frac{5}{42} \frac{\omega^2 \eta}{c^3 g^{1/2}} J_x^2 + \frac{2}{5} \frac{\omega^2 g^{1/2}}{c^3} J_z^2;$$

$$2) \omega_0 \ll \omega_H, \quad \eta \approx g \approx 1 -$$

$$I_0 = \frac{\omega^2}{4c^3} \left[ \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) J_x^2 - (\pi - 2) J_z^2 \right].$$

Для магнитных токов излучаемая энергия определяется выражением (25), где

$$G(k) = k_0 g \left\{ k_z \left[ k_\perp j_{mz}^f - k_z \left( \frac{k_\perp}{k_\perp} j_{m\perp}^f \right) \right] - ik_0^2 g \left[ \frac{k_\perp}{k_\perp} j_{m\perp}^f \right] \right\}.$$

В случае магнитного диполя (22) при условиях (26) найдем

$$I_0 = \frac{\omega^2 g^3}{4c^3 \eta^{3/2}} \left\{ J_{mx}^2 \left[ \sqrt{\frac{\eta}{g}} \left( -1 + \frac{\eta}{3g} \right) + \left( 1 + \frac{\eta^2}{g^2} \right) \arctg \sqrt{\frac{\eta}{g}} \right] + \right. \\ \left. + J_{mz}^2 \left[ 5 \sqrt{\frac{\eta}{g}} \left( 1 - \frac{\eta}{3g} \right) + \left( -5 + \frac{\eta^2}{g^2} \right) \arctg \sqrt{\frac{\eta}{g}} \right] \right\}.$$

В двух предельных случаях

$$1) \omega_H \ll \omega_0, \quad \eta \ll g -$$

$$I_0 = \frac{3}{10} \frac{\omega^2 \eta g^{1/2}}{c^3} J_{mx}^2 + \frac{2}{21} \frac{\omega^2 \eta^2}{c^3 g^{1/2}} J_{mz}^2,$$

$$2) \omega_0 \ll \omega_H, \quad \eta \approx g \approx 1 -$$

$$I_0 = \frac{\omega^2}{4c^3} \left[ \frac{\pi}{4} J_{mx}^2 + \left( \frac{10}{3} - \pi \right) J_{mz}^2 \right].$$

5. В качестве еще одного примера, представляющего интерес в связи с работами [2-5], рассмотрим рассеяние обыкновенной волны на неоднородности. Известно, что в первом приближении теории возмущений неоднородность концентрации можно рассматривать как источник

$$j_{\text{эфф}} = -\frac{i\omega}{4\pi} \frac{\Delta N}{N} (1 - \hat{\varepsilon}) E_0,$$

где  $N$  — средняя концентрация частиц,  $E_0$  — невозмущенное электрическое поле [9]. Считая, что волновой вектор падающей обыкновенной волны образует угол  $\chi$  с магнитным полем и лежит в плоскости  $xz$ , получим

$$E_0 = E_0 \left( \frac{in_0^2(\chi)}{g} x_0 + y_0 - i \frac{g}{\eta} \operatorname{tg} \chi z_0 \right) \exp(ik_{z_0} z + ik_{x_0} x),$$

где  $n_0^2(\chi)$  — показатель преломления обыкновенной волны:

$$n_0^2(\chi) = g \frac{(g^2 \sin^4 \chi + 4\eta^2 \cos^2 \chi)^{1/2} - g \sin^2 \chi}{2\eta \cos^2 \chi},$$

$$k_{z_0} = k_0 n_0(\chi) \cos \chi, \quad k_{x_0} = k_0 n_0(\chi) \sin \chi, \quad x_0, y_0, z_0 -$$

единичные векторы декартовой системы координат.

