

УДК 621.372.821

## ИЗЛУЧЕНИЕ ТЕМ-ВОЛНЫ ИЗ КООКСИАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА С БЕСКОНЕЧНЫМ ФЛАНЦЕМ

С. М. Журав

Рассматривается задача об излучении ТЕМ-волны из коаксиального волновода с бесконечным фланцем и толстым внутренним проводником, обрывающимся в плоскости фланца. Решение на основе метода Винера—Хопфа—Фока сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Приведены численные результаты, полученные для усеченной системы уравнений.

Как известно, задача об излучении из коаксиального волновода, образованного соосными круглыми проводниками — бесконечным внутренним и исчезающе тонким полубесконечным внешним, — может быть решена точно методом Винера—Хопфа—Фока [1]. В случае полубесконечного внутреннего проводника задача не имеет точного решения. Для получения приближенных дифракционных характеристик использовались вариационный метод [2] и метод Гюйгенса—Кирхгофа [3]. В настоящей работе получено решение задачи об излучении ТЕМ-волны из коаксиального волновода с бесконечным фланцем и толстым внутренним проводником, обрывающимся в плоскости фланца. Способ решения, аналогичный примененному в [4], где рассматривалось излучение из плоского волновода с бесконечным фланцем, является обобщением способа Джонса, развитого при решении задачи о дифракции на толстой плоскости [5].

Пусть на открытый конец полубесконечного коаксиального волновода, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ ,

образованного идеально проводящими проводниками с радиусами  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), с идеально проводящими фланцами (рис. 1), набегает волна  $E_{00}$  (ТЕМ). Решение будем строить в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , относительно компоненты  $H_{\varphi}(r, z)$ . Внутри волновода поле представим в виде разложения по собственным волнам  $E_{0n}$ :

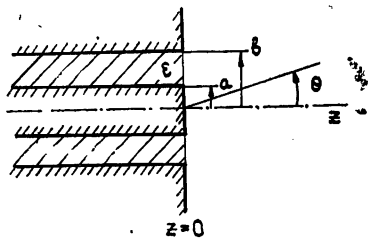


Рис. 1.

$$H_{\varphi} = \frac{A}{r} e^{ihz} + \frac{A_0}{r} e^{-ihz} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[ N_0(\zeta_n) J_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right) - J_0(\zeta_n) N_1\left(\zeta_n \frac{r}{a}\right) \right] e^{-i\hat{\alpha}_n z}, \quad (1)$$

где  $\hat{\alpha}_n = \left[ \epsilon k^2 - \frac{\zeta_n^2}{a^2} \right]^{1/2}$  — константы распространения собственных волн,

$\hat{\alpha}_0 = \alpha_0$ ,  $\zeta_0 = 0$ , а при  $n \geq 1$   $\zeta_n$  определяются из дисперсионного уравнения

$J_0(\zeta) N_0(\Delta \zeta) - J_0(\Delta \zeta) N_0(\zeta) = 0$ , где  $\Delta = b/a$  (зависимость от времени  $\exp(-i \omega t)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ). Первый член в этом разложении соответствует полю набегающей волны, второй — отраженной.

В правом полупространстве ( $z > 0$ ) введем одностороннее фурье-преобразование излученного поля:

$$\varphi_+(r, \alpha) = \int_0^{\infty} H_{\varphi}(r, z) e^{i\alpha z} dz.$$

Индексы + и — далее будут присваиваться функциям, регулярным соответственно в верхней ( $\text{Im}(\alpha) > 0$ ) и нижней ( $\text{Im}(\alpha) < 0$ ) полуплоскостях комплексной переменной  $\alpha$ .

