ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 7 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 533 951

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ СОЛИТОНОВ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

Е. Н. Пелиновский, С. Х. Шаврацкий

Исследуется зависимость энергии ионно-звукового солитона произвольной амплитуды от его параметров. Показано, что уравнением Кортевега—де-Вриза для расчета распространения солитона в холодной плавнонеоднородной плазме с поглощением можно пользоваться при любых амплитудах солитона. На основании качественного анализа высказано предположение, что солитон в плазме с отличной от нуля температурой ионов будет разрушаться при амплитудах, меньших критической.

Как известно, ионно-звуковые волны малой, но конечной амплитуды могут быть описаны уравнением Кортевега—де-Вриза [1]. На его основе исследованы различные нестационарные процессы, в том числе затухание и усиление солитонов, распространение в плавнонеоднородной среде [2–5]. При этом существенно использовалась малость амплитуды солитона. Чтобы определить, в какой мере полученные результаты справедливы для ионно-звуковых солитонов произвольной амплитуды, необходимо исследовать зависимость усредненных характеристик (инвариантов) волны от амплитуды, поскольку уравнения для них мы зачастую знаем (в частности, уравнение энергетического баланса, определяющее изменение параметров волны при ее распространении в неоднородных и диссипативных средах). Это тем более необходимо сделать, так как сейчас уже известны примеры, когда инварианты (допустим, энергия) немонотонно зависят от амплитуды. Такая ситуация имеет место для длинных волн на поверхности воды [6] и периодической последовательности вихрей в длинном переходе Джозефсона [7]. Уединенные волны большой амплитуды в таких системах будут разрушаться при сколь угодно плавном изменении параметров среды или малом поглощении. В настоящей заметке мы покажем, что энергия ионно-звукового солитона хорошо описывается с помощью уравнения Кортевега—де-Вриза при любой амплитуде волны вплоть до критической.

Предполагая, что температура ионов равна нулю, рассмотрим систему уравнений для ионно-звуковых волн в неизотермической плазме [1, 8]:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{e}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n v)=0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+4\pi e\left[n-n_0\exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right)\right]=0. \qquad (1)$$

Здесь v и n — скорость и концентрация ионов, φ — потенциал электрического поля, e и M — заряд и масса иона, T — температура электронов в энергетических единицах.

Из (1) нетрудно получить уравнение, описывающее уединенные стационарные волны [8],

$$(\Phi_\xi)^2 = 2D^{-2}\left[2V\left(\sqrt{1-\Phi/V}-1\right)+e^{\Phi}-1\right],$$
$$V=\frac{1}{4}\frac{(e^A-1)^2}{e^A-1-A}, \tag{2}$$

где $\xi = x - ut$, u — скорость солитона, $\Phi=\dfrac{e\varphi}{T}$, $V=\dfrac{Mu^2}{2T}$, D — дебаевский радиус, $A=\Phi_{\max}$ — амплитуда солитона.

Как известно, амплитуда солитона не может превышать некоторого критического значения $A_*=1{,}25$, так как при большей величине поля ионы не смогут преодолеть потенциальный барьер, движение станет многопотоковым, что приведет к нарушению условий применимости системы (1).

Определим адиабатический инвариант системы (1). Для этого с помощью замены $v=\psi_x$ запишем ее в виде уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial n}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \varphi_x}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \psi_t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \psi_x}-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0, \tag{3}$$
$$L=\frac{1}{8\pi}\varphi_x^2-ne\varphi+Tn_0\exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right)-Mn\left(\psi_t+\frac{1}{2}\psi_x^2\right).$$

Используя вариационный принцип Гамильтона в усредненной форме, получим уравнение для огибающих периодической квазистационарной волны (ср. [9])

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial \omega}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\langle L\rangle}{\partial k}=0. \tag{4}$$

Величина $I=\dfrac{\partial\langle L\rangle}{\partial\omega}$ является адиабатическим инвариантом. Для солитона, устремляя $k\to 0$, получим

$$I=\sqrt{TM}\int_{-\infty}^{\infty} v(n-n_0)\,dx, \tag{5}$$

что совпадает с полной энергией солитона. С помощью (5) выразим I через амплитуду солитона A:

$$I=\frac{T^{3/2}n_0^{1/2}}{e\sqrt{\pi}}\,Y,\quad Y=V^{1/2}\int_0^A\frac{(1-\Phi/V)^{1/2}+(1-\Phi/V)^{-1/2}-2}{\{2V[(1-\Phi/V)^{1/2}-1]+e^{\Phi}-1\}^{1/2}}\,d\Phi, \tag{6}$$

где V определено соотношением (2).

