4. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev., 183, № 2, 457 (1969).
5. Методы расчета оптических квантовых генераторов (под ред. Б. И. Степанова), Минск, 1966.
6 А. М. Леонтович, А. М. Можаровский, Письма в ЖЭТФ, 9, вып. 4, 347 (1974).
7. K. A. Gorschkov, L. A. Ostrovsky and E. N. Pelinovsky, Proc. IEEE, 62, № 11, 1511 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 16 февраля 1976 г.

УДК 538.56 : 519.25

СТЕПЕННЫЕ СПЕКТРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМЫЕ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА ПРИ ОТЛИЧНОМ ОТ НУЛЯ ПОТОКЕ

А. В. Кац, В. М. Конторович

В работе найдены стационарные распределения плотности излучения, обобщающие равновесные на случай, когда имеется создаваемый источником постоянный поток фотонов по спектру, а взаимодействие с термостатом представляет собой томсоновское рассеяние на свободных равновесных электронах, описываемое кинетическим уравнением Компанейца [1, 2]:

$$\dot{N} = -\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial q}{\partial \nu}, \quad q = -\rho c\sigma \frac{h\nu^4}{mc^2}\left(\frac{T}{h}\frac{\partial N}{\partial \nu} + N^2 + N\right). \tag{1}$$

Здесь $N(\nu)$ — функция распределения, а q — поток фотонов в пространстве частот ν, T и ρ — температура и концентрация электронов, $\sigma = 8\pi/3\, r_e^2$ — томсоновское сечение.

Исследуем стационарное решение (1) при отличном от нуля постоянном потоке в сторону малых частот ($q < 0$), что предполагает наличие источника при $\nu \to \infty$. Стационарное решение в области между источником и стоком ($\nu \to 0$), соответствующей инерционному интервалу в теории турбулентности, не зависит от конкретной структуры источника (стока) и параметризуется потоком квантов, их химпотенциалом и температурой электронов. Влияние потока определяется соотношением между ним и температурой. В такой постановке задача представляет интерес для радиоастрономии* и теории турбулентности**. При малых потоках $h\bar{\nu}/T \equiv \zeta \ll 1$, где $\bar{\nu}$ — характерная частота, определяемая потоком согласно $\bar{\nu}^4 \equiv -qmc^2/\rho c\sigma h$, существенно искажаются только «хвосты» планковского распределения:

$$N(\nu) = \begin{cases} \dfrac{T}{h\nu} + \left(\dfrac{\bar{\nu}}{\nu}\right)^2, & \dfrac{h\nu}{T} \ll 1 \\[2ex] (e^x - 1)^{-1} + \displaystyle\int_{\zeta^2}^{x} dy \left(\frac{\zeta}{y}\right)^4 \frac{\mathrm{sh}^2\, y/2}{\mathrm{sh}^2\, x/2}, & x \equiv \dfrac{h\nu}{T} \gtrsim 1 \end{cases}. \tag{2}$$

В спектре излучения $I(\nu) \sim h\nu^3 N(\nu) c \sim \nu^{-\alpha}$ возникают степенные участки с индексом $\alpha = -1$ [3] при $x \lesssim \zeta^2$ и $\alpha = 1$ при $x > \ln \zeta^{-4}$, между которыми согласно (2) распределение близко к планковскому (см. рис. 1). При $x \gg 1$ $N \approx e^{-x} + \left(\dfrac{\zeta}{x}\right)^4$. С ростом потока, как видно, область планковского распределения сужается и при больших потоках $h\bar{\nu} \gg T$ степенные асимптотики смыкаются, формируя распределение

---

* Рассеяние свободными электронами способно существенно влиять на спектр мощных источников космического радиоизлучения [3, 4] и, по-видимому, может быть ответственно за образование степенных спектров, в том числе с завалом в области низких частот.