Разбивая правое полупространство на три области — 1)  $r < a$ ; 2)  $a < r < b$ ; 3)  $r > b$ , — выпишем в каждой из них решение волнового уравнения относительно  $\varphi_+(r, \alpha)$ . Подставляя в решения и в их производные по  $r$  значения  $r = a, b$  и следуя стандартной процедуре метода Винера—Хопфа—Фока [4, 5], приходим к системе функциональных уравнений

$$\psi_+(b, \alpha) + \psi_+(b, -\alpha) = \frac{\pi b}{\varepsilon} \left[ h(A - A_0) F_0(\alpha) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_n a}{\zeta_n} A_n F_n(\alpha) \right], \quad (2)$$

$$\psi_+(a, \alpha) + \psi_+(a, -\alpha) = \frac{\pi a}{\varepsilon} \left[ h(A - A_0) G_0(\alpha) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\alpha}_n a}{\zeta_n} A_n G_n(\alpha) \right],$$

где введена новая неизвестная функция,  $\psi_+$ , пропорциональная фурье-преобразованию компоненты поля  $E_z$ ,

$$\psi_+(r, \alpha) = \varphi_+(r, \alpha) + r \frac{\partial}{\partial r} \varphi_+(r, \alpha) \quad \text{при } r = a, b,$$

$$F_n(\alpha) = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 - \alpha_n^2} H_0^{(1)}(i \gamma b) [J_0(i \gamma a) - \nu_n J_0(i \gamma b)], \quad (3)$$

$$G_n(\alpha) = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 - \alpha_n^2} J_0(i \gamma a) [H_0^{(1)}(i \gamma a) - \nu_n H_0^{(1)}(i \gamma b)],$$

$$\nu_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ J_0(\zeta_n)/J_0(\Delta \zeta_n) & \text{при } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\alpha_n = \left[ k^2 - \frac{\zeta_n^2}{a^2} \right]^{1/2}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \text{Re}(\gamma) > 0.$$

Решение уравнений (2), т. е. выражения, определяющие функции

$\psi_+(b, \alpha)$  и  $\psi_+(a, \alpha)$  через коэффициенты  $A_n$ ; так же как и в работе [4], легко находится после представления функций (3) в виде

$$H_n(\alpha) = H_{n+}(\alpha) + H_{n-}(\alpha), \quad \text{где } H_{n+}(\alpha) = \frac{1}{2} [H_n(\alpha) + \hat{H}_n(\alpha)] \quad (H_n = F_n, G_n;$$

$$\hat{H}_n = \hat{F}_n, \hat{G}_n), \quad \text{причем}$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \hat{F}_n(\alpha) \\ \hat{G}_n(\alpha) \end{array} \right] &= \frac{2i\alpha a}{\pi} \left\{ \int_0^{ka} v^2 \left[ \begin{array}{c} J_0(\Delta v) \\ J_0(v) \end{array} \right] \frac{J_0(v) - v_n J_0(\Delta v)}{(v^2 - \zeta_n^2)(v^2 + a^2 \gamma^2)} dx - i \times \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty u^2 \left[ \begin{array}{c} J_0(\Delta u) \\ J_0(u) \end{array} \right] \frac{J_0(u) - v_n J_0(\Delta u)}{(u^2 - \zeta_n^2)(u^2 + a^2 \gamma^2)} dy \right\}, \quad v = \sqrt{k^2 a^2 - x^2}, \\ &u = \sqrt{k^2 a^2 + y^2}. \end{aligned}$$

При выводе уравнений (2) фурье-амплитуды  $\varphi_+(a, \alpha)$  и  $\varphi_+(b, \alpha)$  были выражены через  $\psi_+(a, \alpha)$ ,  $\psi_+(b, \alpha)$  и коэффициенты разложения  $A_n$ . Функции  $\varphi_+(a, \alpha)$  и  $\varphi_+(b, \alpha)$  регулярны в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\alpha$ , поэтому выражения, определяющие их, не должны иметь особенностей при  $\text{Im}(\alpha) > 0$ . Это требование приводит к следующим соотношениям:

$$\psi_+(a, k) - \frac{1}{\Delta} \psi_+(b, k) = \varepsilon a \left[ \left( k - \frac{h}{\varepsilon} \right) A + \left( k + \frac{h}{\varepsilon} \right) A_0 \right] \ln \Delta,$$

$$\psi_+(a, \alpha_m) - \frac{v_m}{\Delta} \psi_+(b, \alpha_m) = \frac{ia^2}{\pi \zeta_m} (v_m^2 - 1) \left( \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\varepsilon} \right) A_m \quad \text{при } m \geq 1.$$