Зависимость $Y(A)$, вычисленная по формуле (6) на ЭВМ, приведена на рис. 1 (кривая *1*). На этом же рисунке (кривая *2*) для сравнения нанесена зависимость $Y(A)$, полученная из уравнения Кортевега—де-Вриза:

$$Y(A) = \frac{4}{\sqrt{6}} A^{3/2}. \qquad (7)$$

Как показывает сравнение, эти зависимости на всем протяжении отличаются не более чем на 3%. Таким образом, уравнение Кортевега—де-Вриза довольно точно описывает энергию уединенной волны при любых амплитудах*. Это обстоятельство позволяет расширить применимость полученных ранее формул для амплитуды солитона при плавном изменении T и n_0 и малых соударениях с нейтральными частицами [2, 3] на случай любых амплитуд солитона**.

Остановимся более детально на поведении энергии солитона $I(A)$ при амплитудах, близких к критической. Здесь в отличие от волн на воде [6] функция $I(A)$ монотонна при любых A. Однако при больших амплитудах энергия основной части солитона падает с ростом амплитуды, а в области около его вершины — растет. Качественно это можно понять из рис. 2, на котором приведены профили потенциала в волне при различных амплитудах. Действительно, если разбить область интегрирования $[0; A]$ в (6) на две, например, таким образом — $[0; 0{,}99A]$ и $[0{,}99A; A]$, то интеграл по первой области уменьшается с ростом амплитуды, а по второй растет, причем его рост превышает уменьшение первого интеграла.

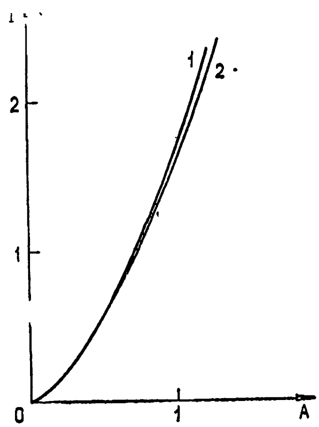

Рис. 1.

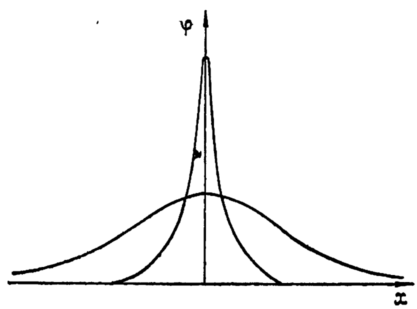

Рис. 2.

На основании сказанного можно сделать предположение о поведении инварианта $I(A)$ в плазме с отличной от нуля температурой ионов T_i. Существующий разброс ионов по скоростям приведет к сглаживанию вершины солитона [11] (при $T_i = 0$, $A = A_*$ на вершине солитона концентрация ионов обращается в бесконечность). В результате определяющим становится интеграл по основной «массе» солитона, при этом функция $I(A)$ имеет падающий участок, на котором солитон неустойчив, что соответствует разрушению солитона при амплитудах, меньших A_* (конечно в пределах падающего участка). Это предположение нуждается, однако, в дополнительной проверке.

* Хотя уравнение Кортевега—де-Вриза и пригодно для описания солитона большой амплитуды, его вряд ли можно использовать для описания взаимодействия таких солитонов.

** Отметим, что уравнение для энергии солитона любой амплитуды при учете столкновения ионов с нейтралами было получено в [10], однако конкретных расчетов при этом не было сделано.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 3, 167 (1964).
2. E. Ott and R. N. Sudan, Phys. Fluids, 12, № 11, 2388 (1969); 13, № 6, 1432 (1970).
3. Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1281 (1971).
4. Л. А. Островский, В. И. Петрухина, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 69, № 6, (12), 2051 (1975).
5. K. Nishikawa and R. K. Kaw, Phys. Lett., 50A, № 6, 455 (1975).
6. M. S. Longuet-Higgins, J. P. Fenton, Proc. Roy. Soc. Lond., A340, 471 (1974).
7. Е. Н. Пелиновский, С. Х. Шаврацкий, ПМТФ, № 5, 57 (1974).
8. Р. З. Сагдеев, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
9. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, 36, № 1, 71 (1972).
10. E. Ott, Phys. Fluids, 14, № 3, 748 (1971).
11. С. Г. Алиханов, В. Г. Белан, Г. Н. Кичигин, П. З. Чеботаев, ЖЭТФ, 60, вып. 3, 982 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
6 июля 1976 г.

THE NONSTATIONARY THEORY OF ION-SOUND LARGE-AMPLITUDE SOLITONS

E. N. Pelinovskii, S. Kh. Shavratskii

The dependence of the ion-sound arbitrary-amplitude soliton energy on its parameters is investigated. It is shown that the Corteveg—de-Vries equation to calculate soliton propagation in a cold smoothly-inhomogeneous plasma with absorption may be used for any soliton amplitudes. Based upon the qualitative analysis the assumption is made that the soliton in plasma with the ion temperature different from zero will be destructed at the amplitudes smaller than the critical one.