** В частности, на этом примере удается проследить аналитически переход от равновесных к степенным спектрам колмогоровского типа по мере роста потока.

$$N(\nu) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4(\bar{\nu}/\nu)^4} - 1\right] \qquad (T = 0), \tag{3}$$

которое следует из (1) при $T \to 0$. Распределение нормируемо, так что полное число фотонов $\tilde{N}$ равно $\tilde{N} = 8\pi c^{-3}\int d\nu\nu^2 N(\nu) = 8\pi\bar{\nu}^3/3\sqrt{2\pi c^3}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. Интенсивность $I(\nu)$ достигает максимума при $\nu = \sqrt{2/\sqrt{3}}\,\bar{\nu}$, соответствующего $N = \frac{1}{2}$. Изменение индекса, приведшее к «завалу» в области низких частот, связано с переходом от спонтанного рассеяния при $N \ll 1$ ($\nu \gg \bar{\nu}$) к индуцированному при $N \gg 1$ ($\nu \ll \bar{\nu}$).

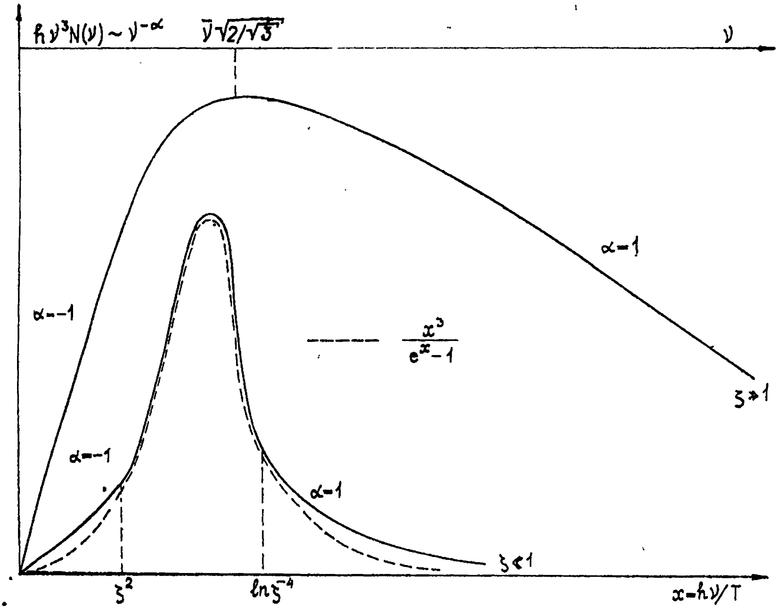

Рис. 1.

Поскольку рассеяние сохраняет число фотонов, общее стационарное решение уравнения (1) содержит две константы интегрирования: поток и аналог химпотенциала. Частичное равновесие фотонов описывается распределением Бозе—Эйнштейна [2]. В низкочастотной области, где преобладают индуцированные процессы ($N^2 \gg N$), уравнение (1) переходит в специальное уравнение Рикатти $\frac{\partial N}{\partial x} + N^2 = (\zeta/x)^4$ и интегрируется в конечном виде. Его решение

$$N(x) = \frac{1}{x}\left[1 - z\,\mathrm{cth}\,(z - \lambda)\right], \quad z = \frac{\zeta^2}{x}, \quad \lambda = \frac{\zeta^2}{\mu} \tag{4}$$

является обобщением распределения Рэлея—Джинса на случай произвольных потоков. Здесь μT переходит в химпотенциал при $\zeta \to 0$ (при этом $N(x) \to (x-\mu)^{-1}$). В области самых малых частот $\nu \sim \hbar\bar{\nu}^2/T$ решение (4) для $\mu < 0$, достигая максимума, круто спадает с уменьшением частоты и меняет знак при $x \approx \zeta^2$. В этой области $N(\nu)$ становится быстро меняющейся функцией и дифференциальное приближение (1) для описания рассеяния уже неприменимо. «Отсекание» рэлей-джинсовского распределения описывается решением $N(\nu) = \frac{T}{\hbar\nu} - \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu}\right)^2$, что соответствует асимптотике (4) при $\lambda \to -\infty$ ($\mu \to -0$).

При малых потоках $\zeta \ll 1$ общее решение строится для всех частот. В широкой области $x - \mu \sim 1$ решение

$$N(x) = \frac{1}{e^{x-\mu} - 1} + \int\limits_{a(\mu,\zeta)}^{x} dy \left(\frac{\zeta}{y}\right)^4 \frac{\mathrm{sh}^2\frac{y-\mu}{2}}{\mathrm{sh}^2\frac{x-\mu}{2}}, \qquad a(\mu,\zeta) = \begin{cases} \mu, & |\mu| \gg \zeta^2 \\ \zeta^2\,\mathrm{sgn}\,\mu, & |\mu| \ll \zeta^2 \end{cases} \tag{5}$$

близко к бозе-распределению, выходит на степенную асимптотику $(\zeta/x)^4$ при $x \to \infty$ и сшивается с (4) при малых x. (Для $\mu < 0$ интеграл в (8) несобственный и понимается как результат формального интегрирования.)