Подставляя в эти соотношения решения уравнений (2), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд собственных волн  $A_n$  (1):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \varepsilon \frac{A_0}{a} \ln \Delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n a}{\zeta_n} [X_{n0} - iY_{n0}] A_n = -\frac{\pi}{2} \varepsilon \frac{A}{a} \ln \Delta + \\ + \frac{\pi}{2} h [X_{00} - iY_{00}] (A - A_0), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2\zeta_m} (v_m^2 - 1) A_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n a}{\zeta_n} [X_{nm} - iY_{nm}] A_n = \\ = \frac{\pi}{2} h [X_{0m} - iY_{0m}] (A - A_0) \end{aligned}$$

при  $m = 1, 2, 3, \dots$  Здесь

$$X_{nm} = X_{mn} = \int_0^{ka} \frac{J_0(v) - v_n J_0(\Delta v)}{v^2 - \zeta_n^2} \frac{J_0(v) - v_m J_0(\Delta v)}{v^2 - \zeta_m^2} v^2 dx, \quad (5)$$

$$Y_{nm} = Y_{mn} = \int_0^\infty \frac{J_0(u) - v_n J_0(\Delta u)}{u^2 - \zeta_n^2} \frac{J_0(u) - v_m J_0(\Delta u)}{u^2 - \zeta_m^2} u^2 dy.$$

Система (4) решалась приближенно методом редукции, при этом величины  $X_{nm}$  и  $Y_{nm}$  находились численным интегрированием.

Характеристика излучения в дальней зоне определяется выражением

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta) = \frac{c}{8\pi} |H_\varphi|^2 R^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{\varepsilon^2} \left| \frac{J_0(\omega) - J_0(\Delta\omega)}{\omega} h(A - A_0) + \right. \\ \left. + \frac{2\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\alpha_n a}{\zeta_n} \frac{J_0(\omega) - \alpha_n J_0(\Delta\omega)}{\zeta_n^2 - \omega^2} \right|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega = ka \sin \theta$ ,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\theta = \text{arctg} \frac{r-b}{z}$ . Для

сравнения приведем характеристику излучения, полученную методом Гюйгенса—Кирхгофа [6] в предположении, что поле в раскрыве совпадает с падающим и  $\varepsilon = 1$ :

$$\Sigma_{\text{ГК}}(\theta) = \frac{c\pi}{8} A^2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{J_0(ka \sin \theta) - J_0(kb \sin \theta)}{\sin \theta} \right]^2. \quad (7)$$

При решении системы (4) проверялось выполнение асимптотической оценки

$$A_n \sim n^{-\tau} \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ где } \tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \frac{1 + 2\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} \right]^{1/2}$$

и удовлетворение соотношению энергетического баланса. Примеры численных расчетов даны на рис. 2, 3. На рис. 2 представлены модуль а) и фаза б) коэффициента отражения  $A_0$  волны ТЕМ, полученного расчетом системы с десятью неизвестными, как функции отношения  $a/b = 1/\Delta$ . Величины  $kb$  (значения  $kb = 4; 2; 1; 0,5$  указаны возле кривых) и  $\varepsilon$  выбраны в качестве параметров. Величина  $\varepsilon$  полагалась равной 1; 2, 5; 0,5, а соответствующие этим значениям кривые, так же как и на рис. 3, наносились соответственно сплошной, прерывистой и штрихпунктирной линиями. Точность расчетов проверялась увеличением числа неизвестных в усеченной системе. Оказалось, что при  $kb = 4$  значения  $A_0$ , полученные расчетом систем с пятью и десятью неизвестными, с графической точностью совпадают. При  $kb = 0,5$  кривые, соответствующие  $|A_0|$ , на графике отсутствуют, так как в этом случае  $|A_0|$  практически не зависит от отношения  $a/b$  и принимает значения, близкие к единице: 0,996 ( $\varepsilon = 1$ ); 0,998 (2,5); 0,995 (0,5). При  $kb = 4$ ,  $\varepsilon = 1; 2,5$  и отношении  $a/b$ , меньшем критического значения, волна  $E_{01}$  является распространяющейся. При прохождении критического значения  $a/b$  кривые, соответствующие  $\varepsilon = 1$ , имеют небольшой излом; в случае  $\varepsilon = 2,5$  такой излом незаметен. Из рисунка следует, что при  $a/b \rightarrow 1$   $A_0 \rightarrow -1$ . При малых значениях отношения  $a/b$  решение усложняется, так как подынтегральные функции в (5) становятся быстро осциллирующими.