Неоднородность электронной концентрации зададим следующим образом:

$$\frac{\Delta N}{N} = \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0 \exp \left( -\frac{r^2}{l^2} - \frac{z^2}{L^2} \right).$$

При условиях (7) и  $\omega_H \ll \omega_0$  имеет место

$$g \approx \frac{\omega_H}{\omega_0} = u^{1/2}, \quad \eta = \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} = u, \quad |\varepsilon| \ll \eta \ll g \ll 1.$$

С учетом этого

$$j'_{\text{эфф}} = -\frac{i\omega\pi^{1/2}}{4} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0 E_0 l^2 L \left( \frac{in_0^2(\chi)}{g} x_0 + y_0 - i \frac{g}{\eta} \operatorname{tg} \chi z_0 \right) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{(k_x - k_{x_0})^2 l^2 + k_y^2 l^2 + (k_z - k_{z_0})^2 L^2}{4} \right]. \quad (27)$$

Рассмотрим излучение необыкновенной волны таким источником.

При

$$k_0^2 \eta l^2 \ll 1 \quad (28)$$



можно положить  $k_{x_0} = 0$ . Условие (28) всегда выполнено, если есть заметное рассеяние в необыкновенную волну. Кроме того, будем пренебрегать вторым слагаемым в  $B(\mathbf{k})$  (см. (13)), учет которого при вычислении излучаемой энергии дает поправки порядка  $|\varepsilon|^2/g^2$ . Тогда, подставляя (27) в (15), найдем

$$F_e(\vartheta; \varphi) = \frac{\omega^4 g^3 \gamma^{3/2}}{128c^3 |\varepsilon|^{3/2}} \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_0^2 E_0^2 l^4 L^2 \times$$

$$\times \frac{\left| \frac{in_0^2(\chi)}{g} \cos \varphi + \sin \varphi + i \frac{g|\varepsilon| \operatorname{tg} \chi}{\eta^2 \operatorname{tg} \vartheta} \right|^2 \sin^2 \vartheta}{(\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{5/2}} \exp \left\{ -\frac{k_0^2 g^2}{2|\varepsilon| \eta} \times \right.$$

$$\times \left. \left[ l^2 \eta^2 \sin^2 \vartheta + L^2 |\varepsilon|^2 \cos^2 \vartheta \left[ 1 + \frac{k_{z_0} \eta^{1/2} (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{1/2}}{k_0 |\varepsilon|^{1/2} g \cos \vartheta} \right] \right] \right\} \times$$

$$\times (\eta \sin^2 \vartheta - |\varepsilon| \cos^2 \vartheta)^{-1}.$$

При достаточно большом  $L$  диаграмма сосредоточена вблизи конуса, определяемого углом  $\vartheta_1$ :

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{k_0 g |\varepsilon|^{1/2}}{k_{z_0} \eta}.$$

Угловая ширина диаграммы по  $\vartheta$  в этом случае равна

$$\Delta \vartheta = \frac{4 |\varepsilon|^{1/2} k_0 g}{\eta L^2} \left( k_{z_0}^2 + \frac{k_0^2 g |\varepsilon|}{\eta^2} \right)^{-3/2}.$$

Из выражения для диаграммы можно убедиться, что при условии

$$\frac{k_0^2 g^2 l^2}{|\varepsilon|} \gg 1 \tag{29}$$

рассеяние в необыкновенную волну исчезающе мало.

Полные потери на излучение необыкновенной волны запишутся следующим образом:

$$I_e = \frac{\pi^{3/2} \omega \eta (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2 + |\varepsilon| k_{z_0}^2 L^4)}{32 \sqrt{2} |\varepsilon|^{1/2} (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^{5/2}} \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_0^2 E_0^2 l^4 L^2 \times$$

$$\times \exp \left[ -\frac{k_0^2 g^2 l^2}{2|\varepsilon|} - \frac{k_{z_0}^2 l^2 L^2 \eta}{2(\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{n_0^4(\chi)}{g^2} + 1 \right] \times \right.$$

$$\times \left. \left[ 1 + \frac{k_0^2 g^2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^2}{\eta |\varepsilon| (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2 + |\varepsilon| k_{z_0}^2 L^4)} \right] + \frac{g^2 |\varepsilon|}{\eta^3} \operatorname{tg}^2 \chi \right\}. \tag{30}$$