Заметим, что степенные распределения, соответствующие постоянству потока, могут быть получены в условиях однородности и изотропии и непосредственно из интегрального кинетического уравнения (ср. [5—7]). При преобладании индуцированного рассеяния

$$\dot{N}_k = \int dk' \, u_{kk'} \, f_{kk'}, \tag{6}$$

где $u_{kk'} = \int dp dp' \, w_{kp|k'p'} \left(n^0_{p'} - n^0_p \right)$ — усредненная с электронным распределением n^0_p вероятность перехода, $w_{kp|k'p'} = u_{kp|k'p'} \, \delta(k + p - k' - p') \, \delta(\omega + \varepsilon - \omega' - \varepsilon')$, а $f_{kk'} = N_k N_{k'}$ — однородная комбинация функций распределения фотонов; $u_{kk'}$ обладает свойствами симметрии относительно перестановок индексов, поворота g и растяжения λ:

$$u_{kk'} = u_{k'k}, \quad u_{gk,\, gk'} = u_{kk'}, \quad u_{\lambda k,\, \lambda k'} = \lambda^{-2} u_{kk'}. \tag{7}$$

Изотропия $u_{kk'}$ предполагает изотропию n^0_p, а однородность возникает в условиях k, $k' \ll p$, $p' \ll mc$, когда

$$u_{kk'} = \int dp \, u_{kp|k'p} \, \delta(\omega - \omega' - v(k - k')) \, \frac{\partial n^0_p}{\partial p} (k - k'),$$

$$u_{kp|k'p'} = r_e^2 (2\omega\omega')^{-1} \left[1 + \left(\frac{kk'}{kk'} \right)^2 \right].$$

Преобразование инверсии k' относительно k [6, 7] $\left(\text{замена переменной } k' \to G^2 k', \text{ где } G = \lambda g \text{ при } \lambda = \frac{k}{k'} \right)$ для степенного распределения $N_k = k^s$ факторизует интеграл столкновений и приводит его к виду

$$\dot{N}_k = \frac{1}{2} \int dk' \, u_{kk'} \, N_k N_{k'} \left[1 - \left(\frac{k}{k'} \right)^{4+2s} \right], \tag{8}$$

откуда следует стационарное решение с $s = -2$, $N_k = k^{-2}$. При спонтанном рассеянии для $T \ll h\nu$ $f_{kk'} = \frac{1}{2}(N_k + N_{k'})$, что приводит к спектру $N_k = k^{-4}$. При $T \gg h\nu$ $f_{kk'} = T(N_k - N_{k'})/(\omega_k - \omega_{k'})$, откуда следует спектр $N_k = k^{-3}$ [4], соответствующий потоку в сторону больших частот. Рассмотренный подход весьма эффективен в теории (слабой) турбулентности [5—7], где, как правило, невозможно перейти к уравнению типа Фоккера—Планка. В этой связи рассмотренный пример решения уравнения Компанейца интересен и для теории турбулентности, так как наглядно демонстрирует, как степенные асимптотики входят в полное решение, образуя в целом нормируемое распределение.

Авторы признательны С. Я. Брауде, И. М. Лифшицу, С. А. Каплану, С. С Моисееву, Л. А. Назаренко, В. Е. Новикову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Компанеец, ЖЭТФ, **31**, вып. 5, 876 (1956).
2. Я. Б. Зельдович, УФН, **115**, вып. 2, 161 (1975).
3. Р. А. Сюняев, Астрон. ж., **48**, вып. 2, 244 (1971).
4. А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев, Астрон. ж., **49**, вып. 1, 58 (1972); **51**, вып. 4, 698 (1974).
5. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **62**, вып. 5, 1745 (1972)
6. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 4, 511 (1974).
7. В. И. Боцман, А. В. Кац, В. М. Конторович, Докл. АН СССР, **220**, вып. 5, 1053 (1975).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
13 сентября 1976 г.