На рис. 3 представлены нормированные на единицу точные (6) и приближенные (7) (кривые, помеченные знаком  $\cdot$ ) характеристики излучения в зависимости от угла  $\theta$ . Величины  $kb$ ,  $\varepsilon$  и  $a/b$  ( $a/b = 0,1; 0,5; 0,9$ ) выбраны в качестве параметров, и их значения указаны на рисунке. При  $kb = 1; 2$  и  $kb = 4$ ,  $a/b = 0,9$  кривые, соответствующие  $\varepsilon = 1; 2,5; 0,5$ , с графической точностью совпадают.

В заключение отметим, что излучение из коаксиального волновода с бесконечным фланцем других симметричных электрических или магнитных волн может быть исследовано аналогично.

Автор благодарит Г. В. Воскресенского за внимание к работе и обсуждение результатов.

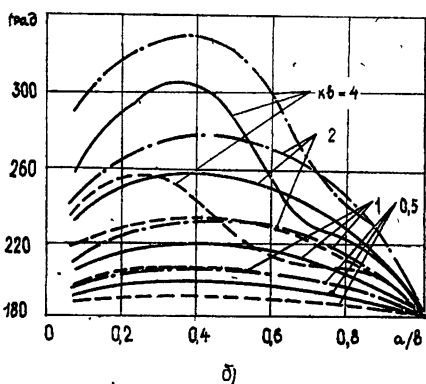
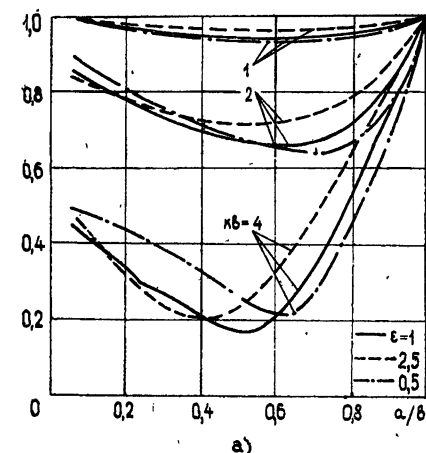


Рис. 2.

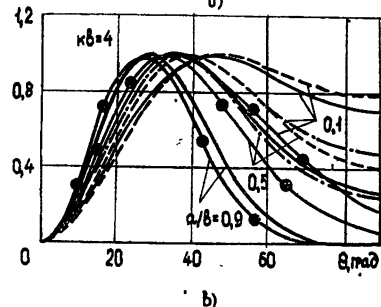
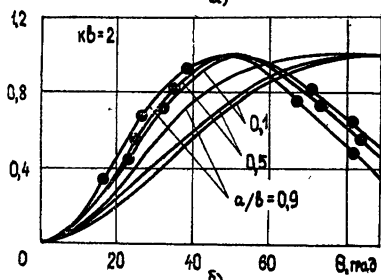
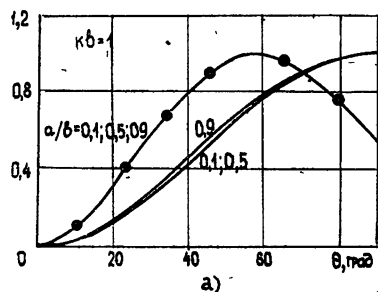


Рис. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Справочник по волноводам (под ред. Я. Н. Фельда), изд. Сов. радио, М., 1953.
3. С. М. Журав, в сб. Антенны (под ред. А. А. Писолькорса), Связьиздат, вып. 17, 53 (1973).
4. Г. В. Воскресенский, С. М. Журав, Радиотехника и электроника, 20, № 7, 1390 (1976).
5. Б. Нобл, Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 июля 1976 г.

TEM-WAVE RADIATION FROM A COAXIAL WAVEGUIDE  
WITH AN INFINITE FLANGE

S. M. Zhurav

The problem of radiation of a TEM-wave from a coaxial waveguide with an infinite flange and thick internal conductor broken in the flange plane is considered. The solution based upon the Winer—Hopf—Fok method is reduced to the solution of an infinite set of linear algebraic equations. The numerical results obtained for a out-off system of equations are given.