Потери на излучение обыкновенной волны источником (27) при условии (28) имеют вид

$$1) k_0^2 g L^2 \ll 1 -$$

$$I_0 = \frac{\pi \omega^4 \eta}{32c^3 g^{1/2}} \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_0^2 E_0^2 l^4 L^2 \left[ \frac{5}{21} \left( 1 + \frac{n_0^4(\chi)}{g^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{n_0^2(\chi)}{g} + \frac{4}{5} \frac{g^3}{\eta^3} \operatorname{tg}^2 \chi \right],$$

$$\begin{aligned}
 & 2) k_0^2 g L^2 \gg 1 - \\
 I_0 = & \frac{\pi^{3/2} \omega^3 \eta}{32 \sqrt{2} c^2 g} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 E_0^2 l^4 L^2 \left\{ \frac{n_0^2(\chi) \cos^2 \chi}{2g} \times \right. \\
 & \times \left[ \left( \frac{n_0^4(\chi) \cos^2(\chi)}{g^2} + 1 \right)^2 + \frac{n_0^4(\chi)}{g^2} (1 + \cos^2 \chi)^2 \right] + \frac{g^3}{\eta^3} \operatorname{tg}^2 \chi \times \\
 & \left. \times \left( 1 - \frac{n_0^4(\chi)}{g^2} \cos^4 \chi \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Из сравнения этих выражений с (30) видно, что рассеяние в необыкновенную волну значительно больше, чем в обыкновенную, за исключением случая (29), когда выражение (30) экспоненциально мало. Отметим, что формула (30) справедлива при произвольном угле  $\chi$  и практически произвольных (см. (28)) размерах неоднородности (28).

Получим теперь условия применимости квазистатического приближения. Если пользоваться для необыкновенной волны дисперсионным уравнением (11), то вместо (30) получим

$$\begin{aligned}
 I_{es} = & \frac{\pi^{3/2} \omega \eta (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2 + |\varepsilon| k_{z_0}^2 L^4)}{32 \sqrt{2} |\varepsilon|^{1/2} (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^{5/2}} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 E_0^2 l^4 L^2 \times \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n_0^2(\chi)}{g} + 1 \right) + \frac{g^2 |\varepsilon|}{\eta^3} \operatorname{tg}^2 \chi \right] \exp \left[ - \frac{k_{z_0}^2 l^2 L^2 \eta}{2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)} \right].
 \end{aligned} \quad (31)$$

Из сравнения с более точным выражением (30) найдем условия применимости (31):

$$\begin{aligned}
 \frac{k_0^2 g^2 l^2}{|\varepsilon|} \ll 1, \quad \frac{k_0^2 g^2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)}{|\varepsilon| \eta (1 + k_{z_0}^2 L^2) f(\chi)} \ll 1, \\
 f(\chi) = 1 + \frac{2g^4 |\varepsilon| \operatorname{tg}^2 \chi}{\eta^3 (g^2 + n_0^4(\chi))}.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Если исключить случай поперечного падения ( $\chi = \pi/2$ ), при котором остается лишь первое из неравенств (32), то условия применимости квазистатического описания необыкновенной волны запишутся в простом виде:

$$\frac{k_0^2 g^2 l^2}{|\varepsilon|} \ll 1, \quad k_0^2 L^2 \ll 1.$$

Отсюда следует вывод, что приближение (11) непригодно при рассмотрении рассеяния обыкновенной волны на сильно вытянутых неоднородностях. Покажем, что несмотря на это квазистатическое приближение дает правильное выражение для интегрального поглощения обыкновенной волны при отражении от ионосферы. Полагая в (30) и (31)  $L \rightarrow \infty$ ,  $\chi = 0$ , получим следующие выражения для потерь на единицу длины:

$$W_e = \frac{\pi k_0^2 l^4 \omega g^2}{32 |\varepsilon|^2} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 E_0^2 \exp \left( - \frac{k_0^2 g^2 l^2}{2 |\varepsilon|} \right); \quad (33)$$

$$W_{es} = \frac{\pi k_0^2 l^4 \omega g \eta}{32 |\varepsilon|^2} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 E_0^2 \exp \left( - \frac{k_0^2 g \eta l^2}{2 |\varepsilon|} \right). \quad (34)$$

Можно оценить диссипируемую энергию обыкновенной волны в ионосфере, интегрируя эти выражения по области существования необыкновенной волны. Здесь и всюду в дальнейшем будем отсчитывать высоту от уровня  $\varepsilon = 0$  и полагать выполненным условие

$$k_0^2 l^2 \ll 1. \quad (35)$$

Тогда  $|\varepsilon| = \mu z$ ,  $\eta = u - \mu z$ , и, используя квазистатическое приближение (34), найдем

$$p = 2 \int_0^{u/\mu} W_{es} dz = \pi l^2 \frac{\omega}{8\mu} E_0^2 \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2. \quad (36)$$

Как и следовало ожидать, (36) совпадает с формулой (31) работы [1]. Нетрудно убедиться, что интегрирование более строгого выражения (33) приводит к тому же результату\*.

При рассмотрении рассеяния на одной неоднородности амплитуда плоской волны не меняется. В случае рассеяния обыкновенной волны на случайных неоднородностях поглощение в едином объеме определяется делением (30) на эффективный объем одной неоднородности:

$$V_{эфф} = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} l^3 L.$$

Используя это, вычислим пространственный декремент для квадрата амплитуды падающей волны в простейшем случае  $\chi = 0$ :

$$x_e = \frac{\pi k_0 l^2 L [k_0^2 g^2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^2 + \eta |\varepsilon| (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2 + k_0^2 |\varepsilon| g L^4)]}{4 |\varepsilon|^{3/2} g^{1/2} (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^{5/2}} \times \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 \exp \left[ - \frac{k_0^2 g^2 l^2}{2 |\varepsilon|} - \frac{k_0^2 g \eta l^2 L^2}{2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)} \right]. \quad (37)$$

В квазистатическом приближении из формулы (31) получим

$$x_{es} = \frac{\pi k_0 \eta l^2 L (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2 + |\varepsilon| k_0^2 g L^4)}{4 |\varepsilon|^{1/2} g^{1/2} (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)^{5/2}} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 \exp \left[ - \frac{k_0^2 g \eta l^2 L^2}{2 (\eta l^2 + |\varepsilon| L^2)} \right]. \quad (38)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1) Для сильно вытянутых вдоль магнитного поля неоднородностей ( $L \rightarrow \infty$ ) имеем

$$x_e = \frac{\pi k_0^3 l^2 g^{3/2}}{4 |\varepsilon|^2} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 \exp \left( - \frac{k_0^2 g^2 l^2}{2 |\varepsilon|} \right); \quad (39)$$

$$x_{es} = \frac{\pi k_0^3 l^2 \eta g^{1/2}}{4 |\varepsilon|^2} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2 \exp \left( - \frac{k_0^2 l^2 g \eta}{2 |\varepsilon|} \right). \quad (40)$$

\* Условия (7) применимости полученных формул выполнены не во всей области интегрирования, и нужно использовать дисперсионное уравнение (6). Однако при достаточно малом поперечном размере неоднородности (35) основной вклад в поглощение дает область высот, где условия (7) выполнены, поэтому использование (8) практически не меняет результата. Это обстоятельство использовалось в работе [5].

Затухание обыкновенной волны при отражении от ионосферы определяется интегрированием (39) по области существования необыкновенной волны:

$$\Gamma = 2 \int_0^{u/\mu} x_e dz = \frac{\pi k_0}{\mu} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2. \quad (41)$$

Интегрирование квазистатического выражения (40) дает такой же результат (см. также формулу (30) работы [10]).

На рис. 3 изображены зависимости декрементов (37) и (38) от высоты в ионосферных условиях при  $\omega = 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $\mu = 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ ,  $u = 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $(\Delta N/N)_0 = 10^{-2}$ . Поглощение максимально на уровне  $z = (k_0 l)^2 u / 4\mu = 10 \text{ м}$ , квазистатическое приближение (38) дает максимум при  $z = (k_0 l)^2 u^{3/2} / 4\mu = 2 \text{ м}$ . Так же зависят от высоты величины, определяемые формулами (33) и (34). Практически всюду в квазистатическом приближении получается большая ошибка при вычислении локального поглощения, но для интегрального поглощения получается правильный результат.

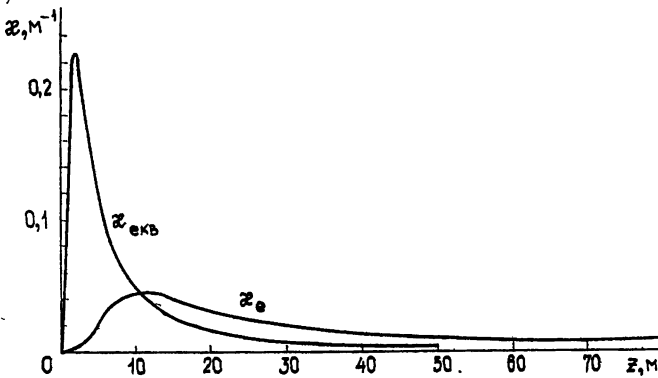


Рис. 3.

2) В случае изотропных неоднородностей ( $l = L$ ) при условии

$$(k_0 l)^2 \ll \frac{\eta |\varepsilon|}{u^2} \quad (42)$$

из (37) и (38) найдем

$$x_e \approx x_{es} = \frac{\pi k_0 \eta}{4 |\varepsilon|^{1/2} u^{7/4}} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2. \quad (43)$$

Довольно очевидно, что применимость квазистатического выражения для мелкомасштабных неоднородностей (43) не ограничивается условиями (7), поэтому полное поглощение обыкновенной волны при отражении от ионосферы будем подсчитывать интегрированием (43) по области существования необыкновенной волны:

$$\Gamma = 2 \int_0^{u/\mu} x_e dz = \frac{2\pi k_0}{3\mu} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_0^2.$$

Эта формула незначительно отличается от (41). Ясно, что рассеяние на вытянутых неоднородностях в ионосфере может быть больше, чем на мелкомасштабных лишь за счет больших флуктуаций электронной плотности.

Автор благодарен Н. Г. Денисову за руководство работой, а также В. П. Докучаеву, Ю. А. Рыжову и В. В. Тамойкину за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1967.
2. E. H. Allen, G. D. Thome and P. B. Rao, *Radio Sci.*, 9, № 11, 905 (1974).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).
4. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, *ЖЭТФ*, 69, вып. 1 (7), 176 (1975).
5. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 9, 1273 (1975).
6. Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 17 (1975).
7. А. А. Андронов, Ю. В. Чугунов, *УФН*, 116, вып. 1, 79 (1975).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.
9. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 393 (1960).
10. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, *Физика плазмы*, 2, 113 (1976).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию  
10 февраля 1976 г.

RADIATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN PLASMA AT THE FREQUENCIES  
LOWFR THAN THE UPPER HYBRID FREQUENCY

*N. S. Belluystin*

Expressions are obtained for the radiation fields, radiation patterns and losses of the arbitrary distribution of external currents at the frequencies close to the upper hybrid. The results are compared with the known formulas of the „uniaxial crystal“ approximation. The transition to the quasi-static approximation is considered and the conditions of its application are discussed. The electric and magnetic dipoles of finite dimension are taken as an example. The problem of scattering of an ordinary wave into the extra-ordinary one by ionospheric irregularities has been considered. Formulas are obtained, determining the scattering by the irregularities strongly extended along the magnetic field and by small scale isotropic ones.